TRATADO ELEMENTAL

DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M.

PARA USO DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL REAL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO,

POR D. JOSEF MARIANO VALLEJO,

Catedrático que fue de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Real Seminario, Individuo de varios Establecimientos científicos, y Bibliotecario de la Real Sociedad Económica Matritense.

TOMO III. PARTE PRIMERA,

Que contiene la Mecánica dividida en sus cuatro tratados de Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica.

VALENCIA:
EN LA IMPRENTA DE ESTÉVAN,
AÑO 1817.

AL REY NUESTRO SEÑOR.

SEÑOR:

Habiéndose dignado V. M. permitirme que le dedicase el Compendio de Mecánica Práctica, que escribí para uso de los niños, artistas y artesanos, presento ahora á V. M. otra obra en que se esplica *por principios esta ciencia con el rigor, órden, exactitud y claridad que exigen los adelantamientos que se han hecho hasta el dia en las ciencias exactas: rogando á V. M. tenga á bien dispensarme igual gracia.*

Dios guarde la importante vida de V. M. muchos años. Madrid á 16 de Abril de 1817.

SEÑOR:

Á L. R. P. D. V. M.

Josef Mariano Vallejo.

PRÓLOGO.

En los prólogos de los dos primeros tomos de esta obra he presentado la serie cronológica de todos los hechos que han tenido relacion con su composicion, impresion y publicacion; por lo que voy á dar razon ahora de lo perteneciente á este volúmen.

Cuando ocurrieron los memorables acontecimientos del año de 1808, me hallaba escribiendo en borrador la Estática. Las circunstancias estraordinarias que sobrevinieron despues y mi emigracion á Sevilla donde se hallaba la Junta Central, me impidieron el continuar este trabajo. La escasez de libros que se notaba en los parages que estaban libres de enemigos, por donde pudiesen estudiar por principios su profesion los jóvenes que con un entusiasmo sin igual tomaban la carrera militar para sostener la justa causa que defendíamos, me obligó á no pensar en otra cosa que en allanar las dificultades para la impresion de los tomos que ya están publicados. Trasladado á Madrid, volví á emprender mi trabajo; y como en este intermedio se habian publicado en Europa varias obras de Mecánica que yo no podia haber tenido presentes, tuve que suspenderlo hasta llegar á adquirir dichas obras, á saber: la edicion cuarta de la *Mecánica de Francoeur*, la segunda de la *Mecánica Analítica de Lagrange*, las *Mecánicas de Poisson* y de *Bouchar-lat*, que son nuevas; las *Lecciones de Estática de Garnier* y de *Poinsot*; y la tercera edicion de la *Mecánica de Grégori*; pues continuando con el mismo plan con que empecé dicha obra, debia presentar en ella la parte elemental de la Mecánica en el estado de adelantamiento que se hallaba al presente esta ciencia en Europa. Este ha sido el motivo de haberse retrasado tanto la publicacion de este volúmen, cuyas figuras están delineadas en la mayor parte por uno de los mas sobresalientes discípulos (*) que yo he tenido,

(*) Este era el Escmo. Sr. D. Francisco Alvarez de Toledo y Palafox, Duque de Fernandina, hijo primogénito de los Escmos. Sres. Marqueses de Villafranca. El público está instruido ya de la terrible enfermedad de gota que sufrió, de la constancia y resignacion con que la pasó, de las virtudes que durante ella manifestó, y no habrá aun olvidado aquella heróica paciencia, aquella sublime filosofía que arrebató la admiracion de cuantos le rodeaban en los últimos dias de su vida, y que ha dado orígen á que nuestros célebres poetas la hayan tomado por asunto digno de sus bien meditadas composiciones. Pero quizá no faltará quien crea que en esto ha tenido parte la exageracion por los respetos debidos á su familia, y por haber tambien intery cuya pérdida ha sido muy sensible para todos los amantes del bien público que le conocieron.

---

venido las licencias é imágenes poéticas; por lo que no será inoportuno, ya que cooperó durante su enfermedad para la composicion de esta obra, el desvanecer semejante sospecha, pues á mí me constan todos los hechos por haber estado á mi cargo su instruccion científica. En efecto, no pudiendo ocultarse á sus padres las buenas disposiciones de que estaba dotado este apreciable jóven, aun en medio de las aflicciones y amarguras que los rodeaban por las circunstancias pasadas, no perdonaron cuidado ni fatiga para procurarle una estensa y sólida educacion, propia de la clase á que pertenecia; y este fue el motivo porque me confirieron en Cádiz su instruccion en las Matemáticas y en la Fortificacion. Conocian que á un talento tan estraordinario como el suyo, debian ofrecerle desde luego objetos grandes y nobles en que pudiese desplegar todas las fuerzas de su singular penetracion. Así es, que á la edad de 16 años en que fue acometido de tan cruel enfermedad se hallaba impuesto en la Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría rectilinea y esférica, Aplicacion del Algebra á la Geometría, Secciones cónicas, Funciones, Series, y Cálculo diferencial é integral. Querer describir la facilidad con que vencia las mayores dificultades, las justas consecuencias que deducia de las teorías mas sublimes y complicadas, y la destreza que habia adquirido en los mas importantes problemas, seria acaso empresa superior á mis fuerzas. No ignoraba mi ilustre discípulo que por razon de su nacimiento era acreedor á la estimacion pública; pero era tal su grandeza de alma que queria adquirirla por sus méritos personales. Con esta mira se propuso entrar en el número de los defensores de su Rey y de su Patria; para cuyo fin se dedicó bajo mi direccion al estudio de la Fortificacion, Ataque y Defensa de las plazas, y á los principios de la Física y de la Geografía; porque se llegó á persuadir de que sin estos conocimientos no podia llegar á poseer con perfeccion los diversos ramos del arte militar. No por esto dejó de adquirir tambien todos aquellos conocimientos propios de un caballero bien educado: consumia parte del tiempo en el estudio de las lenguas, de la esgrima, de la equitacion y delineacion, y todo lo hacia de un modo científico, reduciéndolo en cuanto era posible á la demostracion.

De esta manera adquirió tal costumbre y aficion al estudio que en los momentos en que los crueles dolores de gota no le molestaban tanto, se entretenia en delinear algunas cosas útiles, como almacenes de pólvora, puentes de barcas &c. Esta sencilla ocupacion con que daba algun alivio á ratos pesados, me dió márgen á que le manifestase la necesidad que yo tenia de emprender la delineacion de las figuras de este volúmen. No fue necesario mas para que se ofreciese muy gustoso á desempeñar por sí este género de trabajo; y en efecto, egecutó la mayor parte de las figuras de la Estática con toda la exactitud y limpieza que se requiere; y hubiera hecho otro tanto con las restantes si no hubiera terminado la corta carrera de sus dias en 31 de Enero de 1816. La pérdida de un jóven de tan bellas esperanzas no podrá recordarla sin dolor el que conozca el influjo que puede tener en la prosperidad de una Nacion una persona de su clase, que á su fortuna y grandeza de familia, reunia un talento singular, unos conocimientos nada vulgares, y un entusiasmo particular hácia todo lo que directa ó indirectamente podia cooperar á fomentar la prosperidad del reino.

En cuanto al órden que he seguido en la composicion de este volúmen, solo tengo que añadir, que consiguiente al plan que me propuse, he procurado siempre conciliar la *claridad*, *sencillez*, *facilidad en las operaciones y la exactitud*, del modo que fuese mas útil y conveniente. Por esta razon en la Hidrodinámica, siendo mas fácil el obtener los resultados útiles en la práctica por consideraciones particulares que el deducirlos de las ecuaciones generales, he preferido el tratarlo de este modo mas fácil, aunque no tan elegante; y despues de haber hecho las modificaciones convenientes para que concuerden los resultados teóricos con los prácticos, se ponen las ecuaciones generales del movimiento de los fluidos.

Como ha mediado tanto tiempo entre el principiar esta obra y concluirla, he variado repetidas veces de plan. Siempre habia pensado el publicar en un tomo separado las principales aplicaciones que se hacen de las Matemáticas á la Arquitectura civil, militar é hidráulica, y presentar reunidos el mayor número de datos que son útiles en las artes; pero habiéndoseme indicado por parte del Escmo. Sr. D. Joaquin Blake, Capitan General de los Reales Egércitos, y Director del Real Cuerpo de Ingenieros, que seria muy conveniente que tratase en mi Mecánica de algunas de las aplicaciones mas interesantes en la Arquitectura militar (pues haciéndome el honor de que en la Real Academia de Ingenieros de Alcalá se estudie por mi obra, es mas fácil para los discípulos el entender los tratados cuando en todos se observa el mismo sistema) por esta causa pensé desde luego en incluirlas en este volúmen; pero atendiendo á que saldria demasiado grande, y á que se retrasaria su publicacion con perjuicio acaso de los mismos jóvenes que se hallan estudiando en la espresada Academia de Ingenieros y que van á principiar la Mecánica, he determinado por último el publicar por ahora solo la Mecánica, dejando para despues el dar á luz por separado las mencionadas aplicaciones en un volúmen que se imprimirá á la mayor brevedad y ántes del que debe contener la Óptica, Astronomía y demas tratados físico-matemáticos.

ADVERTENCIA.

Del mismo modo que en los volúmenes anteriores, he puesto aquí entre corchetes { } aquellos puntos que no son tan de absoluta necesidad, para que pueda omitir su estudio el que no trate de profundizar demasiado.

ÍNDICE

de las materias contenidas en este volúmen.

DINAMICA.

Del movimiento rectilineo de un punto material.

HIDROSTÁTICA.

CATÁLOGO DE LAS OBRAS DEL AUTOR.

	Precios.
Tratado elemental de Matemáticas, 5 volúmenes en 4.°, á saber:	
Tomo I. parte 1.ª Aritmética y Álgebra.	30 rs.
Tomo I. parte 2.ª Geometría, Trigonometría rectilinea y Geometría Práctica.	30
Tomo II. parte 1.ª Trigonometría Esférica, Aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones Cónicas y Teoría general de las ecuaciones.	30
Tomo II. parte 2.ª Funciones, Series, y los cálculos Diferencial é Integral, con sus aplicaciones.	30
Tomo III. parte 1.ª Mecánica, dividida en sus cuatro tratados, á saber, Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica.	30
Aritmética de niños para uso de las escuelas del Reino, &c. .	4
Id. en pasta.	6
Memoria sobre la Curvatura de las lineas, &c.	14
Tabla Sinóptica del arte militar.	6
Compendio de Mecánica Práctica para uso de los niños, artistas y artesanos &c., con el modo de construir la curva que trazaban las granadas arrojadas por los franceses en el sitio de Cádiz: donde se presenta el plano de esta plaza y la posicion de las baterías y campamentos del egército sitiador. . .	14
Este mismo plano suelto, iluminado.	6
Disertacion sobre el modo de perfeccionar la Agricultura, &c.	4
Id. en papel vitela.	6

Se hallarán en Madrid en las librerías de Castillo, Sojo, Gomez y Orea; en Cádiz en las de Castillo, Pajáres y Hortal; en Valencia en la de Gil; en Sevilla en las de Aragon y Compañía y en la de Berard; en Granada en la de Sanz; y en Barcelona en la de Dorca y en la de Piferrer.

Circular del Consejo de Indias recomendando el Tratado elemental de Matemáticas.

EL REY=Por mi Consejo de Castilla se circuló á las universidades literarias de la Península y á los estudios Reales de S. Isidro de la Corte, con fecha once de Octubre de mil ochocientos quince, la siguiente:

»Con Real órden de ocho de Octubre del año próximo se remitió á consulta del Consejo el Tratado elemental de Matemáticas que habia presentado su autor D. Josef Mariano Vallejo, con representacion en que solicitaba que llevándose á efecto una órden de la Regencia del mes de Agosto de mil ochocientos diez, se adoptase dicha obra por testo en las universidades y colegios de España é Indias. Pedido informe á las universidades mayores del Reino, informaron lo que tuvieron por conveniente, conviniendo las tres en que la obra es de mucho mérito por su método, claridad y escelentes ideas. Y visto por el Consejo, con lo espuesto por los Señores Fiscales, teniendo presente que en virtud del Real decreto de primero de Febrero de este año se trata en el dia de formar un plan general de estudios, y se halla nombrada al efecto una junta de varios Señores Ministros, hizo presente á S. M. su dictámen en consulta de veinte y ocho de Setiembre próximo; y conformándose con él, se ha servido acordar se deje á las universidades en la libertad de adoptar el tratado de Vallejo desde luego, si quieren, aunque solo por ahora, y sin perjuicio de lo que S. M. se digne resolver en vista del plan de estudios que le proponga la junta de Ministros creada con este objeto. Publicada en el Consejo la antecedente Real resolucion, ha acordado su cumplimiento, y que se comuniquen las correspondientes á las universidades del Reino para su inteligencia y observancia en la parte que les corresponda."

Habiendo ocurrido el mismo autor á mi Supremo Consejo de las Indias en solicitud de que la circular inserta se comunicase en los términos que tuviese á bien á las universidades, colegios y demas establecimientos científicos de esos dominios, acordó, conforme al parecer de mis Fiscales, acceder á su instancia. En consecuencia, ordeno á mis Vireyes y Capitanes Generales con mando superior en ambas Américas, sus Islas Adyacentes y de Filipinas, circulen á las universidades, colegios y demas establecimientos científicos de sus respectivos distritos la órden inserta, para que si les acomodase puedan usar de una obra que tiene á su favor una calificacion tan recomendable, sin perjuicio de lo que se determine en este punto para lo sucesivo. Fecha en Madrid á primero de Abril de mil ochocientos diez y seis.=YO EL REY=&c.

ERRATAS.

Pág.	Lin.	Dice.	Debe decir.
5	24	$R+Q+H>P+Q+K$,	$P+Q+H>P+Q+K$,
ib.	40	$R'=P+Q$	$R'=P+Q'$
6	6	á Q tal	á Q' tal
ib.	8	$Q<Q$	$Q'<Q$
8	20	aplicada en P	aplicada en Q
11	7	(12) á una	(14) á una
22	4	φ.a	$\varphi.\alpha$
24	11	punto r,	punto n
33	5	$(-4{,}2674^2)$	$(-4{,}2674)^2$
35	34	sea R la resultante de las fuerzas P, P', &c.	sea R' la resultante de las fuerzas P', P'', &c.
37	2.º renglon de la nota	$\frac{BE}{mE}$	$\frac{FE}{mE}$
39	34	(I. 376 cor. 2.º)	(I. 361)
43	1	(ecs. 59 y 60)	que se deducen de las (ecs. 59 y 60)
45	18	(fig. 39)	(fig. 36)
46	3	recta mn'	mm'
52	23	$\frac{Cp}{Cm}=\frac{r}{c'}$	$\frac{Cr}{Cm}=\frac{r}{c}$
53	7	(ec. 84)	(ec. 85)
ib.	33	su puesto	su opuesto
55	9	*de las dichas*	*de dichas*
67	26	de las fuerzas,	de la resultante,
95	(ec. 224)	$x+v'$	$v+v'$
113	20	vidido	vidida
114	34	KG″ y kg''	HG″ y hg''
ib.	ib.	plano SKG″,	plano SHG″
126	21	$C=b\log.(a-\sqrt{a^2-b^2})$,	$C=-b\log.(a-\sqrt{a^2-b^2})$
140	21	A da n vueltas,	A da N vueltas,
171	13	que una ecuacion	que en una ecuacion
211	últ.	máximo	mínimo
225	13	de u cuando	de v cuando
273	7	(635)	(636)
291	7	ae' bf'	$a'e$, $b'f$
301	28	(ec. 667)	(ec. 665)
313	20	$-\frac{k^2}{K^2}$	$-\frac{k^2}{K'^2}$

TRATADO ELEMENTAL

DE MECÁNICA.

NOCIONES PRELIMINARES.

1 Se dice que un cuerpo está en *movimiento* cuando ocupa sucesivamente diferentes partes del espacio ; y que está èn *reposo* cuando permanece constantemente en una misma parte del espacio.

2 La naturaleza no ofrece ningun egemplo de que un cuerpo (se supone inanimado) pase del estado de reposo al de movimiento, ni del de movimiento al de reposo, sin que esta mudanza no sea producida por un agente esterior ; por lo cual se admite como un hecho demostrado por la esperiencia, que *un cuerpo no puede pasar por sí mismo del reposo al movimiento, ni del movimiento al reposo.*

3 Esta proposicion se conoce con el nombre de *principio ó ley de inercia*; por ser una consecuencia de esta propiedad de la materia, por la cual á un cuerpo le es indiferente el moverse ó estarse quieto ; y se enuncia este principio ó ley de inercia del modo siguiente: *un cuerpo que está en reposo no puede por sí mismo ponerse en movimiento; y una vez puesto en movimiento, no podria por sí mismo alterar ni la direccion ni la intensidad del movimiento.*

4 Como esta proposicion es el fundamento de la ciencia que nos va á ocupar, es de la mayor importancia el que se perciba su verdad con toda evidencia; por lo cual la demostrarémos por la esperiencia y por el raciocinio.

En efecto, si sobre una mesa se coloca un cuerpo cualquiera sin imprimirle ningun movimiento, observamos que este cuerpo permanece en reposo: de lo cual tambien nos convencemos por el solo raciocinio; pues no se concibe por qué motivo este cuerpo, en caso de moverse, tomaria por sí mismo un movimiento mas bien hácia un lado que hácia otro; luego acerca de la primera parte de la proposicion va conforme la esperiencia con el raciocinio.

Lo mismo se verifica respecto de la segunda parte; porque si ponemos en movimiento al cuerpo que está sobre la mesa, la esperiencia prueba que continuará moviéndose en linea recta y sin alterar la intensidad del movimiento, á ménos que no encuentre algun obstáculo, ó se le dé algun nuevo impulso ; pues aunque en apariencia vemos que su movimiento se va debilitando por grados y acaba por lo regular aniquilándose del todo, se debe notar que esto proviene de los rozamientos, de la resistencia del aire y de otras causas. Esta segunda parte se demuestra aun con mas evidencia por el raciocinio que por la esperiencia. En efecto, el solo raciocinio nos da á conocer que si el cuerpo estuviese ya en movimiento, y se supusiese que trataba de desviarse de su primitiva direccion, no se concibe por qué motivo este desvío seria mas bien hácia la derecha que hácia la izquierda; y en cuanto á su intensidad tampoco se concibe por qué habia de disminuir mas bien que aumentar. De donde resulta que la verdad de la espresada proposicion queda demostrada de un modo incontestable.

5 Toda causa, cualquiera que sea su naturaleza, que sea capaz de imprimir movimiento á un cuerpo, ó de alterar el movimiento que ya tuviese, se llama *fuerza ó potencia*; y se llama *direccion de la fuerza* la recta que dicha fuerza obligaria á describir al punto ó cuerpo á que estuviese aplicada, si obrase por sí sola.

6 Como *un punto ó un cuerpo no puede ir por muchos caminos á un mismo tiempo*, resulta que cuando muchas fuerzas están aplicadas á un mismo tiempo á un punto ó á un cuerpo, se ha de verificar precisamente una de dos cosas: ó que *dichas fuerzas se destruyan* y *el punto ó cuerpo permanezca en reposo*, en cuyo caso se dice que dichas fuerzas se *equilibran ó están en equilibrio*; ó que *el punto ó cuerpo se mueva siguiendo una cierta direccion*, *como si obedeciese á una sola fuerza*. Al conjunto de fuerzas que obran á un mismo tiempo sobre un punto ó cuerpo se le llama *sistema de fuerzas*; y se llama *resultante ó derivada* del sistema á la fuerza única que resulta de todas las demas, las cuales entónces reciben el nombre de *componentes*.

7 Sabido ya lo que se entiende por *movimiento* y por *equilibrio*, tenemos manifestado el objeto de la *Mecánica*, que es *la ciencia que trata del movimiento y equilibrio de los cuerpos*; y como estos se pueden dividir en sólidos y fluidos (introd. pág. XV), y en cada clase de cuerpos se puede considerar su equilibrio y su movimiento, resulta que la *Mecánica* consta de los cuatro tratados siguientes: *Estática*, que trata del equilibrio de los cuerpos sólidos; *Dinámica*, que trata de su movimiento; *Hidrostática*, que trata del equilibrio de los cuerpos fluidos; é *Hidrodinámica*, que trata de su movimiento.

8 Los Geómetras han llegado á referir todas las cuestiones de Dinámica á simples cuestiones de equilibrio; por lo cual en el dia conviene esplicar ántes la Estática que la Dinámica. Y como los cuerpos se componen de puntos materiales, unidos entre sí de diversos modos en los cuerpos de especies diferentes, se consideran ante todas cosas estos puntos materiales aisladamente, y solo bajo el aspecto de que sirven de puntos de aplicacion á las fuerzas; despues se reunen para formar los cuerpos y se indagan las condiciones del equilibrio ó las leyes del movimiento en cada especie de cuerpos.

9 En una fuerza hay cuatro cosas que considerar, á saber: su *punto de aplicacion*, su *intensidad*, su *direccion* y el *sentido en que obra se-*

gun esta direccion. El punto de aplicacion se determina segun hemos manifestado (II. §§ 139 y 175) que se fija un punto, ya sea en un plano y ya en el espacio.

10 Para formarnos una idea exacta de lo que se entiende por intensidad de una fuerza, observarémos, que *cuando dos fuerzas están aplicadas en sentido contrario la una de la otra á un mismo punto, ó á los estremos de una recta inestensible, y se equilibran*, se dice que son *iguales.* Si despues de haber reconocido que dos fuerzas son iguales, se aplican ambas en la misma direccion á un mismo punto, se tendrá una fuerza *dupla* de la primitiva; si se reunen tres fuerzas iguales, resultará una fuerza *tripla*; si cuatro, *cuádrupla*; y si *m* fuerzas iguales, resultará una fuerza *múltipla*, que equivaldrá á *m* veces la primitiva. De donde se deduce que *las fuerzas son cantidades que se pueden representar por números ó por lineas, refiriéndolas á una unidad de su especie*; porque si en una cuestion se consideran muchas fuerzas que sean múltiplos dados de otra fuerza, tomando á esta por unidad, las fuerzas que se consideran se deberán representar en el cálculo por números iguales á estos múltiplos, y en las construcciones geométricas por lineas que les sean proporcionales.

Por lo regular se toma la linea que representa la intensidad de una fuerza, sobre la recta que espresa su direccion, partiendo desde su punto de aplicacion hasta el estremo en que se coloca la letra con que espresamos dicha fuerza; y siempre se supone que obra en el sentido de la primera letra con que se espresa hácia la segunda, á no ser que se advierta lo contrario.

11 Puesto que la direccion de una fuerza (5) es la recta que obligaria á describir al punto ó cuerpo á que se aplicase la fuerza, resulta que *la direccion de una fuerza* quedará determinada, ya sea sobre un plano, ya en el espacio, por los medios espresados (II. §§ 160, 182 y siguientes). Debemos advertir que en la Mecánica para fijar la posicion de las fuerzas, casi siempre se hace uso del conocimiento de los ángulos que sus direcciones forman con los eges. Y como hay que considerar muchas veces fuerzas que obran sobre un mismo punto en sentido opuesto las unas de las otras, en vez de considerar las unas como positivas, y las otras como negativas, se consideran siempre como positivas, y los signos de los cosenos dan á conocer el sentido en que obran, en virtud de lo espuesto (II. nota del § 186).

Cuando las fuerzas son paralelas entre sí, se puede suponer que el uno de los eges les sea tambien paralelo. Entónces dos de los ángulos que forman las fuerzas con los eges coordenados vienen á ser rectos; luego si suponemos $Z=\frac{1}{2}\pi$, $U=\frac{1}{2}\pi$, la (ec.6 del § 183a del Tom. II.) se reduce á $\cos.^2 X=1$; que da $X=0$, $X=\pi$.

De este modo *la direccion de una fuerza seria dada* diciendo: *que forma con el ege un ángulo nulo, ó un ángulo igual á dos rectos ó á* π; pero en este caso particular es mas sencillo determinar esta direccion por el signo de la fuerza, considerando como positivas las que obran en un sentido, y como negativas las que obran en el sentido opuesto.

Solo en el caso de las fuerzas paralelas consideraremos fuerzas positivas y fuerzas negativas: en todos los demas casos, las cantidades con que representemos las fuerzas en el cálculo serán positivas, y la variacion de signo recaerá sobre los cosenos de los ángulos que sus direcciones formen con los eges de las coordenadas.

ESTÁTICA.

Del equilibrio de un punto material.

Proposiciones generales acerca de la composicion y descomposicion de las fuerzas.

12 En la Mecánica hay que resolver con mucha frecuencia dos problemas interesantes, que son: el de la *composicion de las fuerzas*, y el de su *descomposicion.* El primero consiste *en hallar la resultante de un sistema dado de fuerzas*; y en el segundo, al contrario, *dada una fuerza se trata de hallar dos ó mas*, *cuyo efecto sea el mismo que el de la fuerza dada.* La resolucion del segundo problema se deduce de las circunstancias con que se resuelve el primero, del cual nos vamos á ocupar.

Del modo con que nos hemos formado (10) la idea de *fuerza igual*, resulta que *si dos fuerzas son iguales y se aplican á un mismo punto en sentidos contrarios*, *se equilibrarán ó destruirán*; pues esta proposicion es exactamente la recíproca de la otra.

13 Tambien se deduce que *si dos fuerzas desiguales se aplican á un mismo punto en sentidos contrarios*, *la accion sobre este punto ó la resultante de dichas fuerzas*, *es igual á su diferencia.* Porque si tenemos dos fuerzas P, Q, tales que $P=Q+K$, y se toma sobre la fuerza P una porcion igual con la fuerza Q, el efecto que produzcan sobre dicho punto estas dos fuerzas iguales con Q y directamente opuestas, será nulo (12); y solo quedará la fuerza $K=P-Q$ que obrará en el sentido de la mayor fuerza P.

14 Teor. *Si dos fuerzas* P, Q, *obran sobre un punto en la direccion de una misma recta y en el mismo sentido*, *el efecto sobre dicho punto será el mismo que el de una fuerza única igual á la suma* P+Q.

Espl. Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.° que ambas fuerzas sean *racionales ó comensurables*; 2.° que solo una de ellas lo sea; y 3.° que ninguna de las dos sea racional ó comensurable.

Dem. 1.° Supongamos que P y Q sean ambas comensurables, y que sea K la comun medida: de modo que se verifique por egemplo

$$P=mK, \text{ y } Q=nK;$$

en este caso tendrémos en el punto dado un número $m+n$ de fuerzas iguales con K, y que obran en un mismo sentido; luego la resultante será (10) igual á $(m+n)K=mK+nK=P+Q$, que era L. 1.º Q. D. D.

2.º Supongamos ahora que P sea comensurable y Q incomensurable. En este caso, espresando por Q' el valor de Q aproximado por decimales hasta el guarismo n, y por Q'' este mismo valor aumentado en una unidad decimal del órden n, tendrémos que siendo Q' y Q'' cantidades ó fuerzas comensurables, combinada cada una de estas con la fuerza P que es tambien comensurable, darán una resultante que en virtud de lo acabado de demostrar será igual á la suma de las componentes; luego si espresamos por R' la resultante de P y Q', y por R'' la de P y Q'', tendrémos $R'=P+Q'$, $R''=P+Q''$;
y señalando con h lo que le falta á Q' para convertirse en Q, y con H lo que Q'' lleva á Q, las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$R'=P+Q-h,\ R''=P+Q+H;$$

y siendo Q mayor que Q' y menor que Q'', la resultante R de las dos fuerzas P y Q deberá ser mayor que R' y menor que R''.

Ahora, si R no es igual con $P+Q$, será mayor ó menor; supongamos que $R>P+Q$, y que sea por egemplo $R=P+Q+K$;
y como por pequeña que sea K, podrémos hacer que la diferencia h entre Q' y Q, ó H entre Q y Q'', sea menor que K (I. 325 cor. 2.º); pues suponiendo que n vaya creciendo una unidad, irémos haciendo á dicha diferencia diez veces menor; y por deber ser $R''>R$, se verificará que $R+Q+H>P+Q+K$, ó $H>K$;
pero esto es un absurdo, pues acabamos de manifestar que al contrario H puede llegar á ser menor que K; luego el supuesto que nos ha conducido á él tambien es un absurdo; luego no puede ser $R>P+Q$.

Tampoco puede ser $R<P+Q$; porque si se tuviese $R+K=P+Q$, como $R'=P+Q-h$, y h puede ser menor que K, trasladando la h al primer miembro seria $R'+h=P+Q$, de donde $R'+h=R+K$;
pero debiendo ser $R'<R$, y $h<K$, será $R'+h<R+K$,
es decir, que la cantidad $R'+h$ deberia ser al mismo tiempo ***igual y menor*** que $R+K$; lo cual siendo absurdo, manifiesta que el supuesto que nos ha conducido á él tambien es absurdo; luego no se puede suponer $R<P+Q$. Luego en este segundo caso tampoco puede ser R menor ni mayor que $P+Q$; luego *le será igual*. L. 2.º Q. D. D.

3.º Si las dos fuerzas P y Q son incomensurables, y suponemos á Q' y á Q'' los mismos valores de ántes, la fuerza P incomensurable, obrando al mismo tiempo que la Q' que es comensurable, producirá por el caso anterior una resultante $R'=P+Q'$;
y obrando la misma fuerza P con la comensurable Q'', dará una resultante $R''=P+Q''$.

Ahora, si R no fuese igual con $P+Q$, seria mayor ó menor. Si se tuviese $R>P+Q$ de modo que fuese $R=P+Q+K$,
como R'' deberia ser mayor que R, por ser $Q''>Q$,

tendríamos $P+Q''>P+Q+K$, de donde $Q''-Q>K$;
lo que es absurdo, pues $Q''-Q$ puede llegar á ser menor que K; luego el supuesto que nos ha conducido á él tambien es absurdo, y por lo mismo no puede ser $R>P+Q$.

Tampoco se puede verificar $R<P+Q$; porque si $R+K=P+Q$, tomando entónces á Q' tal que se diferenciase de Q una magnitud menor que K, tendríamos que como Q' seria comensurable, daria $R'=P+Q'$; y debiendo ser $R'<R$ por ser $Q'<Q$, si llamamos h á lo que le falta á Q' para ser igual con Q, será $R'=P+Q-h$, ó $R'+h=P+Q$,
lo cual nos daria $R'+h=R+K$;
pero debiendo ser $R'<R$ y $h<K$, si sumamos estas desigualdades, tendrémos $R'+h<R+K$,
lo cual siendo absurdo, pues $R'+h$ no puede ser al mismo tiempo igual y menor que $R+K$, manifiesta que el supuesto que nos ha conducido á él tambien es absurdo; luego no se puede suponer $R<P+Q$;
y como hemos demostrado que tampoco se puede suponer $R>P+Q$,
se deberá tener $R=P+Q$ (1);
luego queda demostrada la proposicion en todas sus partes.

15 *Cor.* De aquí se deduce que *la resultante de un número cualquiera de fuerzas* P, Q, S, T, &c., *de cualquier naturaleza que sean, que obran sobre un punto en la direccion de una misma recta y en el mismo sentido, es igual á la suma* P+Q+S+T+&c.

Porque si suponemos que obran solo las dos primeras, producirán una resultante $r=P+Q$;
y suponiendo ahora que obre esta resultante y otra fuerza S, producirán una resultante $r'=r+S=P+Q+S$;
y continuando del mismo modo, y espresando por R la resultante de todas, se tendrá en general $R=P+Q+S+T+U+\&c.$ (2).

16 Teor. *Si un número cualquiera de fuerzas obran sobre un punto en la direccion de una misma recta, y en la opuesta de su prolongacion, la resultante de todas será igual á la suma de las que obran en un sentido, ménos la suma de las que obran en el sentido contrario.*

Dem. Si espresamos por P, Q, S, &c. las fuerzas que obran en un sentido, y por p, q, s, &c. las que obran en sentido contrario, tendrémos que las primeras en virtud del corolario anterior equivaldrán á una resultante $R'=P+Q+S+\&c.$, y las segundas á otra $r=p+q+s+\&c.$; luego todas las fuerzas quedarán reducidas á las dos R', r, que obrarán sobre el mismo punto en sentido contrario; por lo que (13) la resultante ó derivada de estas dos, que es la de todas y que llamarémos R, será $R=R'-r=P+Q+S+\&c.-(p+q+s+\&c.)$ (3), que espresa L. Q. D. D.

17 *Esc.* Esta proposicion se puede enunciar con mas sencillez por una consideracion particular; porque si se consideran como positivas las fuerzas que obran en un mismo sentido, y como negativas las que obran en un sentido opuesto, se puede decir que la *resultante de un número cualquiera de fuerzas que obran en la direccion de una misma recta, es*

igual á su suma, tomando aquí la palabra *suma* en el mismo sentido que se le atribuye en Álgebra.

18 Teor. *Si dos fuerzas obran sobre un móvil formando ángulo, no se pueden equilibrar.*

Espl. Sean P y Q (fig. 1.ª) dos fuerzas que obren sobre el punto m, formando el ángulo PmQ: vamos á demostrar que no puede haber equilibrio entre ellas.

Dem. Porque si supusiéramos que se equilibraban, introduciendo una nueva fuerza P' igual y directamente opuesta á P, esta fuerza tendria todo su efecto en virtud del equilibrio de P y Q, y llevaria consígo al punto m en el sentido de m hácia P′; pero siendo P' y P iguales y directamente opuestas, se destruirán (12), y quedará de todo el sistema solo la fuerza Q, que obrará como si fuese sola, y obligaria al punto m á que se trasladase de m hácia Q; y como es imposible que pueda seguir á un mismo tiempo dos caminos diferentes, resulta un absurdo de suponer que las fuerzas P y Q se equilibren formando ángulo; luego no se pueden equilibrar, y por lo mismo tendrán una resultante. L. Q. D. D.

Cor. Luego para que haya equilibrio entre dos fuerzas, se han de verificar dos circunstancias: 1.ª *que obren en direcciones opuestas*; y 2.ª *que sean iguales*. La primera por lo que acabamos de demostrar; y la 2.ª porque en virtud de lo espuesto (13), si no fuesen iguales tendrian una resultante igual con su diferencia.

19 Teor. *Cuando muchas fuerzas que obran sobre un mismo punto se equilibran, cada una de ellas se puede considerar como igual y directamente opuesta á la resultante de todas las otras.*

Dem. Supongamos que las fuerzas P, Q, S, T (fig. 2) obren sobre el mismo punto m y se equilibren. Si aplicamos al sistema una fuerza T' igual y contraria á la fuerza T, resultará que las fuerzas T y T' se equilibrarán (cor. ant.), y solo quedarán de todo el sistema las tres fuerzas P,Q,S. Por otra parte, el conjunto de las cuatro fuerzas dadas P,Q,S,T, se halla en equilibrio por el supuesto; luego de todo el sistema de las cinco fuerzas P, Q, S, T, T', solo queda la fuerza T'; por lo que esta fuerza T' causa el mismo efecto que las tres P, Q, S; luego (6) será T' la resultante de las tres fuerzas P,Q,S; y como T' es igual y directamente opuesta á T, resulta que T es igual y directamente opuesta á la resultante de las demas; y como lo mismo demostraríamos si hubiese mas fuerzas, resulta L. Q. D. D.

Esc. *Un sistema cualquiera de fuerzas que obran sobre un mismo punto, no se altera en manera alguna aunque se suponga que sobre dicho punto obre ademas otro sistema de fuerzas, que por sí mismas se equilibren*; porque esto en realidad viene á ser lo mismo que agregar al sistema una fuerza igual con cero; de manera que si al sistema de las tres fuerzas P, Q, S, concebimos que se agregan las dos fuerzas iguales T y T' y directamente opuestas, ellas por sí mismas se destruirán y no producirán ningun efecto; luego el suponer que obran sobre el punto *m* al mismo tiempo que las *P*, *Q*, *S*, no puede alterar la magnitud ni direccion de la resultante de estas en el caso de que la tengan, ni turbar su equilibrio si ellas por sí mismas se equilibraban.

20 Teor. *El punto de aplicacion de una fuerza se puede trasladar á otro punto cualquiera de su direccion, con tal que este segundo punto se halle invariablemente unido al primero.*

Dem. Supongamos que la fuerza *P* (fig. 3) tire del punto *m* por medio del cordon *m*P; si á este cordon añadimos otras dos fuerzas *Q*, *S*, iguales con *P* y que obren en sentido opuesto la una de la otra, estas dos se equilibrarán por sí mismas (12), y por consiguiente (esc. ant.) no aumentarán ni disminuirán la fuerza *P*, y podrémos considerar que el efecto de la fuerza *P* es el mismo que el de las tres fuerzas *P*, *Q*, *S*; y como las *P* y *S* son iguales y directamente opuestas, se equilibrarán tambien por sí mismas, y solo quedará del sistema la fuerza *Q*, que es igual con la primitiva *P*, y cuyo punto de aplicacion se ha trasladado al parage Q que nos acomodaba; y como el punto P se halla por el supuesto invariablemente unido con el punto Q, de modo que la distancia de P á Q permanece siempre constante, resulta que aunque la fuerza se halle aplicada en P, causará los mismos efectos que ántes sobre el punto *m*, que era L. Q. D. D.

21 *Cor.* 1.º De aquí se infiere *que cuando un obstáculo fijo é invencible se coloca sobre la direccion de una fuerza, él la destruye*; pues que se puede suponer que la fuerza está aplicada al mismo obstáculo.

Cor. 2.º Tambien se infiere que *cuando dos fuerzas se apliquen á los estremos de una recta inestensible*, y *que obren en la direccion de la misma recta*, *producirán una resultante que equivaldrá á la suma ó diferencia de las componentes*, *segun obren en una misma direccion ó en direcciones opuestas*; y *si son iguales y contrarias las fuerzas*, *se destruirán* y *no producirán ningun efecto*; pues concibiendo la una fuerza aplicada en el punto de aplicacion de la otra, queda reducida la cuestion al caso en que las fuerzas obran sobre un mismo punto en una misma direccion ó en direcciones opuestas, y en virtud de lo espuesto (17) se verifica la proposicion.

22 Teor. *La direccion de la resultante de dos fuerzas que obran sobre un mismo punto se halla en el plano de las direcciones de las componentes.*

Dem. Si estas fuerzas obran en una misma direccion ó en direcciones opuestas, como se ha de hallar la resultante (13 y 14) en la misma linea de dichas fuerzas queda demostrada la proposicion.

Si dichas fuerzas obrasen formando ángulo, tendrian por precision una resultante (18); y si supusiéramos que esta resultante se pudiese hallar por la parte superior de dicho plano, se podria siempre señalar por la parte inferior del mismo plano otra recta, cuya posicion fuese perfectamente simétrica con relacion á la posicion de las componentes;

y como no hay ninguna razon para que el punto se moviese mas bien por la una que por la otra, resulta que el punto, ó no iria por ninguna parte, lo que es absurdo, pues que las dos componentes no las suponemos iguales y directamente opuestas (18 cor.), ó seguiria dos direcciones, y entónces se hallaria al mismo tiempo en dos distintos lugares del espacio, lo que tambien es absurdo; luego queda demostrada la proposicion.

23 Teor. *Cuando dos fuerzas forman un ángulo, la direccion de su resultante pasará por dentro de dicho ángulo.*

Dem. Ántes de principiar la demostracion observarémos que si suponemos que las dos fuerzas *P* y *Q* (fig. 1.ª) obren sobre el punto *m*, esto se puede hacer de dos modos diferentes: ó suponiendo que la fuerza *P* empuja al punto *m* para que vaya desde *m* hácia P′, y lo mismo la *Q* de *m* hácia Q′; ó suponiendo que la fuerza *P* trata de traer ó llevar hácia sí el punto *m*, y lo mismo la *Q*, que trata de llevarlo de *m* hácia Q. En este segundo supuesto es en el que se supone siempre en Mecánica que obran las fuerzas, á no ser que se esprese lo contrario.

Entendido esto, lo que tratamos de demostrar es que si las dos fuerzas *P* y *Q* obran sobre el punto *m*, la resultante de estas fuerzas se hallará por precision dentro del ángulo P*m*Q; porque en primer lugar dicha resultante se ha de hallar en el plano de las componentes (22); y como el efecto de la fuerza *Q*, si obrase por sí sola, estaria reducido á hacer pasar el punto *m* hácia Q por la parte inferior de la P*m*P′; y el efecto de la fuerza *P* tratará de hacerle pasar desde *m* á P por la parte superior de la Q*m*Q′: resulta que para que el punto *m* obedezca á las dos fuerzas, será preciso que pase por dentro del ángulo P*m*Q, que es la parte del plano que cumple con las dos condiciones de estar inferior á la linea P*m*P′ y superior á la Q*m*Q′, que era L. Q. D. D.

24 Teor. *Si dos fuerzas iguales obran sobre un punto formando ángulo, la direccion de su resultante divide el ángulo que forman las direcciones de las componentes en dos partes iguales.*

Espl. Sean las dos fuerzas iguales *P* y *Q*, que formen el ángulo P*m*Q (figs. 4, 5 y 6): voy á demostrar que su resultante *m*R divide al ángulo P*m*Q en dos partes iguales P*m*R, R*m*Q.

Dem. Si queremos dar una demostracion concisa y elegante, no tenemos mas que observar que debiendo pasar la resultante (23) por dentro del ángulo P*m*Q, y siendo iguales las componentes *m*P, *m*Q, no hay ninguna razon para que la resultante se aproxime mas á la una que á la otra de las dos componentes; luego se desviará igualmente de ambas y dividirá por consiguiente al ángulo P*m*Q en dos partes iguales.

Pero si queremos que se presente tambien á los ojos esta verdad, observarémos que si la resultante fuese la *mr*, diferente de la *m*R que divide en dos partes iguales al ángulo P*m*Q, existiria otra recta *mr′* en una situacion perfectamente simétrica respecto de las *m*R, *m*P, *m*Q (figs. 4, 5 y 6) con la que tiene la *mr* con las mismas lineas: de modo que todas las razones que se podrian dar para probar que *mr* es la resultante, se podrian aplicar para probar que *mr'* lo es tambien: de donde se inferiria que habia dos resultantes diferentes; y como esto es imposible, porque el punto no puede existir á un mismo tiempo en dos parages diferentes, queda demostrada la proposicion.

Cor. 1.° Luego si suponemos que la intensidad de estas fuerzas iguales está representada por las lineas iguales *m*B, *m*C (fig. 7), y concluimos el rombo *m*BDC, tendrémos que como los triángulos *m*BD, *m*CD serán iguales é isósceles (I. 359 y 466 cor. 4.°), la diagonal *m*D del rombo divide al ángulo B*m*C en dos partes iguales, y por consiguiente *esta diagonal espresará la direccion de la resultante de las dos fuerzas iguales.*

Cor. 2.° Como se puede variar el punto de aplicacion de una fuerza al punto que se quiera (20), con tal que se halle este invariablemente unido con el primero, resulta que si se supone esta derivada ó resultante aplicada en el punto D, se le podrán sustituir las dos fuerzas BD, CD que son iguales con *m*C, *m*B, y que obren en la direccion de B hácia D y de C hácia D; y su efecto sobre el punto D, ó sobre el punto *m*, será el mismo que el de las dos fuerzas *m*B, *m*C, que espresan las intensidades de las dos fuerzas *P* y *Q*.

25 Teor. *Si dos fuerzas desiguales obran sobre un mismo punto formando ángulo, la resultante formará menor ángulo con la fuerza mayor: ó lo que es lo mismo, se aproximará mas á la fuerza mayor.*

Dem. Sean *P* y *Q* (fig. 8) las dos fuerzas desiguales, de las que supondrémos que *Q* sea la mayor; y espresando por *p* la diferencia entre ellas, se tendrá $Q = P + p$;
luego en vez de las fuerzas *P* y *Q* podrémos considerar que se tienen las tres fuerzas *P*, *P* y *p*, de las cuales la primera *P* obra en la direccion de *m*P, y las otras dos *P*, *p*, en la direccion *m*Q; y como la direccion de la resultante de las dos fuerzas *P* será *mr*, que divide al ángulo P*m*Q en dos partes iguales, y la direccion de la resultante de *mr* y la otra fuerza *p*, que obra en la direccion de *m*Q se hallará precisamente dentro del ángulo *rm*Q (§ 23), estará representada por *m*R, la cual formará con la direccion *m*Q de la fuerza mayor un ángulo Q*m*R menor que R*m*P que forma con la menor.

26 Teor. *Si cuando dos fuerzas aplicadas á un mismo punto que son entre sí como* m *á* n *y como* m *á* p, *la resultante pasa por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas fuerzas, se verificará que cuando las fuerzas sean entre sí como* m *y* n+p *la resultante pasará tambien por la diagonal del paralelogramo construido por rectas que sean como* m *y* n+p.

Dem. Sea el paralelogramo *m*BGF (fig. 9) y CD paralela á *m*B; y supongamos que $mB : mC : CF :: m : n : p$.
Las dos fuerzas *m*C y *m*B, producen por la hipótesis una fuerza única que pasa por el punto D; á esta se le pueden sustituir (24 cor. 2.°) otras dos

BD y CD que obren de B hácia D y de C hácia D. Ahora, las dos fuerzas CD y CF producen tambien por hipótesis una resultante CG que pasa por el punto G; y como la fuerza BD la podemos concebir aplicada (20) en el punto G de su direccion, resulta que por el punto G pasa la resultante de las tres fuerzas CD, CF y BD, ó de sus iguales mB, CF y mC; y como las mC y CF obran en una misma direccion, equivalen (12) á una fuerza única mF; luego la resultante de las dos fuerzas mB y mF, que guardan la razon de $m : n+p$, pasa por el punto G; y como se halla aplicada en m, resulta que pasará por la diagonal del paralelogramo mFGB construido con estas lineas como lados. L.Q.D.D.

27 Teor. *La direccion de la resultante de dos fuerzas cualesquiera que forman un ángulo, aplicadas á un mismo punto, y espresadas por rectas tomadas sobre sus direcciones partiendo de dicho punto, está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas dos fuerzas.*

Espl. Sean P y Q (fig. 10) dos fuerzas cualesquiera que obren sobre el punto m en la direccion de mP y mQ, y cuyas intensidades estén representadas por mB, mC: voy á demostrar que la direccion de la resultante mR de dichas fuerzas está representada por la diagonal mD del paralelogramo mBDC construido sobre las rectas mB, mC, como lados.

Dem. Puesto que en el caso de ser las fuerzas iguales, su direccion es la diagonal del rombo (24 cor. 1.º), resulta que suponiendo $m=n=p=1=m\mathrm{B}=m\mathrm{C}=\mathrm{BF}$ (fig. 11) tendrémos que la direccion de la resultante de mB y mC será la diagonal mD; y la de BD y BF será BG. Ahora, siendo las componentes $m\mathrm{C}=1$ y $m\mathrm{F}=m\mathrm{B}+\mathrm{BF}=1+1=2$, tendrémos por el teorema anterior, que la direccion de la resultante será la diagonal mG; luego la direccion de la resultante es la diagonal cuando las componentes guardan la razon de $1 : 2$;
y suponiendo FH=FG, la direccion de la resultante será FK, diagonal del rombo FHKG; por lo que en virtud del mismo teorema tendrémos que la direccion de la resultante de mC y de mH será la mK; luego la direccion de la resultante es la de la diagonal del paralelogramo cuando las fuerzas están tambien en la razon de $1 : 3$;
y del mismo modo demostraríamos que se verificaba la proposicion cuando las componentes estuviesen en la razon de $1 : 4$, de $1 : 5$, y en general de $1 : k$ ó invirtiendo de $k : 1$.

Si suponemos ahora (fig. 12) que $m\mathrm{C} : m\mathrm{B} :: k : 1$, la direccion de la resultante por lo que acabamos de demostrar será mD; y si suponemos que $\mathrm{BF}=m\mathrm{B}=1$, resultará que siendo BD igual y paralela con mC, la direccion de la resultante de las dos fuerzas BD y BF, que guardan la razon de $k : 1$, será la diagonal BG; así, en virtud del teorema anterior, la direccion de la resultante de $m\mathrm{C}=k$ y de $m\mathrm{F}=m\mathrm{B}+\mathrm{BF}=1+1=2$, será la diagonal mG; y del mismo modo demostraríamos que la direccion de la resultante de las dos fuerzas mC y mH que son $:: k : 3$, era la diagonal mK; y que tambien estaba representada la direccion por la diagonal, cuando las fuerzas fuesen:: k: 4 y:: k: 5, y en general:: k: h, espresando por k y h cantidades comensurables.

Para demostrar que tambien se verifica la proposicion cuando las fuerzas son incomensurables, observarémos que si suponemos que la direccion de la resultante pase por el punto O (fig. 13), fuera de la diagonal mG, dividiendo (I. 325 cor. 2.°) la mB en partes iguales mas pequeñas que OG, y llevando estas partes sobre BG, habrá al ménos un punto E de division entre G y O; y tirando por él la EH paralela á mB, la resultante de las dos fuerzas comensurables mB y mH pasará por mE; pero si consideramos la parte HF de la mF trasladada al punto m y representada por mD, tendrémos que la resultante de esta y de mE pasará (23) por lo interior del ángulo EmD; luego no podrá pasar por el punto O á la izquierda del punto G; y como demostraríamos del mismo modo que no podria pasar por ningun punto O′ á la derecha de G, resulta que precisamente pasará por G. Luego queda demostrada la proposicion tambien para el caso en que las fuerzas sean incomensurables, y por consiguiente lo resulta en todos los casos. L. Q. D. D.

28 Teor. *La magnitud de la resultante de dos fuerzas cualesquiera* P y Q, *está representada por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas fuerzas.*

Espl. Supongamos que las dos fuerzas P y Q cuya intensidad representarémos por mB, mC (fig. 14), obren á un mismo tiempo sobre el punto m: vamos á demostrar que la magnitud de la resultante R está representada por la diagonal mD del paralelogramo mBDC.

Dem. Para demostrarlo, observarémos ante todas cosas, que pues las fuerzas P y Q equivalen á una que pase por la direccion mR, si queremos que haya equilibrio será preciso introducir una nueva fuerza que destruya á la resultante, la cual deberá ser igual con ella y directamente opuesta (18 cor.); por lo que supondrémos que sea la fuerza R'; y pues que las tres fuerzas P, Q y R' se equilibran, podrémos suponer (19) que la fuerza Q se equilibre con las fuerzas P y R', y la resultante de estas dos pasará por la prolongacion mQ′ de Qm, y estará representada por mF$=m$C; pero aquí la componente P es dada de magnitud y direccion, de la otra componente R' solo se conoce su direccion, y la resultante Q' es conocida en magnitud y direccion, pues ha de ser igual con mC; luego solo nos falta determinar la magnitud de la componente mR′. Para conseguirlo, unirémos los puntos F y B, y tirarémos por F la FG paralela á mB; y digo que mG será la magnitud de la componente R'. Porque si no lo fuese, seria mayor ó menor; y si supusiéramos que estaba representada por mG′$<m$G, construyendo sobre mB y mG′ un paralelogramo, su diagonal mF′ espresaria la direccion de la resultante de las fuerzas P y R'; pero como esta resultante debe pasar por la direccion mF prolongacion de mC, resulta que deberia pasar por dos parages distintos á un mismo tiempo, lo que es

absurdo; luego no se puede suponer que $mG'<mG$ represente á la fuerza R'.

Del mismo modo demostraríamos que $mG''>mG$ no puede representar á R'; porque construyendo el paralelogramo BG″, la diagonal mF″ espresaria la direccion de la resultante de las fuerzas P y R'; pero como esta resultante se debe dirigir por mF, prolongacion de mC, resulta un absurdo; luego no se puede suponer que $mG''>mG$ represente á la fuerza R'; luego no pudiendo esta fuerza estar representada por una recta menor ni mayor que mG, resulta que lo estará por la misma mG. Pero $mG=mD$ por la igualdad de los triángulos mCD y mFG (I. 361) á causa de ser $mC=mF$, y tener iguales los dos ángulos en m (I. 356) y los en F y C (I. 386a); luego la magnitud de la resultante R está representada por mD, diagonal del paralelogramo mBDC, cuyos lados mB y mC representan á las componentes. L. Q. D. D.

Cor. gen. Luego *la resultante de dos fuerzas cualesquiera que forman un ángulo, está representada en direccion y en magnitud por la diagonal del paralelogramo construido por lados que espresen la intensidad y direccion de dichas fuerzas.*

Esc. Esta proposicion se conoce con el nombre de *paralelogramo de las fuerzas*; y se puede decir que es el fundamento de toda la Mecánica.

29 Teor. *La resultante de dos fuerzas* P y Q *se puede espresar por medio de estas fuerzas y del ángulo que forman.*

Dem. Si tiramos desde el punto D (fig. 15) la DG perpendicular á mQ, y espresamos por α el ángulo PmQ, los triángulos rectángulos CDG, mDG, y el mCD (I. 649 y 489) dan

$DG=CD\text{sen}.DCG=$(I. 466 cor. 1.° y 386a) $mB\text{sen}.PmQ=P\text{sen}.\alpha$,

$CG=CD\cos.DCG=P\cos.\alpha$, y $mD^2=CD^2+mC^2+2mC\times CG$;

que poniendo en vez de mD, CD, mC y CG, sus valores, se tendrá

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos.\alpha \quad (4),$$

$$\text{y tang.}RmQ=\frac{DG}{mG}=\frac{P\text{sen}.\alpha}{mC+CG}=\frac{P\text{sen}.\alpha}{Q+P\cos.\alpha} \quad (5).$$

Esc. Si el ángulo PmQ (fig. 16) que forman las componentes fuese recto, se tendria $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, y seria $\text{sen}.\alpha=1$, $\cos.\alpha=0$; por lo que la (ec. 4) nos daria $R^2=P^2+Q^2$ (6); que estrayendo la raiz cuadrada, se tiene $R=\sqrt{P^2+Q^2}$ (7).

Y espresando por $\alpha_{\prime}$ el ángulo PmR que la resultante R forma con la fuerza P, y por $\beta_{\prime}$ el QmR que forma la misma resultante con la otra componente, tendrémos $\begin{cases} P=mP=mR\cos.PmR=R\cos.\alpha_{\prime} \\ Q=mQ=mR\cos.QmR=R\cos.\beta_{\prime} \end{cases}$

Y como el ángulo $\alpha_{\prime}$ es complemento del $\beta_{\prime}$, será $\text{sen}.\alpha_{\prime}=\cos.\beta_{\prime}$, y (I. 650) tendrémos $\text{tang.}PmR=\text{tang}.\alpha_{\prime}=\frac{PR}{mP}=\frac{mQ}{mP}=\frac{Q}{P}$.

Cor. El triángulo mDC (fig. 15) da (I. 638) estas tres razones iguales

CD : mC : mD : : sen.CmD : sen.mDC : sen.mCD;

pero sen.mDC=(I. 386a 1.º) sen.PmR,

y sen.mCD=(I. 637) sen.DCG=(I. 386a 3.º) sen.PmQ.

Luego si sustituimos estos valores, y en vez de las lineas CD, mC, mD, las fuerzas P, Q, R, que representan, tendrémos

P : Q : R : : sen.QmR : sen.PmR : sen.PmQ;

que nos dice que *las tres fuerzas* P, Q, R, *de las que una es la resultante de las otras dos, son entre sí como el seno del ángulo que forman las otras dos.*

30 Por medio de los teoremas antecedentes podemos referir á la resolucion de un triángulo todas las cuestiones que se pueden proponer sobre la composicion de dos fuerzas en una sola, y sobre la descomposicion de una fuerza en otras dos. En efecto, la resultante mD, y las dos componentes mC y mB=CD, están representadas por los tres lados del triángulo mCD; los ángulos de este triángulo son los ángulos formados por la resultante y las componentes, y el suplemento del formado entre las dos componentes; pues el ángulo mCD es (I. 466 cor. 2.º) suplemento del BmC. Luego *dadas tres de las seis cosas, á saber, las tres fuerzas, dos componentes y su derivada ó resultante, y los tres ángulos formados por sus direcciones, se hallarán las otras tres por la Trigonometría rectilinea, resolviendo el triángulo mCD* : lo cual supone que se dé conocido en el número de los datos al ménos (I. 628) una de las fuerzas.

Esc. *Si se conoce la posicion y magnitud de dos fuerzas, se puede siempre determinar la direccion y magnitud de su resultante*; pues no hay mas que construir un paralelógramo, cuyos lados estén representados en direccion y magnitud por dichas fuerzas, y su diagonal espresará la resultante: de modo que el problema de la composicion de las fuerzas siempre es determinado. El de la descomposicion es enteramente indeterminado; pues *si conociésemos la magnitud y direccion de la resultante, se podrian hallar una multitud de componentes que de dos en dos produgesen la misma resultante.* En efecto, dada la diagonal mD (fig. 17), si por el punto m tiramos dos lineas cualesquiera, y por D otras dos que les sean paralelas, tendrémos un paralelógramo, del cual será diagonal la mD; y como se pueden tirar de muchísimos modos las lineas primitivas por el punto m, resulta que puede haber una infinidad de fuerzas que combinadas de dos en dos remplacen á la resultante; así es, que las mB, mC, las mE, mF, las mG, mH, las mK, mL, &c. y otra infinidad de ellas, cumplen con la espresada circunstancia de equivaler al efecto de la fuerza mD.

Aun cuando se quisiese que el ángulo formado por las componentes fuese recto, quedaba el problema muy indeterminado y podia tener infinitas soluciones. En efecto, si sobre la resultante mD (fig. 18) como diámetro, trazamos un círculo, y desde un punto cualquiera F, F', F'', &c. se tiran dos lineas á los estremos del diámetro mD, y por cada uno de los puntos m y D se tiran paralelas á estas, tendrémos una multitud de paralelogramos que todos serán (I. 454 cor. 3.º) rectángulos, y de los cuales será diagonal la mD; de modo que en vez de esta resultante podrémos sustituir las dos fuerzas rectangulares mB, mF, las mB', mF', las mB'', mF'', &c.

31 Este problema quedará determinado en cualquiera de los cuatro casos siguientes: 1.º *dada la direccion de una fuerza y la magnitud de la otra*; 2.º *dadas las direcciones de ambas*; 3.º *dadas ambas de magnitud*; 4.º *dada la magnitud y direccion de una de ellas*.

En efecto, en el primer caso, *si se nos diese ademas de la resultante* m*D* (fig. 19), *la direccion de* m*P y la magnitud* mC *de* Q: haciendo centro en D con un radio igual á mC trazaríamos un arco de círculo en B, y tirando la DB concluiríamos el paralelogramo mBDC; con lo cual tendríamos lo que se pedia, siendo mB y mC las dos fuerzas que produgesen el mismo efecto que la resultante mD.

2.º *Si ademas de la resultante* m*D*, *se diesen las direcciones* m*P y* m*Q de dichas fuerzas*, *les tiraríamos por D las paralelas DC*, *DB*, *y quedaria determinado el paralelogramo* m*BDC*, cuyos dos lados mB, mC, espresarán las fuerzas que equivalen en este caso á la resultante mD.

3.º *Si ademas de la resultante* m*D*, *se diesen las magnitudes* m*B*, mC *de ambas fuerzas*, *sin conocer su direccion*, *formaríamos un triángulo* m*BD* (I. 362) *con dichas magnitudes y con la de la resultante*, y *concluyendo el paralelogramo* m*BDC*, *quedaria determinado el ángulo B*m*C de dichas fuerzas*. Para que este problema sea posible, es preciso que la suma de las dos magnitudes dadas sea mayor que la resultante; pues de otro modo no se podria formar triángulo.

32 *Esc.* Aunque el efecto de la resultante de dos fuerzas que forman ángulo sea el mismo que el de dichas fuerzas, sin embargo la resultante es menor que la suma de las componentes, como acabamos de indicar; y esto proviene de que las componentes en este caso se coadyuvan en parte y en parte se contrarestan. Si queremos averiguar cuanto es en lo que se ayudan y en cuanto se contrarestan, tirarémos por m (fig. 20) una linea HmG de un modo cualquiera; por los puntos C y B tirarémos las CK y BF, paralelas á la HmG, y las CH, BG, paralelas á la diagonal mD; con lo cual tendrémos descompuestas, la fuerza mB en las mG y mF, y la mC en las mH, mK; de modo que el efecto de las dos componentes mB, mC, será el mismo que el de las cuatro fuerzas mG, mF, mH, mK. Ahora, los triángulos mBF, CKD, son iguales (I. 361); pues mB=CD (I. 466 cor. 1.º), y ademas los ángulos BmF=KDC (I. 386a 1.º) y mBF=KCD (I. 386e); luego CK=BF; y como mH=CK (I. 466 cor. 1.º), y BF=mG, se tendrá mH=mG; y como estas fuerzas están directamente opuestas, se destruirán (12) y solo quedarán las mF, mK, que por obrar en una misma direccion producirán una resultante (14) igual á mK+mF; ó

por ser mF=KD por la igualdad de dichos triángulos, equivaldrá á mK+KD=mD, que es la diagonal del paralelógramo mBDC.

33 Teor. *La resultante de tres fuerzas* P, Q *y* S, *aplicadas á un mismo punto, y cuyas direcciones no se hallan en un mismo plano, está representada en magnitud y direccion por la diagonal del paralelepípedo construido sobre las partes de las direcciones de estas fuerzas que espresan sus magnitudes respectivas.*

Dem. Sean mB, mC y mD, las magnitudes respectivas de las fuerzas P, Q y S (fig. 21), y mBCDF el paralelepípedo construido sobre estas tres rectas. La resultante r de las dos fuerzas P y Q está representada por la diagonal mE del paralelógramo mBEC; y á causa de que EF es igual y paralela con mD, la figura mEFD es un paralelógramo. Luego la diagonal mF de este paralelógramo ó del paralelepípedo representará la resultante de estas dos fuerzas r y S, ó de las tres P, Q y S, que era L. Q. D. D.

Cor. Si las direcciones de las fuerzas P, Q y S, son rectangulares, se tiene $\begin{cases} r^2=m\text{E}^2=m\text{B}^2+\text{BE}^2=m\text{B}^2+m\text{C}^2=P^2+Q^2, \\ \text{y } R^2=m\text{E}^2+\text{FE}^2=P^2+Q^2+m\text{D}^2=P^2+Q^2+S^2 \ (8). \end{cases}$

34 Teor. *Una fuerza* R *aplicada en un punto* m, *siempre se puede descomponer en otras tres fuerzas respectivamente paralelas á tres eges ó rectas tiradas por un mismo punto del espacio.*

Dem. Supongamos que mF represente la fuerza R; tirémos por el punto m tres rectas mP, mQ, mS, paralelas á los eges dados; estas tres rectas determinarán tres planos PmQ, PmS, QmS; y haciendo pasar despues por el punto F tres planos respectivamente paralelos á estos, resulta que estos seis planos formarán un paralelepípedo del que mF será la diagonal, y cuyas aristas mB, mC, mD, contiguas al punto m, serán las componentes buscadas.

Cuando el paralelepípedo es rectángulo, si se une el punto F con los B, C, D, tendrémos que el triángulo mBF rectángulo en B, dará (I. 649) mB=mFcos.BmF; el mCF rectángulo en C, dará mC=mFcos.CmF; y el mFD rectángulo en D, dará mD=mFcos.DmF; y espresando por α, β, γ, los ángulos BmF, CmF y DmF, que forma la diagonal mF con las aristas mB, mC, mD, á que llamarémos P, Q, S, y R á la resultante mF, las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$P=R\cos.\alpha,\ Q=R\cos.\beta \text{ y } S=R\cos.\gamma \ (9);$$

donde se ve que *la accion de una fuerza* R, *estimada segun una direccion dada, se halla multiplicando esta fuerza por el coseno del ángulo que forma su direccion con la direccion dada.*

Sumando los cuadrados de estas tres ecuaciones, resulta

$$P^2+Q^2+S^2=R^2(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma);$$

y como (II. 187) $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$, resulta $R^2=P^2+Q^2+S^2$, lo que ya sabíamos (I. 576 esc. 2.º).

35 *Esc.* De todas las demostraciones geométricas que se han dado de la proposicion del paralelógramo de las fuerzas, la que nos ha

parecido mas exacta es la que hemos puesto; y de todas las demostraciones analíticas que se han dado de la misma proposicion por los mejores Geómetras, la mas exacta y al mismo tiempo la mas elemental es la siguiente que hemos formado con presencia de todas ellas.

Principiemos por el caso mas sencillo, esto es, supongamos que las fuerzas sean iguales, y tendrémos que en virtud de lo espuesto (24) la direccion de la resultante dividirá en dos partes iguales el ángulo que forman las componentes. Por consiguiente, en este caso solo nos falta conocer la magnitud de la resultante. Para conseguirlo, observarémos que la magnitud de la resultante solo puede depender de la magnitud y direccion de las componentes; y como estas son iguales y la direccion en que obran queda determinada por el ángulo que forman entre sí las direcciones de las componentes, resulta que la magnitud de la resultante solo dependerá de la magnitud de las componentes y del ángulo que forman; luego será funcion de estas dos cantidades; por lo que si espresamos por P una de las dos componentes que suponemos iguales, y por 2α el ángulo que estas forman entre sí, tendrémos que α será el ángulo que forma la resultante con una de ellas; y espresando por R'' la resultante, se tendrá $R''=\text{f}.(P,\alpha)$ (a).

De modo que solo falta determinar la naturaleza de la funcion f. (*).

(*) *Aunque nadie dudará de la verdad de esta proposicion, vamos á demostrarla directamente. Para conseguirlo, nos bastará hacer ver que si varía la magnitud de la componente* P, *variará* R: *y que si varía* α, *tambien variará* R; *luego si* R *varía por la variacion de* P *y de* α, *será funcion* (*II.* 418) *de estas dos cantidades.*

En efecto, si suponemos que varíe P *y se convierta por egemplo en* P+K, *podrémos considerar que obran sobre el punto* m (*fig.* 22) *cuatro fuerzas, dos en la direccion* mA *que estarán espresadas por* P *y por* K, *y otras dos iguales á las precedentes que obren en la direccion de* mB; *las dos fuerzas* P, *que obran en la direccion de* mA *y* mB, *producirán una resultante cualquiera que obrará en la direccion de* mR; *y como las otras dos fuerzas iguales con* K, *que obran en la direccion de las mismas lineas* mA *y* mB *producirán una resultante que obrará en la misma direccion de* mR, *resulta que las cuatro fuerzas* P,P, K,K, *estarán reducidas á dos que obrarán en la direccion de la misma recta* mR; *por consiguiente equivaldrán* (14) *á una sola espresada por su suma*; *luego* la resultante de dos fuerzas iguales á $P+K$ que obren en las direcciones de *m*A y *m*B, será mayor que la de las dos fuerzas P que obran en las mismas direcciones. *Luego queda demostrado que variando* P, *varía la resultante* R, *y por consiguiente que* R *es funcion de* P.

Para manifestar que la resultante es tambien funcion de α, *observarémos que si á las dos componentes* P,P′ (*fig.* 23) *que obran en las direcciones de* mP *y* mP', *se oponen otras dos* Q, Q′, *que les sean igua-*

Si consideramos que sobre el mismo punto y en las mismas direcciones, obran dos fuerzas iguales que espresarémos por Q, producirán una resultante R', que por las consideraciones anteriores será $R' = \text{f.}(Q,\alpha)$ (b).

Si suponemos ahora que las dos fuerzas Q obren al mismo tiempo que las dos fuerzas P, tendrémos que como las dos primeras darán una resultante $m\mathrm{R}'$ (fig. 25), y las dos últimas una $m\mathrm{R}''$, que obrarán en la misma direccion $m\mathrm{R}$, estas dos resultantes equivaldrán á una R que será igual á la suma de las dos, y se tendrá

$$R = m\mathrm{R} = m\mathrm{R}' + m\mathrm{R}'' = R' + R'' = \text{f.}(Q, \alpha) + \text{f.}(P, \alpha) \text{ (c).}$$

Pero las dos fuerzas $m\mathrm{P}$, $m\mathrm{Q}$, que obran en la direccion de $m\mathrm{A}$, equivalen á una $r = P + Q$;

y las otras que obran en la direccion de $m\mathrm{B}$ equivalen á otra $r = Q + P$; luego la resultante definitiva será igual á la de dos fuerzas iguales

---

les, se tendrá un sistema de cuatro fuerzas que se harán mutuamente equilibrio, pues la P *queda destruida con la* Q, *y la* P′ *con la* Q′.

Pero si se supone que aumente el ángulo de las últimas fuerzas Q, Q′ (*fig.* 24), *pero sin dejar estas de ser iguales entre sí y con las* P, P′, *que tambien suponemos iguales, formando siempre ángulos iguales con las* P y P′, *no podemos establecer en general que estas cuatro fuerzas se equilibrarán; pues el sistema no se reduce ya á cuatro fuerzas de las que de dos en dos están opuestas y son iguales: lo único que sabemos es que las dos primeras, esto es las* P y P′, *darán una resultante que obrará en la direccion de la* mR *que divide en dos partes iguales el ángulo* PmP', *y que las* Q, Q′ *producirán una resultante que obrará en la direccion de la* mR' *que divide el ángulo* QmQ' *en dos partes iguales; y como por el supuesto tenemos que los dos ángulos* PmQ', P'mQ *son iguales, los tres ángulos* PmR, PmQ', Q'mR', *serán iguales respectivamente á los tres ángulos* RmP', P'mQ, QmR'; *y como entre los seis ángulos valen cuatro rectos* (*I.* 352, 4.º), *resulta que los tres primeros ángulos, ó los dos* PmR, PmR', *valdrán tambien dos rectos; por consiguiente las* mR *y* mR' *no forman sino una sola y misma recta. Luego lo único que sabemos en este caso es que la resultante de* P y P′ *obra en direccion opuesta á la de* Q y Q′; *por consiguiente estas dos resultantes producirán una resultante difinitiva que será igual* (13) *á su diferencia; pero como no sabemos cual de las dos resultantes parciales es la mayor, no podemos averiguar si la resultante definitiva obrará en la direccion de* mR *ó en la de* mR'; *más como la resultante definitiva ha de obrar en el sentido de la mayor, si por algun medio pudiésemos averiguar si la direccion de dicha resultante definitiva era la* mR *ó la* mR', *entónces ya no quedaria duda en cual de las resultantes era la mayor. Para esta investigacion, observarémos que si consideramos las dos fuerzas* P′ *y* Q *que son iguales, producirán una resultante que obrará en la direccion de* mr, *que divide en dos partes iguales al ángulo* P'mQ, *y por la misma razon las dos* P *y* Q′ *darán una resultante* con r, y que formen el mismo ángulo α que las P y las Q; luego la misma resultante definitiva será $R=$f.(r, α) (d).

Si igualamos los dos valores de R (ecs. c y d), tendrémos

$$\text{f.}(P, \alpha)+\text{f.}(Q, \alpha)=\text{f.}(r, \alpha) \text{ (e)};$$

ó poniendo en vez de r su valor $Q+P$, será

$$\text{f.}(P, \alpha)+\text{f.}(Q, \alpha)=\text{f.}(Q+P, \alpha) \text{ (f)}.$$

Si desenvolvemos el segundo miembro en potencias ascendentes de P por el teorema de Tailor (II. 535), ó mas bien: si comparamos la espresion f.$(Q+P, \alpha)$ con f.$(x+k, u)$ (II. § 539), observarémos que lo que en esta espresion está representado por x, k, u, lo está en la nuestra por Q, P, α; y que lo que allí espresábamos por z aquí está representado por f. (Q, α); luego la primera serie de dicho párrafo nos dará

$$\text{f.}(Q+P,\alpha)=\text{f.}(Q,\alpha)+\frac{\text{d.f.}(Q,\alpha)}{\text{d}Q}\times\frac{P}{1}+\frac{\text{d}^2\text{.f.}(Q,\alpha)}{\text{d}Q^2}\times\frac{P^2}{1.2}+\&c. \text{ (g)}.$$

Sustituyendo este valor de f.$(Q+P,\alpha)$ en la (ec.f), y borrando el f.(Q,α) que resulta comun en ambos miembros, será

$$\text{f.}(P,\alpha)=\frac{\text{d.f.}(Q,\alpha)}{\text{d}Q}\times\frac{P}{1}+\frac{\text{d}^2\text{.f.}(Q,\alpha)}{\text{d}Q^2}\times\frac{P^2}{1.2}+\frac{\text{d}^3\text{.f.}(Q,\alpha)}{\text{d}Q^3}\times\frac{P^3}{1.2.3}+\&c. \text{ (h)}.$$

Pero siendo el primer miembro independiente de Q, lo deberá ser el segundo; luego los diversos coeficientes de P serán independientes de Q (*); y como en ellos solo entra Q, α y números, resulta que serán

---

que obrará en la direccion de mr′, *que divide el ángulo* PmQ′ *en dos partes iguales*; *estas dos resultantes serán iguales por serlo las componentes y formar el mismo ángulo. Ahora*, *como por el supuesto el ángulo* PmR*<áng.*Q′mR′, *y acabamos de ver que áng.*Pmr′=*áng.*r′mQ′, *sumando tendrémos áng.*Rmr′<r′mR′;
por la misma razon Rmr<rmR′; *luego el ángulo* r′mr *valdrá* (*I.* 352, 4.º) *ménos de dos ángulos rectos*; *y como la resultante de dos fuerzas pasa por el ángulo que forman* (23), *resulta que las dos resultantes parciales que obran en la direccion de* mr *y* mr′ *producirán una resultante general ó definitiva que obrará en la direccion de* mR; *luego en la direccion de* mR *obrará la resultante de las cuatro fuerzas* P, P′, Q, Q′; *y puesto que* mR *es la direccion de la resultante de las* P *y* P′, *tenemos demostrado que la resultante de estas es mayor que la de las* Q *y* Q′; *luego á* igualdad de fuerzas, la resultante es mayor cuando las componentes forman un ángulo menor. *Luego la magnitud de la resultante varía cuando varía el ángulo*; *luego será funcion del ángulo que formen*; *y como ya hemos demostrado que es tambien funcion de la magnitud de las componentes*, *resulta que es funcion de dicha magnitud y del ángulo.*

(*) *En efecto*, *es indispensable que la cantidad* Q *se destruya por sí misma en cada coeficiente*; *pues ningun término de aquellos en que* funciones de α; luego tendrémos $\frac{d.f.(Q,\alpha)}{dQ}=\varphi.\alpha$ (i);

y como α es una cantidad constante, $\varphi.\alpha$ tambien lo será. Pero la cricunstancia de ser $\frac{d.f.(Q,\alpha)}{dQ}$ una cantidad constante, hace que $\frac{d^2.f.(Q,\alpha)}{dQ^2}=0$,

y que suceda lo mismo á todos los demas coeficientes diferenciales; luego será $f.(P,\alpha)=P\times\varphi.\alpha$ (k);

ó poniendo en vez de $f.(P,\alpha)$ su valor R'', será $R''=P\times\varphi.\alpha$ (l).

{ De manera que ya solo nos falta determinar la naturaleza de la funcion $\varphi.\alpha$; pero cualquiera que sea la forma de esta funcion, resulta que para otras dos fuerzas cualesquiera S, que formen el mismo ángulo α, se tendrá $R'''=S\times\varphi.\alpha$;

y formando proporcion será $R'' : R''' :: P\times\varphi.\alpha : S\times\varphi.\alpha :: P : S$;

que nos espresa que *la resultante varía proporcionalmente á las componentes cuando el ángulo permanece el mismo.*

{ Pasemos ya á determinar la naturaleza de la funcion $\varphi.\alpha$;

para conseguirlo, observarémos que si se tienen dos fuerzas iguales P, P' (fig. 23) que obren en las direcciones mP, mP', y se les oponen otras dos mQ, mQ' iguales entre sí y con las P, P', y que obren directamente opuestas á estas fuerzas, el equilibrio subsistirá; pues siendo la mQ igual y directamente opuesta á mP, se destruirán la una á la otra (18 cor.), y por la misma razon se destruirán las mP', mQ'; pero si suponemos que las fuerzas Q (fig. 26) sin dejar de formar con las primeras ángulos iguales, se separan de su resultante, ademas del ángulo α que se separaban ántes, una cantidad angular θ, y que las dos primeras P se aproximan á la resultante la misma cantidad angular θ, tendrémos que el ángulo que formen las Q con la direccion de su resultante mR' será

$$\mathrm{Q}m\mathrm{R}'=\mathrm{R}'m\mathrm{C}+\mathrm{C}m\mathrm{Q}=\alpha+\theta;$$

por consiguiente la resultante de las dos fuerzas Q que espresarémos por R', será en virtud de lo acabado de demostrar $R'=Q\times\varphi.(\alpha+\theta)$ (m).

{ Las dos fuerzas P formarán ahora con la direccion mR de su resultante un ángulo $\mathrm{R}m\mathrm{P}=\mathrm{R}m\mathrm{B}-\mathrm{B}m\mathrm{P}=\alpha-\theta$;

por consiguiente la magnitud de su resultante que espresarémos por R'', será $R''=P\times\varphi.(\alpha-\theta)$ (n).

{ Y como la resultante definitiva (nota anterior) será igual á la diferencia de estas dos, y obrará en el sentido de la mR, que es la que corresponde al menor ángulo de las componentes P, tendrémos que si á la resultante definitiva la llamamos R, será

$$R=P\times\varphi.(\alpha-\theta)-Q\times\varphi.(\alpha+\theta) \text{ (o)};$$

---

se pudiese hallar en el término donde está P, *se puede destruir con los que pueda haber donde haya* P^2, P^3, &c.; *luego resulta que la* Q *deberá destruirse por sí misma en cada coeficiente diferencial.*

ó por ser $P=Q$, tendrémos $R=P\times\varphi.(\alpha-\theta)-P\times\varphi.(\alpha+\theta)$ (p).

{ Pero si atendemos á las dos fuerzas P y Q, que son iguales entre sí y están á la derecha de la R$'m$R, tendrémos que producirán una resultante, cuya direccion será la de mr que divide al ángulo PmQ en dos partes iguales; y espresando por r su magnitud, se tendrá por lo que acabamos de manifestar $r=P\times\varphi.(\text{ángulo } Pmr)$.

Pero el ángulo $Pmr=\frac{1}{2}PmQ=\frac{1}{2}(\pi-RmP-R'mQ)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\theta-\alpha-\theta)=$
$\frac{1}{2}(\pi-2\alpha)=\frac{1}{2}\pi-\alpha$; luego será $r=P\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ (q);

por la misma razon las dos fuerzas P y Q que están á la izquierda de la resultante, producirán una resultante r' que obrará en la direccion de mr', y cuya magnitud estará espresada tambien por $P\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$.

{ Luego tenemos ya reducida la cuestion á encontrar la resultante general que producirán estas dos fuerzas iguales con r, y que forman entre sí el ángulo rmr'; por consiguiente su resultante pasará por la mR que divide al ángulo rmr' en dos partes iguales, y su magnitud que espresarémos por R por ser la resultante de todo el sistema, será

$$R=r\times\varphi.(\text{ángulo } Rmr);$$

pero ang.$Rmr=RmP+Pmr=\alpha-\theta+\frac{1}{2}\pi-\alpha=\frac{1}{2}\pi-\theta$,

luego $R=r\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\theta)$ (s);

ó poniendo en vez de r su valor (ec. q) será

$$R=P\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\theta) \quad (t).$$

{ Igualando los dos valores de R (ecs. p y t), será

$$P\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=P\times\varphi.(\alpha-\theta)-P\times\varphi.(\alpha+\theta) \quad (v);$$

ó suprimiendo la P, se tendrá por último

$$\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=\varphi.(\alpha-\theta)-\varphi.(\alpha+\theta) \quad (u);$$

y como (II. 535 ec. o)

$$\varphi.(\alpha-\theta)=\varphi.\alpha-\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}\times\frac{\theta}{1}+\frac{d^2.\varphi.\alpha}{d\alpha^2}\times\frac{\theta^2}{1.2}-\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3}\times\frac{\theta^3}{1.2.3}+\&c. \quad (x),$$

$$\text{y } \varphi.(\alpha+\theta)=\varphi.\alpha+\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}\times\frac{\theta}{1}+\frac{d^2.\varphi.\alpha}{d\alpha^2}\times\frac{\theta^2}{1.2}+\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3}\times\frac{\theta^3}{1.2.3}+\&c. \quad (y),$$

si sustituimos estos valores en la (ec. u) y simplificamos, se tendrá

$$\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)=-$$

$$2\left(\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}\times\frac{\theta}{1}+\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3}\times\frac{\theta^3}{1.2.3}+\frac{d^5.\varphi.\alpha}{d\alpha^5}\times\frac{\theta^5}{1.2.3.4.5}+\&c.\right) \quad (z);$$

y dividiendo los dos miembros por $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$, será $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\theta)=-$

$$2\left(\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}\times\frac{\theta}{1}+\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}\times\frac{\theta^3}{1.2.3}+\&c.\right) \quad (aa).$$

{ Ahora, como el primer miembro de esta ecuacion es independiente de α, resulta que el segundo tambien lo será; por consiguiente los coeficientes de las diversas potencias de θ deberán reducirse á cantidades constantes independientes de α; luego tendrémos $\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}=a$ (bb), espresando por a una constante; y si quitamos el divisor $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$, nos resulta $\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}=a\times\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ (cc).

Esta ecuacion manifiesta que *el coeficiente diferencial de φ.a es igual á una cantidad que permanece la misma para todos los ángulos, multiplicada por la funcion semejante del complemento del mismo ángulo.* Por esta causa tendrémos que como el complemento de $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ es α, resultará $\frac{d.\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{-d.\alpha}=a\times\varphi.\alpha$ (dd);

donde ponemos á $d\alpha$ el signo $-$, porque siendo α negativa en la funcion, su diferencial será negativa; y mudando los signos á ambos miembros, tendrémos $\frac{d.\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{d\alpha}=-a\times\varphi.\alpha$ (ee).

Si hallamos el segundo coeficiente diferencial de la (ec. cc), será

$$\frac{d^2.\varphi.\alpha}{d\alpha^2}=a\times\frac{d.\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{d\alpha}=[\text{ec. ee}]a\times-a\times\varphi.\alpha=-a^2\times\varphi.\alpha \quad (\text{ff}).$$

Volviendo á diferenciar tendrémos

$$\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3}=-a^2\times\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}=-a^2\times a\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=-a^3\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) \quad (\text{gg});$$

y continuando del mismo modo será

$$\frac{d^4.\varphi.\alpha}{d\alpha^4}=-a^3\times\frac{d.\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)}{d\alpha}=-a^3\times-a\times\varphi.\alpha=a^4\times\varphi.\alpha \quad (\text{hh}),$$

$$\frac{d^5.\varphi.\alpha}{d\alpha^5}=a^4\times\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}=a^4\times a\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=a^5\times\varphi.(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha) \quad (\text{ii}); \text{ \&c.}$$

Luego si en la (ec. aa) sustituimos en vez de $\frac{d.\varphi.\alpha}{d\alpha}$, $\frac{d^3.\varphi.\alpha}{d\alpha^3}$, $\frac{d^5.\varphi.\alpha}{d\alpha^5}$, *&c.* los valores que acabamos de sacar, y suprimimos el factor $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$ que resulta comun en cada término en el numerador y denominador, se tendrá $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\theta)=-2(a\theta-\frac{a^3\theta^3}{1.2.3}+\frac{a^5\theta^5}{1.2.3.4.5}-\text{\&c.})$ (kk).

Pero en virtud de lo espuesto (II. 551) lo que hay dentro del paréntesis equivale al seno de $a\theta$, luego será $\varphi.(\frac{1}{2}\pi-\theta)=-2\,\text{sen}.a\theta$ (ll).

Esta ecuacion nos dice que *la funcion de un ángulo cualquiera es*

igual al duplo del seno de un múltiplo a *del complemento de dicho ángulo*, pero tomado esto negativamente; luego cuando el ángulo sea α, se tendrá $\varphi.\alpha = -2\,\text{sen}.a(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ (mm);
ecuacion que nos manifiesta la forma de la funcion $\varphi.\alpha$ que entra en la (ec. l); luego si en dicha ecuacion sustituimos en vez de $\varphi.\alpha$ este valor, y suprimimos los acentos en R'', tendrémos que la magnitud de la resultante R de dos fuerzas P iguales entre sí, y cuyas direcciones forman el ángulo 2α, es igual á $R = P \times \varphi.\alpha = -2P\text{sen}.a(\frac{1}{2}\pi - \alpha)$ (nn).

{ Si en esta ecuacion se hace $\alpha = 0$, como entónces las dos fuerzas P, obran en la misma direccion, darán una resultante que será igual (14) con $P + P = 2P$, y será $2P = -2P\text{sen}.a \times \frac{1}{2}\pi$ (oo),
que dividiendo por $2P$ da $1 = -\text{sen}.a \times \frac{1}{2}\pi$ (pp), ó $\text{sen}.a \times \frac{1}{2}\pi = -1$ (qq); pero los arcos respecto de los cuales los senos son iguales á la unidad negativa, son (II. 15 y 16) los múltiplos de una circunferencia aumentada de tres cuadrantes, ó los múltiplos de una circunferencia ménos un cuadrante: luego si espresamos por n un número entero cualquiera, resulta que a tendrá esta forma $4n+3$ ó $4n-1$, siendo n un número entero ó cero; por lo que sustituyendo este último valor en la (ec. nn) será
$$R = -2P\text{sen}.(4n-1)(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha) = -2P\text{sen}.(2n\pi - \tfrac{1}{2}\pi - 4n\alpha + \alpha) \quad \text{(rr)};$$
y como las lineas de un arco son las mismas que las del mismo arco aumentado en un número cualquiera de circunferencias, se tendrá que el seno del arco $-\frac{1}{2}\pi - 4n\alpha + \alpha$ será el mismo que el de este arco aumentado en un número cualquiera de circunferencias espresado por $2n\pi$; luego la (ec. rr) se convertirá en $R = -2P\text{sen}.(-\frac{1}{2}\pi - (4n-1)\alpha)$ (ss); y como el seno de un arco negativo es el seno negativo del mismo arco tomado positivamente (II. 16), tendrémos
$$R = -2P \times -\text{sen}.(\tfrac{1}{2}\pi + (4n-1)\alpha) = 2P\text{sen}.(\tfrac{1}{2}\pi + (4n-1)\alpha) \quad \text{(tt)};$$
que en virtud de lo espuesto (II. 538 ec. α) será $R = 2P\cos.(4n-1)\alpha$ (vv).

{ Ahora solo nos falta manifestar cual es el valor de n. Para determinarlo observarémos que n debe ser un número entero por lo que hemos espuesto, pudiendo ser tambien igual con cero. Supongamos que $n=1$, y tendrémos que en dicho caso será $R = 2P\cos.3\alpha$;

y suponiendo que $\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{3}$, será $R = 2P\cos.3 \times \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{3} = 2P\cos.\frac{1}{2}\pi = 2P \times 0 = 0$;

luego tendríamos que la resultante de dos fuerzas iguales y que formasen un ángulo espresado por $2\alpha = 2\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$ seria igual con cero: resultado absurdo, pues que para que dos fuerzas se destruyan la una á la otra han de ser directamente opuestas (18 cor.).

{ Si suponemos $n=2$, será en este caso $R = 2P\cos.7\alpha$;

que haciendo $\alpha = \dfrac{\frac{1}{2}\pi}{7}$, daria $R = 2P\cos.7\dfrac{\frac{1}{2}\pi}{7} = 2P\cos.\frac{1}{2}\pi = 2P \times 0 = 0$;

de donde resultaria que dos fuerzas iguales P que formasen un ángulo $=2\alpha=2\frac{\frac{1}{2}\pi}{7}=\frac{\pi}{7}$ se equilibraban: resultado tambien absurdo, por la misma razon; y como demostraríamos que siempre resulta un absurdo de suponer que n tenga un valor numérico 3, 4, 5, &c., resulta que su valor no se podrá representar por ningun número 1, 2, 3, 4, &c.; luego será *cero*, y se tendrá $R=2P\cos.-\alpha$;
y como (II. 16) $\cos.-\alpha=\cos.\alpha$, tendrémos por último $R=2P\cos.\alpha$ (xx).

Ahora, si se toman en las direcciones mP (fig. 26) de las fuerzas P, las partes iguales mk y mh para representar las fuerzas P, se acaba el rombo mkRh y se tira la segunda diagonal kh que cortará á ángulo recto (*) á la primera en el punto r, será $mn=$R$n=$(I. 649)$mk\times\cos.kmn$, y por consiguiente mR$=2mn=2mk\cos.kmn$.

Pero mk es la linea que representa la intensidad de la fuerza P, y el ángulo kmn es el mismo PmR que hemos espresado por α, luego tendrémos $mR=2P\cos.\alpha$;
y como este mismo valor es el que hemos encontrado para R, tendrémos que *la resultante* R *de dos fuerzas iguales* P, *está representada por la diagonal* m*R del rombo construido sobre las lineas que representan estas fuerzas.*

Ahora solo falta estender este teorema al caso en que las dos componentes sean desiguales: para lo cual principiarémos por el caso en que sus direcciones formen un ángulo recto.

Sean en este caso mA y mB (fig. 27) las direcciones de estas dos fuerzas aplicadas al punto m; supongamos que estas fuerzas se hallen representadas por las lineas mp y mq tomadas sobre sus direcciones; construyamos sobre estas dos lineas el paralelogramo rectángulo $mprq$ y tiremos sus dos diagonales mr y pq, que se corten en el punto n; por m tiremos tambien la linea $p'q'$ paralela á pq, y por p y q las rectas pp' y qq', paralelas á mr y que encuentren á la linea $p'q'$ en los puntos p' y q'. Los dos paralelogramos $mnpp'$, $mnqq'$ son rombos, porque siendo recto el ángulo pmq, y siendo el paralelogramo $mprq$ un rectángulo por el supuesto, se sigue (I. 468 esc 1.°) que $mr=pq$ y $mn=pn$, y por consiguiente $mp'=mn$ y $mq'=mn$.

Luego se puede considerar en virtud del teorema precedente la fuerza que está representada en magnitud y en direccion por mp, como la resultante de dos fuerzas iguales mp' y mn: y la fuerza mq como la re-

(*) *Porque las dos diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en dos partes iguales* (*I.* 468); *y siendo iguales todos los lados del rombo, los cuatro triángulos* mkn, mnh, *R*hn *y R*nk, *son iguales* (*I.* 355); *luego los cuatro ángulos que se forman en* n *serán iguales; y como entre los cuatro han de valer cuatro rectos, resulta que cada uno de ellos será recto.*

sultante de la fuerza mq' y de otra segunda fuerza mn; luego en vez de las dos fuerzas dadas mp y mq tenemos las dos fuerzas mp', mq' y las dos fuerzas mn: las dos primeras se destruyen por ser iguales y directamente opuestas, mientras que las otras dos deben dar una resultante igual con su suma $mn + mn = 2mn = mr$;
de donde se sigue que *la resultante de dos fuerzas cualesquiera* mp y mq, *cuyas direcciones forman un ángulo recto*, *está representada en direccion y magnitud por la diagonal* mr *del rectángulo* mprq *construido sobre estas fuerzas.*

Supongamos ahora que las direcciones de las dos componentes formen un ángulo cualquiera AmB (fig. 28), y sean siempre mp y mq las lineas que representan estas fuerzas. Construyamos sobre estas dos lineas el paralelogramo $mprq$; por m tiremos la perpendicular $p'q'$ á la diagonal mr; desde los puntos p y q tiremos las perpendiculares pp' y qq' sobre $p'q'$, y las pp'' y qq'' sobre mr; con lo cual tendrémos los dos rectángulos $mp'pp''$, $mq'qq''$, cuyos lados mp' y mq' son iguales por ser las alturas de dos triángulos iguales mpr y mqr, cuya base comun es la mr; y en virtud del último teorema la fuerza mp será la resultante de las fuerzas mp' y mp'', y la mq la de las fuerzas mq' y mq'': de modo que podemos sustituir las cuatro fuerzas mp', mp'', mq', mq'', á las dos fuerzas dadas mp y mq; pero mp' y mq' se destruyen, pues que son iguales y contrarias: mp'' y mq'' se suman, porque obran en la direccion de una misma recta, y su suma es igual á la diagonal mr, porque $mp'' = q''r$ (§ 32); por consiguiente mr es la resultante de las dos fuerzas mp y mq.

Luego tenemos demostrado en general que *la resultante de dos fuerzas cualesquiera*, *aplicadas á un mismo punto*, *y representadas por lineas tomadas sobre sus direcciones partiendo de este punto*, *está representada en magnitud y en direccion por la diagonal del paralelogramo construido sobre estas fuerzas.*

Composicion de las fuerzas que concurren en un punto.

36 Puesto que sabemos determinar en direccion y magnitud la resultante de dos fuerzas que concurren en un mismo punto, propongámonos ahora *determinar*, *tanto en magnitud como en direccion*, *la resultante de un número cualquiera de fuerzas aplicadas á un mismo punto*, *y situadas ó no en un mismo plano.*

Para esto, se halla primero la resultante de dos de estas fuerzas; despues se compondrá esta resultante con una tercera fuerza; luego, se hallará la resultante de esta segunda resultante y de otra fuerza; y así se continuará hasta haber hallado la resultante de todas. Con lo cual se habrán reducido todas las fuerzas del sistema á una sola, que en el caso de equilibrio será cero. En el caso contrario, si se quiere hacer que haya equilibrio en el sistema, se aplicará al punto una fuerza igual y directamente opuesta á la resultante de todas las fuerzas; pues entónces el punto se hallará solicitado por dos fuerzas iguales y contrarias.

La resolucion de este problema da lugar á una construccion geométrica que merece nuestra atencion.

Supongamos que las fuerzas dadas estén representadas por las lineas mA, mA', mA'', mA''', &c. (fig. 29) que parten desde el punto de aplicacion m. Por el punto A tiremos una linea AB igual y paralela con mA'; por B tiremos la BC igual y paralela con mA'', y así sucesivamente. Con lo cual formarémos una porcion de polígono, cuyo número de lados será igual al de las fuerzas dadas; y uniendo el estremo de su último lado con el punto m por medio de una recta, esta representará en magnitud y direccion la resultante buscada.

En efecto, la linea mB espresa la resultante de las fuerzas mA y mA'; pues que tirando la $A'B$ resulta el paralelogramo $mABA'$, cuya diagonal es mB, y cuyos lados mA, mA', son las dos fuerzas que hemos considerado. Por la misma razon resulta que la mC representa la resultante de las fuerzas mB y mA'', y así sucesivamente. El órden con que se deben tomar las componentes es de todo punto arbitrario, y la resultante siempre será la misma en direccion y magnitud.

37 Si por el punto m tiramos una linea cualquiera mX, y desde los puntos A,B,C,D, se tiran á esta linea las perpendiculares AE,BF,CG,DH, se tendrá $mH = mE + EF + FG + GH$;
pero mH es la proyeccion de la resultante mD sobre el ege arbitrario mX, ó es la magnitud de dicha resultante estimada en la direccion de dicho ege: y mE, EF, FG, GH, son las proyecciones ó magnitudes de las componentes estimadas en la direccion del mismo ege; luego resulta que *la magnitud de la resultante de un número cualquiera de fuerzas, que obran sobre un punto libre, estimada en la direccion de un ege cualquiera tirado por este punto, es igual á la suma de las componentes estimadas en la direccion del mismo ege.*

38 Los medios que estas construcciones ofrecen para la verificacion del equilibrio, son penosos y poco exactos; por lo cual para llegar al mismo objeto, vamos á deducir fórmulas que solo exigen el conocimiento de los valores de las componentes de una fuerza, segun dos ó tres eges rectangulares.

Supongamos primero que las fuerzas estén situadas en un mismo plano, y que obren sobre un punto libre que podrémos tomar por la interseccion de los eges rectangulares, en cuyas direcciones descompondrémos las fuerzas.

Sean P, P', P'', P''' (fig. 30), diferentes fuerzas situadas en un mismo plano y que obren sobre el punto m. Concibiendo que pasan por este punto los eges rectangulares mX, mZ, y representando estas fuerzas por las partes mP, mP', mP'', mP''', &c. de sus direcciones, las descompondrémos cada una en otras dos que obren en la direccion de los eges; de modo que tirando por sus estremos P, P', P'', P''', las

PN, P'N', P''N'', P'''N''', perpendiculares al ege mX: y las PQ, P'Q', P''Q'', P'''Q''', al mZ, tendrémos que mN, mN', mN'', mN''', serán las componentes en la direccion del ege mX: y mQ, mQ', mQ'', mQ''', las componentes en la direccion del ege mZ; y tomando en la mX las partes NC$=m$N', CD$=m$N'' y DE$=m$N''', la suma de las cuatro fuerzas que obran en la direccion del ege mX será mE; y tomando en el ege mZ las partes QF$=m$Q', FG$=m$Q'' y GH$=m$Q''', la suma de las cuatro fuerzas que obran en la direccion del ege mZ será la mH; de donde se deduce que la resultante de todas las fuerzas será la misma que la de las dos fuerzas rectangulares mE y mH; por lo cual tirando las ER, HR, paralelas á los eges, tendrémos que la diagonal mR del rectángulo mERH espresará la magnitud y direccion de la resultante de todas las fuerzas.

39 Á esta operacion gráfica corresponde un procedimiento analítico que es digno de conocerse. Si espresamos por α, α', α'', α''', &c. los ángulos PmX, P'mX, P''mX, P'''mX, que forman las fuerzas P, P', P'', P''', con el ege mX: y por $\beta, \beta', \beta'', \beta'''$, &c. los P$mZ$, P'$mZ$, P''$mZ$, P'''$mZ$, que forman con el ege de las Z, tendrémos (I. 649)

$$mN = mP\cos.PmX = P\cos.\alpha, \quad mQ = mP\cos.PmZ = P\cos.\beta;$$
$$mN' = mP'\cos.P'mX = P'\cos.\alpha', \quad mQ' = mP'\cos.P'mZ = P'\cos.\beta';$$
$$mN'' = mP''\cos.P''mX = P''\cos.\alpha'', \quad mQ'' = mP''\cos.P''mZ = P''\cos.\beta'';$$
$$mN''' = mP'''\cos.P'''mX = P'''\cos.\alpha''', \quad mQ''' = mP'''\cos.P'''mZ = P'''\cos.\beta''';$$

luego todas las componentes que obran en el sentido del ege de las x estarán representadas por $P\cos.\alpha$, $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, $P'''\cos.\alpha'''$, &c. y las que en el de las z por $P\cos.\beta$, $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$, $P'''\cos.\beta'''$, &c. Sumando todas las que obran en el sentido del ege de las x, y espresando su suma por X: y sumando todas las que obran en el sentido del ege de la z, y espresando su suma por Z, tendrémos

$$\left.\begin{array}{l} P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \&c. = X \\ P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \&c. = Z \end{array}\right\} (10).$$

40 En lo que precede hemos supuesto que todas las fuerzas estaban situadas en el ángulo XmZ, y que por lo mismo los ángulos α, α', &c., β, β', &c. eran agudos; pero las ecuaciones tienen la misma forma cualquiera que sea la posicion de las fuerzas P, P', &c. con relacion á los eges, es decir, que dichas fórmulas sacadas en el supuesto de ser los ángulos α, α', &c., β, β', &c. agudos, se pueden estender á cuando estos ángulos sean obtusos; en cuyo caso siendo negativo el coseno, hará que el término en que se halle sea negativo, ó indique que la componente que espresa sea negativa, y deba influir en el sentido opuesto á los eges.

Para demostrarlo, supongamos que se tengan las cuatro fuerzas P, P', P'', P''' (fig. 31), que obren sobre el punto m en el sentido que espresan mP, mP', mP'', mP''', que supondrémos representen tambien las intensidades de cada fuerza. Si por los puntos P, P', P'', P''', tiramos lineas perpendiculares á los eges mX, mZ, ó á sus prolongaciones, quedarán construidos los rectángulos cuyos lados espresarán las componentes de cada fuerza, en esta forma: las componentes de P serán mN, mQ, ambas positivas; y espresando por α, β los ángulos PmN, PmQ, tendrémos que los valores analíticos de dichas componentes serán (I. 649)

$$m\mathrm{N}=m\mathrm{P}\cos.\mathrm{P}m\mathrm{N}=P\cos.\alpha,\quad m\mathrm{Q}=m\mathrm{P}\cos.\mathrm{P}m\mathrm{Q}=P\cos.\beta.$$

Las de P' son mN$'$ y mQ$'$: la primera es positiva, porque obra en la direccion del ege mX, y la segunda mQ$'$ es negativa porque obra en el sentido opuesto al ege mZ. El valor absoluto y analítico de cada una de estas componentes, espresando por α' y β' los ángulos P$'mX$, P$'mZ$, son (I. 649) $m\mathrm{N}'=m\mathrm{P}'\cos.\mathrm{P}'m\mathrm{N}'=P\cos.\alpha'$,

$$m\mathrm{Q}'=m\mathrm{P}'\cos.\mathrm{P}'m\mathrm{Q}'=m\mathrm{P}'\cos.(\pi-\mathrm{P}'mZ)=$$
$$P'\cos.(\pi-\beta')=[\text{II. § 10}]P'\times-\cos.\beta'=-P'\cos.\beta'.$$

Las de P'' son mN$''$ y mQ$''$, ambas negativas, porque obran en el sentido opuesto al de los eges mX, mZ. Sus valores absolutos espresados analíticamente y señalando con α'', β'', los ángulos P$''mX$, P$''mZ$, son

$$m\mathrm{N}''=m\mathrm{P}''\cos.\mathrm{P}''m\mathrm{N}''=P''\cos.(\pi-\mathrm{P}''mX)=P''\cos.(\pi-\alpha'')=$$
$$P''\times-\cos.\alpha''=-P''\cos.\alpha'',$$
$$m\mathrm{Q}''=m\mathrm{P}''\cos.\mathrm{P}''m\mathrm{Q}''=m\mathrm{P}''\cos.(\pi-\mathrm{P}''mZ)=P''\cos.(\pi-\beta'')=$$
$$P''\times-\cos.\beta''=-P''\cos.\beta''.$$

Las de P''' son mN$'''$ y mQ$'''$: la primera negativa porque obra en sentido opuesto al ege mX, y la segunda positiva porque obra en el sentido mismo del ege mZ. Sus valores absolutos, espresando por α''', β''' los ángulos P$'''mX$, P$'''mZ$, son en términos analíticos

$$m\mathrm{N}'''=m\mathrm{P}'''\cos.\mathrm{P}'''m\mathrm{N}'''=m\mathrm{P}'''\cos.(\pi-\mathrm{P}'''mX)=$$
$$P'''\cos.(\pi-\alpha''')=-P'''\cos.\alpha''',$$
$$m\mathrm{Q}'''=m\mathrm{P}'''\cos.\mathrm{P}'''mZ=P'''\cos.\beta'''.$$

Por consiguiente, la suma X de todas las fuerzas que obran en el sentido del ege mX, será (§ 16) $X=m\mathrm{N}+m\mathrm{N}'-m\mathrm{N}''-m\mathrm{N}'''$, que sustituyendo los valores que acabamos de obtener, será

$$X=P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha''';$$

y la suma Z de todas las que obran en el sentido del ege mZ, será

$$Z=m\mathrm{Q}-m\mathrm{Q}'-m\mathrm{Q}''+m\mathrm{Q}'''=P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''.$$

41 Donde vemos que estas espresiones no se diferencian en nada de las anteriores (ecs. 10); luego en general siendo P, P', P'', P''', P^{IV}, &c. un número cualquiera de fuerzas que obran sobre un punto en un mismo plano, si espresamos por α, α', α'', α''', α^{IV}, &c. los ángulos que sus direcciones forman con el ege de las x: y por β, β', β'', β''', β^{IV}, &c. los que forman dichas direcciones con el ege de las z, las componentes en el sentido de cada uno de estos eges serán

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+P^{\text{IV}}\cos.\alpha^{\text{IV}}+\&c.=X\ (11),$$
$$P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+P^{\text{IV}}\cos.\beta^{\text{IV}}+\&c.=Z\ (12)\ (*).$$

(*) *Hemos llegado á deducir estas fórmulas con toda generalidad, sin incurrir en una impropiedad que se halla en todos los libros de Mecánica; pues al tratar este punto todos ellos establecen, por egemplo,*

{ Donde debemos observar que al llegar á determinar en la práctica estas componentes, los signos que deban tener los cosenos de los ángulos α, α', &c. β, β', &c. segun los valores de estos ángulos, serán los que decidan del signo que corresponde á cada término.

{ 42 En vez de cos.β, cos.β', &c. podemos sustituir sen.α, sen.α', &c.; pero entónces deberémos considerar como negativos los ángulos que se formen por la parte inferior del ege mX. En efecto, si observamos bien la figura notarémos que el ángulo PmZ$=\beta$ es complemento del PmX$=\alpha$; luego (I. 631) cos.β=sen.α.

Del P$'m$Z$=\beta'$ es complemento por esceso el P$'m$X$=\alpha'$; luego (II. § 8) cos.β'=—sen.α'; ó teniendo presente que el ángulo α' se forma por la parte inferior del ege mX, su seno será (II. 16) negativo, y resultará cos.β'=sen.α'.

{ El coseno del ángulo P$''m$Z$=\beta''$, es el seno negativo (II. 8) de P$''m$N$''$; este seno es el mismo que el del P$''m$X$=\alpha''$, que siendo negativo, su seno tambien lo será; de modo que tendrémos

$$\cos.\beta''=-\text{sen}.P''mN''=-\text{sen}.P''mX=-\text{sen}.-\alpha''=\text{sen}.\alpha''.$$

{ Por último cos.β'''=cos.P$'''m$Z=[II. § 7]sen.P$'''m$X=sen.α'''.

{ Luego sustituyendo las espresiones de estos cosenos en la ecuacion (12), tendrémos tambien para remplazar á las (ecs. 11 y 12) las siguientes

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+P^{IV}\cos.\alpha^{IV}+\&c.=X \quad (13),$$
$$P\text{sen}.\alpha+P'\text{sen}.\alpha'+P''\text{sen}.\alpha''+P'''\text{sen}.\alpha'''+P^{IV}\text{sen}.\alpha^{IV}+\&c.=Z \quad (14),$$

que son equivalentes á ellas; y *para determinar el signo de cada término en este caso, deberémos atender ademas á la consideracion de los arcos ó ángulos positivos ó negativos.* }

43 Si queremos hallar gráficamente la resultante de las cuatro fuerzas (fig. 31), tomarémos á continuacion de la mN la parte Nb=mN$'$; y la mb será la suma de las componentes de P, P', en el sentido del ege mX; despues tomarémos desde b á la izquierda la parte bc=mN$''$, y se toma á la izquierda de b, porque la mN$''$ obra en sentido opuesto al del ege mX, y la mc será la resultante de P, P', P'', en el sentido de dicho ege; tomando ahora la cd=mN$'''$ tambien desde c á la izquierda por ser negativa la mN$'''$, tendrémos que la md será la resultante de todas las componentes P, P', P'', P''', en el sentido del ege mX.

Si tomásemos la parte Qe=mQ$'''$, tendríamos que me seria la suma de las componentes de P y P''' en el sentido del ege mZ; y si á continuacion de mQ$'$ tomamos la Q$'f$=mQ$''$, tendrémos que mf será la suma de las componentes de P' y P'', que obran en direccion contraria al

---

que las componentes de P *son* Pcos.α, Pcos.β; *y sin que hayan precedido mas consideraciones que las del triángulo rectángulo que suministran estos valores, suponen desde luego que los ángulos* α, β, *pueden ser agudos ú obtusos. En lo cual no pueden ménos de tropezar los principiantes; pues es lo mismo que suponer que en un triángulo rectángulo podia haber ángulos obtusos, lo cual es un absurdo.*

ege mZ; y como la mf que espresa las componentes negativas es mayor que la me que espresa las positivas, tendrémos que la fuerza que resulte en el sentido de este ege será negativa; y tomando $fh=me$, la mh será la fuerza que resulta de las cuatro P, P', P'', P''', en el sentido del ege mZ; y concluyendo ahora el rectángulo $mdRh$, tendrémos que la resultante efectiva de dichas cuatro fuerzas está representada por mR.

44 Para determinar analíticamente esta resultante, observarémos que pues todas las fuerzas están reducidas á las X, Z, que forman un ángulo recto, llamando R la resultante será (29 esc.)

$$R^2=X^2+Z^2 \ (15), \text{ ó } R=\sqrt{X^2+Z^2} \ (16);$$

ecuacion que bastará para determinar la magnitud R de dicha resultante, y solo faltará determinar su direccion. Para conseguirlo, espresarémos por $\alpha_,$ y por $\beta_,$ los ángulos que dicha resultante forma con los eges de las x y de las z; y pues que las componentes que obran en la direccion de dichos eges son X y Z, tendrémos (29 esc.)

$$X=R\cos.\alpha_, \ (17), \ Z=R\cos.\beta_,=R\text{sen}.\alpha_, \ (18);$$

y dividiendo la (18) por la (17) se tendrá $\frac{R\text{sen}.\alpha_,}{R\cos.\alpha_,}=\text{tang}.\alpha_,=\frac{Z}{X}$ (19);

ecuacion que por sí sola dará á conocer el ángulo $\alpha_,$ que forma la resultante con el ege de las x; y como se sabe que ha de pasar por el punto m, la tenemos determinada enteramente de direccion y magnitud.

Si la ecuacion (19) diere para tang.$\alpha_,$ un valor negativo, daria á conocer que el ángulo $\alpha_,$ era negativo; y se deberia tirar la linea que espresase la direccion de la resultante por la parte inferior del ege mX.

Si se quiere fijar la direccion de dicha resultante por los dos ángulos $\alpha_,$ y $\beta_,$ las (ecs. 17 y 18) darán $\cos.\alpha_,=\frac{X}{R}$ (20), $\cos.\beta_,=\frac{Z}{R}$ (21).

45 Ahora, en el caso de equilibrio la resultante es nula; luego se tendrá $R=0$; por lo que la (ec. 15) se convertirá en $X^2+Z^2=0$ (22); y como X^2 será por precision (I. 198) una cantidad positiva y Z^2 tambien, y la suma de dos cantidades positivas no puede jamas ser 0, resulta que la ecuacion $X^2+Z^2=0$, no se puede verificar á ménos que no se tenga separadamente $X^2=0$, $Z^2=0$, lo que da $X=0$ (23), $Z=0$ (24); luego en el caso de equilibrio, se ha de tener separadamente

$$X=P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+\&c.=0 \ (25),$$

$$Z\left\{\begin{array}{l} =P\text{sen}.\alpha+P'\text{sen}.\alpha'+P''\text{sen}.\alpha''+P'''\text{sen}.\alpha'''+\&c.=0 \\ \text{ó } =P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+\&c.=0 \end{array}\right\} (26);$$

que son las ecuaciones que espresan las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas que obran sobre un punto libre.

46 La ecuacion de la direccion de la resultante, pues que pasa por el orígen, es (II. 160) $z=ax$;

y como en este caso se tiene $a=\text{tang}.\alpha_,=\frac{Z}{X}$, se convierte su ecuacion en $z=\frac{Z}{X}x$ (27), de donde $Xz-Zx=0$ (28).

Esta ecuacion queda satisfecha independientemente de x y de z, cuando $X=0$, $Z=0$;
lo que comprueba las dos condiciones de equilibrio halladas ántes (45).

47 Si se tuviese solamente $Z=0$, entónces daba á conocer que el efecto de las componentes segun el ege de las z es nulo; en esta hipótesis $\tang.\alpha_{/}=0$;
luego la resultante está dirigida en el sentido de las x, y ademas $R=X$; lo que efectivamente se verifica.

48 Si fuese $X=0$, tendríamos $\text{tang}.\alpha_{/}=\frac{Z}{X}=\frac{Z}{0}=\infty$,

lo cual manifiesta (I. 635) que la direccion de la resultante forma un ángulo recto con el ege de las x, y se tiene $R=Z$; lo que efectivamente se verifica.

49 *Esc.* En el caso de darse los eges fijos y de antemano por alguna circunstancia de la cuestion, y que el punto m sobre que obran las fuerzas no se hallase en el orígen, se tirarian por dicho punto m dos lineas mX, mZ, paralelas á los eges AX′, AZ′, y se procederia como en el caso anterior; pues los ángulos que las fuerzas y sus componentes formen con las mX, mZ, serán los mismos que los que formen con los eges AX′, AZ′. Y si espresamos con x', z' las coordenadas del punto m con relacion á dichos eges AX′, AZ′, la ecuacion de la direccion de la resultante será (II. § 163) $z-z'=a(x-x')$,

y sustituyendo por a su valor (§ 46) $\frac{Z}{X}$, se tendrá $z-z'=\frac{Z}{X}(x-x')$ (29).

50 Para no dejar nada que desear en punto al gran problema de la composicion de las fuerzas, y ofrecer á los principiantes todos los pormenores que puedan necesitar para no encontrar tropiezo en la práctica, nos propondrémos hallar tanto geométrica como analíticamente la resultante de las cuatro fuerzas P, P', P'', P''' (fig. 31), cuyas intensidades estén representadas por los números 12, 30, 10 y 8; es decir, supongamos que la mP que espresa la intensidad de la fuerza P equivale á 12 unidades cualesquiera, por egemplo, pies, varas, &c.; y que los demas números 30, 10 y 8, espresen igualmente partes de la misma especie.

Supongamos tambien que el ángulo PmP′ que forman las dos fuerzas P y P' sea de 95°; el P′mP″ de las P', P'' de 105°; el P″mP‴ de las P'', P''' de 105°; y por último el P‴mP de las P''' y P sea de 55°.

Supongamos ademas que el orígen de las coordenadas se halle en A, y que la direccion de los eges deba ser la de AX′, AZ′, respecto de los cuales sean las coordenadas del punto m las Ak, mk, que hemos espresado por x' y por z', y cuyos valores supondrémos que sean 9 y 11 unidades, esto es, que $Ak=9$ y $mk=11$. Aun nos falta otro dato para que quede determinada la cuestion, y es el de conocer el ángulo que forma una cualquiera de las componentes P, P', P'', P''', con uno de los eges, pues son conocidos los que forman las fuerzas entre sí; por lo cual supondrémos que mP prolongada forme con el ege AX' el ángulo PlX' de 65°.

Esto supuesto, pasemos á determinar la magnitud y direccion de la resultante por el procedimiento analítico espuesto (39). Para lo cual observarémos que siendo el ángulo $PmX=PlX'=65°$,
este será el valor de α; y el PmZ que hemos llamado β, será igual á 25°.

Siendo por el supuesto el ángulo $PmP'=95°$,
se tendrá el $P'mX=PmP'-PmX=95°-65°=30°$,
que será el valor de α'; y el de $\beta'=P'mZ=P'mX+XmZ=30°+90°=120°$.

Siendo el ángulo $P'mP''=105°$,

será $\begin{cases} \text{el } P''mX=\alpha''=P''mP'+P'mX=105°+30°=135°, \\ \text{y el } P''mZ=\beta''=360°-ZmX-P''mX=360°-90°-135°=135°. \end{cases}$

Por último siendo el ángulo $P'''mP=55°$,

se tendrá $\begin{cases} \alpha'''=P'''mX=P'''mP+PmX=55°+65°=120°, \\ \text{y } \beta'''=P'''mZ=P'''mP-PmZ=55°-25°=30°. \end{cases}$

Con lo cual se tienen ya los datos para conocer los valores de X y de Z, por medio de las (ecs. 11 y 12); y para mayor claridad pondrémos aquí por separado los datos en esta forma:

Fuerzas.	*Ángulos que forman las fuerzas con el ege de las x.*	*Ángulos que forman las fuerzas con el ege de las z.*
$P=12$	$\alpha=65°$	$\beta=25°$
$P'=30$	$\alpha'=30°$	$\beta'=120°$
$P''=10$	$\alpha''=135°$	$\beta''=135°$
$P'''=8$	$\alpha'''=120°$	$\beta'''=30°$

Si sustituimos estos valores en las espresadas ecuaciones, resultará

$X=12\cos.65°+30\cos.30°+10\cos.135°+8\cos.120°$,

$Z=12\cos.25°+30\cos.120°+10\cos.135°+8\cos.30°$.

Ahora, como (II. § 8) $\begin{cases} \cos.135°=\cos.(90°+45°)=-\text{sen}.45°, \\ \text{y } \cos.120°=\cos.(90°+30°)=-\text{sen}.30°, \end{cases}$

si sustituimos estos valores en las ecuaciones anteriores se nos convertirán en $\begin{cases} X=12\cos.65°+30\cos.30°-10\text{sen}.45°-8\text{sen}.30°, \\ Z=12\cos.25°-30\text{sen}.30°-10\text{sen}.45°+8\cos.30°; \end{cases}$

y tomando en unas tablas trigonométricas naturales estos senos y cosenos (*) con cuatro guarismos decimales que son suficientes para nuestro

(*) *Si no se tienen tablas naturales, se pueden hallar los números correspondientes á los logaritmos de las tablas artificiales.*

objeto, tendrémos
$$\left\{\begin{array}{l} X=12\times0,4226+30\times0,866-10\times0,7071-8\times0,5= \\ \quad 5,0712+25,98-7,071-4=19,9802, \\ Z=12\times0,9063-30\times0,5-10\times0,7071+8\times0,866= \\ \quad 10,8756-15-7,071+6,928=-4,2674; \end{array}\right.$$

y la resultante R será $R=\sqrt{X^2+Z^2}=\sqrt{(19,9802)^2+(-4,2674^2)}=$
$\sqrt{399,2084+18,2107}=\sqrt{417,4191}=20,43.$

Para determinar los ángulos que forma la resultante con los eges, harémos uso de las (ecs. 20 y 21), que sustituyendo los valores de X, Z y R, que acabamos de hallar, se nos convierten en

$$\cos.\alpha_{,}=\frac{19,9802}{20,43}=0,97795=\cos.12^\circ\ 3'\ \text{y}\ 20'',$$

$$\cos.\mathcal{C}_{,}=\frac{-4,2674}{20,43}=-0,20887=-\cos.77^\circ\ 56'\ \text{y}\ 40'';$$

por lo que el ángulo $\mathcal{C}_{,}$ será (I. 637) obtuso é igual á
$$180^\circ-77^\circ\ 56'\ 40''=102^\circ\ 3'\ 20'';$$
y en efecto, tomando con un semicírculo estos ángulos en la figura, salen estos valores muy exactamente, así como resultan exactos los valores para X, Z y R, si los tomamos con un compas y averiguamos sus magnitudes en una escala.

Tambien podríamos haber determinado la direccion de la resultante por la (ec. 19),

$$\text{tang.}\alpha_{,}=\frac{Z}{X},\ \text{que da tang.}\alpha_{,}=\frac{-4,2674}{19,9802}=-0,21358=-\text{tang.}12^\circ\ 3'\ 20''$$

que como este valor es negativo indica que el ángulo $\alpha_{,}$ es negativo, ó se debe tomar por la parte inferior al ege mX.

En virtud de lo espuesto (II. 14) tambien pudiéramos haber deducido que el ángulo $\alpha_{,}$ era de $\pi-\alpha_{,}=180^\circ-12^\circ\ 3'\ \text{y}\ 20''=167^\circ\ 56'\ 40''$, lo cual nos hubiera dado la misma direccion R$'m$R de la resultante, pues la mR$'$ es prolongacion de la mR, sin que esto traiga ninguna confusion, pues el sentido en que obra la resultante lo determinan con sus signos los valores de X y de Z.

Ahora, como las coordenadas del punto m son A$k=x'=9$ y $mk=z'=11$, sustituyendo estos valores y el de $a=\text{tang.}\alpha_{,}=\frac{Z}{X}=-0,21358$, en la (ec. 29) de la resultante, tendrémos
$$z-11=-0,21358(x-9).\ \text{que da}\ z=12,92222-0,21358x.$$

Si conocida esta ecuacion, quisiésemos construir la resultante, pues que conocemos las coordenadas de uno de sus puntos m, no nos falta determinar sino otro punto de su direccion, que supondrémos sea el punto en que corta al ege AX'; para lo cual harémos $z=0$, lo que nos dará $x=\frac{12.92222}{0,21358}=60,5$,

por consiguiente tomando en el ege AX' una distancia igual con 60,5 partes, tendrémos el punto n; y tirando por él y por m la mn, será la direccion de la resultante.

Si no nos queremos valer del conocimiento de las coordenadas del punto m, determinarémos otro cualquier punto de su direccion, por egemplo el punto en que corta al ege AZ'; para esto haríamos $x=0$, lo cual daria $z=12,92222$;
por consiguiente, tomando en el ege AZ' la distancia $Ak'=12,92222$, tendríamos determinado el punto k'; y tirando por él y por n la $k'n$, tendríamos la direccion de la resultante: cuyos métodos se confirman los unos á los otros perfectísimamente; y lo mismo se egecutaria y resultaria en todos los demas casos.

51 Consideremos ahora las fuerzas P, P', P'', &c. (fig. 32) situadas en el espacio, y supongamos que obren sobre un punto libre m. Si no hay ninguna circunstancia que precise á tomar el orígen fuera de este punto, tiremos por él los eges rectangulares; pero si alguna circunstancia obligase á tomar el orígen fuera de dicho punto, ó estuviesen ya elegidos los eges y fuesen por egemplo los AX, AZ, AU, entónces lo primero que haríamos seria fijar la posicion del punto m determinando sus coordenadas, y por dicho punto tiraríamos tres eges mX', mZ', mU', paralelos á los anteriores; y espresando por α, β, γ, los ángulos que forma la primera fuerza P con los eges mX', mZ', mU': por α', β', γ', los que forma la segunda P' con los mismos eges, y así sucesivamente, tendrémos (34) que las componentes de P serán $P\cos.\alpha$, $P\cos.\beta$, $P\cos.\gamma$,
las de P' serán $P'\cos.\alpha'$, $P'\cos.\beta'$, $P'\cos.\gamma'$,
las de P'' serán $P''\cos.\alpha''$, $P''\cos.\beta''$, $P''\cos.\gamma''$, &c. &c.

Estas componentes obrarán en la direccion de los eges ó de sus prolongaciones, segun sean positivas ó negativas, lo que se conocerá por los signos que deban afectar á los cosenos. Y teniendo en consideracion los signos de las componentes, resulta (17) que todas las fuerzas que obren en la direccion de un mismo ege y su prolongacion, se reducirán á una sola igual á su *suma*; y espresando por X la suma de las componentes que obran en el sentido de las x: por Z la de las que obran en el sentido de las z: y por U la de las que obran en el sentido de las u, será

$$X=P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+P'''\cos.\alpha'''+\&c. \quad (30),$$
$$Z=P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+P'''\cos.\beta'''+\&c. \quad (31),$$
$$U=P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+P'''\cos.\gamma'''+\&c. \quad (32).$$

Luego tenemos reducidas todas las fuerzas del sistema á tres fuerzas rectangulares X, Z, U, cuyos valores pueden ser positivos ó negativos, y sus signos harán conocer el sentido en que obran estas fuerzas.

52 Esto supuesto, espresemos por R la resultante definitiva de las

fuerzas P, P', P'', &c., ó de las tres fuerzas X, Z, U, y por $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, los ángulos que forma con los eges mX', mZ', mU', de las x, z, u, ó con las tres fuerzas X, Z, U, y tendrémos en virtud de lo espuesto (§§ 33 y 34)

$$R^2 = X^2 + Z^2 + U^2 \ (33), \text{ ó } R = \sqrt{X^2 + Z^2 + U^2} \ (34),$$

$$\cos.\alpha_{,} = \frac{X}{R} \ (35), \ \cos.\beta_{,} = \frac{Z}{R} \ (36), \text{ y } \cos.\gamma_{,} = \frac{U}{R} \ (37).$$

53 Por medio de estos valores queda determinada completamente la resultante en direccion y magnitud. En efecto, las (ecs. 30, 31 y 32) darán los valores de X, Z y U; la (ec. 34) dará el valor absoluto de la resultante. Y aunque el radical podria tener dos valores, siempre se considera el valor positivo, pues la resultante no se considera sino de un solo modo, sin indicar nada relativo á su modo de existir con relacion á otra de su especie; y las (ecs. 35, 36 y 37) darán á conocer los ángulos que dicha resultante forma con los eges; y construyendo esta direccion como se ha manifestado (II. 183a) será necesario atender á los signos de $\cos.\alpha_{,}$, $\cos.\beta_{,}$, $\cos.\gamma_{,}$, que darán á conocer si los ángulos $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$ son agudos ú obtusos; y como la fuerza R es una cantidad positiva, estos cosenos serán respectivamente del mismo signo que X, Z, U.

54 Si las fuerzas P, P', P'', &c. se equilibran, no habrá resultante; luego se tendrá $R=0$ (38); por lo que $X^2+Z^2+U^2=0$ (39); siendo cada uno de estos términos un cuadrado, será precisamente una cantidad positiva; y como de la suma de tres cantidades positivas no puede resultar 0, tenemos que la ecuacion anterior no se podrá verificar á ménos que no se tenga separadamente

$$X^2=0,\ Z^2=0,\ U^2=0, \text{ ó } X=0 \ (40),\ Z=0 \ (41),\ U=0 \ (42);$$

ó lo que es lo mismo

$$P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \&c. = 0 \ (43),$$
$$P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \&c. = 0 \ (44),$$
$$P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \&c. = 0 \ (45).$$

Que *son las ecuaciones de equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas situadas de un modo cualquiera en el espacio*, y *aplicadas á un mismo punto que se supone enteramente libre.*

55 En un sistema de esta naturaleza, *una de las fuerzas debe ser igual y directamente opuesta á la resultante de todas las otras.*

En efecto, sea R la resultante de las fuerzas P, P', &c., ${}_{,}\alpha$, ${}_{,}\beta$, ${}_{,}\gamma$ los ángulos que ella forma con los eges, y supongamos para abreviar

$$P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + \&c. = X',$$
$$P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + \&c. = Z',$$
$$P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + P'''\cos.\gamma''' + \&c. = U';$$

y por lo que precede será $X'=R'\cos.{}_{,}\alpha$, $Z'=R'\cos.{}_{,}\beta$, $U'=R'\cos.{}_{,}\gamma$; y por consiguiente las (ecs. 43, 44 y 45) de equilibrio se convertirán en

$$\left.\begin{array}{l} P\cos.\alpha + X' = 0 \\ P\cos.\beta + Z' = 0 \\ P\cos.\gamma + U' = 0 \end{array}\right\} \text{ que dan } \left\{\begin{array}{l} P\cos.\alpha = -X' = -R'\cos.{}_{,}\alpha, \\ P\cos.\beta = -Z' = -R'\cos.{}_{,}\beta, \\ P\cos.\gamma = -U' = -R'\cos.{}_{,}\gamma. \end{array}\right.$$

Sumando los cuadrados de estas ecuaciones, tendrémos

$$P^2(\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma)=R'^2(\cos.^2{}_{,}\alpha+\cos.^2{}_{,}\beta+\cos.^2{}_{,}\gamma);$$

y como (II. § 187) $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$ y $\cos.^2{}_{,}\alpha+\cos.^2{}_{,}\beta+\cos.^2{}_{,}\gamma=1$, se tendrá $P^2=R'^2$, de donde $P=R'$; luego las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$\cos.\alpha=-\cos._{,}\alpha,\ \cos.\beta=-\cos._{,}\beta,\ \cos.\gamma=-\cos._{,}\gamma;$$

de donde se concluye (II. § 10) $\alpha=\pi-{}_{,}\alpha$, $\beta=\pi-{}_{,}\beta$, $\gamma=\pi-{}_{,}\gamma$.

Así, los ángulos α y ${}_{,}\alpha$; β y ${}_{,}\beta$; γ y ${}_{,}\gamma$, siendo suplementos los unos de los otros, manifiestan que la direccion de la fuerza coincide (II. 186 nota) con la prolongacion de la R'; luego *la fuerza* P *es igual y directamente opuesta á la resultante* R'.

56 Si llamamos x', z', u', las coordenadas del punto sobre que obran las fuerzas, tendrémos (II. 184 ec. o) que las ecuaciones de la linea de direccion de la resultante, serán

$$x-x'=a(u-u'),\ z-z'=b(u-u'),\ z-z'=\frac{b}{a}(x-x'):$$

en las cuales se tiene (II. § 183a) $a=\dfrac{\cos.\alpha_{,}}{\cos.\gamma_{,}}$, $b=\dfrac{\cos.\beta_{,}}{\cos.\gamma_{,}}$ y $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\cos.\beta_{,}}{\cos.\alpha_{,}}$;

y sustituyendo en vez de $\cos.\alpha_{,}$, $\cos.\beta_{,}$, $\cos.\gamma_{,}$, sus valores que dan las (ecs. 35, 36 y 37), y omitiendo el divisor comun en numerador y denominador, tendrémos $a=\dfrac{X}{U}$, $b=\dfrac{Z}{U}$, $\dfrac{b}{a}=\dfrac{Z}{X}$;

por lo que las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$x-x'=\frac{X}{U}(u-u'),\ z-z'=\frac{Z}{U}(u-u'),\ z-z'=\frac{Z}{X}(x-x');$$

ó quitando los divisores resultará $\begin{cases} U(x-x')=X(u-u') \ (46), \\ U(z-z')=Z(u-u') \ (47), \\ X(z-z')=Z(x-x') \ (48); \end{cases}$

de las que una cualquiera siempre está comprendida en las otras dos.

57 Las condiciones que reducen á cero la resultante independientemente de las coordenadas x, z, u, son $X=0$, $Z=0$, $U=0$, y se vuelven á encontrar así las ecuaciones de equilibrio.

Si se verificasen solo dos de estas ecuaciones, por egemplo las dos primeras, resultaria (ecs. 34, 35, 36 y 37)

$R=U$, $\cos.\alpha_{,}=0$, $\cos.\beta_{,}=0$, y $\cos.\gamma_{,}=1$, que dan $\alpha_{,}=\frac{1}{2}\pi$, $\beta_{,}=\frac{1}{2}\pi$, $\gamma_{,}=0$;

luego la resultante pasa por el ege de las u, es decir, que hay parcialmente equilibrio en la direccion de los eges de las x y de las z.

58 En el caso de ser $X=0$ solamente, se halla

$$R=\sqrt{Z^2+U^2}\ (49),\ \cos.\alpha_{,}=0\ (50),\ \text{de donde } \alpha_{,}=\tfrac{1}{2}\pi;$$

y entónces la resultante se halla en el plano de las zu.

59 Si espresamos por φ el ángulo que R forma con su proyeccion sobre el plano de las xz, y por ψ el ángulo que esta proyeccion forma con la fuerza X, tendrémos tambien determinada la direccion de R por las fórmulas tang.$\psi=\frac{Z}{X}$ (51), y tang.$\varphi=\frac{U}{\sqrt{X^2+Z^2}}$ (52) (*).

60 Puede ocurrir el tratar de sustituir á las potencias P, P', P'', &c. tres fuerzas F, F', F'', que formen con los eges coordenados ángulos dados, cuyos cosenos fuesen respectivamente $d, e, f; d', e', f'; d'', e'', f''$. Entónces estas fuerzas descompuestas segun los eges de las x, de las z, y de las u, deberán equivaler á las fuerzas X, Z, U, á que se reducen las P, P', P'', &c.; por lo cual las tres (ecs. 30, 31 y 32) se convertirán en

$$\begin{cases} X=dF+d'F'+d''F'' & (53), \\ Z=eF+e'F'+e''F'' & (54), \\ U=fF+f'F'+f''F'' & (55); \end{cases}$$

de las cuales se deducen por la eliminacion las fuerzas F, F', F'', en valores de X, Z y U, que son dadas por las (ecs. 30, 31 y 32) en valores de P, P', P'', &c., y de los ángulos que forman estas lineas con los eges.

61 Teor. *Para determinar segun una direccion dada, diferente de la suya, una fuerza cuyas componentes con relacion á eges rectangulares se conocen ya, es necesario tomar la suma de estas componentes multiplicadas respectivamente por los cosenos de los ángulos que ellas forman con la nueva direccion.*

Dem. Si se espresa por θ el ángulo que forma la direccion de una fuerza y la direccion en que queremos estimarla, y por α, β, γ; α', β', γ', los ángulos de cada una de ellas con tres eges rectangulares tirados por la interseccion de las dos rectas, se sabe (II. 187) que

$$\cos.\theta=\cos.\alpha\cos.\alpha'+\cos.\beta\cos.\beta'+\cos.\gamma\cos\gamma'.$$

Si se considera una fuerza R dirigida segun la recta que forma los ángulos α, β, γ, con los eges de las x, z, u, esta fuerza estimada segun la direccion de la segunda recta, es decir, proyectada sobre esta recta, dará para su proyeccion (II. § 340) $R\cos.\theta$, y multiplicando por R la ecuacion anterior, será

$$R\cos.\theta=R\cos.\alpha\cos.\alpha'+R\cos.\beta\cos.\beta'+R\cos.\gamma\cos.\gamma';$$

(*) *En efecto, el triángulo* mBE (*fig.* 21) *rectángulo en* B, *da* $tang.B\mathrm{m}E=\frac{BE}{\mathrm{m}B}$; *y el* m$FE$ *rectángulo en* E, *da* $tang.F\mathrm{m}E=\frac{BE}{\mathrm{m}E}$; *y como el ángulo* $F\mathrm{m}E$ *es el que forma la resultante con su proyeccion* mE, *que es lo que aquí llamamos* φ, *y el* $B\mathrm{m}E$ *es el que forma la* mR *con su proyeccion, que aquí espresamos por* ψ, *y* FE *es la fuerza que llamamos* U, *y* mB, BE, *son las* X, Z, *resulta*

$$\mathrm{m}E=\sqrt{\mathrm{m}B^2+BE^2}=\sqrt{X^2+Z^2},$$

cuyos valores sustituidos en las ecuaciones anteriores dan las del testo.

y siendo R la resultante de las fuerzas P, P', P'', &c., se tendrá (ec. 9)

$$X=R\cos.\alpha,\ Z=R\cos.\beta,\ U=R\cos.\gamma;$$

y espresando por R' el valor $R\cos.\theta$, y sustituyendo estos valores en la última ecuacion, tendrémos $R'=X\cos.\alpha'+Z\cos.\beta'+U\cos.\gamma'$ (56), que espresa la proposicion enunciada.

{ 62 Si las fuerzas aplicadas á un mismo punto y situadas en diferentes planos, solo son tres, tales como P, P', P'', espresando por α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'', los ángulos que estas forman con los eges rectangulares, tendrémos

$$\begin{cases} X=P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha'', \\ Z=P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta'', \\ U=P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''; \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando resultará

$$X^2+Z^2+U^2=P^2\cos.^2\alpha+P'^2\cos.^2\alpha'+P''^2\cos.^2\alpha''+2PP'\cos.\alpha\cos.\alpha'+ 2PP''\cos.\alpha\cos.\alpha''+2P'P''\cos.\alpha'\cos.\alpha''+P^2\cos.^2\beta+P'^2\cos.^2\beta'+ P''^2\cos.^2\beta''+2PP'\cos.\beta\cos.\beta'+2PP''\cos.\beta\cos.\beta''+2P'P''\cos.\beta'\cos.\beta''+ P^2\cos.^2\gamma+P'\cos.^2\gamma'+P''^2\cos.^2\gamma''+2PP'\cos.\gamma\cos.\gamma'+ 2PP''\cos.\gamma\cos.\gamma''+2P'P''\cos.\gamma'\cos.\gamma'';$$

y teniendo presente que el primer miembro equivale (ec. 33) á R^2, y espresando por a el ángulo que forman las fuerzas P y P', por b el que forman P y P'', y por c el que forman P' y P'', se tendrá (II. § 187),

$$\cos.a=\cos.\alpha\ \cos.\alpha'+\cos.\beta\ \cos.\beta'+\cos.\gamma\ \cos.\gamma',$$
$$\cos.b=\cos.\alpha\ \cos.\alpha''+\cos.\beta\ \cos.\beta''+\cos.\gamma\ \cos.\gamma'',$$
$$\cos.c=\cos.\alpha'\cos.\alpha''+\cos.\beta'\cos.\beta''+\cos.\gamma'\cos.\gamma'',$$

y $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$, $\cos.^2\alpha'+\cos.^2\beta'+\cos.^2\gamma'=1$;

de donde saldrá $R^2=P^2+P'^2+P''^2+2PP'\cos.a+2PP''\cos.b+2P'P''\cos.c$, ó llamando para mayor claridad P, Q, S, á las potencias, será

$$R^2=P^2+Q^2+S^2+2PQ\cos.a+2PS\cos.b+2QS\cos.c\ (57).$$

{ 63 Si el punto m á que están aplicadas las fuerzas P, P', P'', &c., está sujeto á permanecer sobre una superficie dada, no será ya necesario para el equilibrio que la resultante de estas fuerzas sea nula; pero será preciso el que *sea normal á la superficie*, *á fin de que el punto* m *no pueda resbalar en ningun sentido sobre esta superficie.* En efecto, si dicha resultante no fuese normal á dicha superficie, podríamos descomponerla en dos, que la una fuese normal y la otra tangente á dicha superficie. La fuerza normal quedaria destruida por la resistencia de la superficie; y como nada impediria el movimiento del punto en la direccion de la otra, no podria haber equilibrio. Luego tenemos que la resistencia que opone dicha superficie equivale á una fuerza igual y contraria á la fuerza normal destruida; por lo que se puede hacer abstraccion de la superficie dada, y considerar el punto material como libre, con tal que se añada á las fuerzas P, P', P'', &c., que obran sobre este punto una nueva fuerza de magnitud desconocida y perpendicular á la superficie dada. }

Del equilibrio de un cuerpo sólido.

64 Hasta aquí solo hemos investigado las condiciones de equilibrio de un punto material. Ahora vamos á indagar las condiciones de equilibrio de un sistema de puntos unidos entre sí de un modo invariable, y sometidos á la accion de cualesquiera fuerzas.

Más para proceder de lo simple á lo compuesto, examinarémos primero dos casos particulares, á saber: cuando las fuerzas dadas son paralelas entre sí; y cuando todas están situadas en un mismo plano. Y harémos ver despues que el caso general se puede referir á estos dos sistemas de fuerzas.

Composicion y equilibrio de las fuerzas paralelas.

65 Teor. *La resultante de dos fuerzas paralelas que obran en el mismo sentido, es paralela á la direccion de estas fuerzas é igual á su suma; y las distancias de la direccion de esta resultante á las de las componentes son recíprocamente proporcionales á estas fuerzas.*

Dem. Supongamos que P y Q sean dos fuerzas paralelas representadas por AM y BI (fig. 33), y que se hallen aplicadas á la recta inflexible AB; si á la recta AB aplicamos las fuerzas AH, BK, iguales y contrarias, no se alterará en manera alguna el valor de la resultante (21 cor. 2.º). Esto supuesto, construyamos los paralelogramos AHLM, BKNI, y tendrémos que la resultante de las dos fuerzas P y Q será la misma que la de las fuerzas AL y BN. Ahora, por ser las AM, BI paralelas, tendrémos (I. 386a 4.º) que los ángulos $\mathrm{MAB}+\mathrm{IBA}=\pi$;
luego $\mathrm{LAB}+\mathrm{ABN}>\pi$, y por lo mismo los $\mathrm{BAE}+\mathrm{ABE}<\pi$;
luego las dos fuerzas AL, BN concurrirán (I. 386b) en un punto por la parte superior de AB, tal como E; luego si concebimos aplicadas estas dos fuerzas (20) en el punto de concurso E, y representadas por $\mathrm{EZ}=\mathrm{AL}$ y $\mathrm{EV}=\mathrm{BN}$, tiramos la EC paralela á las AM, BI, y construimos los paralelogramos EGZT y EDVO, tendrémos descompuestas cada una de las EZ, EV, en otras dos, á saber: la EZ en EG y ET, y la EV en ED y EO; y la resultante de las dos fuerzas P y Q será aun la misma que la de las cuatro fuerzas EG, ED, ET y EO; pero las dos primeras son iguales entre sí, por serlo con las AH, BK, á causa de la igualdad de los triángulos EGZ, ALH, y EDV, BKN (I. 376 cor. 2.º); y como obran sobre un mismo punto E y en direcciones contrarias, se destruirán, y solo quedará para formar la resultante las dos fuerzas ET y EO que obran en el mismo sentido en la direccion de EC, y que por consiguiente se reducen á una sola igual á su suma (14), luego $R=\mathrm{ET}+\mathrm{EO}$;
y como $\mathrm{ET}=\mathrm{AM}=P$ y $\mathrm{EO}=\mathrm{BI}=Q$, resulta $R=P+Q$ (58);
luego *la resultante es igual á la suma de las componentes, su direccion EC es paralela á la de estas, y obra en el mismo sentido.*

Para determinar la posicion del punto C en que corta la resultante á la linea dada AB, observarémos que los triángulos EZT y EAC son semejantes (I. 482), y por lo mismo dan ET:EC::ZT:AC;
y los EOV y ECB nos dan tambien EC:EO::CB:OV;
multiplicando estas dos proporciones, y suprimiendo el factor EC que resulta comun en la primera razon, y en la segunda los ZT y OV que son iguales por serlo con GE, ED que lo son, se tendrá ET:EO::BC:AC;
y siendo ET=AM=P, y EO=BI=Q, se tendrá P:Q::BC:AC;
con lo cual queda demostrada la proposicion en todas sus partes.

66 Componiendo esta proporcion, será P+Q:P::BC+AC:BC,
ó poniendo en vez de P+Q su igual R, y en vez de BC+AC su igual AB, tendrémos R:P::AB:BC;
y comparando con el consecuente, será R:Q::AB:AC;
y en virtud de lo espuesto (I. § 267 cor. de teor. 2.º), podrémos poner
R:AB::P:BC::Q:AC, ó (I. § 268) R:P:Q::AB:BC:AC.

Pero si por un punto cualquiera de una de las fuerzas ó de su resultante, se tira una recta *mon*, de cualquier modo que sea, que encuentre á las fuerzas ó á sus prolongaciones, se verificará (I. 477 cor.) siempre que AB:BC:AC::*mn*:*no*:*mo*;
luego podrémos poner (I. 267 teor. 2.º) R:P:Q::*mn*:*no*:*mo*;
donde se ve que *si se cortan las direcciones de dos fuerzas paralelas y de su resultante por una recta cualquiera, cada una de estas fuerzas podrá estar representada por la parte de esta recta interceptada por las otras dos*; pues estas partes son proporcionales con las intensidades de dichas fuerzas.

67 La anterior serie de razones iguales nos da las tres proporciones

$$\text{siguientes}\begin{cases} R:\ P::\ mn:\ no, \text{ que da } R\times no=P\times mn \quad (59);\\ R:\ Q::\ mn:mo, \text{ que da } R\times mo=Q\times mn \quad (60);\\ P:\ Q::\ no:\ mo, \text{ que da } P\times mo=Q\times no \quad (61).\end{cases}$$

Con estas tres ecuaciones y con la (ec. 58) tenemos lo suficiente para resolver completamente el problema de la composicion de dos fuerzas paralelas que obren en una misma direccion.

En efecto, dadas las fuerzas P y Q, la (ec. 58) da la magnitud de la resultante R, y por medio de cualquiera de las dos (ecs. 59 ó 60) determinarémos el punto *o* por donde debe pasar; la (ec. 59) da

$$no=\frac{P\times mn}{R}, \text{ y la (ec. 60) } mo=\frac{Q\times mn}{R};$$

ó poniendo P+Q en vez de R, será $no=\dfrac{P\times mn}{P+Q}$ (62), $mo=\dfrac{Q\times mn}{P+Q}$ (63);

teniendo presente que el punto o *de aplicacion de la resultante, en este caso de obrar las componentes en un mismo sentido, se ha de hallar entre los* m *y* n; pues la resultante ER debe pasar (23) por dentro del ángulo LEN (fig. 15); y siendo paralela á las AM, BQ, por precision ha de cortar á la AB en un punto entre A y B ó á la *mn* en un punto entre *m* y *n*.

Cor. Si se supusiese $P=Q$, seria $no=\frac{1}{2}mn=mo$; que quiere decir *que la resultante de dos fuerzas paralelas é iguales, pasa por el medio de la recta que une sus puntos de aplicacion.*

Esc. Como dos paralelas están siempre en un mismo plano (I. 543 cor. 2.º), y aquí hemos visto que la EC se ha de hallar (22) en el plano de las LE, NE, que es el de las MA, BI, resulta en general que *la resultante de dos fuerzas paralelas se halla siempre en el plano de estas fuerzas.*

68 Teor. *Cuando una de las dos componentes obra en direccion contraria á la otra, entónces se verifica:* 1.º *que la resultante es igual á la diferencia de las componentes, y obra en el sentido de la mayor;* 2.º *que no cae entre las dos, sino que las deja á ambas á un lado, quedando en medio la mayor;* y 3.º *que se tienen las mismas ecuaciones entre las intensidades de las fuerzas y las distancias respectivas de sus puntos de aplicacion.*

Dem. Para demostrarlo directamente y con toda exactitud y claridad, emplearémos la misma construccion que en el caso anterior. Por lo que supondrémos que AM y BI (fig. 34) espresen las intensidades y direcciones de las fuerzas P y Q, que obran en direcciones opuestas. Si á este sistema de fuerzas añadimos las dos BK, AH iguales y directamente opuestas, esto en manera alguna alterará el sistema (21 cor. 2.º); pero las dos fuerzas Q y BK producen la resultante BN: las P y AH producen la AL; luego la resultante de las cuatro fuerzas P, Q, BK y AH, que es la de las P y Q, será la misma que la de BN y AL.

Ahora, en los triángulos BIN, LAM, que tienen un lado IN=LM por ser iguales con BK y AH que lo son por el supuesto, y el ángulo BIN=AML (I. 386c), se verifica que los otros lados del primero son menores que los del segundo; luego el ángulo IBN será mayor (*) que el MAL; por consiguiente añadiendo á cada uno de ellos uno de los dos ángulos iguales ABI, BAM, tendrémos que el ángulo ABN será mayor que el BAL; y como ABN+ABE=π, tendrémos LAB+ABE<π; luego las dos lineas BN, AL prolongadas suficientemente se llegarán á encontrar en un punto tal como E por la parte inferior de la AB; y como la paralela que se tire desde E á las AM, BI, debe formar con la AE el ángulo AEC=EAM por alternos internos, resulta que dicha paralela EC no podrá cortar á la AB, sino á su prolongacion.

Concibamos ahora la fuerza BN trasportada (20) al punto E, y espre-

(*) *En efecto, si concibiéramos superpuesto el triángulo AML sobre el BIN de modo que el lado LM se confundiese con su igual IN y el ángulo LMA con su igual BIN, tendríamos que por ser AM>BI, el punto A caeria por la parte inferior al punto B, por egemplo en S; y tendríamos que el ángulo IBN, esterno del triángulo BSN seria mayor (I. 368) que el BSN=LAM; luego se verificará la proposicion: lo cual tambien lo hubiéramos podido deducir de lo espuesto (I. 458).*

sémosla por DE=BN, obrando en la direccion de D á E; concibamos tambien la AL trasportada al mismo punto E de su direccion y representada por ZE=AL, obrando de Z á E; y descompongámoslas cada una en dos, que sean la una paralela á la AB y la otra paralela á la direccion AM ó BI de las fuerzas; con lo cual tendrémos que las componentes de ZE=AL serán GE y TE, y las de DE serán VE y OE. Por consiguiente la resultante de AL y BN que es la de las fuerzas dadas P y Q, será la de estas cuatro fuerzas. Ahora, los triángulos ALM, EGZ son iguales por la misma razon que en el caso anterior, y lo mismo se verifica con los BKN, DEO; luego

EG=TZ=LM=AH=BK=DO=VE, EO=BI=Q, ET=GZ=AM=P;

por lo cual las dos fuerzas GE y VE que son iguales y directamente opuestas, se destruirán; y como las EO y ET son tambien directamente opuestas, resulta que producirán una resultante R igual á su diferencia, esto es R=ET—EO=P—Q (64);

luego la resultante de las cuatro fuerzas EG, EV, ET, EO, que es la de las P y Q, será igual á la diferencia de estas fuerzas, y obrará en el sentido de la mayor, que era L. 1.° Q. D. D.

Ahora, como hemos visto ántes que la EC no puede cortar á la AB, sino á su prolongacion, se deduce que la direccion EC de la resultante deja á un lado á las dos fuerzas P y Q, estando mas próxima de la mayor, que es la que queda en medio. L. 2.° Q. D. D.

Para demostrar que se verifican las mismas (ecs. 59, 60, 61), los triángulos semejantes (I. 482) EZT, EAC, dan ET:EC::ZT:AC; los DEO, ECB que tambien son semejantes dan EC:EO::CB:DO; multiplicando estas dos proporciones, suprimiendo EC en los dos términos de la primera razon, y ZT, DO en los de la segunda, se tendrá

ET:EO::CB:AC;

la cual dividida comparando primero con el consecuente y despues con el antecedente, da $\begin{cases} \text{ET—EO:EO::CB—AC:AC}, \\ \text{ET—EO:ET::CB—AC:CB}; \end{cases}$

y como ET—EO=R, TE=MA=P, OE=BI=Q, y CB—AC=AB, estas dos proporciones se convertirán en R:Q::AB:AC, R:P::AB:CB, que podrémos poner tambien del modo siguiente: R:P:Q::AB:CB:AC.

Pero de cualquier modo que se tire la recta nmo que corte á las fuerzas ó á sus prolongaciones, siempre se tiene (I. 477 cor.)

AB:CB:AC::mn:no:mo;

luego (I. 267 teor. 2.°) tendrémos R:P:Q::mn:no:mo;

de donde se saca del mismo modo que en el párrafo anterior

$R\times no = P\times mn$ (65), $R\times mo = Q\times mn$ (66), $P\times mo = Q\times no$ (67).

Luego queda demostrada la proposicion en todas sus partes.

69 Despejando las no y mo en las (ecs. 65 y 66) se tendrá

$$no=\frac{P\times mn}{R},\quad mo=\frac{Q\times mn}{R},$$

que son las mismas que las (ecs. 59 y 60), y tanto unas como otras las podrémos traducir en regla diciendo: *que para hallar el punto por donde debe pasar la resultante se multiplicará la distancia que tienen entre sí las componentes por una cualquiera de ellas, y se dividirá el producto por la resultante*; con lo cual se tendrá *la distancia á que pasa la resultante respecto de la otra componente, contada en la misma recta en que se contó la distancia de las dos componentes*; y para saber á qué lado se debe tomar esta distancia, observarémos que *si las fuerzas obran en una misma direccion, la resultante debe pasar por dentro de las componentes*: *y si obran en direcciones opuestas, deberá caer á un lado de ellas estando mas próxima de la mayor.*

70 Si en vez de R sustituimos su valor $P—Q$ en las ecuaciones anteriores, tendrémos $no=\frac{P\times mn}{P—Q}$ (68), $mo=\frac{Q\times mn}{P—Q}$ (69).

Con el auxilio de las (ecs. 65, 66 y 67) que son las mismas que las (ecs. 59, 60 y 61), y de las (ecs. 58 y 64), podrémos resolver todos los casos que puedan ocurrir de descomposicion de una fuerza en otras dos que sean paralelas.

71 El caso de las fuerzas paralelas que obran en sentidos opuestos presenta una circunstancia particular que conviene dar á conocer. En efecto, la (ec. 68) manifiesta que el punto de aplicacion o de la resultante sobre la recta mn se aleja indefinidamente á medida que la fuerza P se aproxima á ser igual con la fuerza Q; al mismo tiempo la resultante R que es igual con $P—Q$ disminuye; y en fin cuando se tiene $P=Q$, el cálculo da una resultante nula colocada á una distancia infinita de las componentes. Más en realidad dos fuerzas paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas, no pueden tener resultante; pues si pudiesen estar remplazadas por una fuerza única, no habria razon para que esta obrase mas bien en el sentido de la una de las dos fuerzas iguales que en el sentido de la otra; porque todo es absolutamente semejante con relacion á estas dos fuerzas; y en este caso las fuerzas no pueden tener otro efecto que el de hacer girar á la linea mn al rededor de su punto medio.

Esto mismo lo da á conocer la (fig. 35); pues si supusiéramos en ella que P=AM=Q=BI, añadiendo las dos fuerzas BK, AH iguales, las resultantes AL, BN serán iguales, á causa de la igualdad de los triángulos AML, BIN (I. 360), los cuales dan tambien los ángulos IBN, LAM iguales; y añadiéndoles los ángulos iguales ABI, BAM, tendríamos que serian iguales los ángulos ABN, BAL; luego las lineas BN, AL (I. 384) serian paralelas y no podrian concurrir en ningun punto, como lo hacian en el caso de no ser iguales las fuerzas P y Q. Por lo demas este caso es el solo en que dos fuerzas paralelas no pueden reducirse á una sola.

Esc. La misma figura manifiesta que pues la introduccion de las

fuerzas BK, AH no altera en manera alguna el efecto de las dos fuerzas dadas P y Q, tendrémos que el efecto de estas es el mismo que el de las BN, AL; y como segun el valor que supongamos á BK=AH, tendrémos otro valor diferente para BN=AL, y se verificará (I. 638) que AM:AL::sen.ALM:sen.AML::sen.LAB:sen.MAB,
resulta en general que *el efecto de las fuerzas* P *y* Q *iguales y paralelas, pero no directamente opuestas, será el mismo que el de otras dos fuerzas que pasando por los mismos puntos de aplicacion sean de direccion contraria, iguales entre sí y paralelas, siempre que estas fuerzas y las primeras estén en razon inversa de los senos de los ángulos que forman con la linea de aplicacion.*

72 *La resultante de muchas fuerzas paralelas* P, P′, P″, &c. (fig. 36) *ya estén ó no en un mismo plano, es igual á la suma de estas fuerzas, dándoles signos convenientes.* Porque siendo paralelas las fuerzas P y P', su resultante R' es paralela á estas fuerzas y se tiene $R'=P+P'$; y siendo R' y P'' paralelas á P, son paralelas entre sí; luego su resultante R'' es paralela á estas fuerzas, y se tiene $R''=R'+P''$ ó $R''=P+P'+P''$, y así sucesivamente. Si la fuerza P'' obrase en direccion opuesta á las P y P', al hallar la resultante de R' y P, tendríamos $R''=R'-P''$; y sustituyendo por R' su valor $P+P'$, seria $R''=P+P'-P''$, que es la suma de P, P' y $-P''$, en términos algebráicos; y como sucederia lo mismo si hubiese mas fuerzas, queda demostrada la proposicion.

Cor. Luego si espresamos por R la resultante de un número cualquiera de fuerzas P, P', P'', P''', P^{IV}, &c., de las cuales supondrémos que las tres primeras obran en una misma direccion y las restantes en direcciones contrarias, tendrémos $R=P+P'+P''-P'''-P^{IV}-$&c. (70).

73 Para encontrar el punto de aplicacion de la resultante, se unirán los puntos de aplicacion de P y P' por una recta que se dividirá en razon inversa de dichas fuerzas; despues se unirá este punto de aplicacion con el de P'', y se dividirá la linea que los une en razon inversa de $R'=P+P'$ y de P'';
y así se procederá hasta encontrar el punto de aplicacion de todas.

Si queremos que se presente á los ojos este procedimiento, supongamos que se quiera hallar el punto de aplicacion de la resultante de las fuerzas P, P', P'', P''', P^{IV} (fig. 36), cuyos puntos de aplicacion son A, B, C, D, E, que supondrémos unidos entre sí por rectas inflexibles.

El punto M de aplicacion de la resultante de las fuerzas P y P' lo hallarémos (ec. 63) por la fórmula $AM=\frac{AB\times P'}{P+P'}$;
uniendo el punto M con el punto C por medio de la recta MC, se hallará el punto de aplicacion N de la resultante de $P+P'$ aplicada en M, y de la fuerza P'' aplicada en C, por la ecuacion $MN=\frac{MC\times P''}{P+P'+P''}$.

Tirando despues ND, y buscando por el mismo procedimiento el punto de aplicacion O de la resultante de $P+P'+P''$ aplicada en N, y de la fuerza P''' aplicada en D, se hallará el punto por el cual debe pasar esta resultante; en fin, se tirará la EO, y por una operacion semejante se conocerá el punto de aplicacion K de la resultante R de todas estas fuerzas.

74 En el caso de haber fuerzas dirigidas en sentidos contrarios, supongamos que P, P', P'', *&c.* sean las que obran en un sentido, y Q, Q', Q'', *&c.* las que obran en el opuesto; entónces hallarémos por el procedimiento anterior el punto de aplicacion K (fig. 37) de la resultante de las fuerzas P, P', P'', *&c.*, y el punto de aplicacion L de las fuerzas Q, Q', Q'', *&c.*, y tendrémos reducido todo el sistema á dos fuerzas paralelas, la una aplicada en K igual á $P+P'+P''+$*&c.* y la otra aplicada en L igual á $Q+Q'+Q''+$*&c.*, y se hallará la resultante de estas fuerzas y su punto de aplicacion por el procedimiento espuesto (68 y 69).

Cor. De aquí se deduce que *si todos los puntos de aplicacion A, B, C, D, E, (fig. 39) se hallasen en un mismo plano, el punto de aplicacion K de la resultante de todas las fuerzas, se hallará en el mismo plano*; porque debiendo estar el punto M en la recta que une el punto A de aplicacion de la fuerza P con el B de la P', se hallará en el plano en que está dicha recta, que es el de los puntos A y B y de todos los demas puntos de aplicacion C, D, E; y debiendo hallarse el punto N en la recta MC, estará en el plano en que se hallen los puntos M y C, que es el de los demas: y lo mismo demostraríamos respecto del punto O y del K que es el punto de aplicacion de la resultante definitiva. Tambien resulta por la misma razon, que *si todos los puntos de aplicacion se hallasen en linea recta, el punto de aplicacion de la resultante, se hallaria en la misma recta.*

75 *Si las fuerzas dadas, permaneciendo siempre paralelas y aplicadas á los mismos puntos, toman posiciones diferentes, ó lo que es lo mismo, giran al rededor de su punto de aplicacion, la resultante no mudará de punto de aplicacion, ni de intensidad; pero su direccion será paralela á la nueva direccion de las fuerzas.*

Para demostrarlo supongamos que sean tres las fuerzas paralelas P, P', P'', dirigidas segun las rectas mA, m'A$'$, m''A$''$ (fig. 38); sea primero nB la direccion de la resultante de las fuerzas P y P' que espresarémos por r, y será $r=P+P'$; sea despues n'B$'$ la direccion de la resultante de las fuerzas $P+P'$ y P'', y observemos que la figura supone que P'' obra en sentido contrario al de P y P', y que se tenga $P''>P+P'$. Ahora, concibamos que las tres fuerzas P, P', P'', giren al rededor de sus puntos de aplicacion m, m', m'', conservando su paralelismo, y el sentido en que obra cada una; y sean ma, $m'a'$, $m''a''$, las nuevas direcciones. En este caso, la resultante de las fuerzas P y P' encontrará á la recta mm' en el mismo punto n que ántes; pues la posicion de este punto no depende sino de la relacion de las componentes, y de la distancia de sus puntos de aplicacion, y es independiente del ángulo que la recta mn' forma con su direccion (65 y 68). Por la misma razon, la resultante de $r=P+P'$ y P'', encontrará siempre á la prolongacion de la recta nm'' en el mismo punto n'; por consiguiente si las tres fuerzas dadas giran al rededor de los puntos m, m' y m'', su resultante girará del mismo modo al rededor de su punto de aplicacion n', sin que su magnitud absoluta varíe, pues siempre será igual á la suma algebráica de todas las componentes.

76 Se llama *centro de las fuerzas paralelas* al punto en que se vienen á encontrar todas las direcciones sucesivas de la resultante cuando las componentes giran al rededor de sus puntos respectivos de aplicacion.

De esta definicion resulta *que si un cuerpo sólido está solicitado por un número cualquiera de fuerzas paralelas*, y *se supone fijo el centro de estas fuerzas*, *el equilibrio subsistirá en todas las posiciones que pueda tomar dicho cuerpo*, *con tal que las fuerzas dadas permanezcan siempre paralelas y aplicadas á los mismos puntos*; porque entónces su resultante pasará constantemente por el punto fijo; lo que bastará para que sea destruida (21). En lo sucesivo verémos lo mucho que importa considerar el centro de las fuerzas paralelas en las cuestiones relativas al equilibrio y al movimiento de los cuerpos pesados, y darémos los medios de determinar sus coordenadas en funcion de las de los puntos de aplicacion de las componentes.

De los momentos.

77 Se llama en general *momento de una fuerza* al producto que resulta de multiplicar esta fuerza por la distancia de su direccion á un punto fijo; ó por la distancia de su punto de aplicacion á una linea ó á un plano dado de posicion: no conviniendo á la palabra *momento* otra idea que la de un simple producto de dos números, de los cuales el uno espresa la fuerza y el otro la distancia.

78 Cuando el momento es el producto de la fuerza por la distancia de su direccion á un punto, se ha de tener cuidado de espresar que el *momento es con relacion á un punto*; y si hay muchas fuerzas en un sistema, cuyos momentos se tomen con relacion á un mismo punto, entónces á este punto se le llamará *centro* ú *orígen* de los momentos.

79 Cuando el momento es el producto de la fuerza por la distancia de su punto de aplicacion á una linea dada, se ha de tener cuidado de espresar que *el momento es con relacion á una linea*. Y cuando es el producto de la fuerza por la distancia de su punto de aplicacion á un plano dado, se cuidará de espresar que *el momento es con relacion á un plano*.

80 Esta especificacion es tanto mas indispensable, cuanto *los momentos con relacion á un punto difieren* esencialmente *de los momentos*

con relacion á una linea y *con relacion á un plano.* En efecto, los momentos con relacion á un punto dependen de la direccion de las fuerzas, y son independientes de los puntos de aplicacion; y al contrario, los momentos con relacion á una linea y con relacion á un plano, dependen de los puntos de aplicacion de las fuerzas, y son independientes de su direccion. Pero en todos se verifica la propiedad de que *el momento de la resultante es igual á la suma algebráica de los momentos de las componentes*, como vamos á manifestar.

81 Teor. *El momento de la resultante de dos fuerzas paralelas con relacion á un punto cualquiera, tomado en el plano de estas fuerzas, es igual á la suma de los momentos de estas fuerzas.*

Dem. Para demostrarlo, supongamos que desde un punto cualquiera A (fig. 39) tomado en el plano de las fuerzas paralelas P y Q, tiremos la recta Amon perpendicular á las direcciones de estas fuerzas y de su resultante R. El punto o de aplicacion de esta resultante debe estar situado de manera que se tenga (ec. 61) $P\times mo=Q\times no$;

pero $mo=\text{A}o-\text{A}m$, y $on=\text{A}n-\text{A}o$;

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion precedente se tendrá

$$P\times(\text{A}o-\text{A}m)=Q\times(\text{A}n-\text{A}o),$$

que egecutando las operaciones, y pasando al primer miembro los términos multiplicados por Ao, que sacarémos fuera de un paréntesis, será

$$(P+Q)\times\text{A}o=P\times\text{A}m+Q\times\text{A}n;$$

ó poniendo R (ec. 58) en vez de $P+Q$ se tendrá $R\times\text{A}o=P\times\text{A}m+Q\times\text{A}n$ (71).

Pero $R\times\text{A}o$ es el momento de la resultante con relacion al punto A; $P\times\text{A}m$ y $Q\times\text{A}n$ son los momentos de las componentes con relacion al mismo punto, luego la ecuacion anterior manifiesta L. Q. D. D.

82 *Esc.* Para mayor claridad espresarémos las distancias Am, An y Ao por p, q, r, y tendrémos $Rr=Pp+Qq$ (72).

83 *Si una de estas fuerzas obrase en sentido contrario al de la otra, seria necesario mudar su signo; y tambien se mudaria el signo de su distancia al punto A, si la direccion de esta fuerza estuviese situada al otro lado de este punto.*

Para convencernos de ello observarémos que si la fuerza Q fuese negativa con relacion á la P como espresa la (fig. 40), tendríamos tambien (ec. 67) $Q\times no=P\times mo$;

y si tomamos el orígen de los momentos en A, tendrémos

$no=\text{A}n-\text{A}o$, $mo=\text{A}m-\text{A}o$; por lo que será $Q\times(\text{A}n-\text{A}o)=P\times(\text{A}m-\text{A}o)$, que egecutando las operaciones se tiene $Q\times\text{A}n-Q\times\text{A}o=P\times\text{A}m-P\times\text{A}o$; y poniendo en el primer miembro los términos en que entra Ao, y descomponiendo en factores, se tendrá $\text{A}o(P-Q)=P\times\text{A}m-Q\times\text{A}n$;

y como en este caso (ec. 64) $P-Q=R$,

si sustituimos este valor y espresamos con r la Ao, con p la Am, y con q la An, se tendrá $Rr=Pp-Qq$ (73).

84 Si el centro de los momentos estuviese comprendido por las fuerzas, entónces se considerarian como positivas las distancias que desde di-

cho punto fuesen á las fuerzas que estuviesen á su derecha, y como negativas las que fuesen á las que estuviesen á su izquierda; es decir, que si el orígen estuviese en A (fig. 41), deberíamos considerar como positivas las distancias $Ao=r$, $An=q$, y como negativa la $Am=p$;
y haciendo esta mudanza en la (ec. 72) se tendrá $Rr=Qq-Pp$.

Para demostrarlo partirémos de la misma (ec. 61 ó 67) $P\times mo=Q\times no$;
y como aquí $mo=mA+Ao$, y $on=An-Ao$, será $P\times(mA+Ao)=Q\times(An-Ao)$; que egecutando la multiplicacion y trasladando al primer miembro los términos en que entra Ao que sacarémos fuera de un paréntesis, y al segundo los otros, será $(P+Q)\times Ao=Q\times An-P\times Am$;
ó por ser $R=P+Q$, si espresamos las Ao, An, Am, por r, q, p, como ántes, se tendrá $Rr=Qq-Pp$ (74).

85 Si sucediese que el orígen de los momentos se hallase dentro de las direcciones de las fuerzas, y al mismo tiempo hubiese fuerzas que cooperasen en sentidos opuestos las unas de las otras, entónces se señalarian con el signo positivo las distancias que partiesen del punto de orígen á las fuerzas que estuviesen á su derecha, y con el signo negativo las de las fuerzas que estuviesen á la izquierda; y tambien deberíamos señalar con el signo positivo las fuerzas que obrasen hácia abajo de la linea en que se cuentan estas distancias, y con el negativo las que obrasen hácia arriba, y siempre se verificará la proposicion.

En efecto, si las fuerzas tuviesen la posicion que manifiesta la (fig. 42), observaríamos que en ella es negativa la fuerza Q, y tambien su distancia al punto A, por lo que mudaríamos los signos tanto á la Q como á la q en la (ec. 72), y se convertiria en $Rr=Pp-Q\times-q=Pp+Qq$, que no alterará el signo de su momento, por cuanto se han combinado dos signos $-$.

Para demostrar que en este caso debe resultar en efecto esta ecuacion, partirémos de la misma (ec. 67) $P\times mo=Q\times no$;
y como en este caso $mo=Ao-Am$, y $no=An+Ao$,
se tendrá egecutando desde luego las multiplicaciones

$$P\times Ao-P\times Am=Q\times nA+Q\times Ao\text{, ó }(P-Q)\times Ao=P\times Am+Q\times An;$$

y poniendo en vez de $P-Q$ su valor R, y en vez de Ao, Am, An, los suyos r, p, q, se tendrá $Rr=Pp+Qq$.

86 *Cor.* Aquí vemos que el momento de la fuerza Q no ha variado de signo á causa de que siendo la fuerza negativa, y estando situada hácia el lado de las distancias negativas, resultan con el signo $-$ ambos factores, lo que en manera alguna altera el signo del término; luego podrémos deducir en general que *para que un momento sea positivo, deberán tener un mismo signo la fuerza y su distancia al centro de los momentos*; y *que será negativo un momento cuando la fuerza y su distancia tengan signos diferentes*; y siempre se verificará la ecuacion

$$Rr=Pp+Qq \quad (75),$$

cualesquiera que sean los signos que puedan tener las cantidades R, r, P, p, Q, q, que entran en ella, segun la naturaleza de las fuerzas, y situacion del centro de los momentos con relacion á ellas.

Si tomásemos por centro de momentos el punto de aplicacion de la fuerza Q, se tendria $q=0$, lo que daria $Rr=Pp$ (76).

87 Debemos observar que en la (ec. 75) no se alteraria la igualdad de ambos miembros, si todas las fuerzas ó todas las distancias, se multiplicasen por un mismo coeficiente λ; pues esto equivale á multiplicar ambos miembros de dicha ecuacion por la misma cantidad λ; lo cual nos dará $\lambda\, Rr=\lambda Pp+\lambda Qq$;

de donde se sigue, que *no es indispensable* (figs. 40, 41 y 42) *el que la recta* $Aomn$ *sea perpendicular á las direcciones de las fuerzas, sino que puede tener una posicion cualquiera con relacion á ellas; porque el multiplicar una ecuacion por un coeficiente constante equivale á variar de un mismo modo la direccion ó magnitud de una linea en cada término.*

En efecto, contando las distancias del centro de los momentos á las direcciones de las fuerzas por medio de una linea que les sea perpendicular, hemos obtenido (ec. 71) $R\times Ao=P\times Am+Q\times An$.

Ahora, si las distancias del punto A á dichas fuerzas las contásemos en otra cualquiera direccion AL (figs. 39 y 41) que corte, bien á las fuerzas ó á sus prolongaciones, tendrémos (I. 477 cor.)

$$Am:AK::Ao:AH::An:AL\text{, de donde } \frac{AK}{Am}=\frac{AH}{Ao}=\frac{AL}{An};$$

y espresando por λ la relacion $\frac{AK}{Am}$, será $\frac{AK}{Am}=\lambda$, $\frac{AH}{Ao}=\lambda$, $\frac{AL}{An}=\lambda$,

que da $AK=\lambda\times Am$, $AH=\lambda\times Ao$, $AL=\lambda\times An$;

y como á las distancias perpendiculares Am, Ao, An, las hemos señalado con p, r, q, á las distancias oblicuas AK, AH, AL, las señalarémos con p', r', q', y tendrémos $p'=\lambda p$, $r'=\lambda r$, $q'=\lambda q$;

cuyos valores sustituidos en la ecuacion $\lambda Rr=\lambda Pp+\lambda Qq$, la convertirán en $Rr'=Pp'+Qq'$ (77).

Luego queda demostrado que cualquiera que sea la direccion de la linea en que se cuenten los momentos, se verificará la proposicion; y *que multiplicar por un coeficiente constante todos los términos de una ecuacion que espresa la relacion entre los momentos de varias fuerzas y su derivada ó resultante, equivale á variar la direccion de la linea en que se hayan contado los momentos.*

88 Esta propiedad la podrémos enunciar independientemente de los momentos con mucha generalidad, diciendo que *si en todos los términos de una ecuacion hay una de varias cantidades que son proporcionales con otras, podrémos sustituir á cada cantidad su proporcional*; es decir, que si tenemos por egemplo la ecuacion $Aa+Bb=Cc-Dd$ (78), y por otra parte se verifica que $A:A'::B:B'::C:C'::D:D'$, podrémos sustituir A', B', C', D', en vez de las cantidades A, B, C, D, sin que se altere la ecuacion.

En efecto, si espresamos por λ la relacion de dichas cantidades ó hacemos $\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}=\frac{D'}{D}=\lambda$, resultará $A'=\lambda A$, $B'=\lambda B$, $C'=\lambda C$, $D'=\lambda D$; y como la (ec. 78) no se alterará multiplicando todos sus términos por una misma cantidad, tal como λ, tendrémos $\lambda Aa+\lambda Bb=\lambda Cc-\lambda Dd$; y sustituyendo en vez de λA, λB, λC, λD, sus valores A', B', C', D', tendrémos $A'a+B'b=C'c-D'd$,
ecuacion que espresa lo que nos proponíamos demostrar.

89 De aquí podríamos deducir en general *que toda ecuacion que espresa la relacion entre las componentes y su resultante, se verificará entre otras componentes y otra resultante que les fuesen proporcionales*; y *que si las componentes crecen ó decrecen en una razon dada, la resultante crecerá ó decrecerá en la misma razon*; pues esto equivale á multiplicar la ecuacion por la cantidad que esprese la razon en que crecen ó decrecen las componentes.

90 Teor. *El momento de la resultante de dos fuerzas paralelas con relacion á una recta que se halle en el mismo plano que las componentes, es igual á la suma de los momentos de las componentes con relacion á la misma recta.*

Dem. Supongamos que sean P y Q (fig. 39) dos fuerzas paralelas, y R su resultante, cuyos puntos de aplicacion m, n y o, se hallan en la recta mon; y supongamos que se quieran hallar los momentos de estas fuerzas con relacion á la recta AL que se halla en el mismo plano que las fuerzas; para esto tirarémos desde los puntos m, n y o, las mM, nN, oO, perpendiculares á la AL, y resultará (79) que $P\times \mathrm{M}m$ será el momento de la fuerza P con relacion á la recta AL; y $Q\times n\mathrm{N}$ y $R\times o\mathrm{O}$, serán los momentos de la fuerza Q y de la resultante R.

Entendido esto, concibamos prolongada la mon hasta que encuentre á la recta dada AL en un punto tal como A, y tendrémos (ec. 71)

$$R\times \mathrm{A}o=P\times \mathrm{A}m+Q\times \mathrm{A}n.$$

Pero como (I. 477 cor.) $\mathrm{A}m:\mathrm{A}o:\mathrm{A}n::m\mathrm{M}:o\mathrm{O}:n\mathrm{N}$,
podrémos sustituir (88) en la ecuacion anterior en vez de Ao, Am, An, sus proporcionales Oo, mM, nN, y tendrémos $R\times o\mathrm{O}=P\times m\mathrm{M}+Q\times n\mathrm{N}$ (79).

Pero $R\times o\mathrm{O}$ es el momento de la resultante tomado con relacion á la recta dada AL, pues es el producto de la resultante R por la distancia de su punto de aplicacion á la linea dada; y como por la misma razon $P\times m\mathrm{M}$ y $Q\times n\mathrm{N}$ espresan los momentos de las componentes P y Q con relacion á la misma linea, resulta que la (ec. 79) espresa L. Q. D. D.

Si la AL fuese paralela á la mon, no la encontraria; pero en este caso las tres perpendiculares mM, oO, nN, serian iguales; y como $R=P+Q$, si multiplicamos cada uno de los términos de esta ecuacion por su cantidad respectiva, no se alterará y tendrémos $R\times o\mathrm{O}=P\times m\mathrm{M}+Q\times n\mathrm{N}$, que es la misma que ántes.

Esc. No es necesario que las distancias de los puntos de aplicacion á la linea con relacion á la cual se toman los momentos, se cuenten por perpendiculares; *pues se podria efectuar por lineas situadas de un modo cualquiera, con tal que fuesen paralelas entre sí.* En efecto, de cualquier modo que por m, o, n, se tirasen lineas paralelas entre sí, como las mK, oH, nL, y terminasen en la AL, serian semejantes los triángulos mMK, oOH, nNL; pues ademas de ser rectángulos, tienen iguales los ángulos en m, o, n, (I. 386c); luego tendrémos mM:mK::oO:oH::nN:nL; por consiguiente en la (ec. 79) podrémos poner en vez de oO, mM, nN, sus proporcionales oH, mK, nL, y tendrémos $R\times$oH$=P\times m$K$+Q\times n$L (80).

91 Teor. *El momento de la resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas, con relacion á una recta que se halle en el mismo plano que las componentes, es igual á la suma de los momentos de las componentes con relacion á la misma recta.*

Dem. Para demostrarlo supongamos que se tenga un número cualquiera de fuerzas P, Q, S, T, *&c.*; si desde el punto de aplicacion tiramos á la recta con relacion á la cual se cuentan los momentos, lineas paralelas entre sí, sean ó no perpendiculares á dicha linea, y las espresamos por p, q, s, t, *&c.*, tendrémos que si espresamos por Y la resultante de P y Q, y por y la linea que desde su punto de aplicacion se tire paralela á las p, q, se verificará en virtud del teorema y escolio antecedente $Yy=Pp+Qq$.

Si espresamos por Y' la resultante de Y y de S, y por y' la recta que desde su punto de aplicacion se tire á la linea con relacion á la cual se cuentan los momentos, se tendrá $Y'y'=Yy+Ss$;
ó por ser $Yy=Pp+Qq$, será $Y'y'=Pp+Qq+Ss$;
y como lo mismo demostraríamos de todas las demas, resulta que llamando R la resultante de todas, y r la linea que se tire desde su punto de aplicacion á la linea con relacion á la cual se cuentan los momentos, se verificará $Rr=Pp+Qq+Ss+Tt+$*&c.* (81), que espresa L. Q. D. D.

Cor. Si el punto de aplicacion de la resultante se halla en la linea con relacion á la cual se determinan los momentos, la distancia r será cero; y la ecuacion anterior se convertirá en $Pp+Qq+Ss+Tt+$*&c.*$=0$.

92 *Esc.* Cuando las fuerzas cuyos momentos se quieren hallar con relacion á un punto, no son paralelas, entónces no se puede decir que las unas obren directamente opuestas á las otras, y por lo mismo no tiene lugar la consideracion de fuerzas positivas y negativas, por lo que se consideran todas como positivas; las distancias del orígen de los momentos á cada fuerza no se miden en este caso sobre una misma recta, y por lo mismo no se encuentran tan directamente opuestas que las unas se deban considerar como positivas y las otras como negativas; por lo cual se consideran siempre como positivos los momentos de estas fuerzas, puesto que son positivos los dos factores que entran en cada uno. Por esta causa especificarémos en las proposiciones que son relativas á ellos, cuándo el momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las componentes, y cuándo es igual con la diferencia.

93 Teor. *El momento de la resultante de dos fuerzas que obran sobre un mismo punto, ó que concurren, tomado con relacion á un punto de su plano, es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de las componentes, tomados con relacion al mismo punto: á la suma, cuando está el centro de los momentos fuera del ángulo que forman las componentes y de su opuesto al vértice; y á la diferencia, cuando dicho punto está dentro de alguno de estos ángulos.*

Dem. Para demostrarlo supongamos que sean P y Q (figs. 43 y 44) las dos fuerzas cuyas direcciones y magnitudes estén espresadas por mP, mQ, y por mR la direccion y magnitud de su resultante. Supongamos que sea C el centro de los momentos, y espresemos por p, q, r, las perpendiculares Cp, Cq, Cr, tiradas desde dicho punto sobre las direcciones de P, Q, R, y por c la distancia Cm del centro de los momentos al punto de aplicacion m.

Descompongamos cada una de estas tres fuerzas en otras dos dirigidas segun la recta mC, y segun la perpendicular KmK′ á dicha recta mC; y consideremos las componentes perpendiculares á mC que serán mH la de P, mE la de Q, y mL la de R; y se tendrá (I. 649)

$$m\mathrm{H}=m\mathrm{P}\cos.\mathrm{P}m\mathrm{H}=P\cos.\mathrm{P}m\mathrm{H},\ m\mathrm{E}=m\mathrm{Q}\cos.\mathrm{E}m\mathrm{Q}=Q\cos.\mathrm{E}m\mathrm{Q},$$
$$m\mathrm{L}=m\mathrm{R}\cos.\mathrm{L}m\mathrm{R}=R\cos.\mathrm{L}m\mathrm{R}.$$

Ahora, como los triángulos Cmp, Cmq, Cmr, son rectángulos en p, q, r, tendrémos (I. 631) $\cos.\mathrm{P}m\mathrm{H}=\mathrm{sen.P}m\mathrm{C}=\frac{\mathrm{C}p}{\mathrm{C}m}=\frac{p}{c}$,

$$\cos.\mathrm{E}m\mathrm{Q}=\mathrm{sen.Q}m\mathrm{C}=\frac{\mathrm{C}q}{\mathrm{C}m}=\frac{q}{c},\ \cos.\mathrm{L}m\mathrm{R}=\mathrm{sen.R}m\mathrm{C}=\frac{\mathrm{C}p}{\mathrm{C}m}=\frac{r}{c}.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores se tendrá

$$m\mathrm{H}=P\times\frac{p}{c},\ m\mathrm{E}=Q\times\frac{q}{c},\ m\mathrm{L}=R\times\frac{r}{c}.$$

Pero cuando el centro de los momentos cae dentro del ángulo PmQ, las mH y mE obran directamente opuestas, y por lo mismo su diferencia mH$-m$E será (13) igual con la mL componente de R; y cuando C está fuera del ángulo, las componentes obran en una misma direccion, y por consiguiente su suma mH$+m$E será el valor de mL; luego si queremos comprender los dos casos en uno, tendrémos $m\mathrm{L}=m\mathrm{H}\pm m\mathrm{E}$,

ó poniendo en vez de estas lineas sus valores, será $R\times\frac{r}{c}=P\times\frac{p}{c}\pm Q\times\frac{q}{c}$;

ó suprimiendo el denominador c que es comun, será $Rr=Pp\pm Qq$ (83); ecuacion en la cual el signo $+$ se refiere á la (fig. 44), y el $-$ á la (fig. 43); y como Rr es el momento de la resultante, y Pp, Qq, son los de las componentes, dicha ecuacion manifiesta L. Q. D. D.

Cor. 1.° Para mayor claridad separarémos los dos valores que da la ecuacion anterior, y tendrémos $Rr=Pp+Qq$ (84), para el caso en que el centro de los momentos está fuera del ángulo de las componentes y de su opuesto al vértice, y $Rr=Pp-Qq$ (85), para cuando se halle dentro de alguno de estos ángulos.

Cor. 2.° Si el centro de los momentos lo tomamos en la misma resultante, la perpendicular r será cero; por lo que la (ec. 84) se convertirá en $o=Pp-Qq$ ó $Pp=Qq$ (86), que da $P:Q::q:p$; que nos dice que *cuando el centro de los momentos se toma en la misma resultante*, *las intensidades de las componentes son recíprocamente proporcionales á las perpendiculares tiradas á sus direcciones.*

Cor. 3.° Si el centro de los momentos se tomase sobre una de las componentes, por egemplo sobre la Q, la perpendicular q seria igual cero, y la (ec. 83) se convertiria en $Rr=Pp$ (87), que daria $R:P::p:r$; luego en este caso *la resultante y la otra componente están en razon inversa de las perpendiculares que se les tiren desde el centro de los momentos.*

Cor. 4.° Pues que el teorema anterior se verifica entre las fuerzas que forman entre sí un ángulo cualquiera, debe aun subsistir cuando este ángulo sea nulo, ó las fuerzas vengan á ser paralelas; en cuyo caso como la perpendicular á una de ellas, lo seria á la otra y á la resultante, las tres perpendiculares Cp, Cq, Cr, se contarian sobre una misma recta A*mon* (fig. 39), y la (ec. 83) no se diferenciaria en nada de la (ec. 75).

94 *Esc.* Las (ecs. 84 y 85) manifiestan con relacion á las (figs. 43 y 44) que *estando solo en un miembro el momento de la resultante*, *el de la fuerza que está situada del mismo lado que esta resultante con relacion á la linea* mC *es del mismo signo*; *y que el momento de la otra fuerza es de signo contrario.*

95 Si concebimos que el punto C sea fijo, y que las perpendiculares Cp, Cq, Cr, sean rectas inflexibles, las fuerzas P, Q, R, que se puede considerar que obran (20) á los estremos de estas rectas, no podrán producir sino un movimiento de rotacion al rededor de este centro fijo; pero la inspeccion de la (fig. 44) es suficiente para manifestar que cuando el punto C cae fuera del ángulo PmQ y de su puesto al vértice, las fuerzas P, Q, y su resultante R, tratan de hacer girar á sus puntos de aplicacion en el mismo sentido al rededor del punto C; al contrario, cuando este punto cae en uno de estos dos ángulos, la (fig. 43) da á conocer que las fuerzas P y Q tratan de hacer girar á los puntos p y q en sentidos opuestos; y se ve tambien que en este caso la resultante R trata de hacer girar á su punto de aplicacion en el mismo sentido que la componente que tiene mayor momento. En virtud de esta observacion podemos enunciar el teorema que acabamos de demostrar del modo siguiente.

El momento de la resultante de dos fuerzas con relacion á un punto, *es igual á la suma ó á la diferencia de los momentos de estas fuerzas*, *segun tratan de hacer girar á sus puntos de aplicacion en el mismo sentido ó en sentidos opuestos al rededor del centro de* *los momentos, que está tomado en su plano y considerado como fijo.*

96 La ventaja de este último enunciado es la de poderse estender fácilmente á un número cualquiera de fuerzas P, P', P'', &c., situadas en un mismo plano. En efecto, considerando el centro de los momentos como un punto fijo al rededor del cual estas fuerzas tratan de hacer girar el sistema de sus puntos de aplicacion, *el momento de la resultante es igual á la suma de los momentos de las fuerzas que tratan de hacer girar en el mismo sentido que ella; ménos la suma de los momentos de las fuerzas que tratan de hacer girar en sentido contrario.*

Sin que sea necesario construir una figura, supongamos para fijar las ideas que las tres primeras fuerzas P, P', P'', traten de hacer girar en un mismo sentido, y todas las otras en el sentido opuesto. Sea Q la resultante de P y P', y espresando por p, p', q, las perpendiculares tiradas desde el centro de los momentos á las direcciones de las fuerzas P, P', Q, tendrémos por lo acabado de demostrar $Qq=Pp+P'p'$ (88).

Si espresamos por Q' la resultante de Q y de la otra fuerza P'', y por q' y p'' las perpendiculares, tendrémos tambien $Q'q'=Qq+P''p''$ (89); y sustituyendo por Qq su valor (ec.88), será $Q'q'=Pp+P'p'+P''p''$ (90).

Del mismo modo si se espresa por S la resultante de todas las otras fuerzas P''', P^{IV}, &c.: por s la perpendicular tirada desde el centro de los momentos á su direccion: y por p''', p^{IV}, &c. las perpendiculares tiradas desde el mismo punto á las direcciones de las fuerzas P''', P^{IV}, &c., se tendrá $Ss=P'''p'''+P^{IV}p^{IV}+$&c. (91).

Con lo cual tenemos reducido todo el sistema á las fuerzas Q' y S; luego la resultante de estas dos fuerzas será la de todo el sistema; y si la espresamos por R, y por r la perpendicular tirada desde el centro de los momentos á la direccion de R, y consideramos que las fuerzas Q' y S tratan de hacer girar en sentido opuesto, se tendrá

$$Rr=Q'q'-Ss \ (92), \text{ ó } Rr=Ss-Q'q' \ (93),$$

segun sea $Q'q'$ mayor ó menor que Ss; porque el producto de Rr debe ser siempre positivo. En el primer caso la fuerza R tratará de hacer girar al sistema en el mismo sentido que la fuerza Q', y por consiguiente en el mismo sentido que las tres fuerzas P, P', P''; y al contrario en el segundo. Supongamos que se verifique el primer caso, y tendrémos que sustituyendo en vez de $Q'q'$ y de Ss sus valores (ecs. 90 y 91), resultará $Rr=Pp+P'p'+P''p''-P'''p'''-P^{IV}p^{IV}-$&c. (94).

97 Esta resultante comprende el teorema que se queria demostrar para un número cualquiera de fuerzas. Pero todavía lo podemos hacer mas general, observando que tiene lugar no solo cuando se considera la resultante definitiva de las fuerzas dadas, sino aun cuando solo se trate de reducirlas á un menor número: de modo que si se espresan por S, S', S'', &c., las fuerzas cuyo conjunto equivale á las P, P', P'', &c., y por s, s', s'', &c., las perpendiculares tiradas desde el centro de los momentos á las direcciones de S, S', S'', &c., se hallará por el mismo razonamiento que en el caso anterior $Ss+S's'+S''s''+$&c.$=Pp+P'p'+P''p''-P'''p'''-P^{IV}p^{IV}-$&c. (95);

ecuaciones en que se deben tomar con el signo + los momentos de las fuerzas S, S', S'', &c., que traten de hacer girar en el mismo sentido que P, P', P'': y con el signo — los momentos de las que intenten hacer girar en el sentido de las otras fuerzas P''', P^{IV}, &c.

98 *Esc.* La (ec. 95) tiene la ventaja de comprender el caso particular en que las fuerzas dadas P, P', P'', &c. no tienen una resultante única.

99 *El momento de la resultante de muchas fuerzas paralelas, no situadas en un mismo plano, con relacion á un plano paralelo á las direcciones de estas fuerzas, es igual á la suma de los momentos de las dichas fuerzas.*

Para demostrarlo supongamos que MN y ML (fig. 45) sean dos planos, el uno paralelo y el otro perpendicular á las direcciones de las fuerzas paralelas P, Q, S, &c. La interseccion MA de estos planos será una linea recta que se hallará en el plano ML; supongamos que V sea la resultante de las fuerzas P y Q: que R sea la de las fuerzas S y V, y que las direcciones de las fuerzas P, Q, V, S y R, encuentren al plano ML respectivamente en los puntos C, D, E, G y F. Tiremos desde estos puntos perpendiculares sobre MA, interseccion comun de los planos MN, ML; y como las dos fuerzas P y Q y su resultante se hallarán en un mismo plano (67 esc.), los tres puntos D, E y C en que encuentren al ML estarán en una linea recta DEC que prolongarémos hasta que encuentre en un punto cualquiera B á la MA, ó al plano MN.

Esto supuesto, hallándose el punto B en el plano de las fuerzas P y Q, se tiene (81) con relacion á este punto $V\times\mathrm{BE}=P\times\mathrm{BC}+Q\times\mathrm{BD}$ (96); pero á las tres distancias BE, BC y BD, se les pueden sustituir (87) las perpendiculares EK, CH y DI que les son proporcionales (I. 476); y la (ec. 96) se convierte en $V\times\mathrm{EK}=P\times\mathrm{CH}+Q\times\mathrm{DI}$ (97) (*).

Espresando por R la resultante de las fuerzas V y S, tendrémos por lo acabado de demostrar $R\times\mathrm{FO}=V\times\mathrm{EK}+S\times\mathrm{Gg}$ (98);
y poniendo en vez de $V\times\mathrm{EK}$ el valor anterior, se tendrá

$$R\times\mathrm{FO}=P\times\mathrm{CH}+Q\times\mathrm{DI}+S\times\mathrm{Gg}.$$

Ahora, aunque el punto de aplicacion m de la fuerza P se halle mas abajo del plano ML, la perpendicular que de él se tire al plano MN y que espresarémos por p, será (I. 561 cor.) igual con la CH; por la misma razon si llamamos q, s, r, á las perpendiculares al plano MN tiradas desde los puntos de aplicacion m', m'', de las componentes Q y S y cualquier punto de la resultante R que se podrá tomar por punto de aplicacion, se tendrá siempre $\mathrm{DI}=q$, $\mathrm{Gg}=s$, $\mathrm{FO}=r$;

(*) *Si la DEC resultase paralela al plano MN, entónces no le podria encontrar; pero en este caso se llegaba á la misma ecuacion con mas facilidad; pues como serian iguales (I. 553) las EK, CH, DI, y por otra parte* $V=P+Q$, *si multiplicamos cada término de esta ecuacion por su linea correspondiente, se verificará la ecuacion del testo, que resultará en este caso una ecuacion idéntica.*

y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, se tendrá

$$Rr=Pp+Qq+Ss;$$

y como podríamos demostrar lo mismo si hubiese mas fuerzas T, &c., resulta en general que cuando las fuerzas son paralelas, se tiene

$Rr=Pp+Qq+Ss+Tt+$&c. (99), que espresa L. Q. D. D.

100 *Esc.* Aunque para las aplicaciones que tenemos que hacer nos basta este teorema, no obstante lo demostrarémos con toda generalidad.

Teor. *El momento de la resultante de un número cualquiera de fuerzas paralelas, no situadas en un mismo plano, tomado con relacion á un plano elegido arbitrariamente, es igual á la suma de los momentos de estas fuerzas tomados con relacion al mismo plano.*

Dem. Supongamos que se tenga un número cualquiera de fuerzas P, Q, S, T, &c. (fig. 46), situadas en el espacio, pero que sean paralelas entre sí, y cuyos puntos de aplicacion sean respectivamente m, m', m'', m''', &c.; y supongamos que el plano respecto del cual queremos hallar los momentos sea el BAC.

Concibamos proyectados los puntos de aplicacion m, m', m'', m''', &c., sobre dicho plano, y que sus proyecciones sean respectivamente los puntos p, q, s, t, &c.; y que las longitudes de las lineas $mp, m'q, m''s, m'''t$, &c., que espresan las distancias de los puntos de aplicacion al plano, contadas en lineas perpendiculares á dicho plano, las espresemos para mayor claridad por p, q, s, t, &c.

Consideremos primero las dos fuerzas P y Q; sea n el punto en que su resultante corta á la recta mm', y r' la proyeccion del punto n sobre dicho plano, cuya distancia nr' espresarémos por r'; tiremos por m una paralela á la linea pq que une las proyecciones de los puntos m, m'; y como las tres lineas mp, $m'q$, nr', se hallarán (67 esc.) en un mismo plano, la mb cortará á la nr' en a y á la $m'q$ en b; y tendrémos (I. 482)

$$mm':mn::m'b:na.$$

Pero la (ec. 63) puesta en proporcion, teniendo presente que lo que allí era o es aquí n en la figura, y lo que allí era n es aquí m', da

$$P+Q:Q::mm':mn;$$

luego (I. 267 teor. 2.°) será $P+Q:Q::m'b:na$: que da $(P+Q)\times na=Q\times m'b$; y siendo (I. 386a cor. 2.°) $ar'=mp=bq$, podrémos formar la ecuacion idéntica $(P+Q)\times ar'=P\times mp+Q\times bq$ (100);

y sumando estas dos ecuaciones será $(P+Q)(na+ar')=P\times mp+Q(m'b+bq)$, ó poniendo en vez de $na+ar'$ su igual nr', y en vez de $m'b+bq$ su igual $m'q$, y en vez de $P+Q$ su igual R', se tendrá $R'\times nr'=P\times mp+Q\times m'q$ (101); ó espresando por r' la nr', por p la mp, y por q la $m'q$, se tendrá

$$R'r'=Pp+Qq \ (102).$$

La figura supone que las dos fuerzas obran en un mismo sentido, y que los tres puntos m, m' y n se hallan por la parte superior del plano BAC; pero si estas fuerzas obrasen en sentido contrario la una de la otra, ó estos puntos cayesen á diferentes lados del plano BAC, entónces mudaríamos el signo, bien fuese á la fuerza ó á la perpendicular que conviniese; y tendríamos que siempre se verificaria algebráicamente la ecuacion anterior en todas las posiciones que puedan tener los puntos de aplicacion m, m', con relacion al plano BAC.

Entendido esto, unamos el punto n con m'', y supongamos que sea n' el punto de aplicacion de la resultante de R' y de S, que espresarémos por R''; cuyo punto de aplicacion se hallará en la linea nm'', y bajando desde n' la perpendicular $n'r''$ al plano BAC, tendrémos que cualquiera que sea la situacion respectiva de los puntos n y m'' con relacion al plano BAC, se tendrá por lo acabado de demostrar

$$R''\times n'r''=R'\times nr'+S\times m''s \quad (103);$$

ó poniendo en vez de $n'r''$, nr', $m''s$, sus valores r'', r', s, se tendrá

$$R''r''=R'r'+Ss \quad (104);$$

y sustituyendo en vez de $R'r'$ su valor (ec. 102), será

$$R''r''=Pp+Qq+Ss \quad (105);$$

unamos ahora el punto n' con el m''', y supongamos que n'' sea el punto en que la resultante R''' de R'' y de T corta á la recta $n'm'''$; y tendrémos bajando la $n''r'''$ perpendicular al plano, y espresándola por r''', que entre las fuerzas R''', R'' y T, se verificará análogamente á la (ec. 102) la $R'''r'''=R''r''+Tt$;

ó poniendo en vez de $R''r''$ su valor (ec. 105), tendrémos

$$R'''r'''=Pp+Qq+Ss+Tt \quad (106);$$

y como demostraríamos lo mismo si hubiese un número mayor de fuerzas, se deduce que si á la resultante de todas la espresamos por R y por r la perpendicular al plano tirada desde su punto de aplicacion, tendrémos en general $Rr=Pp+Qq+Ss+Tt+\&c.$ (107), que espresa L.Q.D.D.

Cor. Si tomásemos el centro de los momentos sobre el plano en que se cuentan los mismos momentos, la distancia r seria igual cero; en cuyo caso la ecuacion anterior se convertiria en $Pp+Qq+Ss+Tt+\&c.=0$ (108); que nos dice que *la suma de los momentos de un número cualquiera de fuerzas paralelas, con relacion á cualquier plano que pasa por el centro de estas fuerzas, es nula ó es igual á cero.*

101 *Esc.* Como esta ecuacion no se alterará aunque se multipliquen todos sus términos por un coeficiente constante λ, y esto equivale (87) á variar la direccion de todas las lineas r, p, q, s, t, &c. quedando siempre paralelas, resulta que *las distancias del punto de aplicacion al plano las podrémos contar tambien por lineas paralelas entre sí, aunque no sean perpendiculares al plano.* Lo que podríamos hacer sensible si por los puntos m, m', m'', m''', &c., y por el punto de aplicacion de la resultante definitiva, se tirasen lineas paralelas entre sí, las cuales juntamente con las mp, $m'q$, &c., y con las lineas que uniesen los puntos en que las anteriores encontrasen al plano BAC, formarian triángulos que todos serian semejantes (I. 485), y por consiguiente las nuevas lineas serian proporcionales con las p, q, &c.; y en virtud de lo demostrado (88) nos convenceríamos de la proposicion.

Método general para determinar las coordenadas del punto de aplicacion de la resultante de muchas fuerzas paralelas en funcion de las coordenadas de los puntos de aplicacion de las componentes, y ecuaciones generales de equilibrio de las fuerzas paralelas.

102 El método espuesto (73) para hallar el punto de aplicacion de la resultante de muchas fuerzas paralelas, ya estén situadas ó no sobre un mismo plano, es engorroso y poco acomodado para las investigaciones analíticas; por lo cual nos vamos á ocupar ahora de hallar las coordenadas del punto de aplicacion de la resultante en funcion de las coordenadas de los puntos de aplicacion de las componentes. Para esto supongamos que se tenga un número cualquiera de fuerzas P, P', P'', &c. cuyos puntos de aplicacion sean m, m', m'', &c. (fig. 47); tiremos por un punto cualquiera A que elegirémos por orígen de las coordenadas, tres eges rectangulares AX, AZ, AU, y espresemos por x, z, u, las coordenadas del punto m con relacion á dichos eges: por x', z', u', las del punto m': por x'', z'', u'', las del m'', &c.; y tendrémos (II. 174) que u, u', u'', &c. espresarán las distancias de los puntos de aplicacion m, m', m'', &c. al plano de las xz; luego multiplicando cada una de estas distancias por la magnitud de sus fuerzas, se tendrá que $Pu, P'u', P''u''$, &c. serán los momentos de las componentes con relacion al plano de las xz; y si espresamos por R la resultante de todas las fuerzas P, P', &c., y por $x_{,}, z_{,}, u_{,}$, las coordenadas de su punto de aplicacion, tendrémos que $Ru_{,}$ será el momento de la resultante con relacion al mismo plano de las xz; y en virtud de lo espuesto (100), tendrémos

$$Ru_{,}=Pu+P'u'+P''u''+P'''u'''+\&c. \quad (109).$$

Como x, x', x'', &c. espresan las distancias de los puntos de aplicacion al plano de las zu, tendrémos que $Px, P'x'$, &c., serán los momentos de dichas fuerzas con relacion al plano de las zu, y $Rx_{,}$ el momento de la resultante; por lo que (100) será

$$Rx_{,}=Px+P'x'+P''x''+P'''x'''+\&c. \quad (110);$$

y por la misma razon se tendrá entre los momentos de la resultante y componentes con relacion al plano de las xu, la ecuacion

$$Rz_{,}=Pz+P'z'+P''z''+P'''z'''+\&c. \quad (111).$$

Pues que las fuerzas P, P', P'', &c., se nos dan conocidas y las coordenadas x, z, u, x', z', u', &c. de sus puntos de aplicacion, respecto de que los puntos de aplicacion son dados, y elegimos nosotros los eges, resulta que los segundos miembros de estas tres ecuaciones nos son conocidos. Por otra parte la resultante R es conocida tambien, pues (72) se tiene $R=P+P'+P''+P'''+\&c.$ (112);
luego en las tres (ecs. 109, 110 y 111) solo hay las tres incógnitas $x_{,}, z_{,}, u_{,}$; por lo que si las despejamos (I. 221), sustituyendo al mismo tiempo en vez de R su valor (ec. 112), tendrémos

$$x_{,}=\frac{Px+P'x'+P''x''+P'''x'''+P^{IV}x^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.}\quad(113),$$

$$z_{,}=\frac{Pz+P'z'+P''z''+P'''z'''+P^{IV}z^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.}\quad(114),$$

$$u_{,}=\frac{Pu+P'u'+P''u''+P'''u'''+P^{IV}u^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.}\quad(115);$$

ecuaciones que nos servirán para determinar las coordenadas $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$, del punto de aplicacion de la resultante, que es (76) *el centro de las fuerzas paralelas*; por consiguiente, determinando este punto y haciendo que pase por él una linea paralela á las componentes, de la magnitud que esprese la (ec. 112) y hácia el lado que convenga segun el signo que resulte para R en dicha ecuacion, se tendrá determinada en un todo la resultante.

103 Lo que acabamos de manifestar supone que las fuerzas dadas se puedan reducir á una sola; más cuando estas fuerzas se reducen á dos iguales y contrarias, pero no directamente opuestas, entónces el cálculo da valores infinitos para las coordenadas $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$; pues que en este caso la suma de las cantidades P, P', P'', &c. es igual á cero, lo que hace nulo el denominador comun de estos valores (ecs. 113, 114 y 115). De donde resulta que en este caso *no hay verdaderamente centro de las fuerzas paralelas.*

104 Cuando todos los puntos de aplicacion m, m', m'', &c. están situados en un plano dado, el centro de las fuerzas paralelas, si existe, está tambien (74 cor.) en este plano, y su posicion no depende mas que de dos coordenadas. Se puede tomar el plano dado por el de las xz; en cuyo caso se tiene $u=0$, $u'=0$, $u''=0$;
por consiguiente $u_{,}=0$, y los valores de $x_{,}$ y de $z_{,}$, quedarán determinados por las dos ecuaciones

$$x_{,}=\frac{Px+P'x'+P''x''+\&c.}{P+P'+P''+\&c.}\ (116),\quad z_{,}=\frac{Pz+P'z'+P''z''+\&c.}{P+P'+P''+\&c.}\ (117).$$

105 Si todos estos puntos están colocados sobre una misma recta, esta contendrá (74 cor.) el centro de las fuerzas paralelas; y para hallarle bastará determinar su distancia á un punto de esta misma recta. Luego tomándola por el ege AX se tendrá $z=0$, $z'=0$, &c. $u=0$, $u'=0$, &c.; luego $z_{,}=0$, $u_{,}=0$;
y el valor de $x_{,}$ será dado por esta ecuacion

$$x_{,}=\frac{Px+P'x'+P''x''+P'''x'''+P^{IV}x^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.}\quad(118).$$

Supongamos por egemplo que las fuerzas P, P', P'', &c. ..an cinco, dispuestas como se ve en la (fig. 48). Si consideramos las distancias

Am, Am', Am'', &c., ó x, x', x'', como positivas, será necesario considerar las distancias Am''', Am^{IV}, ó x''', x^{IV}, como negativas; y del mismo modo las fuerzas P, P'', P^{IV}, que obran segun las rectas mP, m''P$''$, m^{IV}P^{IV}, siendo positivas, las P', P''', que obran en el sentido opuesto segun las rectas m'P$'$, m'''P$'''$, serán negativas; ademas supongamos que

$$Am=1,\ Am'=3,\ Am''=5,\ Am'''=-2,\ Am^{IV}=-3;$$

$$P=1,\ P'=-5,\ P''=6,\ P'''=-4,\ P^{IV}=4.$$

Y tendrémos que estos valores darán $R=P+P'+P''+P'''+P^{IV}=2$;

y ademas $x_{\prime}=\dfrac{1-15+30+8-12}{2}=\dfrac{12}{2}=6.$

Luego si partiendo del punto A tomamos del lado de las distancias positivas una linea An igual con 6 ó séstupla de Am, el punto n será el centro de las fuerzas paralelas, es decir, el punto en que la resultante viene á encontrar á la linea An.

Como el valor de R es positivo, la resultante obrará en el sentido de las fuerzas P, P'', P^{IV}, segun la recta nR; y como está representada por el número 2, se sigue que es dupla de la fuerza P tomada por unidad.

106 Las condiciones de equilibrio de las fuerzas paralelas P, P', P'', *&c.* se deducirán fácilmente de la teoría que se acaba de esponer. En efecto, si no existe ningun punto fijo en el sistema, es necesario para el equilibrio que separando una de estas fuerzas, por egemplo la P, todas las otras tengan una resultante igual y directamente opuesta (19) á esta fuerza. Sea pues R' la resultante de las fuerzas P', P'', *&c.*; y pues que las fuerzas P y R' han de ser iguales y dirigidas en sentidos contrarios, las cantidades P y R' deben ser iguales y de signos diferentes; luego se debe tener $P=-R'$, ó $P+R'=0$; pero R' es igual (72) á la suma de las componentes P', P'', *&c.*; luego se tiene por primera ecuacion de equilibrio

$$P+P'+P''+\&c.=0 \quad (119).$$

Falta aun espresar que estas dos fuerzas P y R' son directamente opuestas.

Para esto sean $\alpha_{\prime}$, $\beta_{\prime}$, $\gamma_{\prime}$, las coordenadas del centro de las fuerzas paralelas P', P'', *&c.*; de modo que se tenga (ecs. 109, 110 y 111)

$$R'\alpha_{\prime}=P'x'+P''x''+P'''x'''+\&c. \quad (120),$$

$$R'\beta_{\prime}=P'z'+P''z''+P'''z'''+\&c. \quad (121),$$

$$R'\gamma_{\prime}=P'u'+P''u''+P'''u'''+\&c. \quad (122).$$

Este centro es el punto de aplicacion de la resultante R'; luego es necesario que se halle sobre la direccion de la fuerza P para que R' sea directamente opuesta á esta fuerza, ó lo que viene á ser lo mismo, este centro y el punto m (fig. 46) al cual está aplicada la fuerza P, deben estar sobre una misma recta paralela á la direccion comun de las fuerzas dadas. Luego si para simplificar se toma el plano de las xz perpendicular á esta direccion, será necesario que estos dos puntos estén situados sobre una misma perpendicular á este plano, en cuyo caso tendrán la misma proyeccion sobre él; por consiguiente sus coordenadas paralelas á los eges de las x y de las z, serán las mismas, es decir, que se tendrá $\alpha_{,}=x$, $\beta_{,}=z$.

Luego sustituyendo x y z en lugar de $\alpha_{,}$ y $\beta_{,}$ en las (ecs. 120 y 121), y observando que $R'=-P$, resultará

$$-Px=P'x'+P''x''+\&c. \ (123), \quad -Pz=P'z'+P''z''+\&c. \ (124),$$

ó trasladando todos los términos á un solo miembro, se tendrá

$$Px+P'x'+P''x''+\&c.=0 \ (125), \quad Pz+P'z'+P''z''+\&c.=0 \ (126),$$

ecuaciones que significan *que la suma de los momentos de las fuerzas* P, P′, P″, &c., *es nula con relacion á los planos de las* zu *y de las* xu, que son paralelos á la direccion de dichas fuerzas.

107 Así, el equilibrio de estas fuerzas exige que la (ec. 119) y las (ecs. 125 y 126) se verifiquen al mismo tiempo. Recíprocamente, cuando estas tres ecuaciones están satisfechas, se verifica el equilibrio; porque las (ecs. 125 y 126) darian las (123 y 124), y suponiendo que sea R' la resultante de todas estas fuerzas ménos una, se tendrian las (ecs. 120 y 121), las cuales teniendo los segundos miembros iguales con los segundos de las (ecs. 123 y 124) darian $R'\alpha_{,}=-Px$, $R'\beta_{,}=-Pz$,
y en virtud de la (ec. 119) seria $R'=P'+P''+P'''+\&c.=-P$;
lo que nos daria $\alpha_{,}=x$, $\beta_{,}=z$;
de donde se puede concluir que esta resultante es igual y directamente opuesta á la fuerza P que se habia omitido.

Concluyamos, pues, *que para el equilibrio de un sistema de fuerzas paralelas es necesario y basta*: 1.º *que la suma de estas fuerzas sea igual á cero*; 2.º *que la suma de sus momentos sea nula con relacion á dos planos paralelos á la direccion de dichas fuerzas.*

108 Si solo se verificase la primera condicion, esto es, que solo se tuviese $P+P'+P''+P'''+\&c.=0$,
esta ecuacion espresaria solamente *que una cualquiera de las fuerzas era* (106) *igual y obraba en direccion opuesta á la resultante de todas las demas*; ó lo que es lo mismo, esta *ecuacion espresa que todo el sistema se reduce á dos fuerzas paralelas é iguales que obran en sentido contrario*; pero no diciendo nada respecto de ser directamente opuestas, ó de obrar sobre un mismo punto, resulta (71) que ni se pueden equilibrar, ni reducir á una resultante única, y solo producirán un movimiento de rotacion al rededor del medio de la linea que une sus puntos de aplicacion.

Si solo se verificase la segunda condicion, las fuerzas dadas tendrian una resultante igual á su suma, y cuya direccion coincidiria con la interseccion de los planos; porque si se busca su distancia á cada uno de estos planos, se hallará que es nula en virtud de las (ecs. 125 y 126). Luego suponiendo que esta interseccion contenga un punto fijo, la resultante quedará destruida, y se verificará el equilibrio; de donde se sigue que *cuando un cuerpo sólido al cual están aplicadas fuerzas paralelas, está sujeto por un punto fijo, basta para el equilibrio que la suma de los momentos de estas fuerzas sea nula con relacion á dos planos tirados por este punto paralelamente á su direccion.*

109 Cuando este punto fijo sea el centro de las fuerzas paralelas, la suma de los momentos será nula con relacion á todos los planos que pasen por este punto (100 cor.); por consiguiente las fuerzas se equilibrarán al rededor de este punto, cualquiera que sea su direccion comun, lo que ya sabíamos (76).

Composicion y equilibrio de las fuerzas situadas en un mismo plano.

110 Cuando las fuerzas se hallan en un mismo plano, y aplicadas á diferentes puntos de un cuerpo, ó á puntos que estén unidos entre sí por rectas inestensibles, ó de otro modo cualquiera con tal que sea invariable, podemos hallar la resultante por dos métodos diferentes, así como lo hicimos (36 y siguientes) para cuando las fuerzas obraban sobre un mismo punto: el uno por un procedimiento gráfico, y el otro por un procedimiento analítico.

Principiemos por el gráfico; para lo cual supongamos que se tenga un número cualquiera de fuerzas dadas P, P', P'', *&c.*, que estén representadas en direcciones y magnitudes por las $m\mathrm{P}$, $m'\mathrm{P}'$, $m''\mathrm{P}''$, &c. (fig. 49), y cuyos puntos de aplicacion sean los m, m', m'', &c.

Como el punto de aplicacion de una fuerza se puede trasladar á cualquier punto (20) de su direccion, prolongarémos dos cualesquiera de estas fuerzas, por egemplo $m\mathrm{P}$ y $m'\mathrm{P}'$, hasta que se encuentren en n, que tomarémos por punto de aplicacion de ambas; tómense las $n\mathrm{Q}=m\mathrm{P}$, y $n\mathrm{Q}'=m'\mathrm{P}'$; conclúyase el paralelogramo $n\mathrm{Q}r\mathrm{Q}'$, y su diagonal nr será la resultante de las dos fuerzas $n\mathrm{Q}$ y $n\mathrm{Q}'$ que son iguales á las $m\mathrm{P}$ y $m'\mathrm{P}'$, cuyos puntos de aplicacion los hemos trasladado al punto n; por consiguiente la diagonal nr es la resultante de las dos fuerzas P y P'. Compongamos esta resultante y otra cualquiera de las fuerzas, por egemplo la $m''\mathrm{P}''$: para esto prolongarémos esta hasta que encuentre á la nr ó á su prolongacion en un punto tal como n'; tomarémos la parte $n'r'=nr$, $n'\mathrm{Q}''=m''\mathrm{P}''$, y concluirémos el paralelogramo $n'r'r''\mathrm{Q}''$, y su diagonal $n'r''$ será la resultante de las tres fuerzas P, P', P''. Prolonguemos la $n'r''$ hasta que encuentre á la $m'''\mathrm{P}'''$ en un punto tal como n''; tómense $n''r'''=n'r''$ y $n''\mathrm{Q}'''=m'''\mathrm{P}'''$; concluyamos el paralelogramo $n''r'''r^{IV}\mathrm{Q}'''$, y su diagonal $n''r^{IV}$ será la resultante de las $n''r'''$ y $m'''\mathrm{P}'''$ ó de las P, P', P'', P'''. Supongamos para dar un egemplo de todo, que la otra fuerza que nos falta componer sea paralela á la $n''r^{IV}$; para hallar la resultante de estas dos fuerzas $n''r^{IV}$, $m^{IV}\mathrm{P}^{IV}$, unirémos el punto n'' con m^{IV}, y dividirémos la $n''m^{IV}$ en razon inversa de las $n''r^{IV}$ y $m^{IV}\mathrm{P}^{IV}$ (*) como exige la (ec. 61); y tendrémos el punto o de aplicacion de la resultante;

(*) *Esto se hace con mucha facilidad en virtud de lo espuesto (I. 479 probl. 2.°); pues no hay mas que dividir la* $n''m^{V}$ *en dos partes que tengan la razon de* $n''r^{V}$ *á* $m^{V}P^{V}$ *y tomar la menor parte desde el punto de aplicacion de la mayor fuerza.*

y tirando por él la oR paralela á la $m^{IV}P^{IV}$, y tomando en ella (65) una parte $oR = n^{II}r^{IV} + m^{IV}P^{IV}$, tendrémos que oR espresará en direccion y magnitud la resultante de las $n^{II}r^{IV}$ y $m^{IV}P^{IV}$, ó de todas las fuerzas P, P', P'', P''', P^{IV}.

Como lo mismo egecutaríamos si hubiese mas fuerzas, podemos deducir que *un sistema de fuerzas que obran sobre un cuerpo en un mismo plano*, *se puede remplazar en general por una fuerza única*; y decimos en general porque *este resultado está sujeto á la misma escepcion que la composicion de las fuerzas paralelas* (71). En efecto, si se halla que las dos últimas fuerzas, cuya resultante se busca, son iguales, paralelas, y están dirigidas en sentido contrario sin ser directamente opuestas, será imposible reducirlas á una sola, y se deberán conservar estas dos fuerzas para remplazar á las dadas.

111 Cuando las fuerzas admiten una resultante, esta queda necesariamente determinada de magnitud y posicion por el método que acabamos de esponer; de manera que se llegará siempre á la misma resultante definitiva, cualquiera que sea el órden con que se combinen las fuerzas P, P', P'', &c; porque si existiesen dos fuerzas diferentes, de las que cada una equivaliese á este sistema de fuerzas, tendríamos que introduciendo en el sistema una nueva fuerza igual y directamente opuesta á una de estas resultantes, se equilibraria todo el sistema, para lo cual seria necesario que esta fuerza que hemos introducido de nuevo fuese tambien igual y directamente opuesta (18 cor.) á la otra resultante; lo que no se puede verificar, si esta resultante no coincide exactamente con la otra.

{ 112 Pero no sucede lo mismo cuando las fuerzas dadas se reducen á dos fuerzas paralelas no reducibles á una sola; pues *dos fuerzas de esta especie no están determinadas ni en magnitud ni en direccion*; al contrario, se verifica que *ellas pueden ser remplazadas de una infinidad de modos diferentes por otras dos fuerzas de la misma especie*, *que les sean equivalentes*, *y que no tienen sin embargo ni la misma direccion*, *ni la misma magnitud que las primeras*.

{ 113 Para demostrarlo de un modo que no deje la menor duda, observarémos que ya hemos manifestado (71) que dos fuerzas de esta naturaleza producian el mismo efecto que otras dos que obrasen en los mismos puntos con direcciones y magnitudes diferentes; y ahora añadirémos: 1.° *que un par de fuerzas de esta naturaleza puede ser remplazado por otro de fuerzas diferentes*, *y cuyos puntos de aplicacion sean tambien diferentes de los de las primitivas*.

{ 2.° *Que un par de fuerzas de esta naturaleza* $+P$ y $-P$ *se pueden trasportar á cualquier parage de su plano*, *ó de otro plano cualquiera que le sea paralelo*, *y esté dicho par de fuerzas colocado de un modo cualquiera en este plano*, *sin que se mude su efecto sobre el cuerpo á que esté aplicado*, *con tal que se suponga que la línea que une los puntos de aplicacion* (*á que se suele llamar* brazo de palanca) *se halle invariablemente unida á la primera*.

3.° *Que un par de fuerzas de esta naturaleza equivale á otro par cualquiera que se pudiese considerar como originado por el movimiento del par primitivo al rededor del punto medio de la linea que une los puntos de aplicacion.*

1.° Para demostrar lo primero supongamos que se tengan las dos fuerzas $+P$ y $-P$ aplicadas á los dos estremos de la linea AB (fig. 50); tomemos sobre la prolongacion de AB una parte cualquiera BC, y apliquemos sobre BC paralelamente á las fuerzas $+P$ y $-P$ dos pares de fuerzas $+Q$ y $-Q$, $+Q'$ y $-Q'$ iguales y contrarias; su efecto será absolutamente nulo, porque $+Q$ y $-Q'$ se destruyen, y lo mismo sucede á las $+Q'$ y $-Q$; por lo que la introduccion de estas cuatro fuerzas en nada alterará el efecto de las $+P$ y $-P$; pero si se supone que las fuerzas P y Q' estén en razon inversa de las lineas AB, BC, su resultante que es igual á $P+Q'$, pasará por B y obrará en la direccion de BR; y como esta direccion es opuesta á la de las fuerzas $-P$, $-Q'$, que están aplicadas en B y equivalen á $-P-Q'$, tendrémos que la resultante $+P+Q'$ de las primeras, destruirá la $-P-Q'$ de las fuerzas que están aplicadas á este mismo punto; luego se pueden suprimir las cuatro fuerzas $+P$, $+Q'$, $-P$, $-Q'$, y solo quedará el par $+Q$, $-Q$, aplicado sobre BC, el cual remplazará al par propuesto $+P$, $-P$, aplicado sobre AB.

2.° Para demostrar lo segundo supongamos que se tengan las dos fuerzas $+P$ y $-P$, aplicadas perpendicularmente sobre AB (fig. 51) que se halla en su plano; tomemos arbitrariamente en el plano de estas fuerzas, ó mas generalmente todavía, en cualquier otro plano paralelo al de las fuerzas, la recta CD igual y paralela con AB; unamos los puntos A y D, B y C, por rectas que estarán (I. 543 cor. 2.°) en un mismo plano, y se cortarán por consiguiente (I.468) en el medio I de sus longitudes respectivas; y supongamos en fin las rectas AB y CD unidas entre sí invariablemente. Si se aplican sobre la recta CD paralelamente á las fuerzas $+P$ y $-P$, dos pares de fuerzas $+P'$ y $-P'$, $+P''$ y $-P''$ iguales entre sí y con las $+P$ y $-P$, resulta que el efecto del par primitivo, cualquiera que sea, no se alterará; y como por otra parte las fuerzas $+P$ y $+P''$ producirán una resultante igual á su suma $+P+P''$, tendrémos que siendo iguales las componentes, pasará por el punto I medio de AD, y estará representada por IR; y las $-P$ y $-P''$ producirán una resultante R' igual con $-P-P''$, que se hallará aplicada en I, punto medio de la BC, y podrá estar representada por IR': la cual siendo opuesta á la IR é igual con ella, la destruirá: y por consiguiente solo queda de todo el sistema el par $+P'$ y $-P'$ que viene á ser el primitivo $+P$ y $-P$, trasportado paralelamente al plano de las dos fuerzas; de modo que la linea AB, que une sus puntos de aplicacion, haya venido á tener la posicion paralela CD.

3.° Para demostrar lo tercero supongamos que el par de fuerzas $+P$ y $-P$ esté aplicado perpendicularmente sobre AB (fig. 52); tiremos en el plano de estas fuerzas la CD=AB que forme con la AB un ángulo cualquiera, pero que se dividan en dos partes iguales en el medio I de sus longitudes respectivas. Si se aplican á ángulo recto sobre CD y en el plano de las $+P$ y $-P$, dos pares de fuerzas $+P'$, $-P'$, y $+P''$, $-P''$ contrarios, iguales entre sí y con el par propuesto, estos dos pares de fuerzas quedarán destruidos por sí mismos, pues las $+P'$ y $+P''$ darán una resultante IR igual con $+P'+P''$; y las $-P'$ y $-P''$ darán otra IR$'$ igual con IR; estas dos resultantes que son iguales y están directamente opuestas, se destruirán, y por consiguiente el efecto del par primitivo $+P$ y $-P$ no habrá padecido alteracion; pero los dos pares de fuerzas $+P$ y $-P$, $+P''$ y $-P''$, se destruyen por sí mismos, porque si unimos el punto I con G donde se encuentran las fuerzas $+P$ y $-P''$, los triángulos AGI, GCI serán (I. 376 cor. 2.°) iguales, y por consiguiente los ángulos AGI, CGI, serán iguales, y tendrémos que GI será (24) la direccion de la resultante de $+P$ y de $-P''$; por la misma razon será HI la direccion de la resultante de $-P$ y $+P''$. Ahora, siendo AI=IB y rectos los ángulos en A y en B, los triángulos GAI, BIH, serán iguales, y por consiguiente los ángulos GIA, BIH; de donde resulta que las GI, HI son una sola y misma linea; y como dichas resultantes serán iguales en magnitud por serlo las componentes y los ángulos que forman, tenemos que el efecto de las cuatro fuerzas $+P$, $-P$, $+P''$, $-P''$, será igual al de dos fuerzas iguales que obrasen en I, la una en la direccion GI y la otra en la HI; y como estas se destruyen (12), tendrémos que las espresadas cuatro fuerzas se destruyen, y solo quedará de todo el sistema el par $+P'$ y $-P'$ aplicado sobre CD, el cual viene á ser el par primitivo, que hubiera girado en su plano, de modo que la linea que pasa por medio de AB hubiese venido á tener una posicion oblicua CD. Luego quedan demostradas las tres partes de la proposicion. }

114 Tratemos ahora de hallar analíticamente el valor de la resultante de las mismas fuerzas P, P', P'', &c. cuando ellas tienen una, y la ecuacion de la recta en cuya direccion obra.

Sean m, m', m'', &c. (fig. 49) los puntos de aplicacion de las fuerzas P, P', P'', &c., y mP, m'P$'$, m''P$''$, &c. sus direcciones: en el plano que contiene á todas estas fuerzas, tiremos dos eges rectangulares AX, AZ; espresemos por x, z, las coordenadas de m referidas á estos eges: por x', z', las de m': por x'', z'', las de m'', &c.; tírense por cada uno de los puntos m, m', m'', &c., paralelas á estos eges, y dirigidas en el sentido de las coordenadas positivas: estas rectas son mB, mC para el punto m, y los ángulos PmB, y PmC servirán para fijar la direccion de mP; y supondrémos PmB$=\alpha$, PmC$=6$. Representemos del mismo modo por α' y $6'$ los ángulos relativos á la posicion de m'P$'$ que en el caso presente es cero el primero, por ser la fuerza m'P$'$ paralela al ege de las x, y el segundo, esto es el $6'$, es el P$'m'$C$'$: y por α'' y $6''$ los ángulos P$''m''$B$''$, P$''m''$C$''$, que determinan la direccion m''P$''$, &c.

Esto supuesto, descompongamos cada una de las fuerzas P, P', P'', &c. en otras dos, la una paralela al ege AX y la otra al ege AZ. L... componentes de la fuerza P son $P\cos.\alpha$ en el sentido del ege AX, y $P\cos.\beta$ en el sentido de AZ (§ 39): las de P' son $P'\cos.\alpha'$ y $P'\cos.\beta'$, &c.; de este modo las fuerzas dadas están remplazadas por dos sistemas de fuerzas paralelas. Sea X la resultante de las componentes paralelas á AX, y Z la resultante de las fuerzas paralelas á AZ, y tendrémos (§ 72)

$$X = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + P'''\cos.\alpha''' + P^{IV}\cos.\alpha^{IV} + \&c. \quad (127),$$

$$Z = P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + P'''\cos.\beta''' + P^{IV}\cos.\beta^{IV} + \&c. \quad (128).$$

115 Supongamos ahora que se prolonguen todas las componentes paralelas al ege de las x, y su resultante X, hasta que encuentren al ege de las z; las partes que las prolongaciones de las componentes intercepten en dicho ege serán los valores z, z', z'', z''', &c. de las ordenadas de los puntos de aplicacion m, m', m'', m''', &c. de las fuerzas dadas, y supondrémos que sea $z_{,}$ la ordenada del punto de aplicacion de la resultante X; y como podemos tomar por punto de aplicacion de una fuerza á cualquier punto (20) de su direccion, resulta que podrémos tomar por puntos de aplicacion de las fuerzas $P\cos.\alpha$, $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, &c. paralelas al ege de las x y de la resultante X de todas ellas, los puntos en que sus direcciones cortan al ege AZ, que será á una distancia del orígen espresada por z, z', z'', &c. y por $z_{,}$. Por lo cual tenemos todos los puntos de aplicacion de estas fuerzas en el mismo ege AZ á las distancias Az, Az', Az'', Az''', &c. y A$z_{,}$ del punto de orígen A. Luego si tomamos este punto de orígen A de las coordenadas por centro de los momentos, tendrémos que el momento de la fuerza $P\cos.\alpha$ será $zP\cos.\alpha$, pues z es la coordenada del punto m, que era el punto primitivo de aplicacion de la fuerza P; por la misma razon serán $z'P'\cos.\alpha'$, $z''P''\cos.\alpha''$, &c. y $Xz_{,}$, los momentos de las fuerzas $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, &c., y de su resultante X; y como el momento de la resultante de muchas fuerzas paralelas es igual á la suma de los momentos de las componentes (90), tendrémos $Xz_{,} = zP\cos.\alpha + z'P'\cos.\alpha' + z''P''\cos.\alpha'' + z'''P'''\cos.\alpha''' + \&c.$ (129).

116 Del mismo modo tendrémos prolongando la direccion de las fuerzas paralelas al ege de las z, hasta que encuentren al ege AX, y concibiendo trasladados los puntos de aplicacion de estas fuerzas á los puntos en que encuentren al espresado ege, que $xP\cos.\beta$, $x'P'\cos.\beta'$, &c. serán los momentos de las componentes $P\cos.\beta$, $P'\cos.\beta'$, &c. paralelas al ege de las z, y $Zx_{,}$ el momento de su resultante Z; por lo cual será (§ 90)

$$Zx_{,} = xP\cos.\beta + x'P'\cos.\beta' + x''P''\cos.\beta'' + x'''P'''\cos.\beta''' + \&c. \quad (130).$$

Despejando $z_{,}$ y $x_{,}$ en las (ecs. 129 y 130), resultará

$$z_{,} = \frac{zP\cos.\alpha + z'P'\cos.\alpha' + z''P''\cos.\alpha'' + \&c.}{X} \quad (131),$$

$$x_{,} = \frac{xP\cos.\beta + x'P'\cos.\beta' + x''P''\cos.\beta'' + \&c.}{Z} \quad (132);$$

que son las coordenadas del punto de aplicacion o de la resultante definitiva de todas las fuerzas P, P', P'', &c.

117 Sea R la resultante del sistema, y $\alpha_{,}$ el ángulo desconocido que forma su direccion con AX; y en virtud de lo espuesto (39 y siguientes), sus componentes serán $R\cos.\alpha_{,}$ y $R\,\mathrm{sen.}\alpha_{,}$ ó $R\cos.\beta_{,}$, si llamamos $\beta_{,}$ el ángulo que R forma con el ege AZ; por lo cual se tendrá (ecs. 17 y 18)

$R\cos.\alpha_{,}=X$ (133), $R\,\mathrm{sen.}\alpha_{,}=Z$ (134) ó $R\cos.\beta_{,}=Z$ (135).

118 Si sumamos los cuadrados de las (ecs. 133 y 134), tendrémos $R^2(\cos.^2\alpha_{,}+\mathrm{sen.}^2\alpha_{,})=X^2+Z^2$, y á causa de que $\cos.^2\alpha_{,}+\mathrm{sen.}^2\alpha_{,}=1$, será

$R^2=X^2+Z^2$ (136), que da $R=\sqrt{X^2+Z^2}$ (137).

Las (ecs. 133 y 134) dan ademas $\cos.\alpha_{,}=\dfrac{X}{R}$ (138), $\mathrm{sen.}\alpha_{,}=\dfrac{Z}{R}$ (139)

ó $\cos.\beta_{,}=\dfrac{Z}{R}$ (140), y $\mathrm{tang.}\alpha_{,}=\dfrac{\mathrm{sen.}\alpha_{,}}{\cos.\alpha_{,}}=\dfrac{Z}{X}$ (141).

Estas ecuaciones sirven para conocer la magnitud y direccion de la resultante, y segun lo espuesto (29 esc.) espresan que es la diagonal del rectángulo construido sobre X y Z, como debia verificarse.

Esc. *Con estas ecuaciones tenemos determinada en un todo la magnitud y direccion de la resultante.* En efecto, las (ecs. 131 y 132) nos dan las coordenadas de su punto de aplicacion o; las (ecs. 138 y 139) los ángulos que dicha direccion forma con los eges, ó la (ec. 141) el ángulo que forma con el ege de las x, pudiendo tener $\alpha_{,}$ todos los valores desde 0° hasta 2π; y por último la (ec. 137) nos da la magnitud de la resultante, que es todo lo que necesitamos.

119 Procedamos ahora á determinar la ecuacion de la resultante; para lo cual observarémos que toda recta que pase por un punto cuyas coordenadas sean $x_{,}$, $z_{,}$, que forma con el ege de las x un ángulo $\alpha_{,}$ y cuyas coordenadas espresarémos por $'x$, $'z$, tiene en general por ecuacion (II. 163) $'z-z_{,}=\mathrm{tang.}\alpha_{,}\,('x-x_{,})$ (142).

Luego si llamamos $x_{,}$, $z_{,}$ las coordenadas del punto de aplicacion de las fuerzas, y sustituimos en vez de $\mathrm{tang.}\alpha_{,}$ su valor (ec. 141) se tendrá para la direccion de la resultante

$$'z-z_{,}=\frac{Z}{X}('x-x_{,})\ (143),\ \text{ó}\ 'zX-Xz_{,}='xZ-Zx_{,}\ (144),$$

que da $'zX-'xZ=Xz_{,}-Zx_{,}$ (145);
en la cual todo es determinado, escepto las $'x$, $'z$, que son las coordenadas de dicha resultante.

120 Si sustituimos en la (ec. 145) en vez de $Xz_{,}$, $Zx_{,}$ sus valores (ecs. 129 y 130), tendrémos para la ecuacion de la resultante

$$'zX-'xZ=Xz_{,}-Zx_{,}=zP\cos.\alpha+z'P'\cos.\alpha'+z''P''\cos.\alpha''+\&c.-$$
$$xP\cos.\beta-x'P'\cos.\beta'-x''P''\cos.\beta''-\&c.\ (146);$$

que como cada fuerza se halla en dos términos la podrémos poner bajo esta forma: $'zX-'xZ=Xz_{,}-Zx_{,}=P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)+$

$$P'(z'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+P''(z''\cos.\alpha''-x''\cos.\beta'')+\&c.\ (147);$$

ó espresando por L el segundo miembro de esta ecuacion, esto es haciendo

$$Xz_{,}-Zx_{,}=P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)+P'(z'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+ P''(z''\cos.\alpha''-x''\cos.\beta'')+\&c.=L \quad (148),$$

se nos convertirá en $'zX-'xZ=L$ (149),

que es la ecuacion definitiva de la resultante de todas las fuerzas P, P', P'', *&c.* En la cual suponiendo ya determinado el valor de L podríamos omitir los acentos de las $'x$, $'z$, y suponer que las coordenadas se espresaban simplemente por x y z, respecto á que ya no se podian confundir con las coordenadas del punto m; por lo que la ecuacion definitiva de la resultante tambien podíamos suponer que era la $Xz-Zx=L$ (150), en la cual espresaban x y z las coordenadas de dicha resultante.

121 Para no dejar nada que desear vamos á resolver un egemplo numérico; para esto supondrémos que se tengan las cinco fuerzas P, P', P'', P''', P^{IV}, cuyas magnitudes y direcciones estén representadas por mP, m'P$'$, m''P$''$, m'''P$'''$, m^{IV}P^{IV} (fig. 49), en la que los valores que determinan cada fuerza son los siguientes

Magnitudes de las fuerzas.	*Ángulos que forman con el ege de las x.*	*Ángulos que forman con el ege de las z.*	*Coordenadas de los puntos respectivos de aplicacion abscisas.*	*Coordenadas de los puntos respectivos de aplicacion ordenadas.*
$P=15$	$\alpha=60°$	$\beta=30°$	$x=35$	$z=25$
$P'=20$	$\alpha'=0°$	$\beta'=90°$	$x'=40$	$z'=21$
$P''=20$	$\alpha''=115°$	$\beta''=155°$	$x''=30$	$z''=10$
$P'''=8$	$\alpha'''=160°$	$\beta'''=110°$	$x'''=20$	$z'''=30$
$P^{IV}=5$	$\alpha^{IV}=35°$	$\beta^{IV}=125°$	$x^{IV}=4$	$z^{IV}=21$

Y sustituyendo estos valores en las (ecs. 127 y 128) se nos convertirán en

$$\begin{cases} X=15\cos.60°+20\cos.\ 0°+20\cos.115°+8\cos.160°+5\cos.\ 35°, \\ Z=15\cos.30°+20\cos.90°+20\cos.155°+8\cos.110°+5\cos.125°; \end{cases}$$

y teniendo presente que
$$\begin{cases} \cos.115°=\cos.(90°+25°)=-\text{sen}.25°, \\ \cos.160°=\cos.(90°+70°)=-\text{sen}.70°, \\ \cos.155°=\cos.(90°+65°)=-\text{sen}.65°, \\ \cos.110°=\cos.(90°+20°)=-\text{sen}.20°, \\ \cos.125°=\cos.(90°+35°)=-\text{sen}.35°, \end{cases}$$

y por otra parte que $\cos.0=\text{sen}.90°=1$, y $\cos.90°=\text{sen}.0°=0$, tendrémos convertidas las ecuaciones anteriores en

$$X=15\cos.60°+20-20\text{sen}.25°-8\text{sen}.70°+5\cos.35°,$$
$$Z=15\cos.30°-20\text{sen}.65°-8\text{sen}.20°-5\text{sen}.35°;$$

y tomando en unas tablas estos senos y cosenos con cuatro decimales, sustituyéndolos en estas ecuaciones y egecutando las operaciones, tendrémos

$$X=15\times0,5+20-20\times0,4226-8\times0,9397+5\times0,8191= 7,5+20-8,452-7,5176+4,0955=15,6259,$$
$$Z=15\times0,866-20\times0,90631-8\times0,342-5\times0,5736= 12,99-18,126-2,736-2,868=-10,74.$$

Sustituyendo en las (ecs. 131 y 132) en vez de las cantidades que entran en ellas, sus valores, y teniendo presente que los productos $P\cos.\alpha$, $P'\cos.\alpha'$, &c. son los términos de la primera de las ecuaciones anteriores, y que los productos $P\cos.\beta$, $P'\cos\beta'$ son los de la segunda, teniendo presente que el $P'\cos.\beta'=0$, será

$$z_{,}=\frac{25.7{,}5+21.20-10.8{,}452-30.7{,}5176+21.4{,}0955}{15{,}6259}=\frac{383{,}4575}{15{,}6259}=24{,}54$$

$$x_{,}=\frac{35\times12{,}99-30\times18{,}126-20\times2{,}736-4\times2{,}868}{-10{,}74}=\frac{-155{,}322}{-10{,}74}=14{,}46.$$

Estas son las coordenadas del punto de aplicacion o de la resultante: la magnitud de esta la tendrémos sustituyendo en la (ec. 137) en vez de X y de Z los valores que hemos encontrado, y nos resultará

$$R=\sqrt{(15{,}6259)^2+(-10{,}74)^2}=\sqrt{244{,}1686+115{,}3476}=18{,}96.$$

La direccion de la resultante la hallarémos determinando los ángulos $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, por medio de las (ecs. 138 y 140), ó mas simplemente solo por la (ec. 141), la cual nos dará $\tang.\alpha_{,}=\frac{Z}{X}=\frac{-10{,}74}{15{,}6259}=-0{,}68732.$

Este valor corresponde próximamente en las tablas trigonométricas naturales á la tangente del ángulo de $34^\circ\ 30'$; pero como es negativo el valor de dicha tangente, indica que el ángulo $\alpha_{,}$ es negativo (II. 16), esto es, que se debe formar en el punto o por la parte inferior á la oF paralela al ege AX, ó que dicho ángulo ha de ser igual (II. 14) con

$$180^\circ-34^\circ\ 30'=145^\circ\ 30', \text{ ó con } 360^\circ-34^\circ\ 30'=325^\circ\ 30',$$

en cuyo caso se deberá formar con la oF por la parte superior á ella un ángulo de $145^\circ\ 30'$ ó de $325^\circ\ 30'$.

Estos dos valores, así como el anterior, que era el de formar con la oF un ángulo por la parte inferior de $34^\circ\ 30'$ nos dan la direccion de la misma linea oR; y para saber el sentido en que obra no tenemos mas que atender á los signos de X y Z;

y como el primero es positivo, indica que la componente oF debe tener la direccion de las abscisas positivas; luego se deberá contar desde o hácia la derecha; y como el valor de Z es negativo, indica que la componente de la resultante en el sentido del ege de las z debe tomarse desde el punto o hácia abajo; y por consiguiente debiendo hallarse la resultante en lo interior (23) del ángulo FoG, no queda la mas mínima duda en que el sentido en que obra es en la direccion de o á R, y no de o á R'.

Las (ecs. 138 y 140) hubieran dado $\cos.\alpha_{,}=\frac{X}{R}=\frac{15{,}6259}{18{,}96}=0{,}82415,$

que corresponde próximamente á $34^\circ\ 30'$.

Luego formando en o un ángulo de este valor tendrémos la direccion de la resultante; pero como puede haber dos lineas que cumplan con esta condicion, una por mas arriba de la oF y otra por mas abajo, aun no sabemos cuál de ellas debe espresar la direccion de la resultante; de cuya duda saldrémos, determinando el ángulo $\mathfrak{G}_{,}$, para el cual se tiene (ec. 140)

$$\cos.\mathfrak{G}_{,}=\frac{Z}{R}=\frac{-10,74}{18,96}=-0,5664;$$

cuyo valor absoluto corresponde próximamente al coseno de $55^{\circ}\ 30'$; pero como dicho coseno es negativo, corresponde (II. 10) á un ángulo de

$$180^{\circ}-55^{\circ}\ 30'=124^{\circ}\ 30';$$

y como de las dos rectas que se pueden tirar por o, la oR es la que cumple con esta condicion de formar con la oD que es paralela al ege AZ el ángulo DoR de esta magnitud, tenemos que esta será la direccion de la resultante, como en efecto se verifica, y queda comprobada toda la teoría espuesta sobre este punto.

Para hallar la ecuacion de la resultante determinarémos primero el valor de L, que es (ec. 148) $L=Xz_{,}-Zx_{,}$;
sustituyendo en vez de X, Z, $x_{,}$, $z_{,}$, sus valores, será

$$L=15,6259\times24,54- -10,74\times14,46=383,4575+155,322=538,7795,$$

y sustituyendo este valor y los de Z y X en la (ec. 150), será

$$15,6259z+10,74x=538,7795,$$

que da $z=\dfrac{-10,74x+538,7795}{15,6259}=-0,6873x+34,48,$

que *es la ecuacion definitiva de la resultante.*

Si por medio de esta ecuacion quisiésemos construirla, averiguaríamos en que puntos cortaba á los eges; para lo cual haríamos primero $x=0$, y tendríamos $z=34,48$;
luego si tomamos en el ege AZ la parte $Al=34,48$, tendrémos el punto por donde debe pasar la resultante; haciendo $z=0$, tendrémos

$$x=\frac{34,48}{0,6873}=50,16;$$

por lo que tomando la parte $Ak=50,16$, el punto k seria el punto en que la resultante cortase al ege AX; por consiguiente tirando una recta por los dos puntos l y k esta seria la direccion de la resultante.

Como el coeficiente de x espresa (II. 160) la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el ege de las x, resulta que un solo punto de interseccion con uno de los eges y este ángulo bastaria tambien para determinar su posicion; pero buscando el ángulo que tiene por tangente $-0,6873$ se halla como ántes de $34^{\circ}\ 30'$ tomado por la parte inferior de dicho ege, ó de 145° y $30'$ tomado por la parte superior. Luego si en el punto k formamos un ángulo hkX de $34^{\circ}\ 30'$, ó Xkl de $145^{\circ}\ 30'$, la recta hko espresará la direccion de la resultante; y tenemos comprobados perfectísimamente todos los métodos.

122 Toda la análisis espuesta desde el (§ 114) supone que todas las

fuerzas componentes paralelas al ege AX sean reducibles á una sola, como tambien las componentes paralelas al ege AZ; luego es necesario para completarla, examinar los casos particulares en que estas reducciones son imposibles.

Cuando estos dos sistemas de fuerzas paralelas se reducen cada uno á dos fuerzas iguales y contrarias, pero no directamente opuestas, se pueden reducir estas cuatro fuerzas á dos que serán paralelas, iguales y contrarias, y que no se hallarán en general directamente opuestas.

Para demostrarlo supongamos que las fuerzas paralelas al ege AX se reduzcan á las $+X'$ y $-X'$ (fig. 53) que sean paralelas, iguales y contrarias, pero que no estén directamente opuestas, sino que la $+X'$ tenga su punto de aplicacion en B y la $-X'$ en C; y supongamos tambien que las fuerzas paralelas al ege AZ se reduzcan á las $+Z'$ y $-Z'$ que sean paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas, sino que por egemplo la $+Z'$ tenga su punto de aplicacion en D, y la $-Z'$ en E. Con lo cual tendrémos que prolongando por egemplo la fuerza $+Z'$ hasta que encuentre á una de las otras, por egemplo á la $-X'$ que es la que está mas cerca, ó á su prolongacion, podrémos considerar que las fuerzas $+Z'$ y $-X'$ obren en el punto F de la interseccion de sus direcciones; y tomando FG igual con la intensidad de la fuerza $-X'$, que la suponemos representada por la distancia que hay desde C hasta $-X'$, y tambien FH igual con la intensidad de $+Z'$: y concluyendo el paralelogramo FHR'G, su diagonal FR' espresará la resultante de las dos fuerzas $+Z'$ y $-X'$.

Prolongando las $-Z'$ y $+X'$ hasta que se encuentren en un punto tal como K, y tomando $\text{KI}=-Z'$ y $\text{KL}=+X'$, y concluyendo el paralelogramo KLR''I, tendrémos que su diagonal KR'' será la resultante de $-Z'$ y $+X'$; con lo cual tenemos reducidas las cuatro fuerzas á las dos FR' y KR''. Estas son iguales por la igualdad de los triángulos KIR'', R'GF (I. 360): son paralelas, porque si unimos el punto F con el K, el ángulo HFK= al FKI por alternos internos; y como los HFR' y R''KI son iguales por la igualdad de los triángulos IKR'', HFR', sumando dichos ángulos resultarán iguales los R'FK y R''KF; luego las lineas KR'' y FR' son (I. 384) paralelas: son contrarias, porque la una obra en la direccion de K á R'' y la otra en la de F á R'; y en general no son directamente opuestas, porque no siempre coincidirá el punto F con el K como se verifica en la figura.

De donde resulta que en este caso las fuerzas dadas no admiten una resultante única; y como se verifica á un mismo tiempo $X=0$, $Z=0$, resulta que las (ecs. 137, 131 y 132) dan

$$R=0 \ (151), \quad x_{,}=\infty \ (152), \quad z_{,}=\infty \ (153),$$

es decir, que el cálculo da entónces, como sucede siempre en igual caso (71), una resultante nula situada á una distancia infinita de las componentes.

123 *Si las fuerzas paralelas al ege de las* x *tienen una resultante*

que será igual á su suma X: y las fuerzas paralelas al ege de las z se reducen á dos iguales y contrarias, pero no directamente opuestas: estas tres fuerzas se reducirán fácilmente á una sola que se hallará igual y paralela con X.

Para demostrarlo supongamos que sea hE (fig. 54) la direccion de la fuerza X; kF y k'F$'$ las direcciones contrarias de las dos fuerzas paralelas al ege AZ; y g el punto de interseccion de las dos lineas kF y hE, que eligirémos por punto de aplicacion de las fuerzas dirigidas segun estas rectas. Hallemos la resultante de estas dos fuerzas, y supongamos que gD sea su direccion que encuentre á la recta k'F$'$ en el punto g'; trasportemos á g' el punto g de aplicacion; tiremos por este mismo punto la recta g'E$'$ paralela á gE; descompongamos esta resultante en dos fuerzas dirigidas segun g'E$'$ y $g'k'$, ó paralelas á los eges AX y AZ, y volverémos á encontrar la misma fuerza X, y una fuerza igual á la que obraba en la direccion gF, la cual obra ahora en la direccion $g'k'$; por lo que esta segunda fuerza será igual y directamente opuesta á la fuerza dirigida segun g'F$'$; luego se destruirán mutuamente, y no quedará mas que una sola fuerza X dirigida segun $g'E'$; luego esta será la resultante de las tres fuerzas dadas que estaban dirigidas segun hE, kF, y $k'F'$.

124 Del mismo modo se hallará que si las fuerzas paralelas al ege AZ tienen una resultante única, y las fuerzas paralelas al ege AX se reducen á dos iguales y contrarias, estas tres fuerzas se reducirán á una sola que será igual y paralela á la primera. Así, siempre que las dos cantidades X y Z no sean nulas á un mismo tiempo, las fuerzas dadas P, P', P'', &c. admiten una resultante única; cuando se tiene solamente $X=0$, esta resultante es paralela al ege AZ; y es paralela al ege AX cuando se tiene $Z=0$.

125 No se puede dudar de que la (ec. 148 ó 149) pertenece á la resultante, siempre que la tenga el sistema, aun cuando ella sea paralela á uno de los dos eges; porque en virtud de lo que precede, pertenece ciertamente á la direccion de esta fuerza, cuando forma ángulos cualesquiera con los eges; y como este resultado tiene lugar por pequeño que sea el uno de estos ángulos, se sigue que aun subsiste en el límite donde este ángulo viene á ser nulo, y la fuerza resulta paralela á uno de los eges.

Si se hace sucesivamente $Z=0$ y $X=0$ en la (ec. 149), se halla

$$'zX=L\ (154),\quad 'xZ=-L\ (155),$$

ecuaciones que pertenecen (II. 143 y 147) á rectas paralelas al ege de las x y de las z, y que hacen conocer las distancias á estos eges. De la primera se saca $'z=\dfrac{L}{X}$ (156),

y este valor de $'z$ espresa en la (fig. 54) la distancia de la linea g'E$'$ al ege AX, ó lo que es lo mismo la ordenada Al del punto l donde esta direccion de la resultante corta al ege AZ.

{ 126 No será inútil decir en pocas palabras cómo se puede verificar este valor de Al.

Siendo el punto h la interseccion de la recta gE con el ege AZ, se tiene al principio $Al=Ah-hl$; pero haciendo $Ah=z_{,}$ se tiene ya (ec. 129)

$$Xz_{,}=zP\cos.\alpha+z'P'\cos.\alpha'+z''P''\cos.\alpha''+\&c. \quad (157);$$

luego solo falta hallar el valor de hl. Para esto, espresemos por S la fuerza dirigida segun kF, y por s su distancia al ege AZ: por S' la fuerza igual y contraria que obra segun k'F', y por s' su distancia al mismo ege; considerando que S es la resultante de una parte de las fuerzas $P\cos.\beta$, $P'\cos.\beta'$, &c. paralelas á este ege, y que S' es la resultante de la otra parte, se tendrá en virtud de la (ec. 95)

$$Ss+S's'=xP\cos.\beta+x'P'\cos.\beta'+x''P''\cos.\beta''+\&c.$$

Por otra parte se tiene $s-s'=kl-lg'=g'k$, $hl=g'k'$, $S'=-S$, y por consiguiente $Ss+S's'=Ss-Ss'=S(s-s')=S\times g'k$; pero á causa de que la diagonal $g'g$ del rectángulo $k'g'kg$ es la direccion de la resultante de las fuerzas S y X que obran en el punto g' segun los lados $g'k'$ y $g'k$, se tiene tambien $g'k:g'k'::X:S$;

de donde se saca $g'k'=\dfrac{S\times g'k}{X}=\dfrac{Ss+S's'}{X}$,

ó quitando el divisor y poniendo hl en vez de $g'k'$ será $X\times hl=Ss+S's'$; por lo cual $X\times hl=xP\cos.\beta+x'P'\cos.\beta'+x''P''\cos.\beta''+\&c.$; restando esta ecuacion de la (ec. 157), el primer miembro se nos convierte en $Xz_{,}-X\times hl=X(Ah-hl)=X\times Al$; y el segundo se convierte en el valor que hemos señalado con L (ec. 148); por lo que tendrémos $X\times Al=L$, ó poniendo por Al su valor $'z$, se tendrá $'zX=L$, que coincide con la (ec. 154) }.

Para hallar ahora las condiciones de equilibrio de las fuerzas P, P', P'', &c. dadas en magnitud y direccion, y comprendidas todas en un mismo plano, separarémos como se ha hecho (106) la fuerza P de las otras. Si no hay ningun punto fijo en el sistema, será necesario para que estas fuerzas se destruyan que P', P'', &c. tengan una resultante igual y contraria á P. Sea R' esta resultante, a' y b' los ángulos que determinan su direccion con relacion á los eges de las x y de las z, y tendrémos descompuesta la resultante en dos fuerzas que sean paralelas con dichos eges; estas componentes serán $R'\cos.a'$ y $R'\cos.b'$, que espresarémos por X' y por Z'; con lo cual las (ecs. 127 y 128) se nos convertirán en

$$X'=R'\cos.a'=P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+\&c.,$$

$$Z'=R'\cos.b'=P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+\&c.,$$

y para la ecuacion de la recta, segun la cual obra esta resultante, se tendrá (ec. 149) $_{,}zX'-{}_{,}xZ'=L'$ (158), siendo $_{,}z$ y $_{,}x$ las coordenadas variables de la linea de direccion, y L' la cantidad $P'(z'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+P''(z''\cos.\alpha''-x''\cos.\beta'')+\&c.$; de modo que comparando estas cantidades con sus análogas X, [illegible] y L

(ecs. 127, 128 y 148), se tiene $X'=X-P\cos.\alpha$ (159), $Z'=Z-P\cos.\beta$ (160), $L'=L-P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)$ (161).

Como para que se destruyan y equilibren las dos fuerzas P y R', deben ser (18. cor.) iguales y directamente opuestas, es necesario al principio que la suma de sus componentes segun cada ege de las coordenadas sea (45) igual á cero; pero la componente de P segun el ege de las x es $P\cos.\alpha$, y segun el ege de las z es $P\cos.\beta$; y como las componentes de R' segun los mismos eges las hemos espresado por X', Z', resulta que en el caso de equilibrio se deberá tener $\begin{cases} X'+P\cos.\alpha=0 & (162) \\ Z'+P\cos.\beta=0 & (163); \end{cases}$ por lo que las (ecs. 159 y 160) darán $X=0$ (164), $Z=0$ (165); cuyas condiciones las hubiéramos podido deducir directamente de la (ec. 137) por un razonamiento análogo al espuesto (45).

128 Las (ecs. 162 y 163) ó las (ecs. 164 y 165), espresan que dichas fuerzas X' y $P\cos.\alpha$ son iguales y paralelas, y que están dirigidas en sentidos contrarios; pero aun no nos espresan la circunstancia de ser directamente opuestas. Así, es necesario aun indagar la condicion que se ha de verificar para que el punto en que está aplicada la fuerza P se encuentre sobre la direccion de la fuerza R'; para esto se necesita que las coordenadas x, z, del punto de aplicacion de P satisfagan á la (ec. 158), es decir, que esta ecuacion debe subsistir cuando se haga en ella

$${}_{\prime}x=x,\ {}_{\prime}z=z, \text{ lo que da } X'z-Z'x=L' \ (166);$$

y sustituyendo en vez de X', Z', L', sus valores sacados de las (ecs. 162, 163 y 161), se tendrá $-zP\cos.\alpha+xP\cos.\beta=L-P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)$, que efectuando la destruccion se convierte en $L=0$ (167).

De donde resulta que las tres ecuaciones $X=0$, $Z=0$, $L=0$, son necesarias y bastan para el equilibrio de las fuerzas P, P', P'', &c., pues que tomadas juntas espresan que estas fuerzas se reducen á dos iguales y directamente opuestas. Sustituyendo en vez de X, Z y L, lo que estas letras representan (ecs. 127, 128 y 148) se tiene

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+\&c.=0 \ (168),$$
$$P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+\&c.=0 \ (169),$$
$$P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)+P'(z'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+\&c.=0 \ (170).$$

129 Algunas veces se emplea una notacion mas cómoda para espresar estas ecuaciones, escribiéndolas del modo siguiente:

$\Sigma.(P\cos.\alpha)=0$ (171), $\Sigma.(P\cos.\beta)=0$ (172), $\Sigma.(P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta))=0$ (173); espresando el carácter Σ que es la *sigma* ó *S mayúscula griega* una suma de cantidades de la misma forma que la que está comprendida en el paréntesis.

130 Cuando las fuerzas, los ángulos y las coordenadas que entran en estas ecuaciones, y que son dadas en cada caso particular, las hagan idénticas, tendrémos seguridad de que el equilibrio existe; y si alguna ó algunas de estas tres ecuaciones no está satisfecha por estas cantidades, estarémos igualmente ciertos de que el equilibrio no tiene lugar.

131 Si se tiene solamente $L=0$ ó $\Sigma.(P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta))=0$,

las fuerzas P, P', &c. tendrán una resultante igual (ec. 137) á $\sqrt{X^2+Z^2}$, y cuya direccion pasará por el punto A orígen de las coordenadas, porque su (ec. 149) se reduce entónces á

$$'zX-'xZ=0 \ (174), \text{ de donde } ,z=\frac{Z}{X},x \ (175);$$

ecuacion que pertenece (II. 160) á una recta que pasa por el orígen de las coordenadas, formando un ángulo con el ege de las x, cuya tangente trigonométrica es $\frac{Z}{X}$.

Pero cuando existe un punto fijo en el sistema, basta para el equilibrio que la resultante de las fuerzas dadas pase por este punto: y ademas el equilibrio no puede tener lugar, sino de esta sola manera; luego en el caso de haber un punto fijo, si se toma por orígen de las coordenadas, las condiciones de equilibrio se reducirán á que la cantidad L sea nula con relacion á este orígen; de modo que no se tendrá entónces sino una sola ecuacion de equilibrio, á saber la (ec. 170).

132 Acabamos de ver que la ecuacion $L=0$, espresa la condicion de equilibrio de un número cualquiera de fuerzas P, P', P'', &c. al rededor de un punto fijo; y como espresa lo mismo la (ec. 96) resulta que deberán ser idénticas. En efecto, si el orígen de las coordenadas x, z, x', z', &c. que entran en la funcion L, coincide con el centro de los momentos desde donde se tiran las perpendiculares p, p', p'', &c. resulta en efecto $Pp+P'p'+P''p''-P'''p'''-\&c.=P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)+$
$P'(z'\cos.\alpha'-x'\cos.\beta')+P''(z''\cos.\alpha''-x''\cos.\beta'')+\&c.=\pm L$ (176).

Para convencernos de ello observarémos que si mP espresa (fig. 55) la direccion de la fuerza P, la perpendicular que desde el centro ú orígen A tiremos á su direccion será Ap, que es la que hemos señalado con p en la ecuacion anterior: las coordenadas x, z del punto de aplicacion m de dicha fuerza serán las AE, Em; y tirando por el orígen A la AG paralela á Pmp, y por E la EF perperdicular á dicha Pmp, será

$$p=\text{A}p=\text{EF}-\text{EG}.$$

Ahora, el triángulo rectángulo FEm da EF$=m$E$\times\cos.m$EF;
y como el ángulo FEm es complemento del FmE en dicho triángulo, y este es complemento del ángulo en H$=\alpha$, que forma la direccion de mP con el ege AX, resulta (I. 353) que el ángulo mEF$=\alpha$;
por lo que EF$=z\cos.\alpha$.

El triángulo AGE rectángulo en G, da EG$=$AE$\times\cos.$AEG;
pero el ángulo AEG tiene por complemento al GAE, y este es tambien complemento del ángulo GAZ y por consiguiente de su igual ZkF$=\beta$;
luego tendrémos que el ángulo GEA$=\beta$; por lo cual EG$=x\cos.\beta$;
y poniendo estos valores de EF y EG en el de p será $p=z\cos.\alpha-x\cos.\beta$;
y multiplicando esta ecuacion por P, se tendrá $Pp=P(z\cos.\alpha-x\cos.\beta)$;

del mismo modo demostraríamos que eran iguales los demas términos de ambos miembros.

133 Si las fuerzas P, P', P'', &c. no tienen resultante, se añadirá á este sistema una fuerza S de magnitud y posicion arbitrarias, y entónces existirá una resultante, y tendrá lugar la (ec. 176) comprendiendo á S en el número de las fuerzas dadas; pero suponiendo que su direccion pase por el orígen de las coordenadas, los miembros de esta ecuacion serán los mismos que si la fuerza no existiese; luego dicha ecuacion subsiste entre las solas fuerzas P, P', P'', &c.; por consiguiente es verdadera, sea que estas fuerzas tengan una resultante, ó sea que no la tengan y se equilibren.

Composicion y equilibrio de las fuerzas situadas de un modo cualquiera en el espacio.

134 Puesto que hemos resuelto con relacion á las fuerzas paralelas y á las que se hallan sobre un mismo plano, todas las cuestiones que se pueden proponer acerca de estos dos sistemas de fuerzas, parece natural el tratar de descomponer en dos sistemas de esta especie las fuerzas que en el espacio tienen una direccion cualquiera.

Con este objeto supondrémos que sean P, P', P'', &c. (fig. 56) las fuerzas dadas, cuyos puntos de aplicacion m, m', m'', &c. los supondrémos unidos entre sí de un modo invariable. Por el punto A elegido arbitrariamente, tirarémos tres lineas AX, AZ, AU, que formen entre sí ángulos rectos y que nos servirán de eges rectangulares. Sean x, z, u, las coordenadas de m punto de aplicacion de la fuerza P, y α, β, γ, los ángulos que forma la direccion de P con lineas tiradas por m paralelas á los eges AX, AZ, AU. Espresemos por x', z', u', α', β', γ', las cantidades semejantes correspondientes al punto m', que es el punto de aplicacion de la fuerza P'; y sean x'', z'', u'', α'', β'', γ'', las correspondientes á m'' punto de aplicacion de P'', y así sucesivamente.

Descompongamos cada una de las fuerzas P, P', P'', &c. sin mudar su punto de aplicacion, en tres fuerzas paralelas á los eges de las x, de las z y de las u; y tendrémos (51) que
$P\cos.\alpha$, $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, &c. serán las componentes paralelas al ege AX,
$P\cos.\beta$, $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$, &c. serán las componentes paralelas al ege AZ,
y $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, &c. serán las componentes paralelas á AU.

Por consiguiente podrémos sustituir estos tres conjuntos de fuerzas á las P, P', P'', &c.; luego solo se trata de referir á un mismo plano las fuerzas que componen dos de estos conjuntos, por egemplo, las fuerzas paralelas á los eges de las x y de las z.

135 Para conseguirlo observarémos que sin alterar el sistema de fuerzas que se considera, se pueden aplicar en un mismo punto dos fuerzas iguales y contrarias (12); por lo cual en el punto m aplicarémos dos fuerzas paralelas al ege AU iguales y opuestas, que espresarémos

por g y por $-g$. Compongamos la fuerza g que obra segun ma con la fuerza $P\cos.\alpha$ que obra segun mh (fig. 56) paralela á AX; y supongamos que sea mb la direccion de su resultante, y B el punto donde su prolongacion encuentra al plano de las xz. Trasportemos á B el punto m de aplicacion de esta fuerza; descompongámosla despues en dos fuerzas paralelas á los eges de las x y de las u, lo que reproducirá las componentes g y $P\cos.\alpha$, de las cuales solo se ha mudado su punto de aplicacion; la fuerza $P\cos.\alpha$ está ahora dirigida en el plano de las xz segun la recta BH proyeccion de su primera direccion mh; la fuerza g está aplicada perpendicularmente á este plano en un punto B de esta proyeccion, cuyas coordenadas vamos á determinar. Para esto supondrémos que n sea la proyeccion de m sobre el plano de las xz; y como las coordenadas de m son x, z, u, las del punto B serán z y $x-n\text{B}$.

Pero considerando el paralelogramo rectángulo $n\text{BC}m$, y observando que su diagonal Bm es la direccion de la resultante de las fuerzas g y $P\cos.\alpha$ que obran segun sus lados BC y Bn, se tiene $\text{B}n:\text{BC}::P\cos.\alpha:g$;

de donde, á causa de ser $\text{BC}=u$, se saca $\text{B}n=\dfrac{uP\cos.\alpha}{g}$.

Luego las coordenadas del punto B de aplicacion de la fuerza g en el plano de las xz, son z y $x-\dfrac{uP\cos.\alpha}{g}$.

136 Componiendo la fuerza $P\cos.\beta$ que obra en la direccion de mD con $-g$ que obra en la direccion mn, la direccion de su resultante se hallará en el plano Dmn, que es paralelo al de las zu; por consiguiente el punto C′ donde esta diagonal corta al plano xz, tendrá la misma coordenada x que el punto m; y la coordenada del punto C′ paralela al ege de las z, se compondrá de la z correspondiente al punto m, mas la C′n. Pero siendo mC′ la direccion de la resultante de dos fuerzas $P\cos.\beta$ y $-g$ que obran en las direcciones de mD y mn, tendrémos $m\text{D}=\text{C}'n:mn::P\cos.\beta:g$,

de donde se saca $\text{C}'n=\dfrac{mn\times P\cos.\beta}{g}=\dfrac{uP\cos.\beta}{g}$;

por consiguiente las coordenadas del punto C′ en que se puede considerar aplicada la fuerza $-g$ en el plano de las zx, serán x y $z+\dfrac{uP\cos.\beta}{g}$.

137 Por el mismo medio se trasportarán todas las fuerzas $P'\cos.\alpha'$, $P''\cos.\alpha''$, &c., $P'\cos.\beta'$, $P''\cos.\beta''$, &c. al plano de las xz. Cada una de estas obrará en dicho plano segun la proyeccion de su direccion primitiva, que podrá estar encima ó debajo del mismo plano; pero ademas se tendrán paralelamente al ege de las u tantos pares de fuerzas $+g'$ y $-g'$, $+g''$ y $-g''$, &c., cuantos sean los puntos m', m'', &c.

Las coordenadas de los puntos de aplicacion de estas fuerzas en el plano de las xz, se deducirán de las que corresponden á las fuerzas g y $-g$, acentuando las letras x, z, g, P, α, β. Luego tenemos en vez de las fuerzas dadas un sistema de fuerzas dirigidas en el plano de las xz, y otro de fuerzas perpendiculares á este plano.

138 Para el equilibrio de las primeras es necesario que se tengan las tres (ecs. 168, 169, 170); porque las notaciones son las mismas. Luego

se tiene $\begin{cases} P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + \&c. = 0 \; (177), \\ P\cos.\beta + P'\cos.\beta' + P''\cos.\beta'' + \&c. = 0 \; (178), \\ P(z\cos.\alpha - x\cos.\beta) + P'(z'\cos.\alpha' - x'\cos.\beta') + \&c. = 0 \; (179). \end{cases}$

Para el equilibrio de las fuerzas paralelas al ege de las u, á saber $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, &c. g, g', g'', &c., y $-g$, $-g'$, $-g''$, &c. es necesario 1.º que la suma de todas (107) sea nula, lo que teniendo presente que las g y $-g$, las g' y $-g'$, &c. se destruyen, da

$$P\cos.\gamma + P'\cos.\gamma' + P''\cos.\gamma'' + \&c. = 0 \; (180).$$

Es necesario 2.º que la suma de los momentos tomados con relacion á los planos de las xu y de las zu, que les son paralelos, sean tambien nulos. Pero con relacion al plano de las xu, la suma de los momentos de $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, &c., es $zP\cos.\gamma + z'P'\cos.\gamma' + z''P''\cos.\gamma'' + \&c.$: la suma de los momentos de las fuerzas g, g', g'', &c. con relacion al mismo plano, es $zg + z'g' + z''g'' + \&c.$:
y en fin la suma de los momentos de las fuerzas $-g$, $-g'$, $-g''$, $-\&c.$

es $-g\left(z + \dfrac{uP\cos.\beta}{g}\right)$, $-g'\left(z' + \dfrac{u'P'\cos.\beta'}{g'}\right)$, $-\&c.$,

pues que $z + \dfrac{uP\cos.\beta}{g}$, $z' + \dfrac{u'P'\cos.\beta'}{g'}$, &c. espresan (137) las coordenadas de sus puntos de aplicacion perpendiculares al plano de las xu.

Luego si reunimos estas tres sumas y reducimos, tendrémos

$$P(z\cos.\gamma - u\cos.\beta) + P'(z'\cos.\gamma' - u'\cos.\beta') + P''(x''\cos.\gamma'' - u''\cos.\beta'') + \&c. = 0 \; (181).$$

Del mismo modo se hallará formando la suma de los momentos con relacion al plano de las xz, é igualándola á cero,

$$P(x\cos.\gamma - u\cos.\alpha) + P'(x'\cos.\gamma' - u'\cos.\alpha') + P''(x''\cos.\gamma'' - u''\cos.\alpha'') + \&c. = 0 \; (182).$$

139 Estas seis ecuaciones, á saber, las (177, 178, 179, 180, 181 y 182) bastan para el equilibrio de las fuerzas P, P', P'', &c.; porque si el equilibrio existe separadamente en los dos sistemas que remplazan á las fuerzas dadas, no hay duda en que existirá tambien entre estas fuerzas.

Más para que estas ecuaciones sean necesarias para el equilibrio de todo el sistema, es preciso demostrar: 1.º *que las fuerzas situadas en el plano de las* xz *se equilibran por sí mismas*; y 2.º *que sucede lo mismo con las fuerzas paralelas*; es decir, *que debemos demostrar que no puede haber equilibrio en el sistema total, á ménos que no haya equilibrio se-*

paradamente en cada uno de los sistemas en que hemos descompuesto las fuerzas dadas.

Para demostrarlo observarémos que como todos los puntos de aplicacion m, m', m'', &c. de las fuerzas dadas, se suponen invariablemente unidos entre sí, resulta que estos puntos trasladados al plano de las xz estarán tambien (120) invariablemente unidos entre sí; luego por dos cualesquiera de ellos podrémos considerar que pasa una recta C′C″ que considerarémos indefinidamente prolongada por cada lado. Si el equilibrio general subsiste, esta recta será inmóvil; por consiguiente no podrá moverse ninguno de sus puntos. Y esta sola circunstancia basta para hacer ver que se verifica la destruccion mutua de las fuerzas situadas en el mismo plano de las xz. En efecto, toda fuerza situada en dicho plano ó encontrará á la recta C′C″ fija, ó le será paralela. En el primer caso, representarémos esta fuerza por FG, y la prolongarémos hasta que encuentre á la C′C″ ó á su prolongacion en un punto tal como K; y como para que una fuerza se destruya basta que haya un punto fijo (21 cor.1.°) en su direccion, resulta que siendo K un punto de la C′C″ que es fija, este punto hará nulo el efecto de la fuerza FG. Si la espresada fuerza fuese paralela á la linea fija y tuviese la direccion F′G′, tendríamos que el efecto de esta fuerza no se alteraria aun cuando en uno de sus puntos tal como N concibiésemos dos fuerzas NQ, NQ′, iguales y contrarias; pero componiendo la fuerza F′G′ que supondrémos trasladada á N y espresada por NS, con NQ, producirán una resultante NR que quedará destruida por el punto fijo T situado sobre la direccion en que encuentre á la C′C″: la NQ′ quedará destruida por el punto O en que su direccion encuentra á la linea fija C′C″; y como las tres fuerzas NS, NQ, NQ′ quedan destruidas por la suposicion de la linea fija, lo quedará igualmente la fuerza F′G′=NS, cuyo efecto era el mismo que el de las tres espresadas. Luego todas las fuerzas que obran en el plano xz quedan destruidas por sí mismas é independientemente de las fuerzas perpendiculares á dicho plano.

Las perpendiculares al plano xz tambien deben destruirse por sí mismas, si todo el sistema está en equilibrio; pues si no se destruyen, producirán un movimiento de rotacion al rededor de dicha linea fija C′C″, y no podria estar el sistema en equilibrio como suponemos.

140 Concluyamos, pues, que las seis espresadas ecuaciones son necesarias y bastan para el equilibrio de un sistema de fuerzas cualesquiera, aplicadas á diferentes puntos de un cuerpo sólido libre, es decir, á puntos materiales unidos entre sí de un modo invariable, y de los que ninguno se supone fijo ni detenido sobre una superficie dada.

141 *Ocupémonos ahora del equilibrio de un cuerpo sólido que no está enteramente libre.*

Supongamos primero que el cuerpo á que están aplicadas las fuerzas P, P', P'', &c. tenga un punto fijo al rededor del cual esté precisado á girar.

Colocando el orígen de las coordenadas en este punto, y sustituyendo á las fuerzas dadas los dos sistemas de los párrafos anteriores, se demostrará como en el caso de un cuerpo libre, que el equilibrio no puede tener lugar entre las fuerzas P, P', P'', &c. á ménos que no exista separadamente entre las fuerzas dirigidas en el plano de las xz y entre las fuerzas paralelas al ege de las u. Más para el equilibrio de estas últimas fuerzas es necesario segun lo que acabamos de demostrar, que se verifiquen las (ecs. 181 y 182), y para el equilibrio de las dirigidas en el plano de las xz, resulta que se debe tener la (ec. 179).

Luego *las otras tres* (ecs. 177, 178, 180) *son las del equilibrio de un cuerpo sólido fijo por medio de uno de sus puntos.*

La (ec. 177) espresa que las fuerzas dirigidas en el plano de las xz, tienen una resultante cuya direccion pasa por el orígen de las coordenadas; en virtud de las (ecs. 181 y 182) las fuerzas paralelas al ege de las u tienen tambien una resultante (108) que pasa por el mismo orígen; si se supone que estas dos resultantes estén aplicadas en este punto comun á sus direcciones, y se las compone en una sola fuerza, esta será la resultante de todas las fuerzas P, P', P'', &c.; de donde se sigue que *cuando las tres* (ecs. 177, 181 y 182) *se verifican á un mismo tiempo, las fuerzas dadas tienen una resultante única, que viene á pasar por el orígen de las coordenadas*; si este orígen se supone fijo, la resultante estará destruida por su resistencia, y espresará la *presion* que sufre este punto.

142 Consideremos en segundo lugar el equilibrio de un cuerpo sólido sujeto por un ege fijo al rededor del cual está obligado á girar sin poder resbalar en el sentido de su longitud.

Tomemos este ege por el de las u, y sustituyamos siempre á las fuerzas dadas P, P', P'', &c. los dos sistemas de fuerzas (134 y siguientes).

Las fuerzas paralelas al ege de las u no podrán producir ningun movimiento; pues este seria en la direccion del ege, que por el supuesto le consideramos fijo; luego será inútil tener en consideracion este sistema: En cuanto á las dirigidas en el plano de las xz, la (ec. 179) bastará para su equilibrio; pues que el orígen de las coordenadas por ser parte del ege de las u es un punto fijo. La resultante de estas fuerzas pasará por este punto y espresará la *presion* que el ege fijo sufre perpendicularmente á su longitud.

143 Así, *en el caso de un ege fijo, solo hay una ecuacion de equilibrio, á saber la* (ec. 179).

Más si el cuerpo pudiese resbalar á lo largo del ege fijo, seria necesario aun para impedir este movimiento que la suma de las fuerzas paralelas á este ege fuese igual á cero, lo que reproduciria la (ec. 180).

144 Atendiendo á la simetría de las (ecs. 179, 181 y 182), se ve que la (ec. 181) espresa la condicion de equilibrio de las fuerzas P, P', P'', &c. al rededor del ege de las x, supuesto fijo; y que la (ec. 182) encierra la condicion de equilibrio de las mismas fuerzas al rededor del ege de las z.

De aquí resulta que las condiciones de equilibrio de un cuerpo sólido al rededor de un punto fijo (141), consisten en que las fuerzas aplicadas á este cuerpo deben ser tales que se equilibren al rededor de tres rectas rectangulares tiradas por este punto, y consideradas sucesivamente como eges fijos.

145 Observemos tambien que la ecuacion de equilibrio relativa á cada ege, no contiene á las coordenadas paralelas á este ege. Así, la (ec. 179) que espresa la condicion de equilibrio al rededor del ege AU, supuesto fijo, es independiente de las coordenadas u, u', u'', &c.: no contiene las componentes $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, &c., y solo entran en ella las componentes paralelas á los eges AX y AZ, ó perpendiculares al ege AU, y las coordenadas x, x', x'', &c., z, z', z'', &c. que pertenecen á las proyecciones de los puntos m, m', m'', &c. sobre el plano xz; de manera que si el equilibrio existe, no se alterará sustituyendo á las fuerzas dadas P, P', P'', &c. las componentes perpendiculares al ege fijo, y á los puntos de aplicacion m, m', m'', &c. sus proyecciones sobre un plano perpendicular á este ege.

146 En virtud de esta observacion se podria formar de este otro modo la ecuacion de equilibrio de un sistema de fuerzas dadas al rededor de un ege fijo.

Por el punto de aplicacion de cada fuerza se concebirá un plano perpendicular al ege fijo: despues se descompondrá la fuerza en dos, la una perpendicular á este plano ó paralela al ege fijo, y la otra dirigida en este plano: se hará abstraccion de las fuerzas paralelas al ege, y solo se tendrán en consideracion las fuerzas que le sean perpendiculares, que espresarémos por Q, Q', Q'', &c. Estas fuerzas tendrán sus direcciones en planos diferentes y paralelos entre sí; pero eligiendo arbitrariamente uno de estos planos, se supondrá que obran todas segun las proyecciones de sus direcciones sobre este plano; las fuerzas Q, Q', Q'', &c. estando así referidas á un mismo plano, se sigue de la observacion que acabamos de hacer que deberán equilibrarse al rededor del punto en que este plano encuentra al ege fijo, y que es por consiguiente un punto fijo; y recíprocamente, si se verifica este equilibrio, existirá tambien entre las fuerzas dadas al rededor del ege fijo. Más para el equilibrio de las fuerzas Q, Q', Q'', &c. consideradas en un mismo plano, es necesario que la suma de los momentos de las que intentan hacer girar en un sentido al rededor del punto fijo, sea igual á la suma de los momentos de las que intentan hacer girar en el sentido opuesto, estando tomados todos estos momentos con relacion al punto fijo (97); luego espresando por q, q', q'', &c. las perpendiculares tiradas desde este punto sobre las direcciones de las fuerzas Q, Q', Q'', &c. en este plano, y suponiendo para fijar las ideas que Q, Q', Q'', intentan hacer girar en un sentido, y las Q''', Q^{IV}, &c. en el sentido opuesto, se tendrá

$$Qq+Q'q'+Q''q''-Q'''q'''-Q^{IV}q^{IV}-\&c.=0 \quad (183)$$

para la ecuacion de equilibrio.

{ 147 Esta ecuacion es equivalente á la (ec. 179); pues ambas espresan la condicion de equilibrio al rededor de un ege fijo. En muchos casos será mas cómodo hacer uso de esta; por lo cual la hemos puesto aquí. Más para no dejar nada que desear demostrarémos directamente el principio en que está fundada.

{ Sea CD (fig. 57) el ege fijo; ACB un plano perpendicular á este ege y que le corte en el punto C; mP la direccion en el espacio de una de las fuerzas dadas aplicadas en el punto m. Por este punto concibamos un plano perpendicular á CD; y descompongamos la fuerza P en otras dos, la una dirigida en este plano segun la recta mH, y la otra paralela á CD. Esta segunda componente no puede producir ningun movimiento (139) á causa del ege fijo; por lo que se puede hacer abstraccion de ella. En cuanto á la fuerza dirigida segun mH y paralela al plano ACB, se trata de hacer ver que puede ser remplazada por otra dirigida en este mismo plano.

{ Para esto espresemos esta fuerza por Q; supongamos que n sea la proyeccion de m sobre el plano ACB; que nG sea la de la linea mH sobre el mismo plano; y nE la prolongacion de nG. Apliquemos al punto n dos fuerzas S y S' que obren segun las direcciones contrarias nG y nE; y para que esto no altere en nada el sistema, supongamos $S'=S$; supongamos ademas que estas fuerzas iguales entre sí, sean tambien iguales con Q; de modo que la fuerza Q se halle remplazada por las tres fuerzas iguales S, S' y Q. Tiremos por el ege CD un plano perpendicular al de las dos rectas paralelas mH y EG; y supongamos que corte á estas rectas en los puntos M y N situados sobre una paralela á CD. Podemos tomar el punto M por punto de aplicacion de la fuerza Q, y N por el de las fuerzas S y S' que obren segun las rectas NG y NE, que intentan hacer girar al sistema en sentidos contrarios al rededor del ege CD, y que todo es perfectamente semejante al rededor de este ege con relacion á estas dos fuerzas; luego no hay ninguna razon para que la una cause mas efecto que la otra; por consiguiente estas dos fuerzas iguales, paralelas y contrarias, pero no directamente opuestas, se equilibran por medio del ege fijo. Así, se puede hacer abstraccion de las fuerzas Q y S', y solo queda la fuerza S que obra en la direccion NG, es igual con Q, y se halla en el plano ACB.

{ Cualquiera que sea el número de las fuerzas dadas, se demostrará por este razonamiento que cada una de ellas puede ser remplazada por una fuerza comprendida en el plano ACB: todas estas fuerzas dirigidas en un mismo plano se deben equilibrar al rededor del punto fijo C, lo que da la (ec. 183). }

148 *Consideremos en fin el caso en que muchos de los puntos del cuerpo sólido que debe permanecer en equilibrio, están sujetos á permanecer en un plano fijo dado de posicion.*

Conservemos siempre las notaciones hechas (134 y siguientes) y tomemos el plano dado por el de las coordenadas x, z. Sustituyamos á las fuerzas dadas los mismos dos sistemas de fuerzas que en dichos párrafos, y tendrémos que las fuerzas paralelas al ege de las u ó perpendiculares al plano fijo, serán destruidas por la resistencia de este plano; luego solo quedarán las fuerzas dirigidas en este plano, y para su equilibrio será necesario que las (ecs. 177, 178 y 179) queden satisfechas; luego *serán las tres ecuaciones de equilibrio en el caso que examinamos.*

149 Más si el cuerpo está puesto solamente sobre un plano fijo, por egemplo, si se trata de un poliedro puesto sobre una de sus caras, será necesario que la direccion de la resultante de las fuerzas perpendiculares al plano fijo, sea tal que coopere á apoyar el cuerpo sobre dicho plano, y no á separarle de él; por lo cual ántes de asegurar que el equilibrio existe por verificarse las (ecs. 177, 178 y 179), conviene averiguar el signo de esta resultante, y examinar si es el mismo que el de las componentes que intentan apoyar el cuerpo sobre el plano fijo. Ademas será necesario aun que esta fuerza venga á cortar al plano fijo en lo interior de la cara sobre que está puesto el poliedro; porque si cayese fuera de esta cara, separaria al poliedro del plano, haciéndole girar al rededor de uno de los lados de esta misma base.

150 Esta condicion de equilibrio no se puede espresar por una ecuacion. En cada caso particular se verá si está satisfecha, determinando en virtud de la teoría de las fuerzas paralelas las coordenadas del punto en que la resultante de las fuerzas perpendiculares al plano fijo encuentran á este plano. Pero siendo el plano fijo el de las coordenadas x, z, el sistema de fuerzas perpendiculares á dicho plano comprende á las componentes $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, $P''\cos.\gamma''$, &c. de las fuerzas dadas, y los pares de fuerzas añadidas g y $-g$, g' y $-g'$, g'' y $-g''$ &c. (138); luego la resultante de todas estas fuerzas paralelas es igual á su suma, y espresándola por U se tiene $U=P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+$&c. (184).

Ademas si se supone que encuentre al plano de las xz en el punto k (fig. 55) que se tomará por su punto de aplicacion, y espresando por $z_{,}$ y $x_{,}$ las coordenadas de este punto paralelas á los eges AZ y AX, se tendrá $Uz_{,}$ para su momento con relacion al plano de las xu, y $Ux_{,}$ para su momento con relacion al plano de las zu; pero el momento de la resultante con relacion á cada plano es igual á la suma de los momentos de las componentes con relacion al mismo plano (99): por otra parte las sumas de los momentos de las fuerzas $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$ &c., g, $-g$, g', $-g'$, &c. con relacion á los planos de las xu y de las zu, se han hallado (ecs. 181 y 182); luego si igualamos estas sumas con las cantidades $Uz_{,}$ y $Ux_{,}$, tendrémos para determinar los valores de $z_{,}$ y de $x_{,}$ las ecuaciones

$$Uz_{,}=P(z\cos.\gamma-u\cos.\beta)+P'(z'\cos.\gamma'-u'\cos.\beta')+\text{\&c.} \quad (185),$$

$$Ux_{,}=P(x\cos.\gamma-u\cos.\alpha)+P'(x'\cos.\gamma'-u'\cos.\alpha')+\text{\&c.} \quad (186).$$

Así, en cada caso particular se deberá uno asegurar de si el punto k que corresponde á estas coordenadas, está comprendido en lo interior de la base sobre que está puesto el cuerpo.

151 Si el cuerpo no toca al plano fijo sino por dos puntos, ó si todos los puntos de apoyo están colocados sobre una misma recta, será ne-

cesario que el punto *k* pertenezca tambien á esta linea, sin lo cual la resultante *U* no seria destruida, y el cuerpo giraria al rededor de la recta de contacto.

Luego tomándola por el ege AX, se deberá tener $z_{,}=0$, lo que muda la (ec. 185) en la (ec. 181); luego en este caso se tendrá una cuarta ecuacion de equilibrio, á saber, dicha (ec. 181) que se deberá reunir á las (ecs. 177, 178 y 179).

152 En fin, puede suceder que el cuerpo solo tenga un punto de apoyo sobre el plano fijo, y entónces el equilibrio exige que la resultante *U* venga á pasar por este punto; luego si tomamos este punto de contacto por orígen de las coordenadas, será necesario que se tenga $x_{,}=0$, $z_{,}=0$; por consiguiente las dos (ecs. 185 y 186) vendrán á ser las (ecs. 181 y 182).

Luego en este último caso se tienen cinco ecuaciones de equilibrio, á saber, las (ecs. 177, 178, 179, 181 y 182).

En todos estos casos la resultante *U* de las fuerzas perpendiculares al plano fijo, espresará la presion que sufre este plano.

153 Cuando las fuerzas P, P', P'', &c. no se equilibran, se puede pedir el reducirlas al menor número posible: y para conseguirlo sustituirémos aun á las fuerzas dadas los dos sistemas de fuerzas (135 y siguientes). Si cada uno de estos sistemas se reducen á una fuerza única, y las dos resultantes se hallan en un mismo plano, se las podrá componer en una sola que será la resultante de todas las fuerzas dadas; en el caso contrario será necesario conservar estas dos resultantes para remplazar el conjunto de estas fuerzas.

Por lo regular se suele considerar como evidente el que *dos fuerzas dirigidas en planos diferentes no podrian ser remplazadas por una fuerza*; más con el fin de no dejar nada que desear, nos parece oportuno el demostrarlo. Para esto observarémos que si estas dos fuerzas tuviesen una resultante, se seguiria que suponiendo fijo un punto tomado á arbitrio sobre su direccion, las dos fuerzas dadas estarian en equilibrio al rededor de este punto. Pero este equilibrio es imposible, porque se puede tirar por este punto una recta que corte la direccion de la una de las fuerzas sin estar comprendida en el plano de la otra; de manera que haciendo fija esta linea, la fuerza que la encontrase seria destruida, y nada impediria á la otra el producir un movimiento de rotacion al rededor del ege fijo; luego las dos fuerzas no estando en equilibrio con el ege fijo, con mayor razon se verificará que este estado no tiene lugar al rededor del punto fijo; pues para esto seria necesario que lo estuviesen al rededor de dos eges tirados por este punto; y por consiguiente es imposible que una sola fuerza les sea equivalente.

154 Luego suponiendo que ni las fuerzas dirigidas en el plano de las xz, ni las fuerzas paralelas al ege de las u, caen en el caso de escepcion (71), podrémos estar seguros de que las resultantes de estos dos sistemas se deben cortar para que las fuerzas P, P', P'', &c. tengan una resultante única; donde se ve que esta circunstancia impor-

tante dependerá de una ecuacion de condicion que vamos á encontrar.

Para esto supongamos que X, Z y L tengan los valores espresados por las (ecs. 127, 128 y 129), y que $z_{,}$ y $x_{,}$ sean las coordenadas de un punto cualquiera de la resultante de las fuerzas dirigidas en el plano de las xz; con lo cual tendrémos (ec. 148) $Xz_{,}-Zx_{,}=L$ (187);

y si ademas suponemos

$$P\cos.\gamma+P'\cos.\gamma'+P''\cos.\gamma''+\&c.=U \quad (188),$$

$$P(x\cos.\gamma-u\cos.\alpha)+P'(x'\cos.\gamma'-u'\cos.\alpha')+\&c.=M \quad (189),$$

$$P(u\cos.\beta-z\cos.\gamma)+P'(u'\cos.\beta'-z'\cos.\gamma')+\&c.=-N \quad (190),$$

se verificará que U será la resultante de las fuerzas paralelas $P\cos.\gamma$, $P'\cos.\gamma'$, &c., g, g', g'', &c., $-g$, $-g'$, &c.; y espresando (150) por $x_{,}$ y $z_{,}$ las coordenadas del punto donde su direccion corta al plano de las xz, las dos (ecs. 185 y 186) se convertirán en $\begin{cases} Ux_{,}=M & (191), \\ Uz_{,}=-N & (192). \end{cases}$

Despejando $x_{,}$ y $z_{,}$ por medio de estas ecuaciones, y sustituyendo sus valores en la (ec. 187), se obtendrá la ecuacion de condicion pedida, á saber, $LU+MZ+NX=0$ (193).

155 Cuando se tiene á un mismo tiempo $X=0$, $Z=0$, $U=0$, esta ecuacion queda satisfecha, y sin embargo las fuerzas P, P', P'', &c. no tienen una resultante; al contrario, ellas se reducen á dos fuerzas paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas. En efecto, verificándose solo las dos ecuaciones $X=0$, $Z=0$,
tendrémos que ellas nos espresan (128) que las fuerzas comprendidas en el plano xz se reducen á dos fuerzas paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas; y verificándose solo la ecuacion $U=0$ con relacion á las fuerzas paralelas, esta circunstancia nos dice tambien (108) que dichas fuerzas se reducen á dos iguales, paralelas y contrarias, pero no directamente opuestas. Luego en el caso de tener solo las tres ecuaciones $X=0$, $Z=0$, $U=0$,
se reduce todo el sistema á dos fuerzas $+Q$ y $-Q$ en el plano de las xz, paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas; y otras dos $+U'$ y $-U'$ paralelas al ege de las u, tambien paralelas, iguales y contrarias, pero no directamente opuestas. Para reducir estas cuatro fuerzas á dos iguales y contrarias, y que en general no estén directamente opuestas, supongamos que sean qK y q'H (fig. 58) las direcciones de las fuerzas $+Q$ y $-Q$ que se hallan en el plano de las xz, y B, C, los puntos en que cortan á dicho plano las $+U'$ y $-U'$; si unimos el punto B con q' y concluimos el paralelogramo q'HED, determinado por la q'H y por la direccion de la diagonal q'E, y tomamos despues qG$=q'$D, se formará otro paralelogramo KqGF; con lo cual tendrémos que las dos fuerzas q'D y qG que obran en los estremos de la $q'q$, no alteran el efecto de las $+Q$ y $-Q$; luego tendrémos que las dos fuerzas $+Q$ y $-Q$ equivaldrán á las cuatro fuerzas $+Q$, $-Q$, qG, q'D; pero las Q y qG equivalen á la resultante qF, y las $-Q$ y q'D á la q'E; luego estas dos resultantes equivalen á las $+Q$ y $-Q$. Estas fuerzas qF y q'E, son

iguales y paralelas, á causa de la igualdad de los triángulos $Eq'H$ y qKF, y obran en sentido contrario. Como la Eq' encuentra á la fuerza $+U'$ en B, tomarémos este punto por punto de aplicacion de Eq'. Por el mismo procedimiento se mudará la direccion de qF y se trasladará su punto de aplicacion al punto C; con lo cual el sistema de las fuerzas situadas en el plano de las xz, se reduciria á dos fuerzas iguales, paralelas y dirigidas en sentidos contrarios, que encontrarán en B y C á las fuerzas $+U'$ y $-U'$; por consiguiente la resultante de las dos fuerzas situadas en el punto B será igual á la de las fuerzas situadas en C, y obrará en sentido contrario; luego tenemos conseguido lo que deseábamos.

156 Supongamos que se verifiquen solo las dos ecuaciones $X=0$, $Z=0$, y que U no sea cero. En este caso la (ec. 193) se reduce á $L=0$; si ella queda satisfecha, las fuerzas dirigidas en el plano de las xz se equilibran (128) en virtud de las tres ecuaciones $X=0$, $Z=0$, $L=0$, y por consiguiente quedan las fuerzas paralelas al ege de las u; luego la resultante U es la de las fuerzas dadas P, P', P'', &c.

Si no se verifica la (ec. 193), esto es, si se tiene $X=0$, $Z=0$, sin que se verifique al mismo tiempo $L=0$, las fuerzas dirigidas en el plano de las xz se reducirán á dos fuerzas paralelas no reducibles á una sola; pero que se podrian combinar con la fuerza U y quedar reducidas estas tres fuerzas á dos situadas en diferentes planos, y por consiguiente irreducibles á una sola.

157 La simetría de los valores de X, Z, U, nos dispensa de examinar los casos en que se tendrá $X=0$ y $U=0$, ó bien $Z=0$, $U=0$; pues siendo iguales todas las circunstancias deben conducir al mismo resultado que $X=0$ y $Z=0$, sustituyendo el plano de las xu y el ege de las z, ó bien el plano de las zu y el ege de las x, al plano de las xz y al ege de las u.

158 Puede aun suceder que solo una de las tres cantidades X, Z, U, sea igual con cero, y que se tenga por egemplo $X=0$, ó $Z=0$. Entónces las fuerzas dirigidas en el plano de las xz tienen una resultante (124), así como las fuerzas paralelas al ege de las u; de modo que la análisis anterior y la (ec. 193) que se deduce de ella, se aplican á este caso particular, como si ninguna de las tres cantidades X, Z, U, fuese nula. Si fuese $U=0$ la ecuacion que se verificase, entónces esta análisis no se aplicaria ya; pero á causa de la simetría que acabamos de notar, la (ec. 193) que conviene al caso de $X=0$ y al de $Z=0$, conviene tambien al caso de $U=0$.

Concluyamos, pues, de toda esta discusion, que la (ec. 193) está satisfecha siempre que las fuerzas P, P', P'', &c. admiten una resultante única; y recíprocamente, que cuando se verifica esta ecuacion, la resultante existe, escepto en el caso particular en que se tiene al mismo tiempo $X=0$, $Z=0$, $U=0$,

que es el caso en que estas fuerzas se reducen á dos, paralelas é irreducibles.

159 La (ec. 193) se puede obtener de otro modo que es bueno conocer. Si las fuerzas P, P', P'', &c. tienen una resultante única, nada impide el trasportar el orígen de las coordenadas á un punto de su direccion; pero en virtud de lo demostrado (141), los valores que tienen en este punto las cantidades espresadas (154) por L, M, N, son iguales á cero; y recíprocamente, cuando estas tres cantidades son nulas, las fuerzas dadas tienen una resultante única que pasa por el orígen de las coordenadas. Llamemos, pues, $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$, las coordenadas de un punto cualquiera de la resultante; trasportemos á este punto el orígen de las coordenadas de todos los puntos de aplicacion de las fuerzas; y sean $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, lo que vienen á ser L, M, N, relativamente á este nuevo orígen. Para efectuar esta mudanza de orígen, es necesario remplazar las coordenadas x, z, u, x', z', u', &c. que entran en L, M, N, por $x-x_{,}$, $z-z_{,}$, $u-u_{,}$, $x'-x_{,}$, $z'-z_{,}$, $u'-u_{,}$, &c.;
lo que da

$$L_{,}=L+Zx_{,}-Xz_{,} (194), M_{,}=M+Xu_{,}-Ux_{,} (195), N_{,}=N+Uz_{,}-Zu_{,} (196).$$

Igualando á cero estos valores de $L_{,}$, $M_{,}$, $N_{,}$, obtendrémos tres ecuaciones que pertenecerán esclusivamente á los puntos de la resultante, que serán las de sus proyecciones sobre los tres planos de las coordenadas, á saber,

$$Xz_{,}-Zx_{,}=L \ (197),\ Ux_{,}-Xu_{,}=M \ (198),\ Zu_{,}-Uz_{,}=N \ (199).$$

Más para que esta recta sea posible, es preciso que estas tres ecuaciones vayan conformes entre sí; pero multiplicando la primera por U, la segunda por Z, la tercera por X, y sumándolas despues, desaparecen las variables $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$, y resulta la siguiente ecuacion

$$LU+MZ+NX=0, \text{ como ántes.}$$

Vemos tambien que esta ecuacion no comprende el caso particular de $X=0$, $Z=0$, $U=0$;
porque entónces es insignificante el multiplicar las (ecs. 197, 198 y 199) por estos tres factores nulos, y la ecuacion idéntica que resulta no tiene ninguna relacion con ellas. Las fuerzas P, P', P'', &c. tienen en este caso dos resultantes paralelas, no reducibles á una sola, ó bien se equilibran si ademas de las ecuaciones supuestas $X=0$, $Z=0$, $U=0$, se tiene aun (§ 140) $L=0$, $M=0$, $N=0$.
Pero cuando las tres cantidades X, Z, U, no son nulas á un mismo tiempo, la (ec. 193) se deduce realmente de las (ecs. 197, 198 y 199), y puede suplir por una de ellas: de modo que esta ecuacion de condicion comprende todos los casos, escepto el de $X=0$, $Z=0$, $U=0$, lo que va conforme con el resultado anterior.

160 Las (ecs. 197, 198 y 199) hacen conocer solamente la posicion de la resultante en el espacio; pero *falta aun determinar su magnitud, y aun el sentido en que obra.*

Para conseguirlo es necesario componer en una sola fuerza la resultante de las fuerzas dirigidas en el plano de las xz, y la de las fuerzas perpendiculares á este plano; pero la segunda es igual con U: las componentes de la primera paralela á los eges de las x y de las z, son X y Z;

luego X, Z, U, son las componentes de la resultante definitiva, paralelas á los tres eges; luego llamándola R y espresando por $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, los ángulos que determinan su direccion con relacion á los tres eges, tendrémos (§ 52) $R^2 = X^2 + Z^2 + U^2$ (200);
y ademas $R\cos.\alpha_{,} = X$ (201), $R\cos.\beta_{,} = Z$ (202), $R\cos.\gamma_{,} = U$ (203); ecuaciones que determinan completamente la magnitud y direccion de la resultante.

Se puede notar atendiendo á los valores de X, Z, U (§ 154) que esta magnitud y esta direccion son las mismas que si todas las fuerzas P, P', P'', &c. estuviesen aplicadas en un mismo punto (52), paralelamente á sus direcciones respectivas; de modo que la verdadera resultante no difiere de la que tendria lugar en este caso, sino por su posicion absoluta en el espacio.

161 Si las fuerzas P, P', P'', &c. no tienen una resultante única, al ménos en todos los casos, se pueden reducir á dos fuerzas que no serán ya determinadas de magnitud y direccion, como lo seria una sola resultante. Esta proposicion se verifica fácilmente examinando todos los casos que puede presentar el sistema de las fuerzas dirigidas en el plano de las xz, y el de las fuerzas paralelas al ege de las u: los cuales sistemas tienen siempre, ó cada uno una resultante, ó cada uno dos resultantes paralelas y no reducibles; pero esto se puede demostrar del modo siguiente.

Sin alterar en nada el sistema de las fuerzas P, P', P'', &c. se pueden añadir á él dos fuerzas iguales y directamente opuestas. Para fijar las ideas, supongamos que estas fuerzas están aplicadas en el orígen de las coordenadas. Sea S su intensidad comun: a, b, c, los ángulos que una de ellas forma con los tres eges, y por consiguiente $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$, serán los ángulos que se refieren á la otra. Podrémos suponer que el sistema de las fuerzas dadas, aumentado con la primera fuerza S, tiene una resultante única; porque la existencia de esta resultante depende solo de una ecuacion de condicion á la cual se puede satisfacer de una infinidad de maneras diferentes por medio de las cantidades S, a, b, c. Luego espresando esta resultante por R, las fuerzas dadas se hallarán reducidas á dos, á saber, á R' y á la segunda fuerza S. De donde se sigue que un número cualquiera de fuerzas, dirigidas como se quiera en el espacio, se pueden siempre remplazar por dos fuerzas que les son equivalentes, y que se reducirán ellas mismas á una sola, cuando las fuerzas dadas admitan una resultante única.

De la pesantez ó gravedad, y del modo de hallar los centros de gravedad.

162 La *pesantez* ó *gravedad* es la fuerza con que todos los cuerpos abandonados á ellos mismos se precipitan hácia la tierra en direcciones perpendiculares á su superficie. La intensidad de la gravedad no es la misma en todos los puntos de la superficie terrestre; porque se sabe por esperiencia que *crece proporcionalmente al cuadrado del seno de la lati-*

tud desde el ecuador donde es la menor, *hasta el polo donde es la mayor* (*). Se ha reconocido ademas que *disminuye en razon inversa del cuadrado de la distancia del cuerpo pesado al centro de la tierra*, *á medida que se eleva sobre la misma vertical*; de manera que hablando con todo rigor, *la gravedad no es la misma para todas las partes de un mismo cuerpo*, á causa de que cada una tiene diferente distancia al ecuador y

---

(*) *Se ha encontrado despues de muchas observaciones que si representa* g' *la fuerza de la gravedad á la latitud de* $45°$ *ó* $\frac{1}{4}\pi$, *y* g *la fuerza de la gravedad en un parage cualquiera cuya latitud sea* ψ, *se tiene* $g=g'(1-0{,}002837\cos.2\psi)$ (a).

Esta fórmula queda indeterminada miéntras no se conozca g'; *y para determinarla nosotros*, *observarémos que en Paris á la latitud de* $48°$ $50'$ *y* $15''$ (div. sexages.), *la fuerza de la gravedad es* $30{,}196$ *pies franceses que equivalen á* $35{,}20319$ *españoles*; *luego si en la ecuacion* (a) *sustituimos en vez de* g *este valor*, *y por* $\cos.2\psi$ *el suyo*
$\cos.2(48°\ 50'\ 15'')=\cos.97°\ 40'\ 30''=[II.8]-\text{sen}.7°\ 40'\ 30''=-0{,}133554$,
se tendrá $35{,}20319$ *pies españoles* $=g'\times1{,}0003788927$;

lo que da $g'=\dfrac{35{,}20319}{1{,}0003788927}=35{,}18986$ *pies españoles*;

por lo que la fórmula general para encontrar la fuerza de la gravedad en un parage cualquiera cuya latitud sea ψ, *será*

$$g=35{,}18986(1-0{,}002837\cos.2\psi)=35{,}18986-0{,}09983\cos.2\psi \quad (b)$$

en pies españoles.

Si en vez de $\cos.2\psi$ *sustituimos su valor* [II. § 19 (3)] $1-2\text{sen}.^2\psi$, *esta última espresion se convertirá en*

$$g=35{,}18986-0{,}09983(1-2\text{sen}.^2\psi)=$$
$$35{,}18986-0{,}09983+0{,}19966\text{sen}.^2\psi=35{,}09003+0{,}19966\text{sen}.^2\psi \quad (c),$$

que tambien es la fórmula que espresa en pies españoles la fuerza de la gravedad en un parage cualquiera cuya latitud sea ψ.

En el ecuador donde es la menor, *se tiene* $\psi=0$, *y por consiguiente* $\text{sen}.\psi=0$, *que da* $g=35{,}09003$ *pies* $=11{,}69668$ *varas* (d);
y en el polo donde es la mayor, *se tiene* $\psi=\frac{1}{2}\pi$,
y por consiguiente $\text{sen}.^2\psi=(\text{sen}.\frac{1}{2}\pi)^2=1^2=1$;
lo que da $g=35{,}09003+0{,}19966=35{,}28969$ *pies españoles* (e).

De modo que el aumento de la gravedad desde el ecuador al polo es $0{,}19966$ *pies*, *que es próximamente* $\frac{1}{177}$ *de dicha fuerza en el polo*, *ó* $\frac{1}{176}$ *de su valor medio*, *ó á la latitud de* $45°$.

Como el primer término de la (*ec. c*) *es la fuerza de la gravedad en el ecuador*, *el segundo término espresa el aumento de la gravedad en funcion de la latitud*; *luego si representamos por* ψ' *y por* ψ'' *las latitudes de dos parages diferentes cualesquiera*, *tendrémos que*

$$0{,}19966\text{sen}.^2\psi' \text{ y } 0{,}19966\text{sen}.^2\psi''$$

espresarán el aumento de la gravedad en cada uno de estos parages res-

al centro de la tierra. Sin embargo, como por grande que sea un cuerpo, siempre es sumamente pequeño con relacion á la tierra, se supone que todas las partes materiales é iguales de un mismo cuerpo, intentan descender con la misma fuerza en direcciones paralelas (*). De donde resulta que *un cuerpo pesado se debe considerar como un conjunto de puntos materiales, á los cuales están aplicadas fuerzas iguales, paralelas, que obran en el mismo sentido, y cuya direccion se conoce por esperiencia suspendiendo un cuerpo al estremo inferior de un hilo que tiene fijo el otro estremo.*

163 Pues que estas fuerzas son paralelas, tendrémos (72) que la *resultante de todas ellas será igual á su suma y paralela á su direccion comun.* Esta resultante forma lo que se llama el *peso* del cuerpo.

De esta definicion resulta: 1.º *que el peso de un cuerpo homogeneo*, ó que es enteramente de la misma materia, es *independiente de su forma y proporcional á su volúmen*; y 2.º *que dos cuerpos homogeneos y equivalentes en volúmen son iguales en peso*; de manera que si se les coloca

---

pecto de la del ecuador; y como estas cantidades tienen el factor comun 0,19966, *guardarán la razon de* $sen.^2\psi' : sen.^2\psi''$;
luego se verifica como hemos asegurado en el testo que crece la gravedad proporcionalmente al cuadrado del seno de la latitud.

Si en la (ec. c) se sustituye por ψ *la latitud de la plaza mayor de Madrid que es* 40° 25′, *hallarémos que la fuerza de la gravedad es* 35,1739 *pies, que es el mismo que se espresa en el* (§ 113) *de mi Compendio de Mecánica Práctica. Y como allí lo hemos deducido de la fórmula general de la longitud del péndulo simple, esta conformidad comprueba la exactitud de ambas fórmulas.*

Este valor de la fuerza de la gravedad es en el supuesto de que Madrid se hallase al nivel del mar; pero como esto no se verifica, pues Madrid se halla 798 *varas mas alto* (§ 557), *resulta que en virtud de la tabla de la pág.* 41 *del citado Compendio, deberémos multiplicar la cantidad* 35,1739 *por* 0,999895, *que es el número que en ella corresponde á la altura de* 800 *varas á que tanto se aproximan las* 798 *que está Madrid mas alto que el nivel del mar; y egecutando la multiplicacion resulta para la fuerza de la gravedad* 35,1703 *pies.*

Hay otra circunstancia que disminuye la fuerza de la gravedad, que es la fuerza centrífuga; *y como esta en Madrid, atendiendo á su latitud y á su altura sobre el nivel del mar, es* (§ 426) 0,0704 *pies, si restamos esta cantidad de la anterior, nos resultará* 35,0999 *pies para la fuerza de la gravedad, que para mayor sencillez tomarémos por valor aproximado el* 35,1 *pies.*

(*) *En el* (§ 37) *de mi Compendio de Mecánica Práctica, se manifiesta el espacio adonde irian á parar todas las direcciones de la gravedad, que es el comprendido por las evolutas del meridiano terrestre; de donde se deduce la legitimidad con que se puede suponer que la direccion de la gravedad se efectúa por lineas paralelas.*

en los platillos de una balanza se equilibrarán. Todo lo cual está perfectamente confirmado por la esperiencia; la cual nos manifiesta tambien diariamente que *los cuerpos heterogeneos no tienen el mismo peso en volúmenes iguales*; y por esta razon nos representamos estos cuerpos como comprendiendo en un mismo volúmen diferentes números de partes materiales, dotados de igual pesantez.

Se acostumbra espresar esta diferente composicion, diciendo que los cuerpos son mas ó ménos *densos*, segun contengan en igual volúmen un número mayor ó menor de partes materiales igualmente pesadas. De donde se deduce que la *densidad* relativa de dos cuerpos es la relacion de sus pesos en igual *volúmen*. A lo que pesa un cuerpo en un volúmen dado se le llama tambien *peso específico*; y como en un volúmen dado pesará mas el cuerpo que tenga mayor densidad, resulta que *los pesos específicos son proporcionales á las densidades*; y que *si el volúmen del cuerpo es igual á la unidad, entónces el peso específico es igual á la densidad*; por consiguiente si se quiere formar una tabla de las densidades ó pesos específicos de diversos cuerpos, ya sean sólidos ó fluidos, se tomará por unidad la densidad ó peso específico de una sustancia cualquiera, y se determinará por la esperiencia la relacion del peso de un volúmen cualquiera de cada cuerpo, con el de un volúmen igual de dicha sustancia. El agua destilada es el cuerpo que se elige por término de comparacion; pero como su densidad varía con su temperatura, se toma por unidad la densidad de este líquido en el punto de su mayor condensacion, que corresponde á 4° del termómetro centígrado, ó 3°,6 del de Reaumur. Así, cuando se dice por egemplo que la densidad del oro es 19, esto significa que el peso de un volúmen cualquiera de este metal es igual á 19 veces el de un volúmen igual de agua destilada y tomada en el máximo de densidad ó condensacion.

164 Cuando se trasporta un cuerpo de un parage á otro, su peso varía proporcionalmente á la *pesantez ó gravedad*; de lo cual es imposible que nos cercioremos por medio de una balanza, pues que los pesos de todos los cuerpos crecen y decrecen en la misma relacion. Para manifestar directamente esta variacion, seria necesario comparar el peso de un cuerpo con una fuerza que no dependiese de la variacion de la pesantez, y el medio mas simple seria el emplear para este caso la fuerza elástica del aire, como esplicarémos á su tiempo (543). Por ahora nos contentarémos con observar que si llamamos D la densidad de un cuerpo, esto es, el número de partes materiales que hay en la unidad de volúmen (*), y espresamos por V el volúmen total de un cuerpo homogeneo, ó el número de unidades de volúmen que contiene dicho cuerpo, tendrémos (I. 67 2.°) que representando por M la masa ó el número de partes materiales que hay en todo el cuerpo, será $M=VD$ (204).

(*) *El tener un cuerpo mayor ó menor densidad proviene de que el cuerpo tenga ménos ó mas poros.*

Si la pesantez ó gravedad no variase de un parage á otro, el peso de un cuerpo podria estar representado por su *masa*: en cuyo caso llamando P al peso seria $P=M$ (205);
pero si trasportamos la masa M á otra distancia del centro de la tierra, bien sea por elevarla sobre su superficie ó por llevarla mas hácia el norte ó hácia el medio dia, será necesario para que se conserve la igualdad en la ecuacion anterior, multiplicar la masa M por el valor que tenga la fuerza de la gravedad en aquel parage; luego si espresamos dicha gravedad por g, se tendrá $P=Mg$ (206).

Sustituyendo en esta ecuacion en vez de M su valor VD (ec. 204), se tendrá $P=VDg$ (207).

En esta ecuacion en que las cantidades P, V, D, g, no son de la misma especie, conviene advertir para no incurrir en ninguna impropiedad, que estas letras representan números abstractos, á saber, las relaciones de las cantidades correspondientes á unidades arbitrarias de la especie de cada una. Así es, que V espresa el número de unidades cúbicas que tiene el volúmen del cuerpo que se considera: D la relacion numérica de su densidad con la del agua destilada que se toma por unidad: g la relacion de la pesantez en el parage donde se halla el cuerpo con la pesantez que se elige por unidad de fuerza en un lugar determinado; y entónces la unidad de peso es la de una unidad cúbica de agua trasportada á este último parage, y P espresa el número de estas unidades que contiene el peso del cuerpo (*).

Si espresásemos por V', D', g' y P', las cantidades correspondientes á otro cuerpo, tendríamos $P'=V'D'g'$ (208).

Formando proporcion con estas dos ecuaciones, tendrémos
$P:P'::VDg:V'D'g'$ (209).

Si $g=g'$ será $P:P'::VD:V'D'$ (210),
que nos dice que *en un mismo parage*, *ó en dos parages diferentes en que la fuerza de la gravedad fuese una misma* (ya por tener igual latitud por estar en un mismo paralelo ó en paralelos que disten igualmente del ecuador, ó ya por compensarse la variacion de latitud con la mayor ó menor

(*) *En mi Compendio de Mecánica Práctica* (§43 *y siguientes*) *se presenta una tabla que contiene los pesos específicos de las principales sustancias*, *y reglas prácticas para determinar con su auxilio el peso de un volúmen cualquiera de ellos.*

Tambien hay tablas en que se espresa la longitud de cada grado del meridiano, *la distancia de cada paralelo al ecuador*, *la longitud del péndulo simple que oscila los segundos sexagesimales y la fuerza de la gravedad en los diversos puntos de la tierra*, *segun sea su latitud ó el paralelo en que se hallen. Tambien está la fórmula de* Laplace *para hallar lo que un cuerpo al caer se separa de la vertical hácia el oriente*; *y por último se encuentra una tabla en que se espresa el decremento de la gravedad á diferentes alturas sobre el nivel del mar.*

distancia de los cuerpos al centro de la tierra) *los pesos estarian en razon compuesta de sus volúmenes y densidades.*

Si ademas supusiéramos $D=D'$, se tendria $P:P'::V:V'$ (211); que nos dice *que á igualdad de gravedad y de densidades, los pesos estarian en razon de los volúmenes.*

Si ademas de $g=g'$ tuviésemos $V=V'$, seria $P:P'::D:D'$ (212); que nos dice, *que á igualdad de gravedad y de volúmenes, los pesos guardan la razon de las densidades.*

Si los pesos y las gravedades fuesen iguales la (prop. 210) nos daria

$$VD=V'D', \text{ ó } V:V'::D':D;$$

que nos dice *que los volúmenes están en razon inversa de sus densidades.*

Puesto que los pesos específicos son como las densidades (162), resulta que si llamamos p y p' los pesos específicos de los dos cuerpos que consideramos, tendrémos $p:p'::D:D'$ (213);
y sustituyendo en vez de la razon $D:D'$, la $p:p'$ en la (prop. 209), se tendrá $P:P'::Vpg:V'p'g'$ (214).

De la cual *podríamos sacar las mismas consecuencias respecto de los pesos específicos que hemos sacado respecto de las densidades.*

165 Tambien podríamos sacar consecuencias semejantes para cuando se tuviese $V=V'$ y variasen D y g *&c.*, ó $D=D'$ y variasen V y g; pero no nos detendrémos, por ser muy fácil sacar todas estas consecuencias á los lectores que hayan tomado el consejo que se les dió en la nota del (§ 513 del tom. I.); y porque si multiplicamos estremos y medios en las proporciones (209 y 214), tendrémos $\left\{\begin{array}{l} PV'D'g'=P'VDg \ (215), \\ \text{y } PV'p'g'=P'Vpg \ (216). \end{array}\right.$

De cuyas ecuaciones podrémos sacar en todos los casos que ocurran la relacion de dos cualesquiera de estas cantidades, segun sean las circunstancias iguales que se supongan.

166 Pues que todos los puntos de un cuerpo pesado están solicitados por fuerzas paralelas, se sigue que si se le hace tomar sucesivamente diversas posiciones con relacion á la direccion de estas fuerzas, su resultante pasará constantemente (75) por un cierto punto de este cuerpo.

Este punto que en general hemos espresado (76) con el nombre de *centro de las fuerzas paralelas*, toma aquí el nombre particular de *centro de gravedad.* Su propiedad característica en los cuerpos sólidos consiste en que si se supone fijo dicho punto, el cuerpo á que pertenece permanece en equilibrio en todas las posiciones posibles al rededor de este punto; porque en todas estas posiciones la resultante de las fuerzas aplicadas á los puntos del cuerpo, viene á pasar por el punto fijo.

167 Tambien se concibe que cuando un cuerpo sólido está detenido por un punto fijo, es necesario y basta para el equilibrio que la *recta que une este punto y el centro de gravedad sea vertical, pudiendo hallarse este centro mas arriba ó mas abajo del punto fijo.* En efecto, siendo el peso del cuerpo una fuerza vertical aplicada en su centro de gravedad, su direccion coincidirá en nuestra hipótesis con la recta que une este

centro y el punto fijo; por consiguiente esta fuerza será destruida (76) por la resistencia de este último punto, como si estuviese aplicada inmediatamente á él.

168 Por la misma razon, si se considera un cuerpo sólido pesado suspendido por un hilo CA (fig. 59) á un punto fijo C, se tendrá que en el caso de equilibrio *este hilo será vertical*, *y la prolongacion AB de su direccion irá á pasar por el centro de gravedad del cuerpo*; lo que suministra un medio para determinar por esperiencia el centro de gravedad de un cuerpo sólido heterogeneo y de figura cualquiera: para lo cual *se le suspende sucesivamente á un punto fijo en dos posiciones diferentes*, *es decir*, *que despues de haber fijado el hilo de suspension en un punto cualquiera A*, *se le fija en otro cualquiera A'*, *se aguarda en estas dos posiciones á que se restablezca el equilibrio*; *despues se traza en lo interior del cuerpo la prolongacion del hilo de suspension*, *á saber*, *AB en la primera posicion y A'B' en la segunda*: *estas dos rectas se cortarán en un punto G que es el centro de gravedad buscado.*

169 Para encontrar las fórmulas generales que nos sirvan en todos los casos para determinar los centros de gravedad, observarémos que si á diferentes puntos unidos entre sí de un modo invariable y cuyas coordenadas son respectivamente x, z, u; x', z', u'; x'', z'', u'', &c., se aplican los pesos P, P', P'', &c., considerando estos pesos como fuerzas paralelas, podrémos determinar las coordenadas x, z, u, del centro de las fuerzas paralelas por medio de las (ecs. 113, 114, 115)

$$x_{,}=\frac{Px+P'x'+P''x''+P'''x'''+P^{IV}x^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.} \quad (217),$$

$$z_{,}=\frac{Pz+P'z'+P''z''+P'''z'''+P^{IV}z^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.} \quad (218),$$

$$u_{,}=\frac{Pu+P'u'+P''u''+P'''u'''+P^{IV}u^{IV}+\&c.}{P+P'+P''+P'''+P^{IV}+\&c.} \quad (219).$$

170 Si espresásemos por m, m', m'', &c. las masas que corresponden á los pesos P, P', P'', &c. y suponemos que los puntos no se hallan tan distantes entre sí que tengamos que atender á la variacion de la fuerza de la gravedad, resulta que podrémos suponer (162) que todas estas masas se hallan solicitadas por una misma fuerza de gravedad que espresarémos por g, y tendrémos (ec. 206) $P=mg$, $P'=m'g$, $P''=m''g$, &c.

Luego si sustituimos en vez de P, P', P'', &c. estos valores en las ecuaciones anteriores, y suprimimos la g que resulta comun en todos los términos del numerador y denominador, tendrémos

$$x_{,}=\frac{mx+m'x'+m''x''+m'''x'''+m^{IV}x^{IV}+\&c}{m+m'+m''+m'''+m^{IV}+\&c.}\quad(220),$$

$$z_{,}=\frac{mz+m'z'+m''z''+m'''z'''+m^{IV}z^{IV}+\&c.}{m+m'+m''+m'''+m^{IV}+\&c.}\quad(221),$$

$$u_{,}=\frac{mu+m'u'+m''u''+m'''u'''+m^{IV}u^{IV}+\&c.}{m+m'+m''+m'''+m^{IV}+\&c.}\quad(222);$$

cuyas fórmulas nos manifiestan que *estas coordenadas del centro de gravedad son independientes de la intensidad de la pesantez*; por cuyo motivo Euler prefirió el nombre de *centro de inercia* al de centro de gravedad. De lo cual se deduce que el *centro de gravedad de un cuerpo ó sistema de cuerpos*, *no muda de posicion cuando se trasporta el cuerpo ó el sistema de un parage á otro en que la fuerza de la gravedad sea diferente.*

171 Cuando los centros de gravedad de todos los pesos parciales P, P', P'', &c. se hallen en un mismo plano, el centro de gravedad del sistema se hallará tambien en el mismo plano (74 cor.); y si suponemos que este sea el plano de las xz, no necesitarémos para nada la (ec. 222) y tendrémos suficiente para determinar la posicion del centro de gravedad con las dos (ecs. 220 y 221); y cuando todos estos puntos se hallen situados sobre una misma recta, el centro de gravedad se hallará (74 cor.) en esta misma recta; por lo que si suponemos que esta se tome por ege de las x, para determinar dicho centro nos bastará la (ec. 220); pues nos dará la distancia $x_{,}$ á que se halla del orígen de las coordenadas el espresado centro de gravedad.

172 Si las masas m, m', m'', &c. son de una sustancia homogenea, llamando D su densidad y v, v', v'', &c. sus volúmenes, tendrémos

$$m=vD,\ m'=v'D,\ m''=v''D,\ \&c.$$

Y poniendo estos valores en las (ecs. 220, 221, 222), suprimiendo el factor D que resulta comun en todos los términos del numerador y denominador, será

$$x_{,}=\frac{vx+v'x'+v''x''+v'''x'''+v^{IV}x^{IV}+\&c.}{v+v'+v''+v'''+v^{IV}+\&c.}\quad(223),$$

$$z_{,}=\frac{vz+v'z'+v''z''+v'''z'''+v^{IV}z^{IV}+\&c.}{x+v'+v''+v'''+v^{IV}+\&c.}\quad(224),$$

$$u_{,}=\frac{vu+v'u'+v''u''+v'''u'''+v^{IV}u^{IV}+\&c.}{v+v'+v''+v'''+v^{IV}+\&c.}\quad(225).$$

173 En virtud de lo que queda espuesto (129), podrémos poner las (ecs. 220, 221, 222) bajo la forma siguiente:

$$x_{,}=\frac{\Sigma.(mx)}{\Sigma.(m)}\ (226),\ z_{,}=\frac{\Sigma.(mz)}{\Sigma.(m)}\ (227),\ u_{,}=\frac{\Sigma.(mu)}{\Sigma.(m)}\ (228),$$

que nos dicen que *la distancia del centro de gravedad á un plano cualquiera, se halla dividiendo la suma de los momentos con relacion á dicho plano, por la suma de las masas.*

Por la misma razon se nos convertirán las (ecs. 223, 224, 225) en

$$x_{,}=\frac{\Sigma.(vx)}{\Sigma.(v)}\ (229),\ z_{,}=\frac{\Sigma.(vz)}{\Sigma.(v)}\ (230),\ u_{,}=\frac{\Sigma.(vu)}{\Sigma.(v)}\ (231).$$

174 Cuando este sistema de puntos forma un cuerpo continuo, entónces *estas ecuaciones se convierten en unas verdaderas integrales*; y sirven para hallar las distancias de los centros de gravedad á los planos respectivos de las zu, de las xu y de las xz. Para demostrarlo observarémos que si concebimos dividida la masa ó el volúmen dado de un cuerpo en un número muy considerable de partes, estas serán tanto mas pequeñas, cuanto mayor sea su número; y como cualquiera que sea el número de partes en que concibamos dividido el cuerpo, se verificará que la suma de los momentos con relacion á un plano, dividida por la suma de las masas dará la distancia del centro de gravedad á dicho plano, resulta que esta misma propiedad se verificará cuando se conciban estas partes en el límite de su magnitud; pues (II. 485) el límite de la relacion de dos funciones es el mismo que la relacion de los límites.

Luego si convertimos la Σ en el carácter integral S y espresamos el límite de una de estas partes por dm, esto es por la diferencial de la masa, las (ecs. 223, 224, 225, ó las 226, 227, 228, ó las 229, 230, 231) se nos convertirán en

$$x_{,}=\frac{\mathrm{S}.(x\mathrm{d}m)}{\mathrm{S}.(\mathrm{d}m)}\ (232),\ z_{,}=\frac{\mathrm{S}.(z\mathrm{d}m)}{\mathrm{S}.(\mathrm{d}m)}\ (233),\ u_{,}=\frac{\mathrm{S}.(u\mathrm{d}m)}{\mathrm{S}.(\mathrm{d}m)}\ (234).$$

Las cuales nos dicen que *para tener la distancia del centro de gravedad de un cuerpo á un plano, es necesario multiplicar uno de los elementos por su distancia á este plano, é integrar en toda la estension del cuerpo: con lo cual se tendrá la suma de los momentos de estos elementos; y despues será necesario dividir por la integral de todos los elementos, que es la masa de todo el cuerpo.*

De estas ecuaciones solo necesitarémos las dos primeras, si se supone que todas las masas se hallan en un mismo plano; y solo se tendrá necesidad de la primera si todas se hallan en linea recta, ó están de tal modo dispuestas, que todo el sistema se pueda reducir á partes, cuyos centros de gravedad se hallen en linea recta, pues en este caso el centro de gravedad de esta será el de todo el sistema.

En vez de S.(dm) podemos poner la masa del cuerpo que espresarémos por M; y quitando el divisor en las ecuaciones anteriores se convertirán en $Mx_{,}=\mathrm{S}.(x\mathrm{d}m)$ (235), $Mz_{,}=\mathrm{S}.(z\mathrm{d}m)$ (236), $Mu_{,}=\mathrm{S}.(u\mathrm{d}m)$ (237); que nos dicen *que la masa de un cuerpo multiplicada por la distancia de su centro de gravedad á un plano, á una linea ó á un punto, es igual á la suma de todos los productos de cada una de las partículas ó molécu-*

las del cuerpo por su distancia al mismo plano, á la misma linea, ó al mismo punto.

175 Propongámonos ante todas cosas *hallar en general el centro de gravedad de una porcion cualquiera de una linea plana.*

Sea $z=f.x$ la ecuacion de la linea dada DCH (fig. 60) referida á los dos eges rectangulares AX, AZ; concibamos esta linea compuesta de un conjunto de puntos materiales iguales é igualmente pesados, y que se busca su centro de gravedad, suponiendo determinados sus estremos C y H. En este caso nos bastarán (174) las dos (ecs. 232, 233); y como la masa pesante es la porcion de linea CH, si espresamos su longitud por s, tendrémos que en virtud de lo espuesto (II. 591) el elemento de esta linea que será el límite de la parte mm', será $ds=\sqrt{dx^2+dz^2}$, y espresará la verdadera idea de la molécula que hemos señalado por dm; luego si multiplicamos esta espresion por x, tendrémos que

$$xds=x\sqrt{dx^2+dz^2}$$

será el momento de dicho elemento ó molécula con relacion al ege AZ; y multiplicando por z, se tendrá $zds=z\sqrt{dx^2+dz^2}$ para el momento de dicho elemento ó molécula con relacion al ege AX; y como la suma de todos los elementos es aquí la longitud s, resulta que las (ecs. 232, 233) se nos convertirán en

$$x_{,}=\frac{S.xds}{s}=\frac{S.x\sqrt{dx^2+dz^2}}{s}\ (238),\quad z_{,}=\frac{S.zds}{s}=\frac{S.z\sqrt{dx^2+dz^2}}{s}\ (239);$$

y para determinar la longitud s tendrémos $s=S.\sqrt{dx^2+dz^2}$ (240).

176 Para hacer perceptible el uso de estas ecuaciones, supongamos que se quiera *hallar el centro de gravedad de una linea recta*; que para hacerlo desde luego con toda generalidad supondrémos que no pase por el orígen, sino que sea la KH (fig. 61), la cual se halle referida á los eges AX, AZ, y tendrá por ecuacion (II. 160) $z=ax+b$.

Si la diferenciamos tendrémos $dz=adx$, de donde $dx=\frac{dz}{a}$; sustituyendo en el valor de ds primero en vez de dz su valor adx, y despues en vez de dx el suyo $\frac{dz}{a}$, tendrémos estos dos valores de ds, á saber

$$ds=\sqrt{dx^2+a^2dx^2}=dx\sqrt{1+a^2},$$

$$\text{ó } ds=\sqrt{\frac{dz^2}{a^2}+dz^2}=dz\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}=\frac{dz}{a}\sqrt{1+a^2}\ (241).$$

Integrando estas dos ecuaciones, tendrémos

$$s=x\sqrt{1+a^2}+C\ (242)\ \text{y}\ s=\frac{z}{a}\sqrt{1+a^2}+C'\ (243).$$

Para determinar estas constantes es necesario que tambien determinemos nuestra cuestion, es decir, que nos fijemos de qué parte de la linea indefinida KH es de la que queremos hallar el centro de gravedad; y así, supondrémos que sea de la parte DE en que las coordenadas de sus estremos sean AB$=\alpha$, BD$=\beta$; AC$=\alpha'$, CE$=\beta'$;
y como las coordenadas que reducen á cero la longitud s de la recta, son

$x=\alpha$ y $z=\beta$, tendrémos (II. 632) $C=-\alpha\sqrt{1+a^2}$, y $C'=-\frac{\beta}{a}\sqrt{1+a^2}$;

por lo que los dos valores anteriores de s resultarán

$$s=x\sqrt{1+a^2}-\alpha\sqrt{1+a^2}=(x-\alpha)\sqrt{1+a^2}\ (244)\ \text{y}\ s=\frac{z-\beta}{a}\sqrt{1+a^2}\ (245).$$

Sustituyendo estos valores de s y ds en las (ecs. 238 y 239), haciendo las simplificaciones (II. 635) é integrando, nos resultará

$$x_{,}=\frac{\text{S}\,x\text{d}x\sqrt{1+a^2}}{(x-\alpha)\sqrt{1+a^2}}=\frac{\sqrt{1+a^2}\text{S}.x\text{d}x}{(x-\alpha)\sqrt{1+a^2}}=\frac{\text{S}.x\text{d}x}{x-\alpha}=\frac{\frac{1}{2}x^2+C''}{x-\alpha}\ (246),$$

$$z_{,}=\frac{\text{S}.\frac{z\text{d}z}{a}\sqrt{1+a^2}}{\frac{z-\beta}{a}\sqrt{1+a^2}}=\frac{\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}\text{S}.z\text{d}z}{\frac{1}{a}\sqrt{1+a^2}(z-\beta)}=\frac{\text{S}.z\text{d}z}{z-\beta}=\frac{\frac{1}{2}z^2+C'''}{z-\beta}\ (247).$$

Para determinar las constantes C'' y C''' observarémos que espresando los numeradores la suma de los momentos de todas las partes de la linea, en reduciéndose esta á cero no habrá suma de momentos, pues no hay linea; y como esto sucede cuando $x=$AB$=\alpha$, $z=$BD$=\beta$, tendrémos (II. 632) $C''=-\frac{1}{2}\alpha^2$, $C'''=-\frac{1}{2}\beta^2$;
cuyos valores sustituidos en las (ecs. 246 y 247) las reducen á

$$x_{,}=\frac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\alpha^2}{x-\alpha}=(\text{I. § 179})\frac{\frac{1}{2}(x+\alpha)(x-\alpha)}{x-\alpha}=\tfrac{1}{2}(x+\alpha)\ (248),$$

$$z_{,}=\frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}\beta^2}{z-\beta}=\frac{\frac{1}{2}(z+\beta)(z-\beta)}{z-\beta}=\tfrac{1}{2}(z+\beta)\ (249).$$

Estas ecuaciones espresan todavía en general las coordenadas del centro de gravedad de la parte de recta DEH, que principia en D y termina en el punto cuyas coordenadas sean x y z; luego si quisiéramos hallar las coordenadas del centro de gravedad de la parte DE, sustituiríamos en lugar de x el valor que le hemos supuesto AC$=\alpha'$, y en vez de z el $CE=\beta'$, y tendríamos $x_{,}=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$, $z_{,}=\frac{1}{2}(\beta+\beta')$.

Pero si en el trapecio BDEC, suponemos que F sea el punto medio de BC, se tendrá
$AF=AB+BF=\frac{1}{2}(2AB+2BF)=\frac{1}{2}(AB+AB+BC)=\frac{1}{2}(AB+AC)=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')$;
y por lo demostrado (I. 516), se tiene $FG=\frac{1}{2}(BD+CE)=\frac{1}{2}(\beta+\beta')$;
luego se tendrá $x_{,}=AF$, $z_{,}=FG$;
luego el punto G es el centro de gravedad de la parte DE de la KDEH; y como de suponer que F se halla en el medio de BC, resulta que G es el medio de DE, deducimos *que el centro de gravedad de una porcion cualquiera de una linea recta, se halla en el punto medio de su longitud.*

177 De esta verdad nos hubiéramos convencido sin necesidad de hacer uso del cálculo, observando que cada molécula m situada á un lado del punto G corresponderá á otra molécula m' igualmente distante de G; por consiguiente los momentos $m\times Gm$ y $m'\times Gm'$ serán iguales; y como lo que acabamos de decir de los puntos m y m' se puede aplicar á todos los demas de la porcion de recta DE, tomados de dos en dos, resulta que la suma de los momentos de todas las moléculas con relacion al punto G es igual á cero; luego el momento de la resultante (ec. 94) será nulo, y por consiguiente la resultante pasará por el punto G que se halla en medio de la DE.

178 Propongámonos por segundo egemplo *hallar el centro de gravedad de un arco de círculo CDE* (fig. 62). Con este objeto dispondrémos los eges de las coordenadas de modo que el ege de las abscisas divida á dicho arco en dos partes iguales; en cuyo caso el arco será simétrico con relacion á dicho ege, y por consiguiente su centro de gravedad se hallará en dicho ege, y se tendrá $z_{,}=0$. Para convencernos de ello, observarémos que si se dobla la figura por el radio AD todo el arco DE se confundirá con el DC, y por lo mismo su centro de gravedad g', cualquiera que sea, se confundirá con el g del arco DC; luego estos centros de gravedad g, g' distarán igualmente del ege de las x; y considerando en g y g' dos pesos ó fuerzas que espresen las magnitudes iguales de los arcos DE, DC, la resultante de estas dos fuerzas pasará (67 cor.) por el medio de la linea gg' que los une; luego el centro de gravedad G de todo el arco CDE se hallará en G medio de gg'. Luego solo necesitamos (174) la (ec. 232).

Como la ecuacion del círculo, tomando el orígen en el centro es $z^2=a^2-x^2$, se tendrá diferenciando $2z\mathrm{d}z=-2x\mathrm{d}x$;

de donde resulta $\mathrm{d}z=-\dfrac{x\mathrm{d}x}{z}$;

por lo que tendrémos $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\dfrac{x^2\mathrm{d}x^2}{z^2}}=$

$$\sqrt{dx^2+\frac{x^2dx^2}{a^2-x^2}}=\sqrt{\frac{a^2dx^2-x^2dx^2+x^2dx^2}{a^2-x^2}}=\pm\frac{adx}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

de estos dos valores tomarémos el negativo, porque x decrece cuando crece el arco; y sustituyendo este valor en vez de $\sqrt{dx^2+dz^2}$ en la (ec. 238) y pasando el divisor al primer miembro, tendrémos

$$sx_{,}=S.\frac{-axdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=aS.-\frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}}=(\text{II. § 526})a\sqrt{a^2-x^2}+C=az+C.$$

Para determinar la constante C, observarémos que cuando $x=a$ que da $z=0$, el arco es igual con cero; lo que da (II. § 632) $C=0$; luego la ecuacion anterior se convertirá en $sx_{,}=az$ (250), que puesta en proporcion da $s:a::z:x_{,}$;
ó duplicando los antecedentes

$$2s=\text{arco CDE}:a=\text{radio}::2z=\text{cuerda CE}:x_{,}=\text{AG};$$

por lo que *la distancia AG es cuarta proporcional al arco*, *al radio y á la cuerda.*

El centro de gravedad de la circunferencia entera debe hallarse en su centro; pues siendo el círculo y la circunferencia simétricos respecto de su diámetro, el centro de gravedad deberá pasar por todos los diámetros; luego se hallará en el punto que tengan comun, que es el centro del círculo.

Pero esto se deduce tambien del valor que acabamos de hallar para $x_{,}$; porque si suponemos que el arco s llegue á ser $2\pi=\text{D}'\text{EDCD}'$, como para el punto D′ se tiene $x=-a$, y $z=0$, la (ec. 250) nos da

$$x_{,}=\frac{az}{s}=\frac{az}{2\pi}=\frac{0}{2\pi}=0;$$

lo cual manifiesta que el centro de gravedad se halla en el orígen de las coordenadas que *es el centro del círculo.*

179 Propongámonos ahora *hallar el centro de gravedad de un arco de curva de doble curvatura*, *ó en general el de una linea cualquiera situada en el espacio.*

El elemento de una curva de doble curvatura, ó en general de una linea sea recta ó curva, considerada en el espacio, tiene por espresion

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}\ (*).$$

(*) *He tenido la mayor satisfaccion en saber que en los muchos informes que ha tomado el gobierno acerca de los dos primeros tomos de esta obra*, *que comprende hasta el cálculo integral*, *la única objecion ó reparo que se le ha puesto es el de ser demasiado estensa y voluminosa. Esta objecion ya la habia yo previsto*, *fundándome en que habiendo hecho las Matemáticas en estos últimos años unos rapidísimos progresos*, *que aun no son bastante conocidos*: *y habiendo tratado yo en mi obra de*

Tomemos los momentos de este elemento con relacion á los planos coordenados; y como x, z, u, representan las distancias de este elemento á los planos de las zu, de las xu y de las xz, los momentos de este elemento con relacion á dichos planos serán

$$x\sqrt{dx^2+dz^2+du^2},\ z\sqrt{dx^2+dz^2+du^2},\ u\sqrt{dx^2+dz^2+du^2};$$

---

formar unos elementos tales que con solo su estudio se pudiesen entender despues las obras maestras que hay escritas acerca de esta ciencia, por precision habian de salir mas estensos que las otras obras que se conocen en España; más para tomar un término medio, omití sin embargo muchísima doctrina que tenia ya escrita, por las razones que espuse en el §695 *del* 2.° *tomo de esta obra, y me reservaba el publicar todo lo demas en apéndices ó suplementos á cada tomo; con lo cual se podria tener una obra completísima; pero ínterin llega este caso*, vamos á manifestar que el elemento de una curva de doble curvatura, ó en general de una linea cualquiera considerada en el espacio, ya sea recta ya curva, tiene por espresion $\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}$.

Para esto supongamos que M y M' (fig. 63) *sean dos puntos situados en el espacio, cuyas coordenadas sean* x, z, u, *y* x', z', u'; y *tendrémos* (*II.* § 180) $MM'=\sqrt{(x'-x)^2+(z'-z)^2+(u'-u)^2}$ (A).

Si espresamos por k *ó por* Δx *la diferencia de las abscisas* x' *y* x, *como* z *y* u *son funciones de* x, *nos darán* (*II.* § 535)

$$z'=F.(x+k)=z+\frac{dz}{dx}.k+\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2}+\&c.=z+\frac{dz}{dx}.\Delta x+\frac{d^2z}{dx^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2}+\&c.$$

$$u'=f.(x+k)=u+\frac{du}{dx}.k+\frac{d^2u}{dx^2}.\frac{k^2}{1.2}+\&c.=u+\frac{du}{dx}.\Delta x+\frac{d^2u}{dx^2}.\frac{\Delta x^2}{1.2}+\&c.$$

Sustituyendo estos valores, así como el de x'−x *que es* Δx, *en la* (*ec. A*) *tendrémos cuerda* $MM'=$

$$\sqrt{\Delta x^2+\left(\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\times\frac{d^2z}{dx^2}\Delta x+\&c.\right)\Delta x^2+\left(\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du}{dx}\times\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x+\&c.\right)\Delta x^2}\ (B);$$

dividiendo por Δx *esta ecuacion, se convierte en*

$$\frac{\text{cuerda } MM'}{\Delta x}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz}{dx}\times\frac{d^2z}{dx^2}\Delta x+\&c.+\frac{du^2}{dx^2}+\frac{du}{dx}\times\frac{d^2u}{dx^2}\Delta x+\&c.}\ (C);$$

y pasando al límite por las consideraciones hechas (*II.* 591) *se obtiene* $\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{du^2}{dx^2}}$ (D), *que da* $ds=\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}$ (E);

que era lo que nos proponíamos encontrar.

Ahora, concibiendo un paralelepípedo de que MM' sea la diagonal, y cuyas caras sean paralelas á los planos coordenados, y tirando las dia-

por consiguiente espresando por $x_{,}$, $z_{,}$, $u_{,}$, las coordenadas del centro de gravedad, y por s la porcion de linea, se determinarán (174) estas cantidades por las ecuaciones

$$s = \mathrm{S}.\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}\ (251),\quad sx_{,} = \mathrm{S}.x\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}\ (252),$$

$$sz_{,} = \mathrm{S}.z\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}\ (253),\quad su_{,} = \mathrm{S}.u\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}\ (254).$$

180 *Apliquemos estas fórmulas para hallar el centro de gravedad de una linea recta AM (fig. 64) considerada en el espacio*; y para mayor sencillez supondrémos que el orígen de las coordenadas sea uno de los estremos de esta recta; por lo cual sus ecuaciones (II. 182) serán

$$x = au\ (255),\quad z = bu\ (256);$$

---

*gonales en las caras contiguas al punto M, tendrémos que el triángulo MM′*m*, rectángulo en* m*, dará (I. § 649)* $M'\mathrm{m} = \Delta\mathrm{u} = MM'\cos.MM'\mathrm{m}$; *el MM′Q, rectángulo en Q, dará* $M'Q = \mathrm{qm} = \Delta\mathrm{x} = MM'\cos.MM'Q$; *y el MM′N rectángulo en N, dará* $M'N = M\mathrm{q} = \Delta z = MM'\cos.MM'N$,

lo que da $\cos.MM'Q = \dfrac{\Delta\mathrm{x}}{MM'}$, $\cos.MM'N = \dfrac{\Delta\mathrm{z}}{MM'}$, $\cos.MM'\mathrm{m} = \dfrac{\Delta\mathrm{u}}{MM'}$.

*Ahora, siendo M′Q, M′N y M′*m*, respectivamente paralelas á los eges de las* x*, de las* z *y de las* u*, los ángulos que formen con la MM′ serán los mismos (I. 547 esc. 2.°) que los que forme la misma MM′ con los espresados eges; y representando dichos ángulos por las letras mayúsculas semejantes* X, Z, U, *las ecuaciones anteriores se nos convertirán en*

$$\cos.\mathrm{X} = \frac{\Delta\mathrm{x}}{MM'},\quad \cos.\mathrm{Z} = \frac{\Delta\mathrm{z}}{MM'},\quad \cos.\mathrm{U} = \frac{\Delta\mathrm{u}}{MM'}.$$

*Ahora, si suponemos que el punto M′ se vaya aproximando á M, tendrémos que las MM′, M*n*, M*q *y MO irán disminuyendo, y sus espresiones se irán acercando á sus límites, que serán* ds, dx, dz *y* du; *y como al mismo tiempo la posicion de MM′ se va acercando á la de la tangente MT con la cual se confundirá cuando dichas espresiones lleguen á sus límites, resulta que en suponiendo que han llegado al límite, el ángulo* X *espresará el ángulo formado por la curva KMM′ ó su tangente MT en el punto M con el ege de las* x; Z *espresará el formado con el ege de las* z; *y* U *el formado con el ege de las* u; *y tendrémos*

$$\cos.\mathrm{X} = \frac{dx}{ds}\ (F),\quad \cos.\mathrm{Z} = \frac{dz}{ds}\ (G),\quad \cos.\mathrm{U} = \frac{du}{ds}\ (H),$$

cuyas ecuaciones se pueden retener con facilidad en la memoria, pues quieren decir que el coseno del ángulo que el elemento de curva ó su tangente en un punto, forma con cada ege coordenado, es igual á la diferencial de dicha coordenada partida por la diferencial ó elemento del arco de curva.

Si la curva se hallase en un plano, tomándole por el de las xz, *las* y diferenciando resulta $dx=adu$ (257), $dz=bdu$ (258).

Sustituyendo estos valores en la (ec. 251) se nos convertirá en

$$s=S.du\sqrt{a^2+b^2+1},$$

ó haciendo para simplificar $\sqrt{a^2+b^2+1}=A$,
será $s=S.Adu=Au+C$ (259);
y haciendo las mismas sustituciones en las otras, será
$sx_{,}=S.Aaudu=Aa\times\frac{1}{2}u^2+C'$ (260),
$sz_{,}=S.Abudu=Ab\times\frac{1}{2}u^2+C''$ (261), $su_{,}=S.Audu=A\times\frac{1}{2}u^2+C'''$ (262).

---

dos (ecs. F y G) espresarán los cosenos de los ángulos que el elemento de una curva plana ó su tangente en un punto, forma con los eges coordenados.

Siendo los eges rectangulares, el ángulo X es complemento del Z, por lo que será $cos.Z=sen.X$ *y* $cos.X=sen.Z$;

luego tendrémos $sen.X=\frac{dz}{ds}$ (K), $sen.Z=\frac{dx}{ds}$ (L);

de donde $tang.X=\frac{sen.X}{cos.X}=\frac{\frac{dz}{ds}}{\frac{dx}{ds}}=\frac{dz}{dx}$ (M) *y* $tang.Z=\frac{sen.Z}{cos.Z}=\frac{\frac{dx}{ds}}{\frac{dz}{ds}}=\frac{dx}{dz}$ (N).

El triángulo M'Mm rectángulo en m, da $sen.M'Mm=\frac{mM'}{MM'}=\frac{\Delta u}{MM'}$;

y como el ángulo M'Mm es (I. 546 esc.) el que forma la M'M con el plano qMn, que es paralelo al de las xz, y en el límite la direccion de MM' se confunde con MT, resulta que el límite de la espresion anterior espresará el seno del ángulo que la tangente en el punto M forma con el plano de las xz; luego tendrémos

$$\text{sen.áng. de tang. con el plano de las } xz=\frac{du}{ds} \quad (O).$$

Y por las mismas consideraciones deducirémos de los triángulos MM'N, MM'Q, rectángulos en N y Q, que

$$\text{sen.áng. de tang. con el plano de las } xu=\frac{dz}{ds} \quad (P),$$

$$\text{sen.áng. de tang. con el plano de las } zu=\frac{dx}{ds} \quad (Q);$$

ecuaciones que nos dicen que el seno del ángulo que el elemento de una curva ó su tangente en un punto cualquiera forma con el plano de dos coordenadas, es igual á la diferencial de la otra coordenada, dividida por la diferencial ó el elemento de la curva.

Todas las constantes C, C', C'', C''', son iguales con cero (II. 632); porque en el orígen A en que $u=0$ todas las integrales son cero, á causa de ser 0 la longitud s de la linea. Luego tendrémos $s=Au$; y sustituyendo este valor en las otras tres ecuaciones, tendrémos

$$Aux_{,}=Aa\times\tfrac{1}{2}u^2,\text{ que da } x_{,}=\tfrac{1}{2}au\ (263),$$
$$Auz_{,}=Ab\times\tfrac{1}{2}u^2,\text{ que da } z_{,}=\tfrac{1}{2}bu\ (264),$$
$$Auu_{,}=A\times\tfrac{1}{2}u^2,\text{ que da } u_{,}=\tfrac{1}{2}u\ (265);$$

que espresan las coordenadas del centro de gravedad G de una parte de la recta AMN que principia desde A y termina en el punto cuya coordenada paralela al ege AU está representada por u. Luego si queremos buscar el de la parte AM, espresarémos por h la coordenada $u=$PM del estremo M, y sustituyendo este valor en las ecuaciones anteriores, se nos convertirán en $x_{,}=\frac{1}{2}ah$ (266), $z_{,}=\frac{1}{2}bh$ (267), $u_{,}=\frac{1}{2}h$ (268); cuyos valores espresan las coordenadas del centro de gravedad G, y dan á conocer que dicho *centro de gravedad se halla en el medio de la recta AM*; porque si AG es la mitad de AM, los triángulos semejantes AGQ, AMP, nos darán GQ$=\frac{1}{2}$MP$=\frac{1}{2}h$;
y sustituyendo este valor en las (ecs. 255 y 256) tendrémos $x=\frac{1}{2}ah$, $z=\frac{1}{2}bh$, que son los valores que dan para $x_{,}$ y $z_{,}$ las (ecs. 263 y 264) cuando se supone $u=h$.

181 Si la recta no pasase por el orígen de las coordenadas y estuviese representada por la BMN (fig. 65), sus ecuaciones serian (II. 182)

$$x=au+\alpha\ (269),\quad z=bu+\beta\ (270),$$

y tendrémos del mismo modo

$$dx=adu,\quad dz=bdu;\quad ds=\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}=du\sqrt{a^2+b^2+1}=Adu;$$

de donde
$$\left\{\begin{aligned} &s=Au+C\ (271),\\ &sx_{,}=\text{S}.xAdu=A\text{S}.(audu+\alpha du)=A(\tfrac{1}{2}au^2+\alpha u)+C'\ (272),\\ &sz_{,}=\text{S}.zAdu=A\text{S}.(budu+\beta du)=A(\tfrac{1}{2}bu^2+\beta u)+C''\ (273),\\ &su_{,}=\text{S}.uAdu=A\text{S}.udu=A\times\tfrac{1}{2}u^2+C'''\ (274).\end{aligned}\right.$$

Para determinar las constantes C, C', C'', C''', espresarémos por k la coordenada $u=$BD correspondiente al principio B de la recta; y como en este caso todas las integrales son cero, por serlo toda la recta que se considera, tendrémos (II. 632)

$$C=-Ak,\ C'=-A\left(\frac{ak^2}{2}+\alpha k\right),\ C''=-A\left(\frac{bk^2}{2}+\beta k\right),\ C'''=-A\times\frac{k^2}{2};$$

por lo cual las (ecs. 271, 272, 273 y 274) se nos convertirán en

$$s=A(u-k)\ (275),\quad sx_{,}=A(\tfrac{1}{2}a(u^2-k^2)+\alpha(u-k))\ (276),$$
$$sz_{,}=A(\tfrac{1}{2}b(u^2-k^2)+\beta(u-k))\ (277),\quad su_{,}=A\times\tfrac{1}{2}(u^2-k^2)\ (278).$$

Si en las tres últimas ecuaciones sustituimos en vez de s su valor $A(u-k)$ y simplificamos, se tendrá

$$x_{,}=\tfrac{1}{2}(u+k)a+\alpha\ (279),\quad z_{,}=\tfrac{1}{2}(u+k)b+\beta\ (280),\quad u_{,}=\tfrac{1}{2}(u+k)\ (281),$$

que son las *coordenadas del centro de gravedad de una parte de la recta que principia en B y cuyo otro estremo sea el punto cuya coordenada paralela al ege AU esté espresada por* u; luego si suponemos que se quiere hallar el centro de gravedad de la parte BM, cuyo estremo M tenga por coordenada $u=MP=h$; sustituyendo por u este valor en las ecuaciones anteriores, tendrémos que las coordenadas del centro de gravedad serán $x_{,}=\frac{1}{2}(h+k)a+\alpha$, $z_{,}=\frac{1}{2}(h+k)b+\beta$, $u_{,}=\frac{1}{2}(h+k)$, que corresponden al medio de la recta BM.

{ En efecto, si suponemos que G sea el medio de BM, el trapecio BDPM dará [I. 516 esc.] $GQ=\frac{1}{2}(BD+MP)=\frac{1}{2}(h+k)$; luego $GQ=\frac{1}{2}(h+k)=u_{,}$; y sustituyendo este valor en los de $x_{,}$ y $z_{,}$, será $\begin{cases} x_{,}=au_{,}+\alpha, \\ z_{,}=bu_{,}+\beta; \end{cases}$ y como $u_{,}$ es la coordenada del punto medio de la parte BM que consideramos, y estas ecuaciones son un caso particular de las (ecs. 269 y 270), resulta que determinan las otras coordenadas del medio de la BM. }

182 Conociendo ya el centro de gravedad de una linea recta, se deducirá sin dificultad el del contorno de un polígono cualquiera por medio de las (ecs. 223, 224 y 225), sustituyendo en vez de v, v', v'', &c. los lados del polígono, y en vez de x, z, u, x', z', u', &c. las coordenadas de sus centros de gravedad ó puntos medios.

Para hacer una aplicacion supongamos que *se quiera hallar el centro de gravedad del contorno del paralelogramo ABCD* (fig. 66), que para mayor sencillez supondrémos que sea rectángulo, que se halle en el plano de las xz, y que uno de los ángulos esté en el orígen A de las coordenadas.

Por lo que tendrémos suficiente con las dos (ecs. 223 y 224). Los centros de gravedad de cada uno de los lados AB, BC, CD, DA, se hallarán en sus puntos medios L, H, M, K; luego las coordenadas de L serán $x=\frac{1}{2}AB$, $z=0$;
las de H punto medio de BC serán $x'=AB$, $z'=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$;
las de M punto medio de CD serán $x''=\frac{1}{2}AB$, $z''=AD$;
y las del K medio de AD son $x'''=0$, $z'''=\frac{1}{2}AD$;
luego si sustituimos estos valores en dichas ecuaciones, será

$$x_{,}=\frac{AB\times\frac{1}{2}AB+BC\times AB+DC\times\frac{1}{2}AB+AD\times 0}{AB+BC+CD+AD}=$$

$$[\text{I. 466 cor. 1.}^{o}]\ \frac{AB(\frac{1}{2}AB+BC+\frac{1}{2}DC)}{2AB+2AD}=\frac{AB(AB+AD)}{2(AB+AD)}=\frac{1}{2}AB,$$

$$z_{,}=\frac{AB\times 0+CB\times\frac{1}{2}AD+DC\times AD+AD\times\frac{1}{2}AD}{AB+BC+CD+AD}=\frac{AD(\frac{1}{2}CB+DC+\frac{1}{2}AD)}{2AB+2AD}=$$

$$\frac{AD(AB+AD)}{2(AB+AD)}=\frac{1}{2}AD.$$

Luego el centro de gravedad del contorno de este rectángulo *se halla en el punto G donde se encuentran las rectas que pasan por los puntos medios de los lados opuestos*. Lo que se podia prever desde luego;

pues siendo L y M los centros de gravedad de los lados iguales AB, CD, podemos concebir en dichos dos puntos dos fuerzas iguales que obren paralelamente, y en virtud de lo espuesto (67 cor.) su resultante pasará por el medio G de la recta LM que los une. Por la misma razon el centro de gravedad de los otros dos lados AD, BC pasará por G medio de KH. Todo lo cual conviene tambien á un paralelogramo cualquiera aunque no sea rectángulo.

183 Propongámonos *hallar en general el centro de gravedad de una superficie plana comprendida entre una parte de linea plana, las ordenadas de sus estremos, y el ege de las abscisas.*

Para esto supongamos tiradas dos ordenadas cualesquiera MP, M'P' (fig. 67), y supongamos que G sea el centro de gravedad de la superficie MPP'M', con lo cual tendrémos que

GN×sup.MPP'M' será su momento con relacion al ege AX;

y AN×sup.MPP'M' su momento con relacion al ege AZ.

Cuando la superficie MPP'M' llegue á su límite, entónces es cuando tenemos la verdadera idea del elemento en que queremos considerar dividida la superficie; pero la superficie MPP'M' llega á su límite cuando la diferencia Δx=PP' de la abscisa llega á su límite dx; en cuyo caso (II. 624) se tiene *límite de MPP'M'*$=z\mathrm{d}x$;

y como en el límite se confunde la M'P' con la MP, el punto G se hallará (180) en la mitad de MP, por lo cual en el caso del límite se tiene

$$\mathrm{GN}=\tfrac{1}{2}z,\ \mathrm{AN}=x;$$

por consiguiente el momento de uno de los elementos de esta superficie con relacion al ege de las x, ó lo que hemos llamado (ecs. 232 y 233)

$z\mathrm{d}m$, será $\frac{1}{2}z^2\mathrm{d}x$;

y con relacion al ege de las z, ó lo que hemos llamado $x\mathrm{d}m$ será $zx\mathrm{d}x$. Si representamos por K el area ó superficie DBM'P', esta superficie se determinará (II. 668) por la ecuacion $K=\mathrm{S}.z\mathrm{d}x$ (282).

Y las coordenadas de su centro de gravedad lo quedarán por las (ecs. 232 y 233), que, pues S.(dm) equivale aquí á S.zdx, se tendrá

$$x_{,}=\frac{\mathrm{S}.zx\mathrm{d}x}{\mathrm{S}.z\mathrm{d}x}\ (283),\quad z_{,}=\frac{\mathrm{S}.\frac{1}{2}z^2\mathrm{d}x}{\mathrm{S}.z\mathrm{d}x}\ (284);$$

que para mayor comodidad podrémos poner bajo esta forma

$$Kx_{,}=\mathrm{S}.zx\mathrm{d}x\ (285),\quad Kz_{,}=\mathrm{S}.\tfrac{1}{2}z^2\mathrm{d}x\ (286).$$

184 Para manifestar el uso de estas fórmulas propongámonos en primer lugar hallar *el centro de gravedad de la superficie de un segmento circular CDE* (fig. 62).

Si se toma por orígen de las coordenadas el centro A del círculo, y por ege de las abscisas la recta AD que divide al segmento en dos partes iguales, el centro de gravedad del segmento CDE se hallará sobre esta recta por las mismas consideraciones hechas (178); luego solo necesitarémos (174) la (ec. 283) ó la (ec. 285), para determinar la abscisa $x_{,}$. Con el fin de conseguirlo, observarémos que la ecuacion del círculo siendo en este caso $z^2=a^2-x^2$, nos da $2zdz=-2xdx$, de donde $xdx=-zdz$ (287); por lo que la (ec. 285) se convertirá en $Kx_{\prime}=S.-z^2dz=-\frac{1}{3}z^3+C$ (288).

Para determinar la constante C, observarémos que si espresamos por c la cuerda CE de dicho segmento, su mitad $\frac{1}{2}c$ espresará el valor de la CB, que es la ordenada z que reduce el espacio CDE$=K$ á cero; por consiguiente sustituyendo $\frac{1}{2}c$ en vez de z en la ecuacion anterior, se tendrá

$$0=-\tfrac{1}{3}\times\frac{c^3}{8}+C,\ \text{que da}\ C=\frac{c^3}{24};$$

por lo que será $Kx_{\prime}=-\frac{1}{3}z^3+\frac{c^3}{24}$, que da $x_{\prime}=\dfrac{-\frac{1}{3}z^3+\frac{c^3}{24}}{K}$ (289);

ecuacion que espresa en general la distancia del centro de gravedad de un espacio circular comprendido entre la cuerda CE$=c$, los arcos CM, EM′, y otra doble ordenada MM′ cuya mitad esté espresada por z; luego si queremos tener la del centro de gravedad de todo el segmento CDE, harémos $z=0$ por ser la ordenada que corresponde al punto D, lo cual nos

dará $x_{\prime}=\dfrac{c^3}{24K}$;

pero si observamos con atencion la cantidad que representa K (ec. 282),

tendrémos que $K=\frac{1}{2}$ sup. CDE, por lo cual resultará $x_{\prime}=\dfrac{c^3}{12\,\text{sup.CDE}}$;

ecuacion que nos enseña que *la distancia del centro de gravedad G del segmento CDE al ege de las z, es igual al cubo de la cuerda dividido por doce veces la superficie de dicho segmento.*

Si quisiéramos hallar el centro de gravedad G′ del semicírculo KDH, la cuerda c seria el diámetro$=2r$, y su superficie seria (I. 522 cor. 1.º) $\frac{1}{2}\times3{,}14159\times r^2$;

por lo cual será $x_{\prime}=\dfrac{8r^3}{12\times\frac{1}{2}\times3{,}14159\&c.r^2}=\dfrac{4r}{3\times3{,}14159\&c.}=\dfrac{2D}{9{,}42477\&c.}$;

Por la misma razon el centro de gravedad del otro semicírculo KD′H,

se hallará en G″ á una distancia del orígen A espresada por $\dfrac{2D}{9{,}42477\&c.}$;

luego el centro de gravedad de toda la superficie del círculo entero se hallará determinando cuál es el de los dos semicírculos; y como el de estos se hallará en el punto A medio de la distancia (67 cor.) G′G″, resulta *que el centro de gravedad del círculo entero se halla en su centro A.*

A esta conclusion nos hubiera conducido inmediatamente la (ec. 289) con solo observar que en el círculo entero D′KDHD′ la cuerda c que pase por D′ paralela al ege de las z es *cero*, y la ordenada z correspondiente al punto D donde acaba, es tambien *cero*; por lo que dicha ecuacion nos da directamente $x_{\prime}=0$.

Todo lo cual era fácil de prever, solo con tener en consideracion que siendo el círculo simétrico con relacion á cualquiera de sus diámetros, su centro de gravedad debe hallarse en todos los diámetros; y como el círculo solo debe tener un centro de gravedad, resulta que se hallará en el punto en que se corten, que es el centro.

185 Propongámonos por segundo egemplo *determinar el centro de gravedad de un segmento parabólico*. Como la parábola es simétrica respecto de su ege, tendrémos solo necesidad de la (ec. 285), pues la distancia $x_{\prime}$ del centro de gravedad del segmento MAM′ (fig. 68) será la misma que la del APM por lo dicho (178); y como la ecuacion de la parábola es $z^2=px$, que da $z=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, sustituyendo este valor de z en dicha ecuacion, se tendrá

$$Kx_{\prime}=\text{S}.xz\text{d}x=\text{S}.p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\text{d}x=\frac{p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\tfrac{2}{5}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}+C=\tfrac{2}{5}x^2z+C\ (290).$$

Si la superficie cuyo centro de gravedad se busca, principia en A orígen de las coordenadas, la constante C resulta cero; y como en este caso

$$K=\tfrac{1}{2}\text{sup.AMM'A}=\text{AMP}=(\text{II}.\ 670)\tfrac{2}{3}xz,\ \text{resulta}\ x_{\prime}=\frac{\frac{2}{5}x^2z}{\frac{2}{3}xz}=\tfrac{3}{5}x;$$

luego *el centro de gravedad de un segmento parabólico está sobre el ege de las abscisas distante del vértice una magnitud igual á los tres quintos de la longitud de la abscisa.*

Si solo nos hubiéramos propuesto hallar el centro de gravedad del espacio AMP, comprendido por el arco AM de parábola y las coordenadas AP,PM de su estremo M, tendríamos que atender ademas á la (ec. 286) para determinar á qué distancia del ege de las x se hallaba dicho centro de gravedad.

Sustituyendo en dicha ecuacion en vez de z^2 su valor px, se tendrá $Kz_{\prime}=\text{S}.\frac{1}{2}px\text{d}x=\frac{1}{4}px^2=\frac{1}{4}z^2x$ sin constante;

$$\text{y siendo}\ K=\text{APM}=\tfrac{2}{3}xz,\ \text{resultará}\ z_{\prime}=\frac{\frac{1}{4}z^2x}{\frac{2}{3}xz}=\tfrac{3}{8}z;$$

que nos dice que *el centro de gravedad de dicho espacio APM se halla en la perpendicular que se levante en el estremo* p *de la abscisa* $A\text{p}=\frac{3}{5}AP$, *distante del ege* AX *la magnitud* $\text{pg}=\frac{3}{8}PM$.

186 Propongámonos ahora *encontrar el centro de gravedad de la superficie comprendida por dos lineas planas cuyas ecuaciones sean dadas.*

Para conseguirlo supongamos que se quiera encontrar el centro de gravedad de la superficie OBB′O′ (fig. 69) comprendida por las dos lineas planas BO, B′O′, que se refieren á unos mismos eges y orígen; y sean z y z' las ordenadas PM, PM′ correspondientes á la misma abscisa $AP=x$.

El elemento de esta superficie, que será el límite del espacio MM$'m'm$, tendrá por espresion

*límite de sup.*Pm — *límite de sup.*P$m'=z\mathrm{d}x-z'\mathrm{d}x=(z-z')\,\mathrm{d}x$;

luego si representamos por K una porcion de la superficie comprendida entre las curvas y dos ordenadas MM$'$, OO$'$, tendrémos

$$K=\mathrm{S}.(z-z')\mathrm{d}x \quad (291);$$

cuya espresion se deberá integrar desde $x=$AP, hasta $x=$AQ.

Para encontrar el centro de gravedad de esta porcion de superficie, supondrémos que G sea el centro de gravedad de la diferencia de superficie MM$'m'm$; y tendrémos que

GD$\times$sup.MM$'m'm$ será su momento con relacion al ege de las x,

y GE$\times$sup.MM$'m'm$ su momento con relacion al ege de las z;

y suponiendo que la superficie MM$'m'm$ llegue á su límite con el objeto de tener la verdadera idea del elemento de superficie (para lo cual es indispensable suponer que la diferencia P$p=\Delta x$ de las abscisas llegue á su límite dx, en cuyo caso la GE será igual con AP, y el punto G se hallará (176) en medio de la MM$'$) tendrémos que GD se convertirá en

$$\mathrm{PM}'+\tfrac{1}{2}\mathrm{MM}'=z'+\tfrac{1}{2}(z-z')=\tfrac{1}{2}(z+z');$$

luego los momentos del elemento comprendido por estas curvas serán

$\frac{1}{2}(z+z')(z-z')\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(z^2-z'^2)\mathrm{d}x$ con relacion al ege de las x,

y $x(z-z')\mathrm{d}x$ con relacion al ege de las z;

luego si espresamos por $x_{,}$, $z_{,}$ las coordenadas del centro de gravedad, estas coordenadas quedarán determinadas por las ecuaciones

$$Kx_{,}=\mathrm{S}.x(z-z')\mathrm{d}x \quad (292),\quad Kz_{,}=\mathrm{S}.\tfrac{1}{2}(z^2-z'^2)\mathrm{d}x \quad (293);$$

cuyas integrales, así como la de (ec. 291) se deberán tomar desde $x=$AP, hasta $x=$AQ. De manera que la solucion del problema dependerá en general de tres integrales determinadas, tomadas entre los mismos límites. Cuando uno de los eges corte á la superficie propuesta en dos partes iguales, el centro de gravedad se hallará sobre este ege, y solo faltará determinar una de las distancias $x_{,}$, $z_{,}$; lo cual solo exigirá dos integrales con el valor de K.

Si la superficie propuesta estuviese terminada por el ege AX, en vez de serlo por la curva B$'$M$'m'$O$'$, haríamos $z'=0$, y las (ecs. 292 y 293) se nos convertirian en las (285 y 286).

187 Para hacer uso de estas fórmulas supongamos que se quiera hallar el centro de gravedad de la superficie del triángulo CAB (fig. 70); y supongamos para mayor sencillez que el orígen de las coordenadas se halle en A, vértice del mismo triángulo, y que el ege AZ sea paralelo á la base BC de dicho triángulo, y por consiguiente el ege AX perpendicular á esta misma base. En este caso, las lineas que terminan la superficie propuesta son las rectas AB, AC, que pasan por el orígen, y cuyas ecuaciones estarán representadas por $z=ax$, $z'=a'x$;

y las fórmulas generales (ecs. 291, 292 y 293) se convertirán en

$$K=\mathrm{S}.(a-a')x\mathrm{d}x \quad (294),\quad Kx_{,}=\mathrm{S}.(a-a')x^2\mathrm{d}x \quad (295),$$

$$Kz_{,}=\tfrac{1}{2}\mathrm{S}.(a^2-a'^2)x^2\mathrm{d}x \quad (296).$$

Estas integrales se deben tomar desde $x=0$, que corresponde al punto A, hasta $x=AD=h$, espresando por h la altura AD del triángulo; y haciendo operaciones análogas á las que hemos practicado (176), resulta

$$K=(a-a')\frac{h^2}{2},\ Kx_{,}=(a-a')\frac{h^3}{3},\ Kz_{,}=(a^2-a'^2)\frac{h^3}{6};$$

y por consiguiente dividiendo las dos últimas ecuaciones por la primera se tendrá $x_{,}=\frac{2h}{3}$, $z_{,}=(a+a')\frac{h}{3}$.

Luego si tomamos $AE=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}AD$, y levantamos en E la perpendicular EG igual al valor de $z_{,}$, tendrémos que el punto G será el centro de gravedad pedido. *Si se une el punto G con A y se prolonga la recta AG hasta que corte á la base BC en F, este punto será el medio de BC.* En efecto, haciendo $x=AD=h$, en los valores de z y z', resulta

$CD=ah$ y $BD=a'h$;

luego si sustituimos estos valores en el de $z_{,}=\frac{1}{3}(ah+a'h)$,
tendrémos $z_{,}=GE=\frac{1}{3}(CD+BD)$;
pero los triángulos AEG, ADF dan AE:GE::AD:DF;
luego á causa de $AE=\frac{2}{3}AD$, se tendrá $FD=\frac{3}{2}GE=\frac{1}{2}(CD+BD)$,
valor que pertenece al medio de la recta CB.

Tambien resulta de los mismos triángulos que AG es los dos tercios de AF, del mismo modo que AE es los dos tercios de AD. De todo lo cual se deduce *que el centro de gravedad de un triángulo se halla sobre la recta que une su vértice y el medio de su base, á los dos tercios de esta recta, partiendo desde el vértice, ó al tercio partiendo desde la base.*

188 A esta conclusion pudiéramos haber llegado con mas facilidad, observando que todo triángulo ABC es simétrico con relacion á la linea AF que desde uno de sus ángulos va á parar al medio del lado opuesto; es decir, que la AF divide al triángulo ABC en dos partes AFB, AFC compuestas de un mismo número de moléculas situadas del mismo modo con relacion á AF: que contienen un mismo número de moléculas ya lo sabíamos (I. 510 cor. 2.°), pues dichos triángulos son iguales en superficie; y para convencernos de que están situadas del mismo modo con relacion á la AF, bastará observar que si consideramos un punto cualquiera tal como m, y tiramos por él la mom', y tomamos $om'=om$, el punto m' estará situado con relacion á la AF del mismo modo que lo está el punto m; y como lo mismo demostraríamos que á cualquier punto del triángulo ABF correspondia otro situado del mismo modo en el AFC, resulta lo que nos proponíamos demostrar.

Ahora, contando los momentos con relacion á la linea AF por lineas paralelas á la base BC, tendrémos que el momento del punto ó molécula m será $m\times om$;
y el de la molécula m' será $m'\times om'$.
Luego la resultante de las dos fuerzas paralelas é iguales, que repre-

senten los pesos m y m', tendrá su punto de aplicacion en o, interseccion de mm' con AF; y como se verificará lo mismo respecto de dos moléculas cualesquiera tomadas como las precedentes con relacion á AF, se sigue que AF *es el lugar de los centros de gravedad de todos los puntos materiales y pesados de que podamos concebir compuesta la superficie ABC.* Luego si consideramos estos centros como puntos solicitados por fuerzas paralelas representativas de sus pesos, se concluirá que el punto de aplicacion de la resultante que es el centro de gravedad de la superficie, se debe hallar sobre la linea AF; y como del mismo modo probaríamos que tambien se debe hallar dicho centro de gravedad en la BL que une el punto B con el medio L del lado AC, resulta que dicho centro se hallará en G, interseccion de AF y BL. Ahora, uniendo el punto L con F, será LF paralela (I. 475 y 476) á AB é igual con $\frac{1}{2}$AB; y de los triángulos ABG, LGF que son semejantes (I. 485), sacarémos

$$GF=\tfrac{1}{2}AG=\tfrac{1}{3}AF \text{ y } AG=\tfrac{2}{3}AF.$$

189 Si quisiéramos hallar el centro de gravedad de la superficie del trapecio KBCI, no tendríamos mas que tomar las integrales que espresan las (ecs. 294, 295 y 296) desde $x=AP=k$ hasta $x=AD=h$, y seria

$$K=(a-a')\frac{x^2}{2}+C,\quad Kx_{,}=(a-a')\frac{x^3}{3}+C',\quad Kz_{,}=(a^2-a'^2)\frac{x^3}{6}+C'';$$

que como K se debe reducir á cero cuando $x=k$, se tendrá

$$C=-(a-a')\frac{k^2}{2},\quad C'=-(a-a')\frac{k^3}{3},\quad C''=-(a^2-a'^2)\frac{k^3}{6};$$

que sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, y h en vez de x, será $K=(a-a')\dfrac{h^2-k^2}{2}$, $Kx_{,}=(a-a')\dfrac{h^3-k^3}{3}$, $Kz_{,}=(a^2-a'^2)\dfrac{h^3-k^3}{6}$;

que dividiendo estas dos últimas ecuaciones por la primera, se tendrá

$$x_{,}=\tfrac{2}{3}\times\frac{h^2+hk+k^2}{h+k},\quad z_{,}=(a+a')\frac{h^2+hk+k^2}{3(h+k)}.$$

Si observamos que el centro de gravedad del trapecio, por la misma razon dada respecto del triángulo, se hallará en la linea HF que divide en dos partes iguales á las bases paralelas CB, IK, solo necesitarémos el valor de $x_{,}$; y si queremos averiguar la distancia del centro de gravedad á la base menor IK, quitarémos del valor de $x_{,}$ el de $AP=k$, y será $x_{,}-k=PE'=\dfrac{2(h^2+hk+k^2)}{3(h+k)}-k$;

reduciendo en el segundo miembro el entero á la especie del quebrado y simplificando, resulta $PE'=\dfrac{2h^2-hk-k^2}{3(h+k)}$;

Si espresamos por l la altura PD del trapecio, será $h=AD=AP+PD=k+l$, cuyo valor sustuido en el de PE′ y simplificado, dará $PE'=\frac{l}{3}\times\frac{3k+2l}{2k+l}$.

Y como (I. § 477) IK:CB::AK:AB::AP:AD::k:k+l, resulta $k=\frac{l\times IK}{CB-IK}$.

Y sustituyendo en vez de k este valor en el de PE′ y simplificando, resulta por último $PE'=\frac{l}{3}\cdot\frac{2CB+IK}{CB+IK}$;

y como PE′:PD=l::HG′:HF, si en vez de PE′ y l sustituimos sus proporcionales HG′ y HF, tendrémos $HG'=\frac{HF}{3}\times\frac{2CB+IK}{CB+IK}$.

Y si quisiéramos hallar la distancia G′F del mismo centro de gravedad G′ á la base mayor BC del trapecio, restaríamos la HG′ de HF, y haciendo las reducciones correspondientes tendríamos

$$G'F=HF-HG'=\frac{HF}{3}\times\frac{CB+2IK}{CB+IK}.$$

190 Si en esta espresion suponemos IK=CB, el trapecio se nos convertirá (I. 463) en un paralelogramo, y tendrémos $HG'=\frac{HF}{3}\times\frac{3CB}{2CB}=\frac{HF}{2}$, que dice que *el centro de gravedad de un paralelogramo está en el punto medio de la recta que divide en dos partes iguales á dos de los lados paralelos, que es el punto en que se cortan* (I. §§ 360, 357 y 468) *las diagonales.*

191 *Para hallar el centro de gravedad de la superficie de un polígono cualquiera, sea regular ó irregular, se descompondrá en triángulos*; y espresando por a, a', a'', &c. las superficies ABC, ACD, ADE, &c. (fig. 71) de estos triángulos, se considerarán las superficies a, a', a'', &c. como pesos aplicados á los centros de gravedad g, g', g'', &c. de los triángulos ABC, ACD, &c.; el centro de gravedad k de la superficie ABCDA se hallará (ec. 62 ó 63) por la proporcion $a+a':a::gg':g'k$.

Despues se buscará el centro de gravedad k' de la superficie ABCDE, determinando el punto de aplicacion de la resultante de $a+a'$ que obra en k y de a'' que obra en g''. Para lo cual se formará la proporcion $a+a'+a'':a''::kg'':kk'$, y así sucesivamente.

Para resolver el mismo problema por el método general supondrémos que $x_,$ y $z_,$ sean las coordenadas del centro de gravedad del polígono; y suponiendo que las fuerzas P, P', P'', &c. estén espresadas por las superficies a, a', a'', &c. de los triángulos ABC, ACD, ADE, &c., tendrémos que las (ecs. 112, 116 y 117) se convertirán en $R=a+a'+a''+a'''+$&c.

$$x_,=\frac{ax+a'x'+a''x''+a'''x'''+\&c.}{a+a'+a''+a'''+\&c.},\quad z_,=\frac{az+a'z'+a''z''+a'''z'''+\&c.}{a+a'+a''+a'''+\&c.}.$$

Luego si tomamos AP=$x_,$, tiramos PG paralela con AZ, y tomamos

$PG = z_i$, resultará que G será el centro de gravedad de la superficie del polígono.

Lo mismo se practicará para hallar el centro de gravedad del contorno, advirtiendo que hallándose el centro de gravedad de cada lado en su medio, se pueden considerar los medios de los lados del polígono como cargados de pesos proporcionales á estos lados.

192 *Para encontrar el centro de gravedad de una pirámide*, observarémos que si es triangular como la representada (fig. 72), y hacemos pasar un plano por el vértice A y por la BE que une un ángulo cualquiera de la base con la mitad de su lado opuesto, *quedará dividida la pirámide en otras dos simétricas con relacion á dicho plano*, es decir, que se compondrán de igual número de partes materiales, y estarán del mismo modo colocadas con relacion á dicho plano.

La primera de estas circunstancias se verifica, por ser iguales en volúmen (I. 588) dichas pirámides; y para manifestar que se verifica la segunda, observarémos que *cada punto ó molécula* m *de la ABDE tiene otro* m′ *en la ABEC situado del mismo modo con relacion al plano ABE*. En efecto, si por m se hace pasar un plano bdc paralelo á la base BDC, como su seccion será semejante (I. 585 2.ª) á la base BDC, quedará dividido por el plano ABE en dos partes iguales, es decir, que la be comun interseccion de dichos planos, dividirá al lado dc en dos partes iguales; y tirando por m una recta mom' paralela á dc, y tomando $om' = om$, se tendrá un punto ó molécula m' igualmente situado con relacion al plano ABE; y como demostraríamos lo mismo respecto de los demas puntos de la pirámide ABDE, resulta la propiedad que hemos enunciado.

Ahora, el momento de m con relacion al plano ABE contando las distancias en lineas paralelas á dc, es $m \times om$, y el de m' es $m' \times om'$; y como estos son iguales y caen hácia diversos lados del plano, su suma será igual con cero, ó lo que es lo mismo, el punto de la resultante de dos fuerzas paralelas que considerásemos representadas por m y m', pasaria por el punto o en que sus direcciones cortan al plano ABE; y como lo mismo demostraríamos de los demas puntos de ambas pirámides, resulta que el plano ABE es el lugar de todos los centros de gravedad de todas las moléculas de la pirámide ABCD; luego en dicho plano se hallará el centro de gravedad de la espresada pirámide. Del mismo modo demostraríamos que dicho centro de gravedad se debe hallar en el plano ACF. Luego debiendo hallarse dicho centro de gravedad en ambos planos, estará en su comun interseccion Ag'; pero el punto g' que es el punto de interseccion de las lineas BE, CF, que desde un ángulo van á parar al medio de su lado opuesto, es (188) el centro de gravedad de la base BCD; luego tenemos demostrado que *el centro de gravedad de la pirámide triangular se halla en la recta que une el centro de gravedad de la base con el vértice de la pirámide.*

Y como podemos tomar por base una cara cualquiera, resulta que si tomamos la ADC, y en la AE tomamos $Eg'' = \frac{1}{3}AE$, y unimos el punto B con g'', el centro de gravedad de la pirámide tambien se hallará en la Bg''; luego deberá hallarse en el punto G en que esta recta corte á la Ag' que se halla en el mismo plano ABE. Ahora, uniendo el punto g' con g'', la $g'g''$ será (I. 475 y 476) paralela á BA é igual á $\frac{1}{3}$BA, por ser $Eg'=\frac{1}{3}EB$ y $Eg''=\frac{1}{3}EA$; y los triángulos semejantes $g'Gg''$, ABG darán $Gg'=\frac{1}{3}AG=\frac{1}{4}Ag'$ y $AG=\frac{3}{4}Ag'$.

Luego el centro de gravedad de una pirámide triangular se halla en la recta que une el vértice con el centro de gravedad de la base, á la cuarta parte de esta recta partiendo desde la base, ó á los tres cuartos de dicha recta partiendo desde el vértice.

193 *La recta Ag' que desde el vértice de la pirámide triangular va al centro de gravedad g' de la base, pasa por el centro de gravedad* g *de toda seccion* bdc *hecha por un plano paralelo á la base BDC.*

Porque la *dc* por ser paralela á DC (I. 551) quedará dividida en dos partes iguales *de*, *ec* (I. § 477), la *bge* por ser paralela á $Bg'E$, sus partes serán proporcionales con las de BE; luego será $ge=\frac{1}{3}be$, así como $g'E=\frac{1}{3}BE$;
luego el punto *g* es (183) el centro de gravedad de la seccion *bdc*, y se verifica la proposicion.

194 Cuando la base de la pirámide es un polígono cualquiera ABCDE (fig. 73), tambien se verifica que *la recta que desde el vértice S va á parar al centro de gravedad de la base, pasa por el centro de gravedad* k *de toda seccion paralela á la base.*

Porque suponiendo que sean G, G', G'', los centros de gravedad de los triángulos ABE, EBC, ECD que componen la base ABCDE, las rectas SG, SG' y SG'' pasarán por los centros de gravedad g, g', g'' de los triángulos correspondientes de la seccion; y si H es el centro de gravedad del sistema de los dos triángulos ABE y BEC, las rectas GG' y gg' que son paralelas y están en el plano SGG', quedan cortadas proporcionalmente en H y *h* (I. 477) por la SH; luego el punto *h* es el centro de gravedad del cuadrilátero *abce*. La recta SG'' pasa por el centro de gravedad g'' del triángulo *cde*; luego si K es el centro de gravedad del sistema del cuadrilátero ABCE y del triángulo EDC, las rectas KG'' y kg'' que son paralelas y se hallan en el plano SKG'', están cortadas proporcionalmente en K y *k* por la recta SK; luego el punto *k* es el centro de gravedad de la seccion *abcde*.

195 *El centro de gravedad de una pirámide cualquiera está situado á los tres cuartos de la recta tirada desde el vértice de la pirámide al centro de gravedad de su base partiendo del vértice de la pirámide, ó á la cuarta parte partiendo desde la base.*

En efecto, haciendo pasar un plano *abcde* paralelo á la base ABCDE por un punto *k*, tal que $Kk=\frac{1}{4}SK$, este plano cortará (I. 585) á las SG, SG', SG'', de modo que $gG=\frac{1}{4}SG$, $g'G'=\frac{1}{4}SG'$, $g''G''=\frac{1}{4}SG''$;
luego los puntos g, g', g'', serán los centros de gravedad de las pirámides SABE, SBCE, SCDE; luego todo estará ya reducido á encontrar el

centro de gravedad de tres fuerzas ó pesos, cuyos puntos de aplicacion sean g, g', g'', y cuyas intensidades estén espresadas por los volúmenes de dichas pirámides; pero como estas tienen una misma altura, sus volúmenes guardan la razon de las bases ABE, BCE, CDE, que son proporcionales (I. 585) á los triángulos *abe*, *bce*, *cde*; luego el centro de gravedad de estos triángulos será el mismo que el de la pirámide total; pero el centro de gravedad de dichos triángulos es el de la seccion *abcde*, y se halla en la recta SK á una distancia de la base espresada por $Kk=\frac{1}{4}SK$; luego resulta la proposicion.

196 Como todo poliedro se puede descomponer en pirámides, resulta que se podrá hallar el centro de gravedad de todo cuerpo terminado por superficies planas, ya sea por la teoría de las fuerzas paralelas, ya por la de los momentos, considerando en el centro de gravedad de cada pirámide una fuerza ó peso igual con el volúmen de dicha pirámide.

197 Los cuerpos uniformes *tales como los prismas y cilindros, tienen sus centros de gravedad en medio de la recta que une los centros de gravedad de sus bases*; pues que siendo toda seccion paralela á la base igual á la misma base, la recta que pase por los centros de gravedad de las bases, pasará por el de las secciones; luego podrémos considerar al ege del prisma ó cilindro como una recta que en cada uno de sus puntos está uniformemente cargada; y por lo mismo su centro de gravedad se hallará (176) en su medio.

198 Propongámonos ahora *hallar el centro de gravedad de la superficie de un cuerpo de revolucion.*

Para conseguirlo supongamos que se tenga una superficie engendrada por la rotacion de BM (fig. 67) al rededor del ege de las x; el elemento de esta superficie, ó la zona elemental descrita por MM′ tendrá por espresion (II. 627) $2\pi z ds = 2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}$;
luego llamando K la superficie entera, tendrémos para su espresion

$$K = S.2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}.$$

La coordenada $z_,$ del centro de gravedad será igual con cero, porque el centro de gravedad debe hallarse sobre el ege de las x, á causa de que siendo círculos todas las secciones, tienen su centro de gravedad en su centro que se halla en el ege de las x; luego solo necesitarémos determinar la $x_,$. Para este efecto, tomando los momentos con relacion al ege de las z, el momento del centro de gravedad estará espresado por $Kx_,$, é igualándolo con la suma de los momentos de los elementos, se tendrá $Kx_, = S.x \times 2\pi z ds$, de donde $x_, = \dfrac{S.2\pi z x ds}{K}$;
y poniendo en vez de K y ds sus valores, y suprimiendo el factor 2π que resulta comun, será $x_, = \dfrac{S.2\pi z x\sqrt{dx^2+dz^2}}{S.2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}} = \dfrac{S.zx\sqrt{dx^2+dz^2}}{S.z\sqrt{dx^2+dz^2}}$ (207).

199 Para hacer aplicacion de estas fórmulas propongámonos *hallar el centro de gravedad del casquete esférico originado por la revolucion del arco BC* (fig. 74) al rededor del ege de las x; y como la ecuacion del arco BC, espresando por r el radio AB, es $z^2=r^2-x^2$,

diferenciando tendrémos $2z\mathrm{d}z=-2x\mathrm{d}x$, de donde $\mathrm{d}z^2=\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{z^2}$.

Por lo cual $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\frac{x^2\mathrm{d}x^2}{z^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{z}\sqrt{z^2+x^2}=\frac{r\mathrm{d}x}{z}$.

Sustituyendo este valor en las integrales de la (ec. 297) se tendrá

$S.zx\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=S.rx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}rx^2+C$, $S.z\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=S.r\mathrm{d}x=rx+C'$.

Determinando las integrales desde $x=\mathrm{AD}=a$, hasta $x=\mathrm{AB}=r$, se obtiene $S.zx\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=\frac{1}{2}r(r^2-a^2)$, $S.z\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}=r(r-a)$; cuyos valores trasforman dicha ecuacion en

$$x_{,}=\tfrac{1}{2}(r+a)=a+\tfrac{1}{2}(r-a)=\mathrm{AD}+\tfrac{1}{2}\mathrm{DB};$$

que nos dice que *el centro de gravedad de la superficie del casquete esférico se halla á la mitad de su altura.* De donde se deduce *que el centro de gravedad de la superficie de la semiesfera se halla en la mitad del radio*; *y el de la esfera entera en el centro de la misma esfera.*

200 Tomemos por segundo egemplo la superficie engendrada por una recta, cuya ecuacion sea $z=ax+b$, y tendrémos $\mathrm{d}s=\mathrm{d}x\sqrt{1+a^2}$; por lo que $S.xz\mathrm{d}s=\sqrt{1+a^2}\times S.xz\mathrm{d}x$, y $S.z\mathrm{d}s=\sqrt{1+a^2}\times S.z\mathrm{d}x$;

luego $x_{,}=\frac{S.xz\mathrm{d}x}{S.z\mathrm{d}x}$ (298).

Pero esta espresion es la misma que la (ec. 283); lo que hace ver que *el centro de gravedad de la area de toda superficie de revolucion engendrada por una recta al rededor del ege de las* x, *tiene la misma coordenada en el sentido de este ege que el centro de gravedad de la superficie generatriz*; de donde se deduce que *el centro de gravedad de la superficie de un trapecio, de un paralelogramo, ó de un triángulo, se halla respectivamente á la misma distancia del orígen que el centro de gravedad de la superficie de un cono truncado, de un cilindro, ó de un cono.*

201 Propongámonos *hallar una fórmula general para encontrar el centro de gravedad de un volúmen cualquiera simétrico con relacion á un ege*, como son las pirámides, los sólidos de revolucion &c.

Si partiendo de un punto cualquiera C (fig. 75) se toma sobre el ege una longitud $\mathrm{CP}=x$, y se corta el sólido por un plano perpendicular á este ege, la seccion que se obtenga que espresarémos por K será conocida en funcion de x, pues que es dada la generacion del sólido; luego se tendrá $K=\mathrm{f}.x$ y $K\mathrm{d}x$ será (II.628) el límite del espacio comprendido entre la superficie que pasa par P y la que pasa por p, ó lo que es lo mismo $K\mathrm{d}x$ será el elemento del volúmen de dicho cuerpo; y si se concibe un plano perpendicular en C al ege CB sobre el cual se halla el centro de gravedad, tendrémos que $Kx\mathrm{d}x$ será el momento de este elemento con relacion á este plano. Por lo cual S.$K\mathrm{d}x$ espresará su volúmen y S.$Kx\mathrm{d}x$ la suma de los momentos de todos sus elementos.

Luego se tendrá $x_{\prime}=\dfrac{\text{S}.Kx\mathrm{d}x}{\text{S}.K\mathrm{d}x}$ (299).

Para hacer uso de esta fórmula es necesario hallar el valor K en funcion de x, segun la naturaleza del cuerpo, é integrar determinando convenientemente las constantes.

202 Si se trata por egemplo de una pirámide ó de un cono (fig. 76), la arista ó el lado AH es una recta; tomemos el orígen en el vértice A, hagamos AB$=b$ y representemos por a la area de la base Hh; con lo que si llamamos x la abscisa AP correspondiente á la seccion MON que espresarémos por K, tendrémos (I. 585 y 604) $a:K::\text{AB}^2:\text{AP}^2::b^2:x^2$,

de donde $K=\dfrac{ax^2}{b^2}$;

sustituyendo este valor en la (ec. 299), dará

$$x_{\prime}=\frac{\text{S}.x^3\mathrm{d}x}{\text{S}.x^2\mathrm{d}x}=\frac{\frac{1}{4}x^4+C}{\frac{1}{3}x^3+C'}=\tfrac{3}{4}\times\frac{x^4+4C}{x^3+3C'}.$$

Si el sólido no es truncado, se tiene $C=0$ y $C'=0$; de donde $x_{\prime}=\frac{3}{4}x$; y haciendo $x=b$, resulta $x_{\prime}=\frac{3}{4}b$:
resultado que ya habíamos obtenido (195) con relacion á la pirámide, y que acabamos de ver es lo mismo para el cono.

203 Propongámonos *hallar la fórmula general para encontrar el centro de gravedad del volúmen de un cuerpo de revolucion.*

En virtud de lo demostrado (II. 628) tenemos que $\pi z^2\mathrm{d}x$ es el elemento del cuerpo, perpendicular al ege de revolucion; por lo que $\pi xz^2\mathrm{d}x$ es su momento con relacion á un plano perpendicular á este ege que pase por el orígen, y $\pi\text{S}.z^2\mathrm{d}x$ es el volúmen entero; luego $\pi\text{S}.xz^2\mathrm{d}x$ será la suma de los momentos de sus elementos; y la (ec. 232) nos dará

$$x_{\prime}=\frac{\text{S}.xz^2\mathrm{d}x}{\text{S}.z^2\mathrm{d}x}\ (300).$$

Esta fórmula se puede deducir como caso particular de la (ec. 299), pues K es aquí un círculo cuyo radio es z, y por lo mismo será $K=\pi z^2$, cuyo valor sustituido en aquella la convierte en esta.

204 Para manifestar el uso de esta fórmula nos propondrémos *hallar el centro de gravedad del volúmen del casquete ó segmento esférico MAm'* (fig. 77); y siendo $z^2=2ax-x^2$ la ecuacion del círculo tomando el orígen en el vértice A, la fórmula anterior nos da

$$x_{,}=\frac{\text{S}.(2ax^2\text{d}x-x^3\text{d}x)}{\text{S}.(2ax\text{d}x-x^2\text{d}x)}=\frac{\frac{2}{3}ax^3-\frac{1}{4}x^4+C}{ax^2-\frac{1}{3}x^3+C'}.$$

Y observando que èl volúmen y los momentos deben ser cero cuando $x=0$, se halla $C=0$, $C'=0$; por lo cual $x_{,}=\frac{8a-3x}{12a-4x}\times x$.

Si se trata de la semiesfera harémos $x=a$, y se tiene $x_{,}=\frac{5}{8}a$; luego *el centro de gravedad de la semiesfera está á los tres octavos del radio partiendo desde el centro.*

Si quisiéramos hallar el de la esfera entera, haríamos $x=2a$, y tendríamos $x_{,}=\frac{8a-6a}{12a-8a}\times 2a=\frac{2a}{4a}\times 2a=a$;

que manifiesta que *el centro de gravedad de la esfera se halla en su centro de volúmen*: lo que por otra parte era bien fácil de prever, pues siendo simétrica respecto de cualquier plano que pase por su centro, el centro de gravedad deberá hallarse en todos los planos que pasen por su centro; luego se hallará en el único punto en que se encuentran, que es el centro de volúmen de la misma esfera.

205 Propongámonos por último *hallar el centro de gravedad del volúmen engendrado por la revolucion del espacio comprendido por dos curvas al rededor del ege de las* x (fig. 69).

Sea $\text{MP}=z$, y $\text{M}'\text{P}=z'$, con lo que el límite del volúmen engendrado por el elemento $\text{M}mm'\text{M}'$ será igual al límite de la diferencia de los volúmenes engendrados por los espacios $\text{PM}mp$ y $\text{PM}'m'p$; y siendo las espresiones de los límites de estos volúmenes (II. 628) $\pi z^2\text{d}x$, $\pi z'^2\text{d}x$, el límite del volúmen engendrado por $\text{MM}'m'm$ será $\pi(z^2-z'^2)\text{d}x$; por consiguiente llamando V el volúmen total, será $V=\pi\text{S}.(z^2-z'^2)\text{d}x$; tomando los momentos con relacion al ege de las z, resultará

$$Vx_{,}=\pi\text{S}.(z^2-z'^2)x\text{d}x,\ \text{que da}\ x_{,}=\frac{\text{S}.(z^2-z'^2)x\text{d}x}{\text{S}.(z^2-z'^2)\text{d}x}\ (301).$$

Cuya ecuacion nos dará el valor de $x_{,}$, siendo inútil el de $z_{,}$ por deberse hallar el centro de gravedad en el ege de las x, en atencion á ser simétrico con relacion á dicho ege.

206 Para hacer uso de esta espresion, propongámonos *hallar el centro de gravedad de un cañon de fusil.*

Para esto debemos tener presente que un cañon de fusil, prescindiendo de la forma ochavada que tiene hácia la recámara, no viene á ser otra cosa que un trozo de cono que en su interior está hueco cilíndricamente. Por lo que si suponemos que el orígen se halla en A (fig. 78), esto es, en la parte donde termina el tornillo de la recámara, tendrémos que la ecuacion de la linea esterior mn será $z=ax+b$, donde la cantidad b espresará la distancia Am á que dicha recta corta al ege de las ordenadas; y la ecuacion de la linea interior rs será $z'=c$, espresando por c la Ar mitad del calibre ó diámetro del ánima del cañon; luego si sustituimos estas espresiones en el denominador de la (ec. 301), será $S.(a^2x^2+2abx+b^2-c^2)dx=(\frac{1}{3}a^2x^3+abx^2+b^2x-c^2x)+C$. Como aquí es cero el volúmen cuando $x=0$, será la constante $C=0$; y si suponemos que la longitud del cañon sea $=e$, y sustituimos este valor por x en la espresion anterior, tendrémos $\frac{1}{3}a^2e^3+abe^2+b^2e-c^2e$.

Sustituyendo los mismos valores en el numerador de la misma ecuacion, resultará $S.(a^2x^2+2abx+b^2-c^2)xdx=\frac{1}{4}a^2x^4+\frac{2}{3}abx^3+\frac{1}{2}b^2x^2-\frac{1}{2}c^2x^2$, sin constante por la misma razon de ántes; y sustituyendo por x su valor e, tendrémos $\frac{1}{4}a^2e^4+\frac{2}{3}abe^3+\frac{1}{2}b^2e^2-\frac{1}{2}c^2e^2$; por lo que dividiendo esta espresion por la anterior, resultará

$$x_{,}=\frac{\frac{1}{4}a^2e^4+\frac{2}{3}abe^3+\frac{1}{2}b^2e^2-\frac{1}{2}c^2e^2}{\frac{1}{3}a^2e^3+abe^2+b^2e-c^2e}=\frac{e(\frac{1}{4}a^2e^2+\frac{2}{3}abe+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}c^2)}{\frac{1}{3}a^2e^2+abe+b^2-c^2}.$$

La superficie esterior de un cañon de fusil se compone en realidad de la de tres trozos de cono; y si se quisiese hallar el centro de gravedad con todo rigor, se averiguaria el de cada trozo, y despues se hallaria el centro de gravedad de estas tres partes. Tambien se podria tener en consideracion el peso del tornillo de la recámara, y que la parte mas próxima á ella es un trozo de pirámide circunscrito al primer cono truncado. En los cañones de artillería, despues de haber hallado el centro de gravedad del cañon por la fórmula (ec. 301) prescindiendo de las partes salientes, se deberia hallar el centro de gravedad de cada parte; y concibiendo en cada centro de gravedad parcial una fuerza igual á su peso, el centro de gravedad de todas estas fuerzas seria el del cañon.

207 El conocimiento de los centros de gravedad puede ser muy útil *para determinar con mucha sencillez las superficies y volúmenes de revolucion*; *á este método se le llama centrobárico*, ó regla de *Guldin*; porque este sabio hizo de él muchas aplicaciones útiles. Para darlo á conocer observarémos que las (ecs. 239 y 284) no se alteran si multiplicamos los dos términos de los segundos miembros por 2π; en cuyo caso tendrémos $z_{,}=\frac{S.2\pi zds}{2\pi s}$ (302), $z_{,}=\frac{S.\pi z^2dx}{2\pi S.zdx}$ (303).

La primera de estas ecuaciones espresa la coordenada, en el sentido del ege de las z, del centro de gravedad de una linea plana; luego quitando el divisor se tendrá $2\pi sz_{,}=S.2\pi zds$. Pero $2\pi z_{,}$ es (I. 505) la circunferencia cuyo radio es $z_{,}$, esto es, la circunferencia que trazaria el centro de gravedad al rededor del ege de las x, si girase la linea plana al rededor de este ege: ademas $S.2\pi zds$ es (II. 627) la espresion de la superficie que engendraria el arco de linea plana s por dicha revolucion. Luego resulta que *la superficie de revolucion engendrada por una linea plana al rededor de un ege, es igual al producto de la longitud de la porcion de linea* cuyo gen-

ratriz por la circunferencia descrita por su centro de gravedad.

208 La (ec. 303) espresa (183) la coordenada, en el sentido del ege de las z, del centro de gravedad de una superficie plana comprendida por una parte de linea plana, las ordenadas de sus estremos y el ege de las abscisas. Y quitando en ella el divisor tendrémos

$$2\pi z_{,}\mathrm{S}.z\mathrm{d}x = \mathrm{S}.\pi z^2\mathrm{d}x.$$

Pero si se hace girar la linea plana al rededor del ege de las x, la superficie cuya espresion es $\mathrm{S}.z\mathrm{d}x$, engendrará un cuerpo cuyo volúmen será (II. 628) $\mathrm{S}.\pi z^2\mathrm{d}x$;
y el centro de gravedad de la superficie describirá una circunf.ª$=2\pi z_{,}$. Luego *el cuerpo que origina una superficie terminada por una linea plana, y las coordenadas de sus estremos girando al rededor de su ege, tiene por volúmen el producto de la superficie generatriz por la circunferencia que describe su centro de gravedad.*

209 Esta última proposicion se verifica aun, cuando la *superficie generatriz está comprendida entre dos curvas, ó entre dos ramas de una misma curva.*

En efecto, multiplicando por 2π la (ec. 293) y poniendo en vez de K su valor (ec. 291), da $2\pi z_{,}\mathrm{S}.(z-z')\mathrm{d}x = \mathrm{S}.\pi(z^2-z'^2)\mathrm{d}x$,
que conduce á la misma consecuencia; pues que $\mathrm{S}.(z-z')\mathrm{d}x$ es la superficie generatriz, y $\mathrm{S}.\pi(z^2-z'^2)\mathrm{d}x$ es la espresion del volúmen engendrado por la revolucion de esta superficie.

210 Para hacer aplicacion de estos dos teoremas, nos propondrémos hallar 1.° la *superficie del círculo*, que se puede considerar como originada por el radio al rededor de su centro; la linea generatriz es aquí el radio, cuyo centro de gravedad se halla en su medio; la linea descrita por este centro es la circunferencia cuyo radio es $\frac{1}{2}r$;
luego πr será (I. 505) la circunferencia trazada por el centro de gravedad de la linea generatriz r; luego si multiplicamos por la misma linea generatriz r, tendrémos que πr^2 será la superficie del círculo trazado por r; lo mismo que ya sabíamos (I. 522 cor. 1.°).

211 Si la circunferencia FBDE (fig. 79) gira al rededor del ege AX, haciendo el radio $\mathrm{MD}=r$, y la distancia MH del centro al ege $=b$, se tiene para la superficie que describe,

$$\text{circunf.}r\times\text{circunf.}b = 2\pi r\times 2\pi b = 4\pi^2 rb.$$

Y el volúmen engendrado por la superficie del círculo, es
círculo originado por MD×circunf.MH$=\pi r^2\times 2\pi b = 2\pi^2 r^2 b$.
Si $r=b$, es decir, si el círculo gira al rededor de su tangente en F, la area descrita será $=4\pi^2 r^2=(2\pi r)^2=$ *al cuadrado que tiene por lado la circunferencia originada por* r; y el volúmen $=2\pi^2 r^3$.

212 Del mismo modo, si el rectángulo ABCD gira al rededor del lado AB (fig. 66), engendrará un cilindro. Sea $\mathrm{DC}=h$, $\mathrm{CB}=r$; el lado DC tiene su centro de gravedad en el medio M, que describe una circunferencia cuyo radio es r; luego la superficie engendrada, ó la superficie del cilindro $=2\pi rh$.

Como el rectángulo tiene su centro de gravedad en la interseccion G de las dos diagonales (190), el volúmen del cilindro será

$$DC \times CB \times \text{circunf.} \tfrac{1}{2}CB = \pi hr^2.$$

213 En fin, el triángulo rectángulo ABH (fig. 76) girando al rededor del lado AB engendra un cono; hagamos $AH=a$, $BH=r$ y $AB=h$. Como el centro de gravedad de AH está en el medio F, describe una circunferencia cuyo radio es $QF=\frac{1}{2}BH=\frac{1}{2}r$;
luego la superficie del cono es πra.
Sea I el medio de BH; tomemos sobre la recta AI una parte $AD=\frac{2}{3}AI$, y tendrémos que D será el centro de gravedad del triángulo ABH; y el volúmen del cono será $\text{circunf.}DE \times \text{triáng.}ABH = \text{circunf.}DE \times BH \times \frac{1}{2}AB$;
pero $DE=\frac{2}{3}BI=\frac{1}{3}BH$, luego $\text{circunf.}DE=\frac{2}{3}\pi r$;
y el volúmen del cono $=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

214 Hemos hallado estos resultados que ya sabíamos por la Geometría elemental con el objeto de que se perciba bien el método centrobárico.

De todo esto resulta *que se podrá hallar la superficie engendrada por la revolucion de una curva dada, ó el volúmen engendrado por la de su superficie, cuando se conozca el centro de gravedad de la curva, ó area generatriz*; lo que será fácil de hallar por las fórmulas precedentes, siempre que la curva esté sujeta á una ley dada por una ecuacion. Si esta curva no hiciere una revolucion entera sobre un ege, seria fácil de hallar la superficie ó volúmen originado por esta proporcion: *la superficie ó el volúmen engendrado por una revolucion entera es á una circunferencia cualquiera, como la superficie ó volúmen originado por una porcion de revolucion, es al arco de circunferencia que le sirve de medida angular.* Luego *la area ó volúmen engendrado por una revolucion entera, ó por una porcion de revolucion, es igual al producto de la curva ó area generatriz por el camino que anda el centro de gravedad.*

De las máquinas.

215 En general se llaman *máquinas* á los medios que se emplean para hacer que las fuerzas obren sobre puntos que se hallan fuera de su direccion. La fuerza que se aplica á la máquina se llama *potencia*, y el cuerpo que la potencia debe poner en equilibrio se llama la *resistencia*.

Aunque todas las máquinas se pueden reducir á tres, que son las *cuerdas*, la *palanca* y el *plano inclinado*, se suelen considerar como máquinas simples las siete siguientes: las *cuerdas ó máquina funicular*, la *palanca*, la *polea ó garrucha*, el *torno*, el *plano inclinado*, la *rosca* y la *cuña*; de las cuales tratarémos separadamente.

De las cuerdas.

216 Una cuerda ó maroma de cuyos estremos tiran dos fuerzas P y Q (fig. 80) no se puede considerar como una verdadera máquina;

pues que no muda ni la direccion de P ni la de Q. En este caso, *si las fuerzas son iguales, la tension de la cuerda se mide por una de ellas*; porque subsistiendo el equilibrio, se puede considerar el punto A, medio de PQ, como un punto fijo, y borrar la linea que se estiende desde A hácia Q: en cuyo caso la fuerza P obrando sola sobre A, medirá la tension de la cuerda.

217 Cuando Q sea mayor que P, una parte de Q igual con P se empleará en tener tirante la cuerda, y el esceso de Q sobre P la llevará en el sentido de P hácia Q: en cuyo caso la *tension de la cuerda se medirá por la menor fuerza* P.

218 Ahora, si la cuerda ABC (fig. 81) está fija á un cuerpo R por un estremo A y á un punto fijo C por el otro estremo, y suponemos que al mismo tiempo una fuerza dada P se aplique al punto B de esta cuerda, segun una direccion BP tambien dada, esta fuerza obrará entónces sobre el punto A que se halla fuera de su direccion segun la direccion AB; luego la cuerda ABC por medio del punto fijo C viene á ser una verdadera máquina. En todo lo que vamos ahora á esponer *considerarémos las cuerdas sin pesantez*, *reducidas á sus eges*, *que tengan una perfecta flexibilidad*, y *que sean inestensibles*, dejando para mas adelante el modificar los resultados que obtengamos, atendiendo á todas estas circunstancias.

En este supuesto, para conocer la fuerza que obra segun AB sobre el cuerpo á que está fija la cuerda en A, se prolongarán las direcciones CB y AB; despues se descompondrá la fuerza P segun las prolongaciones BC′ y BA′; y se tendrá que la componente BE que obra segun BC′, estará destruida (21 cor. 1.°) por la resistencia del punto fijo C que se halla sobre su direccion; y la otra BF que obra segun BA′ y que se puede trasportar al punto A de su direccion (20), es la fuerza pedida. Pero espresando por P' esta fuerza, y comparándola con la resultante P se tendrá (29 cor.) $P':P::\text{sen.C'BP}:\text{sen.C'BA'}$;

de donde resulta $P'=\dfrac{P\text{sen.C'BP}}{\text{sen.C'BA'}}=(\text{I. }637)\dfrac{P\text{sen.CBP}}{\text{sen.CBA}}$.

219 Las condiciones de equilibrio que existen entre tres cuerdas sujetas por un nudo, son las mismas que las que existen entre tres fuerzas que obran sobre un punto material. Es necesario (19) que *una cualquiera de estas fuerzas sea igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos*; y como la resultante de dos se hallará en el mismo plano que las componentes (22), resulta que las tres fuerzas deben hallarse en un mismo plano; y entónces habrá equilibrio (29 cor.) si se tiene (fig. 82)

$$P:Q:R::\text{sen.}p:\text{sen.}q:\text{sen.}r.$$

220 Esta condicion no *basta si las cuerdas están reunidas por un anillo ó un nudo escurridizo*. En efecto, considerando á P y R como puntos fijos, si la fuerza Q (fig. 83) tira de la cuerda PCR por medio de un anillo, el punto C describirá una elipse cuyos focus serán P y R; y como el plano de esta elipse no está sujeto sino á pasar por los puntos P y R

debe describir, al girar al rededor de PR, un elipsoide cuyo ege mayor AL será igual con PC+CR.

El punto C estará siempre situado sobre este elipsoide, ó lo que viene á ser lo mismo, sobre el arco de una elipse móvil al rededor de PR; y como en el caso de equilibrio se tendrá

$$P:R::\text{sen.QCR}:\text{sen.QCP}::\text{sen.RCN}:\text{sen.PCN},$$

resulta que por ser fijos los puntos P y R, ambos opondrán igual resistencia; por ló que serán iguales las potencias P y R; y por consiguiente lo serán tambien los ángulos RCN y NCP; de donde se infiere (II. 258) que *la direccion QCN de la potencia* Q *debe ser normal á la elipse.*

221 Una *máquina funicular* es un sistema de cuerdas que se hacen equilibrio por medio de varios anillos ó nudos escurridizos.

Cuando hay muchas fuerzas P, P', P'', P''', P^{IV}, *&c.* (fig. 84) reunidas por un mismo nudo C, se pueden reducir á tres, sustituyendo por egemplo, á las dos fuerzas P, P' su resultante Q; despues combinando esta resultante Q con P'', tendríamos que las tres fuerzas P, P', P'' equivaldrian á la fuerza Q', y quedaria reducido el sistema á las tres fuerzas Q', P''', P^{IV}; y como lo mismo haríamos si hubiese mas fuerzas, resulta *que siempre podemos considerar que en un anillo obren solo tres fuerzas.*

222 *Cuando muchas fuerzas* P, P′, P″, P‴, P^{IV}, &c. (fig. 85) *están reunidas de tres en tres por nudos fijos* A, B, C, *&c. se puede referir el equilibrio de estas fuerzas al de un sistema sujeto al rededor de un solo punto.* Porque sea R la resultante de las fuerzas P y P'; como ella debe estar destruida por la tercera fuerza que obra segun AB, será necesario (19) que esta resultante se halle sobre la prolongacion de AB; y como una fuerza se puede aplicar (20) á cualquier punto de su direccion, podrémos concebir que R obre en B: en este caso se podrá descomponer R en dos fuerzas p, p' iguales y paralelas á P y á P'; y el efecto será el mismo que si las fuerzas P y P' se hubiesen trasladado paralelamente á ellas mismas para aplicarse al punto B. Trasportando del mismo modo al punto C las fuerzas P, P', P'', que se suponen aplicadas en B, todas las fuerzas se podrán considerar como aplicadas á dicho punto C; luego las condiciones de equilibrio serán (ecs. 25 y 26)

$$P\cos.\alpha+P'\cos.\alpha'+P''\cos.\alpha''+\&c.=0,\quad P\cos.\beta+P'\cos.\beta'+P''\cos.\beta''+\&c.=0.$$

Para tener la relacion de las tensiones estremas P y P^{V}, sean t y t' las tensiones egercidas segun AB y BC; y espresemos por a el ángulo PAP′: por a' el ABP″: por a'' el BCP‴: por b el P′AB: por b' el P″BC: y por b'' el P‴CP^{V}; y (219) tendrémos

$$P:t::\text{sen.}b:\text{sen.}a;\quad t:t'::\text{sen.}b':\text{sen.}a';\quad t':P^{IV}::\text{sen.}b'':\text{sen.}a''.$$

Multiplicando estas proporciones y suprimiendo los términos comunes, resulta $P:P^{IV}::\text{sen.}b\times\text{sen.}b'\times\text{sen.}b'':\text{sen.}a\times\text{sen.}a'\times\text{sen.}a''$.

Si las fuerzas P', P'', P''' (fig. 86) son paralelas, se tiene en este caso

$$b+a'=\pi,\quad b'+a''=\pi;$$

y como los ángulos que son el uno suplemento del otro, tienen un mismo seno, será $\text{sen.}b=\text{sen.}a'$, $\text{sen.}b'=\text{sen.}a''$;

con lo cual la proporcion precedente se reducirá á $P:P^{V}::\text{sen}.b'':\text{sen}.a$.

223 *Cuando* P$'$, P$''$ y P$'''$ *son pesos*, *las fuerzas se hallan en un mismo plano vertical*; porque en primer lugar para equilibrarse las tres fuerzas AP, AP$'$ y t, necesitan ser la una igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos (19); luego estará en el mismo plano que dicha resultante; y como esta resultante se ha de hallar en el plano de las componentes (22), resulta que las tres fuerzas deben hallarse en un mismo plano; y siendo vertical la recta AP$'$, el plano de las fuerzas P, P' y t es vertical. Del mismo modo, el plano de las fuerzas t, P'' y t' será vertical; pero t, que no es vertical, no puede estar á un mismo tiempo en dos planos verticales, sin que estos planos se confundan; luego se verifica la proposicion.

224 Para que haya equilibrio, las fuerzas estremas P y P^{IV} deben destruir á la resultante de todas las otras; para lo cual será necesario que esta resultante sea directamente opuesta á la direccion de la de P y de P^{IV}; y por consiguiente que *pase por el punto de concurso* G *de estas dos fuerzas*; luego el punto G en que se encuentran las direcciones de las fuerzas estremas, es un punto de la resultante de todas las fuerzas del sistema; y como esta resultante debe ser vertical, pues que es paralela á las fuerzas P', P'', P''', para determinar su direccion bastará tirar por el punto G la vertical GH.

225 A la misma conclusion hubiéramos llegado suponiendo que hubiese mayor número de pesos; luego si suponemos que se tiene una cuerda ó una cadena fija por sus estremos, podrémos concebir en cada punto una fuerza igual al peso que tenga, y siempre se verificará que la resultante de todas estas fuerzas pasará por el punto de concurso de la direccion de las que están en los puntos fijos; y como en este caso por la ley de continuidad de la cuerda ó cadena, todos los puntos de aplicacion están unos á continuacion de otros, formarán una curva, y las direcciones de las fuerzas sostenidas por los puntos fijos serán las tangentes PG y QG (fig. 87) á la curva en los puntos fijos, tendrémos que la resultante de todas estas fuerzas que componen el peso de la cuerda ó cadena pasará por G; y como ha de ser vertical, si á dicho peso lo espresamos por R, tendrémos $P:Q:R::\text{sen.LGQ}:\text{sen.PGL}:\text{sen.PGQ}$.

De todo lo dicho resulta que *una cuerda pesada no se puede estender en linea recta*, *sino está colocada en direccion vertical*; porque el peso de la cuerda se puede considerar como una fuerza aplicada en su centro de gravedad; pero si PRQ (fig. 87) es el cordon sostenido por las dos fuerzas P y Q, y espresamos por R su peso se tiene (§ 219)

$$P:R::\text{sen.QGL}:\text{sen.PGQ}.$$

Pero miéntras mas tirante esté la cuerda, es mayor el ángulo PGQ y mas se acerca tambien QGL al ángulo recto; de modo que para que la cuerda esté estendida horizontalmente en linea recta, seria necesario que las dos lineas PG y QG no formasen sino una sola recta: en cuyo caso sen. PGQ$=$sen.$\pi=0$, y resultaria $P=R\times\frac{1}{0}=\infty$.

Luego por *pequeña que sea la fuerza* R, *con tal que no sea nula*, *hará encurvar á la cuerda*, como lo confirma diariamente la esperiencia.

226 Propongámonos ahora *encontrar la ecuacion de la curva AMBL* (fig. 88) *formada por una cuerda ó una cadena fija en sus dos estremos A y L, y solicitada en todos sus puntos por la gravedad*; á cuya curva se le llama *catenaria ó curva funicular*. Tomemos el orígen en A: sea AX el ege de las abscisas x: y supongamos que las ordenadas z sean verticales; y respecto de un punto cualquiera M será AP$=x$, PM$=z$, y AM$=s$.

Las tensiones egercidas en A y en M segun las dos tangentes AD y MD, dan (§ 225) *peso* de AM : *tension* en A : : sen.ADM : sen.IDM $=$ sen.IDF.

Ahora debemos observar que la tension en A es constante, y que el peso del arco AM es proporcional á su longitud, pues que suponemos homogenea la cadena ó cuerda; luego la primera relacion es igual con $\frac{s}{a}$, espresando por s la longitud del arco AM, y siendo a una constante indeterminada, cuyo valor depende de la materia de que está formada la cuerda ó cadena. Ademas

$$\text{sen.IDF}=\text{sen.PMF}=\text{cos.PFM}=\text{(nota del § 179)}\ \frac{dx}{ds};$$

y del mismo modo $\text{cos.PMF}=\text{cos.IDF}=\frac{dz}{ds}$;

y como el ángulo que forme la MF con el ege de las x será complemento del PMF, tendrá por seno lo que este por coseno; y espresando por θ el ángulo IAD, se tiene $\text{sen.ADM}=\text{sen.ADF}=\text{sen.(IDF}-\text{IDA)}=$ $\text{sen.IDF}\times\text{cos.IDA}-\text{cos.IDF}\times\text{sen.IDA}=\text{sen.IDF}\times\text{sen.IAD}-$

$$\text{cos.IDF}\times\text{cos.IAD}=\frac{dx}{ds}\times\text{sen.}\theta-\frac{dz}{ds}\times\text{cos.}\theta=\frac{dx\times\text{sen.}\theta-dz\times\text{cos.}\theta}{ds}.$$

Luego se tiene $\frac{s}{a}=\frac{\text{sen.ADM}}{\text{sen.IDF}}=\frac{dx\times\text{sen.}\theta-dz\times\text{cos.}\theta}{dx}$;

de donde se saca $sdx=adx\times\text{sen.}\theta-adz\times\text{cos.}\theta$ (304), que es la *ecuacion diferencial de la catenaria*.

Para determinar una de las variables x, z y s, se diferencia; y tomando dx constante se obtiene $dsdx=-a\text{cos.}\theta d^2z$, que mudando los signos y haciendo $b=a\text{cos.}\theta$, resulta $-dsdx=bd^2z$.

Multiplicando por dz y poniendo en vez de ds su valor $\sqrt{dx^2+dz^2}$, que se pasará al denominador del otro miembro, se obtiene

$$-dxdz=\frac{bdzd^2z}{\sqrt{dx^2+dz^2}};$$

y como en esta ecuacion es constante dx, la integral del segun-miembro es (II. 525) $b\sqrt{dx^2+dz^2}$, y la del primero es $-zdx$; y añadiendo á esta última por constante Cdx (á causa de la homogeneidad), se tiene $(C-z)dx=b\sqrt{dx^2+dz^2}$ (305), ó $C-z=b\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$.

{ Pero siendo $\frac{dz}{dx}$ la tangente (nota del § 179) del ángulo que forma con el ege de las x la tangente á la curva en cada punto, si se hace $z=0$, se deberá tener $\frac{dz}{dx}=\text{tang}.\theta$;

esta condicion reduce la ecuacion anterior á

$$C=b\sqrt{1+\tan.^2\theta}=b\sec.\theta=a\cos.\theta\times\frac{1}{\cos.\theta}=a;$$

sustituyendo este valor en la (ec. 305), se convertirá en

$$(a-z)dx=b\sqrt{dx^2+dz^2},$$

que elevando al cuadrado y despejando dx, da $dx=\frac{bdz}{\sqrt{(a-z)^2-b^2}}$ (306).

{ Para integrar esta ecuacion harémos $a-z=u$, que da $-dz=du$, y

$$dx=\frac{-bdu}{\sqrt{u^2-b^2}};$$

y haciendo ahora $\sqrt{u^2-b^2}=u-t$, será $t=u-\sqrt{u^2-b^2}$,

y $dt=du-\frac{udu}{\sqrt{u^2-b^2}}=\frac{du\sqrt{u^2-b^2}-udu}{\sqrt{u^2-b^2}}$, que da $du=\frac{dt\sqrt{u^2-b^2}}{\sqrt{u^2-b^2}-u}$;

y sustituyendo este valor en el de dx, y simplificando será $dx=b\times\frac{dt}{t}$, que integrando da

$$x=b\log.t+C=b\log.(u-\sqrt{u^2-b^2})+C=b\log.(a-z-\sqrt{(a-z)^2-b^2})+C.$$

{ Para determinar las tres constantes C, a y b, que comprende esta ecuacion, observarémos primero que $x=0$ debe dar $z=0$;

luego $C=b\log.(a-\sqrt{a^2-b^2})$;

sustituyendo por C este valor y teniendo presente lo espuesto (I. 304), resulta $x=b\log.\frac{a-z-\sqrt{(a-z)^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ (307).

{ Ahora la (ec. 304) da $s=a\text{sen}.\theta-a\frac{dz}{dx}\cos.\theta=a\text{sen}.\theta-b\frac{dz}{dx}$;

que sustituyendo en vez de $\frac{dz}{dx}$ su valor $\frac{\sqrt{(a-z)^2-b^2}}{b}$ sacado de la (ec. 306), tendrémos $s=a\text{sen.}\theta-\sqrt{(a-z)^2-b^2}$ (308); ecuacion que da á conocer que la catenaria es una curva rectificable.

Cuando al hacer alguna aplicacion se quiera tener esta ecuacion en cantidades conocidas, se sustituirá en ella en vez de s la longitud que tenga el arco AMC, que es la porcion de cadena ó cuerda que fijamos en los estremos A y C, y por z el valor KC, esto es, la distancia del punto fijo C á la horizontal ó ege de abscisas AX; con lo cual tendrémos una ecuacion por cuyo medio podrémos determinar la a ó la θ; y por último sustituyendo en la (ec. 307) por x y por z los valores AK y KC que tambien son conocidos, entónces podrémos determinar con su auxilio la otra de las cantidades a ó θ; con lo cual quedan determinadas todas las constantes de estas ecuaciones: pues $b=a\cos.\theta$, y la (ec. 307) será la de la catenaria; la cual convendrá no solo al arco AMC, sino á todo el curso de esta curva considerada prolongada indefinidamente tanto por el estremo A como hácia el otro estremo CBC′L.

227 La (ec. 306) da $\frac{dz}{dx}=\frac{\sqrt{(a-z)^2-b^2}}{b}$; igualando este valor con cero, resulta $z=a-b$; y como si diferenciamos y dividimos por dx, resulta el segundo coeficiente diferencial $\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{a-z}{b\sqrt{(a-z)^2-b^2}}\times\frac{dz}{dx}$, que sustituyendo por $\frac{dz}{dx}$ su valor y simplificando se tiene $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{a-z}{2b^2}$; y poniendo en vez de z su valor $a-b$ resulta $\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{b}$; cuyo valor siendo negativo nos da á conocer (II. 564) que el valor de $z=a-b=$BH es un *máximo*; luego el punto B, determinado por este valor, es el mas bajo de la curva.

Sustituyendo $a-b$ en vez de z en la (ec. 307), tendrémos la abscisa correspondiente á este punto mas bajo $\text{AH}=x=b\log.\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}}$, y la (ec. 308) da en este mismo caso $\text{AMCB}=s=a\text{sen.}\theta$.

Puesto que el primer término de la (ec. 308) espresa el arco AMCB, resulta que cuando se considere un arco AMCBC′ mayor que él, se deberá tomar el radical con el signo $+$: y cuando un arco menor, como en el AMC que fue el que nos sirvió para hallar dicha ecuacion, se deberá tomar el radical con el signo $-$, y lo mismo se deberá considerar

En la (ec. 307); de donde resulta que para dos puntos C y C′ colocados de una y otra parte de B, de modo que CK=C′K′, se tiene BC=BC′, y KH=K′H; luego *la catenaria es simétrica respecto de la máxima ordenada BH.*

228 Si trasladamos el orígen al punto B, y tomamos la BH por ege de abscisas, obtendrémos una ecuacion mas sencilla. En efecto, si espresamos por x' la nueva abscisa Bp: por z' la nueva ordenada Mp: y por s' el nuevo arco BM, tendrémos

$$x = AP = AH - PH = AH - Mp = b\log.\frac{b}{a-\sqrt{a^2-b^2}} - z';$$

y tendrémos por consiguiente $dx = -dz'$;
la antigua ordenada z será $z = MP = Hp = HB - Bp = a - b - x'$;
y dará $dz = -dx'$, y $s = AM = AMB - BM = a\,\text{sen}.\theta - s'$;
luego si en vez de x, z y s sustituimos estos valores en las (ecs. 306, 307 y 308) y tomamos el radical con el signo +, se convertirán despues de hechas todas las simplificaciones, en

$$dz' = \frac{b\,dx'}{\sqrt{2bx'+x'^2}} \quad (309), \quad z' = b\log.\frac{x'+b-\sqrt{2bx'+x'^2}}{b} \quad (310),$$

$$s' = \sqrt{2bx'+x'^2} \text{ ó } s'^2 = 2bx'+x'^2 \quad (311).$$

{ Una de las propiedades mas notables de la catenaria es, que de *todas las curvas de la misma longitud y fijas por sus estremos A y L, es la que tiene su centro de gravedad mas bajo.* }

De la palanca, balanza y romana.

229 La *palanca* es una barra inflexible ACB (figs. 89 y 90) recta ó curva, que se mueve al rededor de un punto fijo C sobre que descansa, y que por lo mismo se llama *punto de apoyo* ó simplemente *apoyo.* Cuando la palanca es recta y las fuerzas que se le aplican son paralelas, las partes de la misma palanca comprendidas entre el punto de apoyo y el punto de aplicacion de las fuerzas, se llaman *brazos de palanca* de estas fuerzas; cuando falta alguna de estas circunstancias, se llama en general *brazo de palanca de una fuerza á la perpendicular tirada á su direccion desde el punto de apoyo.* Así es, que en la palanca curva ACB (fig. 90), el brazo de palanca en que obra la fuerza P es Cp que espresarémos por p, y el de la resistencia R es Cr que espresarémos por r. En la palanca recta, los verdaderos brazos de palanca son las Cp y Cr (fig. 89); pero si la fuerza y la resistencia obran en direcciones paralelas, tendrémos que las Cp y Cr formarán una sola recta, y se tendrá Cp:Cr::CB:CA; por lo que resulta que en *este caso se pueden considerar estas partes BC y CA como los brazos de palanca en que obran la fuerza* P *y la resistencia* R.

230 Entendido esto observarémos que para que haya equilibrio en

la palanca, se necesita ante todas cosas que la potencia y la resistencia se hallen en el mismo plano que el punto fijo C; y cuando se verifica esto, basta para el equilibrio que la suma de los *momentos de la fuerza y la resistencia tomados con relacion al punto de apoyo sean iguales.*

En efecto, cuando las fuerzas no son paralelas la (ec. 87) nos da con relacion á la (fig. 90) $Pp=Rr$,
y la (ec. 76) nos da con relacion á la (fig. 91) $Pp=Rr$ (312).
De ambas se saca $P:R::r:p$,
que nos dice que *la potencia debe hallarse con la resistencia en todos los casos en razon inversa de los brazos de palanca.*

231 Segun la colocacion del punto de apoyo con relacion á la potencia y resistencia, se dice *que hay tres especies de palanca*; cuando *se halla entre la potencia y la resistencia es de la primera*, como representan las (figs. 89 y 90); cuando *la resistencia se halla entre el punto de apoyo y la potencia*, *resulta la de segunda* como la (fig. 91); y cuando *la potencia se halla entre el apoyo y la resistencia*, *resulta la de tercera* como espresa la (fig. 92).

En la de primera especie la *potencia puede ser igual*, *mayor*, *ó menor que la resistencia*, *segun sea su distancia al punto de apoyo igual*, *menor ó mayor que la de la resistencia.* En la de segunda *siempre está favorecida la potencia*, porque CD>CB (fig. 91); y en la de tercera *siempre está perjudicada* por ser DC<CB (fig. 92) (*).

232 *La carga que sufre el punto de apoyo*, *y á la que él debe resistir*, *está espresada por la resultante de las dos fuerzas.* Si estas son paralelas, esta carga estará espresada por su suma $P+R$, cuando obren en un mismo sentido como en la palanca de primera especie (fig. 89); por $R-P$ en la de segunda (fig. 91); y por $P-R$ en la de tercera (fig. 92).

233 Tambien *se puede atender al peso de la palanca*, *considerándole como una fuerza vertical aplicada á su centro de gravedad.* Para esto supongamos que sean P y R la potencia y la resistencia (fig. 93), y G el centro de gravedad de la palanca AB, cuyo peso espresarémos por K; y en virtud de la (ec. 83) será $R\times AC=P\times CB+K\times CG$ (313);
por cuyo medio determinarémos la potencia ó resistencia segun necesitemos, cuando se conozca lo demas. La carga del apoyo en este caso es $P+K+R$.

Si la potencia obrase en direccion opuesta á la resistencia, seria necesario atender al sentido en que las fuerzas intentan hacer girar la palanca; y en virtud de lo demostrado (96), la ecuacion de los momentos seria (fig. 94) $CA\times R+CG\times K=CB\times P$ (314),
y la carga del punto de apoyo seria $R+K-P$.

234 Supongamos que la palanca CB sea homogenea y de igual grueso en toda su longitud, y representemos por m el peso de una porcion determinada de esta palanca que tomarémos por unidad; con lo cual ten-

(*) *En mi Compendio de Mecánica Práctica se dan algunos detalles útiles en las artes sobre el uso de esta palanca.*

drémos que siendo x la longitud de la palanca, su peso K será mx, y se deberá considerar concentrado en el medio G de la palanca; de manera que espresando la CA por a, la (ec. 314) se convertirá en

$$aR+\tfrac{1}{2}x\times mx=Px, \text{ que da } P=\frac{aR}{x}+\tfrac{1}{2}mx \quad (315).$$

Así, habiendo tomado x arbitrariamente, esta fórmula dará el valor de P; pero si se pregunta cuál es entre todos los valores de x, el que se debe verificar para que la potencia P sea la menor posible, será necesario considerar á P como una funcion de x; y por el método de *máximos y mínimos* (II. 564) se halla que cuando $x=\sqrt{\dfrac{2aR}{m}}$, la potencia P es la menor posible; y sustituyendo este valor en la (ec. 315), resulta despues de simplificar $P=\sqrt{2aRm}$.

Cuando á una palanca se aplican muchas fuerzas, es necesario para el equilibrio que su resultante pase por el punto de apoyo; luego si se toma este punto por centro de los momentos, el momento de la resultante será cero, y la (ec. 94) nos dará $Pp+P'p'+P''p''-P'''p'''-P^{\text{IV}}p^{\text{IV}}-\&c.=0$; que nos dice que para el equilibrio en la palanca *la suma de los momentos de las fuerzas que intentan hacer girar la palanca en un sentido, debe ser igual á la suma de los momentos de las que intentan hacer girar en el sentido opuesto.*

En la construccion de las máquinas entran con mucha frecuencia palancas angulares, esto es, palancas cuyos brazos unidos en el punto de apoyo, son dos lineas rectas diferentes como representa la (fig. 95). En este caso, los verdaderos brazos de la palanca son las Cr, Cp, y siempre se verifica la misma condicion de equilibrio (230).

Terminarémos este punto resolviendo una cuestion que suele ocurrir en la práctica de la maquinaria, y se reduce á que *hallándose en equilibrio una potencia con una resistencia cualquiera, se quiere averiguar la magnitud que deberá tener otra potencia que cause el mismo efecto, pero que tenga su punto de aplicacion en otro punto.* Por egemplo, supongamos que la potencia P se equilibre con el peso R por medio de la palanca angular CBL (fig. 96), y que se quiera determinar la magnitud de la potencia Q, que aplicada en A se debe equilibrar con el mismo peso R.

Para conseguirlo observarémos que por el supuesto de equilibrarse la potencia P con R, se tendrá $R\times \text{BC}=P\times \text{LB}$;
y como para que se verifique el equilibrio de Q con R se deberá verificar $R\times \text{BC}=Q\times \text{AB}$,
tendrémos que igualando los segundos miembros de estas ecuaciones, resultará $P\times \text{LB}=Q\times \text{AB}$, que da $Q=\dfrac{P\times \text{LB}}{\text{AB}}$.

235 La *balanza* es una *máquina* que sirve para pesar las mercancías; se compone de una palanca recta AB (fig. 97) llamada la *cruz*, en cuyos estremos cuelgan por medio de cordones ó cadenas dos platillos C y D; en uno de estos se pone el género que se ha de pesar, y en el otro el peso conocido con que se quiere equilibrar el del género. En medio de la palanca está el *fiel*, que es un ege *xz* perpendicular á su longitud, cuyos estremos entran y se mueven con libertad en los ojos que hay en los dos brazos de la *alcoba* EM que sostiene la máquina. La figura de la parte inferior del ege es semejante al filo de un cuchillo mas ó ménos romo, segun se destine la balanza para pesar géneros en grande ó en pequeño. El corte de dichos cuchillos hace que la palanca descanse en los ojos de la alcoba, quedando con toda libertad para inclinarse á uno y otro lado; y el fiel que está dentro de la alcoba, cuando hay equilibrio, manifiesta que está la palanca horizontal. Este fiel ó lengüeta con su desvío á la derecha ó á la izquierda de la alcoba en su estremo superior, manifiesta no solamente hácia qué lado se ha inclinado la cruz, sino que tambien da á conocer las mas mínimas inclinaciones que puede padecer.

En virtud de esta descripcion, notamos que la balanza es una palanca de la primera especie; y para que las balanzas sean exactas, se necesita ante todas cosas que los *brazos EA, EB sean de todo punto iguales*: sin este requisito de ninguna manera se deben admitir. Ademas de esta circunstancia, se necesita para que la balanza sea exacta, que sin peso ninguno en los platillos se mantenga la cruz horizontal; si no lo estuviese, se podrá corregir este defecto, colgando pesos pequeños en alguno de los platillos hasta que se consiga que la lengüeta caiga perfectamente en medio de la alcoba: en cuyo caso estos pesos pequeños se deben considerar como parte de las mismas balanzas, y deben quedar fijos en ellas; pero de ningun modo se considerarán como parte de lo que se ha de pesar.

Debemos advertir que cuando los brazos AE, EB de la balanza no son iguales, no se puede usar de pesos para conseguir el equilibrio; pues aunque con su auxilio se consiga poner la cruz en situacion horizontal, no por eso podrémos hacer un buen uso de ellas; porque en este caso el peso que se ponga en el platillo correspondiente al brazo mas largo se equilibrará con uno mayor que se ponga en el otro platillo.

236 El medio mas sencillo de reconocer si una balanza es exacta, es el de equilibrar en sus platillos dos pesos cualesquiera; y si mudando cada peso al platillo del otro subsisten todavía en equilibrio, se tendrá una completa seguridad de que la balanza es exacta; y si no se equilibran, no lo será. Sin embargo se puede hacer uso de una balanza, aunque no sea exacta, para pesar con exactitud por un medio muy simple. Para esplicarlo supongamos que en el platillo D se coloque un cuerpo, cuyo peso es desconocido y que señalarémos con x; coloquemos en el otro platillo C un peso conocido p que se equilibre con el peso x; de esto no podrémos concluir que $p=x$, si por otra parte no estamos seguros de la exactitud de la balanza; pero si se quita del platillo D el

cuerpo que se quiere pesar, y se remplaza por otro peso conocido p' que se equilibre con el peso p que haya permanecido en el platillo C, se tendrá rigorosamente $x=p'$; porque equilibrándose los dos pesos x y p' en las mismas circunstancias con un tercer peso p, deben ser iguales entre sí, aunque ni el peso p' ni el x sean iguales con el peso p.

237 Tambien se puede averiguar el verdadero peso por medio de una balanza inexacta del modo siguiente. Se pone el cuerpo en el platillo D, y se equilibra con un peso P colocado en el otro platillo; despues se pone el mismo cuerpo en el platillo C y se ve con qué peso colocado en el otro platillo se equilibra, y lo espresarémos por P'; se multiplicarán estos dos pesos P y P', de su producto PP' se estraerá la raiz cuadrada y se tendrá el peso x del cuerpo propuesto. En efecto, en el primer caso de equilibrio se tiene (ec. 312) $x\times AE=P\times EB$;
y en el segundo $x\times EB=P'\times AE$;
multiplicando estas dos ecuaciones se tendrá $x^2\times AE\times EB=PP'\times EB\times AE$,
que da $x^2=PP'$ ó $x=\sqrt{PP'}$.

238 Para usar de la balanza se necesita poner en el un platillo un peso igual al del género que se coloca en el otro; por consiguiente, para pesar con este instrumento se necesita tener un gran número de pesas, ó hacerlo de muchas veces; y ademas pesando mercancías en grande, sufren mucha presion los ojos de la alcoba, y el ege se pone romo y disminuye su movilidad; por esta causa se hace uso de otro instrumento en que un solo peso sirve para averiguar el de las mercancías con solo colocarle á diferente distancia del punto de apoyo. A este instrumento se le da el nombre de *romana*.

Esta se compone de una palanca AB (fig. 98) colgada de un asa EK que la divide en dos brazos EA, EB muy desiguales. Del brazo mas corto cuelga un platillo ó un garfio C, cuyo destino es sostener los géneros que se deben pesar; y por medio de una argollita se hace correr á lo largo del brazo EB un peso constante P que se llama *pilon*. Como en el brazo EB están señaladas las divisiones correspondientes al número de libras ó arrobas que se equilibran con el pilon, el uso de la romana es tambien muy sencillo; y así, solo nos resta advertir que para hacerse cargo de una romana no hay mas que saber con *cuánto entra*; esto es, qué peso se equilibra con el pilon en la primera division.

En toda romana hay dos divisiones, la una se refiere al asa EK, y sirve para pesar *por mayor*, esto es, para pesar géneros de mucho peso; y se cuelga del asa *ek* para pesar *por menor*, esto es, cosas de poco peso.

De la polea ó garrucha, y de las tróculas y polipastros que se componen de ellas.

239 Se llama *polea*, *garrucha*, *carrucho ó moton*, á un cilindro poco grueso en cuya superficie esterior hay una especie de *garganta ó car-*

ril que se llama *cagera*, por donde pasa una cuerda, á cuyos estremos se aplican la potencia y la resistencia.

El ege de la polea sale un poco por ambos lados de la superficie de las dos caras, y se apoya en un armazon CK (fig. 99) de modo que pueda girar con libertad.

Se puede hacer uso de la polea de dos distintos modos: ó estando fijo el centro de la polea como se ve en la (fig. 99), en cuyo caso se dice que la polea es *fija ó inmóvil*, y la potencia y resistencia obran en direcciones tangentes á la polea; ó se aplica la resistencia al centro de la polea, ó en una direccion que pasa por él, en cuyo caso la potencia se aplica á un estremo de la cuerda, cuyo otro estremo está fijo, y se llama *polea móvil*, que está representada por la (fig. 100).

240 Consideremos primero la polea fija; y observarémos que siendo fijo su centro, si lo tomamos por orígen de los momentos, y tiramos las Cp, Cr, perpendiculares á las direcciones de la potencia y resistencia, tendrémos (93 cor. 3.° y 4.°) $P\times Cp = R\times Cr$;
y como $Cp = Cr$, por ser radios de la circunferencia que forma el carril, tenemos que $P = R$;
luego en la polea fija para que *haya equilibrio es necesario que la potencia sea igual con la resistencia*; más á pesar de esto nos proporciona la ventaja de poder variar la direccion de la fuerza que se ha de emplear. En efecto, cuando queremos levantar un peso á una gran altura, el mismo esfuerzo necesitamos emplear usando de la polea fija, que haciéndolo á pulso; pero usando de la polea, el peso de nuestro cuerpo nos ayuda en tanto grado que lo hacemos con muchísima comodidad.

241 Si queremos averiguar la presion ó carga que sufre el centro C, observarémos que no debe ser otra que la resultante de las dos fuerzas P y R; y como estas acabamos de ver que son iguales, la direccion de su resultante debiendo pasar por el punto de concurso O de las RrO, PpO, y por el punto fijo C para que pueda ser destruida por él, debe dividir (24) en dos partes iguales al ángulo POR; luego si espresamos dicha resultante por R', tendrémos (29 cor.) $P : R' :: \text{sen.}COR : \text{sen.}POR$; pero si se tira la cuerda pr, el ángulo $COR = Crp$, por ser ambos complemento del rCO; y como por ser rectos los ángulos CpO, CrO, el ángulo pOr es (I. 462) suplemento del pCr, será (I. 637) $\text{sen.}pOr = \text{sen.}pCr$;
luego tendrémos $P : R' :: \text{sen.}Crp : \text{sen.}pCr ::$ (I. 638) $Cp : pr$,
que quiere decir, que *la potencia es á la presion que sufre el centro fijo, como el radio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el cordon.*

Para determinar las condiciones de equilibrio en la polea móvil (fig. 100) observarémos que siendo P la potencia, y R el peso, tenemos que en el caso de equilibrio representa aquí R lo que en la polea fija espresaba la carga ó presion que sufria el centro de la polea; por lo que la condicion de equilibrio será $P : R :: CS : SO$;
esto es, *que en la polea móvil la potencia es á la resistencia, como el radio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el cordon.*

242 El caso mas favorable á la potencia es cuando los cordones (fig. 101) son paralelos; pues entónces la cuerda SO es el diámetro, que como equivale á dos radios, la proporcion anterior dará $R=2P$; de manera que *una fuerza dada* P *se equilibra en este caso con una fuerza doble* R.

Si el arco SDO (fig. 100) fuese la sesta parte de la circunferencia, la cuerda SO seria igual al radio CS, y la potencia resultaria igual con la resistencia; si este arco disminuyese, la fuerza P seria mayor que la fuerza R, de manera que la máquina perjudicaria á la potencia.

En general, la fuerza P dirigida segun SP se equilibrará por medio de la polea móvil con una fuerza $P\times\frac{\text{SO}}{\text{SC}}$ dirigida segun CR; y en todos los casos *la presion ó carga del punto G es igual con la potencia* P.

243 Conociendo la relacion de la potencia á la resistencia en la polea móvil, es fácil hallar esta relacion en una combinacion cualquiera de estos dos géneros de poleas. Por egemplo, unamos al estremo K de las armas de una polea móvil BHCG (fig. 102) una cuerda KB′H′C′F′ que pase despues por el carril de otra polea móvil B′H′C′G′, y que se halle atada al punto F′; fijemos del mismo modo al estremo de esta segunda polea una cuerda K′B″H″C″F″ que pase por el carril de una tercera polea móvil B″H″C″G″ y se halle atada al punto fijo F″; en fin, suspendamos á las armas A″K″ de esta tercer polea un peso R, y consideremos este peso como la resistencia que está en equilibrio por medio de una potencia P aplicada á la primera polea segun la direccion BP. Esta fuerza P, en virtud de lo que se acaba de ver, equivale á una fuerza dirigida segun KB′ é igual con $P\times\frac{\text{BC}}{\text{AB}}$;

esta por la misma razon equivale á una fuerza dirigida segun K′B″ é igual con $P\times\frac{\text{BC}}{\text{AB}}\times\frac{\text{B}'\text{C}'}{\text{A}'\text{B}'}$;

la cual equivale del mismo modo á una fuerza igual á

$$P\times\frac{\text{BC}}{\text{AB}}\times\frac{\text{B}'\text{C}'}{\text{A}'\text{B}'}\times\frac{\text{B}''\text{C}''}{\text{A}''\text{B}''}$$ y dirigida segun A″K″.

Luego para el equilibrio de las dos fuerzas P y R es necesario que se tenga $R=P\times\frac{\text{BC}}{\text{AB}}\times\frac{\text{B}'\text{C}'}{\text{A}'\text{B}'}\times\frac{\text{B}''\text{C}''}{\text{A}''\text{B}''}$;

que da $P:R::\text{AB}\times\text{A}'\text{B}'\times\text{A}''\text{B}'':\text{BC}\times\text{B}'\text{C}'\times\text{B}''\text{C}''$ (316);

de donde se concluye *que la potencia* P *es á la resistencia* R, *como el producto de los radios AB, $A'B'$, $A''B''$ de las poleas, es al producto de las cuerdas de los arcos BC, $B'C'$, $B''C''$.*

Las presiones de los puntos fijos F, F′, F″, ó las tensiones de las cuerdas que están sujetas á ellos, están espresadas por P para el punto F; por $P\times\frac{BC}{AB}$ para el F′, y por $P\times\frac{BC}{AB}\times\frac{B'C'}{A'B'}$ para el F″.

244 Estos resultados se pueden estender á un número cualquiera de poleas móviles, colocadas del mismo modo; y si quisiéramos mudar la direccion de la potencia, pondríamos una polea fija en E, por cuyo medio obraria la potencia en la direccion P′E y se verificaria la misma condicion de equilibrio, pues esta polea ni favorece ni perjudica á la potencia. Si todos los cordones que terminan en estas poleas son paralelos, será $BC=2AB$, $B'C'=2A'B'$, $B''C''=2A''B''$,
y la (prop. 316) nos dará $P:R::1:2^3$;
y como lo mismo sucederia si hubiese mayor número de poleas, resulta en general que *la potencia será á la resistencia, como la unidad es al número 2^n, espresando* n *el número de las poleas móviles*. Así, en la (fig. 103) en que se tienen tres poleas móviles, será $P:R::1:8$, que da $R=8P$; es decir, que por medio de una máquina semejante *un peso cualquiera* P *puede tener en equilibrio á un peso* R *ocho veces mayor*.

Las presiones que sufren los puntos fijos F, F′, F″ ó las tensiones de las cuerdas que están fijas en ellos, son diferentes; la del punto F es igual á P; la de F′ á $2P$; la de F″ á $4P$. El centro de la polea fija E sufre una presion igual al duplo de la fuerza P; la suma de las presiones que esperimentan los cuatro puntos fijos E, F, F′, F″ es igual á $9P$, ó á la suma $P+R$ de los dos pesos suspendidos á la máquina; y esta presion total se distribuye desigualmente como se acaba de ver, y de un modo determinado entre los cuatro puntos que están fijos en la máquina.

245 Una reunion cualquiera de poleas fijas ó móviles forman lo que se llama *tróculas*, *polipastros ó aparejos*. La que está representada en la (fig. 103) es la mas ventajosa para la potencia, es decir, que disponiendo de este modo un número dado de poleas, una potencia dada se equilibrará con mayor resistencia. Pero como las máquinas no solo tienen por objeto el tener fuerzas en equilibrio por medio de otras fuerzas, se emplean frecuentemente las tróculas dispuestas de otra manera, segun se juzga mas á propósito para el uso á que se destinan. En cada caso particular se tendrá que calcular la relacion de la potencia con la resistencia necesaria al equilibrio; este cálculo en virtud de lo que precede, y del egemplo que vamos á dar de él, no presentará jamas grandes dificultades.

La trócula representada por la (fig. 104) está formada de tres poleas fijas á unas mismas armas OV, y de otras armas móviles AK que tienen fijas á ellas otras tantas poleas. Una misma cuerda las abraza á todas, pasando alternativamente de una polea de las armas fijas á una de las de las armas móviles; todas las partes EB, F′C, E′B′, F″C′, &c. de esta cuerda que van de una polea á otra son paralelas. Esta cuerda está unida por su estremo á las armas fijas: la potencia P se aplica al otro estremo: la resistencia ó peso R está igualmente fijo á las armas móviles; y en este peso R se debe comprender el peso de estas mismas armas, y el de las cuerdas que las unen á las poleas fijas.

Para determinar la relacion entre P y R en el caso de equilibrio, observarémos que pues los cordones EB, F′C &c. forman parte de una misma cuerda, deben sufrir todos la misma tension en el sentido de su longitud; porque es imposible que una cuerda esté desigualmente estendida en sus diferentes partes. Luego si se descompone la fuerza R en otras tantas fuerzas paralelas é iguales como cordones hay empleados en sostener este peso, es decir, en seis fuerzas dirigidas segun los cordones EB, F′C, E′B′, F″C′ &c., estas componentes iguales espresarán las tensiones de estos cordones. Así, cada uno de estos seis cordones está tirado en el sentido de la pesantez por una fuerza igual á $\frac{1}{6}R$; de modo que el cordon EB está en el mismo caso que si se suspendiese en su estremo inferior un peso igual á $\frac{1}{6}R$; pero el mismo cordon está tirado en sentido contrario por la fuerza P; luego se tiene para el equilibrio

$$P=\frac{1}{6}R\text{, ó } R=6P.$$

Por consiguiente, en la (fig. 104) que es la que consideramos, la potencia P se equilibra con una resistencia igual á $6P$. Es fácil de ver que en cualquiera otra *trócula* dispuesta de la misma manera, y no diferenciándose de esta sino por el número de las poleas, *la potencia es á la resistencia en el caso de equilibrio, como la unidad es al número de cordones que terminan en las poleas de las armas móviles, y que se pueden considerar como empleados en sostener la resistencia* (*).

Del torno, de las ruedas dentadas, del cric ó gato, y de la cábria.

246 Se llama *torno* en general á una rueda atravesada perpendicularmente por un cilindro cuyos estremos descansan sobre dos apoyos C, G (fig. 105); en esta máquina una potencia P aplicada en una direccion tangente á la circunferencia de la rueda, se lleva tras sí á dicha circunferencia y al cilindro que está sólidamente unido á ella; y obligándoles á dar vueltas al rededor del ege del cilindro, es causa de que se vayan arrollando sucesivamente al rededor del cilindro las diferentes partes de la maroma DQ, á la cual está atado el peso que se quiere elevar ó acercar al cilindro.

En algunas ocasiones no se hace uso de rueda alguna para hacer que dé vueltas el cilindro, sino que se colocan perpendicularmente á su ege unas palancas E á que se aplica la potencia, y produce el mismo efecto

(*) *En mi Compendio de Mecánica Práctica se presentan otras combinaciones de poleas fijas y móviles, cuyas leyes de equilibrio entre la potencia y la resistencia son bien fáciles de calcular por la doctrina espuesta.*

que la rueda siendo mas fácil su trasporte. En otras lleva el cilindro en sus dos estremos unas cigüeñas P', á las cuales se aplica para el mismo fin la potencia ó fuerza motriz, y en otras se ponen unos dientes *a*, *a* para mover la rueda.

247 En cualquiera de estas disposiciones se puede colocar, combinando su accion con una ó muchas poleas móviles para levantar pesos, como se ve en la (fig. 106), suponiendo que la polea *L* represente la seccion de un torno; pero en este caso conviene que esté el torno bien afirmado en el suelo para que la potencia no se lo lleve.

Cuando el ege del cilindro está en situacion vertical, recibe el nombre de *argüe ó cabestante*, como el de la (fig. 107).

248 Para encontrar la relacion de la potencia con la resistencia en esta máquina (fig. 105), observarémos que siendo fijo el ege del cilindro, y no pudiendo la fuerza *P* y la resistencia *Q* egercer sobre él otro movimiento que el de rotacion, se deberá verificar la (ec. 183); y como aquí solo hay dos fuerzas, á saber, la *P* que intenta hacer girar á la máquina hácia el lado de acá del ege, y el peso *Q* que intenta hacerle girar hácia el lado de allá del mismo ege, resulta que si espresamos por *r* la *m*D que desde el ege se tire perpendicularmente á la direccion QD en que obra la *Q*, y por *R* la perpendicular GK que desde el mismo ege se tire á la direccion PK en que obra la potencia *P*, la citada (ec. 183) nos dará $PR-Qr=0$, ó $PR=Qr$, que da $P:Q::r:R$; que nos dice que *en el torno la potencia es á la resistencia*, *como el radio del cilindro es al de la rueda.*

249 Para hacer el cálculo con mas exactitud se debe considerar aplicada la potencia al diámetro de la cuerda; entónces el radio del cilindro y el de la rueda se deberán aumentar en el valor del semidiámetro de la cuerda, y se tendrá que *la potencia es á la resistencia*, *como el radio del cilindro mas el de la cuerda*, *es al de la rueda mas el de la cuerda.*

Cuando se trata de elevar el peso ó resistencia á una gran altura, sucede con frecuencia que despues de haberse arrollado la cuerda en toda la longitud del cilindro, se vuelve otra vez á arrollar sobre la misma cuerda, como representa la (fig. 107); y en este caso *se deberá considerar el radio del cilindro aumentado no solo con el de la cuerda*, *sino con tantas veces el diámetro de la misma cuerda como veces esté ya arrollada*; de donde se deduce que *á proporcion que vaya subiendo el peso*, *estará mas desfavorecida la potencia*, y *se necesitará una fuerza mayor para equilibrarse con una resistencia dada.*

Si se quiere determinar la presion que sufre cada uno de los apoyos, se deberá atender no solo á la potencia y á la resistencia, sino tambien al peso de la máquina y á la distancia á que cada una de estas fuerzas comprimentes obran respecto de los puntos de apoyo.

250 Cuando se combina el torno con un aparejo, trócula ó polipastro, resulta la máquina que representa la (fig. 108) que se llama *cábria*.

la cual se emplea para levantar masas considerables, tales como piezas de cañon &c. Sea P la potencia que aplicada perpendicularmente al estremo de la barra ó rueda del torno, forma equilibrio con el peso Q suspendido al estremo de las armas del aparejo móvil; y se tendrá (248) entre la potencia P y la resistencia t de la cuerda arrollada al cilindro $P=\frac{tr}{R}$,

espresando por r el radio del cilindro, y por R el de la rueda ó la distancia del punto de aplicacion de P al ege del cilindro; pero en virtud de lo demostrado (§ 245) $t=\frac{Q}{n}$, espresando por Q la resistencia y por n el número de cordones que terminan en las poleas móviles; luego si sustituimos este valor de t en el anterior de P se tendrá $P=\frac{Qr}{nR}$

que da $P:Q::r:nR$.

Luego para el equilibrio en la cábria se necesita que *la potencia sea á la resistencia, como el radio del ege del torno es á tantas veces el radio de la rueda como cordones terminan en las poleas móviles.*

Si en el torno se aumenta el radio de la rueda ó se disminuye convenientemente el del cilindro, se puede aumentar todo lo que se quiera la ventaja de la potencia; pero como esto en muchos casos seria impracticable, pues no podria hacerse la rueda ó la palanca tan grande como se necesitase por lo embarazosa que podria ser, ó el cilindro se debilitaria demasiado y no tendria la resistencia necesaria: vamos á dar á conocer un medio muy sencillo de conseguir este objeto, el cual se halla descrito en la Mecánica de Gregory, y se atribuye al célebre Jorge Eckhardt, aunque hay suficientes motivos para sospechar es bastante antiguo en la China.

Este aparato se reduce á que la parte A (fig. 109) del cilindro del torno es mas gruesa que la parte B; y la cuerda que pasa por la polea C que sostiene el peso Q está arrollada á cada una de las partes en direcciones contrarias. Así, cuando la potencia aplicada al manubrio EF hace girar al cilindro para arrollar la cuerda sobre su parte mas gruesa, se desarrolla en la parte menor una porcion correspondiente: de manera que en una vuelta completa del torno la diferencia entre la cuerda arrollada al cilindro mayor y la desarrollada del menor, es igual á la diferencia de las circunferencias de los dos cilindros, y el peso Q se eleva la mitad de esta diferencia.

Para encontrar la ley de equilibrio en esta máquina, observarémos que estando suspendido en el aire el peso Q, la tension será igual en ambos cordones; y cada uno sostendrá (242) la mitad del peso del cuerpo; luego deberémos considerar al rededor del ege del cilindro que es fijo, tres fuerzas, á saber: una la potencia P aplicada al estremo del manubrio; otra aplicada en el punto A, cuya magnitud es $\frac{1}{2}Q$; y otra igual con esta aplicada al estremo B, que obra en el mismo sentido que la potencia P, y en sentido opuesto á la que obra en A. Por lo cual si espresamos por R el radio de la rueda ó manubrio, por r el del cilindro mayor, y por r' el del menor, la (ec. 183) nos dará

$$P\times R-\tfrac{1}{2}Q\times r+\tfrac{1}{2}Q\times r'=0,\text{ ó } P\times R=Q\times\frac{r-r'}{2},\text{ que da } P:Q::\frac{r-r'}{2}:R,$$

que nos dice que *la potencia es á la resistencia*, *como la mitad de la diferencia de los radios de los cilindros es al radio del manubrio*, *rueda ó palanca á que se aplique la potencia.*

Haciendo aplicacion de esta invencion al cabestante simple, como representa la (fig. 109*), trae unas ventajas considerables respecto de todos los demas medios que se conocen. En efecto, si suponemos por egemplo que la parte superior A del cilindro mayor tenga 17 pulgadas de diámetro, y la menor solo 16, que fuese tambien el diámetro de la polea C, tendríamos que $P:Q::\frac{17-16}{4}:R::\frac{1}{4}:R$, que da $P=\frac{Q}{4R}$.

En un cabestante ordinario que tuviese el mismo diámetro de 16 pulgadas y el mismo manubrio, se tendria $P':Q::\frac{16}{2}:R::8:R$, que da $P'=\frac{8Q}{R}$;

y comparando P con P' se tendrá $P:P'::\frac{Q}{4R}:\frac{8Q}{R}::1:32$;

donde vemos que la potencia aplicada al nuevo cabestante es 32 veces menor que la que se necesita en el ordinario.

251 Cuando se tiene un sistema de tornos colocados como representa la (fig. 110), la potencia P aplicada á la rueda AD hace mover al cilindro BC que comunica el movimiento á una segunda rueda A′D′ por una cuerda BA′. Esta rueda A′D′ hace mover al cilindro C′B′ al cual está unida una cuerda B′A″, y así sucesivamente hasta el último cilindro que está cargado con la resistencia R.

Si todo el sistema está en equilibrio y espresamos por T, T', T'', *&c.*, las tensiones de las cuerdas BA′, B′A″, &c. tendrémos:

Para el primer torno $P:T::\mathrm{OB}:\mathrm{OA}$,
Para el segundo. . . $T:T'::\mathrm{O'B'}:\mathrm{O'A'}$,
Para el tercero. . . . $T':R::\mathrm{O''B''}:\mathrm{O''A''}$.

Multiplicando ordenadamente estas proporciones dan

$$P:R::\mathrm{OB}\times\mathrm{O'B'}\times\mathrm{O''B''}:\mathrm{OA}\times\mathrm{O'A'}\times\mathrm{O''A''};$$

que nos dice que *la potencia es á la resistencia*, *como el producto de los radios de los cilindros es al producto de los radios de las ruedas.*

252 Se llama *rueda dentada* á un cilindro móvil al rededor de

ege, y en cuya superficie tiene unos *filetes* ó *dientes*; estos engranan ó engargantan en los que se forman del mismo modo sobre otra rueda dentada &c. Sobre el ege de cada rueda dentada se adapta ordinariamente otra que forma cuerpo con ella y cuyo diámetro es menor; á esta rueda menor se llama *piñon*, y á sus dientes *alas*. De donde se deduce que un sistema de ruedas dentadas (fig. 111) no viene á ser otra cosa que un conjunto de tornos como el anterior; y los piñones representan los cilindros de la combinacion precedente. Por lo que se deduce que en las ruedas dentadas *la potencia es á la resistencia*, *como el producto de los radios de los piñones es al de los radios de las ruedas.*

La (fig. 112) representa tambien un sistema de ruedas dentadas por cuyo medio se hace que la potencia P se equilibre con una resistencia R que es horizontal, ó por medio de la polea C con la R' que es vertical. En el anterior, los eges de los tres piñones son paralelos, y los dientes son prolongaciones del radio; en este el ege del segundo piñon es perpendicular á los eges de los otros dos; y los dientes son perpendiculares á los radios. En ambos sistemas el plano de cada rueda es perpendicular al ege de su piñon y son las mismas las circunstancias del equilibrio.

Si espresamos por D, D', D'' los números de dientes de las ruedas A, A′, A″, y por d, d', d'' los números de las alas de los piñones a', a'', a''', y suponemos que miéntras que la rueda A da n vueltas, las ruedas A′, A″, A‴ hagan la primera N', la segunda N'' &c., tendrémos que á cada revolucion de A‴, el piñon a''' engranará sucesivamente todas sus alas con la rueda A″; de suerte que en N''' revoluciones engranará con A″ un número de alas espresado por $N'''d'''$; del mismo modo la rueda A″ dando N'' vueltas, engranará un número $N''D''$ de dientes con el piñon a'''; y como los números de dientes y de alas que engrana la rueda A″ con el piñon a''' deben ser iguales, será necesario que se tenga $N''D''=N'''d'''$;
por la misma razon las otras ruedas nos suministrarán las ecuaciones

$$N'D'=N''d'', \quad ND=N'd'.$$

Multiplicando estas ecuaciones ordenadamente y suponiendo cuatro ruedas, tendrémos $NDD'D''=N'''d'd''d'''$;

de donde se sacará $N=N'''\times\dfrac{d'd''d'''}{DD'D''}$.

253 Para hacer aplicacion de este resultado, supongamos que se pide el número de dientes que es necesario emplear para que la rueda A haga una revolucion en el mismo tiempo que la rueda A‴ hace 60; en este caso tendrémos $N=1$, $N'''=60$, $1=60\times\dfrac{d'd''d'''}{DD'D''}$;

y tomando arbitrariamente los números d', d'', d''', podrémos suponer $d'=4$, $d''=5$, $d'''=7$; esta hipótesis reduce la última ecuacion á

$$DD'D''=60\times4\times5\times7=8400.$$

Pero 8400 se puede descomponer en tres factores de muchos modos; luego si elegimos los 12, 25 y 28, y hacemos D, D', D'' respectivamente iguales á estos números, tendrémos una solucion de este problema que es muy indeterminado.

Debemos observar que se debe tomar $N<N'''$;
porque suponiendo $d'<D$, $d''<D'$, $d'''<D''$,
A va mas lentamente que A'''.

254 Ademas del engranage de las ruedas que nos presentan las (figs. 111 y 112), puede haber otros muchos que tienen aplicaciones útiles. Los principales son los siguientes. En la (fig. 113) los dientes de la rueda grande son perpendiculares á su plano; y hace oficios de piñon la reunion de muchas barras que se llaman *bolillos*, fijas en las circunferencias de dos placas circulares paralelas que componen lo que se llama *linterna*; esta disposicion suministra el medio de producir un movimiento de rotacion perpendicular al plano de la rueda grande en que se reputa que obra la potencia.

La (fig. 114) presenta el modelo de un engranage por medio del cual se produce un movimiento de rotacion en un plano oblicuo al de la rueda á que está aplicada la potencia. En la disposicion de estos engranages consiste el mecanismo de casi todas las máquinas de que se hace uso en los molinos.

En efecto, si el agua que es el agente que por lo regular se emplea, cae sobre una rueda horizontal EG (fig. 115), basta solo este movimiento para producir el de la muela ó resistencia ILFK que se representa dado un corte por el ege para que se vea el espacio KDBF que debe haber entre la muela fija y la que gira; pero como *para que la harina salga molida como corresponde*, *tiene acreditado la esperiencia que necesita la muela dar de* 48 *á* 61 *vueltas en un minuto*, resulta que si el impulso del agua no es suficiente para hacer dar este número de vueltas, se emplea un engranage por medio de la rueda dentada A y la linterna ó linternas C para mover la muela ó las muelas M.

Si el primer impulso se verifica por medio de una rueda vertical, entónces la rueda E (fig. 116) con la linterna D pueden producir desde luego el efecto que se desea sobre la muela M, ó en caso de necesitarse que dé mas vueltas en un tiempo dado, se fija al árbol la rueda N, que podrá obrar á un mismo tiempo sobre dos, tres ó mas linternas que hagan mover á otras tantas piedras; y tambien se ve que pudiendo fijarse al mismo árbol otra rueda S, se pueden poner á un mismo tiempo en movimiento muchas piedras ó muelas por solo la rueda FG.

Los dientes deben ser curvos desde el punto en que obran de lleno hasta su estremo; los medios que hay para determinar con exactitud la curvatura mas á propósito para producir el mayor y mejor efecto, son complicados y no nos detendrémos en manifestarlos; pero no obstante hé aquí una construccion muy sencilla y que se aproxima bastante á la verdadera. Supongamos que el punto A (fig. 117) sea el parage del diente en que obre de lleno el bolillo de la linterna; con un radio CA igual al radio de la linterna se traza el arco AB; y egecutando lo mismo por el otro lado, se tendrá el diente con las curvaturas por ambos lados, como conviene que las tenga en algunas ocasiones.

Los dientes no deben ser ni tan largos que embarazen el movimiento de la máquina, ni tan cortos que abandonen á los bolillos ántes de haber producido todo su efecto. Los bolillos para que no se doblen deben ser de la madera mas dura y lo mas cortos que sea posible.

255 El *cric ó gato* es una máquina que se refiere al torno, y que no se diferencia esencialmente de él. Consiste en una barra AB (fig. 118) guarnecida de dientes en una de sus caras, y móvil en el sentido de su longitud; los dientes de esta barra engranan con los de un piñon E, que se hace girar sobre su ege por medio de un manubrio CM; los dientes del piñon llevan consigo á los de la barra, y hacen subir al peso que se coloca sobre la cabeza A de esta barra, ó se suspende en su estremo inferior B; este peso es la resistencia, la potencia está aplicada al estremo M de la *cigüeña ó manubrio*; y suponiendo su direccion MC tangente á la circunferencia que describe este estremo, es necesario para el equilibrio que *la potencia sea á la resistència, como el radio del piñon es al radio de la cigüeña*; porque es la misma condicion del torno (248).

El cric que acabamos de describir se llama *simple*; pero cuando entre el piñon y la barra se pone una ó muchas ruedas dentadas con sus correspondientes piñones, se llama *compuesto*; en cuyo caso el piñon E (fig. 119) no obra ya inmediatamente sobre esta barra, sino sobre la rueda D; y se verifica que *la potencia es á la resistencia, como el producto de los radios de los piñones es al producto de los radios de las ruedas por el brazo de la cigüeña.*

Del plano inclinado.

256 El *plano inclinado* se caracteriza con este nombre, porque forma un ángulo con el horizonte; su uso es el de servir para sostener un cuerpo poniéndole en equilibrio con otras fuerzas. Para manifestar cómo se efectúa, supongamos que se tenga un cuerpo M (fig. 120) cuyo peso R lo considerarémos reunido en su centro de gravedad G. Para que este cuerpo pueda estar en equilibrio sobre un plano inclinado con una fuerza P, es necesario que las fuerzas R y P tengan una resultante que se destruya por el plano inclinado, lo que exige primero que dichas fuerzas se hallen en un mismo plano (22); y siendo R una vertical que pasa por el centro de gravedad, el plano RMP será tambien vertical y contendrá el centro de gravedad G. Por lo que la primera condicion de equilibrio es que la direccion GP de la fuerza P debe estar en un plano vertical que pase por el centro de gravedad del cuerpo.

La segunda condicion es que la resultante GN de las fuerzas R y P sea destruida por la resistencia del plano inclinado; lo que exige (148) que esta recta sea normal al plano inclinado y la encuentre en uno de sus puntos.

Esta segunda circunstancia se modifica un poco, cuando el cuerpo toca al plano inclinado por varios puntos; porque uniendo estos puntos por rectas, basta para el equilibrio que la resultante normal pase por uno de los puntos del polígono comprendido por estas rectas.

257 Quedando satisfechas estas dos condiciones, supongamos que sea M un cuerpo mantenido en equilibrio sobre un plano inclinado por una fuerza P. Concibamos espresado su peso por la GR, y descompongamos esta fuerza en otras dos, tales que la una GN sea perpendicular al plano inclinado, y la otra GL obre en la direccion de la potencia P; y en virtud de lo espuesto (29 cor.) tendrémos $P:R::\text{sen.RGN}:\text{sen.NGL}$.

Aquí observamos que siendo el ángulo RGN constante, pues la direccion GN y la GR son dadas, la potencia quedará mas favorecida cuando el ángulo NGL tenga el mayor seno, que será cuando este ángulo sea recto, en cuyo caso la direccion GP de la potencia será paralela al plano inclinado; y como entónces el triángulo LGR será semejante al ABC, por ser ambos rectángulos, el uno en B y el otro en L, y tener el ángulo RGL igual con el ACB (I. 386c), será $P:R::\text{GL}:\text{GR}::\text{BC}:\text{AC}$; que quiere decir que en el plano inclinado cuando la potencia es paralela á la longitud del plano, se verifica en el caso de equilibrio que *la potencia es á la resistencia, como la altura del plano inclinado es á su longitud.*

En el mismo caso tendrémos $\text{GN}:\text{GR}::\text{AB}:\text{AC}$.
que quiere decir que *la presion que sufre el plano inclinado es á la resistencia ó peso del cuerpo, como la base de dicho plano es á su longitud.*

258 Si la direccion de la potencia fuese paralela á la base del plano inclinado, como se ve en la (fig. 121) se tendria

$$P:R::\text{GL}:\text{GR}::\ (\text{I. 485 cor. 5.}^{\circ})\ \text{BC}:\text{AB};$$

que quiere decir que *la potencia es á la resistencia, como la altura del plano inclinado es á su base.*

Y respecto de la presion tendrémos $\text{GN}:\text{GR}::\text{AC}:\text{AB}$;
que quiere decir que en este caso la *presion es á la resistencia, como la longitud del plano inclinado es á su base.*

Si la direccion de la potencia cayese por la parte inferior de GP, entónces mas bien contribuiria para obligar al cuerpo á bajar que para tenerle en equilibrio.

259 Si quisiésemos averiguar las condiciones de equilibrio de dos cuerpos M y M' que estuviesen unidos por medio de una cuerda MEM′ que pasa por la polea E (fig. 122), tendríamos que la tension de la cuerda en E para sostener al cuerpo M debe ser igual (257) á $M\times\dfrac{\text{AD}}{\text{AB}}$;

y la tension de la misma cuerda en E para sostener al cuerpo M' será igual con $M'\times\dfrac{\text{AD}}{\text{AC}}$;

luego igualando estos valores que espresan una misma tension, se tedrá $M \times \frac{AD}{AB} = M' \times \frac{AD}{AC}$, que suprimiendo AD resulta $M : M' :: AB : AC$; que nos dice que *los pesos de los cuerpos deben tener la misma relacion que las longitudes de los planos inclinados sobre que insisten.*

De la rosca.

260 Aunque la *rosca* se considera comunmente entre las máquinas simples, sin embargo se puede considerar como una máquina que se refiere como se va á ver al plano inclinado y al torno. La rosca es un cilindro AB (fig. 123) al rededor del cual está adherido un *filete* saliente CMD, cuya forma es la de un prisma paralelográmico ó triangular, y en el que una de las caras está unida á la superficie convexa del cilindro.

Se llama *tuerca* al sólido EF en que se hace entrar la rosca; en lo interior de la tuerca hay una concavidad semejante al filete CMD. Cuando la rosca ha entrado en la tuerca, esta concavidad se halla exactamente llena por el filete, de suerte que la rosca no puede tomar ya otro movimiento que adelantarse en el sentido de su longitud, girando sobre ella misma. Unas veces la rosca es fija, y la tuerca es la que se adelanta á lo largo de la rosca, girando al rededor de su ege; otras veces la tuerca es fija, y la rosca se mueve en la tuerca; pero como estos dos casos vienen á ser el mismo para el equilibrio de las fuerzas aplicadas á la pieza móvil, nos limitarémos á considerar el primero. Ademas, para fijar las ideas colocarémos el cilindro fijo AB en una posicion vertical; en cuyo caso el peso solo de la tuerca móvil bastará para hacerle descender á lo largo de la rosca, si hacemos abstraccion del rozamiento de esta tuerca contra la rosca. Representarémos por P la fuerza que se aplica á la tuerca para tenerla en equilibrio, y supondrémos que esta fuerza obra al estremo de una barra EG en una direccion horizontal GH. La fuerza P será la potencia; el peso de la tuerca aumentado si se quiere de otro peso, será la resistencia que espresarémos por R; y la cuestion que se trata de resolver consiste en hallar la relacion entre la fuerza P y la resistencia R en el caso de equilibrio. Pero ántes de buscar esta relacion conviene conocer la generacion del filete CMD.

261 Para esto concibamos dividido uno de los lados cd de un rectángulo $abcd$ (fig. 124) en un número cualquiera de partes iguales cc', $c'c''$, &c., y por los puntos de division c', c'', &c. tiremos paralelas á la base, que dividirán tambien al lado ba en partes iguales bb', $b'b''$, &c.; tiremos despues las rectas trasversales cb', $c'b''$, $c''b'''$. . . . . que tambien serán paralelas é iguales entre sí; hecho esto, concibamos arrollado este rectángulo sobre un cilindro recto $cdfe$ de la misma altura que el rectángulo, y tal que la circunferencia de la base sea igual en longitud con la base cb de este rectángulo. Y tendrémos que la superficie del rectángulo se ajustará exactamente á la del cilindro, de manera que el lado

ab vendrá á reunirse con el *dc*; los puntos b', b''..... caerán sobre los puntos c', c''..... y las rectas cb', $c'b''$....., formarán una curva continua sobre la superficie del cilindro. La curva formada de este modo se llama *hélice*; la parte de esta curva que va de un punto á otro de la recta *cd*, por egemplo la porcion $c'''mc^{IV}$ se llama *espira*, el intervalo $c'''c^{IV}$ comprendido entre los dos estremos de una misma *espira* forma lo que se llama *el paso de la espira* ó *de la rosca*. Todas las espiras de una misma hélice son iguales en longitud, y el paso de la espira es el mismo en toda la longitud de la rosca. Si por un punto cualquiera *m* se concibe un plano que toque á la superficie del cilindro, por egemplo en la recta *pmq* paralela á su ege ó perpendicular á su base, y se desenvuelve esta superficie sobre este plano, las espiras de la hélice se convertirán en una serie de rectas paralelas que cortarán á la recta *pmq* bajo un ángulo igual al que las lineas trasversales cb', $c'b''$..... forman con la recta *cd*; estas paralelas trazadas en el plano tangente representarán las tangentes á la hélice en los diferentes puntos de la recta *pmq*.

Concibamos ahora un plano cualquiera por el ege de la rosca (fig. 123); y supongamos que la seccion de este plano con el filete CMD, de cualquier figura que sea, se mueva de modo que su plano pase constantemente por el ege, y que al mismo tiempo todos sus puntos describan hélices semejantes al rededor de este ege; ella engendrará por este movimiento el filete CMD que rodea al cilindro.

Entendido esto, para hallar la condicion de equilibrio entre la potencia *P* y la fuerza ó resistencia que carga sobre la tuerca móvil, supongamos primero que la tuerca solo estribe sobre la rosca en un punto del filete CMD, y consideremos este punto de contacto como cargado de todo el peso *R* de la tuerca; sea C*md* (fig. 125) la hélice perteneciente á este punto *m* del filete, y G el estremo de la barra ó palanca á que está aplicada la potencia *P* segun la direccion horizontal GH; tiremos desde los puntos *m* y G sobre el ege AB las perpendiculares *mk* y G*o*, y tendrémos que siendo fijo el ege AB como en el torno, si espresamos por *Q* la fuerza que aplicada en el punto *m* se equilibra con la fuerza *P*, tendrémos (146 ec. 183) para determinar la condicion de equilibrio la ecuacion $P\times Go = Q\times mk$,

que da $P:Q::mk:Go::$ (I. 504) circunf.mk:circunf.Go.

Luego una fuerza *Q* determinada por esta proporcion, y que fuese horizontal, causaria el mismo efecto que la fuerza *P*. Y como el peso *R* que consideramos en *m*, al intentar resbalar sobre la hélice se halla en la misma disposicion que si estuviese en el plano inclinado *hml* que formaria el desarrollo de la espira correspondiente al punto *m*, y la potencia *Q* que lo debe sostener es paralela á la base *nl* de dicho plano, tendrémos entre la potencia y la resistencia ó peso *R* (§ 258), la proporcion

$$Q:R::hn:nl.$$

Multiplicando estas dos proporciones, se tendrá despues de suprimir la *Q* en los dos primeros términos $P:R::$circunf.$mk\times hn$:circunf.G$o\times nl$.

Pero nl es el desarrollo de la circunferencia que traza mk, luego si suprimimos estas dos cantidades en la última razon, será

$$P : R :: hn : \text{circunf.Go};$$

que nos dice que en la rosca para que haya equilibrio *la potencia es á la resistencia, como el paso de la rosca es á la circunferencia del círculo que la potencia intenta hacer describir á su punto de aplicacion.*

Así, la ventaja de la potencia sobre la resistencia es tanto mayor, cuanto la potencia obra á mayor distancia del ege, y cuanto menor es el paso de la rosca. Á la verdad, hemos supuesto para llegar á este resultado que la tuerca móvil solo estribaba en un punto del filete, pero se concibe fácilmente que siendo la relacion de la potencia á la resistencia independiente de la posicion del punto de contacto, sucederá aun lo mismo cuando la tuerca toque á la rosca en muchos puntos. En efecto, el peso de la tuerca se repartirá de un modo cualquiera entre todos los puntos de contacto. Llamemos r, r', r'', &c., las partes de este peso que obren sobre estos diferentes puntos, y cuya suma equivaldrá al peso R; y concibiendo dividida la potencia P en igual número de partes p, p', p''.... y suponiendo que la fuerza p está empleada en tener en equilibrio el peso r, y del mismo modo en los otros, tendrémos que en este caso cada peso parcial guardará con la fuerza que le hace equilibrio la relacion constante de la circunferencia oG á hn; de modo que se tendrá

$$r = p \times \frac{\text{circunf.}o\text{G}}{hn},\quad r' = p' \times \frac{\text{circunf.}o\text{G}}{hn},\quad r'' = p'' \times \frac{\text{circunf.}o\text{G}}{hn};$$

sumando todas estas ecuaciones, y observando que $r + r' + r'' \ldots = R$, y $p + p' + p'' \ldots = P$, resulta $R = P \times \frac{\text{circunf.}o\text{G}}{hn}$,

es decir, *que se verifica la misma relacion que en el caso de un solo punto de contacto.*

262 Algunas veces se emplea la rosca sin tuerca por medio de un mecanismo, que en las diversas modificaciones que puede tener viene á ser en realidad el que presenta la (fig. 126); los filetes de la rosca inmóvil en el sentido de su ege engranan en los dientes de una rueda dentada, que no puede tener otro movimiento que el de rotacion al rededor de su centro. Esta rueda lleva un piñon propio para hacer mover otra rueda, ó un cilindro al rededor del cual se arrolla una cuerda, á la cual está suspendido el peso que se debe tener en equilibrio.

La rosca empleada de este modo se llama *rosca ó tornillo sin fin*, y sirve no solo para establecer el equilibrio entre varias potencias, sino que en muchos instrumentos de Matemáticas y Física, como en los *micrómetros* &c. es de la mayor importancia para comunicar pequeños movimientos.

Para hallar la condicion del equilibrio cuando solo hay una rueda como manifiesta la (fig. 126), observarémos que la potencia P se equilibrará con una fuerza Q que obre en el diente D, de modo que se tenga

$$P:Q::ab=\textit{paso de la rosca}:\text{circunf.}P;$$

y respecto de la rueda dentada tendrémos

$$Q:\textit{Resistencia } R::\text{OC}=\textit{rad. del cil.}:\text{OD}=\textit{rad. de la rueda dentada.}$$

Multiplicando estas dos proporciones será $P:R::ab\times\text{OC}:\text{circunf.}P\times\text{OD}$, que nos dice que *la potencia es á la resistencia*, *como el producto del paso de la rosca por el radio del cilindro es al producto de la circunferencia que tiene por radio la distancia del punto de aplicacion de la potencia al ege de la rosca*, *por el radio de la rueda.*

Y si tuviese mas ruedas, *seria la potencia á la resistencia aplicada al estremo del radio del último piñon*, *como el producto del paso de la rosca por el de los radios de todos los piñones es al producto de la circunferencia que la potencia intenta describir al rededor del ege de la rosca*, *por el producto de los radios de todas las ruedas.*

Terminarémos este punto manifestando un medio de aplicar la rosca que es muy poco conocido, que puede ser muy útil en algunas ocasiones, y que tiene cierta analogía con el *nuñez* de los instrumentos matemáticos. Para darlo á conocer supongamos que AB (fig. 126*) es una lámina ó plancha de metal donde juegue la rosca CD con un número n de espiras en cada pulgada. Dentro de la rosca CD hay una tuerca, en la cual se introduce otra rosca menor DE con $n+1$ espiras en cada pulgada; y por medio del aparato AFGB se impide el que esta rosca ED gire al mismo tiempo que la DC.

Ahora, si la manezuela CKL da n vueltas, la rosca CD adelantará hácia arriba una pulgada; y si suponemos que la rosca DE se mueva al rededor con CD, el punto E subirá tambien una pulgada. Pero si á la rosca DE se le hace dar n vueltas hácia atras, el punto E bajará $\frac{n}{n+1}$ de pulgada; y el resultado de ambos movimientos será el haber levantado el punto E hácia arriba un espacio espresado por $1-\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ de pulgada.

Luego si miéntras la rosca CD da n vueltas, la DE se halla sujeta, el efecto será el mismo que si hubiera andado n vueltas con CD, y hubiera hecho despues n vueltas hácia atras, por lo que adelantará $\frac{1}{n+1}$ de pulgada, y en cada vuelta de la manezuela CKL andará hácia arriba un espacio espresado por $\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2+n}$ de pulgada. Si suponemos que la manezuela CKL tenga b pulgadas de largo, la potencia ganada por la máquina estará espresada por la relacion de

$(n^2+n)\times6$, 283 &c.$\times h$ con la unidad. Para conseguir esta misma ventaja en la potencia por medio de la rosca comun hubiera sido preciso que tuviese n^2+n espiras en cada pulgada; lo cual originaria el que la máquina seria muy débil, y no podria resistir á una considerable violencia. Con el auxilio de esta doble rosca se pueden producir unos movimientos sumamente pequeños, como se requiere en muchos instrumentos matemáticos, y ademas se puede disponer para levantar pesos considerables á pequeñas alturas con mucha mas ventaja que la que pueden proporcionar las máquinas descritas (255).

De la cuña.

263 La *cuña* es un prisma triangular ABC (fig. 127) que se introduce en una hendidura para separar mas las dos partes de un cuerpo. La cara BC que está fuera del cuerpo y sobre la cual se golpea para hacer que se introduzca la cuña, se llama *cabeza de la cuña*; se llama *filo ó corte* la arista por la cual principia á introducirse; y *lados* las dos caras adyacentes á esta arista, que son las que comprimen las dos partes del cuerpo. La potencia es la percusion que se egerce sobre la cabeza de la cuña por un golpe de martillo ó de otro modo cualquiera; la fuerza que debe vencer es la resistencia que las partes del cuerpo oponen á su separacion; pero como esta resistencia no es jamas bien conocida porque depende de la adherencia que tienen los maderos ó partes que se tratan de rajar, sobre lo cual se tienen muy pocos ó casi ningunos datos, no indagarémos como en las otras máquinas, la relacion de la potencia á la resistencia; y nos limitarémos á determinar los esfuerzos que la potencia egerce sobre los dos lados de la cuña perpendicularmente á ellos. Supondrémos la potencia perpendicular á la cabeza de la cuña; porque si no lo fuese, se descompondria en dos, la una paralela á esta cabeza que no produciria ningun efecto para introducir la cuña; y la otra perpendicular y que por lo mismo es la única que se debe considerar.

Sea DE (fig. 128) la direccion de la potencia; por esta recta que se supone perpendicular á la cabeza de la cuña, concibamos un plano perpendicular al corte ó filo; y como esta arista es la interseccion de los dos lados de la cuña, este plano será tambien (I. 548) perpendicular á estos dos lados; sea el triángulo ABC la interseccion de dicho plano con el prisma triangular que forma la cuña; tiremos desde el punto E, donde la direccion de la potencia encuentra á la cabeza de la cuña, dos perpendiculares EF, y EG sobre los lados AB y CA; y descompongamos la potencia en dos fuerzas dirigidas segun EF y EG; estas dos componentes representarán los esfuerzos que la potencia egerce sobre los lados de la cuña, y cuya relacion con esta potencia se trata de encontrar. Para conseguirlo sea P la fuerza dada, x y z las componentes segun EF y EG; prolonguemos la direccion DE de la fuerza P una cantidad arbitraria Ee, y por el punto e tiremos las rectas ef y eg paralelas á

EG y EF; la fuerza P y sus componentes x y z serán entre sí como la diagonal Ee y los dos lados Ef y Eg del paralelogramo Efeg; luego á causa de ser Eg=fe, se tendrá $P:x:z::\text{E}e:\text{E}f:fe$.

Pero los tres lados del triángulo Eef son perpendiculares á los del ABC, á saber, Ee á BC, Ef á BA y ef á AC, luego (I. 485 cor. 5.º) se tendrá $\text{E}e:\text{E}f:fe::\text{BC}:\text{BA}:\text{AC}$;
por consiguiente $P:x:z::\text{BC}:\text{BA}:\text{AC}$;
es decir, que *las tres fuerzas* P, x, z, *son entre sí como los tres lados del triángulo ABC á que son perpendiculares sus direcciones.*

Las rectas BC, BA, CA, son entre sí como las caras de la cuña que se llaman su *cabeza* y sus dos *lados*, porque estas caras son paralelogramos de la misma base, que tienen por altura á BC, BA, CA; luego se sigue que *la potencia y sus dos componentes son entre sí como la cabeza y los dos lados de la cuña*: ó que *estando la potencia representada por la cabeza de la cuña el esfuerzo que egerce sobre cada uno de los dos lados está representado por este lado.* Luego sirviéndose de una cuña muy aguda, ó cuyos lados sean muy largos con relacion á la cabeza, se podrán egercer lateralmente esfuerzos muy considerables, dando un golpe mediano sobre la cabeza de la cuña, ó comprimiéndola de un modo cualquiera; por esa razon vemos efectos tan prodigiosos en los *cuchillos*, *hachas*, *dientes &c.*, que no son otra cosa que cuñas.

Consideraciones generales acerca de las máquinas; division de todas las que existen y pueden existir en 21 clases; ley general de su equilibrio, y demostracion del principio de las velocidades virtuales.

264 Combinando de diferente modo estas máquinas que acabamos de dar á conocer, resultan otras muchas por cuyo medio no solo se vencen las resistencias, sino que se comunican, reparten, distribuyen ó trasmiten los impulsos de las fuerzas, segun las diversas necesidades de la vida (*). Sin embargo, á pesar de que hemos visto en las diferentes máquinas que hemos considerado, que una potencia pequeña se equilibra con otra mucho mayor, no debemos deducir por esto que *una potencia pequeña destruye á una potencia grande*; pues en este caso la fuerza grande no se destruye por la pequeña; esta realmente solo destruye una parte igual de la grande, y los obstáculos fijos que opone la máquina destruyen lo demas.

Para aclarar esto observarémos que en la polea móvil, una potencia

(*) *Como se suelen confundir con alguna frecuencia las máquinas con lo que se llama* instrumentos, *debemos advertir que instrumentos son los medios de que nos valemos para aumentar la actividad de nuestros sentidos; y que el objeto de las máquinas es el aliviarnos en nuestras necesidades, economizando las fuerzas de los hombres ó de los animales.*

cualquiera se equilibra con una resistencia dupla. Sin embargo, esto no quiere decir que la potencia *P*, que es por egemplo *tres*, destruye ó sostiene el efecto de la resistencia *seis*, pues ella nunca puede destruir sino *tres*; y si se equilibra con una resistencia como *seis*, es porque el punto fijo G (fig. 101) destruye otro tanto efecto como la potencia *P*; y pudiendo hacer observaciones semejantes en las demas máquinas, deducimos en general, que *cuando por medio de una máquina se equilibra una potencia pequeña con una resistencia grande*, *la potencia pequeña solo destruye una parte de la resistencia igual con dicha potencia*, *y la parte restante de la resistencia se destruye por los puntos ó eges fijos de la máquina.*

265 Cuando por medio de las máquinas se ponen en movimiento las fuerzas, es verdad que una fuerza pequeña pone en movimiento á una resistencia grande; pero esto es con una pérdida de tiempo tanto mayor, cuanto lo es la resistencia respecto de la potencia. Así es, que si tratásemos de elevar un peso de cien libras á una altura de 20 varas, empleando una polea fija necesitarémos una potencia equivalente á poder mover las mismas; y para que la resistencia *R* (fig. 99) subiese las 20 varas que hay desde donde está hasta B, necesitará hacer pasar por la polea 20 varas de cuerda; y suponiendo que en cada vara se emplee un segundo, tardaria 20 segundos; si empleásemos una polea móvil nos bastaria una potencia que fuese capaz solo de levantar 50 libras; pero entónces para subir el mismo peso á la altura de las 20 varas, necesitaria la potencia *P* hacer subir doble cuerda de la que hay desde O á B (fig. 101); luego tendria que hacer subir 40 varas de cuerda; y suponiendo que tardase un segundo en cada vara, necesitaria 40 segundos, que es doble del tiempo que ántes se necesitaba. Y como lo mismo se verifica respecto de las demas máquinas, resulta que *en toda máquina en movimiento se pierde siempre en tiempo lo que se gana en fuerza.* No obstante, como en muchas ocasiones ó nos sobra el tiempo, ó no se lleva precisamente por objeto el vencer una mayor resistencia, sino el hacer la operacion con mas facilidad ó comodidad, como sucede en la mayor parte de las que se emplean en las fábricas y en varios ramos de las artes, resulta que las máquinas son de la mayor importancia en la sociedad; pues *aunque una máquina no puede aumentar en manera alguna el efecto del agente*, *no obstante por su medio se puede aumentar muchísimo el producto del trabajo.* En efecto, para la mayor parte de las operaciones de las artes no se necesita un grande esfuerzo, y sucede que empleando solo un agente para una operacion, se desperdicia mucha parte de su fuerza, como sucede cuando una persona mueve una rueda de un torno de hilar; pues si suponemos que esta rueda comunique el movimiento á un solo huso, como para conseguir este efecto se necesita un esfuerzo muy pequeño, resulta que se desperdicia todo el esfuerzo restante del agente; pero si se distribuye convenientemente toda la fuerza de que es capaz dicha persona por medio de una máqui-

na, y se mueven á un mismo tiempo, diez, ciento, mil ó mas husos, entónces es cuando se ve que una persona produce tanto trabajo como diez, ciento, mil ó mas (*).

266 En las máquinas que facilitan ó abrevian las operaciones de las artes, mas bien se emplea la destreza del hombre que su fuerza; y estas dependen en gran parte del ingenio y sagacidad del que las emplea para distribuir los movimientos, y hacer que varias operaciones dependan de solo un agente. Sobre este punto se ha dado un paso sumamente rápido en la Mecánica, con cuyo auxilio ya se encontrarán muy pocas dificultades para conseguir el efecto que uno se propone con la fuerza ó agente de que puede disponer. Dos sabios españoles, á saber, don Josef Lanz y don Agustin de Betancourt, han reducido todas las máquinas elementales á 21 clases (**).

Para esto han observado que *los movimientos que se emplean en las artes, son ó rectilineos ó circulares, ó determinados en virtud de curvas dadas*; y como pueden ser *continuos* ó *alternados* (de vaiven), resulta que combinando los unos con los otros, y tambien cada uno consígo mismo, se obtienen las veintiuna clases de máquinas siguientes, y que sirven para convertir

1.ª El movimiento rectilineo continuo en otro rectilineo tambien y continuo.

2.ª Id. en rectilineo de vaiven.

3.ª Id. en circular continuo.

4.ª Id. en circular de vaiven.

5.ª Id. en movimiento continuo segun una curva dada.

6.ª Id. en movimiento de vaiven segun una curva dada.

7.ª El movimiento circular continuo, en rectilineo de vaiven.

8.ª Id. en él mismo.

9.ª Id. en circular de vaiven.

10.ª Id. en movimiento continuo segun una curva dada.

11.ª Id. en movimiento de vaiven, segun una curva dada.

12.ª El movimiento continuo segun una curva dada en rectilineo de vaiven.

13.ª Id. en circular de vaiven.

(*) *En mi Compendio de Mecánica Práctica* (§§ 115 y 116) *se ponen otros pormenores sobre este particular*; *y por ahora solo añadirémos que una corta cantidad de carbon empleada en convertir en vapor una cierta cantidad de agua, es suficiente para poducir una fuerza estraordinaria que distribuida convenientemente produce unos resultados tan ventajosos para las artes y manufacturas, que no se puede formar idea sino viéndolos.*

(**) *Este importantísimo trabajo está publicado en Paris el año de* 1808, *bajo el título de* Ensayo sobre la composicion de las máquinas por los señores Lanz y Betancourt.

14.ª Id. en él mismo.

15.ª Id. en movimiento de vaiven segun una curva dada.

16.ª El movimiento rectilineo de vaiven en él mismo.

17.ª Id. en circular de vaiven.

18.ª Id. en movimiento de vaiven segun una curva dada.

19.ª El movimiento circular de vaiven en él mismo.

20.ª Id. en movimiento de vaiven segun una curva dada.

21.ª El movimiento de vaiven segun una curva dada, en movimiento de vaiven segun otra curva dada.

De cada una de estas clases se hacen luego varias divisiones; pues ademas se puede suponer que cada movimiento sea uniforme ó variado, y que produzca su efecto en el mismo plano ó en planos diferentes; y para cada caso particular se presenta en dicha obra la máquina ó máquinas que corresponden, y se advierte si hasta ahora no se ha inventado. Con el auxilio de esta obra ya no hay que hacer otra cosa en la práctica, sino observar bien la naturaleza del movimiento que se trata de efectuar, y cuál es el movimiento de que se puede disponer, acudir á la tabla en que se presentan todos, y elegir el que mas convenga segun las circunstancias.

267 Entendido esto, pasemos á deducir un principio general que puede servir para determinar las leyes de equilibrio en todas las máquinas de cualquier naturaleza que sean.

Para esto observarémos que comparando los Geómetras las condiciones de equilibrio en las máquinas simples, y buscando lo que tienen de comun, han llegado á descubrir una ley que se observa en todo sistema de fuerzas en equilibrio. En esta ley estriba el principio conocido bajo la denominacion de *principio de las velocidades virtuales*, y de que Lagrange ha hecho un uso tan feliz en su apreciable *Mecánica analítica.* En la primera edicion de esta obra, Lagrange no demostró el espresado principio, y solo se propuso deducir de él todas las verdades de la Mecánica; en la segunda da una demostracion fundándose en la teoría de las trócrlas; y como es un asunto de la mayor importancia, vamos á poner aquí su enunciado, lo verificarémos despues en algunos casos de equilibrio, y por último lo demostrarémos como lo hace Poisson en su Mecánica.

268 Supongamos que P, P', P'' &c. (fig. 129) sean las fuerzas dadas; mP, $m'P'$, $m''P''$, &c. sus direcciones, y m, m', m'' &c. sus puntos de aplicacion. Supongamos que estos puntos materiales estén unidos entre sí de un modo cualquiera por hilos inestensibles, por rectas inflexibles ó por cualquier otro medio físico ó mecánico que se pueda concebir: pudiéndose encontrar tambien entre estos puntos algunos que estén sujetos á permanecer sobre superficies ó sobre curvas dadas, y otros que estén de todo punto inmóviles.

Concibamos que se comunique un movimiento infinitamente pequeño á este sistema de puntos, de modo que el punto m pase á n, el m'

á n', el m'' á n'' &c., sin que se alteren en manera alguna las condiciones que unen los puntos entre sí; las rectas infinitamente pequeñas mn, $m'n'$, $m''n''$ &c. se llaman las *velocidades virtuales* de estos puntos; y si se proyecta cada una de estas rectas sobre la direccion de la fuerza aplicada al mismo punto, se tendrá *la velocidad virtual de cada punto, estimada segun la direccion de esta fuerza.* Así, tirando desde el punto n una perpendicular na sobre la direccion mP de la fuerza P ó sobre su prolongacion, desde el punto n' una perpendicular $n'a'$ sobre la direccion $m'P'$ de P' ó sobre su prolongacion &c., las lineas ma, $m'a'$, $m''a''$ &c. serán las velocidades virtuales de los puntos m, m', m'' &c. estimadas segun las direcciones de las fuerzas que obran sobre estos puntos.

269 De aquí en adelante señalarémos con el signo + las proyecciones ma, $m'a'$, $m''a''$ &c. que se cuentan sobre las mismas direcciones de las fuerzas, y con el signo — las que caen sobre las prolongaciones de estas direcciones; de manera que si se hace $ma=p, m'a'=p', m''a''=p''$ &c. las cantidades p, p', p'', *&c.* podrán ser positivas ó negativas; por egemplo, la figura supone que p, p', p''' son positivas, y p'', p^{iv} negativas. Al contrario, las cantidades P, P', P'' *&c.* que representan las intensidades de las fuerzas son siempre positivas, como nos hemos convenido (11).

270 Esto supuesto, *si las fuerzas* P, P', P'' &c. *están en equilibrio, la suma de estas fuerzas multiplicadas respectivamente por las velocidades virtuales* p, p', p'' &c. *estimadas segun sus direcciones es igual á cero, es decir, que se tiene* $\text{Pp}+\text{P}'\text{p}'+\text{P}''\text{p}''+\&\text{c}.=0$ (316);
y *recíprocamente las fuerzas* P, P', P'' &c. *estarán en equilibrio cuando se verifica esta ecuacion para todos los movimientos infinitamente pequeños que se pueden dar al sistema de los puntos* m, m', m'' &c.

Este es el enunciado mas general del principio de las velocidades virtuales. En cuanto á su uso para resolver las cuestiones de Estática, solo se necesita en cada caso particular distinguir los diferentes movimientos infinitamente pequeños que puede tomar el sistema de los puntos m, m', m'' &c., y determinar para cada uno de estos movimientos las velocidades virtuales p, p', p'' *&c.* estimadas segun las direcciones de las fuerzas dadas. Hecho esto, el principio de las velocidades virtuales ó la (ec. 316) en que está espresado, dará inmediatamente todas las ecuaciones de equilibrio, que serán tantas como movimientos sean posibles.

271 Consideremos, por egemplo, una palanca DcE (fig. 130) formada por una linea inflexible comprendida en un mismo plano. Sea c el punto de apoyo; P y P' dos fuerzas dirigidas en el plano de la palanca, y aplicadas á los puntos m y m' de esta linea segun las direcciones mP y m'P'. La palanca solo puede tomar un movimiento de rotacion al rededor del punto c; luego se tendrá solo una ecuacion de equilibrio, á saber, $Pp+P'p'=0$,
siendo p y p' las velocidades virtuales de m y m', estimadas segun las direcciones de P y P' que resultan de este movimiento.

Para determinar los valores y los signos de p y p', observarémos primero que esta ecuacion no puede verificarse á ménos que estas cantidades no sean de signos contrarios; lo que exige el que las fuerzas P y P' intenten hacer girar á la palanca en sentidos opuestos al rededor del punto c. Luego si suponemos que la rotacion que se imprime á la palanca se haga en el sentido de la fuerza P, entónces p es la positiva, y p' la negativa. En este movimiento, los ángulos mcn y $m'cn'$ descritos por las lineas cm, y cm' son iguales; los arcos mn y $m'n'$ descritos al rededor del punto c como centro son (I. 504 cor. 2.°) como sus radios cm y cm'; y como sean grandes ó pequeños, siempre conservan la misma relacion, la conservarán cuando lleguen á sus límites (I. 328), ó lo que es lo mismo, cuando sean infinitamente pequeños, de manera que se tiene siempre $\frac{mn}{cm}=\frac{m'n'}{cm'}$.

Si desde los puntos n y n' tiramos las perpendiculares na y $n'a'$ sobre las direcciones de las fuerzas P y P', tendrémos $p=ma$, $p'=m'a'$.

Tiremos tambien desde c las perpendiculares cb, cb' sobre las mismas direcciones, y hagamos $cb=q$, $cb'=q'$; considerando los arcos como líneas rectas perpendiculares á los radios cm y cm', los triángulos cbm, y mna serán semejantes (I. 485 cor. 2.°), pues ademas de ser rectángulos el uno en b y el otro en a, resulta de suponer recto el ángulo nmc, que el ángulo amn junto con el bmc valen un ángulo recto, por lo que el ángulo nma es igual con el mcb; por la misma razon serán semejantes los triángulos $cb'm'$ y $m'n'a'$ y se tendrá $ma=\frac{mn}{cm}\times cb$, $m'a'=\frac{m'n'}{cm'}\times cb'$;

por consiguiente $p=\frac{mn}{cm}\times q$, $p'=\frac{m'n'}{cm'}\times q'$.

Si sustituimos estos valores de p y p' en la ecuacion de las velocidades virtuales, teniendo presente que la p' debe ser negativa, y suprimiendo los factores iguales $\frac{mn}{cm}$, $\frac{m'n'}{cm'}$, resulta

$$Pq-P'q'=0,\text{ ó } Pq=P'q',\text{ que da } P:P'::q':q;$$

que quiere decir, que *las fuerzas* P y P' *son recíprocamente proporcionales á las perpendiculares* q y q' *tiradas desde el punto de apoyo sobre sus direcciones*; lo que equivale á decir que *sus momentos son iguales con relacion á este punto.*

272 Como este teorema se ha demostrado directamente (229), resulta que el principio de las velocidades virtuales se halla comprobado respecto de la palanca. A la verdad solo hemos aplicado dos fuerzas á esta máquina; pero si se quiere se puede considerar un mayor número, y cualquiera que sea este se deducirá la misma condicion de equilibrio

demostrada (97). Este principio se verifica tambien sin ninguna dificultad en el torno, polea &c.

273 Comprobada ya la verdad del principio, tratemos de demostrarle. Para esto sean P, P', P'' *&c.* un número cualquiera de fuerzas aplicadas al mismo punto m (fig. 131) segun las direcciones $m\mathrm{P}$, $m\mathrm{P}'$, $m\mathrm{P}''$ &c. comprendidas ó no en un mismo plano; sea tambien R su resultante, y $m\mathrm{R}$ su direccion.

Tiremos por el punto m en una direccion cualquiera la linea mn, y descompongamos cada una de las fuerzas R, P, P', P'' *&c.* en otras dos, la una dirigida segun la linea mn, y la otra perpendicular á esta linea. Pues que R es la resultante de todas las fuerzas, su componente segun la linea mn será igual á la suma de las componentes de dichas fuerzas segun la misma linea; luego espresando por a, α, α', α'' *&c.* los ángulos que forman las direcciones de las fuerzas R, P, P', P'' *&c.* con la linea mn, tendrémos (ecs. 17 y 13)

$$R\cos.a = P\cos.\alpha + P'\cos.\alpha' + P''\cos.\alpha'' + \&c. \quad (317).$$

Pero si desde el punto n, tomado á arbitrio sobre la mn, se tiran las perpendiculares nr, np, np', np'' &c. á las direcciones de las fuerzas R, P, P', P'' *&c.* ó á sus prolongaciones, y se espresan por r, p, p', p'' *&c.* las proyecciones mr, mp, mp', mp'' &c. de la linea mn sobre estas direcciones, y por c la linea mn, se tendrá

$$r = c\cos.a,\ p = c\cos.\alpha,\ p' = c\cos.\alpha'\ \&c.;$$

luego si multiplicamos por c todos los términos de la ecuacion precedente, y sustituimos despues en vez de $c\cos.a$, $c\cos.\alpha$, $c\cos.\alpha'$&c. los valores r, p, p', p'' *&c.* que acabamos de espresar, tendrémos

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \&c. \quad (318).$$

Si se supone que el punto m se haya trasladado á n, y se considera la mn como la velocidad virtual de este punto, las cantidades r, p, p', p'' *&c.* serán sus velocidades virtuales, estimadas segun las direcciones de las fuerzas R, P, P', P'' *&c.*; luego la (ec. 318) significa que *el producto de la resultante de un número cualquiera de fuerzas aplicadas á un mismo punto, por la velocidad virtual de este punto estimada segun la direccion de esta resultante, es igual á la suma de los productos de estas fuerzas multiplicadas por las velocidades virtuales del mismo punto, estimadas segun sus direcciones respectivas.*

Debemos advertir que para que se verifique este teorema, no es necesario que las velocidades virtuales sean por precision infinitamente pequeñas; porque la longitud de la linea mn es de todo punto arbitraria.

274 Para que las fuerzas P, P', P'' *&c.* estén en equilibrio al rededor del punto m, supuesto enteramente libre, es necesario que se tenga $R=0$, lo que reduce la (ec. 318) á $Pp + P'p' + P''p'' + \&c. = 0$ (319), ecuacion que *comprende el principio de las velocidades virtuales relativamente á las fuerzas* P, P$'$, P$''$ &c.

Este principio se verifica igualmente cuando el punto m, en vez de estar libre, está sujeto á permanecer sobre una superficie ó sobre una curva dada, con tal que entónces las velocidades virtuales sean infinitamente pequeñas; y se verifica cuando las potencias obran sobre diferentes puntos de un cuerpo ó que están unidos de un modo cualquiera.

{ Lagrange espresa las fuerzas ó potencias por las letras P, Q, R, S &c. y las velocidades virtuales estimadas segun sus direcciones por dp, dq, dr, ds; y atendiendo á estas consideraciones la (ec. 319) se convierte en $Pdp+Qdq+Rdr+Sds+\&c.=0$ (320).

{ Del principio de las velocidades virtuales se deduce inmediatamente este importante teorema, á saber, que *el centro de gravedad de un sistema de cuerpos pesados, unidos entre sí de un modo cualquiera, está en general ó lo mas alto ó lo mas bajo que sea posible, cuando los cuerpos se hallan en equilibrio*, cuya demostracion omitirémos porque nos distraeria demasiado de nuestro objeto. }

Del rozamiento y rigidez de las cuerdas.

275 Siempre que las fuerzas aplicadas á diferentes puntos de un cuerpo sólido satisfagan á las ecuaciones de equilibrio que hemos hallado anteriormente, el cuerpo permanecerá en reposo con tal que se haya tenido cuidado de comprender en el número de las fuerzas dadas el peso del cuerpo considerado como una fuerza vertical aplicada al centro de gravedad. En rigor este equilibrio se deberia romper en el instante en que por una mudanza cualquiera en las direcciones ó en las intensidades de las fuerzas dejasen de verificarse estas ecuaciones.

Pero cuando se trata de un cuerpo colocado sobre un plano fijo ó sujeto por algun obstáculo fijo, una circunstancia física de que hemos hecho abstraccion hasta ahora, se opone á que se verifique en la naturaleza este rompimiento instantaneo del equilibrio.

Esta circunstancia proviene de que cuando un cuerpo está colocado sobre otro, las partes salientes del uno engranan en las entrantes del otro, y cuando se quiere que el uno resbale sobre el otro es necesario desprender estas desigualdades ó romperlas, á cuyo rompimiento resistirán mas ó ménos segun tengan entre sí una mayor ó menor union, trabazon ó enlace las partes de un cuerpo, que es lo que se llama su *cohesion*, cuando esta trabazon ó atraccion de las partes es débil; y *coherencia*, cuando es muy fuerte; y la fuerza que es necesario emplear para desprender ó romper estas desigualdades se llama *friccion ó rozamiento.*

Este puede ser de dos especies: la primera es cuando el un cuerpo debe resbalar sobre el otro; y la segunda cuando la una superficie rueda sobre la otra; este último rozamiento es mucho menor que el primero, porque el movimiento de rotacion contribuye en parte á hacer desprender las partes entrantes y salientes; y por esta causa los carruageros al bajar una cuesta muy pendiente atan una de las ruedas, y hacen que el rozamiento sea mayor y no se precipite el carruage.

El rozamiento es una fuerza pasiva, y por sí mismo es incapaz de producir el movimiento; pero lo que sí hace es destruir el movimiento comunicado por otras fuerzas; por lo que cuando se trata de hacer aplicaciones á la práctica de las leyes generales de equilibrio, es de la mayor importancia el atender á esta circunstancia.

276 Dos métodos hay de medir el rozamiento: el primero consiste en colocar la superficie del cuerpo AB (fig. 132) sobre la del plano con que se quiere comparar; se fija á dicho cuerpo un hilo que pasa por una polea D, y á su estremo se van colocando diversos pesos, hasta que el peso M sea tal que principie á traer hácia sí al cuerpo AB; en este caso se divide el peso total del cuerpo AB por el peso M, y se tiene la relacion de la presion con el rozamiento.

277 El segundo método consiste en colocar el cuerpo tal como MN (fig. 133) sobre un plano que se halla al principio muy poco inclinado al horizonte, y que poco á poco se vaya haciendo mayor el ángulo hasta que se vea que empieza á resbalar el cuerpo; en cuyo caso *la relacion de la presion ó peso del cuerpo con el rozamiento está espresada por la tangente del ángulo de elevacion CAB.*

Para demostrarlo tiremos por el centro de gravedad G del cuerpo las perpendiculares GD y GK, la una al plano horizontal, y la otra al plano inclinado. Representemos por GD el peso del cuerpo, y descompongamos GD en dos fuerzas GH y GK, la primera paralela al plano inclinado, y la segunda perpendicular á este mismo plano, y tendrémos

$$GH = DK = GD\,\text{sen.}\,GDH = GD\,\text{sen.}\,DGK \text{ y } GK = GD\cos.\,DGK;$$

pero los ángulos DGK y CAB son iguales por ser ambos complementos de ángulos agudos, cuyo vértice se halla en I; luego en las ecuaciones precedentes podrémos remplazar el ángulo DGK por A, lo que nos dará

$$GH = GD\,\text{sen.}\,A,\ GK = GD\cos.\,A;$$

ó espresando por P el peso del cuerpo que hemos representado por GD, será $GH = P\,\text{sen.}\,A$, $GK = P\cos.\,A$.

La presion que sufre el plano inclinado estando espresada (257) por $GK = P\cos.\,A$, la intensidad del rozamiento que se sabe por esperiencia como verémos (281), es proporcional á la presion, estará medida por $P\cos.\,A \times f$, llamando f á la cantidad que espresa la parte de la presion á que equivale el rozamiento; pero siendo el rozamiento la fuerza que impide al cuerpo el resbalar, deberá equilibrarse con la componente $GH = P\,\text{sen.}\,A$ que obra en el sentido de la longitud del plano inclinado;

luego se tendrá $P\cos.\,A \times f = P\,\text{sen.}\,A$, que da $f = \dfrac{P\,\text{sen.}\,A}{P\cos.\,A} = \text{tang.}\,A$.

278 El rozamiento proviene de una multitud de circunstancias que el cálculo solo no puede abrazar, porque es necesario tener en consideracion el pulimento de las superficies, la temperatura, la humedad de la atmósfera, la afinidad de las substancias, la cohesion de sus partes, la velocidad del movimiento &c.; y así, es indispensable recurrir á la esperiencia para perfeccionar lo que ella nos haga cor[illegible]r, y pre-

ver lo que ella no esprese. El trabajo mas apreciable que hay sobre esta importante materia es una memoria de Mr. Coulomb, que tiene por título *Teoría de las máquinas simples, teniendo en consideracion el rozamiento de sus partes y la rigidez de las cuerdas*, que ganó el premio ofrecido por la Academia de Ciencias de Paris para el año de 1781.

279 Los principales resultados deducidos de los muchos esperimentos que contiene, son los siguientes.

1.° *El rozamiento de las maderas resbalando en seco sobre las maderas, opone despues de un cierto tiempo de reposo una resistencia que es proporcional á la presion; esta resistencia aumenta sensiblemente en los primeros instantes de reposo; pero despues de algunos minutos llega por lo regular á su máximo ó á su límite.*

2.° *Cuando las maderas resbalan en seco sobre las maderas con una velocidad cualquiera, el rozamiento tambien es proporcional á la presion; pero su intensidad es mucho menor que la que sufren las superficies despues de algunos minutos de reposo.* Respecto del roble, resbalando sobre el roble, se halla que la fuerza necesaria para vencer el rozamiento despues de algunos minutos de reposo, es á la necesaria para vencer el rozamiento cuando las superficies tienen ya un cierto grado de velocidad, próximamente como 4 á 1.

3.° *El rozamiento de los metales, resbalando sobre los metales sin unto, es tambien proporcional á la presion; pero su intensidad es la misma, ya se desprendan las superficies despues de un tiempo cualquiera de reposo, ó ya conserven una velocidad cualquiera uniforme.*

4.° *Las superficies heterogeneas, tales como las maderas y los metales, resbalando las unas sobre las otras sin unto, dan para su rozamiento resultados muy diferentes de los que preceden*; porque la intensidad de su rozamiento con relacion al tiempo de reposo, crece lentamente y no llega á su límite sino despues de cuatro, cinco ó mas dias, cuando en los metales llega á su límite en un instante, y en las maderas en pocos minutos. Ademas, en las maderas que resbalan sin unto sobre las maderas, y en los metales sobre los metales, la velocidad influye muy poco en los rozamientos; pero aquí el rozamiento crece muy sensiblemente, á medida que se aumentan las velocidades; de manera que el rozamiento crece sobre poco mas ó ménos siguiendo una progresion aritmética, cuando las velocidades crecen segun una progresion geométrica.

280 Con estos resultados aun no tenemos lo suficiente para calcular el rozamiento en ningun caso práctico; pues con saber por egemplo que es proporcional á la presion, si de antemano no tenemos determinada la fuerza necesaria para vencer el rozamiento á una presion conocida, nada podemos hacer; por esta causa vamos á poner aquí los datos que resultan de los citados esperimentos.

Para formar una verdadera idea de ellos, no será inoportuno el que manifestemos el aparato con que se han hecho, y es el que se ve en la (fig. 134) : *ab* es una especie de romana de 7 pies (franceses) de longitud, en cuyo estremo *a* habia fijo un ege de hierro en figura de cuchillo que servia de punto de rotacion, y que se apoyaba contra dos pequeñas placas de hierro colocadas en B; al anillo *c* estaba unida la cuerda *cdh*, que pasando por la polea *d* tiraba de la rastra Q.

Por medio del peso *P*, que se hace correr poco á poco á lo largo de la romana *ab*, se mide la tension de la cuerda fija en *c*; y cuando la palanca principia á hacer mover la rastra, esta tension es la medida del rozamiento de la superficie inferior *mn* de la rastra con la *rs* sobre que se coloca. Se ha tenido cuidado de añadir á la tension producida por el peso *P*, la que correspondia al peso de la palanca y á la distancia de su centro de gravedad al punto de rotacion.

281 En este concepto, los esperimentos que se han hecho sobre el rozamiento de las superficies que resbalan en seco la una sobre la otra segun el hilo de la madera, sin ninguna especie de unto y solo con el grado de pulimento que el arte les puede dar, han dado los resultados siguientes.

El rozamiento en el roble que resbala sobre el roble, llega á su *máximo*, esto es, adquiere todo el aumento de que es susceptible á los dos minutos de reposo; y la relacion de la presion al rozamiento se ha encontrado ser

1.° 74:30=2,46; 2.° 874:406=2,16; y 3.° 2474:1116=2,21; *relacion media* 2,28.

Como para abreviar espresarémos siempre del modo que lo acabamos de hacer, los resultados de todos los esperimentos, conviene que espliquemos bien este modo de espresarlos; pues entendido en un caso se comprenderá con facilidad en todos los demas. Por esta causa advertirémos que estos resultados que acabamos de poner abreviadamente quieren decir que se han hecho tres esperimentos: que en el 1.° una presion de 74 libras ha necesitado para vencer el rozamiento, principiando á mover la rastra, de una fuerza de 30 libras; por consiguiente la relacion en que está la presion con el rozamiento en este caso, se halla dividiendo el 74 por 30, lo que da 2,46 que es lo que se ve allí despues del signo =; que en el 2.° esperimento una presion de 874 libras ha necesitado de un peso de 406 libras para vencer el rozamiento; por lo que dividiendo las 874 libras por 406, se halla la relacion 2,16 que es la que hay despues del signo =; y que en el esperimento 3.° una presion de 2474 libras ha necesitado para vencer el rozamiento de un peso de 1116 libras; por lo que dividiendo 2474 por 1116 se obtiene la relacion 2,21, que es lo que hay despues del signo =; y por último sumando estas tres relaciones 2,46; 2,16; 2,21, y dividiendo por *tres*, se halla 2,28 por *relacion media*, que es lo que hemos espresado al fin.

Debemos observar de paso para que se note lo verdadero que es el que la *presion es proporcional con el rozamiento*, que en los esperimentos 1.º y 3.º en que las presiones 74 y 2474 son tan diferentes, pues la primera es mas de 33 veces menor que la segunda, se nota solo una diferencia de 0,25 en la relacion de la presion al rozamiento.

282 En los esperimentos anteriores la superficie de contacto era de tres pies franceses; pero con el fin de averiguar la alteracion que originaria la diminucion de la superficie de contacto, puso debajo de la rastra dos pequeños prismas triangulares de madera de roble de 15 pulgadas de longitud, y en que el ángulo que descansaba sobre el madero durmiente, estaba redondeado, con lo cual consiguió el reducir las superficies de contacto á las mas pequeñas dimensiones posibles. Se notó en los esperimentos que en un tiempo muy corto llegaba el rozamiento á su *máximo*; y la relacion se obtuvo ser

1.º 250:106=2,36; 2.º 450:186=2,42; 3.º 856:356=2,40; *relacion media* 2,39.

El rozamiento del roble resbalando sobre el pino, llega á su *máximo* de aumento á los seis segundos de reposo; y la relacion media de la presion al rozamiento es la de 1,5. La del pino sobre pino es de 1,78.

El rozamiento en el álamo negro, resbalando sobre el álamo negro, no llega á su *máximo* de aumento sino con una presion de 45 libras y un reposo de un minuto; y la relacion media de la presion al rozamiento es de 2,17.

283 Colocando las fibras de la madera en direccion encontrada, esto es, que la direccion de las fibras en una superficie forme ángulo recto con las de la otra, ha resultado que *á igualdad de presion y de superficie*, *el rozamiento necesita mas tiempo para llegar á su límite*; y *que en este caso era menor que en el caso anterior*, *pero siempre proporcional á la presion*; y en el roble sobre el roble se ha encontrado ser la relacion

1.º 50:13=3,85; 2.º 1650:450=3,67; *rel. med.* 3,76.

284 El rozamiento del hierro resbalando sobre el roble, tarda en llegar á su máximo 4 dias de reposo; y la relacion de la presion al rozamiento se ha encontrado ser

1.º 53:10=5,30; 2.º 1650:340=4,86; *rel. med.* 5,08.

La del cobre sobre el roble es de 5,50.

En el hierro resbalando sobre el hierro, solo se pudieron hacer esperimentos hasta la presion de 450 libras; porque á mayores presiones el hierro se rallaba, y los resultados eran inciertos; el mayor ó menor tiempo de reposo no influye en el rozamiento; y la relacion de la presion al rozamiento se obtuvo

1.º 51:15=3,40; 2.º 450:124=3,63; *rel. med.* 3,52.

En el hierro sobre el laton se encontró ser la relacion

1.º 50:14=3,6; 2.º 450:112=4,01; *rel. med.* 3,8.

285 Las superficies de contacto en los dos esperimentos anteriores eran de 45 pulgadas cuadradas, y reducidas las superficies á ser las cabezas convexas de cuatro clavos, ha resultado ser la relacion

1.º 4[illegible]=5,9; 2.º 850:140=6,0; *rel. med.* 5,95.

Superficies dadas de unto.

286 El tiempo que tarda el rozamiento en llegar á su límite en este caso, depende de la dureza del unto y de la estension de las superficies de contacto; estando reducidas las superficies á las menores dimensiones posibles, llega el rozamiento á su límite en muy pocos segundos.

En el roble resbalando sobre el roble, renovando el unto de sebo á cada operacion, se ha encontrado ser la relacion de la presion al rozamiento despues de un reposo de

0″....	1.º 47:6=7,83;	2.º 1650: 64=25,78;	3.º 3250: 120=27,08.
3″................		2.º 1650:160=10,31;	3.º 3250: 320=10,15.
15″................		2.º 1650:209= 7,89;	3.º 3250: 355= 9,15.
1′................		2.º 1650:280= 5,89;	3.º 3250: 413= 7,86.
4′....	1.º 47:8=5,87;	2.º 1650:318= 5,18;	3.º 3250: 593= 5,48.
2 *horas*.	1.º 47:9=5,22;	2.º 1650:452= 3,65;	3.º 3250: 920= 3,53.
5 *dias*................		2.º ....;	3.º 3250:1220= 2,66.
6 *dias*................		2.º 1650:622=12,65;	3.º 3250:1554= 2,09.

En el rozamiento del roble sobre el roble untando las superficies con sebo ya usado en operaciones anteriores, se ha encontrado ser la relacion despues de un reposo de

0′....	1.º 2310:187=12,35;	2.º 5810: 502=11,56.
2′....	1.º 2310:392= 5,89;	2.º 5810: 790= 7,35.
1 *hora*..	1.º 2310:451= 5,12;	2.º 5810:1186= 4,89.
16 *horas*.	1.º 2310:514= 4,49;	2.º 5810:1535= 3,78.

En el rozamiento de láminas de cobre sobre láminas de hierro untadas con sebo no usado, no influye la estension de las superficies; y la relacion media de la presion al rozamiento cuando este ha llegado á su máximo es la de 9,53 : 1.

Estas mismas láminas untadas con aceite de olivo dan la relacion 6:1, y untadas con unto de coche dan la de 7: 1.

Rozamiento de las superficies en movimiento.

287 El rozamiento del roble, resbalando sobre el roble sin unto, es el mismo para todos los grados de velocidad; y teniendo las fibras en una misma direccion, para una superficie de tres pies, la relacion de la presion al rozamiento se ha encontrado ser

1.º 74:13=5,7; 2.º 874:92=9,50; 3.º 2474:253=9,77; *rel. med.* 8,32.

Para una superficie de contacto de 36 pulgadas

1.° 47 : 5=9,4 ; 2.° 447 : 49=9,1 ; 3.° 1647 : 160=10,3 ; *rel. med.* 9,6.

Y para una superficie de contacto muy pequeña

1.° 47 : 4,5=10,4; 2.° 447 : 36=12,4; 3.° 847 : 58=14,6; *rel.med.* 12,47.

288 Cuando las fibras de la madera de roble se cruzan á ángulo recto sin unto, la velocidad no influye en el rozamiento ; y para una superficie de 36 pulgadas se ha encontrado ser 1.° 47:4,5=10,4; 2.° 147:14=10,5; 3.° 447:46=9,9; 4.° 847:87=9,8; *rel. med.* 10,15.

Y para una superficie de dimension lineal se halló

1.° 47:4,5=10,4; 2.° 447:47=9,5; 3.° 1647:161=10,2; *rel. med.* 10,3.

La relacion media de la presion al rozamiento en el roble que resbala sobre el pino segun el hilo de la madera es 6,33:1.

La del pino sobre el pino de 6:1.

La del álamo negro sobre el álamo negro de 10:1.

El rozamiento de las maderas con los metales aumenta del modo mas sensible con la velocidad; en el hierro con el roble para una velocidad insensible la relacion se ha encontrado ser 1.° 53:4,5=11,8; 2.° 453:35=12,93; 3.° 853:67=12,7; 4.° 1653:125=13,2; *rel. med.* 13,4.

La misma relacion para una velocidad de 1 pie por segundo, se ha encontrado ser 1.° 53:9=5,9 ; 2.° 453:78=5,8; 3.° 853:155=5,5 ; 4.° 1653:260=6,3; *rel. med.* 5,85.

De las superficies en movimiento dadas con unto.

289 Para disminuir el rozamiento de las maderas solo puede servir el *sebo* y el unto de coche, y para los metales el aceite (*).

En el roble untado con sebo renovado á cada ensayo, resbalando sobre roble con una velocidad insensible, se ha encontrado ser la relacion 1.° 3250:118=28,7; 2.° 1650:59=27,9; 3.° 850:31=27,4; 4.° 850:16=28,1; 5.° 250:8,5=29,4; 6.° 50:1,75=28,6; *rel.med.* 28,35.

La misma relacion para superficies de contacto nulas se ha encontrado ser 1.° 50:3=16,7 ; 2.° 250:15=16,6; 3.° 450:28=16,1; 4.° 850:50=17,0; 5.° 1650:100=16,5 ; *rel. med.* 16,58.

Los mismos resultados se han obtenido poniendo las fibras de la madera al traves.

De los metales resbalando sobre maderas untadas con sebo.

290 Cuando los metales resbalan sobre maderas untadas con materias crasas, el rozamiento para velocidades insensibles disminuye mas que en todas las especies de rozamiento ; pero á poco que se aumenten las velocidades, se halla que aumenta mucho con la velocidad.

La relacion de la presion al rozamiento en el hierro que resbala sobre el roble untado con sebo, renovado á cada operacion y con una velocidad insensible, es 1650:47=35,1.

(*) *Del asfalto, pez mineral ó betun de Judéa, se saca un betun que es muy bueno para untar los eges de las ruedas.*

En el rozamiento entre las maderas y los metales cuando las superficies de contacto están reducidas á sus menores dimensiones, influye muy poco el unto de sebo; y lo mismo sucede quedando las superficies solo untuosas, esto es, cuando despues de untadas se limpian bien y se hacen resbalar.

Del rozamiento de los metales.

291 La relacion de la presion al rozamiento entre las superficies de hierro resbalando sin unto, se ha encontrado ser
1.º 53:15=3,5; 2.º 453:125=3,6; *rel. med.* 3,55;
y untadas con sebo á cada operacion es
1.º 53:8,5=6,2; 2.º 453:45=10,1; 3.º 1653:160=10,3; *rel. med.* 8,87.
En el hierro sobre el cobre sin unto es
1.º 52:12,5=4,2; 2.º 452:110=4,1; *rel. med.* 4,15.
Y con unto es
1.º 52:6,5=8,0; 2.º 452:42=10,7; 3.º 1652:150=11,0; *rel. med.* 9,9.
En el hierro sobre el cobre no renovando el unto es
1.º 52:6,5=8,0; 2.º 452:56=8,1; 3.º 1652:210=7,9; *rel. med.* 8,0.
Y quedando dichas superficies solo untuosas, la relacion bajo todos los grados de velocidad es
1.º 47:5,5=8,5; 2.º 447:51=8,7; 3.º 847:112=7,6; *rel. med.* 8,3.
Estando dichas superficies untadas con sebo, para una velocidad de dos pulgadas por segundo, la relacion es 847:95=8,9.
Con el mismo unto y una capa de aceite encima, para una velocidad cualquiera, la relacion es 847:112=7,6.

De la rigidez de las cuerdas.

292 Cuando la union de las partículas de un cuerpo es tal que no muda de figura, á pesar de cualquier esfuerzo que se haga sobre él, entónces se dice que tiene *una rigidez absoluta* ó que es *perfectamente rígido.* Si al menor impulso muda de figura, se dice que tiene *una flexibilidad absoluta* ó que es *perfectamente flexible.* En la naturaleza no existe cuerpo alguno que tenga rigidez ni flexibilidad absoluta, y sí relativas. Una ballena se dice que es flexible, cuando se compara con una barra de hierro, y rígida cuando se compara con un hilo.

Entendido esto, debemos observar que la maroma ó cuerda entra en la mayor parte de las máquinas; y en todas ocasiones hemos supuesto que las cuerdas eran perfectamente flexibles, lo que no se verifica en la naturaleza; pues para hacer que una cuerda se doble y se aplique exactamente al carril ó cagera de una polea, al cilindro ó rueda de un torno &c., se necesita un cierto grado de fuerza de que hasta ahora hemos prescindido y que debemos tener en consideracion; y esta resistencia es lo que se comprende bajo la denominacion de *rigidez de las cuerdas.* Esta rigidez proviene del modo con que se hacen, que es el siguiente: 1.º se hila el cáñamo y se hace lo que se llama *tramilla*: de dos tramillas se hace el *bramante ó hilo carreto*; luego, se tuercen varios bramantes y forman lo que se llama *cordon*, *ramal ó hijuela*; despues se reunen varios ramales, se tuercen en sentido contrario y queda hecha la cuerda; y segun sea la naturaleza del bramante, el número de estos de que conste el ramal, y el número de ramales de que se componga la cuerda, maroma ó cable, resulta esta mas ó ménos gruesa. Como á cada operacion sufre nueva torcedura, resulta que por lo regular la cuerda formada está reducida á los dos tercios de la longitud que tenia el bramante; y á causa de esta direccion encontrada en que se tuercen los hilos, resulta la resistencia que es necesaria para plegarlas y que constituye lo que se llama su *rigidez.*

293 Para determinar por esperiencia lo que corresponde á la rigidez de las cuerdas, se ha necesitado averiguar de antemano la fuerza necesaria para vencer el rozamiento de un cilindro ó de una rueda que gira sobre un plano.

Los rodillos de gayaco girando sobre un plano de roble bien acepillado con la garlopa y pulido con piel de pez marino, para producir un movimiento continuo muy lento necesitan las fuerzas siguientes: para uno de seis pulgadas de diámetro cargado con 100 libras, se necesitan 0,6 lib.; cargado con 500 lib. ha necesitado 3,0 lib.; y con 1000 lib. ha necesitado 6,0 lib.

Uno de dos pulgadas de diámetro con las mismas cargas ha necesitado para producir el mismo efecto de 1,6 lib.; de 9,4; y de 18,0 lib.

De donde resulta que el rozamiento de los cilindros que giran sobre planos horizontales sigue la *razon directa de las presiones é inversa de los diámetros de los rodillos*; y se ha encontrado tambien que *el untar las superficies no disminuye sensiblemente el rozamiento.*

Los rodillos de álamo negro dan un rozamiento $\frac{4}{5}$ mayor que los de gayaco; uno de 6 pulgadas de diámetro con una presion de 1000 libras, ha necesitado de 10 libras; y otro de 12 pulgadas ha necesitado 5 libras.

294 Habiendo determinado de antemano el rozamiento de los rodillos, por ser necesario valerse de ellos para los esperimentos sobre la rigidez de las cuerdas, pasa á hacer los esperimentos relativos necesarios; y por dos métodos diferentes ha encontrado que *las fuerzas necesarias para plegar las cuerdas guardan muy aproximadamente la relacion directa de las tensiones de las cuerdas*, *é inversa del diámetro de los rodillos*, *como ya lo habian hallado* Amontons y Desaguilliers; pero no se verifica, como dichos Autores aseguran, que *siga tambien la razon directa de los diámetros de las cuerdas*, *sino que resulta aproximadamente como los cuadrados de dichos diámetros*, *ó mas exactamente como una potencia de los diámetros espresada por* 1,8 *cuando las cuerdas son nuevas*, y va disminuyendo esta cantidad á proporcion de lo usadas que están; pero jamas ha llegado á ser 1,4.

295 Más como la simple relacion no sirve para determinar las cantidades, pondrémos aquí los siguientes resultados.

Tabla para determinar la rigidez de las cuerdas no embreadas de tres ramales.

Peso ó tension que sufre la cuerda en libras.	*Cuerda n.º 1.º de 6 hilos carreto, de 2,5 lineas de perímetro ó de 0,80 lineas de diámetro.* Diámetro de los rodillos.			*Cuerda n.º 2.º de 15 hilos carreto, y 20 lineas de circunferencia ó de 6,37 lineas de diámetro.* Diámetro de los rodillos.			*Cuerda n.º 3.º de 30 hilos carreto, y 28 lineas de circunferencia ó de 8,91 de diámetro.* Diámetro de los rodillos.		
	1 *pulg*	2 *pulg*	4 *pulg*	1 *pulg*	2 *pulg*	4 *pulg*	2 *pulg*	4 *pulg*	6 *pulg*
Libras.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.
25	2,0	*	*	7,0	3,2	1,7	11,0	5,0	*
125	11,0	4,0	*	22,0	9,0	5,0	21,0	8,0	*
225	17,0	6,5	*	30,0	17,0	7,0	29,0	14,0	*
425	31,0	12,0	5,7	65,0	31,0	13,0	47,0	23,0	*
625	43,0	15,0	7,2	32,0	41,0	16,7	67,0	31,0	*
1025	*	*	11,0	*	*	27,0	*	50,0	34,0

Las mismas cuerdas despues de haberlas tenido en agua 5 ó 6 horas.

Libras.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	lib.	
25	*	0,5	5,0	2,0	2,5	9,0	
125	4,5	2,2	11,0	4,5	35,0	13,0	
225	7,0	3,0	17,0	*	45,0	17,0	
425	11,0	5,1	28,0	10,0	64,0	26,0	
625	14,0	6,5	38,0	15,0	82,0	35,0	
1025	*	*	*	23,0	*	5,4	

Se señalan con una * los esperimentos que no se han hecho.

Las cuerdas embreadas necesitan próximamente un sesto mas de peso que las blancas para plegarse.

Del rozamiento de los eges.

296 En los cabestantes, gruas y poleas destinadas para mover grandes pesos, se emplean casi siempre eges de hierro que giran en cajas de cobre; y cuando solo se trata de vencer resistencias medianas, las poleas son por lo regular de madera de gayaco que giran sobre eges de encina ó de box; por lo que no será inoportuno poner aquí los resultados de los rozamientos segun su importancia.

En los rozamientos de los eges de hierro en cajas de co[illegible] sin unto, se ha encontrado ser la relacion media de la presion al rozamiento de 6,3:1; y que la velocidad no influye sensiblemente en estos rozamientos.

En eges de hierro que giran en cajas de cobre dadas de sebo muy puro y sin fibras, que es el unto mas á propósito, la relacion es de 11,5:1.

El rozamiento es menor en el movimiento de rotacion en que las partes en contacto pueden desengranarse con mas facilidad que cuando resbalan las superficies; y tambien se verifica que en este movimiento el rozamiento disminuye un poco á proporcion que aumenta la velocidad.

La relacion de la presion al rozamiento de eges de hierro que giran en cajas de cobre, es de 8:1.

Quedando solo untuosas las superficies se obtiene la misma relacion.

Cuando sobre una superficie untuosa se ha puesto aceite de olivo, la relacion se ha encontrado ser tambien la de 8:1 ó un poco mas pequeña, pero jamas menor que 7,5:1.

Como en los usos ordinarios están por lo regular los aparejos al aire, al sol, á la lluvia &c., se puede establecer en general que la relacion de la presion al rozamiento es la de 7,5:1.

Para que fuesen los rozamientos mas sensibles en la rotacion de las maderas, se usó de poleas de 12 pulgadas de diámetro montadas sobre eges de 3 pulgadas; el rozamiento se halló el mismo, ya estuviese el ege fijo á la polea y girase sobre cajas unidas sólidamente á la madera, ó ya fuese la polea móvil y girase al rededor de un ege.

297 Cuando las maderas salen de mano del obrero, no han adquirido todo el grado de pulimento necesario y de que son susceptibles; por lo que para hacer los esperimentos se prepararon del modo siguiente: se untaron ántes los eges con sebo, y despues por medio de una cuerda puesta en el carril de la polea y cargada con mil ó mil y doscientas libras, se producia á fuerza de brazo un movimiento de rotacion durante una hora ó dos, renovando el sebo dos ó tres veces durante esta operacion.

Despues de esta preparacion se ha hallado que siendo la polea de gayaco, y el ege de encina untado con sebo, la relacion de la presion al rozamiento es de 26:1; y quedando solo untuosas las superficies es de 17:1.

En el ege de encina en caja de álamo negro, se ha observado constantemente el menor rozamiento; y la relacion es 33:1; y quedando solo untuosas las superficies es de 20:1.

La relacion en la polea de gayaco que gira en ege de box untado con sebo es de 23:1; y quedando las superficies untuosas es de 14:1.

El ege de box untado con sebo y girando en cajas de álamo negro, ha dado la relacion de 29:1; y quedando untuosas las superficies de 20:1.

Los eges de hierro en su rotacion sobre las maderas han dado resultados análogos á los obtenidos resbalando el hierro sobre las maderas.

Muchos eges de encina y poleas de gayaco despues de haber servido seis meses, estando muy suaves y relucientes pero sin engrasar los dedos, dieron siempre por relacion entre la de 16:1 y la de 13:1, influyendo muy poco la velocidad.

DINÁMICA.

Del movimiento rectilineo de un punto material.

Nociones preliminares.

298 Hemos dicho (1) que cuando un cuerpo ocupa sucesivamente diferentes partes del espacio, se dice que *está en movimiento*; de manera que *movimiento de un punto ó de un cuerpo es la traslacion de dicho punto ó cuerpo de un parage á otro*; y tambien hemos manifestado (7) que la ciencia que trata del movimiento de los cuerpos se llama *Dinámica*. El movimiento mas sencillo que se puede concebir es el que se hace en linea recta y de un mismo modo, es decir, corriendo el móvil espacios iguales en tiempos iguales; cuyo movimiento se dice que es *uniforme*; y todo movimiento que no es uniforme se llama en general *movimiento variado*.

Del movimiento uniforme.

299 Puesto que en el *movimiento uniforme* debe correr el móvil en tiempos iguales espacios iguales, resulta que si espresamos por v el espacio que anda en un tiempo cualquiera que tomemos por unidad, el espacio andado en un número cualquiera de unidades de tiempo que espresarémos por t será $v \times t$;

y espresando el espacio corrido por e se tendrá $e = v \times t$ (231).

Como las cantidades e, v, t son heterogeneas, se deben hacer aquí y en lo que sigue las mismas consideraciones que hicimos (164).

300 Al espacio v que anda el móvil en la unidad de tiempo se le llama *velocidad*; por lo que la ecuacion anterior nos dice que *el espacio que un cuerpo anda al cabo de un cierto tiempo con un movimiento uniforme*, *se halla multiplicando la velocidad por el tiempo*.

301 Si despejamos v tendrémos $v = \frac{e}{t}$ (322);

que quiere decir que *la velocidad es la relacion que tiene el espacio corrido con el tiempo en que se anda*; *ó es el cuociente que resulta de dividir el espacio por el tiempo*.

La misma ecuacion nos da $t = \frac{e}{v}$ (323);

que nos dice que *cuando se conozca el espacio que anda un cuerpo y la velocidad, hallarémos el tiempo dividiendo el espacio por la velocidad.*

302 Si señalamos con las letras mayúsculas el espacio, velocidad y tiempo correspondientes á otro cuerpo cualquiera, tendrémos $E=V\times T$; y formando proporcion con esta ecuacion y la (ec. 321), se tendrá $E:e::VT:vt$ (324);

que nos dice que *los espacios son como los productos de las velocidades por los tiempos*; *ó que están en razon compuesta de las velocidades y de los tiempos.*

303 Si suponemos $V=v$, tendrémos $E:e::T:t$;

que nos dice que *á igualdad de velocidades*, *los espacios son como los tiempos.* Y si hubiéramos supuesto $T=t$, hubiera resultado $E:e::V:v$; la cual nos dice que *á igualdad de tiempos*, *los espacios son como las velocidades.*

304 Si suponemos que $E=e$, tendrémos que por ser iguales los dos primeros términos de la proporcion primitiva (prop. 324), lo serán tambien los dos últimos, y será $VT=vt$;

la cual puesta en proporcion dará $V:v::t:T$, ó $T:t::v:V$.

La primera nos dice que *á igualdad de espacios*, *las velocidades están en razon inversa de los tiempos*; y la segunda *que á igualdad de espacios*, *los tiempos están en razon inversa de las velocidades.*

305 Si multiplicamos estremos y medios en la proporcion primitiva, saldrá $E\times v\times t=e\times V\times T$;

la cual puesta en proporcion de modo que las velocidades formen la primera razon, dará $V:v::E\times t:e\times T$;

que nos dice que *á desigualdad de todo*, *las velocidades están en razon compuesta*, *directa de los espacios é inversa de los tiempos.*

306 La misma ecuacion puesta en proporcion de modo que los tiempos formen la primera razon, dará $T:t::E\times v:e\times V$;

que nos dice que *á desigualdad de todo*, *los tiempos están en razon compuesta*, *directa de los espacios é inversa de las velocidades.*

307 Puede suceder que el móvil haya corrido ya uniformemente ántes de principiarse á contar el tiempo t un espacio a; y en este caso, como durante el tiempo t andará el espacio vt, resultará que el espacio total corrido estará espresado por $e=a+vt$ (325);

que *es la ecuacion mas general del movimiento uniforme*; y en la cual despejando cada una de las letras que contiene, se tendrá

$$a=e-vt \ (326),\quad v=\frac{e-a}{t} \ (327),\quad t=\frac{e-a}{v} \ (328),$$

que nos servirán para hallar una cualquiera de estas cantidades, cuando se dén conocidas las otras tres.

En la última ecuacion la cantidad t puede ser positiva ó negativa; sus valores positivos se refieren á épocas posteriores al instante desde que se cuenta el tiempo, y sus valores negativos á épocas anteriores al mismo instante.

308 Si nos propusiésemos *determinar en qué tiempo se encontrarán*

dos móviles M *y* M′ *que parten en el mismo instante*, *el uno de A* (fig. 135) *y el otro de B*, con las velocidades v y v', tendríamos que suponiendo que se lleguen á encontrar en C, los espacios corridos por estos móviles serán $AC=vt$, $BC=v't$;
y llamando a la distancia AB de estos móviles, será

$$AC=AB+BC=a+v't;$$

por lo que igualando estos dos valores de AC, será

$$a+v't=vt\text{, que da } t=\frac{a}{v-v'}\ (329).$$

Si $v'=v$, se tendria $t=\frac{a}{0}=\infty$,

que espresa que en este caso *los dos móviles no se encontrarán jamas*; lo que en efecto debe verificarse, pues que entónces caminan en el mismo sentido con velocidades iguales.

309 Como en la ecuacion general del movimiento uniforme, el espacio e varía al mismo tiempo que t, resulta que en dicha (ec. 325) así como en la (ec. 321) se tiene que *el espacio* e *es funcion del tiempo*; luego si diferenciamos cualquiera de estas ecuaciones, tendrémos

que ambas nos darán $de=vdt$ (330), que da $\frac{de}{dt}=v$ (331);

ecuacion que nos dice que *en el movimiento uniforme*, *la velocidad es igual al coeficiente diferencial del espacio*, *tomado con relacion al tiempo*: propiedad que tambien se verifica en el *movimiento variado*, como verémos (320).

De las fuerzas, *del modo de medirlas*, *y del paralelogramo y paralelepípedo de las velocidades.*

310 De lo que hemos demostrado (15) se deduce que *si sobre un punto material obra en una misma direccion un número cualquiera* N *de fuerzas iguales*, *la resultante de todas es igual á* N *veces el efecto de una cualquiera de ellas*; pues que suponiendo iguales las fuerzas que allí hemos espresado por P, Q, S, T &c., y suponiendo que el número de ellas sea N, la (ec. 2) nos dará $R=P+P+P+\&c.=NP$.

Ahora, si suponemos que el efecto de la potencia ó fuerza P sea el comunicar á la molécula ó punto material un esfuerzo capaz de hacerle andar un espacio K, el efecto que la fuerza resultante R obrará sobre dicha molécula ó punto material, será el de hacerle andar en la misma unidad de tiempo un espacio espresado por NK;
y como el espacio que corre un móvil en la unidad de tiempo es su velocidad (300), resulta que si la espresamos por V será $R=V$.

Si consideramos ahora un cuerpo cualquiera que se mueve en linea recta en el espacio, todas sus moléculas ó puntos materiales de que le concibamos compuesto, describirán rectas paralelas con una velocidad comun que espresarémos por V; luego este movimiento se efectuará del mismo modo que si cada molécula estuviese solicitada, en el mismo sentido en que se efectúa el movimiento, por una fuerza ó potencia espresada por una linea igual á la velocidad V; y como en virtud de lo espuesto (72) la resultante de todas estas fuerzas equivaldrá á su suma, tendrémos que si espresamos por M la *masa* ó el número de puntos materiales ó moléculas de que concibamos compuesto el cuerpo, la resultante de todas estas fuerzas paralelas estará espresada por M veces el efecto de cualquiera de las componentes, y estando representado este efecto por V dicha resultante será igual con MV; y como la resultante de un sistema de fuerzas ó potencias es (6) la fuerza única á que se puede atribuir todo el efecto, si la espresamos por F tendrémos $F=MV$ (332); ecuacion que nos manifiesta que *la fuerza necesaria para poner en movimiento un cuerpo*, *es igual ó se mide por el producto de la masa de dicho cuerpo por la velocidad que le comunique* (teniendo tambien aquí presente la advertencia hecha § 164).

Al producto MV de la masa por la valocidad, se le llama tambien *cantidad de movimiento* (*).

311 Si espresamos por f, m, v las cantidades relativas á otro cuerpo, tendrémos $f=mv$;

y formando proporcion resultará $F:f::MV:mv$ (333);

que nos dice que *las fuerzas son como los productos de las masas por las velocidades*, *ó que las fuerzas están en razon compuesta de las masas y de las velocidades.*

312 Si las masas fuesen iguales, esto es, si $M=m$, la proporcion anterior se nos convertiria en $F:f::V:v$;

(*) *Hubo en otro tiempo entre los geómetras una disputa célebre sobre la medida de las fuerzas. Esta disputa*, *como otras muchas*, *provenia de que no se entendian acerca de la definicion de las palabras. Una fuerza no siéndonos conocida sino por sus efectos*, *se puede medir de diversas maneras*, *segun el uso á que se quiere apropiar. Por egemplo*, *si nos proponemos determinar el fardo que un hombre puede sostener instantaneamente*, *la fuerza de este hombre resulta espresada por el peso que sea capaz de sostener*; *pero si se quiere medir la fuerza de este hombre por el trabajo que puede egecutar en un tiempo dado*, *se tendrá otro modo de valuar su fuerza*, *que será enteramente diferente del anterior*; *porque un hombre mas débil*, *con mas aptitud particular para sostener una larga fatiga*, *puede dar en su trabajo un resultado mayor que el que puede dar otro hombre que tuviese mayor robustez &c.*; *y bajo este punto de vista* se debe considerar animado de mayor fuerza que el otro. *Bajo este segundo aspecto la fuerza de un hombre se debe considerar como equivalente al peso que levanta y á la altura á que*

que nos dice que *á igualdad de masas, las fuerzas son como las velocidades que son capaces de imprimir á un mismo móvil.*

313 Por un método análogo al que hemos seguido (302 y siguientes) deduciríamos de la (prop. 333) que *á igualdad de velocidades, las fuerzas son como las masas*; que *á igualdad de fuerzas, las masas están en razon inversa de las velocidades, ó las velocidades en razon inversa de las masas*; que *á desigualdad de todo, las velocidades están en razon compuesta, directa de las fuerzas, é inversa de las masas*; y que *á desigualdad de todo, las masas están en razon compuesta, directa de las fuerzas, é inversa de las velocidades.*

314 Como acabamos de demostrar que las fuerzas son proporcionales á las velocidades que comunican á un mismo móvil, y por otra parte sabemos (88) que una ecuacion donde entren varias cantidades se pueden remplazar estas por otras cantidades que les sean proporcionales, resulta que todas las ecuaciones que hemos sacado en la Estática con relacion á las fuerzas, y las proposiciones que ellas nos han suministrado, se verifican en la Dinámica con las velocidades que las fuerzas son capaces de imprimir á los móviles. Por lo que *todo lo que hemos demostrado relativo á la composicion y descomposicion de las fuerzas, ya sea en un plano, y ya en el espacio, se verifica aquí respecto de las velocidades.* Luego la proposicion demostrada (16) la podrémos enunciar aquí del modo siguiente: *si un número cualquiera de fuerzas obran simultaneamente, ó con cualesquiera intervalos de tiempo sobre un móvil en una misma direccion, este describirá una linea recta, cuya magnitud será igual á la suma de las velocidades que obren en un mismo sentido, ménos la suma de las que obren en un sentido contrario, caminando el móvil en el sentido en que la suma de las velocidades sea mayor.*

315 La proposicion que en el corolario general (§ 28) hemos dado á conocer con el nombre de *paralelogramo de las fuerzas*, recibe aquí el nombre de *paralelogramo de las velocidades*, y se enuncia del modo si-

---

lo habrá levantado en un tiempo dado; en el concepto de que no se supone que el esfuerzo varíe en razon de la altura, porque en realidad esta altura solo representa aquí el número de veces que un cierto trabajo está repetido. Luego si señalamos con P *este peso, y con* h *la altura, la espresion de la fuerza estará representada en este caso por* Ph;
y poniendo en vez de P *su valor* Mg (ec. 206), *se tendrá* $Ph=Mgh$;
multiplicando por 2, *resulta* $2Ph=M\times 2gh$;
observando que el cuadrado de la velocidad v *debida á la altura* h *tiene por espresion* $2gh$, *como verémos* (342), *se puede remplazar* $2gh$ *por* v^2, *lo que da* $2Ph=Mv^2$.

Donde observamos que considerando la palabra fuerza *bajo este aspecto, viene á equivaler al producto de la masa por el cuadrado de la velocidad.*

Cuando se considera de este modo la fuerza, se le llama fuerza viva, *y la consideracion de este género de fuerzas es útil en varias ocasiones.*

guiente: *si en la unidad de tiempo dos fuerzas cualesquiera comunican á un móvil ciertos grados de velocidad en direcciones que formen ángulo, el móvil se moverá con una velocidad espresada en direccion y magnitud por la diagonal del paralelogramo construido por dos lineas que espresen en direccion y magnitud las velocidades que cada fuerza era capaz de imprimirle.*

316 La proposicion del paralelepípedo de las fuerzas demostrada (§ 33) se denomina aquí del *paralelepípedo de las velocidades*, y se enuncia de este modo: *si tres fuerzas obran sobre un mismo móvil comunicando cada una de ellas en la unidad de tiempo una velocidad en direcciones que no se hallen las tres en un mismo plano, el móvil andará con una velocidad espresada en direccion y magnitud por la diagonal del paralelepípedo construido sobre las lineas que espresan en direccion y magnitud las velocidades que cada fuerza era capaz de imprimirle.*

317 Por último observarémos que así como todas las fuerzas que obran sobre un mismo punto ó cuerpo se pueden reducir á dos que sean paralelas á dos eges, si todas se hallan en un mismo plano, ó á tres paralelas á tres eges, si no se hallan en un mismo plano, tambien se verifica aquí que *todas las velocidades que un número cualquiera de fuerzas puede comunicar á un móvil, si se hallan todas en un mismo plano, se pueden reducir á dos velocidades que sean paralelas á dos eges; y si no se hallan en un mismo plano, se podrán reducir á tres que sean paralelas á tres eges dados; y el modo de egecutarse esta reduccion será idénticamente el mismo con que se egecutó la composicion de las fuerzas.*

Del movimiento variado.

318 Cuando un cuerpo en tiempos iguales anda espacios desiguales, se dice que su *movimiento es variado.* Si los espacios que anda el cuerpo en tiempos iguales sucesivos van aumentando, se dice que el movimiento es *acelerado*; y si van disminuyendo, se dice que el movimiento es *retardado.*

Para que el movimiento sea variado se necesita que haya una fuerza que obre continuamente en el cuerpo, á la cual se le llama *fuerza aceleratriz*, si su efecto es aumentar el movimiento del cuerpo; y *fuerza retardatriz*, si su efecto es disminuir el movimiento; y nosotros comprenderémos ambas denominaciones con la espresion de *fuerza variatriz.* Si la fuerza aceleratriz ó retardatriz obra constantemente, es decir, que en tiempos iguales haga adquirir ó perder grados iguales de velocidad al móvil, se llama *fuerza aceleratriz* ó *fuerza retardatriz constante*; y los movimientos que se originan se llaman ó *uniformemente acelerado*, ó *uniformemente retardado.*

319 Puesto que en el movimiento uniformemente acelerado los números de grados de velocidad que ha adquirido el móvil son tantos

como el de unidades de tiempo, se tendrá que si llamamos g la velocidad que comunica la fuerza aceleratriz en una unidad de tiempo, y v la velocidad que ha adquirido al cabo del tiempo t, será $v=gt$ (334). De donde sacamos desde luego esta consecuencia importante, á saber, que *en el movimiento uniformemente acelerado, la velocidad adquirida al cabo de un tiempo cualquiera, se halla multiplicando la velocidad que comunica la fuerza aceleratriz en una unidad de tiempo por el tiempo que se supone obra dicha fuerza.*

320 Entendido esto, *pasemos á considerar desde luego el movimiento variado en general*; y observemos que la *velocidad adquirida por el móvil* al cabo del tiempo t, *el espacio* corrido hasta entónces, y *la fuerza variatriz*, son tres cantidades que dependen del tiempo; por lo que serán funciones *del tiempo*, cuya forma debemos determinar.

Para esto representemos el tiempo por t, el espacio corrido por e, la velocidad adquirida por v, y por φ la fuerza variatriz, esto es, la fuerza que hace variar la intensidad del movimiento. Concibamos dividido el tiempo t en un número cualquiera de partes iguales que espresarémos por n, y hagamos para abreviar $\frac{t}{n}=\theta$, lo que da $t=n\theta$.

Supongamos que al principio de cada uno de estos intervalos iguales de tiempo, obre una fuerza sobre el móvil y le comunique cada vez que obre sobre él una velocidad finita que se agregue á aquella de que el móvil pueda estar ya animado. Espresemos por a la velocidad que tenga al principio del primer intervalo de tiempo; por a' la velocidad que se le comunique al principio del segundo; por a'' la que se le comunique al principio del tercero; y en general por $a^{(n-1)\prime}$ la que se le comunique al principio del intervalo espresado por n que es el último.

Como el movimiento permanece uniforme durante cada intervalo de tiempo, y las velocidades sucesivas del móvil son a, $a+a'$, $a+a'+a''$, &c. tendrémos que $a\theta$, $(a+a')\theta$, $(a+a'+a'')\theta$, &c., espresarán (299) los espacios corridos en el primero, segundo, tercero &c. intervalo; y observando que hechas las multiplicaciones indicadas, $a\theta$ se hallará en todos los términos, $a'\theta$ en todos ménos en el primero, $a''\theta$ en todos ménos en los dos primeros &c., inferirémos que el espacio e corrido en el tiempo total $n\theta$, ó la suma de todos estos espacios es igual á

$$e=an\theta+a'(n-1)\theta+a''(n-2)\theta\ \ldots\ +a^{(n-1)\prime}\theta \quad (335).$$

La velocidad del móvil al fin de este tiempo es igual con

$$a+a'+a''\ \ldots\ +a^{(n-1)\prime};$$

el espacio E que correria en virtud de esta velocidad con un movimiento uniforme, y durante el tiempo $n\theta$, seria

$$E=an\theta+a'n\theta+a''n\theta\ \ldots\ +a^{(n-1)\prime}n\theta \quad (336);$$

pero este valor de E es mayor que el anterior de e siempre que sean positivas todas las velocidades $a', a'' \ldots a^{(n-1)\prime}$ añadidas sucesivamente á la velocidad inicial a, ó lo que es lo mismo, siempre que el movimiento del cuerpo sea acelerado durante todo el tiempo $n\theta=t$; luego *en todo movimiento acelerado el espacio corrido durante un tiempo cualquiera es menor que el que se correria uniformemente en un tiempo igual en virtud de la velocidad adquirida por el móvil al fin de este tiempo*; y como este resultado es independiente de la magnitud del intervalo que separa las acciones sucesivas de la fuerza, se sigue que *se debe estender al caso en que la accion de la fuerza es continua*, y *en que la velocidad del móvil varía por grados insensibles.*

Esto supuesto, sea $F.t$ la funcion del tiempo que representa el espacio e, de modo que $e=F.t$; si t se convierte en $t'=t+\Delta t$, esta funcion se convertirá en $e'=F.(t+\Delta t)$, y será $e'-e=\Delta e=F.(t+\Delta t)-F.t$ (337).

Esta ecuacion espresará el espacio corrido durante el tiempo Δt; pero por irregular que sea el movimiento, resulta que podemos concebir á Δt un valor bastante pequeño para que el movimiento sea siempre acelerado, ó siempre retardado durante este tiempo; pues por pequeño que fuese el tiempo que mediase de la aceleracion á la retardacion, siempre podemos concebir (I. 325 cor. 2.°) un valor menor á Δt. Supongamos por egemplo que el movimiento sea siempre acelerado, y espresemos por Δv la velocidad ganada por el móvil durante el tiempo Δt; de manera que $v+\Delta v$ sea su velocidad al fin del tiempo $t+\Delta t$, pues que v es su velocidad al fin del tiempo t; y $v\Delta t+\Delta v\Delta t$ el espacio que hubiera corrido el móvil en el tiempo Δt si se hubiera movido uniformemente en todo este tiempo con la velocidad final $v+\Delta v$; luego en virtud de lo que acabamos de demostrar será

$$F.(t+\Delta t)-F.t<v\Delta t+\Delta v\Delta t,\text{ ó } \Delta e<(v+\Delta v)\Delta t,\text{ ó } \frac{\Delta e}{\Delta t}<v+\Delta v.$$

Por otra parte siendo el movimiento siempre acelerado durante el tiempo Δt, el espacio Δe será mayor que el corrido en virtud de la sola velocidad v que tenia al principio; luego tambien se tendrá

$$F.(t+\Delta t)-F.t=\Delta e>v\Delta t,\text{ ó } \frac{\Delta e}{\Delta t}>v;$$

de donde se sigue que para los valores Δt, que se pueden tomar tan pequeños como se quieran, el valor de la funcion $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ está comprendido entre las cantidades v y $v+\Delta v$; luego si espresamos por w el esceso que $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ lleva á v, se tendrá $\frac{\Delta e}{\Delta t}=v+w$ (338);

en cuya ecuacion la cantidad w es menor que Δv.

Pero si se supone que Δt disminuye indefinidamente, resulta que el incremento Δv de la velocidad correspondiente al tiempo Δt, disminuirá tambien indefinidamente, y podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada; y con mas razon podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada el valor de w que ha de ser menor que Δv; y como la cantidad v es constante con relacion al tiempo Δt, resulta (II. 480) que v será el límite de $v+w$, que es el segundo miembro de la (ec. 338); y como el límite del primer miembro $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ se señala en general (II. 512) por $\frac{de}{dt}$, tendrémos $\frac{de}{dt}=v$ (339), que es la misma que la (ec. 331); y manifiesta que *la velocidad en el movimiento variado en general*, *así como en el uniforme*, *es igual al coeficiente diferencial del espacio tomado con relacion al tiempo.*

321 Para tener la medida de la fuerza variatriz φ es necesario compararla con una fuerza variatriz conocida. Pero cuando se comparan dos fuerzas *son entre sí* (312) *como las velocidades que comunican á un mismo móvil durante un mismo tiempo*, que se puede elegir arbitrariamente; pero si la una de las dos fuerzas que se comparan es una *fuerza variatriz variable*, entónces es menester tomar las velocidades producidas en un intervalo de tiempo bastante pequeño para que se pueda considerar como constante la intensidad de esta fuerza en este intervalo instantaneo de tiempo. Luego si suponemos que sea p una fuerza aceleratriz constante que comunica al móvil una velocidad g en la unidad de tiempo, $g\mathrm{d}t$ será (319) la velocidad debida á esta fuerza durante el instante $\mathrm{d}t$; pero durante este mismo instante la fuerza φ produce una velocidad $\mathrm{d}v$; porque siendo v la velocidad del móvil al fin del tiempo t, y $v+\mathrm{d}v$ al fin del tiempo $t+\mathrm{d}t$, tenemos que $\mathrm{d}v$ es la velocidad producida durante el tiempo $\mathrm{d}t$; luego (312) se tendrá

$$\varphi:p::\mathrm{d}v:g\mathrm{d}t;\text{ de donde }\varphi=\frac{p}{g}\times\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Esta espresion se puede simplificar suponiendo que p es la fuerza que se toma por unidad, y que g es tambien igual á la unidad lineal; lo que viene á ser lo mismo que *tomar por unidad de fuerza la que produce en la unidad de tiempo una velocidad igual á la unidad de longitud.*

De esta manera el valor de φ se reduce á $\varphi=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ (340);

y si se sustituye por v su valor $\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ (ec. 339), será $\varphi=\frac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t}$ (341);

que suponiendo constante á $\mathrm{d}t$, será $\varphi=\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}$ (342);

cuyas ecuaciones nos manifiestan que *la fuerza variatriz* φ *es igual al primer coeficiente diferencial de la velocidad*, *ó al segundo coeficiente diferencial del espacio corrido*, *tomados ambos coeficientes con relacion al tiempo*. La fuerza que se toma por unidad, y con la cual se compara la intensidad de la fuerza φ, depende de la eleccion que se haga de la unidad de longitud, y de la unidad de tiempo. Si se quiere por egemplo que la *pesantez* sea la unidad de fuerza, no habrá mas que tomar el *segundo* por unidad de tiempo, y hacer la unidad lineal igual á 35,1 pies españoles si es en Madrid (véase el fin de la nota § 162), ó el valor que le corresponda segun la tabla del (§ 48) de mi Compendio de Mecánica Práctica. Entónces espresando por medio de estas unidades el tiempo y las cantidades lineales que entran en $\frac{dv}{dt}$ y $\frac{d.\frac{de}{dt}}{dt}$ ó $\frac{d^2e}{dt^2}$, estas espresiones se podrán convertir en números abstractos que espresarán á cada instante la relacion de la fuerza φ con la pesantez ó gravedad.

322 Cuando la fuerza variatriz φ que obra sobre un móvil es dada en funcion del tiempo, las (ecs. 340 y 342) hacen conocer por simples integraciones la velocidad adquirida y el espacio corrido hasta el fin de cada instante. Pero por lo regular esta fuerza es dada, ó en funcion de la velocidad adquirida, ó en funcion de estas dos cantidades, y entónces dichas ecuaciones vienen á ser *ecuaciones diferenciales del primero y segundo órden*, *cuyas integrales se necesitan encontrar*, lo cual presenta varias veces dificultades insuperables.

323 Si se elimina dt entre las (ecs. 339 y 340), será $\varphi de = v dv$ (343); ecuacion que corresponde tambien al movimiento variado, y que es preferible á las anteriores cuando φ es dada en funcion de e; porque entónces se hace la integracion con mas facilidad, á causa de que se presentan desde luego separadas las variables.

Del movimiento uniformemente variado, que puede ser ó uniformemente acelerado ó uniformemente retardado.

324 Puesto que en el movimiento uniformemente variado, la fuerza variatriz hace adquirir ó perder grados iguales de velocidad en cada unidad de tiempo, resulta que el valor de φ que es el que espresa la fuerza variatriz, será una cantidad constante; luego si la representamos por g tendrémos $\varphi = g$ (344);
y segun sea g positiva ó negativa, resultará que el movimiento será *uniformemente acelerado ó uniformemente retardado*.

325 Consideremos primero á g como positiva que es el caso del movimiento uniformemente acelerado, y tendrémos que sustituyendo este valor en la (ec. 340) resultará

$\frac{dv}{dt}=g$ (345), que da $dv=gdt$ (346), ó integrando $v=a+gt$ (347),

siendo a una cantidad constante arbitraria (II. 630) que depende de las circunstancias iniciales del movimiento; la cual será cero cuando se suponga que al principiarse á contar el tiempo t, el cuerpo se hallaba en reposo, ó lo que es lo mismo, que su velocidad era 0; en cuyo supuesto la ecuacion anterior se convierte en $0=a+g\times 0$, que da $a=0$; y en este caso $v=gt$ (348),
que es la misma que la (ec. 334) como debia verificarse.

326 Si se supone que el cuerpo estuviese ya en movimiento al principiarse á contar el tiempo, entónces no es $v=0$, cuando $t=0$; por lo que en este caso la cantidad a espresa la velocidad de que se hallaba animado el cuerpo al principiarse á contar el tiempo t.

327 Si en la (ec. 339) sustituimos por v su valor (ec. 347), tendrémos $\frac{de}{dt}=a+gt$ (349), que quitando el divisor da $de=adt+gtdt$ (350),

é integrando será $e=b+at+\frac{1}{2}gt^2$ (351).

{ El mismo valor hubiéramos hallado para e, sustituyendo por φ su valor g en la (ec. 342); pues entónces hubiéramos tenido $\frac{d^2e}{dt^2}=g$ (352),

que multiplicando por dt da $\frac{d^2e}{dt}=gdt$ (353),

la cual integrada se convierte en $\frac{de}{dt}=a+gt$,

que multiplicando por dt se tiene $de=adt+gtdt$,
é integrando da $e=b+at+\frac{1}{2}gt^2$. }

328 La cantidad b es la constante que da la integracion; y para determinarla se necesitan considerar las circunstancias iniciales del movimiento. Si suponemos que el espacio e principie á contarse desde el punto en que se halla el cuerpo al principiarse á contar el tiempo, tendrémos entónces que $e=0$ cuando $t=0$;
lo que da $b=0$, y la (ec. 351) se convierte en $e=at+\frac{1}{2}gt^2$ (354);
y si cuando $t=0$ no se verifica que $e=0$, entónces la cantidad constante b espresará la distancia que hay desde el punto ú orígen desde donde se cuenta el espacio al punto en que se halla el cuerpo, cuando principia el tiempo.

329 Si ademas suponemos que al principiarse á contar el tiempo t, el cuerpo se halle en reposo, ó lo que es lo mismo, no tenga ninguna velocidad, será $a=0$; con lo que la (ec. 354) se convertirá en $e=\frac{1}{2}gt^2$ (355), y si sustituimos en vez de gt su valor v (ec. 348) será $e=\frac{1}{2}vt$ (356).

Despejando t en estas dos ecuaciones y en la (ec. 348), resulta

$$t=\frac{2e}{v}=\sqrt{\frac{2e}{g}}=\frac{v}{g} \quad (357).$$

330 Si el cuerpo se hubiese movido uniformemente desde el principio con una velocidad v, al cabo del tiempo t hubiera andado un espacio espresado por vt, que es el doble de $\frac{1}{2}vt$;
lo cual nos ofrece una consecuencia importante, á saber, que *en el movimiento uniformemente acelerado, el espacio corrido en un tiempo determinado es la mitad del espacio que andaria el móvil en el mismo tiempo con la velocidad adquirida al fin de dicho tiempo.*

331 Si llamamos E el espacio que otro cuerpo andaria al cabo del tiempo T, sujeto á la misma fuerza aceleratriz, esto es, que en la unidad de tiempo comunicase el mismo aumento g de velocidad, será $E=\frac{1}{2}gT$;
y formando proporcion resultará $e:E::\frac{1}{2}gt^2:\frac{1}{2}gT^2::t^2:T^2$ (358);
que nos dice que *en el movimiento uniformemente acelerado los espacios totales son como los cuadrados de los tiempos.*

332 Respecto de este segundo cuerpo tendrémos tambien $V=gT$;
por lo que $v:V::gt:gT::t:T$ (359),
que nos dice que *en dicho movimiento las velocidades adquiridas son como los tiempos.*

Si en la (prop. 358) sustituimos en vez de la razon $t^2:T^2$, su igual $v^2:V^2$ (prop. 359 y I. 271), tendrémos $e:E::v^2:V^2$ (360);
que nos dice que *en dicho movimiento los espacios totales son tambien como los cuadrados de las velocidades.*

333 Si de los términos de las (proporcs. 358 y 360) estraemos la raiz cuadrada, tendrémos $\sqrt{e}:\sqrt{E}::t:T::v:V$ (361);
que permutando tendrémos $t:T::\sqrt{e}:\sqrt{E}$ (362), ó $v:V::\sqrt{e}:\sqrt{E}$ (363);
que nos dicen que *los tiempos y las velocidades son como las raices cuadradas de los espacios.*

334 Si hacemos $t=1$ en la (ec. 355), será $e=\frac{1}{2}g$, que da $g=2e$ (364), ó llamando p al espacio e andado en la unidad de tiempo, será $g=2p$ (365);
y como (ec. 344) $g=\varphi$, resulta que *la fuerza aceleratriz* g *es el duplo del espacio corrido en la primera unidad de tiempo.*

Y puesto que $\varphi=g$, la (ec. 355) nos dará $\varphi=g=\frac{2e}{t^2}$;

que nos dice que *la fuerza variatriz* φ *tiene por medida el duplo del espacio dividido por el cuadrado del tiempo en que se corre.*

335 Si en la (ec. 355) sustituimos por $\frac{1}{2}g$ el valor p que le acabamos de considerar, se nos convertirá en $e=pt^2$ (366).

Si vamos suponiendo sucesivamente $t=1, 2, 3, 4, 5$, &c.
hallarémos (ec. 366), que los espacios corridos en estos tiempos serán. . . . . $\left\{ p, 4p, 9p, 16p, 25p, \right.$ &c.

donde vemos confirmado el que *los espacios totales guardan la relacion de los cuadrados de los tiempos.*

336 Si de $4p$ que es el espacio andado en las dos primeras unidades de tiempo, quitamos p que es el espacio andado en la primera unidad, quedará $3p$, que espresará el espacio corrido durante la segunda unidad de tiempo. Si del espacio $9p$ corrido hasta el fin de la tercera unidad de tiempo, se quita $4p$ que espresa lo andado en las dos primeras unidades de tiempo, quedará $5p$, que espresará el espacio corrido en la tercera unidad de tiempo; y continuando del mismo modo se deduce que *los espacios parciales*, esto es, *los espacios corridos en cada unidad de tiempo siguen la progresion de los números impares.*

337 Si en la (ec. 348) sustituimos 1, 2, 3, 4, 5, &c. en vez de t tendrémos que las velocidades adquiridas al fin de la primera, segunda, tercera, &c. unidad de tiempo serán g, $2g$, $3g$, $4g$, *&c.*;
donde vemos comprobado el que *las velocidades son como los tiempos en que se han adquirido.*

338 De modo que si queremos poner bajo un solo punto de vista todos estos resultados, tendrémos que

Si las unidades de tiempo fuesen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	&c.,
Los espacios parciales corridos en cada unidad serian.........	p,	$3p$,	$5p$,	$7p$,	$9p$,	$11p$,	&c.,
	ó $\frac{1}{2}g$,	$\frac{3}{2}g$,	$\frac{5}{2}g$,	$\frac{7}{2}g$,	$\frac{9}{2}g$,	$\frac{11}{2}g$,	&c.,
Los espacios totales serian......	p,	$4p$,	$9p$,	$16p$,	$25p$,	$36p$,	&c.,
	ó $\frac{1}{2}g$,	$2g$,	$\frac{9}{2}g$,	$8g$,	$\frac{25}{2}g$,	$18g$,	&c.,
Y las velocidades adquiridas hasta el fin de cada unidad de tiempo serian.............	$2p$,	$4p$,	$6p$,	$8p$,	$10p$,	$12p$,	&c.
	ó g,	$2g$,	$3g$,	$4g$,	$5g$,	$6g$,	&c.

339 Por lo regular cuando se cuenta el movimiento de un solo cuerpo, siempre se cuenta el espacio desde el principio del tiempo; y se considera el cuerpo como en reposo, esto es, que la velocidad del móvil es nula al principio del movimiento; por lo que en casi todas las aplicaciones que ocurre hacer, no se hace uso de otras fórmulas que de las sacadas desde el (§329). Y solo se hace uso de la (ec. 351) que es la ecuacion mas general del movimiento uniformemente variado, cuando se quieren comparar los movimientos de dos ó mas cuerpos. Por egemplo, si nos propusiésemos determinar en qué tiempo se encontrarian dos móviles M y M' (fig. 135) que partiesen en el mismo instante, el uno de A y el otro de B, con movimientos uniformemente acelerados, en este caso tendríamos, suponiendo que se llegasen á encontrar en C, que los espacios corridos por estos móviles, llamando a y g las cantidades correspondientes al primero, y a' y g' las correspondientes al segundo, serian (ec. 354) $AC = at + \frac{1}{2}gt^2$, y $BC = a't + \frac{1}{2}g't^2$;
y si quisiéramos contar el espacio corrido por M desde el punto D, de-

beríamos añadir la cantidad DA; luego si espresamos DA por b, tendrémos $e = DC = DA + AC = b + at + \frac{1}{2}gt^2$.

340 Si suponemos g negativa en las (ecs. 347, 351 y 354) se nos convertirán en las ecuaciones correspondientes al movimiento uniformemente retardado; y tendrémos 1°. $v = a - gt$ (367);

que nos *espresa la velocidad con que se hallará el móvil al cabo del tiempo* t *teniendo al principio del tiempo una velocidad espresada por* a, *y espresando* g *la velocidad que se pierde en cada unidad.*

2.° $e = b + at - \frac{1}{2}gt^2$ (368),

que nos *espresa el espacio corrido por un móvil en el tiempo* t, *en el supuesto de que al principiarse á contar el tiempo se hallaba el móvil en un punto que dista la cantidad* b *del punto desde donde se cuenta el espacio* e, *y con una velocidad espresada por* a, *siendo* g *la velocidad que pierde el móvil en cada unidad de tiempo.*

3.° $e = at - \frac{1}{2}gt^2$ (369),

que nos *espresa lo mismo que la anterior*, *sin mas diferencia que el suponerse en esta que el punto desde el cual principia el espacio es el mismo que aquel en que se halla el móvil al principiarse á contar el tiempo.*

Aplicacion de las fórmulas del movimiento variado al movimiento libre de los cuerpos sometidos solo á la accion de la gravedad.

341 Ya hemos dicho (162) que *gravedad ó pesantez es la fuerza con que todos los cuerpos abandonados á ellos mismos se precipitan hácia la tierra en direcciones verticales*; *y la ley con que se verifica este descenso nos ofrece egemplos de movimientos variados en general*, *y de movimientos uniformemente variados.* Si consideramos este movimiento de los cuerpos graves en el vacío, y ademas prescindimos de la variacion de la gravedad por razon de la distancia del cuerpo al centro de la tierra, tendrémos *el movimiento uniformemente variado*; que *será acelerado si suponemos que el cuerpo desciende*; *y será retardado si se considera que se le ha dado un impulso de abajo arriba*; en cuyo caso la gravedad retardará su movimiento primitivo.

342 En efecto, la esperiencia ha demostrado que los espacios que la fuerza de la gravedad hace correr á los cuerpos *son proporcionales á los cuadrados de los tiempos*, *miéntras que las velocidades que adquieren son simplemente proporcionales á los tiempos* (*).

Luego (335 y 337) *la pesantez es una fuerza aceleratriz constante*; y si se toma el *segundo* por unidad de tiempo, bastará conocer el espacio que un cuerpo corre en el primer segundo de su caida para poder determinar todas las circunstancias del movimiento de este cuerpo. Pero se ha encontrado por esperimentos hechos con una gran precision que *este espacio es el mismo para todos los cuerpos*; *que varía con la lati-*

(*) *Esta ley se hace sensible en Física por medio de un aparato que se conoce con el nombre de* Máquina de Athood.

tud; *y que en Paris á la latitud de* $48^\circ\ 50'\ 15''$ *es de* 15,098 *pies franceses*, ó 4,9044 *metros*; por consiguiente (§ 334) $\frac{1}{2}g=15,098$ pies franceses, que da $g=2\times15,098=30,196$ pies franceses que equivalen á 35,203 pies españoles; y en la plaza mayor de Madrid cuya latitud es de $40^\circ\ 25'$ es (nota del § 162) de 35,0998 pies españoles, que podrémos tomar por valor sumamente aproximado, el de 35,1 pies españoles.

Luego haciendo $g=35,1$ pies en las (ecs. 348, 355) $v=gt$, $e=\frac{1}{2}gt^2$, conocerémos despues de un número cualquiera de segundos, la velocidad del móvil y la altura de donde ha caido suponiéndonos en Madrid; y para hallar lo mismo en otro parage cualquiera, sustituirémos en vez de g el valor que dé la (ec. c nota del § 162) segun la latitud, ó el que le corresponda en la tabla del (§ 48) de mi Compendio de Mecánica Práctica. Recíprocamente, las mismas ecuaciones nos darán á conocer el tiempo de la caida del cuerpo, cuando el valor de v ó de e sea dado.

Si se elimina t entre las dos ecuaciones precedentes, resulta

$$e=\frac{v^2}{2g}\ (370),\ \text{que da}\ v=\sqrt{2ge},$$

ó espresando por h el espacio e será $v=\sqrt{2gh}$ (371);

esta ecuacion *espresa la velocidad adquirida por el móvil cuando ha caido de una altura igual á* h; y como se tiene que hacer uso frecuentemente de esta velocidad se la llama para abreviar *la velocidad debida á una altura dada.*

343 Si queremos tener reunidos bajo un punto de vista los espacios parciales, totales y velocidades adquiridas segun sea el número de segundos, y suponiendo que nos hallamos en Madrid, no tendrémos mas que hacer $g=35,1$ pies; lo que da para $p=\frac{1}{2}g=17,55$ pies, en cuyo caso la tabla del (§ 338) nos dirá que

Si el número de segundos fuese	1;	2;	3;	4;	5;	6;	&c.
Los espacios corridos en cada uno de los segundos serán	17,55;	52,65;	87,75;	122,85;	157,95;	193,05;	&c.
Los espacios totales serán. . .	17,55;	70,20;	157,95;	280,80;	438,75;	631,80;	&c.
Las velocidades adquiridas hasta el fin de cada segundo	35,1;	70,2;	105,3;	140,4;	175,5;	210,6;	&c.

344 *La accion de la pesantez sobre un cuerpo es independiente de la velocidad de que ya está animado en el sentido de esta fuerza; porque ella comunica velocidades iguales en tiempos iguales y siempre en la direccion vertical hácia el centro de la tierra, aunque en estas diferentes épocas el cuerpo esté animado de velocidades diferentes.* Lue-

go si concebimos un cuerpo lanzado verticalmente de abajo arriba, la pesantez debe disminuir continuamente la velocidad, por los mismos grados que la aumentaria durante la caida de este cuerpo; es decir, que si se espresa su velocidad inicial por a, su velocidad al fin del primer segundo será $a-g$, al fin del segundo $a-2g$, al fin del tercero $a-3g$, &c., teniendo g el mismo valor numérico que ántes: todo lo cual está confirmado por la esperiencia. Luego para determinar las circunstancias del movimiento de un cuerpo pesado, lanzado verticalmente de abajo arriba, bastarán las (ecs. 367 y 369), que son $v=a-gt$, $e=at-\frac{1}{2}gt^2$.

345 El cuerpo se elevará hasta que su velocidad haya venido á ser nula; luego espresando por h la mayor altura á que llegará, y por θ el tiempo que empleará en llegar á ella, tendrémos

$$0=a-g\theta \ (372),\quad h=a\theta-\frac{g\theta^2}{2} \ (373);$$

de donde se saca $\theta=\dfrac{a}{g}$ (374), $h=\dfrac{a^2}{2g}$ (375).

Llegado á este punto, el cuerpo volverá á caer hácia la tierra; y si se pide la velocidad que adquirirá corriendo en su caida toda la altura h, se tendrá $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{a^2}=a$ (376).

Luego el móvil cuando haya vuelto al punto de donde partió, habrá vuelto á tomar una velocidad igual á su velocidad de proyeccion; de donde se concluye que *para elevar un cuerpo á una altura dada es necesario imprimirle una velocidad igual á la que adquiriria por la gravedad, cayendo de esta altura.*

No nos detendrémos en resolver egemplos numéricos de estos casos, porque son bien fáciles de egecutar, y porque si alguno los necesitare, los hallará en mi Compendio de *Mecánica Práctica.*

346 En lo que llevamos espuesto acerca de la gravedad, hemos prescindido *de la resistencia que ofrece el aire á los cuerpos que en él se mueven*, y *de la diminucion de la gravedad á proporcion que se separa el móvil de la superficie terrestre*; y como es muy interesante el atender á estas dos circunstancias, vamos á considerarlas cada una de por sí; todo lo cual nos ofrecerá al mismo tiempo la ventaja de presentar aplicaciones útiles de las fórmulas generales del movimiento variado.

347 Propongámonos primero *determinar el movimiento de un punto material que cae verticalmente, teniendo en consideracion la variacion de la pesantez.*

Sea r el radio medio de la tierra que segun las últimas medidas es de 7615916 varas españolas (*), g la pesantez ó gravedad en la super-

(*) *Pues esta cantidad es la mitad de* 15231832 *varas españolas que hemos hallado corresponder al diámetro medio de la tierra en el* (§ 34) *de mi Compendio de* Mecánica Práctica.

ficie, a la distancia del móvil al centro de la tierra en el instante que principia su movimiento; y tendrémos que cuando haya corrido un espacio e cayendo hácia la tierra, su distancia al centro será $a-e$; y como se sabe por esperiencia que la intensidad de la pesantez sobre una misma vertical, sigue la razon inversa del cuadrado de la distancia del cuerpo pesado al centro de la tierra, resulta que si espresamos por φ la pesantez á la distancia $a-e$, ó la fuerza acceleratriz que obra sobre él, tendrémos $\varphi:g::r^2:(a-e)^2$, que da $\varphi=\dfrac{gr^2}{(a-e)^2}$ (377),

luego la (ec. 342) se nos convertirá en $\dfrac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}=\dfrac{gr^2}{(a-e)^2}$ (378).

Para integrarla multiplicarémos sus dos miembros por $2\mathrm{d}e$, y nos resultará $\dfrac{2\mathrm{d}e\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{d}.\dfrac{\mathrm{d}e^2}{\mathrm{d}t^2}=2gr^2\times\dfrac{\mathrm{d}e}{(a-e)^2}$;

que integrando (II. 521) da $\dfrac{\mathrm{d}e^2}{\mathrm{d}t^2}=C+\dfrac{2gr^2}{a-e}$ (379),

siendo C la constante.

Si en el orígen del movimiento se supone nula la velocidad, se tendrá á un mismo tiempo $e=0$, $v=\dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=0$;

de donde resulta para determinar C la ecuacion

$$0=C+\frac{2gr^2}{a},\ \text{que da } C=-\frac{2gr^2}{a};$$

por lo que la (ec. 379) se convertirá en

$$\frac{\mathrm{d}e^2}{\mathrm{d}t^2}=\frac{2gr^2}{a-e}-\frac{2gr^2}{a}=\frac{2gr^2}{a}\times\frac{e}{a-e}\ (380);$$

ó poniendo en vez del primer miembro de estas dos ecuaciones su valor v^2 (ec. 339), será $v^2=\dfrac{2gr^2}{a-e}-\dfrac{2gr^2}{a}=\dfrac{2gr^2}{a}\times\dfrac{e}{a-e}$ (381);

ecuacion que *determina el valor de la velocidad* v *del móvil en cada punto de la vertical que describe.*

348 Si despejamos $\mathrm{d}t$ en la (ec. 380), y multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{a-e}$, será $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{r}\sqrt{\dfrac{a}{2g}}\times\dfrac{a-e}{\sqrt{ae-e^2}}\mathrm{d}e$ (382).

Ahora, si en el numerador en vez de a sustituimos $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$, y observamos que $ae-e^2=\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-e)^2$, resulta que podrémos poner la espresion anterior bajo esta forma

$$dt=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\frac{(\frac{1}{2}a-e)de}{\sqrt{ae-e^2}}+\frac{1}{2}a\times\frac{de}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-e)^2}}\right)\ (383).$$

La integral del primer término que hay dentro del paréntesis, es (II. 525) $\sqrt{ae-e^2}$.

Para hallar la del segundo término observarémos que dividiendo por $\frac{1}{2}a$ el numerador y denominador del quebrado $\frac{de}{\sqrt{\frac{1}{4}a^2-(\frac{1}{2}a-e)^2}}$, se nos convertirá despues de hechas todas las reducciones, en $\frac{\frac{2de}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{a-2e}{a}\right)^2}}$;

y si hacemos $\frac{a-2e}{a}=z$, lo que da $-\frac{2de}{a}=dz$, ó $\frac{2de}{a}=-dz$, y sustituimos estos valores en la espresion anterior, se nos convertirá en $-\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

cuya integral es (II. 550), $\text{arco}(\cos.=z)=\text{arco}\left(\cos.=\frac{a-2e}{a}\right)$.

Luego la integral de la (ec. 383) será

$$t=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(\sqrt{ae-e^2}+\frac{a}{2}\times\text{arc.}\left(\cos.=\frac{a-2e}{a}\right)\right)\ (384).$$

Aquí no hay necesidad de añadir constante, porque se cuenta el tiempo partiendo desde el orígen del movimiento; de manera que se tiene $t=0$ cuando $e=0$; luego *por medio de esta ecuacion conocerémos inmediatamente el tiempo en funcion del espacio corrido*. Resolviéndola con relacion á e se tendrá el espacio en funcion del tiempo; pero el valor que se hallaria por ella vendria espresado por una serie infinita. Las (ecs. 381 y 384) comprenden la solucion completa del problema propuesto.

349 Pasemos ya á *considerar el movimiento vertical de un cuerpo pesado, teniendo en consideracion la resistencia del aire, supuesta proporcional al cuadrado de la velocidad*, que es el caso que ofrece la naturaleza.

Aquí hay que distinguir dos casos: primero *cuando el cuerpo cae*, y segundo *cuando es lanzado verticalmente de abajo arriba*.

En el primer caso, la fuerza aceleratriz φ es la diferencia de dos fuerzas que obran constantemente sobre el móvil en sentido contrario la una de la otra; á saber, la pesantez que obra verticalmente de arriba abajo, y la resistencia del medio en que el cuerpo se mueve que se opone á su descenso. Esta es una fuerza variable que depende de la velocidad del móvil, y que se considera generalmente como proporcional al cuadrado de dicha velocidad. Por este motivo la espresarémos por mv^2, siendo m un coeficiente constante para un mismo cuerpo y un mismo medio, pero variable con la forma del cuerpo, con su densidad y con la del medio. Si el cuerpo cayese de una grande altura, variaria m en razon de la mudanza de las capas de la atmósfera; pero en una pequeña altura se puede considerar el aire como un fluido homogeneo, y que m es una cantidad constante. Tambien considerarémos la pesantez como una fuerza constante, y espresándola por g será $\varphi = g - mv^2$ (385),

ó en virtud de la (ec. 340) $\frac{dv}{dt} = g - mv^2$ (386).

350 Para integrarla la pondrémos bajo esta forma $dt = \frac{dv}{g - mv^2}$ (387);

y como el denominador de esta espresion se puede descomponer (I. 179) en $(\sqrt{g} + v\sqrt{m})(\sqrt{g} - v\sqrt{m})$, tendrémos

$$dt = \frac{dv}{g - mv^2} = \text{(II. 437)}\ \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{dv}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}} + \frac{dv}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right) \text{ (388);}$$

que integrando (II. 545) da

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\log.(\sqrt{g} + v\sqrt{m}) - \frac{1}{\sqrt{m}}\log.(\sqrt{g} - v\sqrt{m})\right),$$

$$\text{ó } 2\sqrt{mg} \times t = \log.\left(\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}\right) \text{ (389).}$$

No hay necesidad de añadir constante si se supone nula la velocidad inicial del cuerpo y se cuenta el tiempo t partiendo del orígen del movimiento, de manera que se tenga al mismo tiempo $t = 0$ y $v = 0$, condicion á que satisface esta fórmula.

351 Pasando de los logaritmos á los números y espresando por ε la base del sistema neperiano, resulta $\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}} = \varepsilon^{2\sqrt{gm} \times t}$ (390),

ecuacion que *nos dará á conocer la velocidad del móvil á cada instante.*

Mudando los signos á la (ec. 389) la podríamos poner bajo esta forma $-2\sqrt{gm} \times t = \log.\frac{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}$, que pasando de los logaritmos á los números, nos dará

$$\frac{\sqrt{g}-v\sqrt{m}}{\sqrt{g}+v\sqrt{m}}=\varepsilon^{-2\sqrt{gm}\times t}\ (391),$$

que tambien puede servir para determinar la velocidad.

Para determinar el espacio corrido, la (ec. 339) da

$$de=vdt=(\text{ec. } 388)\ \frac{vdv}{g-mv^2}=-\frac{1}{2m}\times\frac{-2mvdv}{g-mv^2};$$

que integrando (II. 545) da $e=C-\frac{1}{2m}\times\log.(g-mv^2)$;

y determinando la constante de modo que se tenga al mismo tiempo $v=0$ y $e=0$, se halla $e=\frac{1}{2m}\times\log.\frac{g}{g-mv^2}=-\frac{1}{2m}\times\log.\frac{g-mv^2}{g}$,

ó $-2me=\log.\left(1-\frac{mv^2}{g}\right)$ (392).

Y como v es dada en funcion de t por la (ec. 390), esta dará del mismo modo en funcion de t el valor del espacio e. Así, la solucion completa del problema propuesto está comprendida en las dos (ecs. 390 y 392).

352 Pasemos ya á considerar el segundo caso, que es cuando el cuerpo es lanzado verticalmente de abajo arriba. Ahora la pesantez y la resistencia del aire obran en el mismo sentido, y en sentido contrario de la velocidad inicial; luego en este caso deberémos hacer g negativa en la (ec. 385), y tendrémos $\varphi=-g-mv^2$ (393);

por lo que (ec. 340) $\frac{dv}{dt}=-g-mv^2$ (394);

de donde se saca

$$-dt=\frac{dv}{g+mv^2}=\frac{1}{g}\times\frac{dv}{1+\frac{m}{g}v^2}=\frac{1}{g\sqrt{\frac{m}{g}}}\times\frac{\sqrt{\frac{m}{g}}\times dv}{1+\frac{m}{g}v^2}=\frac{1}{\sqrt{mg}}\times\frac{\sqrt{\frac{m}{g}}\times dv}{1+\frac{m}{g}v^2}\ (395)$$

que integrando (II. 550) da $-\sqrt{gm}\times t=\text{arc.}\left(\sqrt{\frac{m}{g}}\times v\right)+C$,

siendo C la constante; para determinarla supongamos que a sea la velocidad de proyeccion, y tendrémos que contando el tiempo t desde que principió el movimiento, se tendrá al mismo tiempo $t=0$ y $v=a$; y por consiguiente

$$o=\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{m}{g}}\times a\right)+C,\ \text{que da}\ C=-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{m}{g}}\times a\right).$$

Luego $\sqrt{gm}\times t=\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{m}{g}}\times a\right)-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\sqrt{\frac{m}{g}}\times v\right)$ (396), ecuacion que servirá para determinar el valor de v.

{ En cuanto al espacio corrido se tiene $de=vdt=$(ec. 395) $\dfrac{-vdv}{g+mv^2}$ (397); integrando y determinando la constante por la condicion de que se tenga al mismo tiempo $e=o$ y $v=a$, se halla $2me=\text{log.}\left(\dfrac{g+ma^2}{g+mv^2}\right)$ (398). Como se conoce á cada instante la velocidad del móvil por medio de la ecuacion precedente, se tendrá tambien por medio de esta última el espacio corrido.

{ Lo que mas importa conocer es la mayor altura á que el cuerpo se elevará en virtud de la velocidad de proyeccion; y como el móvil se elevará hasta que su velocidad haya venido á ser nula, resulta que haciendo $v=o$, y espresando por h esta mayor altura, se tendrá

$$h=\frac{1}{2m}\text{log.}\left(1+\frac{m}{g}\times a^2\right)\ (399).$$ }

Del movimiento de los cuerpos sujetos á resbalar á lo largo de los planos inclinados.

353 Propongámonos determinar el movimiento de un cuerpo que resbale sobre un plano inclinado. Como en este caso su centro de gravedad se moverá sobre un plano paralelo al plano inclinado, se puede referir esta cuestion á la del movimiento de un punto material sobre un plano inclinado.

Sea m este punto material (fig. 136) y g la velocidad debida á la accion de la pesantez. Supongamos que esta velocidad está representada por la recta mB, y descompongámosla en otras dos mC, mD, que sean la una perpendicular al plano inclinado, y la otra paralela á dicho plano ó en su misma direccion; la primera de estas componentes quedará destruida por la resistencia del plano inclinado, y la segunda será la que hará resbalar el punto m sobre dicho plano. Esto supuesto, siendo las fuerzas proporcionales á las velocidades que comunican á un móvil en el mismo tiempo, si llamamos g' la velocidad que solicita al móvil en un segundo de tiempo por el plano inclidado, tendrémos la proporcion $m\text{B}:m\text{D}::g:g'$.

Pero (I. 485 cor. 2.°) $m\text{B}:m\text{D}::m\text{A}:m\text{E}$;

luego llamando h la altura mE del plano inclinado y h' su longitud mA, tendrémos $h':h::g:g'$, que da $g'=\frac{gh}{h'}$ (400).

354 Esta ecuacion nos hace ver que *la velocidad* g' *no es otra cosa que la velocidad* g *que anima al móvil cuando está libre, multiplicada por la relacion constante de la altura del plano á su longitud.* De donde se infiere que el móvil es impelido á lo largo del plano inclinado por una fuerza aceleratriz g' que no difiere de la pesantez sino en su intensidad; luego si llamamos t' el tiempo que el móvil empleará en descender desde m hasta A á lo largo del plano inclinado, como el espacio corrido será h', habrá entre g' y t' la misma relacion que teníamos entre g, t y h en la teoría del movimiento uniformemente acelerado; por consiguiente será (ec. 355) $h'=\frac{1}{2}g't'^2$ (401),

que da $t'=\sqrt{\frac{2h'}{g'}}$ (402),

y la velocidad v' que animará al móvil en el punto A que corresponde á t', será $v'=g't'$ (403);

eliminando la t' se tiene $v'=\sqrt{2g'h'}$ (404).

355 Sustituyendo en esta ecuacion el valor de g' (ec. 400) y reduciendo, se tiene $v'=\sqrt{2gh}$.

La espresion de esta velocidad siendo independiente del ángulo mAE que forma el plano inclinado con el horizonte, resulta que *si diferentes móviles que parten del mismo punto* m (fig. 137) *resbalan sobre diferentes planos inclinados* m*A*, m*A'*, m*A''* &c., *todos tendrán la misma velocidad cuando hayan llegado al plano horizontal.*

356 Debemos observar que aunque las velocidades de un móvil sean iguales en los puntos A y E, no sucederá lo mismo con los tiempos; porque si espresamos por t y t' los tiempos que emplean en correr las rectas mE y mA, estos tiempos son dados por las ecuaciones

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\ (405),\quad t'=\sqrt{\frac{2h'}{g'}}\ (406);$$

pero se tiene $h<h'$ y $g>g'$, ó $\frac{1}{g}<\frac{1}{g'}$; luego $\frac{2h}{g}<\frac{2h'}{g'}$, lo que da $t<t'$; luego *el tiempo que gasta el móvil en bajar por el plano inclinado es mayor que el que emplea en bajar por la vertical*; y tambien podríamos deducir que *el tiempo que emplea el móvil en correr diferentes planos inclinados de igual altura, es mayor en el plano de mayor longitud.*

357 El movimiento de un cuerpo pesado sobre un plano inclinado nos ofrece una propiedad notable en el círculo; á saber, que *un móvil*

gasta tanto tiempo en resbalar á lo largo de una cuerda cualquiera AC (fig. 138) *como en correr el diámetro vertical.*

En efecto, sustituyendo en la (ec. 406) en vez de g' su valor $\frac{hg}{h'}$ (ec. 400), se tendrá $t'=\sqrt{\frac{2h'^2}{gh}}$ (407).

Pero si espresamos por d el diámetro del círculo ACB, será (I. 488, 2.ª) AB : AC :: AC : AD, ó $d:h'::h':h$, que da $h'^2=hd$.

Sustituyendo este valor en la (ec. 407) y reduciendo, encontrarémos $t'=\sqrt{\frac{2d}{g}}$ (408); pero este es precisamente el valor que se hallaria para t en el momento en que el cuerpo cayendo del punto A llegase á B; porque siendo AB la altura espresada por d, si sustituimos d en vez de h en la (ec. 405), tendrémos el mismo valor para t.

Del movimiento curvilineo de un punto ó cuerpo material libre.

358 Como toda la masa de un cuerpo la podemos considerar (166) reunida en su centro de gravedad, para *hallar las leyes del movimiento de un cuerpo, basta considerar el de su centro de gravedad*; con lo cual se simplifican mucho las cuestiones, pues solo hay necesidad de considerar un punto material. Cuando el movimiento de un punto no se hace en linea recta, es preciso que obren sobre él varias fuerzas en direcciones diferentes; y así, la primera cuestion que debe ocuparnos es la de determinar la velocidad y direccion que toma un punto libre, ó que no está sostenido sobre ninguna linea ó superficie curva dada, para obedecer á la accion simultanea de estas fuerzas.

Consideremos primero un punto m solicitado por dos fuerzas P y Q, que obren al mismo tiempo sobre el móvil; tomemos sobre sus direcciones mP y mQ (fig. 139) las partes mp y mq que representen las velocidades que estas fuerzas imprimirian al móvil si cada una de ellas obrase sola sobre él, y tendrémos que en virtud de lo espuesto (315), el punto m correrá en el mismo tiempo la diagonal mc del paralelogramo $mpcq$; y si no obra ninguna otra fuerza sobre el móvil, caminará uniformemente por la diagonal mc prolongada, y describirá en cada unidad de tiempo una porcion de esta linea igual á mc. En cada punto de esta linea, el móvil se hallará en el mismo estado que si la fuerza R, resultante de P y Q, obrase actualmente sobre él y le imprimiese la velocidad mc.

Supongamos que al llegar el móvil al punto m' de la mc, una nueva fuerza S le comunique en una direccion cualquiera m'S una velocidad espresada por $m's$; y tendrémos que el móvil se halla en el mismo caso que si las dos fuerzas R y S obrasen simultaneamente sobre él; luego si tomamos $m'c'=mc$ y acabamos el paralelogramo $m'c'es$, la diagonal $m'e$ espresará en direccion y magnitud la velocidad con que caminará el móvil.

Si se supusiese aun que otra fuerza se aplicase al móvil cuando hubiese llegado al punto m'' de su nueva direccion, la accion de esta fuerza haria mudar la velocidad y direccion de su movimiento; y se determinaria del mismo modo la velocidad y direccion que tomaria.

De donde resulta en general, que *si un número cualquiera de fuerzas* P, Q, S, T, &c. *obran á intervalos de tiempos determinados sobre un punto ó cuerpo, este describirá en el espacio un polígono cuyos lados serian fáciles de construir. Cada uno de estos lados se correrá con un movimiento uniforme y con una velocidad constante para un mismo lado; pero esta velocidad seria variable de un lado á otro.*

359 A proporcion que disminuyan los intervalos de tiempo que separen las acciones sucesivas de las fuerzas P, Q, S, T, *&c.*, los lados del polígono irán disminuyendo; de modo que si suponemos que estas fuerzas se sucedan sin interrupcion, resultará que *el móvil describirá una verdadera curva.* Más para conocer mejor la naturaleza de este polígono y de la curva que es su límite, y para determinar la ley del movimiento sobre esta curva, es necesario un rumbo diferente del que acabamos de seguir aquí, en que no llevábamos otro objeto que el de manifestar con toda claridad el paso del *movimiento rectilineo al movimiento curvilineo.*

360 El medio mas simple de determinar el movimiento de un punto material en el espacio, es el de señalar á cada instante la posicion de sus proyecciones sobre tres eges fijos. Estas proyecciones se pueden representar como tres puntos móviles que siguen al punto material durante su movimiento; entónces la cuestion se reduce á buscar las leyes de estos tres movimientos rectilineos, y hé aquí como se llega á resolverla. Sea A (fig 140) el punto de donde parte el móvil, y tiremos por este punto tres eges fijos y rectangulares AX, AZ, AU; supongamos que un número cualquiera de fuerzas de magnitud y direccion arbitrarias, se apliquen al móvil cuando se halla en el punto A, que obren sobre él simultaneamente y que lo abandonen despues á sí mismo. Cualquiera que sea el número de estas fuerzas, siempre se pueden reducir (51) á tres dirigidas segun los eges; luego si suponemos que el efecto de estas tres fuerzas sea el de comunicar al móvil la primera una velocidad en la direccion del ege AX espresada por a; la segunda el de comunicarle una velocidad en la direccion del ege AZ espresada por b; y la tercera el de comunicarle una velocidad en la direccion del ege AU espresada por c: tendrémos que en virtud de lo espuesto (316), si espresamos por v la velocidad resultante Am del móvil, se tendrá (ec. 33) $v^2=a^2+b^2+c^2$ (409);

y espresando por α, β, γ, los ángulos que la velocidad resultante v forme con los eges, tendrémos en virtud de lo demostrado (§ 34)

$$a=v\cos.\alpha \ (410),\ b=v\cos.\beta \ (411),\ c=v\cos.\gamma \ (412);$$

que dan $\cos.\alpha=\frac{a}{v}$ (413), $\cos.\beta=\frac{b}{v}$ (414), $\cos.\gamma=\frac{c}{v}$ (415);

por cuyo medio se fijará (II. 183a) la direccion del móvil, cuando se conozcan las de las volocidades en el sentido de los eges.

El móvil en virtud de su velocidad v describirá en la direccion de la diagonal Am una recta igual á $v\theta$ en un tiempo cualquiera θ; y las proyecciones de esta recta sobre los eges AX, AZ, AU estarán espresadas (II. 183a) por $v\theta\cos.\alpha$, $v\theta\cos.\beta$, $v\theta\cos.\gamma$;
ó lo que es lo mismo (ecs. 410, 411 y 412) por $a\theta$, $b\theta$, $c\theta$;
luego las proyecciones del móvil se mueven (299) uniformemente sobre estos eges con las velocidades a, b, c, miéntras que este punto material se mueve uniformemente en el espacio con la velocidad v.

361 Supongamos que al fin del tiempo θ obren nuevas fuerzas sobre el móvil, las cuales se reducirán á tres que sean paralelas á los eges AX, AZ, AU, y capaces de producir las velocidades a', b', c', en la direccion de estos eges en la misma unidad de tiempo, si cada una obrase sola sobre el móvil en reposo; este punto material se halla en este instante en el mismo estado que si estuviese en reposo, sometido á la accion simultanea de tres fuerzas que obrasen en la direccion de los eges, y cuyo efecto fuese el comunicar al móvil en el sentido de AX una velocidad espresada por $a+a'$, esto es, por la suma de la velocidad a que ya tenia, y la a' que suponemos adquiere por las nuevas fuerzas; en el de AZ, una velocidad espresada por $b+b'$; y en el de AU, una velocidad espresada por $c+c'$. Luego llamando v' la velocidad que el móvil debe tomar, será (316 y ec. 33) $v'^2=(a+a')^2+(b+b')^2+(c+c')^2$ (416);
y si se quisiese determinar la nueva direccion de su movimiento, espresando por α', β', γ', los ángulos que forma con los eges, obtendríamos por el método del párrafo anterior

$$\cos.\alpha'=\frac{a+a'}{v'} \ (417),\ \cos.\beta'=\frac{b+b'}{v'} \ (418),\ \cos.\gamma'=\frac{c+c'}{v'} \ (419).$$

Durante un tiempo cualquiera θ' que sucede al θ, las proyecciones del móvil sobre los eges correrán los espacios $(a+a')\theta'$, $(b+b')\theta'$, $(c+c')\theta'$; luego al fin del tiempo $\theta+\theta'$ las distancias de estos puntos al punto A, serán $a\theta+(a+a')\theta'$, $b\theta+(b+b')\theta'$, $c\theta+(c+c')\theta'$.

362 Supongamos que al fin del tiempo $\theta+\theta'$ se apliquen al móvil nuevas fuerzas, que reducidas á tres sean capaces de hacer adquirir al móvil las velocidades a'', b'', c'', en la direccion de los eges; y tendrémos que las proyecciones sobre los eges describirán durante este tercer intervalo de tiempo θ'', los espacios

$$(a+a'+a'')\theta'',\ (b+b'+b'')\theta'',\ (c+c'+c'')\theta'';$$

de manera que al fin del tiempo $\theta+\theta'+\theta''$, estas proyecciones se hallarán á distancias del punto A, espresadas por $\left\{\begin{array}{l} a\theta+(a+a')\theta'+(a+a'+a'')\theta'', \\ b\theta+(b+b')\theta'+(b+b'+b'')\theta'', \\ c\theta+(c+c')\theta'+(c+c'+c'')\theta''. \end{array}\right.$

363 Continuando del mismo modo, y espresando por x, z, u, los espacios corridos por las proyecciones del móvil en un número cualquiera de intervalos espresados por $\theta+\theta'+\theta''+\theta'''+\ldots\ldots\theta^{(n)'}$, tendrémos en general

$$x=a\theta+(a+a')\theta'+(a+a'+a'')\theta''\ldots\ldots+(a+a'+a''+\ldots\ldots a^{(n)'})\theta^{(n)'} \quad (420),$$
$$z=b\theta+(b+b')\theta'+(b+b'+b'')\theta''\ldots\ldots+(b+b'+b''+\ldots\ldots b^{(n)'})\theta^{(n)'} \quad (421),$$
$$u=c\theta+(c+c')\theta'+(c+c'+c'')\theta''\ldots\ldots+(c+c'+c''+\ldots\ldots c^{(n)'})\theta^{(n)'} \quad (422);$$

por medio de estos valores de x, z, u, que son las tres coordenadas del móvil referidas á los eges AX, AZ, AU, se determinará inmediatamente su posicion en el espacio, sin tener necesidad de construir el polígono que describe. Cada uno de estos valores tomado aisladamente encierra la ley del movimiento de la proyeccion de este punto material sobre el ege correspondiente.

364 Debemos observar que la composicion de los valores de x, z, u, nos da á conocer que *el espacio corrido por la proyeccion del móvil sobre uno de los tres eges, solo depende de las velocidades producidas por las fuerzas paralelas á este ege como si obrasen solas sobre el móvil*; de modo que este espacio no está modificado en manera alguna por la accion de las fuerzas paralelas á los otros eges. Así, en el valor de x solo se hallan las velocidades a, a', a'' &c....$a^{(n)'}$, que se imprimirian al móvil por las fuerzas paralelas al ege AX si todas las demas fuesen nulas. Del mismo modo la accion de las fuerzas paralelas á los eges AX, AU, no contribuyen ni á aumentar ni á disminüir el valor de z; y el de u es el mismo que si las fuerzas paralelas al ege AU hubiesen obrado solas sobre el móvil.

365 Como este resultado es independiente de la magnitud de los intervalos de tiempo $\theta, \theta', \theta''\ldots\theta^{(n)'}$ que separan las acciones de las fuerzas aplicadas sucesivamente al móvil, así como de la magnitud de las velocidades debidas á estas fuerzas, se sigue que se puede estender al caso en que el móvil esté sometido á la accion de una ó muchas fuerzas variatrices combinadas con otras fuerzas cuya accion sea instantanea.

Por lo que podemos concluir que *si se descomponen en tres fuerzas paralelas á tres eges fijos todas las fuerzas que producen el movimiento curvilineo de un punto material, y se consideran como puntos móviles las proyecciones del punto material sobre estos eges, el movimiento sobre cada ege se deberá á las fuerzas paralelas á esta linea, y del mismo modo que si las otras fuerzas fuesen nulas.*

366 En cada caso particular se determinarán los movimientos sobre los eges por medio de las ecuaciones del movimiento rectilineo dadas anteriormente; por lo que *la resolucion de un problema cualquiera relativo al movimiento curvilineo, está reducida á considerar tres mo-*

vimientos rectilineos en la direccion de tres eges, *ó solamente dos cuando estemos ciertos por la naturaleza de la cuestion*, *de que el móvil debe permanecer en un mismo plano*; porque entónces bastan dos de los tres eges coordenados.

367 Entendido esto, pasemos *á encontrar las ecuaciones diferenciales del movimiento curvilineo de un móvil sometido á la accion de una ó muchas fuerzas variatrices*, *y á la de otra fuerza que le ha comunicado instantaneamente una velocidad finita en el orígen de su movimiento.* Para lo cual supongamos que despues de un tiempo cualquiera t sean x, z, u, las tres coordenadas rectangulares del móvil, referidas á los tres eges AX, AZ, AU; estas coordenadas serán funciones de t, y el movimiento quedará enteramente determinado cuando estas funciones sean conocidas; pues que entónces se tendrá á cada instante la posicion del móvil en el espacio. Descompongamos cada una de las fuerzas variatrices dadas en otras tres paralelas á los eges de las coordenadas; y sean X, Z, U, las sumas de las componentes respectivamente paralelas á los eges de las x, de las z y de las u. Las cantidades X, Z, U, serán dadas en cada caso particular en funcion de x, z, u; y las supondrémos positivas ó negativas segun cooperen las fuerzas que representan á aumentar ó á disminuir las coordenadas del móvil. Y como segun lo que se acaba de demostrar (365) el movimiento de las proyecciones del móvil sobre cada ege, se debe á las fuerzas paralelas á este ege, resulta que aplicando á cada uno de estos tres movimientos rectilineos

la ecuacion general $\varphi = \dfrac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t}$ del (§321),

se tendrá $\dfrac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = X$ (423), $\dfrac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = Z$ (424), $\dfrac{\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\mathrm{d}t} = U$ (425);

y suponiendo constante á dt, se tendrá

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = X \ (426), \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = Z \ (427), \quad \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = U \ (428);$$

que *son las ecuaciones generales del movimiento de un móvil en el espacio.*

368 La velocidad inicial del móvil y su direccion no entran en estas ecuaciones, y sirven juntamente con la posicion del móvil en el orígen del movimiento para determinar las constantes arbitrarias que deben completar las integrales de estas ecuaciones; estas constantes serán seis, pues que hay tres ecuaciones diferenciales del segundo órden. Luego para la solucion completa de cada problema particular se deberán integrar estas tres ecuaciones determinando las constantes arbitrarias en virtud de las condiciones iniciales del movimiento

369 Si se sabe de antemano que el móvil debe moverse en un plano dado, se simplificará la cuestion tomando dicho plano por uno de los coordenados, por egemplo por el de las xz; para lo cual será necesario que no exista la fuerza U, y que se tenga tambien $u=0$; El problema entónces solo dependerá de las dos (ecs. 426 y 427), y tendrémos que $\frac{d^2x}{dt^2}=X$ (429), $\frac{d^2z}{dt^2}=Z$ (430),

serán *las ecuaciones generales del movimiento curvilineo de un móvil que se mueve siempre en un mismo plano.*

370 Cuando se hayan llegado á integrar las (ecs. 426, 427, 428) se tendrán en el caso general tres ecuaciones entre x, z, u y t; si por medio de ellas se elimina el tiempo t, quedarán dos entre las coordenadas x, z, u, que *serán las ecuaciones de la curva descrita por el móvil en el espacio*; á esta curva que en general será de doble curvatura se le llama la *trayectoria* del móvil.

371 El caso particular mas simple que se puede considerar es aquel en que las tres fuerzas X, Z, U son nulas. Las (ecs. 426, 427, 428) se reducen entónces á $\frac{d^2x}{dt^2}=0$, $\frac{d^2z}{dt^2}=0$, $\frac{d^2u}{dt^2}=0$;

multiplicando estas ecuaciones por dt, será $\frac{d^2x}{dt}=0$, $\frac{d^2z}{dt}=0$, $\frac{d^2u}{dt}=0$;

que por ser dt constante, podrémos poner bajo esta forma

$$d.\frac{dx}{dt}=0,\ d.\frac{dz}{dt}=0,\ d.\frac{du}{dt}=0;$$

las cuales integradas dan $\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dz}{dt}=b$, $\frac{du}{dt}=c$,

siendo a, b, c tres constantes arbitrarias.

Quitando el divisor en estas ecuaciones resultará

$$dx=adt,\ dz=bdt,\ du=cdt;$$

las cuales integradas dan $x=at+a'$, $z=bt+b'$, $u=ct+c'$, siendo a', b', c' otras tres constantes arbitrarias.

Si se coloca el orígen de las coordenadas en el punto de donde parte el móvil, y se cuenta el tiempo t desde el instante en que principia el movimiento, se tendrá al mismo tiempo $x=0$, $z=0$, $u=0$, $t=0$; de donde resulta $a'=0$, $b'=0$, $c'=0$;
y por consiguiente las ecuaciones anteriores se nos convertirán en

$$x=at,\ z=bt,\ u=ct.$$

Eliminando t por medio de ellas se tiene $x=\frac{a}{c}\times u$, $z=\frac{b}{c}\times u$;

que nos manifiestan que la trayectoria es (II. 182) *una linea recta que pasa por el orígen.*

372 Si espresamos por l la parte de esta recta comprendida entre el orígen y el punto que corresponde á las coordenadas x, z, u, tendrémos (II. 181) $l=\sqrt{x^2+z^2+u^2}=t\sqrt{a^2+b^2+c^2}$;

ecuacion que nos manifiesta que *la longitud* l *es proporcional al tiempo*, *y por lo mismo* (303) *el movimiento del punto material en el espacio es uniforme*, *así como el de sus proyecciones sobre los eges.*

La velocidad del móvil es $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, que es la velocidad resultante de las velocidades componentes a, b, c en la direccion de los eges.

373 Si se espresan por α, β, γ, los ángulos que forma la direccion de esta resultante con los eges de las x, z, u, y se observa que x, z, u son las proyecciones de l sobre estos eges, se tendrá (II. 183a)

$$x=l\cos.\alpha,\ z=l\cos.\beta,\ u=l\cos.\gamma;$$

sustituyendo por x, z, u, l, sus valores, dividiendo por t, y haciendo para abreviar $v^2=a^2+b^2+c^2$, resulta $a=v\cos.\alpha$, $b=v\cos.\beta$, $c=v\cos.\gamma$.

Estas cuatro últimas ecuaciones comprenden toda la teoría de la composicion y descomposicion de las velocidades en los movimientos uniformes; y se ve que estas operaciones, inversa la una de la otra, se efectúan como hemos asegurado (317) en virtud de las mismas reglas que la composicion y descomposicion de las fuerzas.

374 Volvamos á considerar el caso general en que X, Z, U son fuerzas variatrices dadas.

Si en una época cualquiera del movimiento se supone que estas fuerzas cesen repentinamente de obrar sobre el móvil, el movimiento sobre cada ege de las coordenadas vendrá á ser uniforme; y como los espacios corridos sobre estos eges son x, z, u, tendrémos que la ecuacion $\frac{de}{dt}=v$, nos dará para las velocidades en la direccion de estos eges las espresiones $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{du}{dt}$.

Por consiguiente el movimiento del cuerpo en el espacio se mudará en un movimiento rectilineo y uniforme; y si espresamos por v la velocidad de este movimiento, que es la resultante de las $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{du}{dt}$, tendrémos por lo que acabamos de manifestar

$$v=\sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}+\frac{du^2}{dt^2}}=\frac{\sqrt{dx^2+dz^2+du^2}}{dt}\ (431);$$

y como en virtud de lo espuesto (179) el numerador de esta espresion es igual con el elemento ds de la trayectoria, tendrémos que $v = \frac{ds}{dt}$ (432).

La variable s es una funcion del tiempo que espresa la longitud de la linea curva corrida por el móvil; así, se puede decir que aquí como en el movimiento rectilineo, *la velocidad es igual al primer coeficiente diferencial del espacio corrido, considerado como una funcion del tiempo.*

Si espresamos por α, β, γ los ángulos que forma la direccion de esta velocidad con los eges de las x, z, u, tendrémos que como la velocidad en la direccion de un ege cualquiera es (61) igual á la velocidad absoluta multiplicada por el coseno del ángulo que forma la direccion con dicho ege, será $v\cos.\alpha = \frac{dx}{dt}$ (433), $v\cos.\beta = \frac{dz}{dt}$ (434), $v\cos.\gamma = \frac{du}{dt}$ (435), ó poniendo en vez de v su valor $\frac{ds}{dt}$, y dividiendo por este valor, será

$$\cos.\alpha = \frac{dx}{ds} \ (436), \quad \cos.\beta = \frac{dz}{ds} \ (437), \quad \cos.\gamma = \frac{du}{ds} \ (438).$$

Pero como los cosenos de los ángulos que forma la tangente de la trayectoria con los eges de las coordenadas son tambien (nota del § 179) iguales á las relaciones $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{du}{ds}$, resulta que *la direccion de la velocidad* v *en un punto cualquiera de la trayectoria coincide con la tangente de esta curva en aquel punto.*

Lo cual nos manifiesta que *si se suprimiesen de repente todas las fuerzas que hacen variar el movimiento de un punto material en el espacio, el móvil se escaparia por la tangente á la trayectoria en el punto donde se hallase, y con una velocidad igual á la relacion que tiene el elemento* ds *de esta curva con el elemento* dt *del tiempo.*

375 Hay un método muy elegante para *determinar la velocidad*, que vamos á dar á conocer. Para esto observarémos que si se multiplica la (ec. 426) por 2dx, la (ec. 427) por 2dz, y la (ec. 428) por 2du, y se suman los resultados, se obtendrá

$$\frac{2dxd^2x + 2dzd^2z + 2dud^2u}{dt^2} = 2(Xdx + Zdz + Udu);$$

y observando que el primer miembro de esta ecuacion no es otra cosa que la diferencial de dx^2+dz^2+du^2, dividida por dt^2, se tendrá

$$\frac{d.(dx^2 + dz^2 + du^2)}{dt^2} = 2(Xdx + Zdz + Udu).$$

Remplazando $dx^2+dz^2+du^2$ por ds^2, y considerando á dt como constante é integrando, se hallará $\frac{ds^2}{dt^2}=2S.(Xdx+Zdz+Udu)$ (439);

ó poniendo por $\frac{ds}{dt}$ su valor v (ec. 432), será

$$v^2=2S.(Xdx+Zdz+Udu) \quad (440).$$

Efectuando esta integracion cuando sea posible, llegarémos á tener

$$v^2=2F.(x, z, u,)+C.$$

Para determinar la constante C será necesario conocer la velocidad del móvil en uno de los puntos de la trayectoria. Así, cuando se sabe que w es la velocidad que corresponde á las coordenadas $x=a$, $z=b$, $u=c$, se tiene $w^2=2F.(a, b, c)+C$;

en la cual despejando C y sustituyendo su valor en la última ecuacion, se obtendrá $v^2-w^2=2F.(x, z, u)-2F.(a, b, c)$ (441).

Diferenciando la (ec. 439) y dividiendo por $2ds$, resulta

$$\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Z\frac{dz}{ds}+U\frac{du}{ds};$$

pero siendo X, Z, U, las tres fuerzas á que se pueden reducir todas las que pueden obrar sobre el móvil, y $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{du}{ds}$ los cosenos de los ángulos que las direcciones de estas fuerzas forman con la tangente á la trayectoria, resulta que el segundo miembro de esta ecuacion espresa la fuerza variatriz que obra sobre el móvil, descompuesta en la direccion de dicha tangente; luego nos resulta tambien aquí, como en el movimiento rectilineo, que *el segundo coeficiente diferencial* $\frac{d^2s}{dt^2}$ *espresa la fuerza variatriz*; y como $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d.\frac{ds}{dt}}{dt}=\frac{dv}{dt}$,

tambien se puede deducir que *la fuerza variatriz es igual al coeficiente diferencial de la velocidad tomado con relacion al tiempo*, como en el movimiento rectilineo; luego tenemos que *estas dos propiedades se verifican en todo género de movimientos.*

376 Es muy digno de notarse el resultado de la (ec. 441); pues nos dice que *se puede determinar la diferencia de los cuadrados de las velocidades en dos puntos de la trayectoria, solo por medio de las coordenadas de estos puntos y sin conocer la curva que el móvil sigue pasando de un punto al otro.*

Pero no se debe olvidar que este resultado supone que $Xdx+Zdz+Udu$, sea una diferencial exacta de tres variables, lo que no siempre se verifica.

Hay un caso particular muy estenso en que esta fórmula es una diferencial exacta; y es *cuando todas las fuerzas variatrices que obran sobre el móvil se dirigen hácia centros fijos, y en que la intensidad de cada una de ellas es una funcion de la distancia del móvil á su centro de accion.*

Para demostrarlo supongamos que F esprese la intensidad de una fuerza de esta naturaleza, dirigida á un punto fijo; l, m, n, las coordenadas de este punto; f su distancia al móvil cuyas coordenadas son las variables x, z, u, y tendrémos (II. 180) $f^2=(x-l)^2+(z-m)^2+(u-n)^2$; diferenciando esta ecuacion, y dividiendo por $2f$, da

$$df=\frac{x-l}{f}\times dx+\frac{z-m}{f}\times dz+\frac{u-n}{f}\times du.$$

Los cosenos de los ángulos que forma la linea f con los eges de las x, de las z y de las u, serán (II. 183a) $\frac{x-l}{f}$, $\frac{z-m}{f}$, $\frac{u-n}{f}$; por lo que las componentes de F paralelas á estos eges serán (§ 34)

$$\frac{x-l}{f}F,\ \frac{z-m}{f}F,\ \frac{u-n}{f}F;$$

por consiguiente la parte del valor de $Xdx+Zdz+Udu$, que proviene de la fuerza F, será

$$\frac{x-l}{f}\times Fdx+\frac{z-m}{f}\times Fdz+\frac{u-n}{f}Fdu=F\left(\frac{x-l}{f}dx+\frac{z-m}{f}dz+\frac{u-n}{f}du\right);$$

y como lo que hay dentro del paréntesis es igual con df, esta espresion se nos convertirá en Fdf; pero si ademas de F se tuviese otro número cualquiera de fuerzas F', F'' &c. dirigidas hácia puntos fijos que distasen de los móviles las cantidades f', f'' &c., resultará que teniendo en consideracion todas estas fuerzas, será

$$Xdx+Zdz+Udu=Fdf+F'df'+F''df''\ \&c.;$$

pero todos los términos de este valor son diferenciales exactas, pues que F es una funcion de f por el supuesto, F' de f', F'' de f'' &c.; luego su suma tambien lo será.

Si una ó muchas de estas fuerzas estuviesen dirigidas hácia centros móviles, esto es, si por egemplo las coordenadas l, m, n no fuesen constantes, el valor precedente de df y a no seria exacto, y la fórmula $Xdx+Zdz+Udu$ tampoco lo seria.

Cuando el móvil está solicitado por una sola fuerza dirigida hácia un centro fijo, se obtienen resultados que conviene conocer.

En efecto, supongamos que las fuerzas que obran sobre él, se reduzcan á una resultante única R que pase por el centro fijo, y que obrando en la direccion de MC (fig. 141) se podrá representar por una parte cualquiera CD de esta linea; coloquemos el orígen en este centro; espresemos por λ su distancia MC al punto M, y por α, β, γ los ángulos que la $CM=\lambda$ forma con los eges coordenados; y tendrémos que como la resultante R obra en la direccion de MC, formará los mismos ángulos con los eges; y descomponiéndola en tres fuerzas X, Z, U paralelas á los eges, será $X=R\cos.\alpha$, $Z=R\cos.\beta$, $U=R\cos.\gamma$; dividiendo la primera por la segunda, la segunda por la tercera y la tercera por la primera, tendrémos $\frac{X}{Z}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta}$, $\frac{Z}{U}=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma}$, $\frac{U}{X}=\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}$.

Pero si espresamos por x, z, u las coordenadas del punto M en que está situado el móvil, tendrémos (II. 183a) $x=\lambda\cos.\alpha$, $z=\lambda\cos.\beta$, $u=\lambda\cos.\gamma$, que dan del mismo modo que las anteriores

$$\frac{x}{z}=\frac{\cos.\alpha}{\cos.\beta},\ \frac{z}{u}=\frac{\cos.\beta}{\cos.\gamma},\ \frac{u}{x}=\frac{\cos.\gamma}{\cos.\alpha}.$$

Como los segundos miembros de estas ecuaciones son los mismos que los de las anteriores, tendrémos $\frac{X}{Z}=\frac{x}{z}$, $\frac{Z}{U}=\frac{z}{u}$, $\frac{U}{X}=\frac{u}{x}$;

que quitando los divisores y trasladando dan

$$zX-xZ=0,\ uZ-zU=0,\ xU-uX=0.$$

Si en estas ecuaciones sustituimos en vez de X, Z, U, sus valores (ecs. 426, 427, 428), se hallará

$$z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}=0,\ u\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2u}{dt^2}=0,\ x\frac{d^2u}{dt^2}-u\frac{d^2x}{dt^2}=0.$$

Multiplicando por dt la primera de estas ecuaciones, integrando por partes y reduciendo, se hallará $\frac{zdx-xdz}{dt}=C$;

y egecutando lo mismo con las demas y quitando el divisor, tendrémos

$$zdx-xdz=Cdt,\ udz-zdu=C'dt,\ xdu-udx=C''dt.$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por la variable que no comprende y sumándolas, se tendrá $0=(Cu+C'x+C''z)\,dt$, ó suprimiendo dt será $Cu+C'x+C''z=0$.

Esta ecuacion es (II. 190) la de un plano que pasa por el orígen, que siendo el centro de atraccion, se ve que *el móvil se mueve en una curva plana*. Luego si resolvemos de nuevo el problema suponiendo la trayectoria en el plano de las xz, no necesitarémos hacer uso de la ecuacion $U=\frac{d^2u}{dt^2}$, ni de las cantidades U y u que son nulas en este caso; por lo que solo necesitarémos la ecuacion $zdx-xdz=Cdt$, la cual integrada dará $S.(zdx-xdz)=Ct+c$.

Para determinar esta integral, notarémos que siendo zdx el elemento (II. 624) de una superficie comprendida por un arco de curva y sus coordenadas, podrémos suponer que esta superficie esté comprendida entre las abscisas $x=0$, y $x=$CP (fig. 142); entónces la espresion $S.zdx$ estará representada por LCPM. Si quitamos de esta superficie el triángulo CPM, nos quedará

$$\text{sectorLCM}=\text{areaLCPM}-\text{triánguloCPM}, \text{ ó } \text{sectorLCM}=S.zdx-\tfrac{1}{2}xz;$$

diferenciando esta ecuacion se hallará

$$d.\text{sectorLCM}=zdx-\frac{xdz}{2}-\frac{zdx}{2}=\frac{zdx-xdz}{2};$$

quitando el divisor é integrando de nuevo, se tendrá

$$2\text{sectorLCM}=S.(zdx-xdz);$$

y como ántes teníamos $S.(zdx-xdz)=Ct+c$, será $2\text{sectorLCM}=Ct+c$; y suponiendo que el tiempo principie cuando el móvil se halla en L, en cuyo caso es nulo el sector y el tiempo t, resultará $c=0$; y haciendo $C=2A$, tendrémos que la ecuacion anterior se nos convertirá en $\text{sectorLCM}=At$;

que nos dice que *cuando el móvil solicitado por una fuerza que le atrae hácia un centro fijo C, describe una curva LM, la superficie del sector LCM es proporcional al tiempo que el móvil emplea en correr la curva.* Esta propiedad se conoce bajo el nombre de *principio de las areas.*

Del movimiento de los proyectiles, contando con la resistencia del aire, que es el caso que ofrece la naturaleza á las balas y á las bombas arrojadas por las piezas de artillería.

377 Cuando á un cuerpo cualquiera se le comunica un impulso en una direccion cualquiera, principia á moverse en aquella direccion con la velocidad que se le ha comunicado; y desde el mismo instante principia á obrar sobre él la gravedad y la resistencia del aire; de modo que estas dos causas modifican su movimiento, separándole de la direccion en que se le comunicó el impulso primitivo; y como la principal aplicacion que se hace de este movimiento es al de las balas y las bombas arrojadas por las piezas de artillería, resulta que se ha caracterizado con el nombre de *Balística* á la parte de la Mecánica que trata del movimiento de los cuerpos pesados lanzados en una direccion cualquiera. La fuerza que comunica este impulso es la fuerza espansiva de los gases que se forman por la inflamacion de la pólvora en el momento de la esplosion; y como luego que el proyectil sale del cañon, cesa ya esta accion, resulta que la Balística no nos ofrece mas que esta cuestion. *Siendo arrojado un cuerpo en una cierta direccion con una velocidad determinada, hallar todas las circunstancias de su movimiento.*

De este problema se pueden dar dos resoluciones: una haciendo abstraccion del intermedio por donde pasa el proyectil, esto es, considerando que se mueve en el vacío; y la otra teniendo en consideracion la resistencia que el aire opone á los cuerpos que en él se mueven. Acerca de los esfuerzos que se han hecho para resolver esta cuestion puede verse mi Compendio de Mecánica Práctica (§§ 255, 256 y 257); por lo que pasarémos desde luego á resolverla con tóda generalidad, contando con la resistencia del aire.

Para esto concibamos la trayectoria en el espacio referida á tres eges rectangulares, de los cuales el de las z sea vertical. Concibamos tambien las fuerzas continuas que hacen variar el movimiento del punto ó cuerpo que la describe, descompuestas en otras tres X, U, Z, que sean paralelas á estos mismos eges; y como en este caso solo hay dos fuerzas continuas que obran en el móvil, á saber, la resistencia que opone el intermedio y la gravedad, tendrémos en primer lugar que la gravedad obra de arriba abajo en direccion contraria al ege de las z; y en segundo, que la resistencia que opone el aire en su tránsito es en todas direcciones. Luego si espresamos esta resistencia por R, tendrémos que concibiéndola descompuesta en otras tres que obren paralelamente á los eges de las x, z, u, cada una de estas será (34) igual á R multiplicada por el coseno del ángulo que forme R con cada uno de dichos eges: y como llamando x, z, u á las coordenadas de un punto cualquiera donde se halle el móvil al cabo del tiempo t, y s al arco que ha descrito hasta entónces, se verifica (nota del § 179) que $\frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds}, \frac{du}{ds}$ son los cosenos de los ángulos formados por la tangente de la curva en aquel punto con los eges respectivos de las x, de las z y de las u, resulta que como la resistencia R obra en el sentido opuesto al camino que describe el móvil, que es el elemento de curva, formará estos mismos ángulos con los eges; de modo que sus componentes en el sentido de los eges de las x, z, u, serán $R\frac{dx}{ds}, R\frac{dz}{ds}, R\frac{du}{ds}$;

y las fuerzas continuas X, Z, U, que obran sobre el móvil, serán en este caso, espresando por g la gravedad

$$X=-R\frac{dx}{ds},\ Z=-\left(R\frac{dz}{ds}+g\right),\ U=-R\frac{du}{ds};$$

en las cuales ponemos los signos negativos, porque oponiéndose la espresada resistencia R al movimiento del proyectil, sus componentes tratarán de disminuir las coordenadas del punto donde se hallaria si no se le opusiese resistencia.

Luego en virtud de las (ecs. 423, 424, 425), tendrémos

$$\frac{d.\frac{dx}{dt}}{dt}=-R\frac{dx}{ds},\ \frac{d.\frac{dz}{dt}}{dt}=-\left(R\frac{dz}{dt}+g\right),\ \frac{d.\frac{du}{dt}}{dt}=-R\frac{du}{ds};$$

ó quitando el divisor dt será

$$d.\frac{dx}{dt}=-R\frac{dx}{ds}dt\ (442),\ d.\frac{dz}{dt}=-\left(R\frac{dz}{ds}+g\right)dt\,(443),\ d.\frac{du}{dt}=-R\frac{du}{ds}dt\ (444),$$

ó pasando los segundos miembros á los primeros se tendrá

$$d.\frac{dx}{dt}+R\frac{dx}{ds}dt=0\ (445),\ d.\frac{dz}{dt}+R\frac{dz}{ds}dt+gdt=0\ (446),\ d.\frac{du}{dt}+R\frac{du}{ds}dt=0\ (447).$$

si despejamos R en las (ecs. 442 y 444), é igualamos los valores, tendrémos $-\dfrac{d.\frac{dx}{dt}}{\frac{dx}{ds}\times dt}=-\dfrac{d.\frac{du}{dt}}{\frac{du}{ds}\times dt}$;

que mudando los signos, y suprimiendo el ds que resulta comun en los denominadores, se convierte en $\dfrac{d.\frac{dx}{dt}}{dxdt}=\dfrac{d.\frac{du}{dt}}{dudt}$;

la cual multiplicada por dudx, y pasando todos los términos al primer miembro, se convierte en $\frac{du}{dt}\times d.\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}\times d.\frac{du}{dt}=0$,

que dividiendo por $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$, la tendrémos reducida á

$$\frac{\frac{du}{dt}\times d.\frac{dx}{dt}-\frac{dx}{dt}\times d.\frac{du}{dt}}{\left(\frac{du}{dt}\right)^2}=0;$$

cuya espresion cotejada con lo dicho (II. 520) la podrémos poner bajo esta forma $d.\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{du}{dt}}=0$; que integrada dará $\dfrac{\frac{dx}{dt}}{\frac{du}{dt}}=c$,

ó quitando el divisor será $\frac{dx}{dt}=c\frac{du}{dt}$, ó $dx=cdu$;

la cual vuelta á integrar se nos convertirá en $x=cu+c'$;
y siendo c y c' constantes arbitrarias, resulta que esta ecuacion es (II. 160) la de una recta que se halla en el plano de las xu que es horizontal; luego *la proyeccion de la trayectoria sobre el plano horizontal*

es una linea recta, y por lo mismo dicha trayectoria se halla en un plano vertical, ó lo que es lo mismo, dicha trayectoria es de simple curvatura.

De aquí resulta que hallándose dicha trayectoria en el plano de las xz, nos es inútil la (ec. 447); y por lo mismo las ecuaciones del movimiento se nos reducirán á estas dos:

$$\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+R\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\times\mathrm{d}t=0,\ \mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\times\mathrm{d}t+g\mathrm{d}t=0.$$

378 Como hasta ahora no hemos supuesto ninguna diferencial constante, podrémos considerar que lo sea una cualquiera de ellas; y suponiendo constante la $\mathrm{d}x$, y efectuando la diferenciacion indicada en los primeros términos de las ecuaciones anteriores, tendrémos

$$-\frac{\mathrm{d}^2t\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\times\mathrm{d}t=0\ (448),\ \frac{\mathrm{d}t\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}z\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\times\mathrm{d}t+g\mathrm{d}t=0\ (449).$$

Si despejamos R en la primera, y sustituimos su valor $\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}t^3}$ en esta última, se nos convertirá en $\mathrm{d}^2z+g\mathrm{d}t^2=0$ (450).

379 Si queremos hallar una relacion entre las coordenadas de la trayectoria, deberémos eliminar t en estas ecuaciones; y como $\mathrm{d}t$ y d^2t son dos funciones diferentes de t, no podrémos eliminarlas ambas solo con el auxilio de las (ecs. 448 y 450); por lo que nos proporcionarémos otra ecuacion diferenciando la (ec. 450), cuya operacion nos dará

$$\mathrm{d}^3z+2g\mathrm{d}t\mathrm{d}^2t=0\ (451).$$

Si en esta ecuacion sustituimos en vez de d^2t su valor $R\frac{\mathrm{d}t^3}{\mathrm{d}s}$, sacado de la (ec. 448), tendrémos $\mathrm{d}^3z+2gR\frac{\mathrm{d}t^4}{\mathrm{d}s}=0$ (452); y sustituyendo ahora en vez de $\mathrm{d}t^2$ su valor $-\frac{\mathrm{d}^2z}{g}$, sacado de la (ec. 450), tendrémos $\mathrm{d}^3z+2gR\frac{\left(-\frac{\mathrm{d}^2z}{g}\right)^2}{\mathrm{d}s}=0$, ó lo que es lo mismo $\mathrm{d}^3z+2R\frac{\mathrm{d}^2z^2}{g\mathrm{d}s}=0$ (453), en la que despejando R se tendrá $R=-\frac{g\mathrm{d}^3z\mathrm{d}s}{2\mathrm{d}^2z^2}$ (454).

380 Si suponemos en general que R sea proporcional á una potencia cualquiera n de la velocidad, resultará que R será igual á v^n multiplicada por un coeficiente cualquiera que dependerá de la naturaleza del medio resistente, y que la esperiencia deberá dar á conocer. Nosotros lo espresarémos por $\frac{1}{2}A$, y tendrémos $R=\frac{1}{2}Av^n$ (455).

Si en esta ecuacion sustituimos en vez de v su valor $\frac{ds}{dt}$ (ec. 432), tendrémos $R=\frac{1}{2}A\frac{ds^n}{dt^n}$;

igualando este valor con el de R que da la (ec. 454) obtendrémos una ecuacion de la cual deducirémos con toda generalidad las leyes del movimiento de los proyectiles. Más como la resistencia que ofrece el aire está demostrado (§ 267 de mi Compendio de Mecánica Práctica) que es proporcional á los cuadrados de las velocidades, solo nos ocuparémos de este caso que es el de la naturalezá; y así, harémos $n=2$, y tendrémos que $R=\frac{1}{2}Av^2=\frac{1}{2}A\frac{ds^2}{dt^2}$ (456);

luego si sustituimos este valor en la (ec. 452), será $d^3z+gA ds dt^2=0$ (457);

ó sustituyendo en vez de dt^2 su valor $-\frac{d^2z}{g}$ sacado de la (ec. 450),

tendrémos $d^3z-A ds d^2z=0$, ó $\frac{d^3z}{d^2z}=A ds$.

Como el primer miembro de esta ecuacion espresa (II. 545) la diferencial del logaritmo de d^2z, resultará que si integramos será

$$\log.(C d^2z)=As \ (*);$$

esta ecuacion conforme está seria absurda, pues hay diferenciales en el primer miembro, y no las hay en el segundo; luego para hacerla homogenea, pues que proviene de haber hecho constante á dx, la deberémos poner bajo esta forma: $\log.\left(C\frac{d^2z}{dx^2}\right)=As$.

Ahora, si llamamos e el número cuyo logaritmo neperiano es igual con la unidad, tendrémos $e^{As}=C\frac{d^2z}{dx^2}$ (458).

381 Para determinar la constante C deberémos considerar las cir-

(*) *Esta C proviene de que suponiendo que la constante que se añada sea un logaritmo, la integral del primer miembro será*

$$\log.d^2z+\log.C=\log.(Cd^2z).$$

cunstancias iniciales del movimiento; para lo cual sustituirémos en vez de d^2z su valor $-gdt^2$ sacado de la (ec. 450), y tendrémos

$$e^{As}=C\times\frac{-gdt^2}{dx^2},\ ó\ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\times e^{As}=-Cg\ (459).$$

Pero $\frac{dx}{dt}$ es la velocidad del móvil en el sentido del ege de las x al cabo del tiempo t; luego si espresamos por v la velocidad inicial, y por β el ángulo MCP (fig. 142), que su direccion forma con el horizonte ó ege de las x, se deberá tener á un mismo tiempo $t=0$, $x=0$, $z=0$ y $s=0$, y (ec. 433) $\frac{dx}{dt}=v\cos.\beta$; (porque aquí espresamos por β lo que en dicha ecuacion por α); por lo que haciendo estas sustituciones en la ecuacion anterior, tendrémos $v^2\cos.\beta^2=-Cg$ (460).

Pero si llamamos h la altura de que deberia caer el móvil para adquirir la velocidad v, se tendrá (ec. 371) $v^2=2gh$; y poniendo este valor en la ecuacion anterior se convertirá en $C=-2h\cos.\beta^2$, y la (ec. 458) nos dará $e^{As}=-2h\cos.\beta^2\frac{d^2z}{dx^2}$ (461).

Con el fin de integrar esta ecuacion, espresarémos por p el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$, esto es, harémos $\frac{dz}{dx}=p$, lo que dará $dz=pdx$, y $dx=\frac{dz}{p}$; y diferenciando, siempre en el supuesto de ser dx constante, tendrémos $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$; luego si en vez de $\frac{d^2z}{dx^2}$ sustituimos este valor en la (ec. 461) y mudamos los signos, tendrémos $-e^{As}=2h\cos.\beta^2\times\frac{dp}{dx}$ (462).

382 Del mismo supuesto $\frac{dz}{dx}=p$, resulta (II.591) que $ds=dx\sqrt{1+p^2}$; luego si multiplicamos estas dos ecuaciones, tendrémos

$$-e^{As}ds=2h\cos.\beta^2dp\sqrt{1+p^2}\ (463),$$

é integrando será $S.-e^{As}ds=2h\cos.\beta^2 S.dp\sqrt{1+p^2}$ (464).

El primer miembro multiplicado por $1=\frac{A}{A}$ no mudará de valor, y teniendo presente que las constantes se pueden introducir y sacar fuera de los signos diferenciales é integrales (II. §§ 515 y 636) segun convenga, será $S.-e^{As}ds=\frac{A}{A}S.-e^{As}ds=S.-\frac{1}{A}\times e^{As}d.As=-\frac{1}{A}S.e^{As}d.As$; cuya espresion en virtud de lo espuesto (II. 650) tendrá por integral

$$-\frac{1}{A}\times\frac{e^{As}}{\log.e};$$

ó como $\log.e=1$, por ser la base del sistema neperiano, se tendrá por último que la integral del primer miembro de la (ec. 464) es $-\frac{1}{A}\times e^{As}$.

Para hallar la del segundo harémos $\sqrt{1+p^2}=y-p$ (465); cuyo supuesto, quitando el radical y despejando, nos dará $p=\frac{y^2-1}{2y}$,

la cual diferenciada da $dp=\frac{y^2+1}{2y^2}\times dy$,

ó multiplicando por y será $ydp=\frac{y^2+1}{2y}\times dy$.

Pero si multiplicamos por dp la (ec.465) será $dp\sqrt{1+p^2}=ydp-pdp$, ó sustituyendo en vez de ydp el valor que acabamos de hallar, tendrémos

$$dp\sqrt{1+p^2}=\frac{y^2+1}{2y}dy-pdp=\frac{ydy}{2}+\tfrac{1}{2}\times\frac{dy}{y}-pdp \quad (466);$$

por lo que integrando será

$$S.dp\sqrt{1+p^2}=S.\left(\frac{ydy}{2}+\tfrac{1}{2}\times\frac{dy}{y}-pdp\right)=\frac{y^2}{4}+\tfrac{1}{2}\log.y-\frac{p^2}{2}+C;$$

ó poniendo en vez de y su valor $p+\sqrt{1+p^2}$ sacado de la (ec. 465), y espresando por $\frac{1}{2}C'$ todo lo que resulta constante que es $\frac{1}{4}+C$, tendrémos

$$S.dp\sqrt{1+p^2}=\tfrac{1}{2}(p\sqrt{1+p^2}+\log.(p+\sqrt{1+p^2})+C');$$

por lo que la (ec. 464) se nos convertirá en

$$-\frac{1}{A}e^{As}=h\cos.6^2(p\sqrt{1+p^2}+\log.(p+\sqrt{1+p^2})+C') \quad (467).$$

383 Si observamos ahora que $p=\frac{dz}{dx}$ espresa (II. 586) la tangente

trigonométrica del ángulo que la curva ó su tangente forma en un punto cualquiera con el ege de las abscisas, se tendrá que espresando por α este ángulo, será $p=\text{tang}.\alpha$, y resultará

$$\sqrt{1+p^2}=\sqrt{1+\text{tang}.\alpha^2}=\text{sec}.\alpha=\frac{1}{\cos.\alpha};$$

por lo que

$$p+\sqrt{1+p^2}=\text{tang}.\alpha+\text{sec}.\alpha=\frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha}+\frac{1}{\cos.\alpha}=\frac{\text{sen}.\alpha+1}{\cos.\alpha}=\frac{\text{sen}.\alpha+1}{\sqrt{1-\text{sen}.\alpha^2}}=$$

$$\frac{\text{sen}.\alpha+1}{\sqrt{(1+\text{sen}.\alpha)\times(1-\text{sen}.\alpha)}}=\frac{\sqrt{\text{sen}.\alpha+1}\times\sqrt{\text{sen}.\alpha+1}}{\sqrt{1+\text{sen}.\alpha}\times\sqrt{1-\text{sen}.\alpha}}=\frac{\sqrt{\text{sen}.\alpha+1}}{\sqrt{1-\text{sen}.\alpha}}\ (468).$$

A esta espresion la podemos dar una forma mas sencilla; pues si hacemos $A=\frac{1}{2}\pi$ y $B=\alpha$ en la (ec. 12 § 19 del T. II) se convertirá en

$$\frac{1+\text{sen}.\alpha}{1-\text{sen}.\alpha}=\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\times\cot.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha);$$

y como la cotangente de un arco es la tangente de su complemento y $45^\circ+\frac{1}{2}\alpha$ es el complemento de $45^\circ-\frac{1}{2}\alpha$, resulta que

$$\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)=\cot.(45^\circ-\tfrac{1}{2}\alpha);$$

por lo cual $\dfrac{1+\text{sen}.\alpha}{1-\text{sen}.\alpha}=\text{tang}.^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)$,

ó estrayendo la raiz cuadrada $\dfrac{\sqrt{1+\text{sen}.\alpha}}{\sqrt{1-\text{sen}.\alpha}}=\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)$.

Luego (ec. 468) $p+\sqrt{1+p^2}=\text{tang}.(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)$ (469);

y como $p\sqrt{1+p^2}=\text{tang}.\alpha\,\text{sec}.\alpha=\dfrac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha}\times\dfrac{1}{\cos.\alpha}=\dfrac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha^2}$,

tendrémos por último reducida la (ec. 467) á

$$-\frac{1}{A}\times e^{As}=h\cos.6^2\times\left(\frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha^2}+\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)+C'\right)\ (470).$$

384 Para determinar la constante C' observarémos que como en el orígen se tiene $s=0$, y $\alpha=6$, la ecuacion anterior se nos convierte en

$$-\frac{1}{A}=h\cos.6^2\left(\frac{\text{sen}.6}{\cos.6^2}+\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}6)+C'\right);$$

de la cual se saca $C'=-\dfrac{1}{Ah\cos.6^2}-\dfrac{\text{sen}.6}{\cos.6^2}-\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}6)$;

luego la (ec. 470) se nos convertirá en

$$-\frac{1}{A}\times e^{As}=h\cos.\beta^2\left(\frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha^2}+\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{Ah\cos.\beta^2}-\frac{\text{sen}.\beta}{\cos.\beta^2}-\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)\right);$$

ó quitando el divisor A, mudando los signos, efectuando la multiplicacion de $-\frac{1}{Ah\cos.\beta^2}$ por $Ah\cos.\beta^2$, la tendrémos reducida á

$$e^{As}=1+Ah\text{co}.\beta^2\left(\frac{\text{se}.\beta}{\text{co}.\beta^2}+\text{lo.tan}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta)-\left(\frac{\text{se}.\alpha}{\text{co}.\alpha^2}+\text{lo.tan}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)\right)\right)\ (471);$$

ó espresando por f.β y por f.α las cantidades

$$\frac{\text{sen}.\beta}{\cos.\beta^2}+\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\beta),\ \frac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha^2}+\log.\text{tang}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha),$$

tendrémos $e^{As}=1+Ah\cos.\beta^2(\text{f}.\beta-\text{f}.\alpha)$ (472).

385 Antes de pasar mas adelante observarémos que si la resistencia del medio fuese nula, esto es, si supusiéramos ahora que el cuerpo se moviese en el vacío, deberia ser $R=0$, lo que daria (ec. 455) $A=0$, y en este caso la (ec. 461) se nos convertirá en $\frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{2h\cos.\beta^2}$;

la cual integrada da $\frac{dz}{dx}=C''-\frac{x}{2h\cos.\beta^2}$;

y como en el orígen del movimiento en que $x=0$, se verifica que

$$\frac{dz}{dx}=\text{tang}.\beta,\ \text{será}\ C''=\text{tang}.\beta;$$

por lo que la ecuacion anterior se convertirá en $dz=\text{tang}.\beta dx-\frac{xdx}{2h\cos.\beta^2}$;

la cual integrada nos da $z=\text{tang}.\beta\times x-\frac{x^2}{4h\cos.\beta^2}$ (473);

esta ecuacion en virtud de lo espuesto (II. 329) corresponde á la parábola vulgar ó apoloniana; y por medio de ella se resuelven varias cuestiones de que por lo regular se hace uso en la práctica de la Artillería acerca de las cuales hemos dado á conocer lo principal en los (§§ 258 al 263) de mi Compendio de Mecánica Práctica.

386 Si en la (ec. 462) despejamos dx, se tendrá $dx=-\frac{2h\cos.\beta^2dp}{e^{As}}$;

ó poniendo en vez de e^{As} su valor (ec. 472) se tendrá

$$dx = -\frac{2h\cos.\beta^2 dp}{1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta - f.\alpha)} \quad (474);$$

y como $dz = p dx$, será $dz = -\frac{2h\cos.\beta^2 p dp}{1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta - f.\alpha)}$ (475).

Como estas ecuaciones no se pueden integrar, no podemos obtener una relacion entre las coordenadas x, z; pero no ostante la (ec. 472) nos puede servir para construir la curva. En efecto, tomando los logaritmos de ambos miembros, se tendrá $As\log.e = \log.(1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta - f.\alpha))$, y como [II. 473] $\log.e = 1$, se tendrá $As = \log.(1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta - f.\alpha))$;

y dividiendo por A será $s = \frac{1}{A} \times \log.(1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta - f.\alpha))$ (476).

387 El logaritmo que se halla en el segundo miembro de esta ecuacion es el logaritmo neperiano, y tambien lo es el que se halla en los valores que hemos espresado (384) por $f.\beta$ y $f.\alpha$; y puesto que en el segundo miembro de esta ecuacion es todo conocido, cuando se da el ángulo α que la tangente de la trayectoria en un punto cualquiera forma con el ege de las x, resulta que dado este ángulo podrémos determinar el valor de s con toda exactitud; lo que manifiesta que *la trayectoria que describen los proyectiles en un medio resistente es una curva rectificable.*

Esta propiedad nos puede servir para construirla por puntos con toda la exactitud que deseemos; pues si consideramos como una recta la porcion de curva A*b* (fig. 143) que conocemos por la ecuacion anterior, siéndonos conocido el ángulo *b*A*m* podrémos resolver el triángulo rectángulo A*mb*, y tendrémos conocidas las A*m* y *mb* que nos servirán para determinar el punto *b*; y del mismo modo determinaríamos los puntos *c*, *d* &c., como se puede ver en el espresado Compendio de Mecánica Práctica, desde la pág. 210 hasta el fin; pues allí se presentan todos los datos y pormenores necesarios para la construccion, y que por lo mismo no repetirémos aquí; pero lo que no omitirémos será el probar todo lo que allí enunciámos sin dar entónces la demostracion por no permitirlo el objeto de aquella obrita; y así, *nos propondrémos ahora hallar las fórmulas generales de la velocidad del proyectil*, *del tiempo que tarda en correr una porcion de curva cualquiera*, *la del radio de curvatura*, *y determinar la asíntota vertical de esta curva.*

388 Para hallar la velocidad correspondiente á un punto cualquiera de la curva, observarémos que si la llamamos v' se tendrá que esta velocidad estimada en el sentido del ege de las x, nos dará (ec. 433) $\frac{dx}{dt} = v'\cos.\alpha$, ó elevando al cuadrado $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v'^2\cos.^2\alpha$;

y llamando h' la altura debida á esta velocidad será (ec. 371) $v'^2=2gh'$;

por lo que la ecuacion anterior se convertirá en $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=2gh'\cos.\alpha^2$;

y como la (ec. 459) nos da $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{Cg}{e^{As}}=(\S\ 381)\ \frac{2h\cos.\mathit{6}^2g}{e^{As}}$,

igualando estos dos valores de $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ tendrémos $2gh'\cos.\alpha^2=\frac{2hg\cos.\mathit{6}^2}{e^{As}}$,

que da $h'=\frac{h\cos.\mathit{6}^2}{\cos.\alpha^2 e^{As}}=(\text{ec. } 472)\ \frac{h\cos.\mathit{6}^2}{\cos.\alpha^2(1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha))}=$

$(\S\ 183)\ \frac{h\cos.\mathit{6}^2(1+p^2)}{1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha)}$ (477);

lo que dará $v'=\sqrt{2gh'}=\frac{\cos.\mathit{6}}{\cos.\alpha}\sqrt{\frac{2gh}{1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha)}}$ (478);

donde vemos que *la velocidad en un punto cualquiera se puede determinar con toda exactitud por medio de esta fórmula.*

389 Para ver si sucede lo mismo con el tiempo despejarémos dt en la ecuacion $v'=\frac{ds}{dt}$,

que espresa la velocidad (ec. 432), y tendrémos $dt=\frac{ds}{v'}=\frac{ds}{\sqrt{2gh'}}$;

que sustituyendo por h' el valor que acabamos de hallar (ec. 477), y simplificando se tendrá $dt=\frac{\cos.\alpha ds}{\cos.\mathit{6}\sqrt{\frac{2gh}{e^{As}}}}$ (479).

Y como esta ecuacion no se puede integrar porque $\cos.\alpha$ es variable que depende de s, ni se puede trasformar en otra ecuacion que sea integrable, es preciso recurrir al arbitrio de que nos hemos valido para calcularlo en el § 278 de dicho Compendio.

390 Siendo $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=(\text{ec. } 474)\ \frac{1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha)}{2h\cos.\mathit{6}^2}$,

si espresamos por R el radio de curvatura, y sustituimos estos valores en su espresion (II. 620 ec. F) tendrémos

$$R=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha)}{2h\cos.\mathit{6}^2}}=\frac{2h\cos.\mathit{6}^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{1+Ah\cos.\mathit{6}^2(\text{f.}\mathit{6}-\text{f.}\alpha)}\ (480).$$

En este valor debemos observar que miéntras el móvil vaya subiendo, el ángulo α que es el que forma la tangente de la trayectoria en un punto cualquiera con el ege de las x, va disminuyendo y es positivo en toda la rama ascendente AMN (fig. 143); porque miéntras suba el proyectil, la tangente tendrá una posicion que caerá por la parte superior á la linea que se tire por el punto que se considera, paralela al ege de las x. Por ir disminuyendo el ángulo α, disminuirá tambien f.α, y por consiguiente crecerá el denominador del quebrado de la espresion antecedente, y por lo mismo menguará el quebrado que espresa el radio de curvatura; y como la curvatura está en razon inversa del radio de curvatura (II. 615), resulta que la curva irá aumentando su curvatura en la rama ascendente, y en el vértice ó punto mas alto, cuando $\alpha=0$, será $p=\text{tang}.\alpha=0$ y f.$\alpha=0$; por lo que será $R=\dfrac{2h\cos.6^2}{1+Ah\cos.6^2\text{f}.6}$.

En la rama descendente la tangente en un punto cualquiera caerá por la parte inferior á la recta que se tire por dicho punto paralela al ege de las x; por lo que el ángulo α será negativo, y tambien lo será f.α.

En efecto, por lo dicho (384) se tiene f.$\alpha=\dfrac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha^2}+\log.\text{tan}.(45^\circ+\tfrac{1}{2}\alpha)=$

(§ 383) $p\sqrt{1+p^2}+\log.(p+\sqrt{1+p^2})$;

y como de tener α un valor negativo resulta que el valor de $p=\text{tang}.\alpha$ tambien es (II. 16) negativo, tendrémos que el primer término $p\sqrt{1+p^2}$ es negativo.

Para convencernos de que el segundo término tambien es negativo, observarémos que mudando en este el signo á p se convierte en

$$\log.(-p+\sqrt{1+p^2})=\log.\left(\frac{(-p+\sqrt{1+p^2})(p+\sqrt{1+p^2})}{p+\sqrt{1+p^2}}\right)=$$

$$\text{(I. 179)}\ \log.\frac{1}{p+\sqrt{1+p^2}}=\log.1-\log.(p+\sqrt{1+p^2})=$$

$$0-\log.(p+\sqrt{1+p^2})=-\log.(p+\sqrt{1+p^2});$$

luego pues que en la rama descendente es negativo el valor de f.α, la espresion del radio de curvatura en ella será $R=\dfrac{2h\cos.6^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{1+Ah\cos.6^2(\text{f}.6+\text{f}.\alpha)}$ (481).

Por lo que el denominador de esta espresion será mayor que en la rama ascendente; y siendo mayor, disminuirá el radio R, lo que hará que crezca (II. 615) la curvatura.

391 Si queremos averiguar cual es el punto de la mayor curvatura, verémos cuando es un máximo el valor de R; para lo cual obser-

varémos que determinando el coeficiente diferencial $\frac{dR}{dp}$ por medio de la (ec. 480), igualando con cero el numerador, despues de suprimir el factor $2h\cos.\beta^2$ que resulta comun, tenemos

$$(1+p)^{\frac{1}{2}}(\times(1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta-f.\alpha))\times 3p+2Ah\cos.\beta^2(1+p^2)^{\frac{3}{2}})=0.$$

Para que el primer miembro de esta ecuacion sea cero, es preciso que uno de los factores en que está descompuesto sea cero. Si fuese cero el primer factor $(1+p^2)^{\frac{1}{2}}$, tendríamos $1+p^2=0$, que da $p=\pm\sqrt{-1}$, cuyos valores siendo imaginarios dan á conocer que ninguno de estos valores puede dar el máximo.

Igualando con cero el otro factor es muy difícil despejar la p; pero si reflexionamos que el punto de mayor curvatura no puede distar mucho del vértice, tendrémos que el valor de p será bastante pequeño y podrémos despreciar p^2 y $\log.p$ en dicha espresion, sin temer un grande error, cuyos supuestos conducen á la ecuacion mas sencilla

$$3p(1+Ah\cos.\beta^2 f.\beta)+2Ah\cos.\beta^2=0;$$

de donde resulta $p=\text{tang}.\alpha=-\frac{2Ah\cos.\beta^2}{3(1+Ah\cos.\beta^2 f.\beta)}$.

592 La menor velocidad tampoco se verifica en el vértice; porque siendo horizontal la direccion en aquellos primeros instantes en que llegó al vértice, la gravedad no le añade lo suficiente para vencer la resistencia del medio que se le opone; pero como la gravedad va aumentando sucesivamente, habrá un instante en que se verificará la *mínima* velocidad, y desde el cual principiará á ser acelerado el movimiento. Para determinar este punto hallarémos el coeficiente diferencial de h' con relacion á p en la (ec. 477), é igualando su valor con cero y suprimiendo todo lo que resulta comun, tendrémos

$$(1+Ah\cos.\beta^2(f.\beta-p\sqrt{1+p^2}-\log.(p+\sqrt{1+p^2})))\times 2p+(1+p^2)^{\frac{3}{2}}=0.$$

Y si observamos (II. 452) que $p\sqrt{1+p^2}=p+\frac{1}{2}p^3-\&c.$

que (II. 478) $\log.(p+\sqrt{1+p^2})=\log.(1+p+\frac{1}{2}p^2-\&c.)=p+\frac{5}{6}p^3+\&c.$;

y que $(1+p^2)^{\frac{3}{2}}=(1+p^2)\sqrt{1+p^2}=1+\frac{3}{2}p^2+\&c.$;

y sustituimos estos valores en la ecuacion anterior, omitiendo todos los términos donde se halle una potencia de p superior á la segunda, y espresando por λ el factor $Ah\cos.\beta^2$, tendrémos

$$2+\lambda f.\beta\times 2p+\tfrac{3}{2}p^2=0,\ \text{que da}\ p^2+\tfrac{4}{3}\lambda f.\beta\times p+\tfrac{4}{3}=0;$$

la cual resuelta (I. 253) da $p=-\frac{2}{3}\lambda f.\beta\pm\sqrt{\frac{4}{9}\lambda^2(f.\beta)^2-\frac{4}{3}}$.

Lo que hay dentro del radical es menor que el cuadrado del término que está fuera; por lo que los dos valores de esta ecuacion son negativos; y como por otra parte vamos en el concepto de que p es bastante pequeña, resulta que de estos dos valores deberémos elegir el que dé para p un valor absoluto menor, que es el que resulta de tomar el signo $+$ del radical; por lo que se tendrá $p=-\frac{2}{3}\lambda f.\mathscr{C}+\sqrt{\frac{4}{9}\lambda^2(f.\mathscr{C})^2-\frac{4}{3}}$; que como será negativo da á conocer, como habíamos asegurado ántes, que el punto de la menor velocidad se halla en la rama descendente.

Pasado el punto en que se verifica el *mínimo* de velocidad, el movimiento del cuerpo será acelerado hasta el infinito, pero de un modo poco rápido; porque la velocidad no podrá jamas pasar un cierto límite que haciendo $p=\infty$ se halla al estremo de esta curva. Pero en este caso la (ec. 477) se convierte en $h'=\frac{\infty}{\infty}$, ó lo que es lo mismo (I. 330) en $\frac{0}{0}$. Por lo que para hallar su valor, diferenciarémos (II. 573) separadamente su numerador y denominador; y despues de simplificar tendrémos

$$h'=\frac{1}{A\sqrt{\frac{1}{p^2}+1}};$$

que en el caso de $p=\infty$ se convierte en $h'=\frac{1}{A}$.

Por lo que la mayor velocidad será $v'=\sqrt{2gh'}=\sqrt{\frac{2g}{A}}$ (482). Lo que nos quiere decir que *el cuerpo al paso que baja se aproxima mas y mas á adquirir esta velocidad; la que no llegará á tener sino á una distancia infinita del vértice.*

393 Esta curva tiene dos asíntotas; una la rama ascendente, y otra la descendente; la que nos importa conocer es la de la rama descendente. Y para conseguirlo, trasportarémos el orígen de las coordenadas al punto de la rama descendente en que la tangente forma un ángulo casi recto con el horizonte; y espresando por s' el arco tomado partiendo desde este punto, por $\mathscr{C}'$ el ángulo que forma la tangente en aquel punto con el ege de las x, y por h' la altura debida á la velocidad, y teniendo presente que aquí dp será negativa por serlo p en toda la rama descendente, la (ec. 463) se nos convertirá en este caso en

$$-e^{As'}ds'=2h'\cos.\mathscr{C}'^2\times-dp\sqrt{1+p^2},$$

ó en $e^{As'}ds'=2h'\cos.\mathscr{C}'^2\sqrt{1+p^2}\times dp$ (483);

y como en el punto á que hemos trasladado el orígen, resulta que p será bastante grande para que podamos despreciar 1 en comparacion de p^2 en la espresion anterior, resultará $e^{As'}ds'=2h'\cos.\mathscr{C}'^2pdp$ (484); la cual integrada se nos convertirá en $\frac{1}{A}e^{As'}=h'\cos.\mathscr{C}'^2p^2+C.$

Para determinar la constante observarémos que cuando $p=\text{tang.}\beta'$, $s'=0$, lo cual nos da $\frac{1}{A}e^0=h'\cos.\beta'^2\text{tang.}\beta'^2+C$;

y como $e^0=1$, será $C=\frac{1}{A}-h'\cos.\beta'^2\text{tang.}\beta'^2$;

por lo cual $\frac{1}{A}\times e^{As'}=h'\cos.\beta'^2p^2+\frac{1}{A}-h'\cos.\beta'^2\text{tang.}\beta'^2$,

ó $e^{As'}=1+Ah'\cos.\beta'^2(p^2-\text{tang.}\beta'^2)$;
y teniendo presente que aquí dp es negativa, la (ec. 474) nos dará

$$dx=\frac{2h'\cos.\beta'^2dp}{e^{As'}};$$

que si sustituimos en vez de $e^{As'}$ el valor que acabamos de hallar, se tendrá $dx=\frac{2h'\cos.\beta'^2dp}{1-\text{tang.}\beta'^2h'A\cos.\beta'^2+h'A\cos.\beta'^2p^2}$;

que dividiéndolo todo por $Ah'\cos.\beta'^2$ se nos convertirá en

$$dx=\frac{2}{A}\times\frac{dp}{\frac{1}{Ah'\cos.\beta'^2}-\text{tang.}\beta'^2+p^2}=\frac{2}{A}\times\frac{dp}{p^2+\frac{\frac{1}{A}-h'\text{sen.}\beta'^2}{h'\cos.\beta'^2}}.$$

Ahora, como β' aunque muy próximo á 90^0 es menor que 90^0, resulta que sen.β' será menor que la unidad ó seno total, y con mas razon lo será sen.β'^2; luego el término h'sen.β'^2 será menor que h'; pero el mayor valor que puede tener h', aun suponiendo la curva allá en el infinito, es (§ 392) $\frac{1}{A}$, luego el término h'sen.β'^2 será siempre menor que $\frac{1}{A}$ y se verifica que $\frac{\frac{1}{A}-h'\text{sen.}\beta'^2}{h'\cos.\beta'^2}$ será una cantidad positiva, que espresándola por m^2, se tendrá $dx=\frac{2}{A}\times\frac{dp}{p^2+m^2}$;
cuya ecuacion integrada (II. 550) y determinada la constante se nos convierte en $x=\frac{2}{Am}\left(\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{p}{m}\right)-\text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{tang.}\beta'}{m}\right)\right)$;

y haciendo $p=\infty$ será $x=\frac{2}{Am}\left(\text{arc. de } 90^\circ - \text{arc.}\left(\text{tang.}=\frac{\text{tang.}6}{m}\right)\right)$(485).

Luego si por el punto L correspondiente á esta abscisā, tiramos una recta LK paralela al ege de las z, esta será la asíntota de la rama descendente.

Mas adelante en un tomo de aplicaciones que pensamos publicar, manifestarémos las demas circunstancias que se deberian tener en consideracion para que este problema quedase completamente resuelto, y los esperimentos que se deberian hacer para que esta parte de la Artillería llegase á todo el grado de perfeccion que exige su importancia.

Del choque de los cuerpos.

394 Por ser *porosos* todos los cuerpos de la naturaleza, resulta que cuando por una causa cualquiera se vienen á estrechar los poros, varía su figura y se comprimen; pero luego que cesa la causa que los comprimia, se nota en todos una cierta tendencia á volver á tomar su figura primitiva. Esta tendencia que es mayor ó menor segun la naturaleza de los cuerpos, es lo que se llama su *elasticidad*; y se dice que un cuerpo es *perfectamente* elástico cuando vuelve á tomar exactamente su figura primitiva, en el instante en que cesa la causa que le comprimia. *La elasticidad no es proporcional á la compresibilidad*; en efecto, el aire y los gases son los cuerpos mas compresibles, y son tambien al mismo tiempo los mas elásticos; pero hay alguno que otro cuerpo muy compresible ó que muda de figura con mucha facilidad que casi está desprovisto de elasticidad, como sucede al plomo y á la cera; y alguno que otro muy poco compresible como el marfil, cristal, mármol &c. en que se observa una elasticidad casi perfecta. Cuando dos cuerpos ya estando el uno en movimiento y el otro en reposo, ó ya estando ambos en movimiento se vienen á encontrar, entónces se dice que el cuerpo que se mueve con mas velocidad *choca* al otro. Para averiguar las circunstancias con que se efectúa este choque, considerarémos primero el de los cuerpos que carecen de toda elasticidad, y que se suelen llamar *perfectamente duros*; y despues, el de los que son *perfectamente elásticos*. Aunque no hay en la naturaleza ningun cuerpo que sea ni tan perfectamente duro, ni tan perfectamente elástico como aquí los considerarémos, sin embargo participan mas ó ménos de estos dos estados que mirarémos como límites entre los cuales están colocados estos cuerpos.

395 Consideremos primero el caso en que dichos cuerpos no son elásticos; y supongamos que M y M' (fig. 144) sean dos cuerpos esféricos que se mueven en el sentido de A hácia C. Si M va mas rápidamente que M' le alcanzará, y entónces M al llegar á tocar á M', en virtud de su diferencia de velocidad que es lo que se llama *velocidad*

relativa, le empujará hasta que ambos hayan adquirido una misma velocidad; lo que sucede en un tiempo tanto mas corto, cuanto los cuerpos son ménos compresibles, ó se aproximan mas á ser *perfectamente duros*; entónces los dos móviles dejarán de obrar el uno sobre el otro, pues que los suponemos desprovistos de elasticidad, conservarán la forma que su compresion les habrá dado y continuarán moviéndose con la velocidad comun, como si formasen un solo y mismo cuerpo.

Llamemos F y F' las fuerzas que han comunicado á los móviles M y M' las velocidades V y V' y será (§ 310) $F=MV$, $F'=M'V'$; y pues que estas fuerzas obran en una misma direccion tendrémos (§ 15)

$$F+F'=MV+M'V'.$$

Por otra parte, si espresamos por v la velocidad comun de estos dos cuerpos despues del choque, podrémos considerar á $M+M'$ como un solo cuerpo que en virtud de la fuerza $F+F'$ ha adquirido la velocidad v; luego tendrémos $F+F'=(M+M')v$.

Igualando estos dos valores de $F+F'$, será $(M+M')v=MV+M'V'$; que da $v=\dfrac{MV+M'V'}{M+M'}$ (486).

Cuando los cuerpos caminan el uno á encontrarse con el otro, V' es negativa, y se tiene $v=\dfrac{MV-M'V'}{M+M'}$ (487).

Si el cuerpo M' estuviese en reposo cuando M le viene á chocar, V' seria nula, y las fórmulas precedentes se reducirán á $v=\dfrac{MV}{M+M'}$ (488).

396 Antes de pasar á considerar el choque de los cuerpos elásticos, examinarémos las circunstancias del fenómeno de la elasticidad en un cuerpo esférico que fuese lanzado sobre el plano fijo AB (fig. 145) por una fuerza perpendicular á dicho plano. Desde el instante que el cuerpo llegue al plano AB, el diámetro ED se acortará por la fuerza de la compresion, y el punto D se aproximará al centro C miéntras que las secciones perpendiculares á ED se ensancharán. Cesará el movimiento del punto D cuando la velocidad del cuerpo esté totalmente aniquilada, y entónces en virtud de la elasticidad, esta velocidad renacerá sucesivamente en sentido contrario hasta que el cuerpo haya tomado su forma primitiva. De donde se sigue que cuando el móvil haya vuelto al punto de donde partió, habrá adquirido una velocidad igual á su velocidad primitiva, pero que obrará en sentido contrario.

397 Consideremos ahora el choque de dos cuerpos elásticos M y M' (fig. 146) que supondrémos ir en el mismo sentido. Para que se verifique el choque, es necesario que la velocidad V de M esceda á la velocidad V' de M'. Esto supuesto, al chocarse estos cuerpos se comprimirán hasta que en llegando al *máximo* de la compresion, hayan

adquirido una velocidad comun, de manera que un punto material D del cuerpo M que en virtud de la sola velocidad V hubiese descrito la linea DE, retardado en su movimiento por el efecto de la compresion, en vez de haber llegado á E en el instante del *máximo* de la compresion, solo habrá llegado á F; entónces la fuerza elástica principiando á obrar sobre el punto material, le comunicará en el sentido de F á G una velocidad igual á la que ha perdido por la compresion, y que le hará pasar al estremo G de la FG igual á FE. Pues que la velocidad del móvil es la misma para todos los puntos materiales que le componen, si espresamos esta velocidad ántes del choque por DE, podrémos concluir que despues de este choque será DE—GE=DE—2FE.

398 Para espresar analíticamente las circunstancias que acabamos de examinar, llamemos w la velocidad comun que en el momento del *máximo* de la compresion anima á todos los puntos de ambos móviles. Y considerándolos en este instante como si no fuesen elásticos, la (ec. 486) nos dará $w=\dfrac{MV+M'V'}{M+M'}$ (489).

La velocidad perdida por el cuerpo M en virtud de esta compresion, debe ser igual á la velocidad V que tenia ántes del choque ménos la que le queda; por lo que estará espresada por $V-w$. Por consiguiente esta seria la velocidad perdida por el cuerpo en el máximo de la compresion si la fuerza elástica no existiese; pero esta fuerza principiando desde entónces á obrar hace perder al móvil otra igual cantidad $V-w$; de modo que la pérdida total de la velocidad del cuerpo M será $2(V-w)$. Llamemos v la velocidad despues del choque, y tendrémos para determinar v la ecuacion $v=V-2(V-w)=2w-V$ (490).

Respecto de M' tendrémos que este móvil llegado al máximo de la compresion, se deberá considerar como cuerpo no elástico, y por consiguiente habrá ganado una velocidad representada por $w-V'$; porque la velocidad ganada es igual á la que tiene despues del choque, ménos la que el cuerpo tenia ántes. Entónces es cuando principiando á obrar la elasticidad, le llevará consigo, de modo que le separará del punto de contacto y le hará ganar aun otra tanta velocidad $w-V'$; luego la velocidad de M' despues del choque será $V'+2(w-V')=2w-V'$.

Espresando esta velocidad por v' tendrémos $v'=2w-V'$ (491).

399 Poniendo en las (ecs. 490 y 491) en vez de w su valor (ec. 489), se tendrá por último $v=\dfrac{2(MV+M'V')}{M+M'}-V$, $v'=\dfrac{2(MV+M'V')}{M+M'}-V'$; y reduciendo se hallará

$$v=\frac{V(M-M')+2M'V'}{M+M'} \quad (492),\qquad v'=\frac{V'(M'-M)+2MV}{M+M'} \quad (493).$$

Si $M=M'$, se tiene $v=V'$, y $v'=V$.

La primera de estas ecuaciones nos manifiesta que la velocidad de M despues del choque, es la misma que la de M' ántes del choque; y como la segunda nos conduce á una consecuencia análoga, resulta que *en el caso de ser iguales las masas de los móviles*, *mudan estos de velocidades despues del choque.*

400 Cuando el móvil M' va al encuentro de M, es preciso hacer V' negativa en las fórmulas precedentes; y se tiene

$$v=\frac{V(M-M')-2M'V'}{M+M'}\ (494),\quad v'=\frac{V'(M-M')+2MV}{M+M'}\ (495).$$

Si fuesen iguales los móviles que van al encuentro el uno del otro, se hará $M=M'$; lo que reducirá las ecuaciones anteriores á $v=-V'$, $v'=V$, de donde se concluirá que *los móviles en este caso mudarán de velocidades y se separarán despues.*

401 Si los móviles que van al encuentro el uno del otro tienen velocidades iguales, bastará hacer $V'=V$ en las (ecs. 494 y 495), y se hallará $v=\frac{V(M-3M')}{M+M'}$ (496), $v'=\frac{V(3M-M')}{M+M'}$ (497).

El cuerpo M se detendrá cuando su velocidad v despues del choque se reduzca á cero; este caso sucede cuando $M=3M'$; es decir, cuando la masa del móvil M es tripla de la de M'; y en este supuesto se halla $v'=2V$.

402 En fin, si el móvil M' estuviese en reposo y le alcanzase el M, siendo igual con él, haríamos en las (ecs. 494 y 495) $V'=0$, y $M=M'$, y nos resultaria $v=0$ y $v'=V$;
por consiguiente el móvil M perderia su velocidad y la daria á M'.

Principio de la conservacion del movimiento del centro de gravedad en el choque de los cuerpos.

403 Sean dos móviles M y M' (fig. 147) que inmediatamente ántes del choque hayan llegado á los puntos B y C; llamemos E y E' sus distancias al punto A, y representemos por X la distancia del centro de gravedad de su sistema al mismo punto; y puesto que las masas son equivalentes á los pesos, tendrémos (§ 164) $(M+M')X=ME+M'E'$. Como los espacios E y E' son funciones del tiempo t, resulta que si diferenciamos será $(M+M')\frac{dX}{dt}=M\frac{dE}{dt}+M'\frac{dE'}{dt}$ (498).

Los coeficientes diferenciales $\frac{dE}{dt}$, $\frac{dE'}{dt}$ representan (374) las velocidades de los móviles M y M' cuando han llegado á los puntos B y C, cuyas distancias al punto A son respectivamente E y E'. Espresemos por V y V' estas velocidades, y por $V_{,}$ la velocidad $\frac{dX}{dt}$ del centro de gravedad del sistema; y sustituyendo estos valores en la ecuacion precedente se tendrá $(M+M')V_{,}=MV+M'V'$, que da $V_{,}=\frac{MV+M'V'}{M+M'}$ (499).

Ecuacion que espresa la velocidad del centro de gravedad del sistema, cuando los móviles han llegado ántes del choque á los puntos B y C; pero cuando inmediatamente despues del choque los móviles se hallen en los puntos B′ y C′, el centro de gravedad del sistema mudará de posicion; y para averiguar en qué se convierte entónces el valor de la velocidad, representarémos por $v_{,}$ esta velocidad, y por x la distancia del centro de gravedad al punto A; habiendo llegado los móviles en esta nueva hipótesis á los puntos B′ y C′, representemos por e, e' sus distancias AB′, AC′ al punto A, y por w, w' sus velocidades, y tendrémos como ántes $(M+M')x=Me+M'e'$ (500);
y diferenciando las variables e, e' y x con relacion á t, hallarémos

$$(M+M')\frac{dx}{dt}=M\frac{de}{dt}+M'\frac{de'}{dt} \quad (501).$$

Remplacemos $\frac{dx}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ y $\frac{de'}{dt}$ por las velocidades $v_{,}$, w, w', y hallarémos $v_{,}=\frac{Mw+M'w'}{M+M'}$ (502).

§ 404 Aquí se presentan dos hipótesis: ó los cuerpos son duros ó son elásticos; en el primer caso como las velocidades de ambos cuerpos son iguales y hemos llamado (§ 395) v á esta velocidad, será $w=w'=v$; luego tendrémos $v_{,}=\frac{M+M'}{M+M'}v=v=$(ec. 489)$\frac{MV+M'V'}{M+M'}$;
y como este mismo valor es igual con $V_{,}$ (ec. 499), se sigue que $v_{,}=V_{,}$, que manifiesta que *en el choque de los cuerpos duros, la velocidad del centro de gravedad del sistema es la misma ántes y despues del choque.*

§ 405 Respecto de los cuerpos elásticos, los valores que corresponden á w, w' son (ecs. 490, 491), $2w-V$, $2w-V'$;
y sustituyéndolos en la (ec. 502) se hallará $v_{,}=\frac{M(2w-V)+M'(2w-V')}{M+M'}$,
ó reduciendo $v_{,}=2w-\frac{MV+M'V'}{M+M'}=$(ec. 489)$\frac{MV+M'V'}{M+M'}=$(ec. 499)$V_{,}$;
esto es, *en los cuerpos elásticos así como en los que no lo son, la velocidad*

del centro de gravedad es la misma inmediatamente ántes y despues del choque; cuya propiedad se conoce con el nombre de *principio de la conservacion del movimiento del centro de gravedad en el choque de los cuerpos.*

Principio de la conservacion de las fuerzas vivas en el choque de los cuerpos elásticos, igualdad de sus velocidades relativas, y determinacion de la diferencia de las fuerzas vivas en el choque de los cuerpos duros.

406 El principio de la conservacion de las fuerzas vivas en el choque de los cuerpos elásticos, se reduce á esta proposicion: *cuando se encuentran dos cuerpos elásticos la suma de las fuerzas vivas es la misma ántes y despues del choque.*

Sean V, V', las velocidades de los cuerpos M y M' ántes del choque, y v, v' las velocidades que tienen despues; la suma de las fuerzas vivas ántes del choque está representada (not. del §310) por $MV^2+M'V'^2$; y se trata de probar que es igual á $Mv^2+M'v'^2$, suma de las fuerzas vivas despues del choque. Para conseguirlo, observarémos que las velocidades v, v' de los cuerpos M y M' despues del choque, están determinadas (ecs. 490 y 491) por las ecuaciones $v=2w-V$, $v'=2w-V'$; luego tenemos $Mv^2+M'v'^2=M(2w-V)^2+M'(2w-V')^2=$

$$MV^2+M'V'^2+4w(Mw+M'w-MV-M'V') \quad (503);$$

los términos comprendidos dentro del paréntesis se destruyen mutuamente; pues si en la (ec. 489) se quita el divisor y se trasladan todos los términos al primer miembro, se tiene $Mw+M'w-MV-M'V'=0$. Luego solo quedará $Mv^2+M'v'^2=MV^2+M'V'^2$, que es L. Q. D. D.

407 Tambien se verifica en los cuerpos elásticos que *las velocidades relativas de estos cuerpos son las mismas ántes y despues del choque.*

Para convencernos basta restar la (ec. 490) de la (ec. 491); lo que da $v'-v=2w-V'-2w+V=V-V'$;

que nos dice que *despues del choque*, v′ *escederá tanto á* v *como* V *escedia á* V′ *ántes del choque.*

408 En el choque de los cuerpos que no son elásticos, *la diferencia de las fuerzas vivas ántes y despues del choque, no es igual á cero, sino á la suma de las fuerzas vivas de las masas animadas de las velocidades perdidas ó ganadas.*

En efecto, siendo V y V' las velocidades de los cuerpos M y M' ántes del choque, y v la velocidad comun despues del choque, resulta que las velocidades perdidas son $V-v$, y $V'-v$;

y si las masas M y M' se hallasen animadas de estas velocidades, sus fuerzas vivas serian respectivamente $M(V-v)^2$ y $M'(V'-v)^2$ (*); sumando estas espresiones tendrémos

(*) *Como el cuadrado de* V—v *es igualmente el de* v—V, *se ve que las espresiones* $M(V-v)^2$ y $M'(V'-v)^2$ *son tambien las de las fuerzas vivas debidas á las velocidades ganadas* v—V, y v—V′.

$M(V-v)^2+M'(V'-v)^2=MV^2+M'V'^2+(M+M')v^2-2v(MV+M'V')$;
poniendo en vez de $MV+M'V'$ el valor $Mv+M'v$ que da la (ec. 486), el segundo miembro se reduce á $MV^2+M'V'^2-(M+M')v^2$; y poniéndolo por primer miembro, la ecuacion anterior se nos convertir en $MV^2+M'V'^2-(M+M')v^2=M(V-v)^2+M'(V'-v)^2$, que espresa el teorema enunciado. }

Del movimiento de un punto material sujeto á moverse sobre una curva dada.

409 Cuando un punto material está sujeto á moverse sobre una curva dada de simple ó de doble curvatura, *la resistencia que esta curva opone á su movimiento equivale á una fuerza que obrase continuamente sobre el móvil en una direccion perpendicular á la trayectoria; de modo que añadiendo á las fuerzas dadas en cada caso particular una nueva fuerza variatriz para representar esta resistencia, se puede despues hacer abstraccion de la curva, y considerar el móvil como un punto material libre.*

En efecto, si se descompone cada una de las fuerzas variatrices dadas que obran sobre el móvil, en otras dos, la una dirigida segun la tangente á la trayectoria, y la otra normal á dicha trayectoria, solo las fuerzas tangentes serán las que tengan su efecto, pues las fuerzas normales quedarán destruidas por la resistencia de la curva; y si espresamos por P la resultante de estas últimas fuerzas, tendrémos que P espresará la presion que las fuerzas dadas egercen sobre la curva en cada uno de sus puntos; y la resistencia que destruye esta presion será una fuerza variatriz igual y contraria á la fuerza P. Esta presion P seria la que únicamente sufriria la curva si el móvil estuviese en reposo; pero su estado de movimiento origina otra presion que proviene de la continua tendencia del móvil á escaparse en la direccion de la tangente á su trayectoria.

Para hacerlo ver con toda claridad, consideremos inscrito en la curva dada un polígono $'mmm'$ &c. (fig. 148), y consideremos el móvil en su tránsito de un lado al otro. Sean $'mm$ y mm' estos dos lados consecutivos; mt, $m't'$ sus prolongaciones; y espresemos por v la velocidad del móvil cuando llega al punto m; la direccion de esta velocidad será (374) la linea mt; y descomponiéndola en el plano de los dos lados $'mm$, mm' en otras dos, la una dirigida segun el lado mm', y la otra perpendicular á este lado y dirigida segun mp, tendrémos que si espresamos por ω el ángulo tmt', estas componentes serán $v\cos.\omega$ y $v\text{sen}.\omega$.

La segunda quedará destruida por la resistencia del polígono; pero como ω varía de un lado á otro del mismo polígono, á no ser que sea regular, podemos concebir una fuerza variatriz que obre continuamente sobre el móvil, y que le imprima al pasar de un lado á otro una velocidad de la misma magnitud, y de la misma direccion que esta segunda componente; y espresándola por Q, tendrémos que la resistencia del polígono que destruye la velocidad $v$sen.ω equivaldrá á una fuerza variatriz igual y contraria á la fuerza Q.

410 La otra componente $v$cos.ω espresa la velocidad con que el móvil principia á moverse sobre el lado mm'; luego el móvil, al pasar de un lado á otro del polígono, pierde una parte de su velocidad espresada por $v-v\cos.\omega=v(1-\cos.\omega)=$(II. § 19 ec. 3)$2v\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\omega$.

Esta diminucion se puede atribuir á una segunda fuerza variatriz Q', que obre segun la direccion del lado mt y en sentido contrario del movimiento. Ahora, si los lados del polígono fuesen disminuyendo, tendrémos que el polígono se irá acercando cada vez mas á confundirse con la curva; y suponiendo que se haya llegado á confundir con ella, que es su *límite*, tendrémos que el ángulo ω vendrá á ser el *ángulo de contacto* de la curva con la tangente en un punto cualquiera; el plano de dos elementos consecutivos ó de las dos tangentes mt y $m't'$ será el *plano osculador* de la curva, que cuando esta sea de doble curvatura varía de un punto al otro; y cuando es plana, el plano osculador es el plano mismo de la curva.

Como el ángulo de contacto de una curva con su tangente es menor (I. 445 cor. 2.º) que cualquier ángulo finito dado, pues no puede pasar ninguna recta entre dicha tangente y dicho arco, resulta que ω espresará la verdadera idea de un infinitamente pequeño; por consiguiente el seno de su mitad será tambien infinitamente pequeño, y el cuadrado de esta espresion será un infinitamente pequeño de segundo órden; luego estando la fuerza Q' espresada por $2v\,\text{sen.}^2\frac{1}{2}\omega$ será un infinitamente pequeño de segundo órden; por consiguiente (II. nota del § 585) en nada puede aumentar ni disminuir á la fuerza Q espresada por $v$sen.ω. Por lo que en el cálculo solo atenderémos á la fuerza Q; y se puede concluir que *el móvil al correr la curva conserva siempre toda la velocidad que se le ha comunicado cuando se ha puesto en movimiento.*

411 En cuanto á la fuerza $v$sen.ω que comprime á la curva, y que está destruida por su resistencia, debemos observar que varía en cada elemento, pues que sen.ω muda continuamente; por consiguiente se la puede considerar como una fuerza variatriz que obre sobre el móvil.

Si ademas de esta hubiese otras fuerzas variatrices aplicadas al punto m, descomponiéndolas del mismo modo, se deberian añadir á $v$sen.ω todas las componentes normales de estas fuerzas variatrices.

Concibamos en el punto m una fuerza normal N directamente opuesta é igual á la resultante de todas estas fuerzas; la resistencia que la curva les opone estará espresada por N. Sean α, β, γ, los ángulos que esta fuerza variatriz normal forma con los tres eges; las componentes de N segun estos eges serán respectivamente (§ 34) $N\cos.\alpha$, $N\cos.\beta$, $N\cos.\gamma$; las que se deberán añadir á las fuerzas variatrices X, Z, U, en las ecuaciones generales del movimiento (367); de manera que tendrémos

$\frac{d^2x}{dt^2}=X+N\cos.\alpha$ (504), $\frac{d^2z}{dt^2}=Z+N\cos.\beta$ (505), $\frac{d^2u}{dt^2}=U+N\cos.\gamma$ (506).

Á estas ecuaciones reunirémos otras dos que resultan de las relaciones necesarias que existen entre los ángulos α, β, γ; la primera de estas es (II. 187) $\cos.^2\alpha+\cos.^2\beta+\cos.^2\gamma=1$ (507).

Y la segunda es que siendo la normal perpendicular á la tangente en el punto de contacto, y los ángulos que esta forma con los eges estando espresados (nota del § 179) por $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, $\frac{du}{ds}$,

tendrémos (II. 187 ec. C′) $\frac{dx}{ds}\cos.\alpha+\frac{dz}{ds}\cos.\beta+\frac{du}{ds}\cos.\gamma=0$ (508),

que da $dx\cos.\alpha+dz\cos.\beta+du\cos.\gamma=0$ (509).

412 Si por medio de las ecuaciones precedentes se eliminan las cuatro incógnitas N, α, β, γ, nos resultará una ecuacion diferencial del segundo órden entre x, z, u y t; las cuales reunidas á las dos de la trayectoria, si el movimiento se hace en el espacio, ó á una si se hace en un plano, que son dadas en cada caso particular, se tendrán tantas ecuaciones como se necesitan para determinar las coordenadas del móvil en funcion del tiempo. Esta eliminacion se hace con mucha facilidad; pues, multiplicando la (ec. 504) por dx, la (ec. 505) por dz, y la (ec. 506) por du y sumándolas, se obtendrá $dx\frac{d^2x}{dt^2}+dz\frac{d^2z}{dt^2}+du\frac{d^2u}{dt^2}=$

$$Xdx+Zdz+Udu+N(dx\cos.\alpha+dz\cos.\beta+du\cos.\gamma).$$

El último término de esta ecuacion es 0 por la (ec. 509); luego se debe suprimir y se tendrá $\frac{dxd^2x+dzd^2z+dud^2u}{dt^2}=Xdx+Zdz+Udu$ (510); ecuacion independiente de la fuerza N y de su direccion. Y observando que el numerador del primer miembro es (nota del § 179) igual con dsd^2s, la ecuacion anterior se nos convertirá dividiendo por ds en

$$\frac{d^2s}{dt^2}=X\frac{dx}{ds}+Z\frac{dz}{ds}+U\frac{du}{ds}\ (511).$$

De donde se concluye, así como en el (§ 375), que *la fuerza variatriz del móvil descompuesta segun la tangente á la trayectoria, tiene por espresion el segundo coeficiente diferencial del arco s considerado como una funcion del tiempo*; de modo que *esta espresion conviene igualmente al caso en que el móvil es libre, y al caso en que se ve precisado á moverse sobre una curva dada.*

413 Si multiplicamos por z la (ec. 510), y observamos que el numerador de su primer miembro es entónces la diferencial de

$dx^2+dz^2+du^2=$(§ 179)ds^2, será $\frac{d.ds^2}{dt^2}=2(Xdx+Zdz+Udu)$ (512);

que integrando da $\frac{ds^2}{dt^2}=v^2=2S.(Xdx+Zdz+Udu)$ (513),

ecuacion por cuyo medio *hallarémos la velocidad.*

414 Apliquemos estas fórmulas al caso en que las fuerzas variatrices son nulas; entónces se tiene $X=0$, $Z=0$, $U=0$, y por consiguiente la ecuacion anterior da $v^2=constante$. Luego *un móvil que se mueva sobre una curva dada, y que no está solicitado por ninguna fuerza variatriz, conserva la misma velocidad miéntras dura su movimiento*, que es lo que ya hemos demostrado (410) por otras consideraciones.

415 Supongamos ahora que obre sobre el móvil solo la pesantez, que es una fuerza variatriz constante que obra en el sentido del ege de las u, y tendrémos $X=0$, $Z=0$, $U=g$, y entónces la (ec. 513) se reduce á $v^2=2S.gdu=2gu+C$ (514). Para determinar la constante supondrémos que v se convierte en A cuando $u=0$, y tendrémos $A^2=C$, y resultará $v^2=2gu+A^2$ (515), que da $v=\sqrt{2gu+A^2}$ (516). Esta ecuacion de la velocidad es independiente de las relaciones que pueden existir entre las coordenadas x, z, u; por consiguiente *esta velocidad se verifica cualquiera que sea la forma de la curva.*

416 La ecuacion que acabamos de obtener para determinar la velocidad, no basta cuando se quiere conocer el tiempo y el espacio; porque poniendo en ella el valor $\frac{ds}{dt}$ de v, se tiene $\frac{ds}{dt}=\sqrt{2gu+A^2}$ (517),

ó mas bien $\sqrt{\frac{dx^2+dz^2+du^2}{dt^2}}=\sqrt{2gu+A^2}$ (518).

Para integrarla es necesario que por medio de las ecuaciones de la curva se pueda reducir esta última á no tener sino dos variables; supongamos que las ecuaciones de la curva sean $u=f.(x, z)$ (519), $u=\varphi.(x, z)$ (520).

Si con el auxilio de estas ecuaciones se eliminan dos de las variables x, z, u, no se tratará mas que de integrar una ecuacion entre dt y una de las coordenadas del móvil.

417 Como la (ec. 513) da la velocidad sin que sea necesario hacer uso de las (ecs. 519 y 520), inferimos que *la velocidad no depende de la forma de la curva, sino de su coordenada vertical* u; por consiguiente si partiendo del punto O (fig. 149) donde $u=0$ y $v=A$, se hacen pasar diversos arcos de curva OM, OM′, OM″ &c. que terminen en un plano horizontal RL, resulta que todas las ordenadas u de estos puntos serán iguales; y haciendo partir del punto O diferentes móviles con la

misma velocidad A, habrán adquirido velocidades iguales cuando hayan llegado á los puntos M, M′, M″ &c. situados sobre el plano horizontal.

En general, cualquiera que sea el número de las fuerzas variatrices, si la (ec. 513) es integrable, se puede determinar v sin que sea necesario señalar la curva. En efecto, si por la naturaleza de las fuerzas variatrices, se sustituyen en dicha ecuacion los valores de X, Z y de U, en funcion de las coordenadas x, z, u, y suponemos que la espresion $S.(Xdx+Zdz+Udu)$ sea integrable, podrémos representarla por $f.(x,z,u)$, y entónces dicha (ec. 513) se convertirá en $v^2=2f.(x,z,u)+C'$. Si suponemos para determinar la constante C', que cuando $v=A$ la funcion f. se convierta en $f.(a,b,c)$, se tendrá

$$v^2-A^2=2f.(x,z,u)-2f.(a,b,c) \quad (521);$$

ecuacion que hará conocer el valor de u cuando sea dado el de A, y sean conocidas las coordenadas x, z, u, a, b, c, correspondientes á estas dos velocidades.

418 Hemos visto que la fuerza normal N provenia de las componentes de las fuerzas variatrices, tomadas en el sentido de la normal á la curva, y de la fuerza normal producida por la velocidad. Para valuar esta última fuerza, tiremos las perpendiculares on, on' (fig. 150), sobre los medios de dos lados iguales consecutivos mm', $m'm''$ de un polígono de un número considerable de lados; el ángulo $lm'm''$ formado por el uno de estos lados y la prolongacion del otro, será el ángulo que hemos representado (409) por ω. Pero siendo rectos los ángulos n, n' del cuadrilátero $non'm'$, se tendrá que los ángulos

$$non'+nm'n'=2 \text{ ángulos rectos}=lm'm''+nm'm'';$$

luego $lm'm''=\omega=non'=2nom'$.

La pequeñez del ángulo nom' que está medido por el arco que le corresponde, permite tomar el seno en vez del arco; y como este seno está espresado por $\frac{m'n}{m'o}$, ó mas bien por $\frac{m'n}{no}$, pues que las rectas $m'o$ y no se deben reputar iguales, hallarémos $\omega=\frac{2m'n}{no}=\frac{m'm}{no}$; pasando el polígono á la curva que es su límite, el lado $m'm$ vendrá á ser el elemento de la curva, y on su radio de curvatura; por consiguiente espresando por γ dicho radio de curvatura, la espresion precedente se convertirá en $\omega=\frac{ds}{\gamma}$.

Llamemos f la fuerza variatriz que proviene de las componentes normales de la velocidad; y como toda fuerza variatriz está representada (321) por el elemento de la velocidad dividido por el del tiempo, y en nuestro caso el elemento de la velocidad es $v\text{sen}.\omega$, será $f=\frac{v\text{sen}.\omega}{dt}$ (522).

ó porque todo arco sumamente pequeño se puede sustituir en vez de su seno, esta espresion se convertirá en $f = \frac{v\omega}{dt}$ (523); y poniendo en vez de ω el valor que acabamos de hallar, tendrémos $f = \frac{v}{\gamma} \cdot \frac{ds}{dt}$, y poniendo en vez de $\frac{ds}{dt}$ su valor v será $f = \frac{v^2}{\gamma}$ (524).

La presion normal que resulta de las otras fuerzas se determinará por el paralelogramo de las fuerzas.

419 Supongamos por egemplo que la curva sea plana, y que las fuerzas que se aplican al móvil obren en el plano de la curva; en este caso se reducirán todas las fuerzas á una sola R dirigida en este plano; y llamando θ el ángulo que esta fuerza forma con la normal, se tendrá $R\cos.\theta$ para la componente de R segun esta normal. Si esta fuerza obra contra la curva, ella obrará en sentido contrario de la fuerza $\frac{v^2}{\gamma}$ que comprime al punto material sobre la curva, ó lo que es lo mismo, que trata de alejarla del centro; luego en este caso será $N = \frac{v^2}{\gamma} - R\cos.\theta$ (525).

Si R obrase en la misma direccion que la $\frac{v^2}{\gamma}$, seria $N = \frac{v^2}{\gamma} + R\cos.\theta$ (526).

De la fuerza centrífuga.

420 A la presion normal que sufre una curva á causa de la velocidad, se le da el nombre de *fuerza centrífuga*; de manera que la (ec. 524) $f = \frac{v^2}{\gamma}$ nos da á conocer que *la fuerza centrífuga es igual al cuadrado de la velocidad dividido por el radio de curvatura correspondiente al punto en que se considera el móvil.*

421 Huigens y los primeros Geómetras que han tratado de esta fuerza, han deducido su espresion de la consideracion del movimiento circular; y como este método de darla á conocer, tiene la ventaja de dar una idea precisa de ella, vamos á presentarlo aquí en pocas palabras.

Supongamos que m (fig. 151) sea un punto material unido al punto fijo c por un hilo inestensible cm. Concibamos que se le comunique una velocidad cualquiera en una direccion perpendicular á la longitud del hilo; y para simplificar, supongamos tambien que ninguna fuerza variatriz obre sobre el móvil. Este punto material describirá un círculo mnk cuyo centro y radio serán el punto fijo y la longitud del hilo. Durante el movimiento, el hilo que sujeta al móvil sufrirá en el sentido de su longitud una cierta tension que es la que se caracteriza con el nombre de *fuerza centrífuga.*

Si el hilo no tuviese la resistencia necesaria para vencer esta tension, se romperia, y el móvil se escaparia en la direccion de la tangente. Pero si concebimos que sobre el móvil obre una fuerza igual á esta tension, y siempre dirigida hácia el centro fijo, se podrá hacer abstraccion del hilo, y considerar al móvil como absolutamente libre.

Á esta fuerza que se dirige constantemente al centro, se le llama *fuerza centrípeta*; y el móvil en virtud de esta fuerza combinada con el impulso primitivo describirá el círculo propuesto.

Para que la fuerza destruya la tension, es preciso que sea igual con ella y obre en direccion opuesta; y como esta tension es lo que se llama *fuerza centrífuga*, resulta que *la fuerza centrípeta es igual con la centrífuga*, y *obran la una en direccion opuesta de la otra.* Á estas dos fuerzas se las distingue en general con el nombre de *fuerzas centrales.*

422 Desde luego inferimos por el principio de las areas (376) que *los sectores circulares descritos por el radio en tiempos iguales serán iguales*; lo que exige que los arcos de círculo corridos por el móvil en tiempos iguales sean tambien iguales. Luego el movimiento circular será (299) uniforme; y si espresamos por v la velocidad con que principia á moverse el móvil, será $s=vt$, siendo s el arco corrido en el tiempo t.

Sea f la intensidad de la fuerza centrípeta, ó lo que es lo mismo la de la centrífuga, pues que ambas son iguales aunque obran en sentido diferente. Cualquiera que sea esta fuerza, se la puede considerar como constante en magnitud y direccion durante un intervalo de tiempo infinitamente pequeño.

Si cuando el móvil se hallase en m cesase la fuerza centrípeta, se escaparia por la tangente ml; pero obrando dicha fuerza centrípeta, correrá por la curva mnk, y se hallará en n, cuando si ella no existiese estaria el móvil en l; por lo que el espacio $nl=mo$ será el que esprese el efecto de la fuerza que le atrae hácia el punto fijo c. Como la fuerza centrífuga obra continuamente y conserva siempre la misma intensidad á cada impulso que comunica al móvil, resulta que es una fuerza variatriz constante y tendrá por medida (334) el duplo del espacio que le hace correr en un tiempo cualquiera dividido por el cuadrado de este tiempo; luego tendrémos que *la fuerza* f *es igual al duplo del senoverso* om *dividido por el cuadrado del tiempo en que se corre*; luego si suponemos que el arco mn sea muy pequeño y espresamos por dt el tiempo en que se describe, tendrémos $f=\frac{2mo}{\mathrm{d}t^2}$;

y como (I. 488, 2.ª) $mo=\frac{(\text{cuerda } mn)^2}{2cm}$, y cuando el arco es muy pequeño se puede tomar por su cuerda, resulta que llamando ds el arco mn, r el radio cm, será $mo=\frac{ds^2}{2r}$, y $f=\frac{2\frac{ds^2}{2r}}{dt^2}=\frac{\frac{ds^2}{dt^2}}{r}=$(§ 375) $\frac{v^2}{r}$.

Donde se ve que *en el círculo la fuerza centrífuga es igual al cuadrado de la velocidad dividido por su radio*; y como una curva cualquiera se confunde en cada punto con su círculo osculador, y tiene en aquel parage las mismas propiedades que este círculo, resulta que *la fuerza centrífuga en una curva cualquiera es igual al cuadrado de la velocidad dividido por el radio de curvatura correspondiente á aquel punto.*

423 Para comparar la fuerza centrífuga en el círculo con la pesantez, supongamos que la velocidad con que se halle el móvil, sea la debida á la altura h, y tendrémos $v^2=2gh$, siendo g la gravedad; sustituyendo este valor en el de f, se tendrá $f=\frac{2gh}{r}$, ó $f:g::2h:r$; que nos manifiesta que *la fuerza centrífuga es á la gravedad, como el duplo de la altura debida á la velocidad es al radio del círculo descrito por el móvil.*

Si en un caso particular se tuviese $2h=r$, la fuerza centrífuga seria igual á la pesantez, y el hilo unido al punto fijo estaria estendido por la fuerza centrífuga que obra sobre todos los puntos del móvil como lo estaria por el peso mismo de este cuerpo. Esto supone sin embargo que el móvil sea considerado como un punto material, ó mejor como un cuerpo cuyas dimensiones son muy pequeñas y se pueden despreciar en comparacion de su distancia al punto fijo; porque sin esta condicion la fuerza centrífuga no seria la misma é igual á la pesantez en toda la estension del móvil.

Si se espresa por T el tiempo que el móvil emplea en correr la circunferencia entera del círculo, y por π la relacion de la circunferencia al diámetro, será $v=\frac{2\pi r}{T}$;

cuyo valor sustituido en el de f, da $f=\frac{4\pi^2 r}{T^2}$ (527).

Y señalando con las letras acentuadas las mismas cantidades con relacion á otro móvil, será $f'=\frac{4\pi^2 r'}{T'^2}$; luego $f:f'::\frac{r}{T^2}:\frac{r'}{T'^2}$;

que nos dice que *las fuerzas centrífugas están en razon compuesta, directa de los radios, é inversa de los cuadrados de los tiempos*; de donde se deduce que *á igualdad de radios, están en razon inversa de los cuadrados de los tiempos*; y que *á igualdad de tiempos, están en la relacion directa de los radios.*

424 Cuando un cuerpo sólido gira alrededor de un ege fijo, todos sus puntos describen en el mismo tiempo círculos cuyos planos son perpendiculares al ege, y que tienen sus centros en este ege, y sus radios son las perpendiculares tiradas desde cada punto sobre este mismo ege; por consiguiente *las fuerzas centrífugas de estos diferentes puntos, son entre sí como estas perpendiculares.* Así, *la fuerza centrífuga de los cuerpos colocados en la superficie de la tierra, y que giran con ella alrededor de su ege de rotacion, es proporcional á los radios de los paralelos que describen*; y ademas *esta fuerza se dirige en cada parage de la tierra, segun la prolongacion del radio del paralelo que termina en dicho parage.*

La fuerza que precipita los cuerpos hácia la tierra y que hemos llamado *pesantez*, se debe principalmente á la atraccion del esferoide terrestre sobre estos cuerpos; pero cualquiera que sea la causa que la origine, siempre es cierto que la fuerza centrífuga disminuye esta tendencia de los cuerpos pesados; de manera que esceptuando los polos donde la fuerza centrífuga es nula, la pesantez en todos los parages de la tierra es menor que si este planeta no tuviese movimiento de rotacion. En el ecuador la fuerza centrífuga y la pesantez se dirigen segun la vertical en sentido contrario la una de la otra; luego la pesantez es allí igual al esceso de la atraccion de la tierra sobre la fuerza centrífuga; por consiguiente llamando G la atraccion terrestre ó la pesantez que se verificaria si la tierra fuese inmóvil, g la pesantez efectiva, r el radio terrestre, y T el tiempo que emplea la tierra en dar una vuelta completa alrededor de su ege, se tendrá $g=G-\frac{4\pi^2r}{T^2}$.

Para convertir en número el valor de la fuerza centrífuga es necesario conocer los valores de π, r y T; pero $\pi=3,14159$ &c.; el radio del ecuador es de 7627299 varas españolas; la rotacion de la tierra se efectúa en un intervalo de 86164 segundos. Luego si sustituimos estos valores en el de f (ec. 526) tendrémos

$$f=\frac{4\times(3,1415926)^2\times7627299}{(86164)^2}=0,40962564.$$

Este número abstracto espresa la relacion de la fuerza centrífuga en el ecuador con una cierta fuerza tomada por unidad.

Debemos recordar con este motivo que la espresion de las fuerzas variatrices supone que se tome por unidad de tiempo una velocidad igual á la unidad lineal (321); luego *el número* 0,40962564 *espresa la relacion de la fuerza centrífuga que consideramos, con la fuerza variatriz constante que produciria en un segundo de tiempo una velocidad igual á una vara.* Comparada con la misma fuerza la intensidad de la pesantez en el ecuador, está espresada (nota del § 162) por 11,69668 varas españolas. Por lo que los números 0,4092564 y 11,69668 varas, espresan las relaciones de la fuerza centrífuga y de la pesantez á una misma fuerza; luego dividiendo el uno por el otro, se tendrá la relacion de estas dos fuerzas entre sí. De este modo se halla que la pesantez es igual á cerca de 288 veces la fuerza centrífuga; de donde se sigue que esta es cerca de la 289*ava* parte de la gravedad que habria en el ecuador sin el movimiento de rotacion que tiene la tierra, es decir, que se tiene $\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{1}{289}G$.

Si el movimiento de rotacion de la tierra se hiciese mas rápido, el tiempo T disminuiria, y la fuerza centrífuga se diferenciaria ménos de la gravedad G; y si observamos que 289 es el cuadrado de 17, se ve que bastaria que el movimiento de la tierra alrededor de su ege viniese á ser 17 veces mayor de lo que es en la actualidad para que la fuerza centrífuga y la fuerza G de la gravedad fuesen iguales. Entónces la pesantez seria nula en el ecuador, y los cuerpos abandonados á ellos mismos estarian allí en equilibrio.

425 La fuerza centrífuga disminuye á la pesantez en todos los puntos de la superficie terrestre; pero una cantidad menor que en el ecuador, por dos razones: primera, porque esta fuerza decrece yendo del ecuador á los polos, á causa de que disminuye el radio del paralelo; y segunda, porque aumenta el ángulo que forma con la vertical. Si la variacion de la pesantez fuese únicamente el efecto de la fuerza centrífuga, seria muy fácil de determinar su ley; y en este caso el esceso de la pesantez en el polo sobre la pesantez en el ecuador, seria igual en virtud del cálculo que se acaba de hacer á cerca de una 289*ava* parte de la pesantez media. Pero siendo la tierra un esferoide aplanado hácia los polos, su atraccion sobre los cuerpos colocados en su superficie es tambien una fuerza variable, cuya intensidad decrece yendo del polo al ecuador; por lo que la variacion de pesantez que se observa, se debe á un mismo tiempo á este decremento y á la fuerza centrífuga; y por esto la diminucion total del polo al ecuador escede á $\frac{1}{289}$ y se eleva á cerca de $\frac{1}{170}$ de la pesantez media.

426 Para saber cuanto disminuye la fuerza centrífuga á la de la gravedad en un punto que no fuese el ecuador, es necesario hallar el efecto de la fuerza centrífuga segun la vertical cl (fig. 152) tirada por el punto c en que supongamos se quiere determinar. Para este efecto, consideraremos la tierra como esférica, porque esta hipótesis no influye sobre el cálculo; entónces estando la latitud del lugar c representada por el arco ac, tendria por medida el ángulo $aoc=ocd=bel=\psi$.

Espresemos por R el radio ao de la tierra y por R' el radio od del paralelo que pasa por c, y tendrémos (I. 649) $R'=R\cos.ocd=R\cos.\psi$.

La fuerza centrífuga cb que obrará en c segun dcb será (ec. 526) $=\frac{4\pi^2 R'}{T^2}$;

la cual multiplicándola por cos.ψ nos dará $\frac{4\pi^2 R'}{T^2}\times\cos.\psi$;

que será la espresion de la fuerza centrífuga estimada en la direccion *lco* en que obra la gravedad, de manera que este valor será la espresion de *ce*.

Sustituyendo en vez de R' su valor $R\cos.\psi$, y [illegible] por dicha fuerza, será $F=\frac{4\pi^2 R}{T^2}\times\cos.\psi^2$;

de donde podrémos deducir que *las fuerzas centrífugas en lugares diferentes de la tierra, son entre sí como los cuadrados de los cosenos de las latitudes.*

Si quisiésemos considerar la fuerza centrífuga en un punto que estuviese mas elevado que la superficie terrestre, por egemplo en l, tendríamos que espresando por F' la fuerza centrífuga correspondiente al punto l, que dista de la superficie terrestre la cantidad cl que señalarémos con a, en virtud de lo espuesto (423) será $F:F'::cd:lh$.

Pero $cd:lh::co=R:lo=oc+cl=R+a$; luego $R:R+a::F:F'=\frac{F(R+a)}{R}$;

sustituyendo en esta espresion en vez de F su valor

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2}\cos.\psi^2,\ \text{será}\ F'=\frac{4\pi^2(R+a)}{T^2}\cos.\psi^2.$$

Para hacer una aplicacion de esta espresion á un objeto útil, *propongámonos determinar lo que disminuye la fuerza centrífuga en Madrid á la de la gravedad*; y tendrémos que siendo la elevacion de Madrid sobre el nivel del mar 798 varas españolas, y 40° 25′ su latitud, resulta que sustituyendo estas cantidades en vez de a y ψ, en vez de π su valor 3,14159 &c., en vez de T el suyo 86164 segundos, y en vez de R el suyo 7615916 varas españolas, resulta $F'=\frac{4(3,1415926)^2(7616714)}{(86164)^2}=$ 0,023477 var. español. =0,070431 pies =0,845172 pulg. =10,142 lin.

Del movimiento de oscilacion, y del péndulo simple.

427 Se llama *péndulo* en general á un cuerpo sólido suspendido al estremo de un hilo que se considera como inestensible é inflexible; este hilo está fijo por su otro estremo á un ege horizontal, sujeto de modo que puede girar libremente alrededor de él, pero sin que pueda tener mas movimiento que este.

Cuando la vertical tirada por el centro de gravedad del cuerpo comprendido tambien el hilo, encuentra al ege de rotacion, el péndulo está en equilibrio; si se le separa de esta posicion y se le abandona despues á la accion de la gravedad, hace á uno y otro lado de la vertical una multitud de oscilaciones, cuyas duraciones son iguales y sirven para la medida del tiempo. Con el fin de poder comparar mas fácilmente entre sí las duraciones de las oscilaciones de diferentes péndulos, han imaginado los Geómetras un péndulo ideal que se llama *péndulo simple*, y es un punto material pesado suspendido al estremo de un hilo que no tenga pesantez, que sea inflexible é inestensible, y que esté sujeto por su otro estremo á un punto fijo. Las oscilaciones de este punto material son las que vamos á considerar; y despues harémos ver (475) cómo se determina para cada péndulo compuesto la longitud del péndulo simple que hace sus oscilaciones en el mismo tiempo que el primero.

428 Ántes de entrar en materia conviene dar á conocer algunas propiedades generales del movimiento de un punto material pesado sobre una curva cualquiera.

Cuando un cuerpo pesado se mueve sobre una curva dada CBC′ (fig. 153) su velocidad v en un punto cualquiera m de su trayectoria, está determinada por la (ec. 515) $v^2=A^2+2gu$ (528);
en la cual A representa la velocidad del móvil en el punto de donde parte que suponemos sea el C, g denota la pesantez, y u la coordenada vertical del punto m contada al partir del punto C y dirigida en el sentido de la pesantez. Si se supone la curva compuesta de dos ramas BC y BC′ que se reunan en el punto B, y cuya tangente comun en este punto sea una recta horizontal, la coordenada u y la velocidad aumentarán miéntras que el móvil corra la rama descendente BC; y estas dos cantidades llegarán á su *máximo* en el punto mas bajo. Llegado á este punto, el móvil continuará moviéndose mas allá sobre la rama ascendente BC′ en virtud de su velocidad adquirida; pero miéntras que se eleve sobre esta linea, la coordenada u y la velocidad v disminuirán; y esta diminucion progresiva se hará de modo que si se tira un plano horizontal cualquiera que corte á las dos ramas de la curva en m y m', la velocidad del móvil será la misma en los dos puntos de interseccion.

429 El móvil continuará por la misma razon elevándose hasta que su velocidad sea igual con cero; luego suponiendo que la velocidad inicial A sea nula, el móvil volverá á subir hasta que se halle en el plano horizontal tirado por el punto C de donde parte, y que corta á la rama ascendente en el punto C′; llegado á este punto, principiará á bajar otra vez por la rama BC′; despues se elevará por la BC hasta que haya llegado á su primer punto de partida en donde se hallará con una velocidad nula. El móvil hará de esta manera una serie indefinida de oscilaciones semejantes sobre la curva dada.

Como cada uno de los elementos de esta curva está descrito con la misma velocidad, sea que el móvil suba ó sea que baje, se sigue que el tiempo de la ascension por la una de las dos ramas será igual al tiempo de la caida por la misma rama; luego el móvil empleará el mismo tiempo en volver del punto C′ al C, que en ir del punto C al C′; por consiguiente, el tiempo de la segunda oscilacion será el mismo que el de la primera, y todas las oscilaciones se harán en tiempos iguales.

430 Cuando la velocidad inicial A no sea nula, el cuerpo al subir por la segunda rama de la trayectoria, se elevará hasta mas arriba del plano horizontal tirado por su punto de partida. Entónces si la trayectoria es una curva cerrada podrán ocurrir dos casos: ó la velocidad del móvil será nula ántes que haya llegado al punto B′ donde la tangente viene á ser horizontal, y que llamarémos el *vértice* de la curva dada; ó llegará á este punto sin haber perdido todavía su velocidad. En el primer caso el móvil volverá á bajar por la rama BC′; volverá á subir por la BC y oscilará como ántes hácia ambos lados del punto mas bajo B. Las oscilaciones, escepto la primera que será mas corta, se harán en tiempos iguales y por lo mismo se llaman *isócronas*.

En el segundo caso, el móvil continuará su movimiento mas allá del vértice B′; volverá á bajar por la rama B′CB, y en lugar de oscilar correrá un número indefinido de veces y en intervalos de tiempos iguales la circunferencia entera de la curva dada.

431 Estas propiedades del movimiento de un cuerpo pesado sobre una curva dada son independientes de la naturaleza de esta curva, que puede ser plana ó de doble curvatura, y solo suponen que la trayectoria es una curva continua; porque si el ángulo de dos tangentes consecutivas en uno ó en muchos parages de la curva, fuese un ángulo finito, habria una pérdida de velocidad en cada uno de estos puntos, y el movimiento del cuerpo acabaria al fin por pararse, ó al ménos por venir á ser insensible.

432 El tiempo que el móvil emplea en hacer una oscilacion entera ó en describir la circunferencia entera de la trayectoria, depende de la naturaleza de esta curva. Para determinarlo, sea s el arco Cm comprendido entre el punto de partida del móvil y un punto cualquiera, y t el tiempo empleado en correr este arco; sustituyendo en vez de v su valor $\frac{ds}{dt}$ en la (ec. 528), y despejando dt se tendrá $dt=\frac{ds}{\sqrt{A^2+2gu}}$ (529).

433 Cuando sea dada la ecuacion de la trayectoria, se despejará en ella la u que vendrá espresada en funcion de s, ó la s que vendrá espresada en funcion de u; y sustituyendo uno ú otro de estos valores en el de dt, solo faltará integrar esta fórmula para tener el tiempo correspondiente á un valor cualquiera de s ó de u. Despues será fácil de concluir el tiempo de la oscilacion entera en el caso del movimiento oscilatario; ó bien en el otro caso, el tiempo empleado en describir la circunferencia de la curva dada.

434 *Apliquemos ahora estas consideraciones generales al movimiento del péndulo simple.*

Sea OB la vertical tirada por el punto de suspension O, y OC la posicion inicial del péndulo; supongamos que en esta posicion se imprima al punto material unido al estremo del hilo, una velocidad perpendicular á su longitud y dirigida en el plano vertical OCB.

En este caso, el péndulo durante su movimiento no saldrá de este plano vertical, y el punto material describirá un círculo, cuyo radio será la longitud del hilo OC y tendrá su centro en O. Espresemos este radio por a, y por α el ángulo inicial COB, con lo que será $\alpha-\theta$ el ángulo COm que corresponde al arco Cm, descrito en un tiempo cualquiera t; ó lo que es lo mismo, sea θ el ángulo variable mOB, comprendido entre el péndulo y la vertical; cuyo ángulo vendrá á ser negativo, cuando el péndulo haya pasado esta linea; por último sea h la altura debida á la velocidad inicial. Tirando desde los puntos C y m las perpendiculares CD y mp sobre la vertical OB, y conservando las denominaciones anteriores, tendrémos que siendo $A^2=2gh$,

las (ecs. 528 y 529) darán $v=\sqrt{2g(h+u)}$ (530), $dt=\dfrac{ds}{\sqrt{2g(h+u)}}$ (531).

El valor de u lo podemos espresar en valores de las coordenadas del círculo descrito por CO, para lo cual observarémos que $u=Dp=DB-Bp$. Pero DB es el senoverso del arco BC, que espresarémos por β á causa de que es constante dicho arco, y Bp es el senoverso del arco B$m=\alpha$, que por ser variable lo espresarémos por x, y tendrémos $u=\beta-x$.

Poniendo este valor en el de dt, se tendrá $dt=\dfrac{ds}{\sqrt{2g(h+\beta-x)}}$ (532);

y siendo ds la diferencial del arco Bm, cuyo senoverso es x, tendrémos (II. 550) $ds=\dfrac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$;

y como si el tiempo crece, debe disminuir el arco mB, dt deberá tener diferente signo que ds, y resultará por último

$$dt=-\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}\sqrt{2g(h+\beta-x)}} \quad (533).$$

Supongamos que la velocidad inicial sea nula; lo que viene á ser el tomar por orígen del movimiento el principio de una oscilacion; entónces tendrémos $h=0$ y nos resultará

$$dt=-\frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}\sqrt{2g(\beta-x)}}=-\frac{adx}{\sqrt{x(2a-x)}\sqrt{2g(\beta-x)}} \quad (534).$$

435 Para integrar esta ecuacion dividirémos por $2ax$ la cantidad que hay debajo del primer radical, y multiplicarémos por la misma cantidad la que hay debajo del segundo, y tendrémos

$$dt = \frac{-a\,dx}{\sqrt{1-\frac{x}{2a}}\sqrt{4ag(\beta x-x^2)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\times\frac{-dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2a}}} \quad (535).$$

Esta ecuacion solo se puede integrar por aproximacion, desenvolviendo en serie el factor

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{2a}}} = \left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1+\tfrac{1}{2}\times\frac{x}{2a}+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{x^2}{4a^2}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{x^3}{8a^3}+\ldots$$

$$\frac{1\times3\times5\times7\times\ 9\ldots 2n-1}{2\times4\times6\times8\times10\ldots\ 2n}\left(\frac{x}{2a}\right)^n;$$

por lo cual tendrémos $t=\ldots$

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.S.\frac{-dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}\left(1+\tfrac{1}{2}.\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{x^2}{4a^2}+\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^3}{8a^3}+\ldots\frac{1.3.5.7\ldots 2n-1}{2.4.6.8\ldots\ 2n}\right)\left(\frac{x}{2a}\right)^n.$$

Las integrales de los diferentes términos de esta espresion están todas comprendidas bajo esta forma $A S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}$, siendo n un número entero y positivo ó cero, y A un coeficiente que varía con n. Pero si se quiere tener el tiempo de la semioscilacion descendente, se deberán tomar todas estas integrales desde $x=\beta$ que corresponde al punto de donde parte el móvil, hasta $x=0$ que corresponde al punto mas bajo de la trayectoria. Supongamos que B_n sea el valor de la integral $S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}$ tomada entre estos límites, correspondiendo el índice n al esponente n; de suerte que B_0, B_1, B_2, B_3, &c. sean los valores de las integrales

$$S.\frac{-dx}{\sqrt{\beta x-x^2}},\ S.\frac{-x\,dx}{\sqrt{\beta x-x^2}},\ S.\frac{-x^2dx}{\sqrt{\beta x-x^2}},\ \&c.$$

tomadas entre los mismos límites; espresemos tambien por T el tiempo de la oscilacion entera que es duplo del de la semioscilacion, y tendrémos

$$T=\sqrt{\frac{a}{g}}\left(B_0+\tfrac{1}{2}\times\frac{1}{2a}\times B_1+\frac{1\times3}{2\times4}\times\frac{1}{4a^2}B_2+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\times\frac{1}{8a^3}\times B_3+\&c.\right) \quad (536)$$

serie cuyo término general es $\sqrt{\frac{a}{g}}\times\frac{1\times3\times5\times7\ldots 2n-1}{2\times4\times6\times8\ldots\ 2n}\times\left(\frac{1}{2a}\right)^n B_n$

436 Los valores de las integrales determinadas B_0, B_1, B_2 &c.

tienen cierta dependencia entre sí, de modo que en conociendo el uno, se pueden deducir de él todos los otros.

En efecto, á la espresion $S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ la podemos dar esta forma

$$S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}=S.\frac{-x\cdot x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=S.\frac{(\frac{1}{2}6-x-\frac{1}{2}6)x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=S.\frac{(\frac{1}{2}6-x)x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}+$$

$$S.\frac{-\frac{1}{2}6\times x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=S.\frac{(\frac{1}{2}6-x)x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}+\frac{1}{2}6S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}} \quad (537).$$

Ahora, integrando por partes (II. 663), teniendo presente (II. 525) que la $S.\frac{(\frac{1}{2}6-x)dx}{\sqrt{6x-x^2}}=\sqrt{6x-x^2}$,

será $S.\frac{(\frac{1}{2}6-x)x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=x^{n-1}\sqrt{6x-x^2}-(n-1)S.x^{n-2}dx\sqrt{6x-x^2}$ (538).

Ahora, multiplicando y dividiendo el último término por $\sqrt{6x-x^2}$, le podrémos dar esta forma $S.x^{n-2}dx\sqrt{6x-x^2}=S.\frac{x^{n-2}dx(6x-x^2)}{\sqrt{6x-x^2}}=$

$$S.\frac{6x^{n-1}dx-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}=6S.\frac{x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}-S.\frac{x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} \quad (539).$$

Por lo que sustituyendo este valor en el anterior y mudando los signos de dentro y fuera de la integral, se tendrá $S.\frac{(\frac{1}{2}6-x)x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=$

$$x^{n-1}\sqrt{6x-x^2}+(n-1)6S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}-(n-1)S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} \quad (540).$$

Y sustituyendo este valor en la (ec. 537), será

$$S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}=x^{n-1}\sqrt{6x-x^2}+(n-1)6S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}-(n-1)S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}+$$

$$\frac{1}{2}6S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}=x^{n-1}\sqrt{6x-x^2}-nS.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}+S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}+$$

$$\frac{6(2n-1)}{2}S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}} \quad (541);$$

que suprimiendo en ambos miembros $S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ y despejando, resulta $S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{6x-x^2}}{n} + \frac{6(2n-1)}{2n} S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ (542).

En los dos límites $x=0$, $x=6$, se tiene $\sqrt{6x-x^2}=0$.

Por consiguiente, pasando á las integrales determinadas, el primer término de esta espresion desaparece y queda reducida á

$$S.\frac{-x^n dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \frac{6(2n-1)}{2n} \times S.\frac{-x^{n-1}dx}{\sqrt{6x-x^2}},$$

ó lo que es lo mismo $B_n = \frac{6(2n-1)}{2n} \times B_{n-1}$ (543),

Si en esta espresion hacemos sucesivamente $n=1$, $=2$, $=3$, &c. se convertirá en

$$B_1 = \tfrac{1}{2}6B_0,$$
$$B_2 = \tfrac{3}{4}6B_1 = \frac{1\times3}{2\times4}6^2B_0,$$
$$B_3 = \tfrac{5}{6}6B_2 = \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}6^3B_0.$$
$$B_4 = \tfrac{7}{8}6B_3 = \frac{1\times3\times5\times7}{2\times4\times6\times8}6^4B_0,$$

y en general $B_n = \frac{1\times3\times5\times7\times9\ \ldots 2n-1}{2\times4\times6\times8\times10\ldots\ 2n}6^nB_0;$

donde vemos que determinado el valor de B_0, quedarán determinados todos los valores de B_1, B_2 &c.; y por consiguiente lo quedará la (ec. 536). Pero si multiplicamos el numerador y denominador de la espresion $B_0 = \frac{-dx}{\sqrt{6x-x^2}}$ por $\frac{2}{6}$, tendrémos

$$B_0 = S.\frac{-\frac{2dx}{6}}{\frac{2}{6}\sqrt{6x-x^2}} = S.\frac{-\frac{2dx}{6}}{\sqrt{\frac{4}{6^2}(6x-x^2)}} = S.\frac{-\frac{2dx}{6}}{\sqrt{\frac{46x-4x^2}{6^2}}};$$

y añadiendo y quitando la unidad á lo que hay debajo del radical y reduciendo el -1 á la especie del quebrado que le acompaña, podrémos ir dando á dicha cantidad las trasformaciones siguientes:

$$\frac{4\beta x-4x^2}{\beta^2}=1-1+\frac{4\beta x-4x^2}{\beta^2}=1-\frac{\beta^2-4\beta x+4x^2}{\beta^2}=1-\left(\frac{2x-\beta}{\beta}\right)^2;$$

haciendo $\frac{2x-\beta}{\beta}=z$, será $\frac{2dx}{\beta}=dz$, y el valor de B_0 se nos convertirá en $B_0=S.\frac{-\frac{2dx}{\beta}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-\beta}{\beta}\right)^2}}=S.\frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}}$;

pero en virtud de lo espuesto (II. 550), la integral del segundo miembro es el arco cuyo coseno $=z=\frac{2x-\beta}{\beta}$;

luego será $B_0=S.\frac{-dx}{\sqrt{\beta x-x^2}}=\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2x-\beta}{\beta}\right)+C$;

la cual tomada desde $x=\beta$ hasta $x=0$, da $B_0=\pi$, representando π el valor 3,14159 &c.

En efecto, dicha integral es cero cuando $x=\beta$, porque entónces principia el arco; lo que reduce la ecuacion anterior á

$$0=\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2\beta-\beta}{\beta}=1\right)+C;$$

y como el arco que tiene por coseno la unidad, es cero, resulta que la constante es igual con cero. Luego la integral de dicha espresion será el arco cuyo coseno $=\frac{2x-\beta}{\beta}$;

y tomada hasta el punto en que $x=0$ que es hasta el punto B, entónces $\frac{2x-\beta}{\beta}$ se convierte en -1; y como el arco cuyo coseno es igual á -1 es el de 180° ó la semicircunferencia, y cuando el radio es la unidad el valor de la semicircunferencia es (I. 505 cor.) $\pi=3,14159$ &c., resulta lo que hemos asegurado.

Sustituyendo en vez de B_0 este valor π en el de B_n, será

$$B_n=\frac{1\times3\times5\times7\times9\ \ldots 2n-1}{2\times4\times6\times8\times10\ldots\ 2n}\times\beta^n\pi.$$

Y sustituyendo este valor en el término general del desarrollo de T se convierte en $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\frac{1\times3\times5\times7\times9\ \ldots 2n-1}{2\times4\times6\times8\times10\ldots\ 2n}\right)^2\left(\frac{\beta}{2a}\right)^n$.

Por lo cual tendrémos que el valor de T se convierte tambien en

$$T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{\beta}{2a}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{\beta}{2a}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{\beta}{2a}\right)^3+\&c.\right)\quad(544)$$

donde β es el senoverso del arco CmB; por lo que siempre será menor que el diámetro que está espresado por $2a$; luego $\frac{\beta}{2a}$ será por precision un quebrado, y la serie anterior será convergente; y lo será tanto mas, cuanto menor sea β respecto de $2a$; de modo que cuando las oscilaciones son muy pequeñas nos basta solo el primer término; en cuyo caso se tiene $T=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$,

ó espresando por l la longitud del péndulo que hasta ahora hemos espresado por a, tendrémos $T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (545).

En las observaciones que exigen una gran precision se conservan los dos primeros términos del valor de T; y entónces se tiene

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\times\left(1+\frac{\beta}{8l}\right)\quad(546).$$

Y como el senoverso β=BD= (I. 488) $\frac{(\text{cuerda CB})^2}{2\text{OB}}$,

y cuando el arco es muy pequeño se puede tomar por su cuerda, resulta que poniendo en vez de la cuerda CB el arco CmB que espresarémos por ω, se tendrá $\beta=\frac{\omega^2}{2a}$;

y sustituyendo en vez de β este valor en la espresion de T, tendrémos

$$T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\omega^2}{16}\right)\quad(547).$$

Fórmula que se aproxima mucho á la verdadera, y de la cual nos podrémos valer cuando deseemos hallar el tiempo de una oscilacion con una precision estraordinaria. Pero en las cuestiones que ocurren por lo general en la práctica, nos basta con la (ec. 545).

437 Dadas por la observacion dos de las tres cantidades l, g y T, que entran en la (ec. 545), se concluirá inmediatamente la tercera; por egemplo, si se dan l y T, se tendrá $g=\frac{l\pi^2}{T^2}$ (548).

Por medio de esta fórmula se determina en cada parage de la tierra la intensidad de la pesantez por la longitud del péndulo.

Para esto se hace oscilar un péndulo compuesto de forma conocida, durante un tiempo dado; se cuenta el número de oscilaciones isócronas que hace en este intervalo de tiempo; y dividiendo el tiempo dado por este número, se tiene la duracion de cada oscilacion; por la regla que enseñarémos despues (475) se calcula la longitud del péndulo simple que haria sus oscilaciones en el mismo tiempo que el compuesto; de este modo se tendrán los valores de l y de T, y por su medio se concluye el de g sustituyéndolos en la (ec. 548).

438 Haciendo oscilar cuerpos de diferentes masas y de diferentes materias, y determinando para cada uno de ellos por el medio que acabamos de indicar, la intensidad de la pesantez, se ha reconocido que *esta fuerza aceleratriz es la misma para todos estos cuerpos en un mismo parage de la tierra*, lo que tambien se comprueba *dejando caer los cuerpos en el vacío por medio de la máquina neumática*.

439 La observacion ha enseñado que la longitud del péndulo de segundos varía en los diferentes puntos de la superficie de la tierra, y que disminuye al acercarse al ecuador; pero permaneciendo el mismo el tiempo de la oscilacion, la fórmula precedente manifiesta que *la pesantez es proporcional á esta longitud*; luego se debe concluir de aquí que *la intensidad de esta fuerza es igualmente variable*; y vista la estrema precision de que son susceptibles las observaciones del péndulo, ofrecen el medio mas propio para determinar la ley de esta variacion. Y por este medio, es en efecto por el cual se ha hallado (nota del § 162) la espresion general de la pesantez á una latitud cualquiera.

440 *La resistencia del aire no tiene influjo sensible sobre la duracion de las pequeñas oscilaciones del péndulo*; ella aumenta el tiempo de la semioscilacion descendente, pero disminuye en una cantidad igual el de la semioscilacion ascendente; y el tiempo de la oscilacion entera permanece el mismo que en el vacío.

441 Si espresamos por T' el tiempo que otro péndulo cualquiera, cuya longitud sea l', gasta en hacer una oscilacion entera en otro parage en que la fuerza de la gravedad sea g', la (ec. 545) se nos convertirá en $T'=\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}$;

y formando proporcion será

$$T:T'::\pi\sqrt{\frac{l}{g}}:\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}::\sqrt{\frac{l}{g}}:\sqrt{\frac{l'}{g'}} \quad (549);$$

que nos dice que *los tiempos de las oscilaciones de dos péndulos de diversas longitudes y en parages diferentes, guardan la razon compuesta directa de las raices cuadradas de las longitudes de los péndulos é inversa de las raices cuadradas de las gravedades*. De donde podrémos deducir análogamente á lo espuesto (164) que *si las longitudes de los péndulos son iguales, los tiempos de las oscilaciones están en razon inversa de las raices cuadradas de las gravedades; y si las gravedades fuesen iguales* (bien sea por hallarse los péndulos en un mismo parage, ó en un mismo paralelo, ó en paralelos de igual latitud, ó por compensarse la diferencia de latitud con la mayor ó menor elevacion en que puede hallarse el péndulo respecto del centro de la tierra) *los tiempos de las oscilaciones guardarán la misma razon que las raices cuadradas de las longitudes de los péndulos; ó las longitudes de los péndulos serán como los cuadrados de los tiempos que gastan en sus oscilaciones; y que si los tiempos de las oscilaciones son iguales, las longitudes de los péndulos son como las gravedades.*

442 Si espresamos por N el número de oscilaciones que hace el péndulo l en el tiempo θ, tendrémos que dividiendo este tiempo θ por N nos resultará el tiempo de una oscilacion; luego será $T=\frac{\theta}{N}$; y espresando por N' el número de oscilaciones que hace otro péndulo, cuya longitud sea l' en el mismo tiempo θ, será del mismo modo $T'=\frac{\theta}{N'}$; y sustituyendo en vez de T y T' estos valores en la proporcion anterior, se tendrá $\frac{\theta}{N}:\frac{\theta}{N'}::\sqrt{\frac{l}{g}}:\sqrt{\frac{l'}{g'}}$ (550);

que elevando al cuadrado y quitando los denominadores, será

$$N'^2:N^2::g'l:gl' \quad (551;$$

y si suponemos que se hagan las observaciones en un mismo parage, será $g'=g$ y se tendrá $N'^2:N^2::l:l'$, ó $l:l'::N'^2:N^2$; que nos dice que *las longitudes de los péndulos en un mismo parage ó en parages cuya gravedad sea la misma, están en razon inversa de los cuadrados de los números de oscilaciones que hacen en un tiempo dado.*

La proporcion anterior nos da $l'=\frac{lN^2}{N'^2}$ (552);

por cuyo medio, si conocemos la longitud l del péndulo que en un tiempo dado hace un número de oscilaciones espresado por N, podrémos hallar la longitud l' que debe tener otro péndulo para hacer en el mismo tiempo un número de oscilaciones espresado por N'.

443 Para manifestar el uso que se puede hacer de esta fórmula, supongamos que en Madrid se quiera hallar la longitud del péndulo que en un minuto haga un número n de oscilaciones, y tendrémos que, como la longitud del péndulo de segundos en Madrid es, como verémos (446), de 3,56343 pies españoles =42,76116 pulgadas,

si multiplicamos este valor por $(60)^2=3600$, tendrémos $l=\frac{153940,176}{n^2}$ espresada en pulgadas españolas.

De esta espresion se puede hacer un uso de mucha importancia en la ciencia de la guerra. Todos saben la necesidad de la uniformidad del paso en la tropa. Nuestra Táctica señala dos clases de paso; á saber, el *regular* que es dando 76 pasos en un minuto; y el *redoblado* que es dando 120. Luego si sustituimos en vez de n en la ecuacion anterior los números 76 y 120, tendrémos que la longitud del péndulo que oscilase en el tiempo que se debiese emplear en cada uno de estos pasos, será $\begin{cases} \text{para el paso } \textit{regular} & l=26{,}652 \text{ pulgadas españolas;} \\ \text{para el } \textit{redoblado} & l=10{,}69 \text{ pulgadas españolas.} \end{cases}$

Los Militares Ingleses hacen mucho uso del péndulo para uniformar su paso, porque es el único medio de conseguirlo. Es muy sencillo el ponerlo en egecucion; pues suponiendo una bala al estremo de un hilo, y echando un nudo á estas distancias del centro de la bala, se tienen las diferentes longitudes del péndulo que se pueden necesitar para arreglar el paso de la tropa y enseñar los toques á los tambores con la exactitud que requiere la importancia de todo lo que tiene relacion con la ciencia de la guerra.

444 Para determinar el error numérico que se puede cometer de suponer el *isocronismo* de las oscilaciones en los pequeños arcos, supongámos el arco $Bm=5°$; y tomando por unidad la longitud del péndulo, tendrémos $l=1$; y como el senoverso de $5°=0{,}0038053$, el segundo término de la (ec. 544) será $(\frac{1}{2})^2\times\frac{1}{2}6=\frac{1}{4}\times0{,}0019027=0{,}0004757$; el tercer término ya daria unidades en el sesto guarismo, y por lo mismo no harémos caso de él, ni de los demas que siguen; y tomando por unidad el tiempo de la duracion de la oscilacion entera, se tendrá $T=1+1\times0{,}0004757$ para un arco de $10°$ ó que se separa $5°$ hácia cada lado de la vertical, cuya duracion solo se diferencia de la que se efectúa por un arco infinitamente pequeño en $0{,}0004757$.

Si tomamos por unidad la oscilacion de un segundo, tendrémos que al cabo de 86400 segundos ó de 24 horas, el error ascenderá á $86400\times0{,}0004757=41''$ próximamente, error bastante pequeño para un arco de una magnitud tan sensible, como la de $5°$ hácia cada lado de la vertical; pero si el arco á cada lado de la vertical fuese de $1°$, cuyo senoverso es $0{,}0001523$, el error en 24 horas solo seria $1''\frac{2}{3}$; y si el arco fuese de medio grado, el error seria solo de $\frac{2}{3}$ de segundo.

445 Por último pondrémos aquí la espresion general del péndulo de segundos en un parage cualquiera, que es mas exacta que la que pusimos en el § 113 del Compendio. Esta la halla Mr. Biot en el tercer tomo de la segunda edicion de su *Astronomía Física*, teniendo presentes todas las observaciones que se han hecho hasta el dia; y ha obtenido que la longitud del péndulo decimal que colocado al nivel del mar hi-

ciese *cien mil* oscilaciones en un dia solar medio, espresando por l dicha longitud y por ψ la latitud del lugar, es

$$l=0{,}739703526 \text{ met.}+0{,}0039136892 \text{ sen.}^2\psi \ (553);$$

cuyo valor reune la ventaja de dar para el aplanamiento de la tierra una cantidad muy aproximada á la que dan la teoría de la luna, y la medida comparada de los grados medidos en Francia y en el ecuador.

Para deducir de esta espresion la longitud del péndulo sexagesimal, esto es, del que hiciese 86400 oscilaciones en un dia solar medio, no tendrémos mas que multiplicarla en virtud de la (ec. 552) por

$$\frac{N^2}{N'^2}=\left(\frac{N}{N'}\right)^2=\left(\frac{100000}{86400}\right)^2=\left(\frac{1000}{864}\right)^2=\frac{1000000}{746496};$$

por lo que tendrémos que la longitud del péndulo simple que oscila los segundos sexagesimales al nivel del mar en un parage cualquiera, cuya latitud sea ψ, estará espresada por

$$l=0{,}9909009 \text{ met.}+0{,}00524275 \text{ sen.}^2\psi;$$

la cual reducida á pies españoles, multiplicándola por 3,5889216 pies españoles que tiene el metro, dará

$$l=3{,}556266 \text{ pies esps.}+0{,}0188158 \text{ sen.}^2\psi.$$

446 Este valor es al nivel del mar; pero como los parages terrestres donde se necesitan hacer observaciones están mas elevados respecto del centro de la tierra que el nivel del mar, resulta que para dar mayor exactitud á esta fórmula, deberémos contar con lo que se debe acortar el péndulo por la altura á que nos elevemos. Para esto, observarémos que *las longitudes de los péndulos son* (441) *como la fuerza de la gravedad*; y *como esta disminuye en razon inversa de los cuadrados de las distancias al centro de la tierra*, si llamamos r el radio terrestre, y a la altura del parage sobre el nivel del mar, tendrémos que llamando l' la longitud del péndulo colocado á la altura a, será

$$l:l'::(r+a)^2:r^2, \text{ que da } l'=\frac{lr^2}{(r+a)^2}=l\times\frac{r^2}{r^2+2ar+a^2};$$

y haciendo la division resulta $l'=l\left(1-\frac{2a}{r}+\frac{3a^2}{r^2}-\&c.\right)$;

y conservando solo los dos primeros términos (pues la fraccion $\frac{3a^2}{r^2}$ será muy pequeña por ser siempre a una cantidad muy pequeña con relacion á r) será por último *longitud de péndulo simple que oscila los segundos sexagesimales á una latitud* ψ *y á una altura* a *sobre el nivel del mar* $=(3{,}556266 \text{ pies esps.}+0{,}0188158 \text{sen.}^2\psi)\left(1-\frac{2a}{r}\right)$.

Para hacer una aplicacion de esta fórmula, propongámonos determinar por su medio la longitud del péndulo simple que oscila los segundos en Madrid; para lo cual sustituirémos en vez de ψ la latitud de Madrid que es 40° 25', en vez de a la altura de Madrid sobre el nivel del mar que es 2394 pies, y en vez de r el radio medio de la tierra que es de 22847748 pies, y nos resultará $l=3,56343$ pies españoles. Y comparando este resultado con el hallado directamente por los Señores D. Gabriel Ciscár y D. Felipe Bauzá que era de 3,56337 pies, resulta solo una diferencia de 0,00006 de pie, que no equivale á una centésima de linea. Esta conformidad tan estraordinaria nos demuestra no solo la exactitud del resultado hallado por estos sabios españoles, sino la de la fórmula general que hemos puesto.

Del movimiento de un punto material sobre la cicloide.

447 Habiendo manifestado ya las propiedades generales del movimiento de un cuerpo pesado sobre una curva dada, se trata ahora de considerar en particular el caso en que la trayectoria es una *cicloide*. El movimiento sobre esta curva presenta propiedades singulares que han ocupado mucho á los Geómetras del último siglo, y que merecen ser conocidas. Consideremos una cicloide ACB (fig. 154) cuyo ege AB es horizontal y que está colocada debajo de este ege; el punto C es el mas bajo de esta curva; la perpendicular CD tirada desde este punto sobre el ege AB es el diámetro del círculo generador; la longitud del arco Cm es dupla de la cuerda Cn del círculo generador CnD (*); luego si llamamos x á la abscisa Cp y s al arco Cm, se tendrá

$$s=2Cn \text{ y } s^2=4Cn^2=4\times CD\times Cp;$$

y espresando por a el duplo del diámetro CD que es igual con la semicicloide AmC, será $s^2=2ax$ (554).

448 Un punto material sujeto á permanecer sobre esta curva, no podrá estar en equilibrio sino en el punto C; si se le coloca en un punto cualquiera K descenderá hácia el punto C; despues se remontará sobre la otra rama de la curva, y oscilará indefinidamente de una y otra parte del punto C. Siendo simétricas las dos ramas de la curva, las duraciones de las dos semioscilaciones serán iguales, y la de la oscilacion entera será doble del tiempo que el móvil emplea en caer del punto K al punto C. Para determinar este tiempo, volvamos á tomar el valor de dt, dado (ec. 529); haciendo en él para simplificar $A=0$, y observando que el arco s contado desde el punto C disminuye cuando t aumenta, tendrémos $dt=-\dfrac{ds}{\sqrt{2gu}}$ (555).

La variable u es aquí la ordenada vertical del móvil, contada desde el punto de donde parte que suponemos ser K; luego se tendrá $u=h-x$,

(*) *Véase mi memoria sobre la curvatura de las lineas* (§ 111).

siendo h la altura CH del punto K sobre el punto C; por otra parte, diferenciando la (ec. 554), resulta $sds=adx$; por consiguiente multiplicando por s el numerador y denominador de la (ec. 555), será $dt=-\frac{sds}{\sqrt{2gus^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\times\frac{-dx}{\sqrt{hx-x^2}}$ (556).

Integrando del mismo modo que lo hicimos con el valor de B (§ ...),

resulta $t=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\times\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2x-h}{h}\right)$ (557);

donde no se añade constante arbitraria, porque se cuenta el tiempo t desde el punto de partida del móvil; lo que exige que se tenga al mismo tiempo $x=h$ y $t=0$.

{ 449 Sea ahora t' el tiempo que ha pasado cuando el móvil ha llegado al punto C en que se tiene $x=0$;

y será $t'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\times\text{ar.}(\cos.=-1)=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}$ (558).

Donde vemos que *el tiempo de la caida del móvil por el arco de cicloide es independiente de la altura* h *de que el cuerpo ha caido*; de modo que *dos cuerpos que se mueven sobre una misma cicloide, y que parten de dos puntos diferentes K y K′ llegarán en el mismo tiempo al punto mas bajo C, por mucho que difieran entre sí las longitudes de los arcos CK y CK′*.

{ 450 Combinando esta propiedad de la cicloide con la de ser su evoluta otra cicloide igual con ella (§ 111 de dicha memoria), se podrá formar un péndulo cuyas oscilaciones serian rigorosamente de igual duracion, cualquiera que fuese su amplitud. En efecto, por dicha propiedad resulta que si se prolonga CD una cantidad DO igual á CD, y se trazan dos semicicloides AO y OB, tangentes á las rectas OD y AB é iguales á las semicicloides AC y BC, la curva OA será la evoluta de AC, y la curva OB será la de BC. Luego si concebimos que las curvas AO y OB están formadas por varas flexibles, á las cuales se haya dado esta figura, y suponemos que se fija al punto O un hilo OC igual en longitud á OA ó á OB, y que se suspenda un cuerpo pesado á su estremo C, resultará que si se separa este péndulo de la posicion vertical y se le abandona despues á la accion de la pesantez, oscilará de una y otra parte de esta posicion; y como durante estas oscilaciones, el hilo OC se arrollará alternativamente sobre la curva OA y sobre la OB, su estremo describirá la curva ACB, que es su evolvente; por consiguiente se puede tener seguridad de que el móvil fijo á este estremo, describirá arcos de cicloide hácia uno y otro lado del punto mas bajo; luego en virtud del resultado precedente *las oscilaciones de este péndulo se acabarán siempre en el mismo tiempo, cualquiera que sea la separacion primitiva*. Si el móvil tuviese en el orígen del movimiento una velocidad cualquiera dirigida en el plano de la curva ACB, el tiempo de la oscilacion no se mudaria; pues que esto vendria á ser el suponer que el móvil parte de un punto mas elevado de esta curva con una velocidad nula.

{ 451 Pues que el tiempo de la caida por el arco CK es independiente de la longitud de este arco, no debe mudar si se toma el punto K infinitamente cerca del punto C; pero entónces este tiempo es el mismo que si se verificase el movimiento sobre el círculo osculador de la cicloide en el punto C; luego su duracion debe ser igual al tiempo de la semioscilacion infinitamente pequeña de un péndulo que tuviese el radio de este círculo por longitud. Pero esto es lo que sucede en efecto, porque la longitud de la semicicloide AC, que hemos espresado por a, es igual al radio de curvatura que corresponde al vértice de esta curva; y en virtud de la (ec. 545) el tiempo de la semioscilacion de un péndulo de esta longitud está espresado por $\frac{\pi}{2}\times\sqrt{\frac{a}{g}}$.

{ 452 Se llama *tautócrona* á toda curva sobre la cual un cuerpo pesado llega siempre en un mismo tiempo al punto mas bajo, cualquiera que sea el punto de esta curva de donde parta. Así, en el vacío la cicloide es una curva *tautócrona*; y se demuestra que solo ella goza de esta propiedad. Si la cicloide se arrolla sobre la superficie de un cilindro vertical de base cualquiera, se convertirá en una curva de doble curvatura, pero todavía será *tautócrona*; de modo que un móvil abandonado á la accion de la pesantez y obligado á moverse sobre esta curva, llegará siempre al punto mas bajo en el mismo tiempo, cualquiera que sea el punto de partida, y cualquiera que sea tambien la proyeccion horizontal de esta trayectoria.

{ 453 Recíprocamente, *todas las tautócronas de doble curvatura que pueden existir*, *no son sino cicloides de base horizontal arrolladas á cilindros verticales*; porque si se desarrolla el cilindro sobre que se halla una de estas tautócronas, esta curva vendrá á ser plana, y las propiedades del movimiento de un cuerpo pesado sobre ambas trayectorias serán las mismas; luego si la trayectoria de doble curvatura es una tautócrona, la trayectoria plana tambien lo será; por consiguiente esta última no podrá ser sino una cicloide de base horizontal.

{ *La cicloide tiene tambien la propiedad particular de ser la curva que sigue un cuerpo pesado para llegar de un punto á otro en el tiempo mas corto*; por cuyo motivo se llama tambien *brachîstócrona* ó *linea del mas pronto descenso.* }

Principio general de Dinámica debido á D'Alembert.

454 Es de la mayor importancia el manifestar que se debe á D'Alembert un método directo y general para resolver, ó al ménos para poner en ecuacion, todos los problemas de Dinámica, por medio del cual todas

las leyes del movimiento de los cuerpos están reducidas á las de su equilibrio; hé aquí en que consiste el teorema conocido con el nombre de *Principio de D'Alembert.*

Considerenos un sistema de puntos materiales, unidos entre sí de un modo cualquiera, y cuyas masas sean m, m', m'' &c.; supongamos que se apliquen á estos móviles fuerzas que impriman la velocidad v á la masa m, la v' á la masa m', la v'' á la m'' &c. si cada una de estas masas estuviese aislada; en virtud de la dependencia de los puntos del sistema, las velocidades v, v', v'' &c. se alterarán en sus magnitudes y en sus direcciones; pero si se espresan por w, w', w'' &c. las velocidades desconocidas que las masas m, m', m'' &c. tomarán segun direcciones igualmente desconocidas; y se llaman p, p', p'' &c. las velocidades perdidas ó ganadas por estas mismas masas, de manera que w y p sean las componentes de v; w' y p' las de v'; w'' y p'' las de v'' &c. *habrá equilibrio en el sistema entre las cantidades de movimiento perdidas ó ganadas* mp, m'p', m''p'' &c.; porque si estas fuerzas no se hiciesen equilibrio, w, w', w'' &c. no serian las velocidades que tienen efectivamente lugar; lo que seria contra el supuesto.

455 Este principio se verifica igualmente, ya sean v, v', v'' &c. velocidades finitas, adquiridas por los móviles durante un tiempo finito; ó debidas á fuerzas que obran instantaneamente sobre los cuerpos; ya representen estas espresiones velocidades infinitamente pequeñas, debidas á fuerzas variatrices; ó ya en fin estas velocidades en parte sean finitas y en parte infinitamente pequeñas. Vamos á manifestar cómo se hace uso de ellas para resolver las cuestiones de Dinámica; pero ántes conviene enunciar de otro modo este principio y darle una forma que será mas cómoda en un gran número de aplicaciones.

456 A las fuerzas que representan las cantidades de movimiento mp, $m'p'$, $m''p''$ &c. que deben hacerse equilibrio, se pueden sustituir las componentes de cada una de ellas; pero la fuerza mp, por egemplo, es la resultante de la fuerza mv tomada en su direccion, y de la mw tomada en sentido contrario de su direccion, y lo mismo sucede respectivamente con las otras; luego el principio de D'Alembert viene á ser lo mismo que decir que *hay equilibrio en el sistema entre las cantidades de movimiento* mv, m'v', m''v'' &c. *comunicadas á los móviles*, *y las cantidades de movimiento* mw, m'w', m''w'' &c. *que tienen efectivamente lugar*, *estando tomada cada una de estas últimas en sentido contrario de su direccion.*

La ventaja de este segundo enunciado es la de no exigir que se consideren las velocidades perdidas ó ganadas p, p', p'' &c., y de establecer directamente las ecuaciones de equilibrio entre las velocidades dadas v, v', v'' &c., y las desconocidas w, w', w'' &c. que se determinarán por estas ecuaciones.

457 Elegirémos por egemplo el considerar dos cuerpos pesados fijos á los estremos de un hilo inestensible, y puestos sobre dos planos incli-

nados unidos, que tengan una altura comun como representa la (fig. 122).

Sea h la altura comun de estos dos planos, l la longitud del uno de ellos, l' la del otro, M la masa del cuerpo puesto sobre el primero, M' la del cuerpo puesto sobre el segundo, y g la pesantez; la fuerza variatriz que obra sobre M será la pesantez descompuesta segun el primer plano que es igual (356) á $\frac{gh}{l}$;

y del mismo modo la fuerza variatriz que obra sobre M' es igual á $\frac{gh}{l'}$.

Espresemos en un instante cualquiera por t el tiempo pasado desde el orígen del movimiento, por v la velocidad de M, por v' la de M', y convengamos en considerar las velocidades como positivas ó como negativas segun desciendan ó suban los móviles. Durante el instante $\mathrm{d}t$ el aumento de estas velocidades estará espresado por $\mathrm{d}v$ y $\mathrm{d}v'$; pero durante este mismo instante, las fuerzas variatrices imprimirian á los móviles, supuestos libres, las velocidades positivas $\frac{gh}{l}\mathrm{d}t$ y $\frac{gh}{l'}\mathrm{d}t$;

de donde se concluye que en virtud de la dependencia que los dos cuerpos tienen entre sí, la masa M del primero pierde la velocidad $\frac{gh}{l}\mathrm{d}t-\mathrm{d}v$, y la M' del segundo la $\frac{gh}{l'}\mathrm{d}t-\mathrm{d}v'$ en el instante $\mathrm{d}t$.

Luego las dos cantidades de movimiento que corresponden á estas velocidades perdidas, deben equilibrarse en virtud del principio que acabamos de dar á conocer; y como estas fuerzas están aplicadas en sentidos contrarios á los estremos de un hilo inestensible, es necesario para esto que sean iguales, lo que da $M\left(\frac{gh}{l}\mathrm{d}t-\mathrm{d}v\right)=M'\left(\frac{gh}{l'}\mathrm{d}t-\mathrm{d}v'\right)$ (559).

Ademas, las dos velocidades v y v' son iguales y de signos contrarios; porque en el movimiento que consideramos una de las masas baja y la otra sube, corriendo espacios iguales por una y otra parte. Luego se tiene $v+v'=0$; luego $\mathrm{d}v'=-\mathrm{d}v$;
sustituyendo este valor de $\mathrm{d}v'$ en la ecuacion precedente, se tiene $\mathrm{d}v=\frac{(Ml'-M'l)h}{(M+M')ll'}g\mathrm{d}t$ (560), que integrada da $v=\frac{(Ml'-M'l)h}{(M+M')ll'}\cdot gt+a$ (561); espresando la constante a la velocidad inicial de la masa M.

458 Sea x la distancia variable de esta masa á un punto fijo elegido arbitrariamente, por egemplo al vértice de los planos inclinados, y tendrémos $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, y $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$;

sustituyendo en vez de v su valor é integrando, se halla

$$x=\frac{(Ml'-M'l)h}{(M+M')ll'}\times\frac{gt^2}{2}+at+b \quad (562),$$

siendo b una constante arbitraria igual al valor de x que corresponde al orígen del movimiento.

Los valores de x y de v hacen ver que el movimiento de M es análogo al de un cuerpo pesado, suponiendo la pesantez debilitada en la relacion de $(Ml'-M'l)h$ á $(M+M')ll'$.

En cuanto al movimiento de M' será el mismo en sentido contrario que el de M. Cuando la velocidad inicial a es nula, y se tiene al mismo tiempo $Ml'=M'l$, las velocidades de los dos móviles son siempre nulas y se verifica el equilibrio. Luego la condicion de equilibrio es que *las masas y por consiguiente los pesos de los dos cuerpos estén en razon de las longitudes de los planos inclinados sobre que están puestos*: resultado que ya sabíamos (259).

Del movimiento de un cuerpo sujeto á girar uniformemente alrededor de un ege fijo.

459 Cuando un cuerpo ó un sistema de puntos materiales unidos los unos á los otros de un modo invariable, está sujeto á girar uniformemente alrededor de un ege fijo, que supondrémos pasar por el punto A (fig. 155) perpendicularmente al plano de la figura, si se corta el cuerpo por una infinidad de planos omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$, &c. paralelos entre sí y perpendiculares al ege fijo, las moléculas m, m', m'' &c. en una revolucion total describirán alrededor del ege fijo las circunferencias mon, $m'o'n'$, $m''o''n''$, &c. y correrán en el mismo instante arcos de un mismo número de grados. Y como estos arcos son proporcionales á sus radios, sucederá lo mismo á las velocidades que animan á las moléculas m, m', m'' &c.; de manera que si la distancia eA de la molécula e al ege se toma por unidad, y llamamos ω la velocidad de esta molécula, las velocidades de las moléculas m, m', m'' &c. colocadas á distancias r, r', r'' &c. del ege fijo, serán respectivamente $r\omega$, $r'\omega$, $r''\omega$ &c. Así, se tendrá para las cantidades efectivas de movimiento de estas diferentes moléculas $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$ &c.

460 Espresemos por v, v', v'' &c. las velocidades comunicadas, y tendrémos que las cantidades de movimiento recibidas serán mv, $m'v'$, $m''v''$ &c. Luego será necesario segun el segundo enunciado del principio de D'Alembert que haya equilibrio entre mv, $m'v'$, $m''v''$ &c. y $-mr\omega$, $-m'r'\omega$, $-m''r''\omega$, &c.

Para obtener el equilibrio entre estas cantidades de movimiento, representemos mv por una parte mf tomada en la direccion de esta fuerza y proporcional á su intensidad; bajemos desde el punto f la perpendicular fh sobre el plano de la seccion omn, y llamemos θ el ángulo

fnh formado por mf con este plano, y podrémos descomponer á mf en dos fuerzas $hf = mv\,\text{sen}.\beta$ paralela al ege fijo, y $mh = mv\cos.\beta$ situada en el plano omn.

La primera quedará destruida por la resistencia de este ege, y solo la segunda producirá su efecto; del mismo modo llamando β', β'', β''' &c. los ángulos que las fuerzas $m'v'$, $m''v''$ &c. forman con los planos $o'm'n'$, $o''m''n''$ &c., las cantidades de movimiento comunicadas al móvil serán $mv\cos.\beta$, $m'v'\cos.\beta'$, $m''v''\cos.\beta''$ &c.

Estas cantidades de movimiento, así como las efectivas $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$ &c. se hallarán situadas en los planos omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$ &c.

461 Para establecer el equilibrio entre estas cantidades de movimiento, observarémos que pues ellas están situadas todas en planos perpendiculares al ege fijo, deben producir sobre este ege el mismo efecto que si todos los planos omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$ &c. no formasen sino uno solo (146): por consiguiente considerando estas fuerzas como situadas en el plano de la figura, será necesario para que el equilibrio pueda subsistir entre ellas, que la suma de los momentos que intentan hacer girar en el mismo sentido al sistema alrededor del punto fijo A, sea igual á la suma de los momentos que intentan hacerle girar en sentido contrario.

Pero las fuerzas $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$ &c. que provienen todas del movimiento comun del sistema, le hacen girar en el mismo sentido; y como estas fuerzas precisan á los puntos m, m', m'' &c. á que describan las circunferencias mno, $m'n'o'$, $m''n''o''$ &c. los radios r, r', r'' &c. son perpendiculares tiradas sobre sus direcciones; por consiguiente la suma de los momentos de las fuerzas efectivas está espresada por

$$mr^2\omega + m'r'^2\omega + m''r''^2\omega + \&c. = \omega(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \&c.).$$

462 Representemos por $\Sigma.mr^2$ la cantidad que está entre los paréntesis, y será $\omega\Sigma.mr^2$ para la suma de los momentos de las fuerzas efectivas. Esta cantidad es la que debe equilibrarse con la suma ó diferencia de los momentos de las fuerzas $mv\cos.\beta$, $m'v'\cos.\beta'$, $m''v''\cos.\beta''$ &c. Para determinar esta segunda cantidad, sean AU el ege fijo (fig. 156), y ml, $m'l'$, $m''l''$ &c. las fuerzas $mv\cos.\beta$, $m'v'\cos.\beta'$, $m''v''\cos.\beta''$ &c. situadas en los planos mon, $m'o'n'$, $m''o''n''$ &c. perpendiculares al ege fijo; tiremos desde los puntos A, A', A'' &c. tomados en estos planos y en el ege fijo AU las perpendiculares $Al = p$, $A'l' = p'$, $A''l'' = p''$ &c. sobre las direcciones de las fuerzas $mv\cos.\beta$, $m'v'\cos.\beta'$, $m''v''\cos.\beta''$ &c.; cuyos momentos serán $mvp\cos.\beta$, $m'v'p'\cos.\beta'$, $m''v''p''\cos.\beta''$ &c.

Representemos por $\Sigma.mvp\cos.\beta$ la suma algebráica de estos momentos, es decir, la que se verifica haciendo abstraccion de los signos que les afectan; entónces debiendo equilibrarse esta suma de momentos con $\omega\Sigma.mr^2$, tendrémos $\omega\Sigma.mr^2 = \Sigma.mvp\cos.\beta$ (563);

que para determinar la velocidad angular ω dará $\omega = \dfrac{\Sigma.mvp\cos.\beta}{\Sigma.mr^2}$ (564).

463 Cuando las fuerzas mv, $m'v'$, $m''v''$ &c. obran en los planos omn, $o'm'n'$, $o''m''n''$ &c., los ángulos β, β', β'' &c. son iguales con cero; por lo que sus senos tambien serán iguales á cero, y sus cosenos iguales con 1; por lo que la (ec. 564) se convertirá en $\omega=\frac{\Sigma.mvp}{\Sigma.mr^2}$ (565).

464 Si todas las velocidades comunicadas á las moléculas del sistema son iguales y paralelas, como sucederia en el caso de que el sistema recibiese un impulso único que le trasportase en linea recta en el espacio, si no estuviese sostenido por el ege fijo, tendrémos $v=v'=v''$ &c.; y la suma de los momentos de las velocidades comunicadas seria

$$v(mp+m'p'+m''p''+\&c),$$

que se podrá representar por $v\Sigma.mp$, y la (ec. 565) se convertirá en

$$\omega=\frac{v\Sigma.mp}{\Sigma.mr^2} \quad (566).$$

465 Concibamos ahora por el ege fijo AU un plano AK (fig. 157) que harémos girar hasta que sea paralelo á las fuerzas $mv, m'v', m''v''$ &c. cuyas direcciones están representadas por las rectas ml, $m'l'$, $m''l''$ &c., y tendrémos que las perpendiculares p, p', p'' &c. tiradas desde los centros de seccion A, A′, A″ &c. sobre las direcciones de estas fuerzas serán iguales á las perpendiculares mq, $m'q'$, $m''q''$ &c. tiradas desde los puntos m, m', m'' &c. sobre el plano AK. Llamemos q, q', q'' &c. estas perpendiculares, y Q la que se tirase desde el centro de gravedad del sistema sobre el plano AK; y representando por M la suma de todas las moléculas que le componen, tendrémos (§ 174) $MQ=mq+m'q'+m''q''+$&c.; y pues que se tiene $p=q, p'=q', p''=q''$ &c.
la ecuacion precedente se convertirá en $MQ=mp+m'p'+$&c.$=\Sigma.mp$.
Sustituyendo este valor en la (ec. 566) tendrémos $\omega=\frac{vMQ}{\Sigma.mr^2}$ (567).

466 Podria suceder que solo una parte de las moléculas m, m', m'' &c. hubiesen recibido la velocidad v; entónces M representaria la suma de las moléculas á que se hubiesen comunicado las velocidades, y Q la perpendicular tirada desde el centro de gravedad de esta parte del sistema sobre el plano AK.

Nos falta indicar los medios de determinar la espresion $\Sigma.mr^2$ que se llama el *momento de inercia*, que es lo que va á formar el objeto del capítulo siguiente.

Del momento de inercia.

467 *El momento de inercia de un cuerpo es la suma de los productos de todos los puntos materiales que le componen por los cuadrados de sus distancias respectivas al ege de rotacion*, que es lo que hemos

representado por $\Sigma.mr^2$. En esta espresion se puede remplazar la molécula m por el elemento dm de la masa, y entónces el momento de inercia será dado por la integral de la espresion $S.r^2dm$.

468 Propongámonos por primer egemplo encontrar el momento de inercia de una recta CB (fig. 158) con relacion al ege AU, al cual es perpendicular el plano CAB.

Sea $AB=h$ una perpendicular tirada del punto A sobre la direccion de la recta, y $BP=x$ la distancia del punto B á un punto cualquiera de esta recta, y tendrémos $PA^2=h^2+x^2$ (568).

Esta espresion es la que se debe multiplicar por el elemento dm del cuerpo. Y como la masa en este cuerpo es una recta, solo tiene estension en el sentido de B á C; por consiguiente dm estará espresada por dx. Luego multiplicando dx por h^2+x^2, se tendrá para el momento de inercia de la recta CB la espresion $S.(h^2+x^2)dx=h^2x+\frac{1}{3}x^3+C$ (569). Esta integral se determinará de modo que la recta esté comprendida desde el punto B donde $x=0$, hasta el punto C donde $x=a$, y el momento de inercia de la recta BC será $h^2a+\frac{1}{3}a^3$.

469 Determinemos aun *el momento de inercia de la superficie del círculo CBD* (fig. 159) *con relacion á un ege AU que pase por su centro y que sea perpendicular á su superficie.*

Sea m un punto cualquiera, cuya distancia mA al ege fijo AU espresarémos por x: las superficies de los círculos descritos con los radios x y $x'=x+dx$, tendrán respectivamente por espresiones πx^2 y $\pi(x+dx)^2$. La diferencia de estas superficies, despreciando los infinitamente pequeños de segundo órden, será $2\pi x dx$.
Esta espresion representará una zona elemental de la que todos sus puntos estarán distantes del ege fijo una cantidad igual con x; por consiguiente multiplicando por x^2 esta zona elemental, tendrémos $2\pi x^3dx$ para la diferencial del momento de inercia buscado. Tomando la integral desde $x=0$ hasta $x=a$, hallarémos $\frac{1}{2}\pi a^4$ *para el momento de inercia del círculo descrito con el radio* a *alrededor del ege AU.*

470 Estos egemplos bastarán para hacer concebir cómo la determinacion de los momentos de inercia se puede siempre referir á un simple problema de cálculo integral.

Cuando se conoce el momento de inercia de un cuerpo con relacion á un ege que pasa por su centro de gravedad, se puede determinar el momento de inercia de este mismo cuerpo con relacion á otro ege paralelo al primero.

Para este efecto, sean GF y CK (fig. 160) dos eges paralelos, de los cuales el primero pase por el centro de gravedad G del cuerpo; coloquemos en el punto G el orígen; tomemos el ege GF por el de las u, y concibamos por un punto cualquiera m del cuerpo un plano mKF paralelo al de las xz; este plano encontrará á los eges GF y CK en dos puntos F y K, y las distancias del punto m á estos eges estarán medidas por las rectas mF y mK que señalarémos con r y r'. Bajemos

desde el punto m la perpendicular mE sobre el plano de las xz, y tendrémos que los triángulos ECG, mKF serán iguales por tener los tres lados del uno iguales respectivamente con los del otro por lados opuestos de paralelogramos. Luego podrémos sustituir los lados del primero de estos triángulos por los del otro. Esto supuesto, espresemos por α y β las coordenadas GD y DC del punto C, por x, z las GP, PE del punto E, y por a la distancia [illegible] de los dos eges, con lo cual tendrémos
$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{GC}^2=\mathrm{GD}^2+\mathrm{DC}^2,\ \mathrm{GE}^2=\mathrm{GP}^2+\mathrm{PE}^2, \\ \text{ó } a^2=\alpha^2+\beta^2\ (570),\ r^2=x^2+z^2\ (571). \end{array}\right.$$
Por otra parte considerando la recta CE que pasa por dos puntos cuyas coordenadas son respectivamente x, z y α, β, el valor r' de CE nos será dado (II. 170) por la ecuacion $r'^2=(x-\alpha)^2+(z-\beta)^2=x^2+z^2-2\alpha x-2\beta z+\alpha^2+\beta^2=$(ecs. 570 y 571)$r^2-2\alpha x-2\beta z+a^2$ (572); multiplicando por dm é integrando, se hallará
$$\mathrm{S}.r'^2\mathrm{d}m=\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m-2\alpha\mathrm{S}.x\mathrm{d}m-2\beta\mathrm{S}.z\mathrm{d}m+a^2\mathrm{S}.\mathrm{d}m\ (573).$$

471 Las espresiones $\mathrm{S}.x\mathrm{d}m$ y $\mathrm{S}.z\mathrm{d}m$ que entran en esta ecuacion son nulas; de lo que nos convencerémos por las consideraciones siguientes. Sean x, z las coordenadas de un elemento dm de la masa M: los momentos de este elemento con relacion á los eges de las x y de las z serán respectivamente $z\mathrm{d}m$ y $x\mathrm{d}m$; por consiguiente las coordenadas $x_{,}$ y $z_{,}$ del centro de gravedad de M quedarán determinadas por las ecuaciones $Mx_{,}=\mathrm{S}.x\mathrm{d}m$ (574), $Mz_{,}=\mathrm{S}.z\mathrm{d}m$ (575). Pero en nuestro caso las coordenadas $x_{,}$, $z_{,}$ son nulas, pues que el centro de gravedad está en el orígen; luego $\mathrm{S}.x\mathrm{d}m=0$ (576), $\mathrm{S}.z\mathrm{d}m=0$ (577). Luego si ademas observamos que S.dm representa la suma de los elementos de M, esto es la masa M, la (ec. 573) se nos convertirá en
$$\mathrm{S}.r'^2\mathrm{d}m=\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m+Ma^2\ (578);$$
pero $\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m$ es el momento de inercia del cuerpo M con relacion al ege GF, que pasa por el centro de gravedad; luego podemos concluir que *cuando se conoce este momento de inercia, se puede siempre determinar el momento de inercia* $\mathrm{S}.r'^2\mathrm{d}m$ *tomado con relacion á otro ege CK cuya distancia al GF fuese conocida.*

Poniendo la (ec. 578) bajo la forma $\mathrm{S}.r'^2\mathrm{d}m=M\left(\dfrac{\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m}{M}+a^2\right)$ (579), se ha convenido para abreviar el representar la espresion $\dfrac{\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m}{M}$ por K^2. Así, adoptando esta notacion, dirémos en lo sucesivo que el momento de inercia tomado con relacion á un ege cualquiera será dado por la fórmula $\mathrm{S}.r'^2\mathrm{d}m=M(K^2+a^2)$ (580.)

Del movimiento de un cuerpo que se mueve de un modo cualquiera alrededor de un ege fijo.

472 Supongamos ahora que diferentes fuerzas variatrices obrando

sobre los puntos del sistema, le hagan girar con un movimiento variado alrededor del ege fijo AU (fig. 161); cada punto m describirá alrededor del ege fijo un círculo mno que será perpendicular á este ege y le cortará en un punto C. Sea φ la fuerza variatriz que obre sobre m, y θ el ángulo TmP que esta forme en el punto m con el elemento del círculo mno. Podemos descomponer á φ en tres fuerzas: la primera paralela al ege fijo y por consiguiente sin efecto; la segunda segun el radio mC, la que será destruida por la resistencia del punto C; y la tercera dirigida segun el elemento de la curva que es la direccion mT y que tendrá por espresion á $\varphi\cos.\theta$.

Esta última será la sola componente de φ que intentará hacer mover el punto m alrededor del ege AU.

Llamemos ω la velocidad angular que existe al cabo del tiempo t, y r la distancia Cm de la molécula dm al ege de rotacion; la velocidad de dm al cabo de este tiempo t estará espresada (459) por $r\omega$; y en el instante dt, esta velocidad recibirá el incremento que le imprima la fuerza variatriz. Pero si este móvil estuviese libre, la fuerza variatriz $\varphi\cos.\theta$ le comunicaria en el instante dt una velocidad representada (ec. 346) por $\varphi\cos.\theta \mathrm{d}t$;

por consiguiente el elemento dm al acabar el tiempo $t+\mathrm{d}t$ se escaparia segun la tangente mT á la curva, con una velocidad igual á $r\omega+\varphi\cos.\theta\mathrm{d}t$; más como d$m$ está unido al sistema, su velocidad efectiva al cabo del tiempo $t+\mathrm{d}t$ no está espresada sino por $r\omega+r\mathrm{d}\omega$.

Así, en el tiempo $t+\mathrm{d}t$ la cantidad de movimiento efectiva del elemento dm es $(r\omega+r\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}m$.

Y pudiéndose aplicar esto á las otras moléculas, será necesario que las cantidades de movimiento $\Sigma.(r\omega+\varphi\cos.\theta\mathrm{d}t)\mathrm{d}m$,

en virtud del segundo enunciado del principio de D'Alembert, se equilibren con las cantidades de movimiento $\Sigma.(r\omega+r\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}m$,

tomadas en direcciones opuestas, es decir, considerándolas en general como si obrasen en un sentido contrario al del movimiento del cuerpo, teniendo cuidado, si el caso lo exige, de mudar despues los signos de las que no obrasen en el mismo sentido que las otras.

473 Más para que estas dos clases de cantidades de movimiento dirigidas en sentido contrario, se equilibren alrededor de un ege fijo, es necesario que sus momentos tomados con relacion á este ege dén productos iguales; y como las fuerzas obran segun los elementos de los círculos descritos por los puntos materiales, se considera que estas fuerzas son perpendiculares á los radios de las circunferencias descritas por los elementos; de donde se sigue que basta multiplicar las espresiones precedentes por estos radios para tener los elementos buscados. Y formando la ecuacion de los momentos se tendrá

$$\Sigma.(r^2\omega+r\varphi\cos.\theta\mathrm{d}t)\mathrm{d}m=\Sigma.(r^2\omega+r^2\mathrm{d}\omega)\mathrm{d}m \quad (581);$$

y suprimiendo el primer término que es comun en ambos miembros, tendrémos $\Sigma.r\varphi\cos.\theta\mathrm{d}t\mathrm{d}m=\Sigma.r^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}m$ (582).

Como el tiempo y la velocidad angular $d\omega$ son los mismos en todos los términos, se pueden poner fuera del signo Σ; y como se tiene que sumar una serie de espresiones infinitamente pequeñas, se podrá mudar Σ en S y se obtendrá $dtS.r\varphi\cos.\theta dm = d\omega S.r^2dm$ (583), que da $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{S.r\varphi\cos.\theta dm}{S.r^2dm}$ (584).

Para efectuar las integraciones indicadas será necesario que además de la posicion de los diferentes elementos del cuerpo, se conozca por la naturaleza del problema la fuerza variatriz que obra sobre cada molécula, así como la direccion θ de esta fuerza; esto es lo que vamos á examinar en el capítulo siguiente.

Del péndulo compuesto.

474 El péndulo *compuesto* es un cuerpo ó sistema de puntos materiales que estando sostenido por una recta inflexible AB (fig. 162) oscila alrededor de un punto fijo A. En este movimiento los puntos materiales m, m', m'' *&c.* describen arcos de círculo mn, $m'n'$, $m''n''$ *&c.* situados en planos paralelos, y cuyos centros están sobre un mismo ege horizontal KL perpendicular á estos planos.

Así, aunque el móvil CED no esté sostenido sino por el punto A, podemos siempre imaginar que se mueve alrededor de un ege fijo KL.

Vamos ahora á referir el movimiento del péndulo compuesto á tres eges rectangulares CX, CZ, CU (fig. 163). Supongamos que estos dos últimos se hallen en un plano horizontal; entónces el ege de las x será vertical, y por consiguiente el plano de las xz lo será tambien.

Y como la fuerza variatriz para todos los puntos del sistema es la pesantez, tendrémos $\varphi = \varphi' = \varphi'' = \varphi''' = \&c. = g$.

Como la fuerza que solicita á la molécula m es paralela al ege CX, podemos representar la intensidad de esta fuerza por la parte mg de su direccion; entónces el ángulo θ será igual á Tmg; y si se tira la perpendicular mD al ege CX, como los ángulos CmD y Tmg son ambos complementos de TmD, serán iguales, y se concluirá que $CmD = \theta$;

y será $z = Dm = Cm\cos.CmD = r\cos.\theta$, que da $\cos.\theta = \dfrac{z}{r}$.

Sustituyendo este valor de $\cos.\theta$ y el de φ en la (ec. 584), tendrémos

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{S.gzdm}{S.r^2dm} = \frac{gS.zdm}{S.r^2dm} \quad (585).$$

Pues que zdm es el momento del elemento dm con relacion al ege de las x, si llamamos $z_{,}$ la ordenada del centro de gravedad con relacion á este ege, y M la masa de todo el sistema, podrémos remplazar $S.zdm$ por $Mz_{,}$; y nuestra ecuacion se convertirá en $\dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{gMz_{,}}{S.r^2dm}$ (586).

{ En fin, siendo $S.r^2 dm$ el momento de inercia con relacion al ege AU, este momento se puede representar (ec. 580) por $M(K^2+a^2)$.

Sustituyendo este valor en la (ec. 586) tendrémos $\frac{d\omega}{dt}=\frac{gz_{,}}{K^2+a^2}$ (587).

{c. 475 Hemos visto (471) que en la espresion $M(K^2+a^2)$ del momento de inercia, a representaba la distancia CG (fig. 160) del ege CK al ege GF que pasase por el centro de gravedad. Pero en el movimiento del cuerpo, el centro de gravedad, como todo punto del sistema, está sujeto á describir un arco de círculo situado en un plano perpendicular al ege fijo; luego si se representa este plano por XCL (fig. 164), el radio del círculo descrito será CG$=a$, y la ordenada DG vendrá á ser la que hemos espresado por $z_{,}$; por consiguiente en virtud de la propiedad del círculo tendrémos $z_{,}=\sqrt{2ax_{,}-x_{,}^2}$.

Por otra parte si llamamos s el arco descrito por el punto G, la velocidad de este punto será $\frac{ds}{dt}$;

pero hemos visto (459) que la molécula situada á una distancia r del ege fijo, tenia por velocidad $r\omega$;

luego la velocidad del centro de gravedad estará espresada por $a\omega$;

y tendrémos $a\omega=\frac{ds}{dt}$, que da $\omega=\frac{ds}{adt}$ (588).

{ Sustituyendo en la (ec. 587), estos valores de ω y de $z_{,}$, se reduce á $\frac{d^2s}{adt^2}=\frac{g\sqrt{2ax_{,}-x_{,}^2}}{K^2+a^2}$ (589).

{ Para integrar esta ecuacion multiplicarémos sus dos miembros por $2ads$, y hallarémos $\frac{ds^2}{dt^2}=v^2=S.\frac{2ag}{K^2+a^2}\times ds\sqrt{2ax_{,}-x_{,}^2}$ (590);

y sustituyendo en vez de ds su valor (II. 550) con relacion al senoverso que es la abscisa $x_{,}$, y teniendo presente que el arco mengua cuando crece $x_{,}$, tendrémos $ds=-\frac{adx_{,}}{\sqrt{2ax_{,}-x_{,}^2}}$ (591).

{ Sustituyendo este valor en la (ec.590), será $v^2=-S.\frac{2a^2g}{K^2+a^2}dx_{,}$ (592);

y efectuando la integracion indicada hallarémos $v^2=-\frac{2a^2gx_{,}}{K^2+a^2}+C$ (593).

{ Para determinar la constante, supongamos que $x_{,}$ se convierta en

EB$=b$ cuando la velocidad v es nula, y tendrémos $C=\frac{2a^2gb}{K^2+a^2}$;

y por consiguiente la (ec. 593) se convertirá en

v^2 ó $\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{2a^2g}{K^2+a^2}(b-x_{,})$ (594), que da $dt=\frac{ds}{\sqrt{\frac{K^2+a^2}{2a^2g}(b-x_{,})}}$ (595).

Esta ecuacion se integra fácilmente en el caso de ser las oscilaciones muy pequeñas, como ordinariamente sucede; porque poniendo por ds el valor $-\frac{adx_{,}}{\sqrt{2ax_{,}}}$ que se obtiene borrando $x_{,}^2$, por ser muy pequeña en comparacion de $2ax_{,}$ en la (ec. 591), se convertirá en

$$dt=-\frac{\frac{1}{2}dx_{,}}{\sqrt{\frac{ag}{K^2+a^2}(b-x_{,})x_{,}}}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{K^2+a^2}{ag}}\times\frac{dx_{,}}{\sqrt{(b-x_{,})x_{,}}}\ (596);$$

que integrando esta espresion del mismo modo que lo hicimos con la B (§ 436), tendrémos

$$t=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{K^2+a^2}{ag}}\times S.\frac{-dx_{,}}{\sqrt{bx_{,}-x_{,}^2}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{K^2+a^2}{ag}}\times\text{arc.}\left(\cos.=\frac{2x_{,}-b}{b}\right)+C.$$

Determinando esta integral desde $x_{,}=b$ hasta $x_{,}=0$, resulta que esta ecuacion se convierte en $t=\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{K^2+a^2}{ag}}$;

y llamando T el tiempo de una oscilacion entera, será

$$T=\pi\sqrt{\frac{K^2+a^2}{ag}}\ (597).$$

Luego resulta que la cantidad que en la (ec. 545) estaba representada por $\frac{l}{g}$ en el péndulo simple, lo está aquí en el compuesto por $\frac{K^2+a^2}{ag}$;

de manera que haciendo $\frac{l}{g}=\frac{K^2+a^2}{ag}$ (598),

el péndulo simple y el péndulo compuesto harán sus oscilaciones en el mismo tiempo. Suprimiendo la g en ambos miembros resulta

$$l=\frac{K^2+a^2}{a}=\frac{K^2}{a}+a\ (599).$$

Por esta fórmula *se puede siempre hallar la longitud del péndulo simple* *que haria sus oscilaciones en el mismo tiempo que el péndulo compuesto.*

476 Si á una distancia l del ege de suspension AB (fig. 165) se le tira una paralela EF, esta tendrá la propiedad de que todos sus puntos harán sus oscilaciones como si estuviesen libres; porque en virtud del principio que precede, estos puntos son otros tantos péndulos simples que oscilan simultaneamente. A estos puntos se les llama *centros de oscilacion*, y la recta EF es el *ege* de oscilacion.

477 *Los eges de suspension y de oscilacion son recíprocos; es decir, que si se toma el ege de oscilacion EF por ege de suspension, el ege de oscilacion se hallará á una distancia MN igual con CD.*

Para demostrarlo observarémos que la distancia CD del ege de oscilacion al de suspension es dada por la (ec. 599). Pero si se toma el ege EF por ege de suspension, el cuerpo mudará de posicion; porque EF es una recta determinada en este cuerpo; y como ignoramos si el nuevo ege de oscilacion pasará á una distancia MN=CD de EF, representemos esta distancia desconocida MN por l', y por a' la distancia del centro de gravedad á EF, y tendrémos por la naturaleza del centro de oscilacion $l'=\dfrac{a'^2+K^2}{a'}$ (600).

Esto supuesto, como la (ec. 599) nos manifiesta que l escede á a, sigue que el centro de gravedad debe estar comprendido entre los eges de suspension y de oscilacion; por consiguiente entre a y a' existirá la relacion $a+a'=l$, que da $a'=l-a$.

Por medio de este valor la (ec. 600) se convertirá en

$$l'=\frac{(l-a)^2+K^2}{l-a} \quad (601).$$

Por otra parte la (ec. 599) nos da $l-a=\dfrac{K^2}{a}$ (602);

luego si sustituimos este valor en el anterior de l', será

$$l'=\frac{\dfrac{K^4}{a^2}+K^2}{\dfrac{K^2}{a}}=\frac{K^2}{a}+a=(\text{ec. } 599)\, l \quad (603).$$

Por consiguiente cuando se toma EF por ege de suspension, el ege de oscilacion LH pasa á una distancia MN de EF, que es precisamente la misma que separa los dos eges AB y EF.

Del movimiento de un cuerpo libre en el espacio.

478 Cuando un cuerpo M ó un sistema de cuerpos se mueve libremente en el espacio, y el punto m del sistema se ha trasportado de

m á *m'* (fig. 166), si los otros puntos del sistema han mudado de posicion, como todos están unidos invariablemente al punto *m*, ellos no habrán podido tomar esta nueva posicion sino por un movimiento de rotacion alrededor del punto *m*, ó el cuerpo se habria trasportado permaneciendo siempre paralelamente á él mismo. Luego se puede concebir el movimiento de un cuerpo como compuesto de otros dos, el uno que trasportase todas las moléculas del sistema paralelamente á ellas mismas, y el otro que les imprimiese un movimiento de rotacion alrededor del punto *m*. En este movimiento de traslacion, el punto *m* que no tiene movimiento de rotacion conservará su velocidad primitiva; con esta velocidad se moverian todos los puntos del sistema en linea recta en el espacio, si no hubiese movimiento de rotacion. Como se puede elegir á arbitrio el punto *m*, alrededor del cual se supone que gira el sistema, se supone que este punto es el centro de gravedad.

{ 479 Reduciéndose el problema á determinar estas dos clases de movimiento, el principio de D'Alembert nos proporcionará hallar las ecuaciones del movimiento del centro de gravedad. Para conseguirlo descompongamos todas las fuerzas variatrices que obran sobre una molécula dm en tres fuerzas X, Z, U paralelas á los eges coordenados; las velocidades comunicadas á dm en el instante dt serán $X\mathrm{d}t$, $Z\mathrm{d}t$, $U\mathrm{d}t$, por consiguiente para las velocidades impresas al cabo del tiempo $t+\mathrm{d}t$ tendrémos $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+X\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+Z\mathrm{d}t$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+U\mathrm{d}t$.

{ Con relacion á las velocidades efectivas al cabo del mismo tiempo, serán $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}+\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;

por consiguiente para las cantidades de movimiento perdidas por dm al cabo del tiempo $t+\mathrm{d}t$, tendrémos

$$\left(X\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m,\ \left(Z\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m,\ \left(U\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m;$$

y como esto se puede aplicar á todas las otras partículas del sistema, si reunimos todas las componentes que obran segun el ege de las x, la suma de las cantidades de movimiento perdidas en el sentido de este, estará espresada por $\mathrm{S}.\left(X\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m$ (604).

{ 480 Del mismo modo las sumas de las cantidades de movimiento perdidas, paralelamente á las otras dos, serán respectivamente

$$\mathrm{S}.\left(Z\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m\ (605),\ \mathrm{S}.\left(U\mathrm{d}t-\mathrm{d}.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}m\ (606).$$

{ Pero en el movimiento del centro de gravedad en linea recta, basta para establecer el equilibrio el que las tres sumas de todas las componentes de las fuerzas ó cantidades de movimiento paralelas á los eges, sean nulas separadamente; porque entónces el uno de los puntos del sistema no podrá moverse en ningun sentido, y el equilibrio necesariamente se verificará en el sistema. Por lo que igualando á cero las (ecs. 604, 605, 606) estableceremos la condicion de que el sistema no puede moverse en virtud de las cantidades de movimiento que hemos determinado; lo que nos dará las ecuaciones $S.\left(Xdt-d.\frac{dx}{dt}\right)\times dm=0$ (607),

$$S.\left(Zdt-d.\frac{dz}{dt}\right)\times dm=0\ (608),\ S.\left(Udt-d.\frac{du}{dt}\right)\times dm=0\ (609),$$

que dan

$$S.\frac{d^2x}{dt^2}dm=S.Xdm(610),S.\frac{d^2z}{dt^2}dm=S.Zdm(611),S.\frac{d^2u}{dt^2}dm=S.Udm(612).$$

{ 481 Para espresar estas ecuaciones en funciones de las coordenadas $x_,$, $z_,$, $u_,$ del centro de gravedad, tenemos por las propiedades de este centro $Mx_,=S.xdm$, $Mz_,=S.zdm$, $Mu_,=S.udm$; diferenciando dos veces de seguida estas ecuaciones con relacion al tiempo, considerarémos M y dm como constantes, pues que cuando el tiempo y el espacio varían, el cuerpo que se mueve se supone que siempre conserva la misma forma, lo que hace que M y dm permanezcan en el mismo estado; por lo que tendrémos $M\frac{d^2x_,}{dt^2}=S.\frac{d^2x}{dt^2}dm$ (613),

$$M\frac{d^2z_,}{dt^2}=S.\frac{d^2z}{dt^2}dm\ (614),\ M\frac{d^2u_,}{dt^2}=S.\frac{d^2u}{dt^2}dm\ (615).$$

Combinando estas con las (ecs. 610, 611, 612) hallarémos

$$M\frac{d^2x_,}{dt^2}=S.Xdm\ (616),\ M\frac{d^2z_,}{dt^2}=S.Zdm\ (617),\ M\frac{d^2u_,}{dt^2}=S.Udm\ (618).$$

{ Estas ecuaciones determinan el movimiento del centro de gravedad del cuerpo M; porque si se integran nos harán conocer las velocidades $\frac{dx_,}{dt}$, $\frac{dz_,}{dt}$, $\frac{du_,}{dt}$, del centro de gravedad paralelamente á cada uno de los eges.

{ 482 Estas mismas ecuaciones nos dan los medios de demostrar una propiedad notable del centro de gravedad. Para este efecto sean $X_,$, $Z_,$, $U_,$ las componentes de la resultante de todas las fuerzas variatrices, y tendrémos $MX_,=S.Xdm$, $MZ_,=S.Zdm$, $MU_,=S.Udm$; eliminando la parte integral entre estas ecuaciones y las (ecs. 616, 617, 618) se obtendrá $\frac{\mathrm{d}^2x_{,}}{\mathrm{d}t^2}=X_{,}$ (619), $\frac{\mathrm{d}^2z_{,}}{\mathrm{d}t^2}=Z_{,}$ (620), $\frac{\mathrm{d}^2u_{,}}{\mathrm{d}t^2}=U_{,}$ (621).

{ Pero si todas las fuerzas motrices estuviesen inmediatamente aplicadas al centro de gravedad paralelamente á sus direcciones, ellas tendrian por componentes $X_{,}$, $Z_{,}$, $U_{,}$; y las ecuaciones del centro de gravedad que serian las de un punto material, se determinarian por las (ecs. 426, 427, 428), y serian precisamente las mismas que las (ecs. 619, 620, 621); de donde se sigue que *el centro de gravedad se mueve como si todas las fuerzas del sistema le estuviesen inmediatamente aplicadas.*

{ 483 Para determinar las ecuaciones del movimiento de rotacion, consideraremos el caso mas frecuente del problema general, que es aquel en que el cuerpo está movido por una fuerza variatriz que no pasa por el centro de gravedad; entónces tirando por el centro de gravedad G (fig. 167) una perpendicular GL sobre la direccion de la fuerza variatriz, la fuerza MN intentará hacer girar á LG alrededor del centro de gravedad G, y hará describir al punto L el círculo LKH; este punto L al girar imprimirá al móvil un movimiento de rotacion alrededor de un ege que seria perpendicular al plano del círculo LHK y que pasaria por el punto G. Estando fijo este ege podemos determinar el movimiento de rotacion alrededor del punto G; porque sean v la velocidad comunicada al centro de gravedad por la fuerza variatriz, Q la perpendicular GL, M la masa del cuerpo, y $\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m$ su momento de inercia; y tendrémos que la velocidad angular será dada por la fórmula (ec. 567 y § 467)

$$\omega=\frac{vMQ}{\mathrm{S}.r^2\mathrm{d}m} \quad (622);$$

si el momento de inercia se toma con relacion á un ege que pase por el centro de gravedad se reducirá á MK^2, y la (ec. 622) se convertirá

en $\omega=\frac{vQ}{K^2}$ (623);

que es *la ecuacion que determinará la velocidad angular cuando se haya calculado la velocidad* v *del centro de gravedad por medio de las* (ecs. 616, 617, 618) *modificadas convenientemente para este caso.* }

HIDROSTÁTICA.

Nociones generales acerca de los fluidos.

484 Hemos manifestado en la introduccion del Tomo primero de esta obra, la diferencia que hay entre *líquido* y *fluido*; y tambien hemos anunciado que *la ciencia que trataba del equilibrio de los fluidos* comprendiendo bajo esta denominacion tambien á los líquidos, se llama *Hidrostática*; y por fluido se entiende en general *un conjunto ó reunion de puntos ó partículas materiales que ceden al menor esfuerzo que se hace para separar las unas de las otras.* Los fluidos que nos presenta la naturaleza no suelen estar dotados de esta fluidez perfecta que supone nuestra definicion, pues siempre tienen sus partes alguna adherencia, y esto produce lo que se llama *viscosidad* del fluido, y se opone mas ó ménos á la separacion de sus partes; pero en la teoría que vamos á esponer harémos abstraccion de esta adherencia ó viscosidad, y solo considerarémos fluidos perfectos, dejando para despues el ver las modificaciones que deben tener los resultados teóricos cuando se trate de hacer aplicaciones á algunos fluidos en particular.

485 Los fluidos se suelen dividir en *incompresibles*, y en *compresibles ó elásticos.* Se llaman incompresibles aquellos que pueden tomar una infinidad de figuras diferentes, pero ocupando siempre el mismo volúmen, cuando la temperatura es constante: como son el mercurio, el agua, el vino, el aceite &c.; y se llaman compresibles ó elásticos los que sin variar la temperatura pueden mudar á un mismo tiempo de forma y de volúmen por la compresion, y volver á su figura primitiva luego que cesa la compresion: tales son el aire, los gases y los vapores. Los vapores se diferencian del aire y de los gases permanentes, en que pierden su forma de fluidos elásticos, y se reducen á incompresibles ó líquidos cuando se les comprime hasta cierto punto, ó se disminuye su temperatura; el aire y los gases conservan siempre su forma propiamente fluida ó elástica en todas las presiones y temperaturas á que hasta ahora se han podido someter.

Esta division de fluidos en *compresibles é incompresibles* que se halla adoptada por la mayor parte de los escritores, es erronea (*), pues

(*) *En efecto, dicha division está apoyada principalmente en un esperimento que se hizo en la Academia de Florencia. Se llenaron de agua varias esferas de oro y de otros metales, se cerraron herméticamente, se les hizo mudar de figura y por consiguiente de volúmen, y se notó que el agua salia como una especie de rocío por los poros del metal de donde dedugeron que* pues el agua por no sufrir aquella compreno se puede decir con verdad que *haya fluidos que sean absolutamente incompresibles*. Sin embargo, como la compresion de los líquidos es muy pequeña comparada con su masa, se puede prescindir de ella en la mayor parte de los casos prácticos. Por esta causa no resultan grandes inconvenientes de que se haga la distincion de los fluidos en *incompresibles* y *elásticos*; pero segun mi modo de pensar se deberia desterrar en un todo y conservar á los fluidos que [illegible] que son incompresibles su denominacion exacta y rigorosa de *líquidos*, y á los que son elásticos la suya propia y peculiar de *fluidos*.

486 Entendido esto, concibamos que ABCD (fig. 168) sea una vasija perfectamente cerrada, y que esté llena de un fluido que supondrémos sin pesantez; si se hacen dos aberturas FE, HI de igual superficie, y

---

sion se escapaba por los poros del metal, era una prueba nada equívoca de que el agua era incompresible. *Esta consecuencia hubiera sido legítima, si en el acto mismo en que se hubiese tratado de comprimir la esfera, hubiese estallado; porque entónces se debia inferir que* el agua por no poderse comprimir habia obligado á romperse la esfera. *Pero no habiéndose roto, siempre habia de mediar algun tiempo entre principiar á atravesar el agua todo el grueso del metal, y aparecer en la superficie esterior, y todo este tiempo habia estado comprimida el agua. Por esta causa convencido el sabio ingles Mr. Canton de la inexactitud de este esperimento, se propuso hacer otros mas adecuados y decisivos para convencerse de la verdad ó falsedad de esta proposicion; y no siendo conocidos por lo general, no será inoportuno el que los indiquemos aquí.*

Tomó un tubo de cristal de cerca de dos pies de largo con una esfera en uno de sus estremos de pulgada y cuarto de diámetro. Llenó con mercurio la esfera y parte del tubo, y lo espuso á que tomase exactamente la temperatura de 50° *del termómetro de Farenheit; y estando abierto por el otro estremo señaló el parage ó punto donde el mercurio permaneció en el tubo, que era cerca de seis pulgadas y media sobre la esfera. Despues espuso el mercurio á un grado de calor mucho mas fuerte, con lo que consiguió que se dilatase hasta llegar al estremo del tubo; entónces lo tapó herméticamente, y reducido despues el mercurio á los mismos* 50° *de calor de ántes, notó que el mercurio estaba* 0,32 *de pulgada mas alto que ántes. Repitió este esperimento con agua privada de aire y halló que* cuando por estar tapado el tubo herméticamente, no cargaba la presion atmosférica sobre su superficie superior, estaba 0,43 de pulgada mas alta que cuando estaba abierto el tubo. *De aquí dedujo, y con razon, que el agua no solo era compresible, sino que era* 0,11 *de pulgada mas compresible que el mercurio. Demostrado por este medio que el agua es realmente compresible, procedió á estimar el grado de compresibilidad correspondiente á cualquier peso dado. Con este objeto preparó otro tubo dividido con su esfera correspon-*

se aplican dos émbolos K y L comprimidos por iguales potencias RK, SL dirigidas perpendicularmente á las superficies HI, EF, estas potencias permanecerán en equilibrio, pues no hay ninguna razon para que la una supere á la otra. Luego es necesario que la presion egercida sobre la superficie EF se comunique á la superficie HI por el intermedio del fluido; lo que no puede suceder á ménos que las partículas de los fluidos no sufran por todas partes la misma presion. Luego en virtud de esta observacion se puede establecer la proposicion siguiente: *la propiedad fundamental que caracteriza á los fluidos y los distingue de los sólidos*, y *que servirá de base para la teoría de su equilibrio y de su movimiento*, *es la facultad que tienen de trasmitir igualmente en todo sentido las presiones que se egercen en su superficie.* Esta propiedad que está confir-

---

diente; llenó la esfera y parte del tubo de agua purgada de aire, y dejando el tubo abierto colocó este aparato bajo el recipiente de una máquina neumática, y *observó el grado de dilatacion del agua que correspondia á cada grado de rarefaccion del aire. Despues colocó el mismo aparato bajo un recipiente de cristal de una máquina de condensar el aire*, y *observó el grado de compresion del agua que correspondia á cada grado de condensacion del aire que cargaba sobre ella. Y de este modo halló por repetidos esperimentos á la temperatura de* 0° *y cuando el mercurio en el barómetro se hallabá en su altura media*, *que* el agua se dilató una parte en 21740 privándola del peso de la atmósfera; y *que* el agua hallándose comprimida por una presion equivalente á dos veces el peso de la atmósfera se comprimia una parte en 10870 de su total volúmen. *Halló tambien que el agua era mas compresible en el invierno que en el verano*; *pero observó lo contrario en el espíritu de vino y aceite de olivo.*

Por el resultado de sus esperimentos formó la tabla siguiente cuando el barómetro se hallaba á 29 *pulgadas y media* (*inglesas*), *y el termómetro de Farenheit á* 50°.

Compresion de	Millonésimas partes.	Peso específico.
El espíritu de vino.	66	846.
El aceite de olivo.	48	918.
El agua de lluvia.	46	1000.
El agua de mar.	40	1028.
El Mercurio.	3	13595.

*De todos estos esperimentos se puede deducir con exactitud que ninguno*s fluidos son absolutamente incompresibles.

Mr. Beudant en su Física impresa en 1815 *indica que hay muchas objeciones que hacer á los esperimentos de Mr. Canton*; *pero no espresa cuales son.*

mada por la esperiencia y reconocida por todos los Geómetras y Físicos, es la que sirve de base á toda la Hidrostática, y se conoce bajo la denominacion de *principio de igualdad de presion.*

487 Para espresar esta propiedad por una ecuacion, considerarémos primero los fluidos incompresibles. Supongamos que BE (fig. 169) sea una vasija prismática recta puesta sobre un plano horizontal fijo, y llena hasta una cierta altura BC de un líquido tal como el agua. Supongamos que se cubra este líquido por un émbolo horizontal CD que cierre la vasija exactamente, y para mayor sencillez prescindamos de la pesantez del líquido, de modo que este no egerza por sí mismo ninguna presion sobre las paredes de la vasija; en fin, supongamos colocado sobre el émbolo un peso dado P, que si se quiere podrémos concebir que sea el peso mismo del émbolo. En este caso la base horizontal del prisma se halla comprimida en virtud del principio que acabamos de establecer, del mismo modo que si el peso P estuviese inmediatamente puesto sobre esta base y se distribuyese uniformemente en toda su estension; todos los puntos de esta base sufrirán presiones verticales iguales entre sí: de manera que si espresamos por A la superficie BA de la base, por a una parte de esta superficie, y por p la presion que sufre esta parte a de la base, tendrémos $A:a::P:p=\frac{aP}{A}$;

luego *esta presion que sufre* a *podrémos concebir que equivale á una fuerza vertical aplicada en el centro de gravedad de la superficie* a *é igual con* $\frac{aP}{A}$. Pero en virtud del citado principio, la presion que el peso P egerce en la parte superior del fluido, se trasmite por él no solamente á la base de la vasija, sino tambien á todas las demas paredes: de modo que todos los puntos de la vasija se hallan igualmente comprimidos en direcciones perpendiculares á sus paredes; y tomando una parte a de superficie sobre una de las caras laterales del prisma, sufre la misma presion $\frac{Pa}{A}$ que si formase parte de la base horizontal. Otra porcion cualquiera b de superficie sufrirá una presion espresada por $\frac{Pb}{A}$;

y formando proporcion deducirémos que *las presiones que sufren dos porciones cualesquiera del fondo ó paredes de una vasija*, *son proporcionales á las superficies de estas porciones.*

488 En general, supongamos que la vasija tenga la forma de un poliedro cualquiera (fig. 170) que esté cerrado por todas partes, y exactamente lleno de un líquido sin pesantez. Concibamos que la cara CD del poliedro se remplace por un émbolo; apliquemos á este émbolo una fuer-

za dada P perpendicular á la superficie del líquido adyacente. El fluido no se pondrá en movimiento por esta fuerza, pues que no tiene por donde escaparse y lo suponemos incompresible; y en virtud del citado principio, la presion que egerce sobre la superficie adyacente, se trasmitirá por el intermedio del líquido sobre todas las caras del poliedro. Todos los puntos de la superficie del émbolo estarán igualmente comprimidos de dentro á fuera en direcciones perpendiculares á las paredes; luego si se espresa por a una parte de superficie tomada en estas paredes ó sobre la superficie del émbolo, la presion será una fuerza perpendicular á su plano, aplicada á su centro de gravedad é igual con $\frac{aP}{A}$, espresando siempre A la superficie entera del émbolo.

489 Este resultado se estiende sin dificultad al caso en que una de las paredes de la vasija sea una superficie curva continua ó discontinua: basta entónces descomponer esta superficie en elementos infinitamente pequeños, que se considerarán como superficies planas de un poliedro de una infinidad de caras; y si se espresa por ω la superficie de uno de estos elementos, se tendrá $\frac{P\omega}{A}$ para la presion que sufre, siendo P la fuerza perpendicular que está aplicada á la superficie A. Y espresando por p la presion constante que sufriria una superficie plana igual á la unidad de superficie, se tendrá $\frac{P}{A}=p$, que da $P=pA$ (624).

Si sustituimos este valor de P en las espresiones $\frac{Pa}{A}$ y $\frac{P\omega}{A}$, se nos convertirán en pa, que espresará la presion sobre la superficie igual con a; y en $p\omega$ que espresará la que sufre la superficie ω.

490 Cuando concibamos que el líquido contenido en la vasija está dotado de su pesantez, tambien trasmite las presiones que se egercen en su superficie del mismo modo que cuando carece de pesantez; pero *ademas egerce sobre las paredes de la vasija una presion debida á su peso, y variable de un punto á otro de estas paredes. Lo mismo sucede con una masa fluida en equilibrio, cuyas moléculas están solicitadas por fuerzas variatrices dadas y que esté contenida en una vasija cerrada por todas partes.* Si las paredes de esta vasija son necesarias para el equilibrio, de modo que no se pueda hacer en ella una abertura sin que el líquido deje de escaparse al instante, es necesario concluir de aquí que *estas paredes sufren en cada punto una presion particular dirigida de dentro á fuera, segun la normal á la superficie de la vasija*; porque solo sobre esta normal, es sobre la que una superficie puede sufrir una presion y destruirla por su resistencia (63).

491 La magnitud de esta presion en cada punto nos es desconocida; depende de las fuerzas variatrices dadas y de la posicion del punto, y manifestarémos despues el método de determinarla; pero no será inoportuno el *manifestar desde luego cómo se mide esta presion variable.* Como ella muda en general de un punto á otro, solo se la puede suponer constante en rigor en una estension infinitamente pequeña: y así para medir la presion que sufre un elemento determinado de la superficie, se concibe una area plana que se toma por unidad, y que se halle comprimida en toda su estension del mismo modo que lo está este elemento; y espresando p la presion total que sufre esta area y ω la estension infinitamente pequeña del elemento, el producto $p\omega$ representará la presion de este elemento. La cantidad p es lo que llamarémos la presion en cada punto de la vasija referida á la unidad de superficie; *cuando se ha llegado á determinar en funcion de las coordenadas de este punto, se tiene la presion* $p\omega$ *sobre un elemento cualquiera; de donde se concluye por las reglas del cálculo integral la presion sobre una porcion plana de la superficie de la vasija. Se encuentra tambien el punto de aplicacion de esta fuerza por medio de la teoría de los momentos de las fuerzas paralelas.*

Esto supuesto, concibamos que se quita una porcion plana de la superficie de un vaso y que se remplace por un émbolo de la misma estension; supongamos tambien que se aplique á este émbolo una fuerza igual y contraria á la presion que sufre la vasija en este parage, y tendrémos que *el equilibrio subsistirá del mismo modo que ántes*; y tampoco *se turbará si á esta primera fuerza se añade una fuerza cualquiera* P; porque estando en equilibrio las fuerzas aplicadas á las moléculas, esto viene á ser lo mismo que si dichas fuerzas no existiesen y solo quedase la fuerza P, que como hemos visto (488) no debe turbar el equilibrio; y la presion que egerce sobre la superficie del fluido adyacente al émbolo, será trasmitida por el fluido igualmente en todos sentidos: por consiguiente *la presion* p *referida á la unidad de superficie, se hallará aumentada en cada punto de la vasija en una cantidad constante é igual á* $\frac{P}{A}$, siendo A la estension de la superficie plana del fluido en contacto con el émbolo.

492 Es muy importante el distinguir bien las dos clases de presiones que sufren las paredes de la vasija que contiene un fluido en equilibrio; la una se debe á las fuerzas motrices de las moléculas del fluido, y varía de un punto á otro de la vasija; la otra, constante para todos estos puntos, proviene de las presiones que se egercen directamente en la superficie y que son trasmitidas sobre todos los puntos por el intermedio del fluido. *Estas dos presiones obran juntas en cada punto, y de su suma resulta la presion total.*

493 En virtud de todo lo que acabamos de esponer, un fluido incompresible contenido en un vaso fijo de posicion, se debe considerar co-

mo una verdadera *máquina*; porque una máquina en general es un aparato por medio del cual una fuerza obra sobre puntos que están fuera de su direccion, y produce sobre estos puntos un efecto mayor ó menor que si estuviese aplicada á ellos inmediatamente; y esta misma circunstancia es la que se verifica en una fuerza aplicada á la superficie del líquido por medio de un émbolo: pues que ella obra por el intermedio del fluido sobre todos los puntos de la vasija, y *egerce sobre cada porcion plana de las paredes una presion igual á su intensidad multiplicada por la relacion de la superficie de la pared con la del émbolo.*

494 *El principio de igualdad de presion en todos sentidos conviene tambien á los fluidos elásticos*; pero con relacion á estos no es necesario el que obren sobre sus moléculas fuerzas motrices, ó que se egerzan presiones sobre su superficie, para que ellas mismas compriman las paredes de las vasijas que las contienen; pues basta para esto su elasticidad, en virtud de la cual estos fluidos hacen esfuerzo continuamente para dilatarse y ocupar un volúmen mayor. Así, si suponemos que una masa de aire ó de un gas cualquiera esté contenida en una vasija cerrada por todas partes, y se hace abstraccion de la pesantez del fluido, las paredes de la vasija sufrirán presiones iguales en todos sus puntos y dirigidas de dentro á fuera segun las normales de estas paredes. *La presion referida á la unidad de superficie será la misma en toda la estension de la vasija*; y para determinarla, se hará una abertura en un parage del vaso tomado á arbitrio; se le aplicará un émbolo, y á este émbolo la fuerza necesaria para mantenerle en equilibrio; esta fuerza será igual y contraria á la presion que sufre el émbolo; dividiéndola por el area de la base del émbolo se tendrá la presion referida á la unidad de superficie: y se hallará siempre el mismo cuociente cualquiera que sea el parage de la vasija en que se haya aplicado el émbolo. Si por egemplo la vasija estuviese representada por la (fig. 171) y estuviese llena de un fluido elástico, *las fuerzas que será necesario aplicar á los diferentes émbolos* CD, $C'D'$, $C''D''$, *&c. para impedirles el resbalar, serán proporcionales á las bases* A, A′, A″ &c. *de estos émbolos*, *y la relacion de cada fuerza en su base será la misma para todos los émbolos.*

Cuando se tenga en consideracion la pesantez del fluido, ó mas generalmente, cuando sus moléculas se hallen solicitadas por fuerzas variatrices dadas, la presion variará de un punto á otro de la vasija, segun una cierta ley que tratarémos de determinar en lo sucesivo.

495 *La presion constante que un fluido elástico egerce contra las paredes del vaso que le encierra y que no se debe á su pesantez*, *sino solamente á su elasticidad*, *depende de la materia del fluido*, *de su densidad y de su temperatura*; y á esta presion se le llama tambien la *fuerza elástica del fluido*. La esperiencia ha demostrado que *para un mismo fluido tomado á una misma temperatura*, *es proporcional á la densidad*; de manera que espresando la presion por p, y la densidad por D, se tiene en cada fluido $p=KD$ (625),

siendo K un coeficiente que solo depende de la materia y temperatura del fluido.

Ecuaciones generales del equilibrio de los fluidos.

496 Para tratar la cuestion del modo mas general *consideremos una masa fluida, ya sea homogenea ya heterogen[illegible] incompresible, cuyas moléculas todas estén solicitadas por fuerzas variatrices dadas, y propongámonos espresar por ec[illegible]aciones las condiciones de su equilibrio.*

Sean x, z, u las coordenadas rectangulares de un punto cualquiera de esta masa paralelas á los eges AX, AZ, AU (fig. 172). Supongamos para fijar las ideas que el plano de las xz sea horizontal y esté situado encima de la masa fluida BCDL, y el ege vertical AU situado por debajo de este plano. Espresemos por X, Z, U las sumas de las componentes paralelas á los eges de las x, de las z y de las u, de las fuerzas variatrices que obran sobre este punto. Dividamos la masa fluida en una infinidad de elementos infinitamente pequeños por planos paralelos á los de las coordenadas, é infinitamente próximos los unos á los otros; estos elementos serán paralelepípedos rectangulares que tendrán sus lados paralelos á los eges de las coordenadas é infinitamente próximos los unos á los otros, y ademas estos mismos lados serán iguales á las diferenciales de las coordenadas; las dos bases opuestas horizontales del que corresponde á las coordenadas x, z, u, y que está representado en la figura, serán iguales á dxdz; su altura vertical será igual á du, y el producto dxdzdu espresará su volúmen. La densidad del fluido se puede considerar como constante en toda la estension de este elemento; luego si la espresamos por D, y por dm la masa, se tendrá $dm=D\times dxdzdu$ (626), siendo D una cantidad constante en los líquidos homogeneos, y una funcion de x, z, u en los fluidos heterogeneos y en los elásticos homogeneos que no estén comprimidos igualmente por todas partes. En esta misma estension del elemento dm, las fuerzas X, Z, U se pueden tambien considerar como constantes; por consiguiente Xdm, Zdm, Udm, serán las fuerzas motrices de dm paralelas á los eges AX, AZ, AU.

497 Esto supuesto, debemos observar que el paralelepípedo dxdzdu está comprimido de fuera á dentro sobre sus seis caras por el fluido que lo rodea; y que las presiones que sufre deben hacerse equilibrio con las tres fuerzas Xdm, Zdm, Udm.

Luego si espresamos por p la presion vertical referida á la unidad de superficie que se egerce sobre la base superior dxdz segun la direccion cb, como esta presion vertical varía con la posicion del elemento que se considera, resulta que la cantidad p, que representa su valor y que se refiere á un elemento cualquiera, es una funcion de x, z, u.

Ahora, si x y z permanecen las mismas, y u se convierte en $u+du$, tendrémos que p se convertirá en $p+\frac{dp}{du}\times du$, y espresará la presion vertical referida á la unidad de superficie que se egerce sobre la base inferior del elemento dxdzdu;

de donde se sigue que *las presiones verticales y contrarias que este elemento sufre sobre sus dos bases horizontales segun las direcciones* cb *y* c′b′ *son iguales á* $p\,dxdz$, *y* $\left(p+\frac{dp}{du}\times du\right)dxdz$;

la primera coopera á bajarla, y la segunda á elevarla; por consiguiente es necesario para que este elemento permanezca en equilibrio que el esceso de la segunda sobre la primera sea igual á la fuerza vertical Udm;

lo que da $\frac{dp}{du}\times dudxdz=Udm$ (627).

Y poniendo en vez de dm su valor (ec. 626) será $\frac{dp}{du}=DU$ (628).

Igualmente, si espresamos por q y r las presiones laterales egercidas sobre la unidad de superficie, y que obran contra las caras dxdu, dzdu,

se obtendrá $\frac{dq}{dz}=DZ$ (629), $\frac{dr}{du}=DX$ (630).

Y como por el principio *de igualdad de presion* (486), en todos los puntos de una misma molécula egercerá el fluido una presion igual, tendrémos que $p=q=r$;

por lo que las tres ecuaciones anteriores se nos convertirán en

$$\frac{dp}{du}=DU\ (631),\quad \frac{dp}{dz}=DZ\ (632),\quad \frac{dp}{dx}=DX\ (633),$$

que son *las ecuaciones generales del equilibrio de los fluidos.*

498 Las condiciones de equilibrio que espresan, se reducen en cada caso particular á que se pueda hallar para p una funcion de x, z, u que satisfaga á un mismo tiempo á estas tres ecuaciones; pero si se multiplica la primera por du, la segunda por dz, la tercera por dx, y se suman, se tendrá $dp=D(Xdx+Zdz+Udu)$ (634).

Luego *será necesario para que el valor de* p *sea posible*, *que la espresion* D(Xdx+Zdz+Udu) *sea una diferencial exacta de una funcion de las tres variables* x, z, u. Recíprocamente, cuando quede satisfecha esta condicion, será p igual con la integral de esta espresion, y se satisfará de este modo á dichas ecuaciones.

499 Este valor de p *espresa la presion referida á la unidad de superficie que el fluido egerce en un punto cualquiera*, *cuyas coordenadas son* x, z, u *y que puede estár situado en su interior ó en su superficie*; luego si la masa fluida BCDL está contenida en una vasija, se tendrá la presion que sufre esta vasija en cada uno de sus puntos, sustituyendo en él valor de p las coordenadas de este punto en vez de x, z, u;

esta presion será siempre destruida, con tal que las paredes de la vasija sean capaces de una resistencia indefinida; pero en los parages en que la vasija está abierta y donde el fluido está enteramente libre, nada puede destruir la presion que egerce; por consiguiente *es necesario que el valor de* p *sea nulo por sí mismo para todos los puntos de la superficie libre de una masa fluida en equilibrio.*

500 En los fluidos elásticos, esta cond[illegible] puede quedar satisfecha; por lo que siendo la presion proporcional á la densidad (495), miéntras que la densidad no s[illegible] nula tampoco lo será la presion; luego un fluido elástico no puede permanecer en equilibrio á ménos que no esté contenido en una vasija cerrada por todas partes (*); ó bien á ménos que su masa, como l[illegible] de la atmósfera por egemplo, no se estienda indefinidamente en el espacio.

501 Debiendo ser nula la presion p en la superficie libre de un fluido incompresible en equilibrio, se sigue que la ecuacion diferencial de esta superficie es $dp=0$, lo que (ec. 634) da $Xdx+Zdz+Udu=0$ (635).

502 Esta seria aun la ecuacion diferencial de esta superficie si el fluido sufriese en ella una presion constante; como si por egemplo la atmósfera la comprimiese igualmente sobre toda su estension.

503 Tambien se verifica que *la resultante de las fuerzas variatrices* X, Z, U, *que obran sobre cada punto del fluido situado en su superficie, debe ser perpendicular á esta superfic[illegible]*; porque si la resultante de las fuerzas que obran sobre una molécula esterior del fluido no se dirigiese segun la normal, se descompondria en dos, la una tangente y la otra normal á su superficie; y nada impediria á la fuerza tangente el hacer resbalar á la molécula sobre esta superficie; por consiguiente *el equilibrio no puede existir miéntras que la superficie del fluido no sea perpendicular en todos sus puntos á la direccion de esta resultante.*

504 Supongamos ahora que el fluido en equilibrio sea homogeneo é incompresible. La densidad D es entónces una cantidad constante; luego *es necesario* (498) *que las fuerzas dadas* X, Z, U, *sean tales que la fórmula* $Xdx+Zdz+Udu$ *sea una diferencial exacta de una funcion de tres variables independientes.* Si esto no se verifica, el equilibrio será imposible en la masa fluida, cualquier forma que se le dé, y aun en el caso de que estuviese contenida en una vasija cerrada por todas partes.

Esta condicion está satisfecha con relacion á las fuerzas de atraccion dirigidas hácia centros fijos, y cuyas intensidades son funciones cualesquiera de las distancias á estos centros (376); por consiguiente el equilibrio es posible en un líquido homogeneo, cuyos puntos están atraidos hácia uno ó muchos centros fijos, y que están sometidos ademas á su atraccion recíproca; más para que se verifique es necesario que la resultante del fluido sea perpendicular á la resultante de todas estas fuerzas

(*) *Esto confirma la exactitud con que en la introduccion del primer tomo de esta obra definímos los cuerpos que eran verdaderamente fluidos.*

de atraccion en todos los parages en que el fluido no esté apoyado contra las paredes de una vasija inmutable; en virtud de esta condicion se determinará en cada caso particular la figura del líquido que conviene al equilibrio.

Si por egemplo solo existe una fuerza de atraccion dirigida hácia el punto K, la figura de la masa BCDL necesaria al equilibrio *será una esfera que tenga [illegible] al punto K, cualquiera que sea la ley de esta fuerza.*

Este resultado se puede obtener directamente de este modo: tomemos el centro de atraccion por orígen, y sean x, z, u las coordenadas del elemento dm; y tendrémos que la distancia de dm al orígen estará espresada (II. 181) por $\sqrt{x^2+z^2+u^2}$.

Si espresamos por r esta distancia, y por λ la fuerza de atraccion, esta fuerza λ formará con los eges coordenados ángulos que tendrán por cosenos $\frac{x}{r}$, $\frac{z}{r}$, $\frac{u}{r}$; por consiguiente si X, Z, U son las componentes de λ paralelamente á los eges, tendrémos (§ 34) $X=\lambda\frac{x}{r}$, $Z=\lambda\frac{z}{r}$, $U=\lambda\frac{u}{r}$; sustituyendo estos valores en la (ec. 635) resultará para la superficie del fluido, la ecuacion $\frac{\lambda}{r}(x\text{d}x+z\text{d}z+u\text{d}u)=0$; en donde suprimiendo el factor $\frac{\lambda}{r}$, multiplicando por 2 é integrando, se tiene $x^2+z^2+u^2=C$; ecuacion que corresponde (II. 342) á la superficie de una esfera.

Cuando este centro se aleja al infinito, la direccion de la fuerza viene á ser paralela á ella misma en toda la estension de la masa fluida, y entónces *la superficie de equilibrio es un plano perpendicular á esta direccion.* Este caso es el de la pesantez; luego *un líquido pesado y homogeneo contenido en una vasija abierta en su parte superior, permanece en equilibrio cuando su superficie es horizontal ó perpendicular á la direccion vertical de la pesantez*; recíprocamente, *cuando este líquido está en equilibrio, su superficie es perfectamente horizontal.*

La superficie de un fluido estancado de una grande estension no es ya una superficie plana; es una porcion de superficie esférica cuyo centro es el de la tierra, atendido á que en este caso la pesantez no se puede considerar como una fuerza paralela á ella misma, sino como una fuerza dirigida constantemente hácia el centro, al ménos haciendo abstraccion de la fuerza centrífuga y del aplanamiento de la tierra.

505. Las fuerzas de atraccion ó de repulsion dirigidas hácia centros

fijos, y cuyas intensidades son funciones de las distancias á sus centros fijos respectivos, comprenden todas las fuerzas de la naturaleza que pueden obrar sobre los puntos de un cuerpo en reposo; por lo que considerarémos la fórmula $Xdx+Zdz+Udu$ como una diferencial exacta, y espresarémos por φ su integral; de manera que φ será una funcion dada de x, z, u, y tal que se tenga

$$Xdx+Zdz+Udu=d\varphi \quad (635).$$

Igualando esta funcion φ á una constante arbitraria, se tendrá la ecuacion de una infinidad de superficies que no difieran entre sí, sino por los valores de esta constante.

La ecuacion diferencial $d\varphi=0$ ó $Xdx+Zdz+Udu=0$, será comun á todas estas superficies; de donde se sigue que *todas ellas tendrán del mismo modo que la superficie esterior de la masa fluida, la propiedad de cortar á ángulo recto en cada uno de sus puntos á la direccion de la resultante de las fuerzas dadas* X, Z, U; y por esta razon se les llama *superficies de nivel*. Si se hace crecer por grados insensibles la constante arbitraria que entra en su ecuacion general, se tendrá una serie infinita de estas superficies que dividirán la masa fluida en una infinidad de capas de un espesor infinitamente pequeño, cada una de las cuales estará comprendida entre dos superficies de nivel, y que se llaman *capas de nivel*.

En los fluidos pesados, por egemplo, las capas de nivel son horizontales; y son esféricas y concéntricas cuando todas las moléculas de la masa fluida son atraidas hácia un punto fijo que sea el centro comun de estas capas.

Esta division de una masa fluida en capas de nivel que conviene tanto á los fluidos incompresibles como á los elásticos, nos va á suministrar un enunciado muy simple de las condiciones de equilibrio de estos fluidos.

506 La (ec. 634) combinada con la (ec. 636) nos da $dp=D\times d\varphi$ (637).

Si el fluido es siempre incompresible, pero heterogeneo, el valor D será variable; más para que el producto $D\times d\varphi$ sea una diferencial exacta, es preciso que el factor D sea una funcion de la variable φ, funcion que puede tener por otra parte la forma que se quiera. Siendo esto así, la presion p será tambien una funcion de φ; luego la presion y la densidad serán constantes siempre que lo sea φ, y por consiguiente serán las mismas para todos los puntos de una misma capa de nivel. Luego *una masa fluida heterogenea no puede permanecer en equilibrio, á ménos que cada una de sus capas de nivel no sea homogenea en toda su estension.* Esta condicion será la única necesaria, cuando el fluido esté contenido en una vasija cerrada por todas partes; si está abierta por un parage, será necesario tambien que la superficie esterior del fluido sea perpendicular á la direccion de la resultante de las fuerzas que le son aplicadas. La ley de la densidad al pasar de una capa á otra, dependerá del valor de D en funcion de φ; cuando el valor de D sea dado se concluirá el de p, integrando la fórmula $D\times d\varphi$.

En el caso en que las fuerzas aplicadas á las moléculas fluidas se reduzcan á una sola dirigida hácia un punto fijo, *será necesario para el equilibrio que la masa entera se componga de diferentes fluidos homogeneos superpuestos en capas esféricas y concéntricas alrededor del centro de accion de la fuerza.*

Resulta tambien que *si se tienen muchos líquidos pesados de diferentes densidades contenidos en una vasija abierta en su parte superior, se verificará el equilibrio cuando todos los líquidos estén superpuestos en capas horizontales*; el espesor y la densidad de cada capa serán arbitrarios: si se tienen dos líquidos por egemplo, bastará para el equilibrio que su superficie de separacion y la superficie que termina el líquido superior sean planos horizontales.

Las condiciones de equilibrio quedarán igualmente satisfechas, sea que el líquido mas denso ocupe el fondo de la vasija, sea que ocupe su parte superior; pero si se atiende á que el equilibrio de un sistema de cuerpos solo puede ser estable ó permanente cuando su centro de gravedad está lo mas bajo posible, pues de lo contrario el equilibrio será instantaneo, será necesario que el líquido ménos denso sea el que sobrenade; porque solo entónces es cuando el centro de gravedad de todo el sistema se hallará lo mas bajo posible; en el caso contrario, cuando por cualquier accidente se separe el sistema algun tanto de la posicion de equilibrio, jamas volverá á este estado.

Cálculo de la presion debida á los fluidos, y uso del areómetro para determinar los pesos específicos de las diversas sustancias.

507 El cálculo de las presiones que los fluidos pesados egercen sobre las paredes de las vasijas que los contienen, es de la mayor importancia; pues este es uno de los puntos que presenta resultados mas notables y de que se hacen mas numerosas aplicaciones.

Para fijar las ideas, supongamos que el agua es el fluido pesado que consideramos, y que está contenida en una vasija ABCD (fig. 173) de una forma cualquiera, abierta en su parte superior, y cuyo fondo ó la base AB es un plano horizontal colocado sobre un plano fijo. El agua se eleva hasta una cierta altura en esta vasija; en el estado de equilibrio, su superficie superior A'B' que se llama su *nivel* es plana y horizontal; tomemos este plano por el de las coordenadas xz, y entónces el ege de las u es vertical; por lo que lo supondrémos dirigido en el sentido de la pesantez que llamarémos g. De este modo, las componentes X y Z son nulas; porque la pesantez que es la sola fuerza que considerarémos no egerce ningun impulso en el sentido de los eges de las x y de las z, y se tiene solamente $U=g$;

por lo que la (ec. 631) se reducirá á $dp=Dg\times du$, siendo D la densidad del agua; que integrando da $p=Dgu$ (638).

No se añade constante porque la presion p debe ser nula en el nivel del agua, donde se tiene $u=0$.

508 Este valor de la presion es el mismo para todos los puntos que están á la misma profundidad debajo del nivel del agua; aumenta con esta profundidad, y es el mayor sobre el fondo de la vasija. Si se espresa por h la altura del nivel A′B′ sobre la base AB de la vasija: por b la superficie de esta base: por P la presion total que sufre; y se observa que todos los puntos de esta base horizontal están igualmente comprimidos, se tendrá $P=bp$ (639),

pues que p es la presion referida á la unidad de superficie; y sustituyendo en vez de p su valor Dgu, resultará $P=Dgub$,

ó llamando h la altura u del nivel del fluido sobre el fondo de la vasija, se tendrá $P=Dghb$ (640).

El producto bh es el volúmen de un cilindro que tiene por base la de la vasija, y por altura la del nivel del agua; el producto $Dghb$ es (164) el peso de este cilindro lleno de agua; luego *la presion que sufre la base es igual al peso de este volúmen de agua.*

509 De donde resulta que *la presion* P *es independiente de la figura de la vasija*; *y que siempre que permanezca la misma el area de su base y la altura de nivel*, *aunque la figura de la vasija tenga la forma que se quiera*, *la presion conservará el mismo valor.*

Así, *si se toman tres vasijas* (fig. 174) *que tengan bases iguales puestas sobre un mismo plano horizontal*, *de las que una se eleve ensanchándose*, *otra encogiéndose*, *y la tercera sea cilíndrica y vertical*, *se llenan las tres de un mismo fluido pesado hasta una misma altura*, *sus bases sufrirán presiones iguales*, *aunque las cantidades de fluido contenidas en estas vasijas puedan ser tan diferentes como se quiera.* Este resultado notable está plenamente confirmado por la esperiencia.

510 Concibamos ahora que sobre el agua en equilibrio en la vasija ABCD (fig. 173), se derrame un nuevo fluido cuya densidad sea D', que su superficie superior A″B″ sea horizontal como la del agua, y que se eleve en la vasija á una altura h' sobre el nivel A′B′ del agua. Estos dos fluidos permanecerán en equilibrio en la vasija; el nuevo fluido egercerá una presion igual sobre todos los puntos de la superficie del agua que forme su base horizontal; y espresando la superficie de la base A′B′ por b', la presion total que sufre esta superficie será igual á $D'gh'b'$,

y se trasmitirá por el intermedio del agua sobre el fondo AB de la vasija. Por lo que resultará sobre este fondo, cuya superficie es b, una nueva presion igual á $D'gh'b$;

luego la presion total que los dos fluidos reunidos egercen sobre la base horizontal de la vasija, es igual á $Dghb+D'gh'b$.

Si se derrama un tercer fluido en la vasija cuya superficie superior A‴B‴ sea plana y horizontal como la de los primeros, el equilibrio no se turbará; y siendo D'' la densidad de este tercer fluido, h'' la altura de su nivel sobre el del segundo, ó sobre A″B″, y b'' la superficie superior de este, se tendrá $D''gh''b''$ para la presion que sufre esta superficie por parte del tercer fluido. Esta presion se trasmite por el in-

termedio del segundo fluido sobre la superficie A′B′ del primero; sobre esta superficie cuya area es b', la presion trasmitida viene á ser $D''gh''b'$; ella se trasmite de nuevo por el intermedio del primer fluido sobre el fondo AB de la vasija, y resulta sobre este fondo una presion igual á $D''gh''b$;
luego la presion total que los tres fluidos superpuestos egercen sobre el fondo de la vasija es igual á $Dghb+D'gh'b+D''gh''b$.

Continuando así esta interposicion de fluidos de diferentes densidades, se determinará la presion que egerce un número cualquiera de ellos en equilibrio en una vasija sobre su base horizontal. *Esta presion solo depende de la estension de esta base, de las alturas de las diferentes capas fluidas y de sus densidades.* En el caso que *la vasija es cilíndrica y vertical*, *esta presion es precisamente igual á la suma de los pesos de todos los fluidos*; ella no muda de valor aunque varíe la forma de la vasija, con tal que no sufra alteracion la base, el espesor ni la densidad de cada capa fluida.

511 Como este resultado es independiente del espesor de las capas fluidas superpuestas, *subsiste igualmente cuando estas capas vengan á ser infinitamente delgadas*, ó lo que es lo mismo, *cuando la densidad de la masa fluida varía de una manera continua*; por consiguiente *este resultado es el mismo para los fluidos elásticos.*

Seria aun verdadero, si la pesantez en vez de ser constante, variase de una capa á la otra con la densidad; lo que sucede cuando la altura vertical de la masa fluida es bastante grande para que la variacion de esta fuerza venga á ser sensible. Así, por egemplo, *la presion que la atmósfera egerce sobre una superficie plana y horizontal*, *es igual al peso de la columna de aire cilíndrica y vertical que tiene por base esta superficie*, *y que se estiende hasta el límite de la atmósfera.*

Supongamos ahora que *una de las paredes de un vaso lleno de agua, es plana y no horizontal*; y *propongámonos determinar la presion que sufre.* Como todos los puntos de esta pared inclinada no están igualmente comprimidos, descompongámosla en elementos infinitamente pequeños; sea ω uno de sus elementos, y u la distancia al nivel del agua en el vaso; la presion sobre este elemento estará espresada (508) por $Dgu\omega$.

Como las presiones de todos los elementos son fuerzas perpendiculares á la pared y paralelas entre sí, se tendrá su resultante tomando su suma ó tomando la integral de $Dgu\omega$, estendida al area entera de la pared. Pero en virtud de las propiedades del centro de gravedad (174), la integral de $u\omega$ es igual al producto $au_{,}$, espresando por a la superficie de la pared, y siendo $u_{,}$ la distancia de su centro de gravedad al nivel del agua; luego á causa de que los factores D y g son constantes, la integral de $Dgu\omega$ ó la presion sobre la pared será igual á $Dgau_{,}$; resultado que nos [illegible] que *esta presion solo depende de la estension de la area y de la profundidad de su centro de gravedad sobre el nivel del agua*; si se hace girar esta pared alrededor de su centro de gravedad, *la presion que sufre permanecerá siempre la misma, é igual al peso de un cilindro de fluido que tiene por base la pared y por altura la distancia de su centro de gravedad al nivel del fluido.*

Cuando la vasija contenga muchos fluidos de diferentes densidades, se considerará cada fluido en particular y se determinará la presion que egerce sobre la pared, sea directamente, sea por el intermedio de los otros fluidos colocados debajo de él; y la suma de todas estas presiones será la presion total que sufre toda la pared.

513 Tambien puede ocurrir el tener que determinar el *centro de presion*, es decir, el punto en que encuentra á la pared la resultante de las presiones de todos sus elementos, que es el punto donde se puede reputar aplicada la presion total. Pero como las presiones de los elementos son fuerzas paralelas, el punto de aplicacion de esta resultante se determinará en cada caso particular por la teoría de los momentos de estas fuerzas. *Si todos los puntos de la pared estuviesen igualmente comprimidos, el centro de presion se confundiria con el centro de gravedad*; pero como la presion aumenta con la distancia al nivel del fluido, se sigue que *el centro de presion estará siempre mas bajo que el centro de gravedad.* Un egemplo bastará para manifestar cómo se determina la posicion del primero de estos dos centros.

Supongamos que la pared inclinada es un trapecio CDC′D′ (fig. 175) cuyas bases paralelas CD y C′D′ son horizontales; sea CD$=m$, C′D′$=f$, prolonguemos los dos lados C′C y D′D hasta que se corten en un punto K, y tiremos desde este punto sobre las bases una perpendicular que las corte en los puntos H y h, y tendrémos que Hh será la altura de este trapecio que llamarémos a. Concibamos por esta linea Hh un plano vertical, cuya interseccion con el fondo de la vasija sea la recta AB, y con el nivel del agua la ab. Si dividimos el trapecio en una infinidad de capas horizontales de un ancho infinitamente pequeño, la presion será la misma sobre todos los puntos de una misma capa; por consiguiente podrémos tomar estas capas por los elementos de la pared. Sea pues $cdd'c'$ uno de estos elementos; espresemos por x su distancia á la base CD, es decir, la parte Hl de la perpendicular Hh, siendo l el punto en que esta perpendicular corta á la linea cd; el ancho de este elemento ó la distancia de las dos paralelas cd y $c'd'$ será dx, y su area tendrá por espresion (II. 624) el producto de la una de estas lineas multiplicada por dx. Para calcular el valor de cd, se tiene la proporcion (I. 482) cd:CD::lK:HK, que da $cd=\dfrac{\text{CD}\times l\text{K}}{\text{HK}}$;

que haciendo HK$=z$, y observando que CD$=m$, y lK$=z-x$, se tendrá $cd=\dfrac{mz-mx}{z}$.

Cuando $x=\mathrm{H}h=a$, se tiene $cd=\mathrm{C'D'}=n$, de donde sale $n=\dfrac{mz-ma}{\;}$; despejando en esta ecuacion el valor de z y sustituyéndole en el precedente, resulta $cd=\dfrac{ma-mx+nx}{a}$.

Multiplicando esta cantidad por $\mathrm{d}x$ para tener el area del elemento $cdd'c'$, y despues por Dgu, tendrémos que la presion que sufre este elemento será $\dfrac{Dg}{a}(ma-mx+nx)u\mathrm{d}x$,

y la presion sobre el area entera $\mathrm{CDD'C'}$ será igual á la integral de esta cantidad, tomada desde $x=0$ hasta $x=a$.

Ademas, se sigue de la teoría de las fuerzas paralelas (174) que si se multiplica la presion sobre el elemento $cdd'c'$ por la distancia x de este elemento á la recta CD, y se efectúa la suma de los productos semejantes por todos los elementos, esta suma será igual á la presion total multiplicada por la distancia del centro de presion á la misma recta CD; luego llamando $x_{,}$ esta distancia desconocida, tendrémos

$$x_{,}\times \mathrm{S}.\frac{gD}{a}\times(ma-mx+nx)\times u\mathrm{d}x=\mathrm{S}.\frac{gD}{a}(ma-mx+nx)\times ux\mathrm{d}x \quad (641),$$

tomando ambas integrales desde $x=0$ hasta $x=a$.

514 En esta ecuacion u es la distancia del elemento $cdd'c'$ al nivel del agua, es decir, la perpendicular lf tirada desde el punto l á la linea ab.

Para efectuar las dos integraciones, es necesario tener el valor de u en funcion de x; pero espresando por α el ángulo $\mathrm{H}h\mathrm{B}$ que mide la inclinacion del plano de la pared sobre el fondo de la vasija, y por β la distancia de la base superior CD al nivel del agua, tirando por el punto H la $\mathrm{H}o$ paralela á la linea ab que corte á la recta lf en el punto o, tenemos $of=\mathrm{HF}=\beta$, $o\mathrm{H}l=\mathrm{H}h\mathrm{B}=\alpha$, $ol=\mathrm{H}l\times\mathrm{sen}.o\mathrm{H}l=x\,\mathrm{sen}\,\alpha$, de donde resulta $u=lf=\beta+x\,\mathrm{sen}.\alpha$;

poniendo este valor de u en la ecuacion precedente, y suprimiendo los factores D, g y a que son constantes y comunes á los dos miembros, resulta

$$x_{,}\mathrm{S}.(ma-mx+nx)(\beta+x\,\mathrm{sen}.\alpha)\mathrm{d}x=\mathrm{S}.(ma-mx+nx)(\beta x+x^2\,\mathrm{sen}.\alpha)\mathrm{d}x \quad (642),$$

ecuacion de que se saca tomando las integrales en los límites prescritos

$$x_{,}=\frac{2a\beta(m+2n)+a^2(m+3n)\mathrm{sen}.\alpha}{6\beta(m+n)+2a(m+2n)\mathrm{sen}.\alpha} \quad (643).$$

515 Este valor de $x_{,}$ *basta para determinar la posicion del centro de presion*; porque no hay duda en que este punto se debe hallar sobre la recta $\mathrm{E}e$ que une los medios E y e de las dos bases CD y C'D'; pues que esta recta divide á todos los elementos del trapecio CDD'C' en dos partes iguales; luego tirando en el plano de este trapecio una para-

lela á la base CD á una distancia de esta base igual con $x_{,}$, el punto en que esta paralela corte á la linea Ee será el centro de presion pedido.

Cuando el ángulo α es nulo, la pared es horizontal, el centro de presion debe entónces coincidir con el centro de gravedad; y en efecto el valor de $x_{,}$ se reduce á $x_{,}=\dfrac{a(m+2n)}{3(m+n)}$,

que es en efecto la misma que sacámos (189) para la distancia del centro de gravedad del trapecio CDD′C′ á su base CD.

516 Conservando α un valor cualquiera, si la base CD está á flor de agua, se tiene $\beta=0$, y la (ec. 643) se convertirá en $x_{,}=\dfrac{a(m+3n)}{2(m+2n)}$ (644);

de manera que en este caso dicho valor es independiente de la inclinacion de la pared. El trapecio CDD′C′ se convierte en un paralelogramo, cuando CD=C′D′, ó $m=n$, y entónces este valor de $x_{,}$ se reduce á $x_{,}=\frac{2}{3}a$; de donde se concluye que *el centro de presion sobre un paralelogramo, de que uno de los lados está á la flor del agua*, *se halla sobre la recta que une los medios de las dos bases horizontales*, *á los dos tercios de esta linea partiendo de la base superior*.

517 El mismo trapecio se convierte en triángulo si una de las dos bases CD y C′D′ se supone nula: haciendo sucesivamente $n=0$, $m=0$, se tendrá $x_{,}=\frac{1}{2}a$, $x_{,}=\frac{3}{4}a$;
en el primer caso la base CD del triángulo está á flor del agua, y entónces *el centro de presion ocupa el medio de la recta que une el vértice y el medio de esta base*; en el segundo caso, el vértice está á flor del agua, la base C′D′ opuesta á este vértice es horizontal, y *el centro de presion se halla sobre la recta que une el vértice y el medio de esta base*, *á los tres cuartos de su longitud partiendo del vértice*. Y siempre se verifica en todos estos casos particulares que *el centro de presion sobre una pared inclinada está mas bajo que el centro de gravedad del area de esta pared*.

518 Cuando un cuerpo sólido está sumergido en todo ó en parte en un fluido pesado, sufre en todos los puntos de la parte sumergida de su superficie una presion perpendicular á esta superficie y dirigida de fuera á dentro. La presion total que sufre una porcion plana de esta superficie se determinará del mismo modo que la presion que se verifica sobre una pared plana de la vasija que contiene el fluido; si esta porcion de superficie es curva, será necesario para determinar su presion total dividirla en elementos infinitamente pequeños: descomponer su presion sobre cada elemento en tres fuerzas paralelas á eges rectangulares: buscar despues con el auxilio del cálculo integral, la resultante de las fuerzas dirigidas segun cada ege y el punto de aplicacion de esta resultante: y por último reducir si es posible las tres resultantes que se hayan obtenido á una sola fuerza que será la presion pedida. Para esta

investigacion se simplifica mucho, cuando se trata de hallar la resultante de las presiones que el fluido egerce sobre la superficie entera del cuerpo sumergido; porque entónces *es inútil tener en consideracion las componentes horizontales de las presiones elementales á causa de que estas componentes se destruyen de dos en dos, cualquiera que sea la forma del cuerpo.*

Para demostrarlo sea BCD (fig. 176) el cuerpo de que se trata; espresemos por x, z, u las coordenadas de un punto cualquiera m de su superficie; y tomemos como ántes el plano horizontal del nivel del fluido por el plano de las xz, y el ege de las u vertical y dirigido en el sentido de la pesantez; consideremos una porcion de esta superficie infinitamente pequeña en sus dos dimensiones, terminada por una curva cualquiera y que corresponde al punto m; representemos siempre por ω el area de este elemento, y por $p\omega$ la presion que sufre, siendo p la presion referida á la unidad de superficie; el valor de p será el mismo en el estado de equilibrio (506) para todos los puntos que están á la misma distancia u del nivel del fluido, ya sea este fluido estancado homogeneo ó ya se componga solo de capas horizontales homogeneas. Llamemos aun α, β, γ, los ángulos que la direccion de la presion $p\omega$ ó la normal mn á la superficie del cuerpo, forma con los eges de las x, z, u: de modo que $p\omega\cos.\alpha$, $p\omega\cos.\beta$, $p\omega\cos.\gamma$, sean las componentes de esta fuerza segun estos eges. En fin, supongamos que se proyecte el elemento ω sobre los tres planos de las coordenadas, y espresemos sus proyecciones por a sobre el plano de las zu: por b sobre el de las xu: y por c sobre el de las xz. Observando que el plano tangente al punto m ó el plano perpendicular á la recta mn, es la prolongacion indefinida del elemento ω, será (II. 340) $a=\omega\cos.\alpha$, $b=\omega\cos.\beta$, $c=\omega\cos.\gamma$.

Multiplicando estas ecuaciones por p, resulta

$$pa=p\omega\cos.\alpha,\ pb=p\omega\cos.\beta,\ pc=p\omega\cos.\gamma;$$

luego pa, pb, pc son las componentes segun los eges de las x, z, u de la presion $p\omega$; lo que hace ver que *la componente de esta presion, perpendicular á un plano cualquiera, se deduce de la misma presion, remplazando el elemento ω por su proyeccion sobre este plano.*

519 Pero estando el cuerpo terminado por todas partes, hay necesariamente al ménos un segundo elemento de su superficie que tiene sobre un plano dado la misma proyeccion que el elemento ω. Es decir, que si prolongamos en lo interior del cuerpo todas las perpendiculares tiradas desde el contorno del elemento ω sobre el plano de las zu, ellas encontrarán otra vez á la superficie de dicho cuerpo; luego determinarán sobre esta superficie un segundo elemento que espresarémos por ω', y que tendrá la misma proyeccion que ω sobre el plano de las zu.

Estos dos elementos ω y ω' estarán á la misma distancia u del nivel del fluido; luego las presiones que sufren estarán representadas por $p\omega$ y $p\omega'$, luego sus componentes paralelas al ege de las x serán iguales entre sí, y estarán representadas por pa, pues que a es la proyeccion comun de ω y ω' sobre el plano de las zu. Por otra parte como las presiones normales $p\omega$ y $p\omega'$ obran de fuera á dentro del cuerpo, se sigue que sus componentes segun una recta cualquiera, se dirigen en sentido contrario la una de la otra; luego las componentes de estas dos presiones paralelas al ege de las x se destruyen recíprocamente. En la figura, el elemento ω' corresponde al punto m'; la presion $p\omega'$ obra en la direccion de la normal $m'n'$, y su componente segun la direccion de la recta $m'm$ del punto m' hácia el punto m; al contrario, la componente pa de la presion $p\omega$ se dirigirá segun esta recta mm', pero de m hácia m'.

520 Si se prolongan del mismo modo las perpendiculares tiradas del contorno de ω sobre el plano de las xu, hasta que encuentren otra vez á la superficie del cuerpo, se determinará un elemento ω'' de esta superficie, cuya proyeccion sobre el plano de las xu será b como la de ω. La componente paralela al ege de las z de la presion $p\omega''$ que se verifica sobre este elemento, será igual y contraria á la componente paralela al mismo ege de la presion $p\omega$ que se verifica sobre el elemento ω; luego estas dos componentes se destruirán recíprocamente; por consiguiente las dos componentes horizontales de la presion $p\omega$ quedan destruidas, la una por la componente segun el ege de las x de la presion $p\omega'$, y la otra por la componente segun el ege de las z de la presion $p\omega''$. De este modo *las presiones horizontales que el fluido egerce sobre todos los elementos de la superficie del cuerpo, se destruyen mutuamente en cada capa ó seccion horizontal de este cuerpo.*

521 Para hallar la resultante de las componentes verticales de estas presiones elementales, supondrémos que se prolonguen las perpendiculares tiradas desde el contorno del elemento ω sobre el plano de las xz, hasta que encuentren de nuevo á la superficie del cuerpo, lo que determinará sobre esta superficie otro elemento $\omega_,$, que tendrá la misma proyeccion horizontal que ω. Estas perpendiculares formarán un cilindro vertical, terminado por una y otra parte en la superficie del cuerpo por los elementos ω y $\omega_,$; su seccion horizontal es igual á la proyeccion c, comun á estos dos elementos; su altura vertical es la distancia de uno de estos elementos al otro, que espresarémos por l, y entónces cl será su volúmen. En la figura, el elemento $\omega_,$ corresponde al punto $m_,$ y l es la longitud de la vertical $mm_,$. Si el cuerpo está enteramente sumergido en el fluido, el cilindro terminado por los elementos ω y $\omega_,$ sufrirá en sus dos estremos presiones normales á la superficie del cuerpo y representadas por $p\omega$ y $p_,\omega_,$: siendo p y $p_,$ las presiones referidas á la unidad de superficie que corresponden á los elementos ω y $\omega_,$, y que no son las mismas, porque estos elementos no se encuentran á una misma distancia del nivel del fluido. Las componentes verticales de estas presiones son pc y $p_,c$, y obran en sentido contrario la una de la otra; la fuerza vertical que coopera á elevar el cilindro es igual al esceso de la presion inferior sobre la presion superior; luego estará espresada por $(p-p_,)c$, suponiendo que ω sea el elemento inferior.

{ Cuando el fluido es homogeneo, se tiene $p-p_{,}=gDl$, siendo g la gravedad y D la densidad; luego entónces la diferencia de las presiones viene á ser $gD\times cl$, es decir, que *es igual al peso de un volúmen del fluido igual al volúmen del cilindro que consideramos*. Dividiendo así el cuerpo en una infinidad de cilindros verticales, resulta que cada uno de estos cilindros será empujado de abajo arriba por una fuerza vertical igual y contraria al peso del cilindro fluido cuyo lugar ocupa; por consiguiente, la resultante de todas estas fuerzas será *tambien igual y contraria al peso entero de la masa fluida, remplazada por el cuerpo*; de manera que espresando por V su volúmen, se tendrá gDV para la intensidad de esta resultante, y esta fuerza se dirigirá de abajo arriba segun la vertical que pasa por el centro de gravedad de la masa fluida desalojada.

{ 522 Aunque háyamos supuesto el cuerpo enteramente sumergido en el fluido, nuestro razonamiento se aplica igualmente al caso en que solo está sumergido en parte; *y en este caso la resultante de las presiones verticales del fluido, es igual al peso de la masa fluida desalojada por la parte sumergida del cuerpo, y que se dirije de abajo arriba segun la vertical tirada por el centro de gravedad de esta masa.*

{ Tambien se puede aplicar el mismo razonamiento *al caso en que el fluido está compuesto de capas horizontales y homogeneas de diferentes densidades.* Para tener la resultante de las presiones verticales que un fluido de esta naturaleza egerce sobre un cuerpo que está sumergido en él en todo ó en parte, se concebirá cada capa homogenea prolongada en lo interior del cuerpo, lo que formará una masa fluida análoga á la que rodea al cuerpo, y del mismo volúmen que su parte sumergida; la presion pedida *será igual al peso de esta masa fluida y aplicada en su centro de gravedad.* }

523 Se llegan á obtener inmediatamente todos estos resultados relativos á las presiones horizontales y verticales por una consideracion indirecta que conviene conocer.

Consideremos un fluido pesado y homogeneo, ó solamente compuesto de capas horizontales y homogeneas en equilibrio en un vaso abierto en su parte superior; el equilibrio no se alterará si se supone que se congela una parte de este fluido; y se puede tomar esta porcion en la superficie ó en lo interior de la masa entera. En ambos casos se tendrá un cuerpo sólido pesado suspendido y en reposo en el resto del fluido; luego es necesario que *las presiones normales que el fluido egerce sobre la superficie de este cuerpo, se reduzcan á una sola fuerza igual y contraria al peso del fluido congelado.* Pero si se remplaza este cuerpo sólido por otro, que sea exactamente de la misma forma, este sufrirá en todos sus puntos las mismas presiones que el primero; de donde se infiere 1.° que *las presiones que un fluido pesado egerce sobre todos los puntos de la superficie de un cuerpo sólido sumergido en él, tienen una resultante única*; 2.° que *esta resultante es vertical y dirigida de abajo* *arriba*; 3.º que *es igual al peso de la porcion de fluido desalojado por el cuerpo*; 4.º que *está aplicada al centro de gravedad de esta porcion de fluido*: resultados que van conformes con los de los números precedentes, y que comprenden á un mismo tiempo el caso en que una parte del cuerpo sobrenada, y aquel en que todo el cuerpo está sumergido en el fluido.

524 Conociendo en magnitud y direccion la resultante de las presiones que un fluido pesado egerce sobre un cuerpo sólido, es fácil deducir de ellas las condiciones de equilibrio de este cuerpo, teniendo en consideracion su peso y esta resultante. En todos los casos estas condiciones se reducirán á dos: primera que *el centro de gravedad del cuerpo y el de la porcion de fluido desalojado estén sobre una misma vertical*; y segunda que *el peso de esta porcion de fluido sea igual al peso del cuerpo*. Estas dos condiciones bastan y son necesarias para que la resultante de las presiones y el peso del cuerpo se hagan equilibrio.

Cuando el cuerpo es homogeneo, y se halla enteramente sumergido en un fluido igualmente homogeneo, la primera condicion está siempre satisfecha: porque entónces los dos centros de gravedad coinciden; luego basta para que este cuerpo no tome ningun movimiento que *su peso sea igual al del fluido que desaloja*; y como el volúmen del fluido y el del cuerpo son los mismos, esta condicion se reduce á que *sus densidades sean iguales. Si las densidades son diferentes, el cuerpo subirá ó bajará, segun sea su densidad menor ó mayor que la del fluido*; en el primer caso para mantenerle en reposo, se fijará al fondo del vaso por medio de un hilo inestensible; y en el segundo, suspendiéndole al estremo inferior de un hilo semejante unido por su otro estremo á un punto fijo. Pero si suponemos en este segundo caso que el punto de suspension se tome sobre un platillo de una balanza, entónces este platillo solo sostendrá una parte del peso del cuerpo, á saber, *el esceso de su peso entero sobre el que represente la resultante de las presiones verticales del fluido*; luego *solo se deberá poner en el otro platillo de la balanza para tenerla en equilibrio un peso igual á la diferencia de estos dos pesos*; de donde se infiere este principio de Hidrostática que *un cuerpo pesado en un fluido, pierde en él una parte de su peso igual al peso del fluido que desaloja.*

525 Cuando un cuerpo tiene menor densidad que el fluido en que se sumerge, sobrenada ó flota sobre él. Es importante saber distinguir el equilibrio estable de un cuerpo flotante del que no lo es. Cuando el cuerpo está dividido por un plano vertical CED (fig. 177) en dos partes perfectamente semejantes en forma y densidad, si se supone ademas que se separa este cuerpo de su posicion de equilibrio, de modo que esta seccion CED permanezca vertical, y que despues de haberla separado se le abandona sin imprimirle ninguna velocidad inicial, *la seccion CED permanecerá en un mismo plano vertical durante el movimiento del cuerpo*; porque siendo semejante todo por una y otra parte

de esta seccion, no hay razon para que salga jamas del plano vertical donde se hallaba en el orígen. Por la misma razon el centro de gravedad del fluido desalojado será siempre un punto de la seccion CED, así como el centro de gravedad del cuerpo entero. Sea pues G este último centro, sea tambien en la posicion de equilibrio O el centro de gravedad del fluido desalojado, y AB la interseccion del nivel del fluido con el plano CED; en esta posicion *la recta GO que une los dos centros es vertical*, y por consiguiente perpendicular á la recta AB; ella se inclina en general cuando se separa el cuerpo de esta posicion y al mismo tiempo el centro de gravedad de la parte sumergida y la linea de interseccion del nivel con el plano CED, mudan de posicion sobre este plano. Si suponemos que este centro y esta linea vengan á ser el punto O′ y la recta A′B′ despues que se ha alterado el equilibrio, las fuerzas que pondrán al móvil en movimiento son el peso del cuerpo que está dirigido segun la vertical GH tirada por el centro de gravedad G, y la resultante de las presiones verticales del fluido sobre la superficie del cuerpo; esta resultante se llama el *empuje* del fluido, es igual al peso del fluido desalojado y obra en el punto O′ en sentido contrario de la gravedad, ó segun la vertical O′H′. Como esta vertical y la recta inclinada GO están en el mismo plano, se cortarán en un cierto punto m: este punto se llama *metacentro*: y para que *el equilibrio de un cuerpo flotante sea estable*, *debe estar el metacentro mas alto que el centro de gravedad*; porque en este caso como la presion del fluido obra en la direccion $O'mH'$, cooperará á ponerle en la posicion vertical; al contrario, si el metacentro se hallase mas bajo que el centro de gravedad, por egemplo en m', la presion obraria en la direccion de $m'H''$ y cooperaria á separar el cuerpo de su posicion vertical; por lo que si el cuerpo está vacío por dentro como sucede en los buques, estaba muy espuesto á llenarse de agua y naufragar: cosa que se debe evitar por todos los medios imaginables.

526 El principio espuesto (524) nos suministra el medio de averiguar los pesos específicos de las diversas sustancias, ya sea por los *areómetros ó pesalicores comunes*, ó por la *balanza hidrostática*, sobre cuyo punto nos hemos estendido lo suficiente en el (§ 169 y siguientes) del Compendio de Mecánica Práctica; pero esto no nos dispensará de manifestar aquí el uso del *areómetro* de *Nicholson* de que se hace un uso frecuente en la Mineralogia, y consiste en un tubo MN (fig. 178) de hoja de lata ó de metal, terminado en su parte superior por una espiga B que lleva en su estremo una cazoleta A.

Hácia el medio de la espiga hay una señal b, que por lo regular está hecha con la lima. La parte inferior tiene suspendido un cono inverso EG cón[illegible] en el parage de su base, y lastreado por dentro con plomo ó mercurio.

El peso del instrumento debe ser tal que cuando se le sumerge en el agua para abandonarlo despues á sí mismo, sobrenade una parte del tubo.

La cazoleta que termina la espiga está unida á ella por medio de un pequeño tubo de hoja de lata que entra á enchufe.

Por lo regular hay otra segunda cazoleta mas ancha que se coloca sobre la primera, en cuya concavidad se introduce por su convexidad. De este modo se puede quitar esta segunda cuando se quiera, sea para retirar mas fácilmente los pesos con que se cargan para hacer alguna mudanza que convenga. Por la parte inferior termina en un cono EG que está bien lastreado á fin de que cuando esté sumergido se halle siempre en una posicion vertical.

Para hacer uso de este instrumento se principia por colocarlo dentro de una vasija PQ, que se llena de agua destilada, y se ponen en la cubeta superior los pesos necesarios para que la señal *b* de la espiga descienda hasta flor de agua; y la cantidad de pesos que es necesario poner para ello, se llama la *primera carga del instrumento.* Despues se quita esta carga, se coloca en la cazoleta el cuerpo cuyo peso específico se quiere averiguar, y ademas se colocan en ella los pesos necesarios para que baje á flor del agua la señal *b*; se resta *esta segunda carga* de la primera, y se tiene el *peso del cuerpo* en el aire libre. Hecho esto, se saca el areómetro y se coloca el cuerpo en la cubeta E, y en la cazoleta A se ponen los pesos necesarios para que la señal *b* baje hasta hallarse á flor de agua; y estos pesos forman la *tercera carga.* Se quita de esta tercera carga la segunda, y la diferencia es la pérdida de peso que ha tenido el cuerpo en el agua, ó lo que es lo mismo, esta diferencia espresa el peso de un volúmen de agua igual al del cuerpo. *Y dividiendo este peso por el del cuerpo, se tiene el peso específico de esta sustancia comparada con el agua.*

Si la sustancia fuese ménos pesada que el agua, seria necesario para que no se elevase sujetarla á la cubeta E por medio de la pieza D.

527 Este medio solo se aplica á las sustancias sólidas que no se disuelven en el agua; para las que se disuelven en ella es preciso pesarlas en espíritu de vino ó en cualquier otro líquido en que no se disuelvan.

528 De todo esto resulta que *si se quiere conocer el verdadero peso de los cuerpos se deben pesar en el vacío.* Porque dos cuerpos que pesados en el aire se equilibran por medio de una balanza exacta, no son iguales en peso, á ménos que no sean del mismo volúmen; pues si tienen volúmenes diferentes, desalojan cantidades de aire diferentes; luego sus pesos están desigualmente disminuidos; y pues que ellos egercen presiones iguales sobre los platillos de la balanza, es necesario concluir que *el peso del cuerpo que tiene mayor volúmen es tambien el mayor.* La esperiencia manifiesta efectivamente que al instante que se trasporta la balanza al vacío, el equilibrio se rompe en favor del cuerpo cuyo volúmen es mayor.

529 Debemos aun observar que cuando un cuerpo suspendido en el aire, se abandona á la accion de la pesantez, su fuerza motriz en este fluido es igual al esceso de su peso sobre el del aire que desaloja de

modo que él está solicitado por una fuerza aceleratriz constante un poco menor que la pesantez en el vacío. Para comparar estas dos fuerzas entre sí, espresemos por g la pesantez en el aire libre, y por G la que se verificaria en el vacío, por V el volúmen del cuerpo, por D su densidad, y por D' la del aire; y tendrémos que VD será su masa, y $GVD-GVD'$ su fuerza motriz; luego dividiendo la una por la otra á fin de obtener la fuerza aceleratriz, resulta $g=G\left(1-\frac{D'}{D}\right)$ (645).

Así, el aire retarda el movimiento de los cuerpos pesados por dos razones distintas: primera, *porque obra sobre ellos como medio resistente*: *lo que produce una fuerza retardatriz dependiente de la velocidad del móvil*; y segunda, *porque disminuye la fuerza aceleratriz constante que obra sobre estos cuerpos*. Hemos indicado que la primera causa no tiene influencia sobre la duracion de la oscilacion entera de un péndulo; pero no sucede lo mismo con la segunda. Esta duracion que es (441) en razon inversa de la raiz cuadrada de la fuerza g, debe depender de la densidad del aire en que el péndulo hace sus oscilaciones, y aumentará con esta densidad. Tambien se sigue que el valor de g que se determina por las observaciones del péndulo hechas en el aire, no es exactamente la intensidad de la pesantez en el vacío; pero por medio de la (ec. 645) se puede calcular el valor de G por el de g, cuando se conozca la relacion $\frac{D'}{D}$ de la densidad del aire á la del cuerpo que se hace oscilar.

Condiciones de equilibrio de los fluidos contenidos en vasos comunicantes; de los niveles y sifones; del barómetro y del manómetro.

530 La consideracion de las capas de nivel nos ha hecho ya conocer las condiciones de equilibrio de diferentes fluidos encerrados en una misma vasija; pero estas condiciones no son suficientes cuando estos fluidos están contenidos en muchos vasos de los que cada uno está abierto en su parte superior, y que se comunican entre sí por aberturas laterales, de modo que los fluidos pueden pasar de un vaso á otro. Si el equilibrio existe en un sistema de fluidos de esta naturaleza, es cierto que no se turbará suponiendo que se cierren las aberturas laterales de los vasos. Este estado no podria subsistir en todo el sistema á ménos que no se verifique separadamente en cada vaso; por lo que será necesario primero *que los fluidos de diferentes densidades, contenidos en un mismo vaso, estén dispuestos por capas horizontales*; estando satisfecha esta condicion, es necesario ademas que exista *una cierta relacion entre las densidades de los fluidos y las alturas de sus niveles en los vasos comunicantes*; y esta relacion es la que se trata ahora de determinar.

Supongamos primero que se tenga un solo fluido homogeneo é incompresible, esparcido en muchos vasos comunicantes, de los que cada uno esté abierto en su parte superior; la condicion de equilibrio en este caso es que *el fluido se eleve á la misma altura*, *ó que tenga el mismo nivel en todos estos vasos*. En efecto, si hubiese una vasija en que se elevase el fluido á una altura mayor que en las otras, la presion no podria ser nula en la superficie libre del fluido en estas; pues seria proporcional á la distancia de esta superficie al nivel mas elevado; por consiguiente seria necesario para el equilibrio que solo el vaso en que el fluido se eleve á la mayor altura fuese el que permaneciese abierto, y que todos los otros estuviesen cerrados por paredes fijas adyacentes á la superficie superior del fluido.

Por lo cual siempre que un fluido, tal como el agua, pueda correr de una vasija á otra, y que se ve sin embargo permanecer en reposo, podemos concluir que *el fluido está entónces á un mismo nivel en los dos vasos*.

El uso que se hace del *nivel de agua* en las operaciones de Geometría Práctica es una aplicacion inmediata de este principio.

531 Estando el agua á un mismo nivel en dos vasos comunicantes ADC y BEF (fig. 179), derramemos en el primero un nuevo fluido cuya densidad sea D', y en el segundo otro fluido cuya densidad sea D'': sea $cdef$ el nivel del agua en los dos vasos, y $c'd'$, $e'f'$ los de los nuevos fluidos, y h', h'' las alturas de estos niveles sobre el del agua. Cualquiera que sea la forma de los dos vasos sobre el nivel $cdef$, la presion que el primer fluido egerce sobre la superficie cd del agua, será igual (ec. 640) con $agh'D'$, siendo a el area de esta superficie y g la gravedad; y la presion que egerce el segundo fluido sobre la superficie ef, será igual á $bgh''D''$, siendo b la superficie de la seccion ef del segundo vaso, y g la gravedad; más para que estas dos presiones no turben el equilibrio del agua, es necesario que sean entre sí como las superficies a y b (§ 487); luego se deberá tener $agD'h':bgD''h''::a:b$;
que multiplicando estremos y medios y suprimiendo las cantidades comunes, resulta $h'D'=h''D''$, que da $h':h''::D'':D'$;
es decir, que *las alturas de los fluidos sobre el nivel primitivo*, *deben ser recíprocamente proporcionales á sus densidades*.

532 Del mismo modo deducirémos que si se tiene un número cualquiera de vasos comunicantes por aberturas laterales, que estén llenos de un fluido, de agua por egemplo, hasta una cierta altura sobre estas aberturas, y hallándose este fluido al mismo nivel en todos los vasos se derraman á un mismo tiempo en cada uno muchos fluidos de diferentes densidades, dispuestos por capas horizontales, bastará y será necesario para el equilibrio, que *la suma de las alturas verticales de estas capas*, *multiplicadas respectivamente por las densidades*, *sea la misma en todos los vasos*.

533 *Para determinar la presion sobre el fondo ó sobre cualquiera otra pared del uno de estos vasos*, *se atenderá solamente á los fluidos*

que contiene, y se hará abstraccion de los que están contenidos en los otros vasos. En efecto, sin turbar el equilibrio y sin mudar nada á las presiones, se pueden concebir cerradas todas las comunicaciones de estos vasos por paredes fijas, y considerar despues cada vaso aisladamente.

534 En vez de derramar un nuevo fluido en los dos vasos ADC y BEF, se hubiera podido concebir cubierta la superficie del uno de estos vasos por una pared móvil, y poner un peso cualquiera sobre ella; dando al fluido derramado en el otro vaso una altura conveniente sobre el nivel del agua, la presion debida á este fluido podrá siempre equilibrarse con este peso por grande que sea, como se ve en la (fig. 180). Un aparato análogo á este colocado convenientemente en un camino, puede servir para pesar á un mismo tiempo los carruages y sus cargas, sin mas operacion que la muy sencilla de ver á que altura se eleva el agua en el tubo, que debe estar dividido de antemano como corresponde.

535 *La presion atmosférica que se egerce sobre la superficie de los fluidos contenidos en vasos comunicantes, no podria turbar jamas el equilibrio de estos fluidos*; porque esta presion es siempre proporcional á la estension de la superficie del fluido en contacto con el aire (487), ó lo que es lo mismo, la presion referida á la unidad de superficie es la misma por todas partes: condicion suficiente y necesaria para que no destruya el equilibrio que se supone. *Pero si el uno de estos vasos se abre en el vacío y los otros en el aire, se turbará el equilibrio, y el fluido se elevará sobre el nivel en el vaso en que no sufre la presion del aire.* Así es, que si los vasos comunicantes ADC y BEF (fig. 179) se suponen ambos abiertos en su parte superior DC y EF, y se derrama en ellos un líquido homogeneo, tal como el agua, el mercurio &c., este fluido se pondrá á nivel en los dos vasos, y permanecerá de este modo á pesar de la presion atmosférica; pero si se hace el vacío en el vaso BEF y se cierra exactamente por su parte superior, el agua se elevará al instante en este vaso, y se bajará al mismo tiempo en el otro. Sea, pues, $e'f'$ (fig. 181) el nivel del agua en el vaso cerrado BEF, y cd el nivel del mismo fluido en la vaso abierto ADC. Sin la presion del aire que se egerce sobre la superficie cd, el nivel en el vaso BEF seria ef, que se halla en el mismo plano horizontal que cd. Luego si espresamos por h la altura del nivel $e'f'$ sobre el ef, la presion referida á la unidad de superficie que la porcion de fluido $efe'f'$ egerce sobre la superficie ef, será igual á Dgh, espresando siempre por D la densidad del fluido, y por g la gravedad; luego para que esta presion se equilibre con la del agua, será necesario que llamando Π la presion atmosférica se tenga $Dgh = \Pi$ (646).

Esta ecuacion nos da á conocer que *la elevacion de los fluidos sobre su nivel producida por la presion del aire, no depende ni de la estension de la superficie que sufre esta presion, ni de la forma de los vasos en que están contenidos estos fluidos, sino únicamente de la densidad de cada fluido*; y *que si la presion del aire permanece la misma, la* *elevacion de un fluido cualquiera está en razon inversa de su densidad.*

536 Cuando el fluido de que se hace uso es el mercurio, y detras de la columna BEF se pone una escala por cuyo medio se pueda averiguar en todas ocasiones la altura del nivel del mercurio $e'f'$ en el brazo BEF que está cerrado en la parte superior EF sobre el nivel *cd* ó *ef* del mismo mercurio en el brazo ADC que sufre la presion atmosférica, se tiene el instrumento meteorológico que se conoce con el nombre de *barómetro*, y está representado en la (fig. 182). Por medio de este instrumento se conoce á cada instante la presion atmosférica; esta es mayor á proporcion que se coloca el barómetro mas próximo á la superficie de la tierra, ó con mas propiedad, á su centro; porque entónces carga una columna mayor de aire sobre la superficie del mercurio, y por consiguiente es menor á proporcion que se coloca el barómetro á mayor distancia; por lo cual se hace uso de él para medir alturas, como manifestarémos despues.

Diversas circunstancias, tales como los vientos, la temperatura, la cantidad de agua que tiene el aire en disolucion &c., hacen variar en un mismo parage el peso Π de la columna atmosférica. Por lo que la altura del mercurio en el barómetro debe variar en la misma relacion; pero en un mismo parage las variaciones tienen sus límites respectivos. En el ecuador, á la orilla del mar, la variacion total de la altura del barómetro no llega á cuatro lineas; pero hácia los polos llega hasta dos pulgadas y aun mas. En Madrid las variaciones se pueden reputar en pulgada y media, es decir, que la mayor altura del barómetro solo se diferencia en pulgada y media de la menor que puede tener. La mayor altura que se observó en el año de 1800, reducidas todas las observaciones á la temperatura de 15° del termómetro centígrado, ó 12° del de Reaumur, fue de 30 pulgadas 11,75 lineas españolas; la menor fue de 29 pulgadas 10,42 lineas españolas; y la altura media fue de 30 pulgadas 6,5 lineas españolas (*).

537 La altura media en Paris al nivel del Sena es de $0^m,76$ ó 28 pulgadas y 0,2 lineas francesas, y la temperatura media es de 12°.

La altura media del barómetro en el nivel del océano á la latitud de 50° de la division sexagesimal, determinada por las observaciones de Mr. *Schuckhurg* que están reputadas por muy exactas, es de 0,7629 metros, ó 28 pulgadas 2,2 lineas francesas que equivalen á 32,85586 pulg. esp.

Si suponemos en equilibrio la gran masa de aire que compone nuestra atmósfera, en todos los puntos de la superficie del mar causará la at-

(*) *Todos estos resultados están deducidos con la mayor exactitud por D. Juan de Peñalver que es uno de los sabios que con mas acierto han trabajado sobre este importante asunto. Pero por su método se esplica con mucha facilidad, por qué las variaciones de altura de nivel en el barómetro son muy pequeñas en el ecuador, y tan grandes en los polos: sobre cuyo punto nada se ha manifestado aun por los sabios de Europa.*

mósfera una misma presion; por consiguiente Π será igual en todos los puntos de esta superficie; luego si colocamos dos barómetros en dos distintos parages de esta misma superficie y espresamos por g' la gravedad, y por h' la altura á que se eleva el barómetro en aquel parage, respecto á que la densidad del mercurio la suponemos tambien igual, la (ec. 646) nos dará $Dgh=\Pi=Dg'h'$, que da $g:g'::h':h$; que nos dice que *en [illegible] del mar*, suponiendo la atmósfera en equilibrio, *las alturas del mercurio en el barómetro estarán en razon inversa de las gravedades que se verifiq[illegible] en aquellos parages, segun sus respectivas latitudes.*

538 De esta proporcion se deduce $h=\frac{g'h'}{g}$ ([illegible]7);

por cuyo medio podrémos averiguar la altura media del barómetro en un parage cualquiera al nivel del mar; puesto que conocemos la altura h' á la latitud de 50° sexag. y nos es fácil conocer por la fórmula (ec. b ó c) de la nota del (§ 162) los valores de g y g'.

Para dos líquidos cuyas densidades fuesen D, D', y h, h' las alturas de las columnas líquidas que se equilibran con la misma presion en un mismo parage, la (ec. 646) nos dará

$$Dgh=\Pi=D'gh' \quad (648), \text{ que da } h:h'::D':D;$$

que nos manifiesta que *las alturas á que se sostienen los líquidos por la presion atmosférica están en razon inversa de las densidades de los líquidos.* Luego pues que la altura media del barómetro en Madrid se puede reputar de 30,54 pulgadas españolas = 2,545 pies, y la densidad del mercurio es á la del agua como 13,568 es á 1, tendrémos que la altura media á que se podrá elevar el agua en Madrid, á causa de la presion atmosférica, en un tubo que estuviese cerrado por la parte superior, resulta ser de $2{,}545\times13{,}568=34{,}53$ pies españoles.

539 *Todo lo que hemos manifestado sobre el equilibrio de los fluidos pesados en los vasos comunicantes, conviene igualmente á los fluidos contenidos en los tubos recurvos.* El agua ó cualquier otro líquido pesado permanecerá en equilibrio en un tubo ACB (figs. 183 y 184) compuesto de dos brazos AC y BC abiertos por arriba, si dicho fluido está á nivel en ambos brazos. Si estando abiertos los dos brazos se coloca el tubo ACB en una posicion inversa (fig. 185), el agua podrá aun mantenerse en equilibrio en virtud de la presion atmosférica que se egerce de abajo arriba en cada brazo y que se opone á que baje el agua; pero suponiendo que el fluido ocupe la parte aCb del tubo, será necesario que los dos puntos estremos a y b se hallen en un mismo plano horizontal; y que la altura vertical del vértice C del tubo sobre este plano, sea menor [illegible] altura á que la presion del aire puede elevar y soster[illegible] (638) al fluido [illegible] sobre su nivel; pues de lo contrario el ag[illegible] bajaria á un mismo tiempo en los dos brazos AC y BC forman[illegible] un vacío en el vértice.

Debemos observar ademas que *el equilibrio del agua en un tubo inverso solo es instantaneo; de modo que si el fluido baja algun tanto en uno de los brazos y sube al mismo tiempo en el otro, continuará indefinidamente bajando por el primero y subiendo por el segundo.* En efecto, supongamos que el estremo a baje hasta a' y que el estremo b haya subido á b'; de manera que el fluido llene ahora la parte $a'Cb'$ del tubo ACB; tiremos por los puntos a' y b' las horizontales ae' bf' que encuentren á la vertical Cc en los puntos e y f; hagamos $Ce=h$, $Cf=h'$; espresemos por D y g la densidad del fluido y la gravedad, y del mismo modo que ántes por Π la presion atmosférica referida á la unidad de superficie; la presion que se egerce en el punto a' y que intenta hacer subir el fluido en el brazo AC, será el esceso de la presion Π sobre la porcion Ca' del fluido; luego será igual á $\Pi-gDh$;
por la misma razon la presion en el punto b' es igual á $\Pi-gDh'$,
y coopera á hacer subir el fluido en el brazo BC; pero á causa de ser $h'<h$, la segunda cantidad es mayor que la primera; luego la presion que se egerce de abajo arriba en el punto b' escederá á la que se verifica en a', y por consiguiente el fluido bajará por el brazo AC.

Cuando el tubo se halla en la posicion recta de las (figs. 183 y 184) el equilibrio es permanente ó estable; de modo que si se baja en uno de los brazos por debajo de su nivel, y se eleva en el otro sobre el mismo nivel, él tratará de volver á su posicion de equilibrio y hará en ambos brazos una serie indefinida de oscilaciones.

540 Ahora será muy fácil comprender el mecanismo del *sifon*, instrumento que se usa para trasegar los líquidos, y consiste simplemente en un tubo recurvo del cual uno de sus brazos es mas largo que el otro.

Sea ab (fig. 186) el nivel del líquido en el vaso que se trata de vaciar; se sumerge en este líquido el brazo mas corto CB del sifon ACB; se aspira despues el aire contenido en este tubo (ó ántes de colocarlo se ha llenado el tubo del líquido que se quiere trasegar) y al instante la presion atmosférica que se egerce sobre la superficie ab, hace subir al líquido en el brazo CB, y que se eleve hasta el vértice C, con tal que su altura sobre el nivel ab ó la perpendicular Cc tirada desde este punto sobre la superficie ab no esceda á la altura á que el fluido puede estar sostenido por la presion del aire; llegado al punto C, el fluido vuelve á bajar por el brazo CA y cae en otro vaso por el estremo A.

Durante este paso el nivel ab se baja, y la altura Cc aumenta; luego será necesario para que este paso no sea interrumpido, que esta altura no llegue al límite que le está señalado (ec. 646).

541 La pesantez es la sola fuerza que hemos considerado hasta ahora para el equilibrio de los fluidos; pero ademas se debe tener en consideracion que cuando los tubos son muy estrechos se nota una elevacion ó depresion segun las paredes de los tubos tengan mas ó ménos atraccion con las partículas fluidas que la que tienen estas entre sí. A estos tubos estrechos se les caracteriza con el nombre de *tubos capilares*. La espe-

riencia prueba que el nivel se eleva en un tubo de vidrio sumergido en el agua; y que al contrario el nivel del mercurio se baja en el mismo tubo. Laplace es el Geómetra que ha publicado una teoría matemática y completa de la *capilaridad* en su Mecánica celeste.

542 Si suponemos que el brazo AC del tubo en un barómetro se pone debajo de un vaso cerrado de pequeñas dimensiones, y lleno de aire ó de un gas cualquiera, veremos que se puede hacer abstraccion del peso de esta pequeña porcion de fluido; pero en razon de su elasticidad este gas egerce una cierta presion sobre las paredes del vaso, que es la misma en todos sus puntos (494); la presion que egerce sobre la superficie del mercurio en N (fig. 182) es la que le sostiene encima del nivel *h* en el brazo BC; por consiguiente llamando *h* la altura del mercurio, y *m* la densidad del gas, el producto *gmh* será la medida de la presion del gas, debida á su elasticidad y referida á la unidad de superficie; es decir, la medida de lo que se llama *fuerza elástica* del gas.

El aparato que sirve para medirla se llama *manómetro*; el cual consiste en un barómetro ordinario ABC, cuyo brazo abierto CA se comunica con una vasija cerrada, en la cual se coloca el gas ó vapor cuya fuerza elástica se quiere conocer. La altura del mercurio en un barómetro, cuyo brazo abierto comunique con la atmósfera, da la medida de la fuerza elástica del aire en el punto en que el fluido está en contacto con el mercurio; porque si se cierra la abertura A del tubo ACB sin mudar nada al estado del aire contenido en el brazo AC, el equilibrio del mercurio y de este aire no se turbará; luego la fuerza elástica de esta porcion de aire AC hace equilibrio con la presion de la columna de mercurio; luego esta fuerza elástica tiene por medida el producto *gmh*.

543 *La fuerza elástica de una porcion de aire contenido en una vasija cerrada*, *no varía en tanto que este aire conserve la misma densidad y la misma temperatura*; luego si se trasporta un manómetro de un lugar á otro, y se tiene cuidado de no mudar en manera alguna el estado del aire que contiene, el producto *gmh* que mide la fuerza elástica de este aire, no deberá mudar tampoco; por consiguiente si la gravedad g varía de un lugar á otro, la altura *h* del mercurio variará en razon inversa, suponiendo que la densidad *m* de este fluido no mude; donde se ve de qué modo las *variaciones de las alturas del mercurio en el manómetro*, *pueden hacer sensibles las de la pesantez en la superficie de la tierra y servir aun para determinarla.*

544 La esperiencia ha enseñado que *permaneciendo la misma temperatura*, *la fuerza elástica de un mismo gas es proporcional á su densidad.*

Así, si se tiene un gas cualquiera contenido en un vaso vertical, cubierto en su parte superior con un émbolo que le cierre exactamente, y este émbolo se carga con un peso dado *P*, comprendiendo en este peso el del mismo émbolo, y se sustituye sucesivamente á *P*, una serie de pesos 2*P*, 3*P*, 4*P* &c., el gas *se comprime cada vez mas*; y la esperiencia prueba que *su volúmen se reduce sucesivamente á la mitad*, *al tercio, al cuarto &c. de lo que era ántes*; luego *su densidad* (163) *viene á ser al contrario dupla, tripla, cuádrupla &c. de su densidad primitiva*; es decir, que *la densidad crece en la misma relacion que el peso comprimente.*

545 Supongamos ahora que permaneciendo el mismo el peso P, se eleve la temperatura del gas sometido á la presion; este gas se dilatará; su volúmen crecerá y su densidad disminuirá; pero por los esperimentos de *Gay-Lussac* se sabe, primero, que *todos los gases se dilatan uniformemente, al ménos en el intervalo de la temperatura del hielo á la del agua hirbiendo, ó sea desde* 0° *hasta* 100° *del termómetro centígrado ú* 80° *del de Reaumur*; segundo, que *la dilatacion debida á un mismo aumento de temperatura es exactamente la misma para todos los gases, vapores ó mezclas de gases y vapores*; tercero, que *tomando por unidad el volúmen del gas á la temperatura cero, la dilatacion comun es de* 0,00375 *por cada grado del termómetro centígrado, de modo que á la temperatura* τ *este volúmen estará espresado por* $1+0,00375\tau$.

Aunque esta ley de dilatacion solo está verificada por la esperiencia entre los límites 0° y 100°, podemos estenderla por analogía fuera de estos límites, y suponer que τ representa aquí un número de grados del termómetro centígrado, positivo cuando la temperatura está sobre cero, y negativo cuando es inferior. Se puede referir este volúmen $1+0,00375\tau$ á su estado primitivo, sea refiriendo la temperatura á cero, sea mudando el peso P que comprime el gas sin mudar la temperatura; por este segundo modo será necesario sustituir al peso P un peso $P(1+0,00375\tau)$, que será la medida de la fuerza elástica del gas referida á su densidad primera; de donde se concluye que *permaneciendo el mismo volúmen y la misma densidad de un gas cualquiera, su fuerza elástica aumenta en la misma relacion que su temperatura.*

546 Si por una parte la fuerza elástica de un gas es proporcional á su densidad cuando la temperatura no varía, esta fuerza queda en la misma relacion que la temperatura cuando la densidad permanece la misma; luego se puede deducir la intensidad de esta fuerza en funcion de estos dos elementos, suponiéndolos ambos variables. Por lo que si llamamos D la densidad, τ el número de grados del termómetro centígrado que señala la temperatura, y p la fuerza elástica del gas ó la presion que egerce sobre la unidad de superficie, tendrémos

$$p=aD(1+0,00375\tau) \quad (649),$$

siendo a la relacion de la fuerza elástica con la densidad á la temperatura cero. Este coeficiente a es constante para un mismo fluido elástico; pero varía de un fluido á otro, y se debe determinar por la esperiencia para cada gas en particular.

Uso del barómetro para la medicion de las alturas.

547 Puesto que la causa de la elevacion del mercurio en el barómetro es el peso del aire sobre la superficie del mercurio que hay en la cu-

beta, resulta que si colocamos dos barómetros á un mismo tiempo en dos parages que disten desigualmente del centro de la tierra, como sobre el que diste mas de dicho centro cargará ménos aire que sobre el otro, la altura del barómetro será menor en el parage que esté mas elevado; y lo que nos proponemos ahora es deducir una fórmula general para poder determinar la diferencia de las alturas verticales de dos parages distintos por la diferencia de las alturas del mercurio en el barómetro: asunto que es de la mayor importancia, pues de este modo se pueden medir alturas con una precision estraordinaria, con ménos gastos, aparato y pérdida de tiempo, que lo que exigen las operaciones trigonométricas.

Para esto consideremos en la masa de aire que compone la atmósfera terrestre una columna de aire cilíndrica y vertical que se apoye sobre la superficie terrestre y se prolongue indefinidamente. Supongamos que el resto de la atmósfera se convierta en sólido, de modo que esta columna de aire se halle contenida lateralmente por las paredes de un cilindro vertical; si la masa entera del aire está en equilibrio, este estado no se debe turbar por nuestra hipótesis; por lo que *la columna de aire debe estar separadamente en equilibrio*; la fuerza que solicita las moléculas de aire es la pesantez; por lo que es preciso *para el equilibrio* (506) *que la densidad, la presion y la temperatura sean uniformes en toda la estension de una misma capa horizontal de una altura infinitamente pequeña.* Sea u la distancia de una capa cualquiera á la superficie de la tierra, D su densidad, t su temperatura, g' su pesantez, p' su fuerza elástica, y tendrémos que D, t, g' y p', serán funciones de u. Sea tambien $\mathrm{d}u$ la altura de esta capa, y A su ancho ó la seccion del cilindro perpendicular á su longitud; por lo que Ap será la presion que se verifica sobre su base inferior; y $A(p-\mathrm{d}p)=Ap-A\mathrm{d}p$ la que sufre su base superior; la cantidad $A\mathrm{d}p$ debe ser igual al peso $ADg'\times\mathrm{d}u$ de esta misma capa; luego suprimiendo el factor comun A, se tendrá $-\mathrm{d}p=Dg'\mathrm{d}u$ (650);
que viene á ser la (ec. 634) sustituyendo en vez de U su valor g', y haciendo $X=0$, $Z=0$, y considerando que la presion disminuye cuando aumenta la altura u, lo que hace que $\mathrm{d}p$ y $\mathrm{d}u$ deban tener signos diferentes. Sustituyendo en vez de D su valor sacado de la (ec. 649), y poniendo α en vez de 0,00375, se tendrá $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{-g'\mathrm{d}u}{a(1+\alpha\tau)}$ (651).

548 De esta ecuacion nada se puede concluir miéntras que no conozcamos τ en funcion de u; se sabe por esperiencia que *la temperatura decrece á medida que uno se aleja de la superficie de la tierra*; pero aun no se conoce con exactitud la ley de este decremento. Por fortuna esta ley tiene poca influencia sobre el resultado del cálculo de las alturas por el barómetro á causa de la pequeñez del factor α, y tiene acreditado la esperiencia que se puede considerar en esta cuestion la temperatura constante, con tal que se tome para τ en cada caso particular una

temperatura media entre las que se verifican en los dos puntos estremos de la altura que se quiere determinar. Por otra parte, siendo r el radio de la tierra, y g la pesantez en su superficie, si espresamos por g' la gravedad á la altura u, será (§ 347) $(r+u)^2:r^2::g:g'=\frac{g'}{(r+u)^2}$ (652);

luego la (ec. 651) se convierte en $\frac{dp}{p}=\frac{-gr^2du}{a(1+\alpha\tau)(r+u)^2}$ (653);

integrando, en el supuesto de ser τ constante, se tiene

$$\log.p=\frac{kgr^2}{a(1+\alpha\tau)}\times\frac{1}{r+u}+C,$$

siendo C la constante arbitraria. El logaritmo de p está tomado en las tablas ordinarias, y k representa el módulo de estas tablas, que es (II. 545) 0,43429 &c. Para determinar la constante C supongamos que sea Π el valor de p que corresponde á $u=0$, y será $\log.\Pi=\frac{kgr}{a(1+\alpha\tau)}+C$; y quitando la ecuacion precedente de esta, resulta (I. 310)

$$\log.\frac{\Pi}{p}=\frac{kgr}{a(1+\alpha\tau)}\times\frac{u}{r+u} \quad (654).$$

Esta ecuacion reunida á la (ec. 649) dará los valores de p y de D en funcion de u; por lo que *estas ecuaciones encierran las leyes de la densidad y de la fuerza elástica del aire que conviene al estado de equilibrio de la atmósfera.*

549 Para que la (ec. 654) nos sirva para medir las alturas verticales en virtud de las del barómetro, debemos suponer que se haya observado la altura barométrica en la superficie de la tierra y á la altura u sobre dicha superficie; sea h la primera altura observada, y h' la segunda; sean tambien en el momento de estas observaciones T y T' las temperaturas del mercurio que estén señaladas por un termómetro en contacto con el barómetro, y tendrémos que como el mercurio se condensa $\frac{1}{5412}$ de su volúmen por cada grado centígrado de diminucion de la temperatura, se sigue que si m es la densidad de este líquido que corresponde al número T de estos grados ó á la primera observacion, $m\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$ será el que corresponde al número T' ó á la segunda observacion; luego tendrémos que la (ec. 646) dará para las dos estaciones $\Pi=mgh$ (655), y $p=mg'h'\left(1+\frac{T-T'}{5412}\right)$ (656).

Para abreviar comprenderémos el factor $1+\frac{T-T'}{5412}$ en h'; de modo que h' representará la altura del barómetro, tal como sea dada por la segunda observacion multiplicada por este factor. Entónces dividiendo la (ec. 655) por la (ec. 656), y poniendo por g' su valor (ec. 652), se tendrá $\frac{\Pi}{p}=\frac{h}{h'}\times\frac{(r+u)^2}{r^2}$ (657),

y por consiguiente $\log.\frac{\Pi}{p}=\log.\frac{h}{h'}+2\log.\left(1+\frac{u}{r}\right)$ (658).

550 Supongamos que t y t' sean las temperaturas del aire en la superficie de la tierra y á la altura u. Estas temperaturas difieren en general de las T y T' del mercurio contenido en el barómetro; porque este líquido no siempre tiene el tiempo de tomar la temperatura del aire ambiente. Estas temperaturas t y t' son dadas por termómetros aislados y suspendidos al aire libre; y en virtud de lo espuesto (548) supondrémos $\tau=\frac{1}{2}(t-t')$;

deberíamos tomar tambien $\alpha=0{,}00375$; pero conviene aumentar un poco este coeficiente, á fin de tener en consideracion la cantidad de agua en vapor que contiene el aire. En efecto, bajo *la presion ordinaria de la atmósfera, la densidad del agua en vapor es á la del aire, como* 10 *á* 14; luego el aire es tanto mas ligero, cuanto mas vapor contiene; pero como contiene mas á proporcion que la temperatura es mas elevada, resulta que cuando el aire se dilata por el calor, su peso debe disminuir en una mayor relacion que la que aumenta su volúmen. Luego aumentarémos el coeficiente α, y para la comodidad y mayor exactitud del cálculo, tomarémos $\alpha=0{,}004=\frac{1}{250}$,

cuyo valor va conforme con la esperiencia; luego será $\alpha\tau=\frac{2(t+t')}{1000}$ (659).

Si se sustituyen estos valores de $\log.\frac{\Pi}{p}$ y $\alpha\tau$ en la (ec. 654), tendrémos

$$\log.\frac{h}{h'}+2\log.\left(1+\frac{u}{r}\right)=\frac{kgr}{a\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)}\times\frac{u}{r+u} \quad (660);$$

que quitando el divisor y poniendo en vez de u la letra A por ser la inicial de la altura que buscamos, tendrémos

$$A=\frac{a}{kg}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\log.\frac{h}{h'}+2\log.\left(1+\frac{A}{r}\right)\right)\left(1+\frac{A}{r}\right) \quad (661).$$

551 El medio mas seguro de determinar con exactitud el coeficien-

te $\frac{a}{kg}$ que entra en esta fórmula, es el de hacer uso de una altura bien conocida por medidas trigonométricas; se sustituirá esta altura en lugar de A en esta ecuacion; se pondrá al mismo tiempo en vez de t, t' y h, h', las temperaturas del aire y las alturas del barómetro observadas al pie y en el vértice de esta altura A, y en lugar de r el radio medio de la tierra; y de este modo se tendrá una ecuacion de condicion, de donde se sacará el valor $\frac{a}{kg}$.

Tomando un medio entre los resultados de un gran número de observaciones hechas con el mayor cuidado, ha encontrado Mr. *Ramond* que $\frac{a}{kg'}=18336$ metros á la latitud de $\frac{1}{4}\pi$. Este coeficiente varía con la latitud del lugar de la observacion á causa de que la gravedad se halla en su denominador; luego en virtud de lo espuesto (nota del § 162) deberémos multiplicar el denominador de esta espresion por $1-0{,}002837\cos.2\psi$; y para que no se altere esta ecuacion, multiplicarémos el segundo miembro por $\frac{1}{1-0{,}002837\cos.2\psi}$,

y tendrémos que para una latitud cualquiera ψ, será

$$\frac{a}{kg}=18336\times\frac{1}{1-0{,}002837\cos.2\psi}\ (662);$$

que haciendo la division (I. 184), y tomando solo los dos primeros términos, resultará por último para una latitud cualquiera

$$\frac{a}{kg}=18336\text{metros}(1+0{,}002837\cos.2\psi)\ (663).$$

Sustituyendo este valor en la (ec. 661), se tendrá

$$A=18336^{m}(1+0{,}002837\text{co}.2\psi)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\text{lo}.\frac{h}{h'}+2\text{lo}.\left(1+\frac{A}{r}\right)\right)\left(1+\frac{A}{r}\right)\ (664).$$

Para referir esta ecuacion á nuestras medidas no tenemos mas que multiplicar el factor constante 18336 metros por 3,5889216 pies españoles que tiene el metro, y tomar las cantidades que entran en el segundo miembro en pies españoles; lo que en pies españoles dará

$$A=65806(1+0{,}002837\text{co}.2\psi)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\left(\text{lo}.\frac{h}{h'}+2\text{lo}.\left(1+\frac{A}{r}\right)\right)\left(1+\frac{A}{r}\right)\ (665).$$

Esta ecuacion servirá para determinar la altura A en todos los parages de la tierra, en virtud de los valores de h, h' y t, t', que se verifican al mismo tiempo en los dos estremos de esta altura. Pero como A entra en ambos miembros de esta ecuacion, y la fraccion $\frac{A}{r}$ será siempre muy pequeña, resulta que se obtiene un primer valor muy aproximado de A despreciando esta fraccion en el segundo miembro de esta ecuacion; este valor que obtengamos se sustituirá en el segundo miembro, lo que dará un segundo valor mas aproximado que el primero; se podria encontrar un tercer valor mas aproximado, sustituyendo el segundo en dicho segundo miembro; pero se tendrá en todos los casos una exactitud suficiente limitando la aproximacion al segundo valor de A.

552 La (ec. 664) no difiere esencialmente de la que Mr. *Laplace* ha dado para el mismo objeto en su Mecánica celeste, y que hemos puesto en la fórmula (A) del pliego de cálculos que hay al fin de mi Compendio de Mecánica Práctica. Ambas ecuaciones coinciden cuando se desprecia el cuadrado de $\frac{A}{r}$ en el segundo miembro de la (ec. 664), lo que se puede siempre hacer sin error sensible.

Hay tambien otra fórmula ménos exacta, pero mas sencilla que la precedente; la cual se deduce de la anterior, despreciando la fraccion $\frac{A}{r}$, lo que la convierte en $A=\frac{a}{kg}\times\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log.\frac{h}{h'}$; más para satisfacer á las observaciones, el coeficiente $\frac{a}{kg}$ no debe tener el mismo valor en esta fórmula que en la (ec. 664); y en efecto las observaciones citadas de Mr. *Ramond* dan para el valor del coeficiente que se debe emplear en esta nueva fórmula, $\frac{a}{kg'}=18393$ metros, á la latitud $\frac{1}{4}\pi$ donde la gravedad es g'; por lo que para una latitud cualquiera ψ, será

$$\frac{a}{kg}=18393\times\frac{1}{1-0{,}002837\cos.2\psi}=18393(1+0{,}002837\cos.2\psi)\ (666);$$

que da $A=18393(1+0{,}002837\cos.2\psi)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log.\frac{h}{h'}$ (667).

553 Si se esceptuan los casos en que se trata de una altura muy grande, esta fórmula es la que sirve casi siempre para la medida de las alturas por la observacion del barómetro. Ella da inmediatamente y con una exactitud suficiente la diferencia de las alturas verticales de dos puntos, cuando se conoce la temperatura del aire y la altura del baró-

metro en estos dos puntos; t y h se refieren á la estacion inferior; t' y h' á la superior; la altura h' relativa á esta segunda estacion no se debe emplear sino despues de haberla corregido de la diferencia de las temperaturas T y T' del mercurio en las dos estaciones, es decir, despues de haberla multiplicado por el factor $1+\frac{T-T'}{5412}$.

Todos estos resultados van conformes con los que saca directamente Mr. Biot que es uno de los sabios que con mas acierto, elegancia y claridad han tratado esta materia en su apreciable Astronomía Física, y cuyas fórmulas hemos dado á conocer en dicho compendio.

554 Si multiplicamos el segundo miembro de la (ec. 666) por 3,5889216, la tendrémos reducida á pies españoles, y será

$$A=66011 \text{ pies españoles}(1+0{,}002837\cos.2\psi)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log.\frac{h}{h'} \quad (668),$$

teniendo cuidado de tomar los valores de h y h' en pies españoles.

555 Para hacer uso de estas fórmulas es necesario hacer estas observaciones con mucho cuidado y con instrumentos muy exactos y que sean comparables: sin cuyo requisito se podrian cometer grandes errores. Se elegirá si es posible un tiempo sereno, y la hora del medio dia. Se coloca un observador en cada estacion, y hacen en las épocas convenidas de antemano la observacion de la altura del mercurio en el barómetro, apuntando al mismo tiempo la temperatura del mercurio y la del aire libre, estando todos los instrumentos á la sombra.

Estos observadores repetirán sus observaciones de 5 en 5 minutos, de 10 en 10, ó de cuarto en cuarto de hora, segun se hayan convenido ántes hasta tener diez ó doce observaciones. Despues se reunen los dos observadores, comparan de nuevo sus barómetros para cerciorarse de si les ha sucedido algun accidente. Si los hallan conformes, se toma un término medio entre todas las observaciones, y con estos datos se calculará la diferencia de nivel por dichas fórmulas. Si las observaciones se han hecho con todas las precauciones necesarias, el resultado no será susceptible sino de muy pocos errores, debidos á las irregularidades accidentales de presion y de temperatura de las capas de la atmósfera; estos errores desaparecerán por su compensacion recíproca, repitiendo las observaciones en diferentes épocas y tomando un término medio entre todos los resultados.

556 Si por una larga serie de observaciones hechas en un mismo parage, se determina la altura media del barómetro y la temperatura media de la atmósfera, se puede hallar por medio de la (ec. 668) la altura de aquel parage sobre el nivel del mar ó de cualquier otro punto determinado. Para esto, se necesita tener tambien en el segundo punto la altura media del barómetro y la temperatura media que da el termómetro, y calcular por dicha (ec. 668) como si se hiciese con

relacion á dos estaciones en que se tuviesen alturas correspondientes.

Todavía se puede simplificar algo mas la fórmula (ec. 668), viendo la correccion que se debe hacer á la altura que da dicha ecuacion, prescindiendo del factor $1+0{,}002837\cos.2\psi$; y segun los cálculos exactos de Mr. Biot se puede determinar la diferencia de nivel por la ecuacion

$$A = 66011 \text{ pies españoles}\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log.\frac{h}{h'} \quad (669),$$

teniendo cuidado de que para una latitud de

$0°$, $5°$, $10°$, $15°$, $20°$, $25°$, $30°$, $35°$, $40°$,

se deben añadir á la altura hallada por la (ec. 669) una parte de dicha altura espresada por $\frac{1}{352}$, $\frac{1}{358}$, $\frac{1}{375}$, $\frac{1}{407}$, $\frac{1}{460}$, $\frac{1}{548}$, $\frac{1}{705}$, $\frac{1}{1030}$, $\frac{1}{2030}$.

Que para la latitud de $45°$ nada se debe añadir ni quitar; y que para una latitud de $50°$, $55°$, $60°$, $65°$, $70°$, $75°$, $80°$, $85°$,

se debe quitar á la altura hallada por la (ec. 669) una parte de dicha altura espresada por $\frac{1}{2030}$, $\frac{1}{1030}$, $\frac{1}{705}$, $\frac{1}{548}$, $\frac{1}{460}$, $\frac{1}{407}$, $\frac{1}{375}$, $\frac{1}{358}$, $\frac{1}{352}$.

507 Para que se comprenda bien el uso de estas fórmulas, nos propondrémos aplicar cada una de ellas á un egemplo. Sea el primero el determinar la altura del *Chimbórazo* sobre el nivel del mar pacífico, por las observaciones del Baron de Humboldt.

En la estacion superior se tenia $h'=0^m{,}377275=1{,}3540104$ pies esp.; el termómetro libre ó el valor de t' era $-1°{,}6$;
el termómetro del barómetro ó el valor de T' era $10°$.

En la estacion inferior, esto es, al nivel del mar pacífico, la altura del mercurio en el barómetro era $h=0^m{,}7620=2{,}7347583$ pies españoles;
el termómetro libre ó el valor de $t=25°{,}3$;
en el termómetro del barómetro se tenia $T=25°{,}3$;
y por último la latitud era $1°$ y $45'$.

Puesto que aquí la latitud es $\psi=1°\ 45'$, se tendrá $2\psi=3°\ 30'$; si multiplicamos el coseno de $3°\ 30'$ por el factor $0{,}002837$ hallarémos por producto $0{,}0028317$; y añadiándole la unidad, tendrémos que el factor correspondiente á la latitud se nos convertirá en $1{,}0028317$.

El segundo factor de la fórmula es $1+\frac{2(t+t')}{1000}$;

y como $t=25°{,}3$ y $t'=-1°{,}6$, tendrémos $t+t'=25°{,}3-1°{,}6=23°{,}7$, cuyo duplo partido por 1000 da $0{,}0474$; por lo que $1+\frac{2(t+t')}{1000}=1{,}0474$.

El tercer factor de la fórmula es $\log.\frac{h}{h'}+2\log.\left(1+\frac{A}{r}\right)$,

el cual se nos reduce á $\log.\frac{h}{h'}$; pues despreciando el término $\frac{A}{r}$ en esta primera operacion, como $\log.1=0$, queda únicamente $\log.\frac{h}{h'}$.

El valor de h le tenemos conocido, pues es $h=2,7347583$ pies esp.; el de h' observado, que es de 1,3540104 pies le debemos modificar, multiplicándolo por $1+\frac{T-T'}{5412}$;

y como $T=25°,3$ y $T'=10°$, será

$$1+\frac{T-T'}{5412}=1+\frac{15°,3}{5412}=1+0,002827=1,002827;$$

que efectuando la multiplicacion de esta cantidad por el valor de h', tendrémos que el valor de h' que se debe emplear es 1,357838 pies esp.;

y para hallar el $\log.\frac{h}{h'}$ no tendrémos mas que restar de $\log.h$, que es 0,4369190, el de h' corregida que es 0,1328479, y obtendrémos por resta 0,3040711.

Por este logaritmo se ha de multiplicar el producto de los tres primeros factores; y como el producto de estos es mas cómodo hallarlo por logaritmos, deberémos sumar con los logaritmos de los tres primeros factores, el logaritmo de este logaritmo que acabamos de hallar.

El último factor $1+\frac{A}{r}$, no atendiendo por ahora al término $\frac{A}{r}$, se reduce á la unidad; luego no tendrémos que contar con este factor. Por lo que la (ec. 665) se nos convertirá en

$$A=65806\times1,0028317\times1,0474\times0,3040711;$$

que haciendo la operacion por logaritmos se tiene

$$\begin{aligned}
&\text{Log.}65806\ldots\ldots= 4,8182655\\
&\text{Log.}1,0028317= 0,0012280\\
&\text{Log.}1,0474\ldots\ldots= 0,0201126\\
&\text{Log.}0,3040711= \underline{9,4829751}\\
&\text{Log.}A\ldots\ldots\ldots\ldots=4,3225812=\text{Log.}21017 \text{ pies.}
\end{aligned}$$

Luego el primer resultado que sacamos es 21017 pies españoles.

Ahora sustituirémos este valor en vez de A en el segundo miembro de la (ec. 667), y tendrémos que como el radio medio de la tierra es 22847748 pies españoles, la cantidad $\frac{A}{r}$ será igual á 0,00091987; por lo que $\log.\frac{h}{h'}+2\log.\left(1+\frac{A}{r}\right)=0,3040711+2\log.1,00091987=$

$0.3040711 + 0,0007986 = 0,3048697.$

Luego la (ec. 665) se nos convertirá en

$$A = 65806 \times 1,0028317 \times 1,0474 \times 0,3048697 \times 1,00091987;$$

que haciendo la operacion por logaritmos se tendrá

Log.6 5806.......= 4,8182655
Log.1,0028317..= 0,0012280
Log.1,0474.......= 0,0201126
Log.0,3048697..= 9,4841143
Log.1,00091987= 0,0003993

Log. A............=14,3241197=Log.21092 pies españoles.

Si queremos mayor aproximacion, pondrémos en vez de A en el segundo miembro de la (ec. 665), el valor 21092 que acabamos de encontrar; lo cual nos dará $\frac{A}{r} = \frac{21092}{22847748} = 0,00092315.$

Por lo que $2\log.\left(1 + \frac{A}{r}\right) = 2\log.1,00092315 = 0,0008015;$

luego será $\log.\frac{h}{h'} + 2\log.\left(1 + \frac{A}{r}\right) = 0,3040711 + 0,0008015 = 0,3048726;$

y por último el factor $1 + \frac{A}{r}$ será $1,00092315.$

Luego si sustituimos estos valores en la (ec. 665) tendrémos

$$A = 65806 \times 1,0028317 \times 1,0474 \times 0,3048726 \times 1,00092315;$$

que haciendo la operacion por logaritmos tendrémos

Log.6 5806.......= 4,8182655
Log.1,0028317..= 0,0012280
Log.1,0474.......= 0,0201126
Log.0,3048726..= 9,4841185
Log.1,00092315= 0,0004007

Log.A.............=14,3241253=Log.21092,4 pies españoles.

El intentar hallar mayor aproximacion nos seria ya inútil, pues esta nos ha dado solo *cuatro décimas* de pie mas que la anterior. Lo que comprueba que si en esta cuestion que es la mas complicada que se nos puede ofrecer, pues no hay altura en el globo que sea igual con la del Chimbórazo, habiendo bastado solo la segunda operacion, con mas razon nos bastará en cualquier otro caso.

Determinemos ahora la misma altura por la (ec. 668), y tendrémos que haciendo en ella las sustituciones convenientes se nos convertirá en

$A = 66011 \times 1{,}0028317 \times 1{,}0474 \times 0{,}3040711$,

que por logaritmos tendrémos

Log.6 6011.....= 4,8196163

Log.1,0028317= 0,0012280

Log.1,0474.....= 0,0201126

Log.0,3040711= 9,4829751

Log.*A*...........=4,3239320=Log.21083 pies.

Resultado que manifiesta que en esta altura que es la mayor que nos puede ocurrir, esta fórmula solo nos da *nueve pies* de diferencia, que es despreciable en comparacion de ella; por lo que se echa de ver que se puede hacer uso con toda seguridad de dicha (ec. 668).

557 Propongámonos aun determinar la altura de Madrid sobre el nivel del mar; pues tenemos observaciones correspondientes, hechas con la mayor escrupulosidad por D. Juan de Peñalver, cuya exactitud en hacer uso de instrumentos buenos y comparables es bien notoria. Entre todas sus observaciones, elegirémos las dos que merecen mayor confianza por acercarse mas á la altura media del barómetro. Estas son de los dias 18 y 19 de Junio de 1801.

Primera. El dia 18 de Junio á las doce del dia en punto la altura del barómetro en el nivel del mar en Santander la halló el espresado Sr. Peñalver de 32 pulgadas 10,36 lineas españolas despues de haberla reducido á la temperatura de 10° del termómetro centígrado, señalando dicho termómetro 19° al aire libre. En Madrid el mismo dia á la misma hora en el cuarto que habitaba el mismo Sr. Peñalver en el Palacio del Buen Retiro, la altura del barómetro, tambien reducida á la temperatura de 10° del termómetro centígrado, era de 30 pulgadas y 4,86 lineas españolas, y el termómetro centígrado señalaba 24°,8 al aire libre.

Segunda. El dia 19 de Junio á la misma hora y en los mismos parages, la altura del barómetro en Santander, reducida á 10° del termómetro era 32 pulgadas 11,36 lineas españolas, y al aire libre señalaba el termómetro 19°,2.

En Madrid la altura corregida del barómetro era á la misma hora 30 pulgadas 6,14 lineas, señalando el termómetro 24°,2 al aire libre.

Cálculo por la primera observacion, *cuyos datos son*

h=32 *pulgadas* 10,36 *lineas*=2,7386111 *pies*;

t=19°; h′=30 *pulgadas* 4,86 *lineas*=2,53375 *pies*; t′=24°,8.

Aquí no tenemos que corregir la altura *h′* por tener ya reducidas á una misma temperatura de 10° las *h* y *h′*.

Ahora, para determinar el factor $1+0{,}002837\cos.2\psi$, tomarémos una latitud media entre la de Madrid y la de Santander; y siendo la de Madrid 40°25′ y la de Santander 43°28′, supondrémos de 41°56′ 30″, cuyo duplo es 83° y 53′.

Luego si sumamos el logaritmo del coseno de 83° 53′ que es

9,0275669 con el del factor 0,002837 que es 7,4528593, y buscamos á qué número corresponde, hallarémos ser al 0,00030229; por consiguiente el factor $1+0,002837\cos.2\psi=1,00030229$.

Puesto que $t=19^\circ$ y $t'=24^\circ,8$, será

$$1+\frac{2(t+t')}{1000}=1+\frac{2(19+24,8)}{1000}=1+\frac{2\times 43,8}{1000}=1+0,0876=1,0876.$$

Ahora, si del logaritmo de $h=2,7536111$ pies, restamos el de $h'=2,53375$, nos resultará $\log.\frac{h}{h'}=0,0337666$.

Luego si sustituimos estos valores en la (ec. 668) la tendrémos reducida á $A=66011 \text{ pies}\times 1,00030229\times 1,0876\times 0,0337666$; que haciendo la operacion por logaritmos tendrémos

Log.6 6011.......= 4,8196163
Log.1,00030229= 0,0001313
Log.1,0876.......= 0,0364692
Log.0,0337666..= 8,5284873

Log.A..............=+3,3847041=Log.2424,9.

Luego la altura de Madrid sobre el nivel del mar en Santander es 2425 pies españoles.

Para la segunda observacion, se tiene $\begin{cases} h=2,7455556 \text{ pies}, \\ \text{y } h'=2,54263889 \text{ pies}. \end{cases}$

El coeficiente correspondiente á la gravedad es el mismo que ántes; y siendo $t=19^\circ,2$, y $t'=24^\circ,2$ será $1+\frac{2(t+t')}{1000}=1+0,0868=1,0868$.

Para hallar el valor de $\log.\frac{h}{h'}$ restarémos del log. de $h=2,7455556$, el de $h'=2,54263889$, y hallarémos que $\log.\frac{h}{h'}=0,0333456$.

Luego la fórmula se nos convertirá en este caso en
$A=66011 \text{ pies}\times 1,00030229\times 1,0868\times 0,0333456$;
que egecutando la operacion por logaritmos se tiene

Log.6 6011.......= 4,8196163
Log.1,00030229= 0,0001313
Log.1,0868.......= 0,0361496
Log.0,0333456..= 8,5230386

Log.A..............=+3,3789358=Log.2393.

Luego si sumamos estos 2393 pies con los 2425 que nos daba la primera observacion, y tomamos la mitad, nos resultará 2409; y observando que el parage donde se hallaba el barómetro en Madrid estaba 15 pies mas alto que el nivel del Palacio del Buen Retiro, resulta que la altura de Madrid tomada en el nivel de dicho Palacio sobre el nivel del mar en Santander, es de 2394 pies ó de 798 varas españolas.

De las bombas.

558 Se da en general el nombre de *bomba* á una máquina por cuyo medio y con la presion atmosférica, se eleva el agua á diversas alturas sobre su nivel. Las bombas pueden ser de tres especies, á saber: *atraente*, *impelente* y *compuesta* de atraente é impelente.

La bomba atraente consta de dos tubos ED, CF (fig. 187) que se comunican por una válvula S; el cilindro superior CF se llama el *cuerpo de bomba*, y á lo largo de él sube y baja un émbolo AB que se mueve por medio de la espiga Z por una potencia cualquiera *P*.

Con el fin de examinar el mecanismo con que obra, supongamos que sea *ab* el nivel del agua que se quiere elevar, en el cual está sumergido el cilindro inferior ED, y que el émbolo esté lo mas bajo posible como en EF. En este caso el espacio comprendido entre *ab* y EF está lleno de aire: este fluido en virtud de su elasticidad egerce una presion sobre la superficie del agua que se equilibra con la de la atmósfera. Si suponemos que se levante el émbolo á lo largo del cuerpo de bomba CF, se irá formando un vacío entre EF y AB; y entónces la presion del aire contenido entre EF y *ab* hará que se abra la válvula S y pasará al cuerpo de bomba EB una porcion de aire; por lo cual, el que quede en E*b* se habrá dilatado, y por consiguiente su densidad y su fuerza elástica disminuirán; por lo que esta fuerza ya no se podrá equilibrar con la presion atmosférica que se egerce sobre la superficie del agua fuera de la bomba; luego el agua subirá en el cilindro ED hasta que la presion debida al agua elevada, aumentada con la correspondiente á la porcion de aire comprendida entre este agua y el émbolo, se equilibre con la presion del aire esterior.

Supongamos que el émbolo se detenga cuando el agua haya llegado á $a'b'$; la válvula S se cerrará por su propio peso; cuando el émbolo vuelva á bajar hasta EF se abrirá la válvula S′ y se escapará por esta abertura el aire contenido en EB; el émbolo volviendo á levantarse de nuevo, causará un vacío entre AB y EF; la presion del aire $a'b'$EF abrirá la válvula S y pasará una parte al cuerpo de bomba EB, y el agua se elevará sobre $a'b'$, por egemplo hasta $a''b''$; continuando de este modo al cabo de un cierto número de golpes de émbolo, el agua habrá pasado al cuerpo de bomba y habrá llegado hasta $\alpha\beta$ por egemplo. En este caso tendrémos que si se detiene el émbolo, la válvula S se cerrará; descendiendo despues el émbolo, al llegar á la superficie $\alpha\beta$ del agua, se sumerge en este líquido, el agua abre la válvula S′ y pasa por encima del émbolo. Cuando este haya llegado á EF, la válvula S′ se cierra, y al volver á subir eleva consígo el agua que se halla sobre AB; al mismo tiempo la válvula S se abre y deja pasar una nueva porcion de agua que remplaza á la precedente, y que sube por el golpe de émbolo siguiente.

De este modo se eleva el agua en una bomba atraente, y cuando ha llegado á una cierta altura sale del cuerpo de bomba por un orificio lateral O al cual está adaptado un tubo OH para dirigirla adonde convenga.

559 El agua no llegará jamas al cuerpo de bomba CF si la altura de EF sobre el nivel *ab* escede á la mayor altura á que la presion atmosférica puede sostener el agua en el vacío, que en cada parage se hallará por lo espuesto (538) con solo observar la altura del mercurio en el barómetro. Tambien podria suceder que el agua dejase de elevarse en el cilindro DE y no llegase jamas hasta EF, si el émbolo á cada operacion no bajase hasta EF; por lo que es *necesario para que una bomba atraente produzca infaliblemente su efecto*, *que el émbolo al descender llegue al estremo del cuerpo de bomba*, *ó al ménos que se aproxime tanto como sea posible.*

560 Cuando el agua haya llegado al cilindro superior, se la puede elevar despues á la altura que se quiera en este cilindro; *el volúmen de agua que cada golpe de émbolo hace subir es un cilindro que tiene por altura el espacio corrido por el émbolo*, *y por base la seccion inferior del cilindro CF*; luego *multiplicando este volúmen por el número de golpes de émbolo que se verifican en un tiempo dado*, *y suponiendo que el émbolo corre constantemente el mismo espacio*, *se tendrá para este intervalo de tiempo la cantidad de agua que suministra la bomba y que sale por el orificio O.*

Esta valuacion del producto de una bomba atraente no seria exacta, si el nivel del depósito se bajase de modo que la mayor elevacion del émbolo sobre este nivel fuese mayor que la altura á que la presion atmosférica puede sostener al líquido.

561 Si se esceptúa el caso en que se hace un vacío en lo interior de la bomba, *la carga del émbolo miéntras que se eleva y está abierta la válvula S*, *es igual al peso de un cilindro de agua que tuviese por base la del émbolo*, *ó el area de la seccion interior del cuerpo de bomba*, *y por altura la elevacion del agua sobre el nivel del depósito.*

En efecto, el émbolo sufre en general dos presiones contrarias. La que se egerce en el sentido de la pesantez es igual al peso de la columna de agua superior del émbolo aumentado de la presion atmosférica; luego representando por *m* la seccion interior del cuerpo de bomba, y por *h* la altura vertical de la columna de agua que carga sobre el émbolo, tendrémos que la presion que sufre este en su parte superior estará representada por $Dghm+\Pi$.

Como suponemos que el émbolo se halla en contacto con el agua que tiene debajo, resulta que es empujado de abajo arriba por el esceso que la presion atmosférica que se egerce sobre la superficie del depósito, lleva á la de la columna de agua, cuya altura espresarémos por h', es decir, por una fuerza igual á $\Pi - Dgh'm$.

Quitando esta fuerza de la que impele al mismo cuerpo en el sentido de la pesantez, se tiene $Dg(h+h')m$ para la carga que sufre: resultado conforme con el enunciado del teorema; pues $h+h'$ es la elevacion total del agua en la bomba, desde el depósito hasta el parage O por donde sale. De donde resulta que *en general para elevar el agua á una altura dada por medio de una bomba atraente*, *es necesario aplicar al émbolo una fuerza capaz de sostener y de hacer subir el peso de este cuerpo*, *aumentado del peso de un cilindro de agua que tuviese por base la del émbolo*, *y por altura la elevacion del punto donde se quiere elevar el agua sobre el nivel del depósito*; *y ademas se necesita que esta fuerza pueda vencer el rozamiento del émbolo contra la superficie interior del cilindro en que se mueve. Cuando el émbolo baja*, *el rozamiento es el único obstáculo que tiene que vencer la fuerza*, *y entónces es favorecida por su mismo peso.*

562 El mecanismo de la *bomba impelente* se reduce á que en ella descendiendo el émbolo AB (fig. 188) de AB á *ab* se sumerge en el fluido, y se efectúa un vacío en el espacio EB; entónces el agua que está debajo del émbolo abre la válvula S y pasa á la parte superior. Al subir el émbolo, el agua que descansa sobre su base, subirá igualmente, y el aire que ocupaba el espacio ABFE se comprimirá, y en llegando á ser mas denso que el aire atmosférico, elevará la válvula S′ y saldrá por esta abertura hasta que haya vuelto á tomar la densidad del aire atmosférico. Bajando de nuevo el émbolo, el agua del depósito subirá todavía mas en la bomba por la válvula S; y así continuará hasta que el agua se introduzca en el cuerpo de bomba elevando la válvula S′.

Por las mismas razones que en la bomba atraente, resulta que por medio de la bomba impelente se elevará siempre el agua á la altura que se quiera, con tal que se aplique una fuerza motriz correspondiente al peso de una columna de agua que tenga por base la del émbolo, y por altura la del parage por donde sale el agua sobre el nivel del depósito; y el efecto se calculará como en la bomba anterior.

563 En la bomba *compuesta* de atraente é impelente, el émbolo AB (fig. 189) es sólido: obra siempre en el cuerpo de bomba CF y se baja ó eleva sucesivamente desde EF hasta el orificio K abierto en uno de los lados del cilindro: á este orificio está adaptado un tubo recurvo KLO, abierto en su estremo superior: una válvula S′ fija en el punto L, se abre de abajo arriba y permite al agua pasar á la parte LO de este tubo por el cual se trata de elevarla hasta un parage dado O, de donde pasa despues por un segundo orificio lateral OH al parage donde se necesita.

Al bajar el émbolo, comprime al aire contenido en el cilindro superior y en él tubo KL; este aire comprimido obliga á que se abra la válvula S′: una parte de este aire se escapa por esta abertura, y la parte que queda conserva la misma densidad y la misma fuerza elástica que el aire esterior. Llegado el émbolo al punto K ó muy cerca de él, cesa de bajar: la válvula S′ se cierra por su propio peso; cuando el émbolo sube, el aire contenido entre este cuerpo y la pared EK se dilata, la válvula S se abre, el aire contenido en el cilindro inferior se dilata igualmente, su fuerza elástica disminuye, y el agua sube en el cilindro ED; despues de varios golpes de émbolo el agua se halla elevada hasta EF y una porcion de ella pasa al cilindro superior, de modo que hasta aquí el mecanismo es el mismo que el de la bomba atraente. Es de la mayor importancia en la práctica el tener cuidado de colocar el tubo KL muy cerca de EF, pues de lo contrario podria suceder que quedase entre la base del émbolo y EF una porcion de aire que impidiese el que llegase el agua á la base del émbolo. Supongamos que el agua llega en el cilindro EC sobre el punto K por egemplo á E′F′; al cesar de subir el émbolo, la válvula S se cierra, y al descender empuja al agua delante de sí, de modo que la válvula S′ se abre y obliga al agua á penetrar en el tubo LO. El émbolo vuelve á descender hasta el punto K, y al principiar á subir, la válvula S′ se cierra, y la S se abre de nuevo, y el agua sigue al émbolo, al ménos miéntras que este cuerpo no se eleve á una altura mayor que aquella á que la presion atmosférica la puede elevar. Cada vez que el émbolo se eleva del punto K hasta E′F′, pasa del cilindro inferior al superior un volúmen de agua que llena el espacio comprendido entre E′F′ y el punto K; y cada vez que el émbolo vuelve de E′F′ al punto K pasa al tubo LO un volúmen igual de agua. Así, *el producto de cada golpe de émbolo es un volúmen de agua equivalente á un cilindro que tuviese por base la del cuerpo de bomba EC y por altura el espacio corrido por el émbolo.*

564 La carga que sufre este cuerpo no es la misma cuando sube que cuando baja. Para determinarla, consideremos el émbolo en una posicion cualquiera, por egemplo, cuando está en *ef*; si sube en este instante, la válvula S se abrirá y la S′ se cerrará; pero por un razonamiento semejante al del (§ 561) se deduce que este cuerpo es entónces empujado en el sentido de la pesantez por una fuerza igual al peso de un cilindro de agua que tuviese por base la del émbolo, y por altura la de *ef* sobre el nivel del depósito, es decir, la longitud de la columna de agua elevada en la bomba.

Cuando el émbolo desciende, la válvula S se cierra, y la S′ está abierta; y siendo *k* el punto en que el plano horizontal de la seccion *ef* encuentra al tubo KLO, la porcion de agua comprendida debajo de este punto y de *ef* está en equilibrio por sí misma (539) y no egerce ninguna presion sobre el émbolo situado en *ef*; pero la columna de agua elevada en el tubo LO sobre el punto *k* egerce sobre la base del émbolo una presion dirigida de abajo arriba y proporcional á su altura vertical.

De donde se sigue que el émbolo miéntras que baja, es impelido de abajo arriba por una fuerza igual al peso de un cilindro de agua que tuviese por base la de este cuerpo, y por altura la elevacion del agua en el tubo LO sobre la posicion vertical del émbolo. En esta valuacion no se ha tenido en consideracion la presion de la columna atmosférica que se apoya en el émbolo y que le empuja hácia abajo; porque estando el tubo LO abierto en su parte superior, esta presion queda destruida por la del aire esterior que se verifica en el estremo de este tubo. Conociendo la carga del émbolo, el peso de este cuerpo y el rozamiento que sufre en lo interior de la bomba, se determinará en cada caso particular el esfuerzo que es necesario hacer, y la fuerza que se debe emplear para mover el émbolo y levantar el agua á una altura dada en el tubo LO.

565 La teoría de las bombas nos ofrece un egemplo de que el mayor efecto de las máquinas no siempre se verifica cuando hay mayor velocidad; pues aunque la cantidad de agua que elevará una bomba será mayor á proporcion de que sea mayor el número de golpes de émbolo que se verifiquen en un tiempo dado, esto supone el que en cada golpe de émbolo suba una misma cantidad de agua; pero esto no sucederia si por tener demasiada velocidad la máquina, principiase á bajar el émbolo ántes de que hubiese subido el agua necesaria para llenar todo el espacio entre EF y la base AB del émbolo.

HIDRODINÁMICA.

Del movimiento de un fluido pesado.

566 La *Hidrodinámica* es aquella parte de la Mecánica que trata *del movimiento de los fluidos*; la aplicacion de los principios de esta ciencia al arte de conducir las aguas y de hacerlas servir para mover las máquinas, se llama *Hidráulica.*

Si consideramos un vaso lleno de agua hasta una cierta altura, en cuyo fondo que supondrémos horizontal tenga una abertura, y nos proponemos determinar el movimiento del agua que va á salir por este orificio, deberémos observar que durante este movimiento cada molécula tomará una velocidad particular, variable de una molécula á otra en magnitud y en direccion; más para simplificar la solucion de este problema supondrémos que *todas las moléculas que pertenecen á una misma capa horizontal, tienen en el mismo instante la misma velocidad*; de modo que cada capa de un espesor infinitamente pequeño permanezca paralela á ella misma, y esté formada de las mismas moléculas fluidas miéntras que dura todo el movimiento. De este modo una capa cualquiera va ocupando el lugar de la que está debajo, y por consiguiente su ancho aumenta ó disminuye segun se ensancha ó estrecha el vaso, y su espesor varía en razon inversa de su ancho. Para que se verifique este efecto es necesario que las moléculas que componen esta capa se aplanen al ensancharse, ó se alarguen al estrecharse; de donde resulta que ellas mudan tambien de posicion en el sentido horizontal. Así, ademas de la velocidad comun á todas las moléculas de una misma capa horizontal, cada molécula tiene aun otra velocidad horizontal que le es particular; pero la cuestion vendria á ser demasiado complicada, si se tuviesen en consideracion las velocidades horizontales; y como por otra parte no traeria esto una utilidad real, harémos abstraccion de estas velocidades y solo atenderémos á la determinacion de la velocidad vertical de las capas fluidas.

Se concibe con facilidad y lo prueba la esperiencia que cuando se trata de un vaso que se separa poco de la forma cilíndrica, ó cuando la altura del agua es muy grande con relacion á la diferencia de los anchos de las capas, las velocidades horizontales de las moléculas son muy pequeñas con relacion á sus velocidades verticales, y que al mismo tiempo son casi iguales para todas las moléculas de una misma capa; luego hay un gran número de casos en que el *paralelismo de las capas* se observa, sino exactamente al ménos con mucha aproximacion; y para todos estos casos, el cálculo fundado sobre esta hipótesis deberá conducir á una solucion aproximada de la cuestion. La teoría matemática del movimiento de los fluidos está aun poco adelantada; y así es, que solo restringiendo la estension de la cuestion por hipótesis mas ó ménos admisibles, se ha llegado hasta ahora á algunos resultados generales, útiles en la práctica y conformes con la esperiencia.

567 Sea CABD (fig. 190) una seccion vertical del vaso, AB el orificio, OZ un ege vertical sobre el cual se cuenten las distancias de las capas fluidas á un punto fijo O ó al plano horizontal tirado por este punto; despues de haber pasado un tiempo t desde el orígen del movimiento, espresemos por v la velocidad de una capa cualquiera del fluido, y por z su distancia al punto O; de modo que z y v sean dos funciones desconocidas de la variable t. Para fijar las ideas, supongamos que $mqnn'q'm'$ represente entónces la seccion vertical de esta capa horizontal, y se tendrá $Oq=z$; el espesor qq' de la capa estará espresado por la diferencial dz, y su volúmen será igual á su ancho multiplicado por dz. Pero su ancho es el area de la seccion del vaso hecha por un plano horizontal tirado por el punto q: y esta area es una funcion de z, dependiente de la forma del vaso y dada en cada caso particular, por lo que la representarémos por K; luego Kdz espresará el volúmen de la capa móvil que consideramos. En fin, espresando siempre por g la gravedad, tendrémos que gdt seria la velocidad que recibiria dicha capa móvil si estuviese libre, y espresando por dv el aumento de velocidad que se verifica en realidad, tendrémos que $gdt-dv$ será la velocidad perdida á cada instante por esta capa; pero en virtud del principio de D'Alembert el *fluido permanecerá en equilibrio si todas sus capas estu-*

viesen solicitadas por fuerzas motrices capaces de imprimirles las velocidades que pierden á cada instante; luego si suponemos estas capas solicitadas por fuerzas de esta naturaleza, podrémos hallar las condiciones de su equilibrio.

Pues que la fuerza variatriz de una capa cualquiera $K\mathrm{d}z$ debe producir la velocidad $g\mathrm{d}t-\mathrm{d}v$ en el instante $\mathrm{d}t$, resultará que dividiendo esta velocidad por $\mathrm{d}t$ tendrémos la espresion de la fuerza variatriz de dicha capa que será $g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$;

luego su fuerza motriz será igual al producto $\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times DK\mathrm{d}z$,

siendo D la densidad del fluido que se considera. Llamemos tambien p la presion referida á la unidad de superficie que esta capa sufre sobre su base superior mqn: presion que se trasmite (490) por el intermedio del fluido de que se compone la capa, no solo sobre su base inferior $m'q'n'$ sino tambien sobre las paredes del vaso que terminan su circunferencia; de modo que cuando el valor de p esté determinado en funcion de z y de t se conocerá á cada instante la presion que sufre este vaso en todos sus puntos.

La base inferior de la capa $K\mathrm{d}z$ sufre en el estado de equilibrio que consideramos, ademas de la presion p, otra presion debida á la fuerza motriz de esta capa, é igual á esta fuerza ó á $\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times DK\mathrm{d}z$;

dividiendo por K á fin de tener la presion debida á esta misma fuerza y referida á la unidad de superficie, resulta $\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times D\mathrm{d}z$;

por consiguiente siendo $p_{,}$ la presion total que sufre esta base inferior, se tendrá $p_{,}=p+\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times D\mathrm{d}z$ (669), ó $p_{,}-p=\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times D\mathrm{d}z$ (670).

Pero $p_{,}-p$ es la diferencial de la funcion p tomada con relacion á la variable z; luego será $\mathrm{d}p=\left(g-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\times D\mathrm{d}z$ (671);

ecuacion que hará conocer el valor de la presion p, cuando la de la velocidad v esté determinada.

568 Como el fluido que corre en el vaso es incompresible, debe pasar en un intervalo de tiempo cualquiera el mismo volúmen de fluido para todas las secciones horizontales del vaso; de donde se puede concluir que *las velocidades de dos capas tomadas á arbitrio, deben estar á cada instante en razon inversa de sus anchos*; luego si espresamos por

w la velocidad del fluido en el orificio horizontal AB por el cual pasa, por k el area de este orificio, y comparamos esta velocidad con la v de la capa $K\mathrm{d}z$, tendrémos la ecuacion $Kv=kw$, que da $v=\frac{kw}{K}$ (672).

En este valor de v tenemos que w es funcion de t, y K una funcion de z; luego se puede tomar su diferencial con relacion á la una ó á la otra de estas dos variables, ó con relacion á las dos á un mismo tiempo; la diferencial relativa á z espresará la diferencia entre las velocidades de dos capas consecutivas del fluido que se verifican en el mismo instante; diferenciando con relacion á t, se tendrá la diferencia entre las velocidades de dos capas de fluido que corresponden sucesivamente á la misma seccion del vaso; más para tener la diferencia entre las velocidades sucesivas de unas mismas capas es necesario diferenciar el valor de v con relacion á las dos variables t y z, considerando la segunda como una funcion de la primera; lo que da

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}.\frac{kw}{K}=k\mathrm{d}.\frac{w}{K}=k\times\frac{K\mathrm{d}w-w\mathrm{d}K}{K^2}=\frac{k}{K}\times\mathrm{d}w-\frac{kw}{K^2}\times\mathrm{d}K;$$

que dividiendo por $\mathrm{d}t$ la podrémos poner bajo esta forma:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{K}\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{kw}{K^2}\times\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{K}\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-\frac{kw}{K^2}\times\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z}\times\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\ (673).$$

Sustituyendo este valor en la (ec. 671) y poniendo en vez de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ su valor $v=\frac{kw}{K}$, se tendrá $\mathrm{d}p=\left(g-\frac{k}{K}\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}+\frac{kw}{K^2}\times\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z}\times\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\times D\mathrm{d}z=$

$$gD\mathrm{d}z-kD\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}z}{K}+\frac{kw}{K^2}\times\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z}\times\frac{kw}{K}\times D\mathrm{d}z=$$

$$gD\mathrm{d}z-kD\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}z}{K}+k^2Dw^2\times\frac{\mathrm{d}K}{K^3}\ (674).$$

Integrando con relacion á z, y observando que entónces las cantidades w y $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ se deben considerar como constantes, resulta

$$p=gDz-kD\times\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\times\mathrm{S}.\frac{\mathrm{d}z}{K}-\frac{k^2Dw^2}{2K^2}+C.$$

En este caso la constante arbitraria C que se añade á esta integral puede ser una funcion de t; su valor depende de la presion que sufre la superficie superior del agua. Para fijar las ideas, supondrémos que esta presion es la de la atmósfera, y la representarémos por Π. Sea tambien EHF el nivel del agua en el vaso, hagamos OH$=z'$, es decir, espresemos por z' el valor de z relativo á este nivel; representemos por K' la seccion del vaso que corresponde al mismo nivel, de modo que K' sea lo que viene á ser K cuando $z=z'$; y suponiendo ademas que la integral $S.\frac{dz}{K}$ se desvanezca para este valor de $z=z'$, se tendrá para este mismo valor $\Pi=gDz'-\frac{k^2Dw^2}{2K'^2}+C.$

Eliminando C por medio de esta ecuacion y la anterior será

$$p=\Pi+gD(z-z')-kD\frac{dw}{dt}\times S.\frac{dz}{K}-\frac{k^2Dw^2}{2K^2}+\frac{k^2Dw^2}{2K'^2}\ (675).$$

Este valor de p conviene á todos los puntos del vaso; pero la presion que se egerce en el orificio AB es dada, pues es igual á la presion atmosférica si el fluido saliendo del vaso pasa al aire; es nula si pasa al vacío; y en general podemos representarla por $\Pi-c$, siendo c la diferencia de las presiones en el nivel del fluido y en el orificio del vaso; este valor de c será negativo, si en el orificio hubiese mayor resistencia que en la superficie del fluido. Sea tambien OL$=l$ el valor de z que corresponde al orificio AB, valor que es constante y dado; h la altura del fluido sobre este orificio, es decir, $h=$HL$=l-z$; N la integral $S.\frac{dz}{K}$ tomada en toda la estension de esta altura, ó desde $z=z'$ hasta $z=l$; por lo que N será una funcion de h dada en cada caso particular y dependiente de la forma del vaso; con lo cual tendrémos al mismo tiempo $z-z'=h$, $S.\frac{dz}{K}=N$, $K=k$, $p=\Pi-c$;

haciendo estas sustituciones en la (ec. 675) y simplificando, se tendrá

$$kDN\times\frac{dw}{dt}=c+Dgh-\left(1-\frac{k^2}{K^2}\right)\times\frac{Dw^2}{2}\ (676).$$

569 Cuando el orificio AB es muy pequeño con relacion á las dimensiones del vaso, de modo que se puedan despreciar sin error sensible los términos multiplicados por k en la (ec. 676) se reduce á

$$0=c+gDh-\tfrac{1}{2}Dw^2\ (677);$$

y si ademas la presion es la misma en el orificio y en el nivel del agua, en cuyo caso la cantidad c es nula, esta ecuacion da entónces

$$w^2=2gh\ (678),\ \text{y}\ w=\sqrt{2gh}\ (679);$$

de donde resulta que *la velocidad del agua que sale de un vaso por un orificio muy pequeño en comparacion de la superficie del vaso, es igual á la de un cuerpo pesado que hubiese caido de toda la altura del nivel por encima del orificio.*

570 Si el agua sufriese mayor presion en su nivel que en el orificio del vaso, la velocidad $w` deberia aumentarse por este esceso de presion, y su aumento seria el mismo que si el nivel estuviese mas ele-

vado; así, siendo h' una cantidad tal que $gDh'=c$, se tendrá

$$w=\sqrt{2g(h+h')} \quad (680),$$

es decir, que *la velocidad* w *seria la misma que si la altura del nivel fuese* h+h'.

Si la altura del nivel del fluido sobre el orificio fuese muy grande, entónces la presion del aire en el orificio seria mayor que sobre el nivel del fluido, y en este caso deberíamos considerar á h' negativa en esta espresion, y seria $w=\sqrt{2g(h-h')}$.

Despreciando del mismo modo los términos multiplicados por k en la (ec. 675), se tiene $p=\Pi+gD(z-z')$ (681), de donde se puede concluir que *cuando el orificio es muy pequeño, la presion en un punto cualquiera del vaso es igual á la presion debida á la altura del nivel sobre este punto*; de modo que *esta presion á cada instante es la misma que si el fluido no tuviese ningun movimiento en el vaso.*

Estos dos teoremas relativos á la presion p y á la velocidad w, se verifican igualmente *cuando el nivel se baja, que cuando está constantemente á una misma altura.*

571 Cuando no se supone muy pequeño el orificio, es necesario que esté en el fondo de la vasija para que la hipótesis del paralelismo de las capas no se separe demasiado de la verdad; pero si se hace una abertura muy pequeña en el fondo ó en un parage cualquiera de un vaso, y la altura del agua sobre esta abertura es muy grande con relacion al ancho del vaso, la observacion de lo que pasa entónces prueba que este paralelismo se verifica sensiblemente en toda la estension de la masa fluida, escepto en las inmediaciones del orificio donde las moléculas de agua toman direcciones convergentes hácia este punto. Luego los resultados que acabamos de obtener, y que están fundados sobre la hipótesis del paralelismo de las capas, subsisten en el caso de un orificio muy pequeño horizontal ó inclinado; así, *la velocidad del agua que sale de un vaso por una abertura muy pequeña, cuyo plano tiene una inclinacion cualquiera, viene á ser siempre igual á la velocidad que un cuerpo pesado adquiere cayendo de la altura del nivel por encima de esta abertura.*

De aquí se deduce que si se da al chorro una direccion vertical por medio de un tubo, *las moléculas de agua que parten con esta velocidad se elevarán en el vacío á la misma altura del nivel.* Esto es en efecto lo que la esperiencia habia enseñado hace mucho tiempo. Ella manifiesta igualmente que si la direccion del chorro no es vertical, *el agua describe en el vacío una parábola, cuya amplitud depende de esta direccion y de la velocidad en el orificio.* En el aire libre la curva que describiria el chorro, tendria la rama descendente mas curva que la ascendente, y seria muy semejante á la (fig. 143).

572 *Conociendo la velocidad del fluido en el orificio, y la magnitud de este, se puede determinar con facilidad el volúmen de agua que sale del vaso en un tiempo dado.* En efecto, este volúmen durante el instan-

te dt es igual al producto $kwdt$, espresando siempre k la superficie del orificio y w la velocidad con que sale; luego si x representa el volúmen de agua que ha salido durante el tiempo t se tendrá $dx=kwdt$ (682), la cual integrada dará el valor de x en funcion de t.

En el caso de un orificio muy pequeño, se tiene $w=\sqrt{2gh}$; luego $dx=k\sqrt{2gh}\times dt$ (683), y $x=k\sqrt{2gh}\times t$ (684).

La cantidad de agua que sale por un orificio de un vaso, se llama el *gasto del orificio*, el cual se suele espresar por Q; en cuyo caso se tiene $Q=k\sqrt{2gh}t$ (685);

ecuacion por cuyo medio conocerémos una de las cuatro cantidades Q, k, h ó t, si se dan conocidas las otras tres; pues la g es la gravedad que es dada (ec. b ó c de la nota del § 162) en un parage cualquiera de la tierra.

573 Cuando el agua que sale por un orificio, no se remplaza ni en todo ni en parte por nueva agua que entre en el vaso, la velocidad con que sale el fluido por el orificio, disminuye gradualmente á medida que el fluido baja en el vaso.

En este caso, si suponemos que K esprese el area de la seccion del vaso por un plano que pase por la superficie superior del fluido al cabo del tiempo t, u la altura de que ha bajado el fluido durante este tiempo, y h la altura del fluido sobre el orificio al principio del tiempo, tendrémos que $h-u$ será la altura del fluido sobre el orificio al fin del tiempo t; por lo que la velocidad del fluido en el orificio será entónces (ec. 679) $w=\sqrt{2g(h-u)}$ (686).

Esta velocidad se puede considerar como constante en el tiempo dt; por lo que durante este tiempo saldrá por el orificio un prisma de fluido cuya base será k y la altura estará espresada por el espacio corrido uniformemente en el tiempo dt y con la velocidad w que será wdt; ó sustituyendo por w su valor será $dt\sqrt{2g(h-u)}$.

Así, el volúmen del fluido que haya salido en el instante dt, es $kdt\sqrt{2g(h-u)}$.

Pero durante este tiempo la superficie superior del fluido habrá bajado un espacio du; y el vaso ha perdido un cilindro de fluido cuya base es K y la altura du, por lo que estará espresado por Kdu; que igualando estos valores y despejando dt, sale $dt=\dfrac{Kdu}{k\sqrt{2g(h-u)}}$ (687).

Como la superficie K debe ser dada en funcion de u por la forma del vaso, el segundo miembro de esta ecuacion solo contiene á la variable u; por lo que integrando, se podrá conocer lo que baja sucesivamente la superficie superior del fluido en un vaso de una forma dada.

Si el vaso es un prisma ó un cilindro vertical, la superficie K es constante é igual á la seccion horizontal del cuerpo. Así, se tiene

$$t=\frac{K}{k\sqrt{2g}}\times \mathrm{S}.\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{h-u}}=-\frac{2K}{k\sqrt{2g}}\times\sqrt{h-u}+C.$$

Cuando el tiempo $t=0$, es cero tambien lo que baja la superficie superior del fluido, es decir, que se tiene al mismo tiempo $t=0$ y $u=0$; por lo que resulta $C=\frac{2K}{k\sqrt{2g}}\times\sqrt{h}$, luego $t=\frac{2K}{k\sqrt{2g}}\times(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})$ (688).

Para tener el tiempo en que se vacia el vaso, harémos $u=h$, lo que da $t=\frac{2K\sqrt{h}}{k\sqrt{2g}}=\frac{K}{k}\sqrt{\frac{2h}{g}}$ (689).

Si la figura del vaso fuese un sólido de revolucion cuyo ege fuese vertical, tendríamos que K seria la superficie de un círculo que tendria por radio la ordenada z de la curva generatriz. Luego se tendria $K=\pi z^2$ y la (ec. 687) dará $t=\frac{\pi}{k\sqrt{2g}}\times \mathrm{S}.\frac{z^2\mathrm{d}u}{\sqrt{h-u}}$ (690).

Por lo que para determinar el tiempo t en funcion de u, no faltaria mas que sustituir en vez de z su valor espresado en funcion de u, sacado de la ecuacion de la curva generatriz, é integrar, completando de modo que se tenga al mismo tiempo $t=0$ y $u=0$.

Esperimentos acerca de la salida de los fluidos por orificios ó tubos; de donde se deducen las modificaciones que se deben hacer á los resultados teóricos para que vayan conformes con los que se obtienen en la práctica.

574 Hasta ahora hemos prescindido de la velocidad que en el sentido horizontal debia animar (567) á las moléculas de una misma capa fluida; tampoco hemos tenido en consideracion que las moléculas del fluido al acercarse al orificio toman direcciones convergentes hácia él (*), lo que origina el que cuando han salido del vaso conservan todavía en parte estas direcciones; lo que produce una diminucion en la magnitud de la vena ó chorro, cuyo fenómeno se conoce con el nombre de *contraccion de la vena fluida*, y se verifica ya sea el orificio horizontal, vertical, ó tenga una posicion cualquiera.

575 Como los Geómetras al aplicar el cálculo á los diversos ramos de la Física en que no se tienen todavía demostrados los principios como

(*) *Todo esto se presenta á nuestros sentidos echando en la superficie superior del agua cuerpos pequeños cuyo peso específico sea mayor que el del agua; pues se nota que caen verticalmente hasta una distancia de 3 ó 4 pulgadas del orificio, desde donde principian á separarse de la direccion vertical y se dirigen hácia el orificio describiendo curvas mas ó ménos oblicuas, segun su distancia al orificio; todo lo cual se manifiesta en las* (figs. 191 y 192).

corresponde, se ven precisados á hacer varias hipótesis, que aunque muy próximas á ser verdaderas, en rigor se alejan algun tanto de la naturaleza ó no abrazan todas las circunstancias físicas que se verifican en sus operaciones, resulta que tienen precision de comparar despues los resultados teóricos con los que suministra la esperiencia, calcular las modificaciones que se deben hacer en las fórmulas para que correspondan con exactitud á los resultados de la esperiencia, y de este modo se tienen las fórmulas con la exactitud que basta para los usos de la vida.

Por esta causa para ver las modificaciones que se deben hacer á la fórmula (ec. 685), ya por haber prescindido de la velocidad horizontal de las capas, ya por la contraccion, ya porque acaso la velocidad en lo interior de la vena fluida será mayor que en la parte esterior, el medio mas directo y mas seguro en la práctica es comparar los gastos efectivos ya sea por orificios hechos en paredes delgadas, ya sea por tubos aditicios, con los que se obtienen por la (ec. 685).

Los esperimentos mas numerosos y exactos que se han hecho sobre este importante asunto son los de Mr. Bossut, quien presenta en su Hidrodinámica la siguiente tabla relativa á los orificios pequeños abiertos en paredes delgadas, á la que ha añadido Mr. Prony la cuarta columna que espresa la relacion de los resultados de la esperiencia con los de la teoría.

Alturas constantes del agua en el depósito espresadas en pies.	*Gastos teóricos en un minuto por un orificio circular de 1 pulgada de diámetro espresados en pulgadas cúbicas.*	*Gastos efectivos durante el mismo tiempo por el mismo orificio espresados en pulgadas cúbicas.*	*Relacion de los gastos efectivos con los gastos teóricos.*
1	4381	2722	0,62133
2	6196	3846	0,62073
3	7589	4710	0,62064
4	8763	5436	0,62034
5	9797	6075	0,62010
6	10732	6654	0,62000
7	11592	7183	0,61965
8	12392	7672	0,61911
9	13144	8135	0,61892
10	13855	8574	0,61883
11	14530	8990	0,61873
12	15180	9384	0,61819
13	15797	9764	0,61810
14	16393	10130	0,61795
15	16968	10472	0,617[illegible]6

576 Desde luego se puede notar por esta tabla que los gastos efectivos son, así como los gastos teóricos, sensiblemente proporcionales á las raices cuadradas de las alturas. Tomemos por egemplo las alturas 4 y 9, cuyas raices están en la relacion de 2:3; los gastos correspondientes tomados en la tercera columna son 5436 y 8135: números, cuya relacion es tambien al poco mas ó ménos la de 2:3.

Mr. Bossut ha reconocido ademas que bajo una misma altura de agua, los gastos eran proporcionales á las areas de los orificios; por lo que resulta que para los orificios pequeños *los gastos efectivos así como los teóricos están próximamente en razon compuesta de las raices cuadradas de las alturas y de las superficies de los orificios.*

577 Resulta de esto que debe haber una razon sensiblemente constante entre los productos efectivos y los productos teóricos para una altura de agua y una abertura de cualquier orificio pequeño. Esta relacion se ve por la tabla precedente que no se aleja de 0,62 que difiere poco de la fraccion $\frac{5}{8}$. Luego esta fraccion es el número por el cual se debe multiplicar la superficie efectiva del orificio del vaso, á fin de tener la superficie de la seccion de la vena fluida en el parage de su mayor contraccion, que se sustituirá al valor del orificio en la (ec.685); en cuyo caso se tendrá presente que se debe tomar la altura desde el nivel superior hasta el punto de la mayor contraccion que dista como un diámetro de la superficie del orificio.

578 Por lo que cuando el vaso se mantiene constantemente lleno, siendo h la altura del agua y k la superficie del orificio, la fórmula corregida para tener el gasto efectivo Q, durante un tiempo t, será

$$Q=0,62kt\sqrt{2gh}\ (691).$$

Si sustituimos en esta ecuacion en vez de la gravedad g el valor que tiene en Madrid que es 35,1 pies españoles, resultará

$$Q=0,62kt\sqrt{70,2h}=0,62\times8,3785\times kt\sqrt{h}=5,195kt\sqrt{h}\ (692);$$

donde Q espresa los pies cúbicos, k los pies cuadrados de la superficie del orificio O, h los pies que tiene de altura la superficie del fluido sobre el orificio, y t los segundos de tiempo.

Si el orificio fuese circular, tendríamos que espresando por D su diámetro, seria (I. 522 cor. 1.º) $=0,78539k82D^2$;

por lo que la fórmula se convertirá en $Q=4,08D^2t\sqrt{h}$ (693), que da

$$D=\sqrt{\frac{Q}{4,08t\sqrt{h}}}\ (694),\ t=\frac{Q}{4,08D^2h}\ (695),\ \text{y}\ h=\left(\frac{Q}{4,08D^2t}\right)^2\ (696).$$

579 Las fórmulas precedentes se pueden aplicar á casi todos los casos de la práctica; pero cuando se quiera mayor precision convendrá sustituir al coeficiente 0,62 en la (ec. 691) el número de la cuarta co-

lumna de la tabla que se refiere á la altura de agua que se tiene ó que mas se aproxima. Supongamos que se quiera tener el gasto en 8 minutos ó 480 segundos de un orificio de 18 lineas ó 0,125 pies de diámetro, bajo de una altura de agua de 11 pies y 3 pulgadas. Tomo en la cuarta columna de la tabla el número 0,61873 que está enfrente de 11 pies, y en vez de hacer uso de la (ec. 691), me valdré de esta

$$Q=0{,}61873kt\sqrt{2gh};$$

que en sustituyendo el valor 0,78[illegible]4(0,125)^2 de k así como los de t, g y h, se trasformará en

$$Q=0{,}61873\times0{,}012[illegible]\times480\sqrt{70{,}2\times11{,}25}=102{,}4 \text{ pies cúbicos.}$$

580 Cuando se adapta al orificio un tubo adicional es menor la contraccion, como resulta de los esperimentos de Mr. Bossut, quien nos presenta en la obra citada la siguiente tabla, á la que ha añadido Mr. Prony la cuarta columna que espresa la relacion entre los resultados teóricos y los de la esperiencia.

Alturas constantes del agua en el depósito por encima del orificio esterior del tubo espresadas en pies.	*Gastos teóricos en un minuto por un orificio circular de una pulgada de diámetro espresados en pulg^s. cúbicas.*	*Gastos efectivos durante el mismo tiempo por un tubo cilíndrico que tiene una pulgada de diámetro y dos de longitud espresados tambien en pulg.^s cúbicas.*	*Relacion de los gastos efectivos con los gastos teóricos.*
1	4381	3539	0,81781
2	6196	5002	0,80729
3	7589	6126	0,80724
4	8763	7070	0,80681
5	9797	7900	0,80638
6	10732	8654	0,80638
7	11592	9340	0,80573
8	12392	9975	0,80496
9	13144	10579	0,80485
10	13855	11151	0,80483
11	14530	11693	0,80477
12	15180	12205	0,80403
13	15797	12600	0,80390
14	16393	13177	0,80382
15	16968	13620	0,8[illegible]327

Comparando esta tabla con la anterior, se ve que los gastos efectivos son constantemente mayores, y que *la relacion media de los gastos efectivos, por tubos pequeños adicionales, con los gastos hechos por orificios abiertos en paredes delgadas, es, á igualdad de circunstancias, la de* 81:62 *sobre poco mas ó ménos.*

581 Aquí tambien observamos que los gastos hechos por el mismo orificio son siempre sensiblemente proporcionales á las raices cuadradas de las alturas; y como por esperimentos repetidos se ha reconocido que bajo la misma altura estos gastos son proporcionales á las superficies de los orificios, no tendrémos otro cambio que hacer en la fórmula (ec. 685) que da los gastos teóricos, sino el de multiplicar la superficie del orificio por el número 0,81, lo que dará la fórmula siguiente análoga á la (ec. 691) $Q=0{,}81kt\sqrt{2gh}$ (697).

Como en el caso de un tubo adicional, k espresa casi siempre el area de un círculo, llamando D su diámetro se tendrá $k=0{,}7854D^2$; y observando que en Madrid $g=35{,}1$ pies, resultará

$$Q=0{,}81\times0{,}7854\times D^2t\sqrt{70{,}2h}=0{,}81\times0{,}7854\times8{,}3785\times tD^2\sqrt{h}=$$
$$5{,}33\times tD^2\sqrt{h}\ (698),$$

que da

$$D=\sqrt{\frac{Q}{5{,}33\times t\sqrt{h}}}\ (699),\quad t=\frac{Q}{5{,}33D^2\sqrt{h}}\ (700),\quad h=\left(\frac{Q}{5{,}33tD^2}\right)^2\ (701).$$

Estas fórmulas son suficientes en casi todos los cálculos que ofrece la práctica; pero si se quiere mayor exactitud, es menester siguiendo el método indicado (579) sustituir en la (ec. 697) al coeficiente medio 0,81, el que corresponde á la altura del agua en la cuarta columna de la tabla.

582 Todo lo que acabamos de decir de los gastos por tubos adicionales, supone que el agua salga á caño lleno; pero si el tubo es demasiado pequeño, para que el agua pueda ántes de salir correr el largo de su pared, entónces las circunstancias de la salida serán las mismas que si no hubiese tubo, y será menester valuar el gasto por la (ec. 691). Los mismos esperimentos de Mr. Bossut dan á conocer que para que el agua pueda seguir la pared del tubo es menester que la longitud de este sea por lo ménos doble de su diámetro.

583 Hemos supuesto hasta ahora que el tubo era cilíndrico; si se hace variar esta forma, se harán variar los productos, aunque todas las demas circunstancias sean iguales; se puede juzgar de esta variacion por los esperimentos descritos en el tratado de *Castellis* de Mr. Poleni y citados en la Hidrodinámica de Bossut. Estos esperimentos han tenido por objeto el comparar los productos de un orificio hecho en una pared delgada por un tubo cilíndrico, y por cuatro cónicos, cuyos resultados se presentan en la siguiente tabla.

Altura constante del agua en el depósito 256 lineas, ó 1 pie 9 pulgadas 4 lineas.	Longitud de cada tubo, 92 lineas ó 7 pulgadas 8 lineas.		Diámetro interior.	Diámetro esterior.	Producto en un minuto espresado en pulgad.s cúbicas.
			lineas.		
		Orificio abierto en una pared delgada. . . .	26	26	15877
		Tubo cilíndrico.	26	26	23434
		1.er tubo cónico.	33	26	24758
		2.o tubo cónico.	42	26	24619
		3.er tubo cónico.	60	26	24345
		4.o tubo cónico.	118	26	23687

584 Pasemos ya á considerar los vasos que se vacian libremente por orificios pequeños.

Los esperimentos sobre la duracion de las salidas de los vasos que se vacian libremente, no han podido hacerse al ménos de un modo concluyente, sobre la duracion de la salida total de estos vasos. Se ha esperimentado que cuando el agua habia llegado á una pequeña distancia como de algunas pulgadas hácia un orificio horizontal, se formaba por encima de este orificio una concavidad de figura cónica ó de embudo, que disminuía el producto y originaba el que no se pudiese señalar á punto fijo el fin de la salida. Por esta causa se han limitado á medir el tiempo de la salida desde una altura determinada hasta diferentes alturas menores que aquella, pero bastante grandes para que el embudo no pueda verificarse.

En este caso la (ec. 688) nos dará el tiempo que tarda en bajar la superficie del líquido desde la altura h del nivel primitivo del fluido sobre el fondo del vaso hasta la altura u sobre dicho fondo; solo que deberémos sustituir en vez de k la superficie del orificio multiplicada por 0,62 si está hecho en paredes delgadas, ó por 0,81 si el caño sale por un tubo adicional. Luego tendrémos en el primer caso

$$t=\frac{2K}{0{,}62k\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})=\frac{3{,}226K}{k\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u}) \quad (702).$$

Y en el segundo, esto es, cuando sale el líquido por un tubo adicional,

se tiene $t=\dfrac{2K}{0{,}81k\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})=\dfrac{2{,}369K}{k\sqrt{2g}}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})$ (703).

585 Para convencernos de la exactitud de estas fórmulas observaré-

mos que comparando los resultados que dan, con los obtenidos por los esperimentos de Mr. Bossut, se halla una conformidad exacta, principalmente si se tiene cuidado de atender á todas las circunstancias que pueden hacer variar los tiempos dados por la observacion.

Lo que acabamos de decir se aplica principalmente á los orificios horizontales; pero tambien se puede aplicar á los laterales, cuando el agua se halle un poco mas elevada que el borde superior del orificio, tomando por la altura h del agua la distancia del centro de gravedad del orificio á la superficie superior del líquido.

Mr. Hachette se halla en la actualidad trabajando sobre el importante asunto de la *contraccion de la vena fluida*, teniendo en consideracion la magnitud del orificio, su forma, la de la superficie sobre que está colocado, la adicion de un tubo cilíndrico ó cónico, la altura del líquido, su naturaleza y el fluido que le rodea; y segun los trabajos que ya ha presentado á la Academia de Ciencias de Paris en el año de 1816, se debe esperar que obtendrá resultados útiles en la práctica.

Ecuaciones generales del movimiento de los fluidos.

586 Vamos ahora á considerar el movimiento de los fluidos bajo el punto de vista mas general, y á buscar las ecuaciones del movimiento de la masa fluida LBCD (fig. 172), cuyas condiciones de equilibrio hemos determinado (496 y siguientes). Este fluido puede ser homogeneo ó heterogeneo, incompresible ó elástico, todos sus puntos los suponemos solicitados por fuerzas dadas, tales como sus atracciones mutuas, y otras atracciones dirigidas hácia centros fijos ó hácia centros móviles; pero en cualquier número que sean las fuerzas que obran sobre un mismo punto, las suponemos reducidas á tres, paralelas á tres eges fijos y rectangulares AX, AZ, AU que serán tambien los eges de las coordenadas. Así, siendo x, z, u, las coordenadas de un punto cualquiera de la masa fluida, representarémos por X, Z, U, las componentes paralelas á los eges de las fuerzas que obran sobre este punto. Las cantidades X, Z, U, son simplemente funciones de x, z, u, cuando las fuerzas de que son las componentes no mudan de intensidad durante el movimiento y se dirigen hácia centros fijos; cuando estas fuerzas se dirijan hácia centros móviles y cuando provengan de la atraccion mutua de las moléculas fluidas, los valores de X, Z, U, contendrán tambien al tiempo t; de modo que espresando en un instante cualquiera por t el tiempo pasado desde el orígen del movimiento, los valores de X, Z, U, serán en general funciones de x, z, u y t.

587 Descompongamos del mismo modo, segun los eges AX, AZ, AU, la velocidad del punto que corresponde á las coordenadas x, z, u, y sean v, v', v'', las componentes respectivamente paralelas á estos eges, y tendrémos que v, v', v'', serán funciones desconocidas de x, z, u y t. Si se quieren comparar entre sí las velocidades de una misma molé-

cula fluida en dos instantes consecutivos, será necesario suponer que la variable t se convierte en $t+\mathrm{d}t$, y al mismo tiempo las coordenadas x, z, u de estas moléculas en $x+\mathrm{d}x$, $z+\mathrm{d}z$, $u+\mathrm{d}u$;
y como v, v', v'' son las velocidades respectivas segun la direccion de los eges, serán iguales (374) á $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$;
lo que da $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z=v'\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}u=v''\mathrm{d}t$;
luego tendrémos que $x+v\mathrm{d}t$, $z+v'\mathrm{d}t$, $u+v''\mathrm{d}t$,
serán las coordenadas de la molécula que consideramos al fin del tiempo $t+\mathrm{d}t$. Luego para tener la diferencial de las cantidades v, v', v'' relativas á una misma molécula, es necesario diferenciar con relacion á t y con relacion á x, z, u, tomando $v\mathrm{d}t$, $v'\mathrm{d}t$, $v''\mathrm{d}t$, por incrementos de estas últimas variables. De esta manera se tendrá

$$\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\times v\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\times v'\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\times v''\mathrm{d}t \quad (704),$$

$$\mathrm{d}v'=\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}x}\times v\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}z}\times v'\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}u}\times v''\mathrm{d}t \quad (705),$$

$$\mathrm{d}v''=\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}t}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}x}\times v\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}z}\times v'\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}u}\times v''\mathrm{d}t \quad (706).$$

Concibamos dividida como en la investigacion de las condiciones de equilibrio, la masa fluida LBCD en paralelepípedos rectangulares é infinitamente pequeños, cuyos lados sean paralelos á los eges AX, AZ, AU. El volúmen del elemento que corresponde á las coordenadas x, z, u, tendrá por espresion el producto $\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}u$;
si espresamos por D la densidad del fluido que podemos considerar como constante en toda la estension de este volúmen, tendrémos que la masa de dicho elemento será igual á $D\times\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}u$.
Representemos tambien por p la presion, referida á la unidad de superficie, que el fluido que le rodea egerce sobre las diferentes caras de este paralelepípedo, y que es la misma en todas partes en virtud de la propiedad fundamental de los fluidos; con lo cual tendrémos que las dos cantidades D y p son tambien funciones desconocidas de x, z, u y t. Luego las incógnitas del problema que nos ocupa son las cinco cantidades v, v', v'', D y p. *Cuando estén determinadas en funciones de* x, z, u y t, *el estado de la masa fluida será conocido á cada instante*; pues que entónces se conocerá la velocidad, la direccion, la densidad del fluido, y la presion que egerce en el punto que se quiera tomado en la superficie ó en lo interior de esta masa. Por lo que nos vamos á dirigir á encontrar las ecuaciones de que dependen los valores de estas cinco incógnitas y que dan la solucion completa del problema.

588 El principio de D'Alembert *nos suministra inmediatamente tres*

de estas ecuaciones. En efecto, las velocidades perdidas durante el instante dt por la *molécula* sometida á la accion de las fuerzas X, Z, U, son $Xdt-dv$, $Zdt-dv'$, $Udt-dv''$;
porque dv, dv', dv'', espresan los incrementos de velocidad que efectivamente hay durante este instante, y Xdt, Zdt, Udt, son las que producirian las fuerzas X, Z, U, si la molécula estuviese libre y aislada. Dividiendo estas velocidades por dt, á fin de tener la medida de las fuerzas variatrices que fuesen capaces de producirlas, y espresando estas fuerzas por X', Z', U', y poniendo por dv, dv', dv'' sus valores precedentes, se halla

$$X-\frac{dv}{dt}-\frac{dv}{dx}\times v-\frac{dv}{dz}\times v'-\frac{dv}{du}\times v''=X' \quad (707),$$

$$Z-\frac{dv'}{dt}-\frac{dv'}{dx}\times v-\frac{dv'}{dz}\times v'-\frac{dv'}{du}\times v''=Z' \quad (708),$$

$$U-\frac{dv''}{dt}-\frac{dv''}{dx}\times v-\frac{dv''}{dz}\times v'-\frac{dv''}{du}\times v''=U' \quad (709).$$

§ 589 Pero en virtud del principio citado *el equilibrio se verificaria en la masa fluida, si todas las moléculas fuesen solicitadas por fuerzas capaces de imprimirles las velocidades perdidas ó ganadas á cada instante*; luego las ecuaciones generales del equilibrio de los fluidos halladas (497) deben quedar satisfechas, tomando X', Z', U', por las fuerzas variatrices paralelas á las coordenadas que obran sobre todos los puntos de un elemento cualquiera, y que están representadas por X, Z, U, en dichas ecuaciones generales; por consiguiente las (ecs. 631, 632, 633) nos darán $\frac{dp}{dx}=DX'$ (710), $\frac{dp}{dz}=DZ'$ (711), $\frac{dp}{du}=DU'$ (712);
ó poniendo por X', Z', U', sus valores y dividiendo por D, se tendrá

$$\frac{1}{D}\times\frac{dp}{dx}=X-\frac{dv}{dt}-\frac{dv}{dx}\times v-\frac{dv}{dz}\times v'-\frac{dv}{du}\times v'' \quad (713),$$

$$\frac{1}{D}\times\frac{dp}{dz}=Z-\frac{dv'}{dt}-\frac{dv'}{dx}\times v-\frac{dv'}{dz}\times v'-\frac{dv'}{du}\times v'' \quad (714),$$

$$\frac{1}{D}\times\frac{dp}{du}=U-\frac{dv''}{dt}-\frac{dv''}{dx}\times v-\frac{dv''}{dz}\times v'-\frac{dv''}{du}\times v'' \quad (715).$$

§ 590 Cada uno de los elementos en que hemos dividido la masa fluida, mudará de forma durante el instante dt, y mudará aun de volúmen si el fluido es compresible; pero como su masa debe siempre permanecer la misma, se sigue que si buscamos lo que viene á ser su volúmen y su densidad al fin del tiempo $t+dt$, su producto deberá ser el mismo que al fin del tiempo t; luego igualando á cero la diferencial de este producto, resultará una nueva ecuacion del movimiento.

{ 591 Para formar esta ecuacion, consideremos el paralelepípedo rectangular, cuyo volúmen estaba espresado por $dxdzdu$ al fin del tiempo t, y veamos la forma que tomará esta porcion del fluido al fin del tiempo $t+dt$. Sea m (fig. 193) el vértice de este paralelepípedo que corresponde á las coordenadas x, z, u, sean tambien mk, ml, mn los tres lados adyacentes á este vértice y respectivamente paralelos á los eges AX, AZ, AU, de modo que se tenga $mn=du$, $ml=dz$, $mk=dx$; supongamos que e, f, g, h, son los otros cuatro vértices, y que durante el instante dt los ocho puntos m, n, l, k, e, f, g, h, se trasportan á m', n', l', k', e', f', g', h', y tendrémos que *el poliedro cuyos vértices sean estos últimos puntos será aun un paralelepípedo*; y para probarlo determinarémos y compararémos entre sí las longitudes y direcciones de sus doce lados $m'n'$, $m'l'$ &c.

{ 592 Las coordenadas x, z, u, del punto m al fin del instante dt vienen á ser $x+vdt$, $z+v'dt$, $u+v''dt$. Luego estas cantidades son las coordenadas del punto m'; y de ellas se deducirán las de cualquier otro vértice, remplazando en ellas x, z, u, por las coordenadas primitivas de este vértice; por lo que se tendrán las coordenadas de n', conservando en ellas x y z y poniendo $u+du$ en vez de u; porque x, z, y $u+du$ son las coordenadas de n; de este modo las coordenadas de n' serán

$$x+vdt+\frac{dv}{du}\times dudt,\quad z+v'dt+\frac{dv'}{du}\times dudt,\quad u+du+v''dt+\frac{dv''}{du}\times dudt.$$

{ 593 Conociendo las coordenadas de los dos puntos m' y n', la longitud $m'n'$ será (II. 180)

$$m'n'=\sqrt{\left(\frac{dv}{du}\right)^2\times du^2dt^2+\left(\frac{dv'}{du}\right)^2\times du^2dt^2+\left(du+\frac{dv''}{du}\times dudt\right)^2}\ (716);$$

estrayendo la raiz cuadrada y despreciando los términos infinitamente pequeños de tercer órden, se tiene $m'n'=du+\frac{dv''}{du}\times dudt$ (717).

Las coordenadas de e' se deducirán de las de m', y las de f' de las de n', poniendo en ellas $x+dx$, $z+dz$ en vez de x y de z; por consiguiente la longitud del lado $e'f'$ se deducirá del mismo modo de la del lado $m'n'$; lo que da

$$e'f'=du+\frac{dv''}{du}\times dudt+\frac{d^2v''}{dudx}\times dxdudt+\frac{d^2v''}{dudz}\times dzdudt\ (718);$$

luego despreciando los últimos términos que son del tercer órden, el valor de $e'f'$ será el mismo que el de $m'n'$. Del mismo modo se hallará que los lados $k'h'$ y $l'g'$ son iguales al lado $m'n'$ sin mas diferencia que cantidades de tercer órden, de modo que se tiene $m'n'=e'f'=k'h'=l'g'$. Si se muda u en z, y v'' en v' en el valor de $m'n'$ se convertirá en el de $m'l'$, y será $m'l'=\mathrm{d}z+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}z}\times\mathrm{d}z\mathrm{d}t$ (719); mudando del mismo modo u en x y v'' en v, se tendrá el valor de $m'k'$ que será $m'k'=\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\times\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ (720).

Tambien se hallará $\begin{cases} m'l'=k'e'=h'f'=n'g', \\ m'k'=n'h'=g'f'=l'e'. \end{cases}$

Donde se ve que los lados que eran iguales entre sí en el paralelepípedo primitivo, han permanecido aun iguales despues de su mudanza de forma; el paralelismo de estos lados es una consecuencia de su igualdad; por consiguiente el elemento que consideramos conserva al fin del instante dt la forma de un paralelepípedo, pero que ya no es rectangular.

594 El volúmen de este elemento se obtendrá multiplicando una de sus caras, por egemplo la cara $m'k'e'l'$, por la perpendicular $m'q$ tirada desde el vértice m' sobre esta cara; el area del paralelogramo $m'k'e'l'$ es igual al producto de sus dos lados $m'k'$, y $m'l'$ multiplicada (I. 649) por el seno del ángulo $m'l'e'$; luego el volúmen del nuevo paralelepípedo será igual á $m'n'\times m'l'\times m'k'\times\text{sen}.m'l'e'\times\text{sen}.m'n'h'$. Pero los ángulos $m'l'e'$ y $m'n'h'$ eran rectos en el paralelepípedo primitivo; luego cada uno de ellos no se puede ahora diferenciar de $\frac{1}{2}\pi$ sino una cantidad infinitamente pequeña; pero el seno de un ángulo de esta naturaleza no difiere de la unidad sino en una cantidad infinitamente pequeña del segundo órden, pues es el senoverso de la diferencia de dichos arcos; luego si se desprecian los términos del quinto órden será necesario hacer $\text{sen}.m'l'e'=1$ y $\text{sen}.m'n'h'=1$ en el producto precedente, lo que lo reducirá á $m'n'\times m'l'\times m'k'$.

Poniendo en vez de $m'n'$, $m'l'$, $m'k'$ los valores que se acaban de dar, efectuando la multiplicacion y despreciando siempre los términos del quinto órden, resulta $\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}u\left(1+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}z}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}v''}{\mathrm{d}u}\times\mathrm{d}t\right)$.

Esta es al fin del tiempo $t+\mathrm{d}t$ la espresion del volúmen del elemento que era dxdzdu al fin del tiempo t; y siendo la densidad D una funcion de t, x, z, u, se sigue que cuando t se convierte en $t+\mathrm{d}t$, y al mismo tiempo x, z, u se mudan en $x+v\mathrm{d}t$, $z+v'\mathrm{d}t$, $u+v''\mathrm{d}t$, ella viene á ser $D+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}\times\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}x}\times v\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}z}\times v'\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}u}\times v''\mathrm{d}t$.

Multiplicando esta densidad por el volúmen correspondiente, el producto espresa la masa del elemento al fin del tiempo $t+dt$. Quitando el término $Ddxdzdu$ que representa su masa al fin del tiempo t, se tendrá la variacion de esta masa, cuya variacion debe ser igual con cero. Despreciando los términos en que se halla el cuadrado de dt, y suprimiendo los factores $dxdzdu$ y dt comunes á todos los términos, se halla

$$\frac{dD}{dt}+\frac{dD}{dx}\times v+\frac{dD}{dz}\times v'+\frac{dD}{du}\times v''+D\times\frac{dv}{dx}+D\times\frac{dv'}{dz}+D\times\frac{dv''}{du}=0\ (721),$$

ó lo que es lo mismo $\frac{dD}{dt}+\frac{d.Dv}{dx}+\frac{d.Dv'}{dz}+\frac{d.Dv''}{du}=0$ (722).

595 Hasta aquí no hemos distinguido los fluidos elásticos de los incompresibles; y las (ecs. 707, 708, 709 y 722) pertenecen al movimiento de estas dos especies de cuerpos; pero en el caso de los fluidos incompresibles la (ec. 722) se descompone en otras dos; porque entónces no solo la masa de cada elemento debe permanecer constantemente la misma, sino que la densidad y el volúmen deben tambien ser invariables; luego igualando separadamente á cero la variacion de la densidad y la del volúmen, tendrémos estas dos ecuaciones

$$\frac{dD}{dt}+\frac{dD}{dx}\times v+\frac{dD}{dz}\times v'+\frac{dD}{du}\times v''=0\ (723),\quad \frac{dv}{dx}+\frac{dv'}{dz}+\frac{dv''}{du}=0\ (724),$$

que remplazan á la (ec. 722) y que unidas á las (ecs. 707, 708 y 709) servirán para determinar las cinco incógnitas p, D, v, v', v'', en funcion de x, z, u, t. Cuando el fluido incompresible es homogeneo, la densidad D es una cantidad constante, lo que hace idéntica la (ec. 723); entónces solo se tienen cuatro incógnitas p, v, v', v'' cuya determinacion depende de las (ecs. 707, 708 y 709) y de la (ec. 724).

596 Con relacion á los fluidos elásticos tampoco tenemos mas de cuatro ecuaciones, á saber, las (ecs. 707, 708, 709 y 722); pero como en esta especie de fluidos la densidad está siempre unida á la presion, esta circunstancia reduce á una sola las dos incógnitas D y p. Si la temperatura es la misma en toda la estension de la masa fluida, se tendrá $p=KD$, siendo K un coeficiente constante y dado; sustituyendo este valor de p en las (ecs. 713, 714 y 715), resulta

$$K\times\frac{d.\log.D}{dx}=X-\frac{dv}{dt}-\frac{dv}{dx}\times v-\frac{dv}{dz}\times v'-\frac{dv}{du}\times v''\ (725),$$

$$K\times\frac{d.\log.D}{dz}=Z-\frac{dv'}{dt}-\frac{dv'}{dx}\times v-\frac{dv'}{dz}\times v'-\frac{dv'}{du}\times v''\ (726),$$

$$K\times\frac{d.\log.D}{du}=U-\frac{dv''}{dt}-\frac{dv''}{dx}\times v-\frac{dv''}{dz}\times v'-\frac{dv''}{du}\times v''\ (727);$$

reuniéndolas á la (ec. 722) se tendrán las cuatro ecuaciones necesarias para determinar los valores de D, v, v', v''. Cuando la temperatura varíe segun una ley conocida, de modo que la que se verifique á cada instante y para cada punto del espacio sea una funcion dada de t y de las coordenadas x, z, u, el coeficiente K será tambien una funcion dada de estas variables, y las (ecs. 725, 726 y 727) bastarán aun para la determinacion de los valores de p, v, v' y v''.

597 De esta análisis resulta que ya que se trate del movimiento de un fluido incompresible, homogeneo ó heterogeneo, ó del de un fluido elástico cuya temperatura puede ser constante ó variable segun una ley dada, se tendrá en todos los casos un número de ecuaciones igual al de las incógnitas que comprende el problema; pero la integracion general de estas ecuaciones es imposible por los medios conocidos hasta el dia; y aun cuando se llegase á integrarlas, simplificándolas por alguna hipótesis particular, faltaria el determinar en virtud del estado del fluido en el orígen del movimiento, las funciones arbitrarias que contienen sus integrales, lo que presenta aun grandísimas dificultades.

Fin de la parte primera.

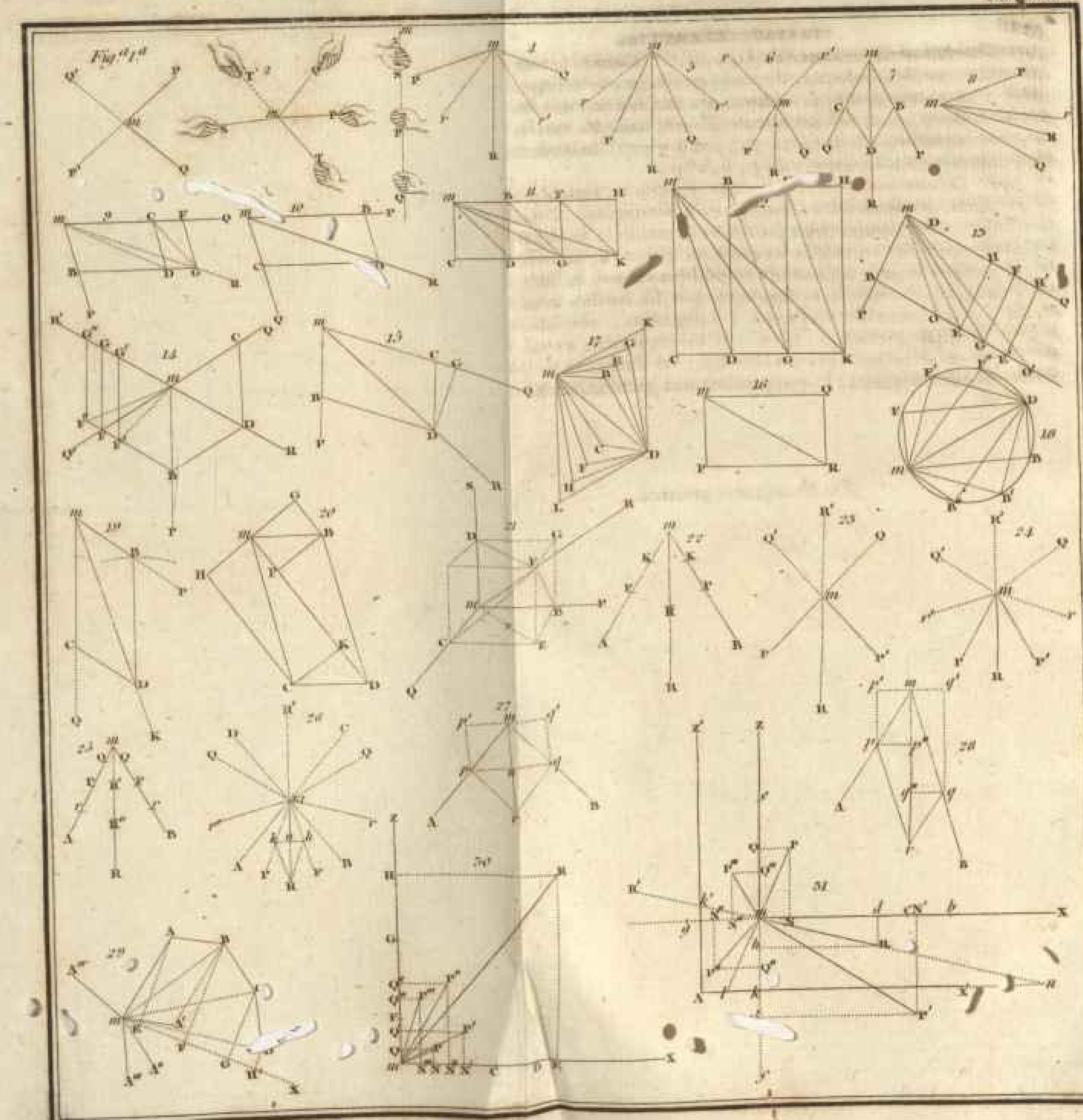
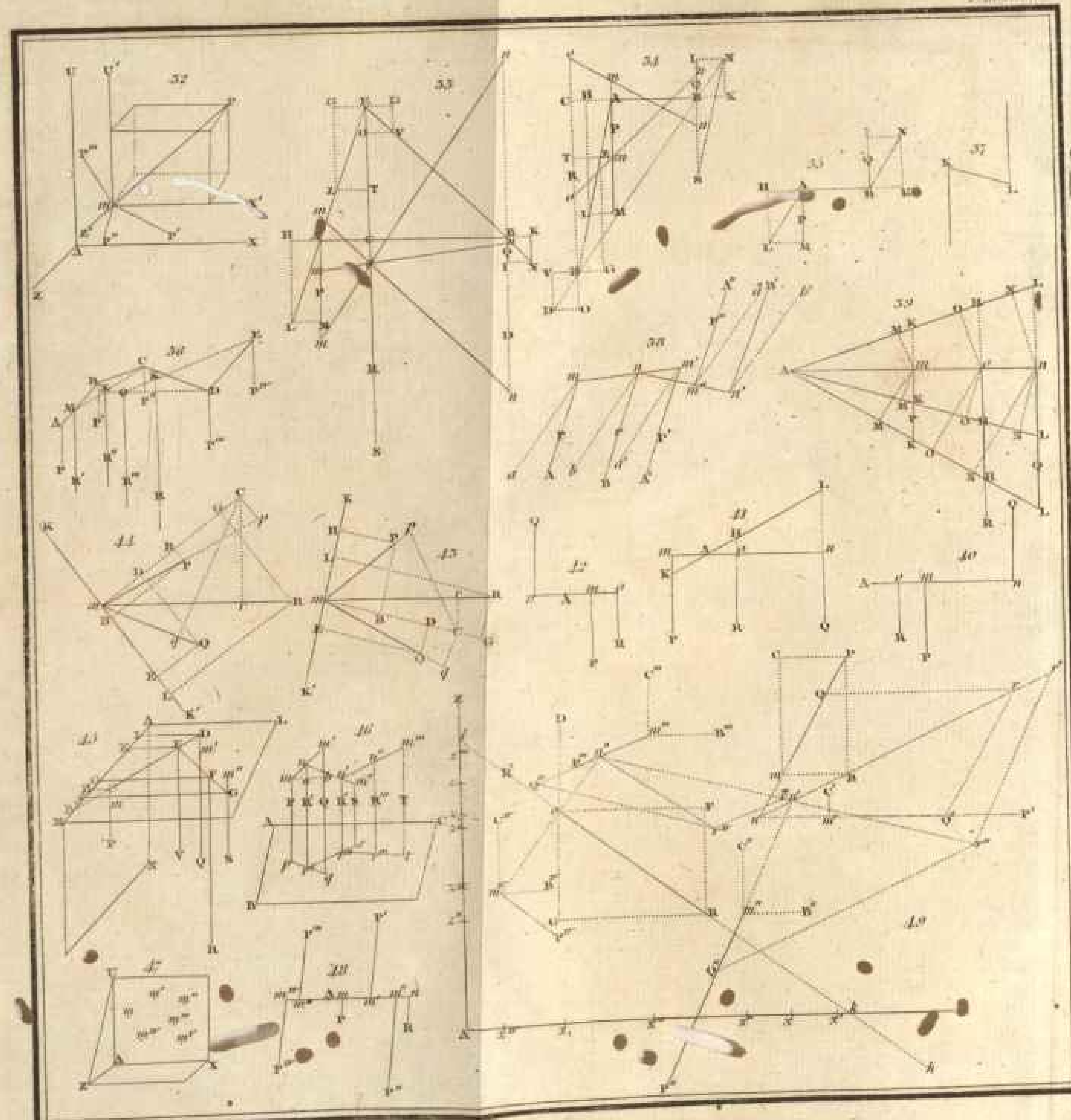
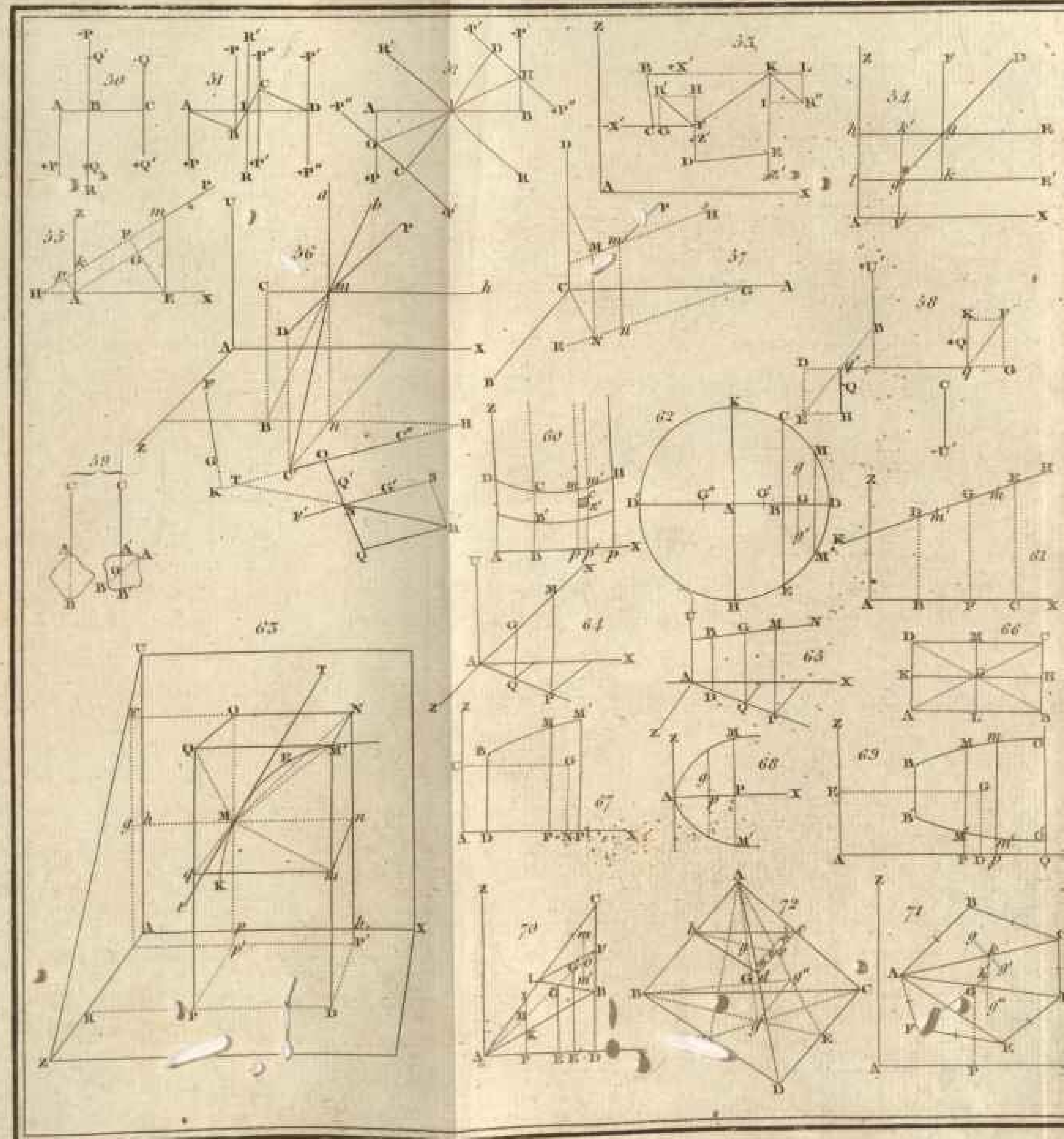
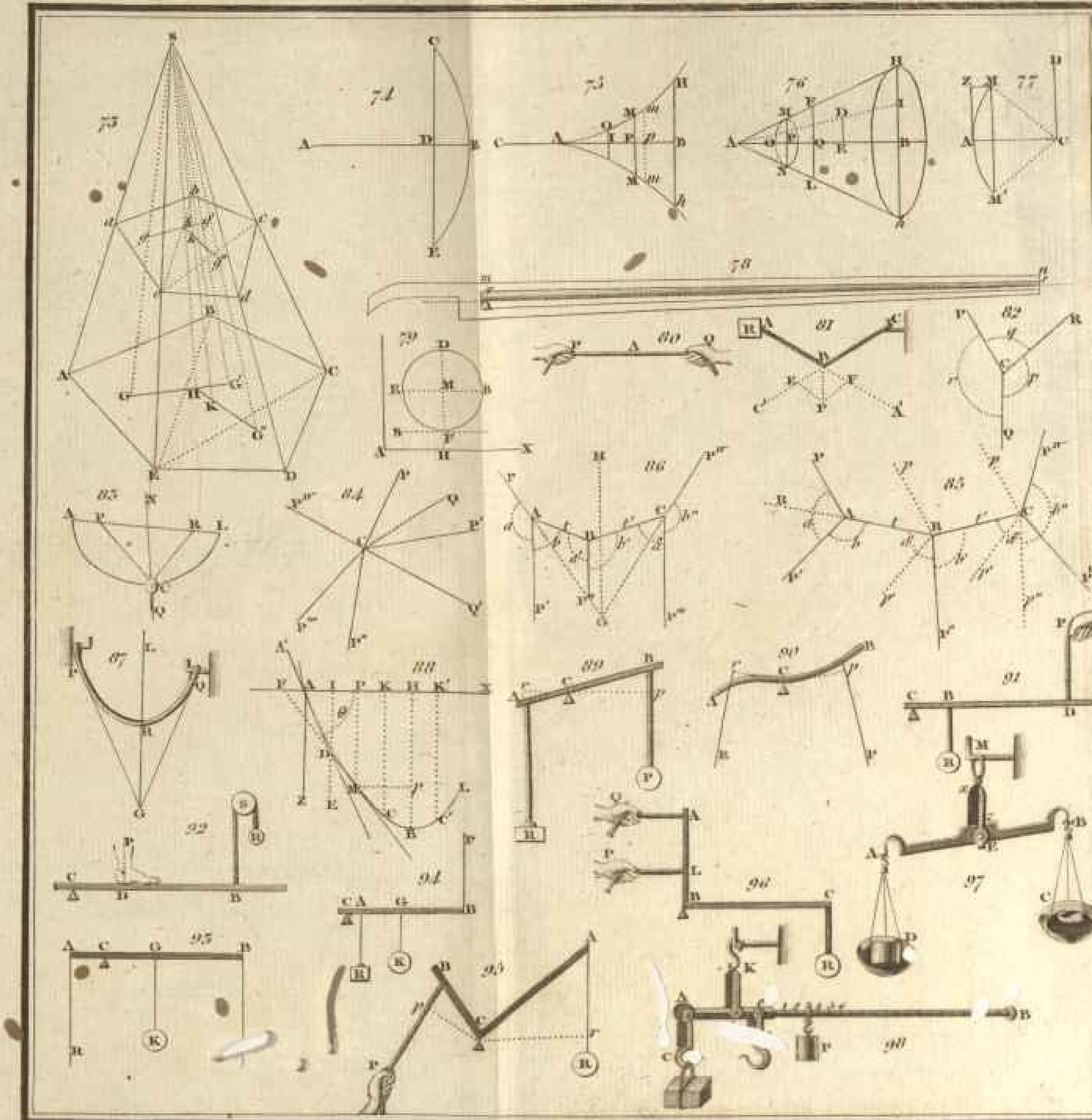
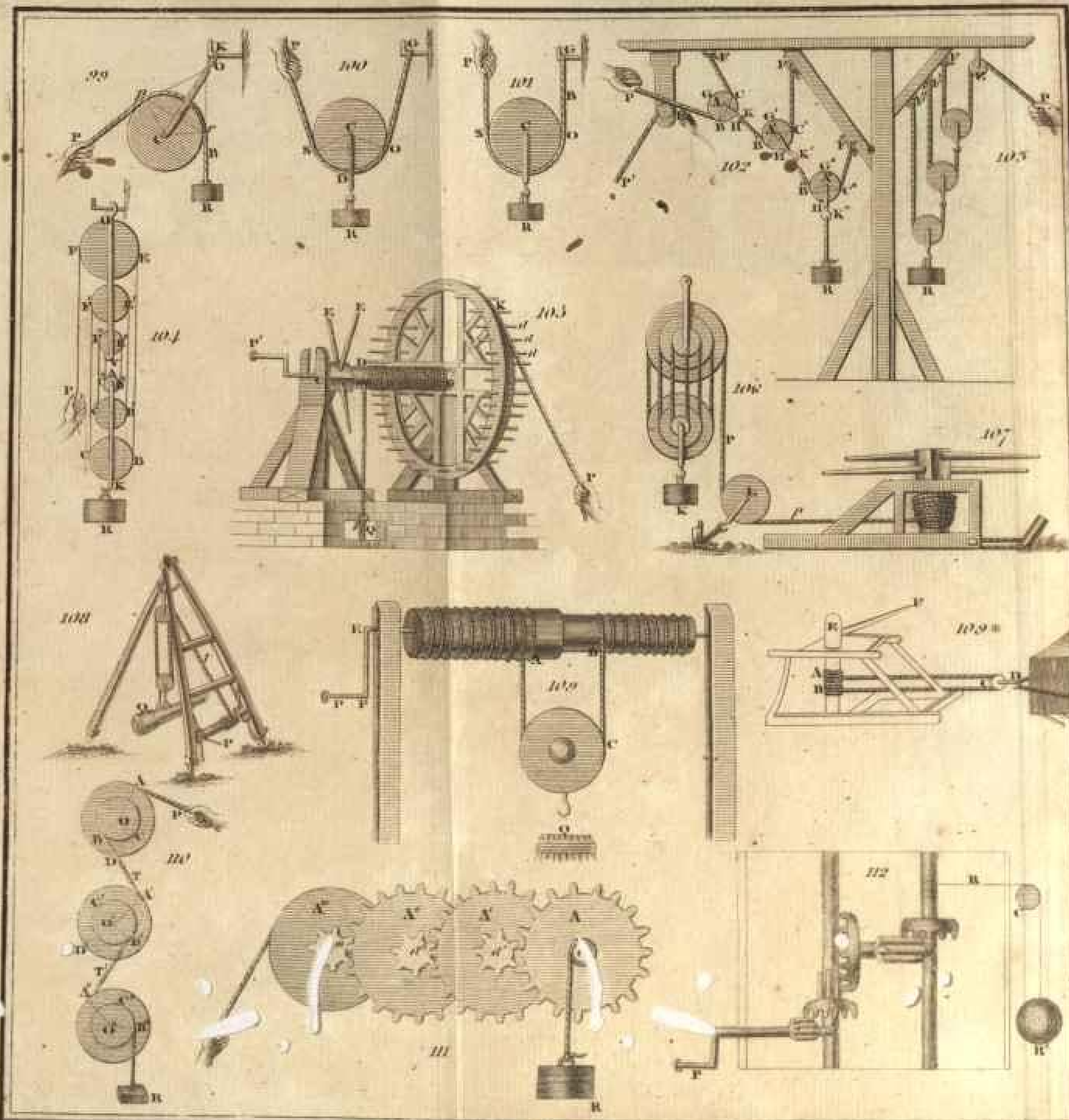


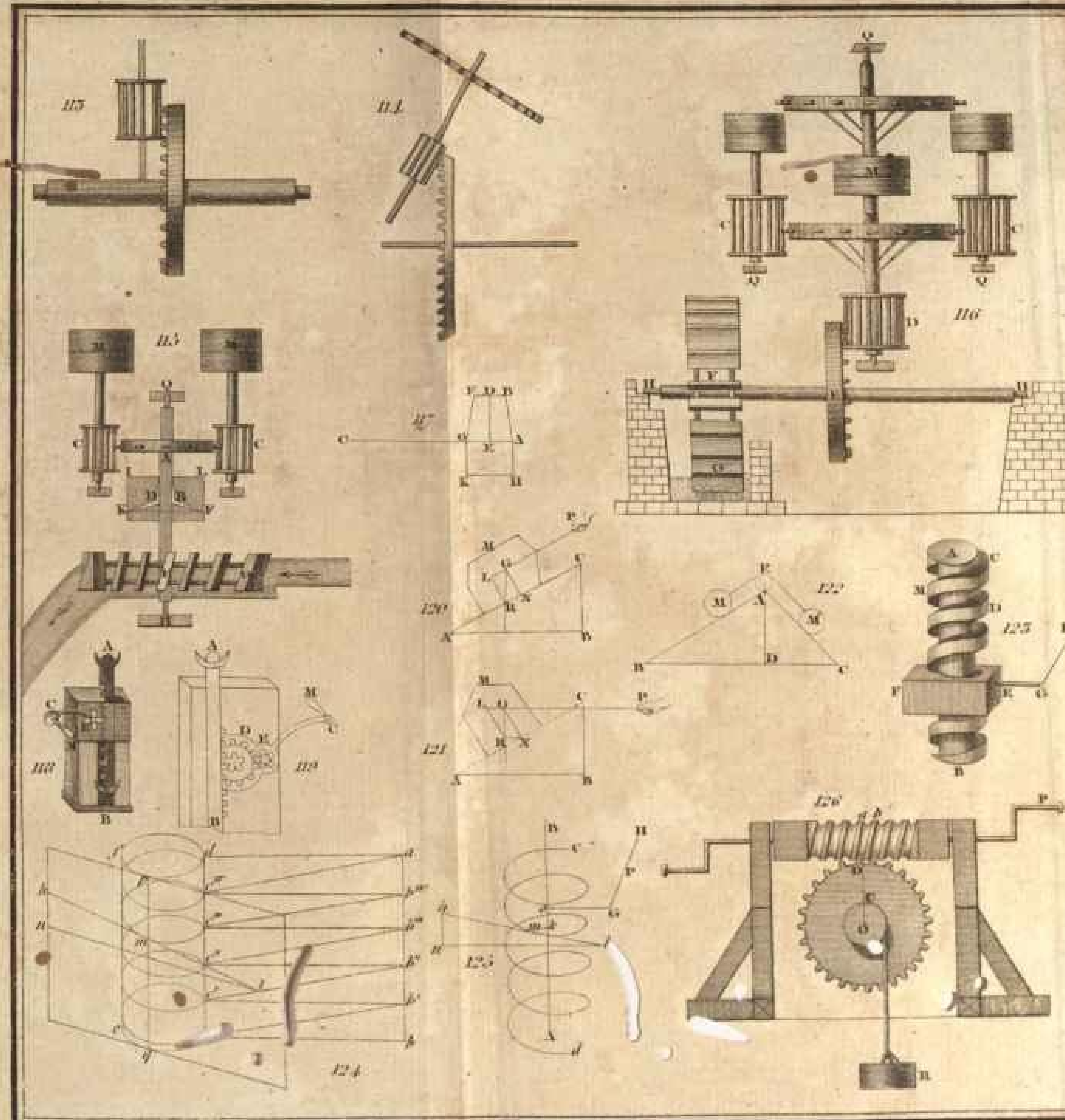
Fig.ª 1.ª

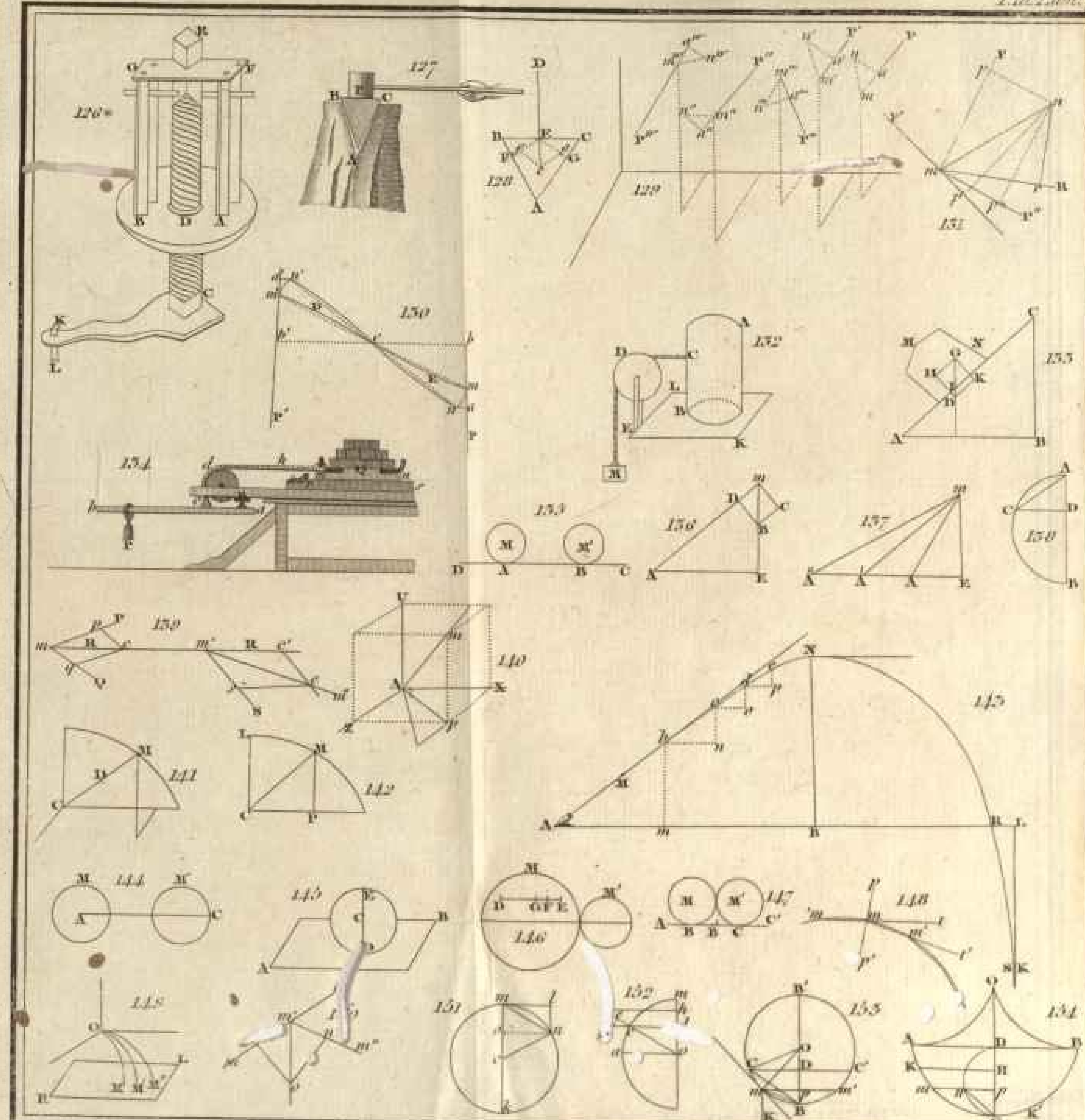

32
33
34
35
37
36
38
39
44
43
42
41
40
45
46
49
47
48



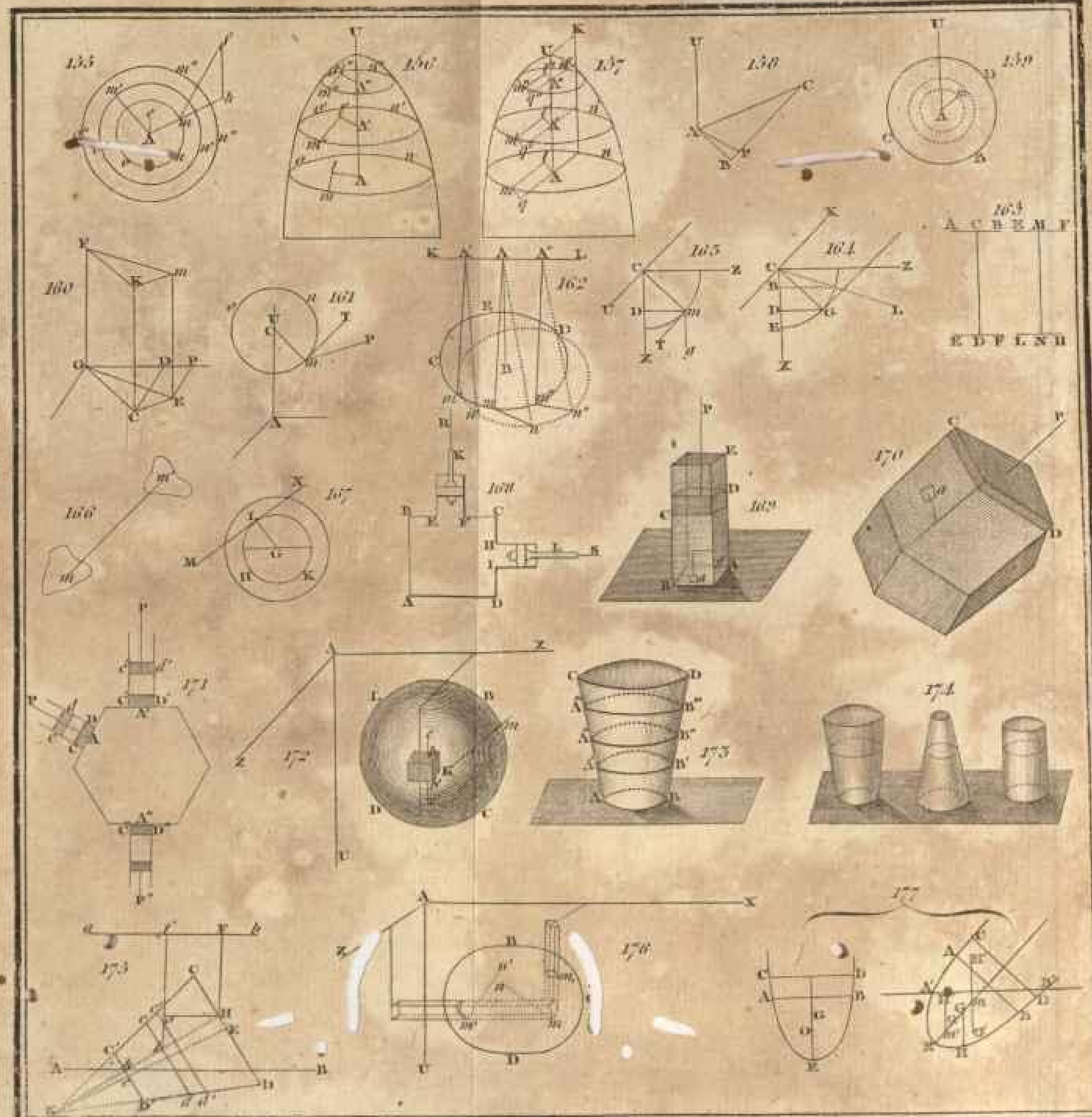


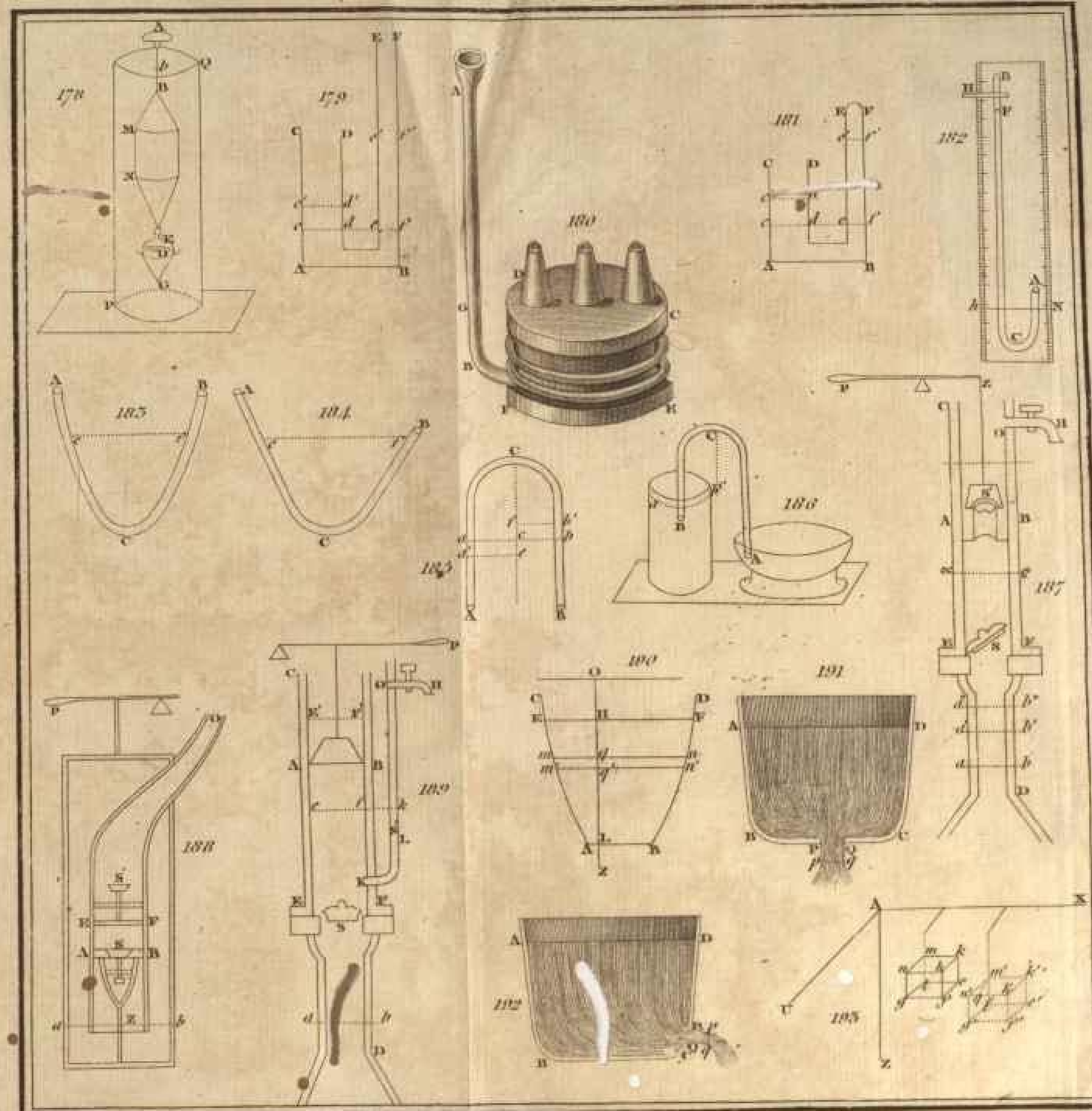



113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126



VIII.Lam.B.


155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177


178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193