514
Sa 7 r
1876

COMPENDIO DE GEOMETRÍA

Y

NOCIONES DE TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA,

POR

EL LICENCIADO Y CATEDRÁTICO DE ESTA ASIGNATURA

EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE SEVILLA

R. SANJURJO.

ES PROPIEDAD.

168880

SEVILLA.

IMPRENTA DE R. BALDARAQUE.

GALLEGOS, 5 Y 7

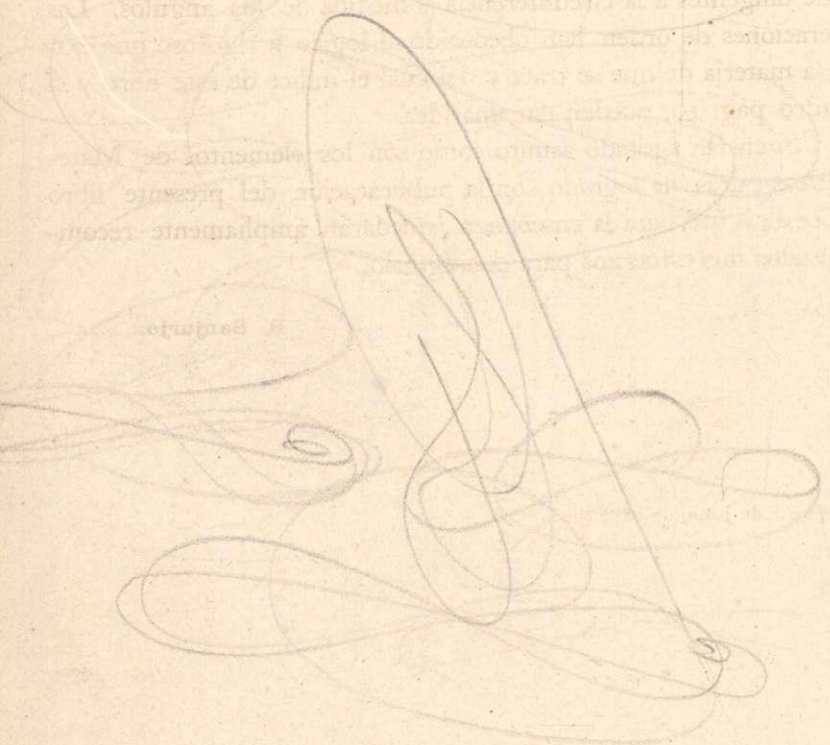
1876.

Sr. D. Francisco García Portillo,

Doctor en Ciencias, Licenciado en Jurisprudencia, Académico numerario de la de Buenas Letras de Sevilla, Catedrático de Matemáticas del Instituto provincial de la misma, etc.

Querido amigo y maestro: Habiendo estrechado los lazos del compañerismo, los que habia entre el profesor y el discípulo, creo un deber, muy grato para mí de cumplir, el dedicarle este trabajo, al efectuar el cual he tenido muy presente sus advertencias y esperimentados consejos. Dígnese V. aceptarlo con la misma buena voluntad con que se lo dedica su discípulo y compañero.

El Autor.



PRÓLOGO.

El presente Compendio de Geometría y Nociones de Trigonometría, escrito para alumnos de Instituto, está limitado respecto á su extension, por las exigencias del objeto á que se destina. La experiencia confirma constantemente que las obras didácticas que aprovechan en la tierna edad de los estudiantes de 2.ª enseñanza, son las que sin ser oscuras, son breves.

En la exposicion de la ciencia se introducen algunas ligeras variaciones respecto de la manera general de hacerla y tambien respecto á el método. Las primeras consisten en la teoría de paralelas tratadas sin postulado, en la de congruencia de triángulos, en la de tangentes á la circunferencia y medida de los ángulos. Las alteraciones de órden han obedecido al lógico y rigoroso que exige la materia de que se trata y del cual el índice de este libro y el cuadro pág. 10, pueden dar una idea.

Si en tan agotado asunto como son los elementos de Matemáticas puras, he logrado con la publicacacion del presente libro hacer algo útil para la enseñanza, quedarán ámpliamente recompensados mis esfuerzos para conseguirlo.

R. Sanjurjo.

Sevilla 1.º de Junio de 1876.

ÍNDICE

DE LOS CAPÍTULOS CONTENIDOS EN ESTA OBRA.

GEOMETRÍA.

		PÁGINAS.
PRELIMINARES.		9

PRIMERA PARTE.—PLANIMETRÍA.

1.ª Seccion.—Planimetría rectilínea.

CAPITULO I . .	Una recta en el plano.	11
CAPITULO II.. .	Dos rectas en el plano.	12
CAPITULO III. .	Tres rectas en un plano y de las cortadas por una secante en particular.	15
CAPITULO IV. .	Del ángulo en el triángulo.	18
CAPITULO V.. .	Cuatro rectas en el plano..	20
CAPITULO VI. .	Cinco ó más rectas en el plano.	22
CAPTIULO VII. .	De la igualdad ó congruencia de los triángulos y relaciones entre sus lados y ángulos.	23
CAPITULO VIII. .	De la igualdad ó congruencia de los paralelógramos y relaciones entre los lados, y entre lados y ángulos.	30
CAPITULO IX. .	Relacion de los lados y ángulos del trapecio.	32
CAPITULO X.. .	Dependencia entre los lados y ángulos de los polígonos en general y su igualdad ó congruencia.	33
CAPITULO XI. .	Construcciones cuya resolucion depende de los anteriores capítulos.	36
CAPITULO XII. .	De la proporcionalidad de las rectas.	39
CAPITULO XIII. .	De los polígonos semejantes.	44
CAPITULO XIV..	Construcciones que se fundan en la teoría de proporcionalidad.	46
CAPITULO XV. .	Evaluacion de las áreas de las figuras planas rectilíneas.	48
CAPITULO XVI. .	Comparacion de las áreas.	51
CAPITULO XVII..	Problemas relativos á las áreas.	55

2.ª SECCION.

Tratado de la circunferencia de círculo.

PRELIMINARES.		57
CAPITULO I. . .	Posiciones de una recta respecto de una circunferencia.—Tangentes.	58
CAPITULO II . .	De la circunferencia como medida de los ángulos.	62
CAPITULO III. .	De las cuerdas en el círculo.	65
CAPITULO IV. .	Rectas proporcionales en el círculo.	66
CAPITULO V.. .	Relacion entre la distancia de los centros y los rádios de dos circunferencias, segun su respectiva posicion.	67

CAPITULO VI. . Construcciones fundadas en las propiedades anteriores. 68
CAPITULO VII. . De los polígonos inscritos y circunscritos. 70
CAPITULO VIII. . Construcciones. 73
CAPITULO IX. . Cálculo del perímetro de los polígonos regulares inscritos y circunscritos. . . 74
CAPITULO X. . . Rectificacion de la circunferencia y cuadratura del círculo. 76

SEGUNDA PARTE.

De la Geometría elemental.—Stereometría.

1.ª Seccion.—Rectas y planos.

CAPITULO I. . . De la línea recta y del plano. 81
CAPITULO II. . . De los ángulos diedros. 85
CAPITULO III. . De los planos paralelos. 88
CAPITULO IV. . Del ángulo triedro y del poliedro. . . . 90

2.ª SECCION.

Cuerpos geométricos.

PRELIMINARES. Tetráedros. 93
Igualdad de tetráedros. 94
CAPITULO V. . Pirámides. 97
CAPITULO VI. . Prismas. 99
CAPITULO VII. . Paralelepípedos. 101
CAPITULO VIII. . Poliedros en general y poliedros regulares 102
CAPITULO XI. . Semejanza de poliedros. 104
CAPITULO X. . . Áreas totales y parciales de los cuerpos. . 106
CAPITULO XI. . Volúmenes. 108
CAPITULO XII . Comparacion de los volúmenes de los poliedros semejantes. 115

3.ª SECCION.

Nociones de los tres cuerpos redondos Cono y Cilindro circulares rectos y Esfera.

PRELIMINARES. 116
CAPITULO I. . . Del Cono. 117
CAPITULO II. . . Del Cilindro. 121
CAPITULO III. . De la esfera. 123
Definicion de las secciones cónicas y de algunas propiedades de las tres curvas Elipse, Hipérbola y Parábola. 127

Nociones de Trigonometría Rectilínea.

PRELIMINARES. 133
Funciones circulares. 137
Tablas trigonométricas, su disposicion y uso. 140
Fórmulas de resolucion de los triángulos rectángulos. 145
Fórmulas para la resolucion de los oblicuángulos. 145
Ejemplos de rectángulos 146
Ejemplos de oblicuángulos 147

PRELIMINARES.

I. *Se llama Geometría la ciencia que estudia la forma y estension de las líneas, superficies y cuerpos.*

II. *Se llama cuerpo toda porcion limitada del espacio.*

III. *La estension de los cuerpos no puede ser mas que en tres direcciones á saber:* LATITUD Ó ANCHO, LONGITUD Ó LARGO Y PROFUNDIDAD Ó GRUESO. *Estas se llaman sus dimensiones.*

IV. *Se llaman superficies los límites de los cuerpos.*

V. *La estension de las superficies no tiene mas que dos direcciones, á saber: longitud y latitud que constituyen sus dimensiones.*

VI. *Se llaman líneas los límites de las superficies.*

VII. *La estension de las líneas no tiene mas que una sola direccion que es la longitud que constituye su estension.*

VIII. *Se llama punto el límite de las líneas.*

IX. *El punto no tiene dimension alguna; es decir no tiene estension.*

X *Las superficies, líneas y puntos no existen aisladamente y fuera de los cuerpos; si la Geometría los considera individualmente es una abstraccion para facilitar el estudio de sus propiedades.*

XI. *Las líneas se dividen en* RECTAS *y* CURVAS.

XII. *La línea recta como idea simple no se puede definir ó descomponer.*

XIII. Tiene dos propiedades peculiares é importantes por las cuales suele definirse, y son: 1.ª *Que en toda su estension sigue una sola y única direccion.* 2.ª *Ser la más corta que se puede trazar de un punto á otro.*

XIV. *Línea curva es la que constantemente varía de direccion, ó la que por pequeña que sea su estension, no es recta.*

XV. *Se llama línea quebrada la compuesta de varias rectas, que no están en la misma direccion.*

XVI. *Se llama línea mista la compuesta de recta y curva.*

XVII. En Geometría se *designan las líneas poniéndoles letras en sus estremos si son rectas ó curvas. En las quebradas y mistas se ponen las letras en los estremos de las partes de que se componen:* Asi (Fig. 1) para designar la recta de esta figura se pone en un estremo *a* y en el otro *b* y se lee *ab*. La curva de la (Fig. 2) se designa y lee *cd*. La quebrada (Fig. 3) *efgh*. Y la mista (Fig. 4) *lmnop*.

XVIII. *Entre las letras que designan una línea, no existe operacion alguna:* Asi es que *ab* en Geometría no es un producto como en Álgebra, sino un nombre que se dá á una recta.

XIX. *Un punto se designa con una sola letra.*

XX. Las superficies se dividen en *planas* y *curvas*.

XXI. *Se llama plano ó superficie plana aquella en que si una recta tiene dos puntos comunes con él, coincide en toda su estension, cualquiera que sea la direccion en que se coloque.*

XXII. *Se llama superficie curva aquella que por pequeña que se considere no es plana.* En algunas superficies curvas se puede hacer coincidir una recta en determinada direccion, como más adelante se verá.

XXIII. *Superficie quebrada es la compuesta de varias superficies planas, que no forman un plano.*

XXIV. *Superficie mista es la que se compone, de parte plana y parte curva.*

XXV. El cuadro de las partes que comprende la Geometría elemental, es el siguiente:

- GEOMETRÍA ELEMENTAL
  - 1.ª PARTE. Planimetría.
    - 1.ª SECCION. Planimetría rectilínea.
    - 2.ª SECCION. Tratado de la circunferencia de círculo.
  - 2.ª PARTE. Stereometría.
    - 1.ª SECCION. Rectas y planos.
    - 2.ª SECCION. Poliedros.
    - 3.ª SECCION. Nociones sobre los cuerpos redondos y secciones cónicas.

PRIMERA PARTE.

PRIMERA SECCION.

PLANIMETRIA RECTILINEA.

1. *Se llama Planimetría rectilínea la parte de la Geometría que estudia las líneas rectas y figuras terminadas por rectas que están en un mismo plano.*

CAPÍTULO I.

Una recta en el plano.

2. Las líneas rectas tienen dos cualidades de una fácil determinacion, que son: LONGITUD Y DIRECCION.

3. *La longitud de una línea recta limitada, se aprecia comparándola con otra que sirva de medida; el número de veces que la contenga espresa su longitud.*

4. Cuando en Geometría se estudian propiedades referentes á la *estension*, las líneas se representan por *números*, así es que se verifican con ellas las mismas operaciones que con los números, apesar de conservarles su nombre geométrico. Asi se dice $ab \times cd$, ó $\frac{ab}{cd}$ siendo ab y cd dos rectas. Pero lo que se multiplica ó parte, son los números que representan su medida.

5. Cuando se eleva una línea á potencia, se le suele poner una *raya* encima para dar á entender que no es la última letra la que se eleva sino la línea que ambas letras representan: Asi $\overline{ab}^2$ quiere

decir la línea *ab elevada al cuadrado,* ó, sea, el número que representa su longitud. Tambien se suele para más brevedad suprimir esta línea y escribir solamente ab^2.

6. *Dos puntos fijan la posicion de una recta.* En efecto, si por un punto *c* (Fig. 5) pasa una recta *ab*, y se hace girar al rededor de este punto, ocupará infinitas posiciones *de;fg*..... sin dejar de pasar por el punto *c;* luego un punto no fija la posicion de una línea recta. Si se tuviese ademas del punto *c,* otro punto *a,* por donde há de pasar una recta, tirando la *ab*, ésta no puede girar sobre cualquiera de sus puntos, ó sea cambiar de posicion, sin abandonar el punto *a,* si gira sobre *c*, ó el *c* si gira sobre *a,* ó los dos si gira al rededor de otro cualquiera: luego los *dos puntos a* y *c, fijan la posicion de la recta.*

7. *Por dos puntos no puede pasar mas que una sola línea recta,* ó lo que es lo mismo, *si dos rectas tienen dos puntos comunes coinciden en toda su estension indefinida;* pues de lo contrario dos puntos no fijarian la posicion de una recta.

8. De aquí se deduce que *dos rectas que no coinciden solo pueden tener un punto comun.* En este caso las rectas se llaman SECANTES, tales son (Fig. 5) la *ab* y *de*. El punto *c* se llama de *encuentro* ó *interseccion.*

9. *Para señalar un punto en las figuras geométricas se hace por medio de dos rectas que se cortan. Tambien se pone un punto ortográfico y se nombra con una sola letra.*

10. *La distancia entre dos puntos se mide por la recta que los une.* Esta es una de las propiedades evidentes de la línea recta, derivada de ser la más corta que se puede trazar entre dos puntos.

CAPÍTULO II.

POSICION DE DOS RECTAS EN UN PLANO.

11. Dos rectas situadas en un plano tienen alguna de estas tres posiciones. 1.ª Que *prolongada suficientemente sea la una parte de la prolongacion de la otra* como las *ab* y *cd* (Fig. 6). En este caso se llama la una prolongacion de la otra y pueden considerarse como una sola recta. 2.ª *Que prolongadas indefinidamente en ambos sentidos nunca concurran; como las ab* y *cd* (Fig. 7). En este caso se llaman PARALELAS ó de IGUAL DIRECCION. 3.ª *Que prolongadas suficientemente en uno de sus sentidos siempre concurran en un punto:* como las *ab* y *cd* (Fig. 8). En este caso se dicen de DESIGUAL DIRECCION ó

CONCURRENTES consideradas respecto del lado en que se aproximan, y DIVERGENTES respecto del sentido en que se separan.

12. Si se consideran *dos rectas de desigual direccion prolongadas hasta su punto de encuentro, determinan entre ellas un espacio que se llama ángulo.* En el ángulo hay que considerar: 1.° *Las rectas que lo forman que se llaman sus lados* (Fig. 9). Las rectas *ab* y *cb*. 2.° *El punto de interseccion, que se llama vértice del ángulo.* 3.° *La diferencia de direccion entre sus lados, que se llama la amplitud ó abertura del ángulo.*

13. Respecto de esta última puede examinarse en todos sus casos considerando el *giro de un lado ab* de un ángulo (Fig. 9) al rededor del *vértice* fijo *b*. Si se considera que el lado *ba* ha girado desde la posicion *bc* hasta la *ba* la *amplitud de este giro es la que constituye la magnitud del ángulo, que se espresa, ó por tres letras una de cada lado y la del vértice enmedio,* asi se dice el ángulo *abc*, ó por *una sola letra puesta en la abertura cerca del vértice como* la *m*.

14. Si se considera que la línea *ab* (Fig. 10) ha dado una vuelta completa al rededor del punto *b* hasta volver á su primitiva posicion, recorre un espacio ilimitado, siempre igual á sí mismo; en él están comprendidas las diferentes posiciones que pueden tener dos rectas que se cortan: puede por tanto considerarse como *el mayor de todos los ángulos: ó como no formando ángulo y los demas como partes de la vuelta completa.*

15. En efecto, si se considera en primer lugar que el lado *ba* solo ha dado media vuelta y se coloca en la prolongacion de la *bc* (Fig. 11), se forma el ángulo *abc* que por la posicion de los lados se llama *ángulo lineal.*

16. *Si se considera dividido en dos partes iguales el ángulo lineal* (Fig. 12) resultan los dos ángulos *abd* y *dbc* que se llaman RECTOS y cada uno es la *mitad* de la media vuelta ó *el cuarto del giro completo.*

17. *Cuando dos líneas se cortan en ángulo recto se llaman perpendiculares.* Asi las líneas *bd* y *ac* son perpendiculares. (Fig. 12).

18. *Todo ángulo menor que un recto* como el *ebc* (Fig. 12) *se llama* AGUDO, *y el que es mayor pero menor que uno lineal, como el eba, se llama* OBTUSO. *Ambos en comparacion con el recto se llaman tambien oblícuos, lo mismo que las rectas que lo forman.*

19. Si la recta *ba* pasa en su giro de la media vuelta completa, ó sea del ángulo lineal, se forma el ángulo MÁS QUE OBTUSO *abc* (Fig. 13) que tambien se llama SALIENTE ó CONVEXO en contraposicion al *agudo, recto* y *obtuso* que dejan un *hueco* ó ENTRANTE entre sus lados.

20. En realidad á cada ángulo *hueco* ó *entrante* le corresponde uno *saliente;* formando entre los dos la vuelta completa ó cuatro rectos. Por eso se dice que cada ángulo tiene dos aberturas; y de aquí en adelante cuando se hable de un ángulo, se entenderá que se hace del *entrante* ó *hueco*, á menos de espresamente decir lo contrario.

21. Hasta ahora se ha considerado el ángulo de dos rectas que se cortan, suponiéndolas terminadas en su punto de interseccion, si se consideran prolongadas en sentido opuesto por el vértice, se forman otros ángulos, á saber:

22. Los ángulos ADYACENTES, que *son los que tienen el vértice y un lado comun y los otros en línea recta,* como los *abe* y *ebc* (Fig. 12).

23. *Los opuestos por el vértice que son los que tienen el vértice comun* y *los lados del uno son prolongaciones de los del otro* como los *abe* y *dbc* (Fig. 14).

24. *La suma de dos ángulos adyacentes componen dos rectos.* En efecto, (Fig. 12) siendo el lado *ab* por definicion prolongacion del *bc,* la suma de los dos ángulos *abe* y *ebc* componen el ángulo lineal *abc*, ó sea media vuelta completa (15) ó lo que es lo mismo (16) dos rectos.

25. *Recíprocamente si dos ángulos que tienen el vértice y un lado comun suman dos rectos, son adyacentes.* Pues (Fig. 12) teniendo los dos ángulos *abe* y *ebc* el lado *eb* y el vértice *b* comun y siendo ademas la suma *abe+ebc=2 rectos,* si se supone que la *ba,* no es prolongacion de la *bc,* lo seria una recta tal como la *bf;* y por ser los ángulos *fbe* y *ebc* adyacentes, se tendria *fbe+ebc=2 rectos*, de donde resultaría que *fbe+ebc=eba+ebc* ó sea *fbe=abe* lo cual es absurdo, pues el *abe* es una parte del *fbe* y la parte no puede ser igual al todo.

26. *Se llaman ángulos consecutivos los que tienen el mismo vértice, y cada uno con el siguiente un lado comun.*

27. *Los ángulos consecutivos formados hácia una region de una recta valen dos rectos, y los formados al rededor de un punto valen cuatro rectos.* En efecto, los formados hácia una misma region de una recta todos componen dos adyacentes, y valen por tanto dos rectos. Los formados al rededor de un punto, si se prolonga uno de los lados en sentido opuesto al vértice, se tiene que los de cada region de la recta que asi se forma, valen dos rectos, y todos juntos, por consiguiente, cuatro.

28. *Los ángulos que sumados componen dos rectos, se llaman suplementarios, y si componen un recto, complementarios.*

29. Tambien se dice *suplemento ó complemento de un ángulo lo que le falta para componer dos ó un recto.*

30. Es evidente que *dos ángulos que tengan el mismo complemento ó suplemento son iguales*, porque le falta la misma cantidad para componer una tercera determinada.

31. *Los ángulos opuestos por el vértice son iguales*, sean (Fig. 14) *abe* y *dbc* los ángulos opuestos por el vértice, que se vá á demostrar son iguales. El *abe* tiene por suplemento á su adyacente *abd* que es tambien adyacente y por tanto suplemento de el *dbc*, luego estos ángulos que tienen el mismo suplemento son iguales.

32. *Desde un punto de una recta ó fuera de ella no se le puede trazar mas que una sola perpendicular.* En efecto, sea primero la recta *ab* (Fig. 15) y el punto en ella *c*, si por este punto se traza la *cd*, que forme los ángulos iguales *dca=dcb*, la *cd* es perpendicular á la *ab;* otra cualquier recta que se trace por el punto *c*, para no confundirse con la *cd*, há de caer á su derecha ó izquierda, es decir tendrá otra direccion y formará dos ángulos *eca>dca*, porque lo comprende; y *ecb<dcb* porque está comprendido en él; y por tanto *eca>ecb;* luego la *ce* no es perpendicular á la *ab* (16 y 17).

Si el punto está fuera como en *d* (Fig. 16), si se baja la perpendicular *dc*, y otra recta cualquiera *de*, esta segunda no puede ser perpendicular, pues si lo fuera, doblando la figura por la *ce* hasta que se coloque en el mismo plano por la parte inferior, en la posicion *cd'* y *ed'* se tendria que conservándose en este movimiento las *dc* y *de* perpendiculares á la *ab*, la parte *cd'* es prolongacion de la *cd*, pues por un punto de una recta no se le puede trazar mas que una perpendicular, y por análoga razon la parte *ed'* seria prolongacion de la *de;* es decir, que *ded'* seria una línea recta distinta de la *dcd'* y con la cual tiene dos puntos comunes *d* y *d'* lo cual es absurdo (7).

33. *Dos ángulos rectos son iguales aunque no sean adyacentes.* Sean los dos ángulos rectos *abc* y *def* (Fig. 17). Siempre se puede hácer coincidir el lado *bc* con el *ef*, pues son dos líneas rectas, y el punto *b* con el *e:* ahora como el lado *ed* es perpendicular al *ef* tendrá que confundirse con el *ba* que tambien lo es (32).

CAPÍTULO III.

De la posicion de tres rectas en un plano, y de las cortadas por una secante en particular.

34. Tres rectas situadas en un mismo plano pueden tener una de estas tres posiciones: 1.ª *Ser las tres paralelas.* 2.ª *Ser dos para-*

lelas y la tercera cortarlas ó secante. 3.ª *Cada una en distinta direccion que las otras dos.* En el primer caso ninguna propiedad importante resulta.

35. En el segundo se forman ocho ángulos, cuya nomenclatura es la siguiente: (Fig. 18) Sean *mn* y *pq*, las paralelas, y *rs* la secante.

36. *Se llaman* INTERNOS *los cuatro ángulos c,d,f,e, que están entre las paralelas y* ESTERNOS los cuatro *a,b,g,h, que están fuera.*

37. CORRESPONDIENTES *son los pares de ángulos uno interno y otro esterno que están á un mismo lado de la secante y no son adyacentes* como los *a* y *e; b* y *f; d* y *h; c* y *g.*

38. ALTERNOS *son los pares de ángulos, ambos internos ó esternos, que están á diferente lado de la secante y no son adyacentes* como los *a* y *g; b* y *h* que son *alternos esternos* y los *d* y *f; c* y *e* que son *alternos internos.*

39. *Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.* En efecto, (Fig. 18) el ángulo *a*, por ejemplo, está formado por el giro de la *rs* sobre la *mn;* y como la *rs* por ser línea recta tiene una sola y única direccion, y la *pq* tiene por definicion la misma que la *mn*, es evidente que el ángulo *e* que forma la *rs* con la *pq* es idéntico á el *a* que forma con la *mn*. Lo mismo se diría de los pares *b* y *f: c* y *g; d* y *h*.

40. *Los ángulos alternos entre paralelas son iguales.* En efecto, (Fig. 18) sean dos ángulos alternos internos *d* y *f*, se tiene que $d=h$ por correspondientes; ademas $h=f$ por opuestos por el vértice luego $d=f$. Lo mismo se demostraría que $c=e$. Si fuesen esternos como *b* y *h* se tiene $d=h$ por correspondientes: ademas $b=d$ por opuestos por el vértice, luego $b=h$. Lo mismo se demostraría que $a=g$.

41. *Los ángulos internos entre paralelas son suplementarios.* En efecto, sean los *c* y *f;* se tiene $c+b=2$ *rectos* por adyacentes: pero como $b=f$ por correspondientes, es claro que $c+f=2$ *rectos*.

42. *Dos rectas de desigual direccion cortadas por una secante.* Sean las dos rectas de desigual direccion *pq* y *px* (Fig. 19) prolongada esta última hasta su punto *p* de encuentro con la primera, y sea la secante *rs:* esta secante forma con las dos rectas ocho ángulos que reciben dos á dos los mismos nombres que los formados con dos paralelas, sin embargo no tienen las mismas propiedades; pues si por el punto de encuentro *o*, de la secante con la *xp*, se tira una paralela *tu* á la *pq*, llamando *m* y *n*, los ángulos que forma la *tu* con la *xp* se tiene.

43. 1.° *Los ángulos internos suman más ó ménos de dos rectos segun se consideren los del lado divergente ó convergente de las*

rectas dadas. En efecto, (Fig. 19) por ser paralelas *tu*, y *pq*, se tiene $d+e=2r$; luego $e+d+n>2r$. Tambien $c+m+f=2r$; luego $c+f<2r$.

44. *Los ángulos correspondientes y alternos son desiguales* es evidente que siendo $a+n=e$ se tiene $a<e$. Tambien de $d=f$ se deduce $d+n>f$ y así en los demas casos.

45. *Dos rectas son paralelas si los ángulos internos que forman con una secante son suplementarios, ó si los alternos ó correspondientes son iguales*. En efecto, (Fig. 19) si se supone, por ejemplo, $d=h$ las rectas *pq*, y *tu*, son paralelas, pues si no lo fueran trazando por el punto de encuentro *o*, de la *tu*, con la secante, una recta *px*, que fuese paralela á la *pq*, se tendria (39) $n+d=h$ y como por hipótesis $d=h$ se tendria el absurdo $d=n+d$; luego es falsa la hipótesis de donde proviene este absurdo, á saber, que siendo $d=h$ la *tu*, no sea paralela á la *pq*.

Análogamente se demuestra el paralelismo de las *pq*, y *tu*, si se supone que $d+e=2r$, ó que $d=f$, ó $b=h$.

46. *Por un punto fuera de una recta no se le puede trazar mas que una paralela*. Sea la recta *pq* (Fig. 19) y el punto *o*; trazada la *tu*, paralela á la *pq*, otra cualquier recta *xp*, que pase por *o*, ha de tener distinta direccion que la *tu*, para no confundirse con ella, y como la *tu*, tiene la misma direccion que la *pq*, la recta *xp* tendrá distinta direccion que la *pq*, y por tanto no pueden ser paralelas (11).

47. *Dos perpendiculares á una misma recta son paralelas*. En efecto, (Fig. 20) si la *mn* y *pq*, son perpendiculares á la *rs*, se tiene que $a=e$; $d=f$ y $d+e=2$ *rectos*, pues todos estos son ángulos rectos: luego las *mn* y *pq* (45) son paralelas.

48. *Si una recta es perpendicular á otra, tambien lo es á sus paralelas*. En efecto, (Fig. 20) si la *rs* es perpendicular á la *mn*, los ángulos *a* y *b* son rectos; pero los *f* y *e* tambien lo son por iguales á los *a* y *b*, como correspondientes; luego la *rs* es perpendicular á la *pq*.

49. *Dos paralelas á una tercera son paralelas entre sí*. Sean (Fig. 21) las *mn* y *rs* paralelas á la *pq*, trazando una perpendicular *tv* á la *pq*, lo será á sus paralelas *mn* y *rs*, (48) por tanto (47) estas son paralelas entre sí.

50. *Los ángulos de lados paralelos ó perpendiculares son iguales ó suplementarios*. 1.° Sean los ángulos *m* y *p*, (Fig. 22) cuyos lados son paralelos, si se prolonga uno de ellos, el *ab*, por ejemplo, hasta que encuentre al *af* en el punto *k*, se tendrá que el ángulo $m=n$ por correspondientes entre las paralelas *bc* y *ek*, siendo la secante *ak*; tambien $n=p$ por correspondientes entre las paralelas *de* y *ak*, cortadas por la secante *ef*: luego $m=n$. La misma igualdad

existe entre los ángulos r (resultante de prolongar los lados del anterior) y p; toda vez que $r=m$ por opuestos por el vértice y se ha demostrado que $m=p$, luego $r=p$.

51. Si se hubiera tratado de los ángulos x y p, evidentemente serian suplementarios, puesto que $x+m=2\,r$ por adyacentes, y ya se ha visto que $m=p$; luego $x+p=2\,r$. Se deduce, por tanto, que si *la abertura de los ángulos de lados paralelos está en el mismo ó en opuesto sentido son iguales, y en cualquier otra posicion son suplementarios.*

52. Sean m y p los ángulos de lados perpendiculares, (Fig 23) si por el vértice b se tiran perpendiculares á los lados ba y bc, se forma el ángulo $k=m$ por tener sus lados paralelos. Por otra parte, $k=p$ por tener el mismo complemento l; es evidente, por tanto, que $m=p$.

53. Si se hubiera tratado de los ángulos n y p, serian suplementarios, pues $n+m=2$ *rectos* por adyacentes; y como $m=p$ se tiene $n+p=2$ *rectos*. Puede decirse, por tanto, que los ángulos de la misma especie, y de lados perpendiculares, son iguales, y los de distinta especie, son suplementarios.

CAPÍTULO IV.

Del ángulo en el triángulo.

54. *Tres rectas que se cortan y se terminan en sus puntos de encuentro determinan una superficie cerrada, cuya figura se llama* TRIÁNGULO. Tal es el *abc* (Fig. 24).

55. *Las rectas que lo forman se llaman sus lados, y los puntos donde se cortan vértices.*

56. El triángulo es la figura más sencilla, es decir, que *no puede haber superficie cerrada por líneas rectas que tenga menos de tres lados.* Es por lo tanto el elemento componente de las demas figuras limitadas por rectas, y de aquí la importancia de su estudio.

57. *Un lado cualquiera de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.* En efecto, (Fig. 24) la línea recta ab es la más corta distancia entre los puntos a y b, lo cual se expresa analíticamente $ab<ac+bc$; análogamente $ab+bc>ac$, y restando bc de ambos miembros (Álgebra 116) se tiene $ab>ac-bc$.

58. *La suma de los tres ángulos de un triángulo compone dos rectos.* En efecto, (Fig. 24) si por el vértice c del triángulo abc, se traza una recta hk, paralela al lado opuesto ab, se tendrá (27)

$e+f+g=2$ *rectos*, pero $e=m$ y $g=n$ por alternos internos entre paralelas, luego sustituyendo será $m+f+n=2$ *rectos*.

59. *Un triángulo no puede tener mas que un ángulo recto ó uno obtuso.* En efecto, si tuviese más de un ángulo recto ó de uno obtuso, la suma de los tres compondria más de dos rectos.

60. *Los triángulos que tienen un ángulo recto se llaman rectángulos; el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa y los adyacentes catetos.*

61. *Los triángulos que tienen un ángulo obtuso se llaman obtusángulos, y si los tres son agudos acutángulos: ambas clases se comprenden bajo la denominacion de oblicuángulos.*

62. *Se llama ángulo externo de un triángulo el formado por un lado y la prolongacion de otro.* Asi (Fig. 24) el ángulo p formado por el lado ac y la prolongacion ad, del ab, es un ángulo externo del triángulo abc.

63. *El ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos internos no adyacentes.* En efecto, (Fig. 24) se sabe que $p+m=2\,r$ por adyacentes: por otra parte $f+n+m=2\,r$ por ser los tres ángulos de un triángulo; luego $p+m=f+n+m$ ó sea $p=f+n$.

64. *Conocidos dos ángulos de un triángulo, se conoce el tercero* que es el suplemento de los otros dos. No sucede lo mismo respecto de los lados, pues la relacion que entre ellos existe (57) está entre dos límites: de aquí el que *si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros tambien lo son:* pero si tienen dos lados iguales nada se puede decir del tercer lado.

65. En los *triángulos rectangulos los ángulos agudos son complementarios*, porque es evidente que entre los dos han de componer un recto.

66. *Si desde un lado de un ánguto agudo se baja una perpendicular sobre el otro lado, ésta caerá dentro ó fuera de la abertura del ángulo segun sea éste agudo ú obtuso.* En efecto, (Fig. 25) sea el ángulo agudo bac, si desde b se baja una perpendicular al lado ac, caerá dentro de la abertura como en bd, pues si se supone que cayera fuera como en bf, se tendria el triángulo bfa con un ángulo recto en f, por ser la bf perpendicular á la af, y otro ángulo obtuso fab, por ser adyacente á el propuesto bac, que es agudo: tal triángulo es imposible (59). Si tratándose del ángulo obtuso baf se supone que la perpendicular bajada desde b al lado fa, cae en f, se tendria el mismo absurdo.

CAPÍTULO V.

Cuatro ó más rectas en el plano.

67. *Cinco posiciones pueden ocupar cuatro rectas situadas en un plano,* las que presentan algunas propiedades nuevas, son: 1.ª *Dos paralelas y las otras dos tambien paralelas pero en distinta direccion que las primeras.* 2.ª *Dos paralelas y las otras dos en distinta direccion entre sí y con las primeras.* 3.ª *Las cuatro en distinta direccion.*

68. En el primer caso, y prolongadas las líneas hasta su punto de encuentro, resulta *un espacio cerrado por cuatro líneas que se llama en general cuadrilátero, y que si como en este caso tiene sus lados paralelos dos á dos* (Fig. 41) *se llama paralelógramo.*

69. Si *solo dos lados son paralelos como en el segundo caso,* resulta *un cuadrilátero* (Fig. 46) que se llama *trapecio,* y los lados paralelos *bases.*

70. *Si los cuatro lados tienen distinta direccion* como los de la (Fig. 48) se llama *trapezóide.* Los cuadriláteros trapezóides pueden ser cóncavos, ó lo que es lo mismo, tener un ángulo entrante, ó más que obtuso como el *abcd* (Fig. 26).

71. *Se llama diagonal en un cuadrilátero la recta que vá desde un vértice á otro no adyacente:* Asi en las (Figs. 26, 41, 46, 48) la *ac* es una diagonal.

72. *En todo cuadrilátero la suma de sus ángulos interiores es igual á cuatro rectos.*

1.° Sea un cuadrilátero convexo tal como el *abcd* (Fig. 48) trazando la diagonal *ac,* queda descompuesto en dos triángulos, cuyos ángulos por una parte sumados componen los del cuadrilátero: y por otra valen cuatro rectos, porque los tres de cada triángulo valen dos, luego es evidente que los cuatro ángulos del cuadrilátero convexo componen cuatro rectos.

2.° Sea el cuadrilátero cóncavo *abcd,* (Fig. 26) si se tira la diagonal *ac,* queda tambien descompuesto en dos triángulos, cuyos ángulos valen cuatro rectos y ademas son los del cuadrilátero.

73. *De aquí se deduce que dados tres ángulos de un cuadrilátero se puede determinar el cuarto:* porque su valor será la diferencia de la suma de los tres dados, con cuatro rectos.

2.° Tambien se deduce que *un cuadrilátero no puede tener cuatro ángulos obtusos, ni dos más que obtusos ó entrantes.*

74. *En el cuadrilátero paralelogramo los ángulos opuestos son iguales y los adyaceates á un mismo lado suplementarios.* En efecto: 1.° (Fig. 45) Los ángulos *m* y *q* ó *r* y *p* del paralelogramo *abcd* son iguales porque tienen sus lados paralelos y vértices en sentido contrario (51).

2.° Los *r* y *m*, ó *r* y *q*, adyacentes á un mismo lado son suplementarios por internos entre paralelas (41) de un mismo lado de la secante, que lo es, el lado al cual son adyacentes.

75. *Si un cuadrilátero paralelogramo tiene un ángulo recto, los otros tres tambien son rectos.* En efecto, (Fig. 44) si en el paralelogramo *abcd*, el ángulo *a* es recto, sus adyacentes respectivos *d* y *b*, tambien lo serán por suplementarios y el opuesto *c*, por igual.

76. *Los paralelogramos cuyos cuatro ángulos son rectos, se llaman rectángulos.*

77. *Si un cuadrilátero tiene sus ángulos opuestos iguales, es un paralelogramo.* En efecto, (Fig. 45) si por hipótesis en el cuadrilátero *abcd* se tiene que $m=q$ y $r=p$, se deduce sumando que $m+r=q+p$, y como entre los cuatro valen 4 *rectos*, es evidente que $m+r=2$ *rectos* y $q+p=2$ *rectos*. Ahora bien, como *m* y *r* son ángulos interiores entre las rectas *ab* y *dc* de un mismo lado de la secante *ad*, es claro que estas rectas son paralelas (45). Tambien las *ad* y *cb* lo son, porque siendo por hipótesis $m=q$ y $p=r$, y habiendo demostrado que $r+m=2$ *rectos*, se deduce $m+p=2$ *rectos*. Es decir, que tambien las rectas *ad* y *cb* son paralelas.

78. *En los trapecios los ángulos adyacentes á uno de los lados no paralelos son suplementarios.* En efecto, (Fig. 46) los ángulos en *b* y en *c* son suplementarios por internos entre paralelas, lo mismo que los en *a* y en *d*.

79. *Conocidos dos ángulos adyacentes á una de las bases de un trapecio, se conocen los otros dos:* porque (Fig. 46) si se sabe el valor de los en *c* y *d*, los en *b* y *a* se conocen por ser su suplemento, luego *en los trapecios solo se pueden tomar arbitrariamente dos ángulos.*

80. *Si los ángulos adyacentes á una de las bases son iguales, los otros dos tambien son iguales.* Es decir, (Fig. 46) si *bcd=adc* se tiene evidentemente *cba=bad* por suplementos.

81. *Los trapecios que tienen esta relacion entre sus ángulos se llaman simétricos.*

82. *En los trapecios simétricos no hay más que un ángulo arbitrario.* En efecto, (Fig. 46) si se conoce el ángulo *bcd*, se tiene conocido el *adc* por ser igual al *bca*; y los *cba* y *bad* por ser iguales entre sí y suplementarios de los anteriores.

CAPÍTULO VI.

Cinco ó más rectas en el plano.

83. *Se llama en general* POLÍGONO *la superficie encerrada por varias rectas. Si todos sus ángulos y lados son iguales, se llama regular.* Los polígonos reciben su nombre del número de sus lados, *así los de cinco, se llaman pentágonos; los de seis, exágonos; los de siete, eptágonos los de ocho, octógonos; los de nueve, eneágonos; los de diez, decágonos; los de once, endecágonos; los de doce, dodecágonos; los de quince, penladecágonos*, y los demás de quince, polígonos en general.

84. *La suma de todos los ángulos interiores de un polígono, es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene, menos dos.* En efecto, sea primero un polígono convexo ó que no tiene ningun ángulo entrante tal como el *abcde* (Fig, 27). Si desde uno de sus vértices se trazan diagonales á todos los demas, quedará el polígono dividido en tantos triángulos como lados tiene menos dos. Lo mismo sucederá en cualquier otro polígono que el propuesto, puesto que al primero y último triángulo corresponden dos lados de él, y á los intermedios uno; luego siempre habrá dos triángulos menos que lados. La suma de los ángulos de estos triángulos compone la de los interiores del polígono, y como la de cada triángulo es dos rectos, la del polígono será tantas veces dos rectos como lados haya, menos dos.

85. Siendo verdadero el teorema en un polígono convexo, tal como el *abcde*, (Fig. 28) se tiene que este polígono se hace cóncavo si por el lado *cd* se sustituye la línea quebrada entrante *cfd*. Ahora bien; aquí se ha verificado respecto al valor de los ángulos interiores y del número de lados la siguiente alteracion: Respecto á los primeros han aumentado en dos rectos, pues ha ganado el *entrante sobre obtuso m*, y ha perdido los $p+q$ y se sabe que $m+n=4\,r.$ y $p+q+n=2\,r.$, de donde $m-p-q=2\,r.$ Respecto de los segundos tambien ha ganado un lado, pues á la recta *cd* se sustituyen los dos lados *cf* y *fd* del ángulo entrante. Luego por cada lado que se aumenta para convertir un polígono de convexo en cóncavo, se aumenta la suma de sus ángulos interiores en dos rectos, y por tanto, la fórmula de su valor, ó sea de tantas veces dos rectos como lados tiene, menos dos, permanece exacta.

86. En general, si se representa por n el número de lados de un

polígono, y por R el valor de un recto, la suma de sus ángulos interiores tiene por espresion $2R(n-2)$, ó sea efectuando $2Rn-4R$, de esta fórmula se deducen varias consecuencias.

87. *Si todos los ángulos de un polígono son iguales, se puede averiguar el valor de uno conocido el número de lados:* en efecto, se sabe que todos valen $2R(n-2)$, y como hay n, y todos son iguales, uno valdrá $\frac{2R(n-2)}{n}$.

88. *Si se prolongan los lados de un polígono en el mismo sentido, la suma de los ángulos esteriores que resultan, es constante é igual á cuatro rectos.* En efecto, sea el polígono *ABCDEF* (Fig. 29) cuyos lados prolongados en un mismo sentido, forma los ángulos esteriores, a,b,c,d,e,f. Es evidente que cada ángulo esterior y su adyacente interior valen dos rectos: luego interiores y esteriores tienen de valor $2rn$ en un polígono de n lados. Es claro, que si de este valor se resta $2rn-4r$, que es el de los interiores, se tendrá de resto $2rn-(2rn-4r)=4r$ que espresa el de los interiores, el cual es constante porque $4r$ es independiente del número n de lados.

CAPÍTULO VII.

De la igualdad ó congruencia de los triángulos y relaciones entre sus lados y ángulos.

89. *Los* TRIÁNGULOS *constan de seis elementos, á saber: tres lados y tres ángulos. Los tres ángulos se llaman el elemento* ANGULAR *y los tres lados el* RECTILÍNEO.

90. Para mayor claridad en lo que se vá á esponer, se llama *ángulo comprendido por dos lados de un triángulo, aquel en que estos lados son los que forman el ángulo; se dice ángulo adyacente á un lado, aquel en que este lado es uno de los del ángulo:* por último, se llama *ángulo opuesto á un lado aquel en que este lado no es ninguno de los del ángulo.* Así, en el triángulo de la (Fig. 30), el ángulo m es el comprendido entre los lados a y b, el ángulo m es adyacente al lado a ó al b y el ángulo m es opuesto al lado c.

91. *Dados dos elementos de un triángulo no se pueden determinar los otros cuatro.* En efecto, es fácil ver que en cualquiera de los cuatro casos, á saber: 1.° *Dados dos lados.* 2.° *Un lado y uno de sus ángulos adyacentes.* 3.° *Un lado y el ángulo opuesto.* 4.° *Dos ángulos; no se pueden determinar los otros elementos de un triángulo.*

92. *Dados tres elementos, queda determinado un triángulo*

con tal que entre los datos haya un lado. En efecto, las combinaciones que pueden formarse con sus elementos, son las siguientes: 1.ª *Dados los tres lados.* 2.ª *Dos lados y el ángulo comprendido.* 3.ª *Dos lados y un ángulo opuesto á uno de ellos.* 4.ª *Un lado y los ángulos adyacentes.* 5.ª *Un lado y uno de los ángulos adyacentes y el opuesto.* 6.ª *Los tres ángulos.*

93. El último caso realmente está comprendido en el 4.° de la combinacion de dos elementos, pues conocidos dos ángulos lo está el tercero de un triángulo; la relacion que existe entre los triángulos que con tres ángulos dados pueden concebirse, se verá más adelante. Se examinarán los cinco primeros casos.

94. *Dados los tres lados de un triángulo quedan determinados los tres ángulos.* En efecto, sean *a,b,c* (Fig. 30) los tres lados de un triángulo, si á uno de los extremos del lado *a* se fija uno de los del lado *b* y se hace girar, el otro estremo del lado *b* queda fijo de posicion, pues su distancia al extremo del lado *a* está dada por la longitud de la línea conocida *c*. No puede, por tanto, el lado *b* ocupar mas que una sola posicion determinada por el *extremo fijo* en el lado *a* y el *punto en que su otro extremo esté á la distancia* c *del extremo* a. Queda, por tanto, determinado el ángulo que encierran por medio de los lados que le comprenden y del opuesto: los otros ángulos están en el mismo caso, luego tambien pueden determinarse.

95. *Dados dos lados y el ángulo comprendido.* Sean los lados *a* y *b*, y el ángulo comprendido *m* (Fig. 31). Supónganse los lados *a* y *b* unidos por uno de sus estremos y formando entre sí el ángulo dado *m:* como la longitud de estos lados es dada, y tambien el giro de uno sobre otro, es evidente que sus estremos, que son los del tercer lado, ocupan una posicion invariable. Queda, por tanto, determinado el tercer lado por estarlo sus extremos, y una vez conocido éste, se tienen conocidos los tres y por el caso anterior los otros dos ángulos.

Dados dos lados y uno de los dos ángulos opuesto á uno de ellos. Este caso será tratado particularmente más adelante, y como se verá, ninguna propiedad importante se funda en él; por tanto, no se interrumpe por esto el enlace de las proposiciones.

96. *Dados un lado y los dos ángulos adyacentes.* Sea el lado *a* y los dos ángulos adyacentes *m* y *n* (Fig. 32). En este caso tienen los dos lados desconocidos fija su posicion por los ángulos que forman con el *a*, solo se desconoce su longitud, y para determinarla, si sobre el lado *a* se forma en un extremo un ángulo *m*, y en el otro hácia el mismo lado un ángulo *n*, la interseccion de estas dos rectas determina un punto de encuentro invariable y fijo; y por tanto, la longitud de los dos lados desconocidos.

97. *Dados un lado uno de sus ángulos adyacentes y el opuesto.* Se reduce al caso anterior, pues conocidos dos de los ángulos, se conoce el tercero (64).

98. *Dos triángulos se llaman iguales ó congruentes cuando constan de elementos idénticos é igualmente dispuestos.*

Es evidente que si dos triángulos tienen tres de sus elementos iguales, en los casos en que éstos tres elementos sirvan para determinar los otros tres, los triángulos son iguales, pues los elementos determinados resultarán idénticos y en la misma posicion. Así se puede decir.

99. *Dos triángulos son iguales si tienen sus tres lados respectivamente iguales.* En efecto, sean los triángulos (Fig. 33) *abc* y *def* tales que $ab=ed$; $bc=df$; $ac=ef$; se ha visto que con los lados *ab*,*ac* y *bc*, se determina de un modo fijo é invariable el ángulo *n* del primero, y como el ángulo *r*, análogamente situado en el segundo, se determina con idénticos elementos, es claro que $r=n$ y además igualmente dispuestos en ámbos triángulos; lo mismo sucede con los otros dos ángulos; luego los triángulos son iguales.

100. *Dos triángulos son iguales si tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.* Análoga demostracion á la anterior puede darse en este caso, con la variacion en la hipótesis de que $ab=ed$, $bc=df$, y $m=q$; fundándose en la proposicion (95).

101. *Dos triángulos son iguales si tienen un lado y dos ángulos iguales.* (Fig. 33).

Demostracion análoga á las anteriores fundándose en la proposicion (96).

DE LA DEPENDENCIA ENTRE LOS LADOS Y SUS ÁNGULOS OPUESTOS EN LOS TRIÁNGULOS.

102. *Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son iguales.*

Sea el triángulo *abc* (Fig. 34) que tiene el ángulo $m=s$ se vá á demostrar que el lado $ab=bc$. Siendo el ángulo $m=s$ precisamente son agudos, toda vez que un triángulo no puede tener dos ángulos rectos ni obtusos; por tanto, si desde el vértice *b* se baja una perpendicular al lado *ac*, ésta caerá dentro del triángulo, (66) tal como en el punto *d*, y los triángulos *abd* y *bcd* tienen el lado *bd* comun, los ángulos en *d*, iguales por rectos y los en *m* y *s* por hipótesis; luego son iguales (101) por tanto $ab=bc$.

103. *Si un triángulo tiene dos lados iguales los ángulos opuestos son iguales.*

En efecto, si en el triángulo *abc* (Fig. 34) se supone $ab=bc$ uniendo el vértice *b* con el punto medio *d* del lado opuesto, se tienen

los dos triángulos *abd* y *bdc* iguales (99): por tanto el ángulo $m=s$.

104. *Los triángulos que tienen dos lados iguales se llaman isósceles. En los triángulos isósceles se llama base al lado desigual y vértice el opuesto á la base.* Los lados iguales se llaman impropiamente *lados.*

105. *En los triángulos isósceles, los ángulos adyacentes á la base son iguales* (103).

106. *En los triángulos isósceles, solo se puede dar valor arbitrario á uno de sus ángulos;* pues si este es uno de los adyacentes á su base, el otro ha de ser igual y el del vértice el suplemento de ámbos; y si es el del vértice los otros dos son los adyacentes á la base que son iguales y cada uno la mitad del suplemento del ángulo del vértice. De estas relaciones se infiere que para la igualdad de los triángulos isósceles bastan dos elementos, siempre que entre ellos haya un lado. Así se puede establecer.

107. *Dos triángulos isósceles son iguales si tienen dos lados, ó un lado y un ángulo, iguales.*

Si tienen dos lados del uno iguales á dos del otro para que sean dos condiciones, es menester que se supongan iguales las bases y dos de los adyacentes al vértice: en este caso como los otros dos lados son adyacentes al vértice y por tanto iguales á los primeros, son iguales entre sí y se está en el caso (96). Si los dos lados de cada triángulo que son iguales á los del otro, son los *adyacentes al vértice,* entónces no se dá realmente mas que una condicion y puede ó nó haber igualdad. Si se supone *un ángulo y un lado igual,* cualquiera que sea el ángulo que tengan igual dos triángulos isósceles, se sabe que los otros dos tienen un valor fijo (106) y por tanto igual en los dos triángulos, y se está en el caso (101).

108. *La línea que une al vértice de un triángulo isóscele con el punto medio de la base es:* 1.° *perpendicular á la base;* 2.° *divide al ángulo del vértice en dos partes iguales.*

En efecto: 1.° demostrado (Fig. 34) que los triángulos *abd* y *bdc* son congruentes y que el lado $ab=bc$, se tiene que el ángulo $q=p$, luego la *ad* es perpendicular á la *bc* (17). 2.° Tambien de la igualdad de estos triángulos resulta que el ángulo $n=r$.

109. *La recta que partiendo del vértice de un ángulo lo divide en dos partes iguales, se llama su bisectriz.*

110. *Si un triángulo tiene sus tres lados iguales se llama equilátero.*

111. *Los triángulos equiláteros tienen sus tres ángulos iguales y cada uno vale* $\frac{2}{3}$ *de un recto.* Esto se desprende inmediatamente de las proposiciones (58) y (103).

112. *En todo triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo.* En efecto, si en el triángulo *abc* (Fig. 35) se tiene $ab>ac$ tomando una parte $ad=ac$ y tirando la *dc* se tiene angulo $m=n$ (103); pero $n=o+p$ (63) luego $n=o+p$ de donde $m>p$ y con mayor razon $m+o>p$.

113. *La recíproca es cierta:* es decir, *que en todo triángulo si dos ángulos son desiguales, á mayor ángulo mayor lado.* En efecto, si en el triángulo *abc* (Fig. 35) se supone que el ángulo $p<m+o$ se tiene $ac<ab$, pues de lo contrario $ac=ab$; si fuese igual, por el teorema (103) $p=n+o$ contra el supuesto; si fuese $ac>ab$ por el teorema (112) $p>m+o$ contra el supuesto.

114. *Si en un triángulo crece ó disminuye uno de sus ángulos, sin variar los lados que lo forman, el lado opuesto crece ó disminuye.* Tres casos pueden ocurrir. 1.° (Figs. 36, 37 y 38) Sea el triángulo *abc* y se supone que el ángulo *m* crece hasta formar el $m+n$ sin que sus lados *ba* y *bc* varien de longitud, se vá á demostrar que en los tres casos $dc>ac$. En efecto: 1.° Si el lado *ba* toma la posicion *bd* (Fig. 36) como $ba=bd$ por ser uno mismo, se tiene en el triángulo *abd* que el ángulo $adb=dab$ (103), y como evidentemente $adb>adc$, es claro que $dab>adc$. Por otra parte $dab<dac$, luego con mayor razon $dac>adc$. Demostrado esto segun la proposicion (114) en el triángulo *adc* se tiene $dc>ac$.

2.° Si al girar el lado *ba* su extremo cae en la prolongacion de la *ac* como en *d* (Fig. 37) es evidente que $dc>ac$.

3.° Si cae el extremo *a* en la parte exterior como en *d* (Fig. 38) tirando la *da* y prolongando la *ba* hasta el punto *e*, se tiene que el ángulo $dab=bda$ (103) pero el ángulo $dae>bda$ (63) y por tanto $>dab$. Por otra parte $dab>adc$ (63) luego con mayor razon $dae>adc$ y á *fortiori* $dac>adc$, luego en el triángulo *adc* se tiene (112) $dc>ac$.

115. Demostrado el teorema en los tres casos, se deduce ampliándolo á dos triángulos, que *si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales á dos del otro, pero el ángulo comprendido por los dos del primero mayor ó menor que el comprendido por los dos del segundo, el tercer lado del primero será mayor ó menor que el tercer lado del segundo.* Pues uno de los triángulos puede considerarse como el primero en el cual ha aumentado uno de los ángulos.

De las proposiciones demostradas se deducen importantes propiedades sobre las perpendiculares y son las siguientes:

116. *Si desde un punto fuera de una recta se baja una perpendicular y varias oblícuas*: 1.° *la perpendicular es menor que cualquiera de las oblícuas*; 2.° *las oblícuas que se apartan igualmente*

del pié de la perpendicular son iguales, y la que se aparta más, es mayor.

1.° Sea el punto *c* y la recta *ab* (Fig. 39) si se baja la perpendilar *cd* y una oblícua *ce*, se forma un triángulo en el que la oblícua se opone al ángulo recto y la perpendicular á uno agudo; luego la perpendicular es menor que la oblícua (113) Lo mismo sucede con cualquier otra oblícua, pues todas se oponen al ángulo recto y la perpendicular á uno agudo.

118. *La distancia de un punto á una recta se mide por la perpendicular bajada desde el punto á la recta.* En efecto, este es la menor recta que se puede tirar entre el punto y la recta.

2.° Si hácia el otro lado de la perpendicular se toma $df=de$ y se traza la oblícua *cf*, ésta será igual á la *ce*, pues los triángulos *cde* y *cdf* son iguales por tener el lado *cd* comun y el $de=df$ por hipótesis; además el ángulo que comprenden es igual por ser recto.

3.° Si se toma una distancia $dh>de$ y se tira la *ch*, se tiene que en el triángulo *ceh* el ángulo *che* es agudo y el *ceh* obtuso; (59) luego la $ch>ce$ (113).

117. *Desde un punto á una recta no se pueden trazar más que dos oblícuas iguales entre sí*, pues supuesta tiradas dos equidistantes, otra cualquiera se apartaría más ó ménos del pié de la perpendicular que las anteriores y seria por tanto mayor ó menor que ellas.

119. Las recíprocas son ciertas: *Si dos oblícuas son iguales, se apartan igualmente del pié de la perpendicular, y si son desiguales la mayor se aparta más.* En efecto, si $ec=cf$ se tiene $de=df$, pues de lo contrario $de \lessgtr df$. Si $de>df$ se deberia tener $ce>cf$ y si $de<df$ deberia ser $ce<cf$ ambas conclusiones contra lo supuesto.

Análogamente si $ch>ce$ se tiene $dh>de$, pues de lo contrario $dh \leqq de$ y si $dh=de$ se tendria $ch=ce$. Si $dh<de$ seria $ch<ce$ ambas conclusiones contra el supuesto.

120. *Si á una recta se le levanta una perpendicular en su punto medio, todos los de la perpendicular y sólo ellos están equidistantes de los extremos.* Pues las rectas que unen uno de estos puntos con los extremos son oblícuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular. Examinando si gozan de esta propiedad otros puntos que no sean de la perpendicular (Fig. 39) y suponiendo que los extremos de una recta sean *e* y *f*, y *cd*, la perpendicular en el punto medio de la *ef*, sea *m* un punto fuera de la *cd* uniendo *m* con *e* y *f*, se tiene en el triángulo *mcf* que $mf<mc+cf$ y como $cf=ce$ se tendrá $mf<mc+ce=mh$.

121. *Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de otra, le es perpendicular en su punto medio.* En efecto, como dos puntos fijan la posicion de una recta, basta que tenga esta dos comunes con la perpendicular para que coincida con ella.

122. Las proposiciones anteriores facilitan el exámen del caso 5.° en la determinacion de los elementos de un triángulo dados tres, á saber: *Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.* Sean *ab* y *ac* (Fig. 40) los dos lados y *m* el ángulo que se opone á *ac* por ejemplo. Considerando puesto el ángulo *m* en el extremo *b* del lado *ab*, es evidente que el otro lado que forma el ángulo *m* en el triángulo es una parte de la recta indefinida *bd* y para determinarla se llevará desde *a* la recta *ac* hasta la recta *bd*.

Si el lado *ac* que se opone al ángulo dado *m* es menor que la *ab*, entónces caerá más cerca que la *ab* de la perpendicular *ae* bajada desde *a* al lado *bd* y como desde el punto *a* y al otro lado de la perpendicular se puede tirar otra oblícua *ag=ac* (117) se tendrian dos triángulos que satisfarian á las condiciones puestas, á saber los *abc* y *abg* no hay pues nada de determinado.

Si el lado *ac* es mayor que el *ab*, entónces al cortar la recta *bd* hácia el mismo lado de la perpendicular que la *ab*, caería más léjos que ésta (116), pero entónces el triángulo que se formaria no tendria el ángulo dado *m*, por tanto, al llevar desde *a* la *ac*, habria que hacerlo al otro lado de la perpendicular, como por ejemplo, en *af*, y entónces resulta un solo triángulo que es el *abf* con las condiciones dadas. Se puede asegurar por tanto que *dados dos lados y el ángulo opuesto al mayor de estos lados, se determina el triángulo.*

Es evidente que si el lado *ac* es menor que la perpendicular *ae*, no puede formarse triángulo.

123. *Dos triángulos rectángulos que tengan un cateto y la hipotenusa iguales, son iguales.* En efecto, se tienen como datos para determinar los demás elementos en cada triángulo, dos lados y el ángulo opuesto al mayor que es el ángulo recto, la determinacion es posible y fijo é invariable el otro cateto que se determina. Y como en ámbos triángulos se supone que tienen un valor idéntico los elementos que se dan, tambien lo tendrán los que se determinan, luego los tres lados del uno son idénticos á los del otro y por tanto los triángulos iguales.

124. Otros casos de igualdad de triángulos rectángulos pueden enunciarse sin tener que suponer iguales más que dos elementos, entre ellos uno rectilíneo, á causa de tener ya todos los de esta clase un elemento comun que es el ángulo recto. *Así dos triángulos rectángulos son iguales si tienen los catetos iguales ó si tienen la hipote-*

nusa y un ángulo agudo iguales. En efecto, la primera proposicion es la misma que la del caso general (100) y la segunda la del caso (101).

CAPÍTULO VIII.

Relaciones de los lados entre sí, y de los lados y ángulos de los paralelógramos; igualdad ó congruencia de los mismos.

125. *Los lados opuestos de un paralelógramo son iguales*. En efecto, sea el paralelógramo *abcd* (Fig. 41) si se traza la diagonal *bd* queda descompuesto en dos triángulos *abd* y *bcd* iguales; porque tienen el lado *bd* comun y el ángulo $m=n$ por alternos internos entre las paralelas *ab* y *cd*; y el $p=q$ por la misma razon entre las paralelas *ad* y *bc*. Luego los lados opuestos á los mismos ángulos son iguales; así $ab=dc$, y $bc=ad$.

126. *Las partes de paralelas comprendidas entre paralelas son iguales*. En efecto, la figura que formarán dos paralelas comprendidas entre otras dos paralelas, será un paralelógramo (68) y se acaba de demostrar que los lados opuestos de esta figura son iguales.

127. *Las diagonales de un paralelógramo se cortan en partes iguales*. En efecto, (Fig. 41) si se trazan las dos diagonales *ac* y *bd* del paralelógramo *abcd*, se forman los dos triángulos *aeb* y *dec* iguales, porque $ab=dc$ por opuestos de paralelógramos, el ángulo $n=m$ y $r=s$ por alternos entre estos lados paralelos, siendo la secante respectivamente cada diagonal: luego $ae=ec$ y $eb=ed$.

128. Recíprocamente, *un cuadrilátero es paralelógramo:* 1.° *si sus lados opuestos son iguales;* 2.° *si dos lados opuestos son iguales y paralelos;* 3.° *si sus diagonales se cortan en partes iguales*.

1.° Si en el cuadrilátero *abcd* (Fig. 41) se tiene $ab=dc$ y $ad=bc$ trazando la diagonal *ac* los dos triángulos *abc* y *adc* son iguales porque tienen el lado *ac* comun y los otros dos respectivamente iguales por hipótesis (97). Luego el ángulo $r=s$ y el $v=x$ y por tanto las rectas *ab* y *dc* y las *bc* y *ad* son paralelas dos á dos (45).

2.° Si los lados *ab* y *dc* (Fig. 41) del cuadrilátero *abcd* son iguales y además paralelos, se tiene trazando la diagonal *ac* que los triángulos *abc* y *adc* son iguales porque tienen el lado *ac* comun; el $ab=dc$ por hipótesis y el ángulo $r=s$ por alternos entre las paralelas *ab* y *dc*. Luego el lado $ad=bc$ y el ángulo $v=x$, de donde se infiere que *ad* es además paralela á la *bc* (45). Es decir, que el cuadrilátero tiene sus cuatro lados paralelos dos á dos.

3.° Si las diagonales del cuadrilátero *abcd* (Fig. 41) se cortan en partes iguales; es decir, si *ae=ec* y *de=eb* los triángulos *aeb y dec* son iguales porque tienen dos lados iguales, que son los de la hipótesis, y el ángulo comprendido (los en *e*) por opuestos por el vértice. Luego se tiene ángulo *r=s* y *m=n* y por tanto las *ab* y *dc* son paralelas lo mismo que las *ad* y *bc*.

Variedades de los paralelógramos. Los paralelógramos toman diversos nombres segun la igualdad de sus lados ó de sus ángulos, ó de unos y otros entre sí.

129. *Se llama rombo el paralelógramo cuyos lados son iguales sin serlo sus ángulos.* Así el *abcd* (Fig, 42) es un rombo. Este paralelógramo además de las propiedades enunciadas anteriormente, tiene la particular siguiente.

130. *Las diagonales del rombo son perpendiculures.* En efecto, por definicion la figura *abcd* tiene los puntos *a* y *d* equidistantes de la *b* y *c*; luego la recta *ad* es perpendicular (121) á la *bc* en su punto medio.

131. *Las diagonales de un rectángulo son iguales.* En efecto, trazadas las rectas *ac* y *bd* (Fig. 42) se tienen los dos triángulos *adc* y *bdc* rectángulos é iguales por tener el cateto *dc* comun y el *ad=bc* por opuestos de paralelógramo (127) luego las hipotenusas son iguales, es decir, *ac=bd*.

122. Si se reunen las dos condiciones de *igualdad de ángulos y lados en un paralelógramo,* resulta *una figura llamada cuadrado* tal como la *abed* (Fig. 44), la cual es como el triángulo *equilátero* de las llamadas *regulares,* ó sea de las que tienen sus dos elementos (angular y rectilíneo) iguales entre sí.

133. Estas figuras gozan y reunen todas las propiedades de las de su especie: así el *cuadrado* goza de todas las de los *paralelógramos, rombos y rectángulos*, pues reune las condiciones de estas figuras.

De las relaciones que existen entre los lados y ángulos de los paralelógramos, se deducen las condiciones para su igualdad ó congruencia.

134. 1.° *Dos paralelógramos que tienen dos lados contíguos iguales é igual el ángulo comprendido son iguales.* En efecto, (Fig. 45) conocida la longitud de los lados *ab* y *ad* y el ángulo *m*, de un paralelógramo, están determinados sus demás elementos, pues los lados opuestos han de ser iguales, y en cuanto á los ángulos, el opuesto *q* es igual á *m*, y los adyacentes *p* y *r*, suplementarios. Bastan, por tanto, estos tres elementos para fijar los otros: y si dos paralelógramos tienen estos tres iguales, los otros precisamente lo serán. Si se quiere

hacer ver su congruencia bastaría colocar el ángulo *dab* sobre el *hef* coincidiendo los tres puntos *d* con *h*, *a*, con *e*, y *b* con *f*, lo cual sucederia por la igualdad de los ángulos *m* y *p*, y de los lados que lo forman: el lado *dc* seguiria la direccion *hg* por ser paralelos á los *ab* y *ef* que han coincidido (46) y lo mismo los *bc* y *fg;* luego el vértice *c* coincidiria con el *g*.

135. *Los rombos y rectángulos quedan determinados* con solas dos condiciones, á saber: *con dos lados contíguos,* como facilmente se deduce de las relaciones (129 y 131) y los *cuadrados* con una *que es un lado,* cuyas condiciones son las mismas que bastan para demostrar su congruencia.

CAPÍTULO IX.

Relaciones de los ángulos y lados en el trapecio.

136. Es evidente que en los trapecios las bases han de ser desiguales, porque si fueran iguales como además son paralelas, el cuadrilátero seria un paralelógramo (128,2.°).

137. *En los trapecios simétricos se verifica que los lados no paralelos son iguales, y los ángulos adyacentes á la base mayor, son agudos.* En efecto, sea *abcd* (Fig. 46) un trapecio simétrico, tomando sobre la base mayor una parte *cf=ba* y uniendo *a* con *f*, se tiene el cuadrilátero *abcf* que es un paralelógramo por tener los lados *ba* y *cf*, iguales y paralelos, luego *bc=af*. Ahora bien; el triángulo *afd* es isóscele, pues el ángulo *n=m* por definicion (81) y el *o=m* por correspondientes entre paralelas, luego *o=n*, de donde (102) *af=ad* y por tanto *bc=ad*.

2.° En cuanto á los ángulos adyacentes á la base mayor, se tiene que como *o* y *n* son ángulos de un triángulo, precisamente valen ménos de dos rectos, y como *o=m*, es evidente que *m* y *n* valen ménos de dos rectos; además *m=n*, luego ámbos son agudos.

138. *Las diagonales de un trapecio simétrico:* 1.° *Son iguales.* 2.° *Se cortan en partes iguales.*

Sea *abcd* (Fig. 46) un trapecio simétrico, y *ac* y *bd* sus diagonales; los dos triángulos *abc* y *abd* son iguales, porque tienen el lado *ba* comun y el *bc=ad* por hipótesis, y el ángulo *cba=bad* (137); luego *bd=ac*.

2.° De la igualdad de los triángulos *abd* y *bac*, resulta que el

ángulo *bca=adb;* por otra parte, el *aed=bec* por opuestos al vértice, los terceros son por tanto iguales (64); luego los dos triángulos *bce* y *aed,* son iguales por tener el lado *bc=ad* é iguales los ángulos adyacentes. Luego los lados homólogos son iguales; es decir, *be=ae* y *ce=ed.*

139. *En un trapecio cualquiera, la línea que une los puntos medios de los lados no paralelos, es paralela á las bases é igual á su semisuma.*

En efecto, sea el trapecio *abcd,* (Fig. 47) y *ef* la línea que une los puntos medios *e* y *f,* de los lados *ad* y *bc.* Si por *f* se traza una paralela *km,* al lado opuesto *ad,* y se prolonga la base *ab* hasta que la encuentre, se tendrá que los triángulos *bfk* y *mfc* tienen *fc=fb* por construccion; y los ángulos en *f,* iguales por opuestos por el vértice y los *p* y *q,* por alternos; luego (101) son iguales y por tanto el punto *f* es medio de la *km.* Ahora, como *ad=km,* (126) sus mitades *ae* y *kf* son iguales; además son paralelas por construccion, luego el cuadrilátero *aefk* que tiene dos lados iguales y paralelos, es un paralelógramo; es decir, que *ef* es paralela á la *ab* y por tanto (49) á la *dc.*

Comparando la longitud de *ef* con las de las bases, se tiene *ef=ab+bk* tambien *ef=dc—mc;* sumando será *2ef=ab+dc,* pues *bk* y *mc* son iguales por la igualdad de los triángulos *bfk* y *fmc:* despejando *ef,* se tiene $ef=\frac{ab+dc}{2}$.

140. Ejercicios. *¿Cuántos elementos son necesarios para determinar un trapecio simétrico?*

1.° *Tres lados.* 2.° *Dos lados* y *un ángulo.* En el primer caso se entiende que son las bases y uno de los no paralelos, y en el 2.° que son las bases, ó una de estas y uno de los no paralelos.

141. *¿Cuántos elementos son necesarios para determinar un trapecio cualquiera?*

1.° *Los cuatro lados.* 2.° *Tres lados y un ángulo.* 3.° *Dos lados y dos ángulos.*

CAPÍTULO X.

Dependencia de los lados y ángulos en el cuadrilátero y polígonos en general.

142. Los elementos necesarios y suficientes para la determinacion de un polígono, se ha visto (98) (134) que constituyen las con-

diciones para su igualdad ó congruencia, y es evidente que dos figuras lo serán si pueden descomponerse en partes que á su vez lo sean y estén dispuestas de un modo igual. De estos elementos de las figuras los que hasta aquí se han estudiado son los triángulos; mas por su medio se puede determinar los casos de igualdad de los cuadriláteros que á su vez facilitan el estudio para los demás.

143. Los casos de igualdad de cuadrilateros son:

1.° *Si tienen sus cuatro lados respectivamente iguales y una diagonal.* Sean los dos cuadriláteros los $abcd$ y $a'b'c'd'$ (48) que tienen $ab=a'b'$, $bc=b'c'$, $cd=c'd'$, $ad=a'd'$ y $bd=b'd'$. En este caso, los dos triángulos abd y bdc del primero son iguales á los dos $a'b'd'$ y $b'd'c'$ del segundo; (99) y por tanto, superpuestos, coinciden. Luego los cuadriláteros son iguales.

2.° *Si tienen sus cuatros lados iguales y un ángulo igual.*

Es decir, que $ab=a'b'$, $bc=b'c'$; $cd=c'd'$, $ad=a'd'$ y ángulo $a=a'$, pues en este caso, trazando las diagonales bd y $b'd'$, los dos triángulos abd y $a'b'd'$ son iguales (100) y por tanto, $bd=b'd'$, y de aquí los otros dos triángulos bdc y $b'd'c'$ son tambien iguales. (99). Luego los dos cuadriláteros son congruentes.

3.° *Cuando tienen tres lados iguales y los dos ángulos que comprenden,* ó lo que es lo mismo, si $ad=a'd'$; $ab=a'b'$, $bc=b'c'$, y ángulos $a=a'$ y $b=b'$, pues trazando la bd y $b'd'$, los dos triángulos abd y $a'b'd'$ son iguales, (100) y de aquí se deduce que los otros dos bdc y $b'd'c'$ tienen los ángulos $dbc=d'b'c'$; $bd=b'd'$ y por hipótesis $bc=b'c'$; luego son iguales. (100).

4.° *Cuando tienen dos lados consecutivos iguales, y tres ángulos.*

Ó sea $ad=a'd'$; $ab=a'b'$ y ángulos $b=b'$, $c=c'$, $d=d'$; de estas condiciones se deduce ángulo $a=a'$, y por tanto, tirando las diagonales bd y $b'd'$, los dos triángulos abd y $a'b'd'$ son iguales (100) y de aquí se tiene $bd=b'd'$; tambien los ángulos $dbc=d'b'c$ y $bdc=b'd'c'$; luego los dos triángulos bdc y $b'd'c'$ tambien son iguales. (101).

5.° *Cuando tienen un lado igual y los ángulos adyacentes y los que forma este lado con las diagonales son iguales.*

Es decir, que $ab=a'b'$ y los ángulos $a=a'$; $b=b'$; $abd=a'b'd'$; $bac=b'a'c'$, pues los triángulos abd y $a'b'd'$ son iguales, (101) y de aquí $ad=a'd'$, tambien los triángulos abc y $a'b'c'$ son iguales (101) y por tanto $bc=b'c'$; luego los cuadriláteros tienen tres lados consecutivos iguales y los ángulos comprendidos, que es el tercer caso demostrado.

144. De lo anterior se deduce, que *en general un cuadrilátero queda determinado por cinco de sus ocho elementos* (cuatro lados y

cuatro ángulos.) Si se tratára de un *pentágono, tirando una diagonal entre dos lados adyacentes, quedaria descompuesto un cuadrilátero y un triángulo;* el cuadrilátero quedaria determinado con *cinco condiciones,* y el triángulo con *tres,* pero como la diagonal es comun á las dos figuras, el *pentágono quedaria determinado con siete condiciones* de las diez de que consta (cinco lados y cinco ángulos). Si de igual manera se dividiese un *exágono, quedaria descompuesto en un pentágono y un triángulo:* la determinacion del pentágono necesita *siete elementos* y la del triángulo *tres,* pero una es comun.

145. Por los ejemplos anteriores se vé que para el *triángulo cuadrilátero, pentágono y exágono,* se necesitan $2n-3$ elementos para su determinacion, cuyo número de condiciones es fácil ver que es general para todos, pues por la division indicada *queda dependiente la determinacion de un polígono de la de uno de un lado ménos, y un triángulo con un elemento comun.* Y si la ley es verdadera para el polígono de $n-1$ lados; es decir, que este necesita $2(n-1)-3$ condiciones, el de n necesita las $2(n-1)-3+2$ ó sea $2n-3$.

146. *En las figuras regulares* (83) *del mismo número de lados, basta que tengan un lado igual para ser iguales; lo mismo que para su determinacion,* pues siendo todos sus elementos iguales entre sí, los ángulos tienen un valor conocido y constante (87) y los lados, conociendo *uno,* se conocen todos. Debe advertirse que si bien basta en las figuras regulares conocer un elemento para determinarlas, se necesita que este sea uno de los lineales, pues el elemento angular no bastaria, á causa de existir muchos polígonos con sus ángulos iguales y que sin embargo no son congruentes, sino que tienen otras relaciones que se llaman de semejanza y que más adelante se estudiarán.

147. *Todos los polígonos regulares tienen un punto interior equidistante de los vértices y lados.* Sea *abcdef* (Fig. 49) un polígono regular; es decir, cuyos ángulos y lados son iguales; bisecando los ángulos *e* y *f,* se forma un triángulo *ofe,* evidentemente isósceles, pues los ángulos *m* y *n* son iguales como mitad de los *f* y *e,* iguales por el supuesto; si se biseca el ángulo *a,* se determinará con la bisectriz del *f,* un triángulo *aof* tambien isósceles é igual al *foe,* por tener las bases *ab* y *fe* iguales por hipótesis, lo mismo que los ángulos adyacentes á esta base; luego los lados *ao* y *fo,* se cortan en el punto *o* como los *fo* y *eo;* lo mismo se demostraría de todos los triángulos en que quedaría dividido el polígono por los bisectrices; luego todos tienen un vértice comun *o,* el cual equidista de los vértices del polígono por la igualdad de los lados *oa, ob, oc* etc. de los triángulos: tambien

equidista de todos los lados, porque las perpendiculares como *oh* bajadas á las bases de estos triángulos isósceles iguales, son iguales.

El punto interior equidistante de los vértices y lados de todo polígono regular, se llama su centro.

CAPÍTULO XI.

Construcciones cuya solucion depende de las proposiciones anteriores.

148. Dos instrumentos son necesarios en las construcciones geométricas, á saber: la *regla* y el *compás*. La *regla* sirve para trazar las líneas rectas, y el *compás* para trazar una línea llamada *circunferencia*, que tiene la propiedad de que todos sus puntos estén igualmente distantes de uno interior que se llama su *centro*. Y en efecto, si una de las puntas del compás se fija en un punto *a*, y se hace girar la otra, conservando la misma abertura, es evidente que todos los puntos que vaya recorriendo esta otra, estarán á igual distancia del *a*, que ocupa la primera. De modo, que si teniendo el compás una abertura igual á una línea dada *ab*, se coloca uno de los extremos de ésta en el centro, se tiene la seguridad de que su otro extremo está sobre alguno de los puntos de la circunferencia que el compás describe con esta abertura. Es claro que la circunsferencia no determina un segundo punto fijo para el otro extremo de la recta, pero lo sujeta á estar sobre ella, lo cual es suficiente como se verá.

Un trozo de la circunferencia se llama arco.

149. *Dado un triángulo* abc, *trazar otro igual.*

Sea el triángulo dado *abc*. (Fig. 50). Sobre una recta cualquiera se toma con el compás una distancia *de=bc*. Ahora es preciso trazar otros dos lados iguales á los *ca* y *ba* y en la misma direccion, y como ésta se ignora, se tomará con el compás la distancia *ca* y colocando una de sus puntas en *e*, se tiene la seguridad de que la otra describe una circunferencia sobre la cual se debe encontrar el otro extremo *a* de la recta *ca*. Si se hace lo mismo con el lado *ba*, llevando uno de sus extremos (el *b*) sobre el *d*, se tendrá la seguridad de que su otro extremo *a*, estará sobre la circunferencia que desde *d* se describa con la abertura *ba*. Luego si el punto *a* ha de estar sobre las dos circunferencias que desde *e* y *d* se describan con las respectivas aberturas *ca* y *ba*, precisamente estará en el punto comun á ámbas; así se verá donde encuentra la circunferencia descrita desde *e* á la descrita desde *d*, y su encuentro determinará el punto *f*, y por tanto, la direccion de los lados *ef* y *df*. Los dos triángulos son congruentes (99).

Aquí se vé como se ha determinado la direccion de los lados, ó sea los ángulos que entre sí forman solo por su longitud.

Tambien debe notarse que no es necesario en la práctica describir con el compás las dos circunferencias, sino que basta trazar un arco de ella hácia el punto que la vista indica que han de encontrarse.

Por último, en esta construccion podian haberse trazado los lados hácia otra region de la *de*, y tambien resultaria un triángulo congruente con el dado.

150. *En un punto dado de una recta, formar un ángulo igual á uno dado.*

Sea el ángulo dado *m*, (Fig. 50) es evidente que si se cortan sus lados *ba* y *bc*, por una recta arbitraria *ac*, se formará un triángulo y construyendo otro igual *def*, toda vez que se conocen sus tres lados, el ángulo *n* de este triángulo opuesto al lado *ef* igual al *bc*, será á su vez igual al *m*.

151. *Por un punto dado tirar una paralela á una recta.*

Sea la recta *ab* y el punto *c* (Fig. 51). Desde *c* se traza una recta arbitraria *gh* que corte á la *ab;* si se forma en *c* con la *gh* un ángulo *n*, hácia el mismo lado que el *m*, é igual á éste, la recta *df* será paralela á la *ab* (45).

152. *Bisecar un ángulo dado.* Sea el ángulo *abc*, (Fig. 52) desde el vértice *b* con una misma abertura de compás se marcan los puntos *d* y *e* sobre los lados, y desde éstos puntos con una abertura cualquiera dos arcos que se cortan en un punto como *f*, uniendo *f*, con el vértice *b*, la *fb* es la bisectriz pedida. En efecto, si se trazan las rectas *df* y *ef*, los dos triángulos *dbf* y *fbe*, son iguales porque tienen el lado *bf* comun y los otros dos respectivamente iguales por construccion; luego el ángulo *m=n*.

153. *Levantar ó bajar á una recta una perpendicular:* 1.° *En un punto cualquiera.* 2.° *En su punto medio.* 3.° *Desde un punto exterior.* Sea la recta indefinida *ab* (Fig. 53) y el punto dado en ella *c*. Es claro que si en el punto *c* se traza una línea que forme dos ángulos adyacentes *m* y *n* iguales, será una perpendicular. Para ello se recurre á la construccion de dos triángulos iguales, tomando á derecha é izquierda del punto *c* las distancias *ca=cb*, y desde los puntos *a* y *b* con una misma abertura de compás se describirán dos arcos que se corten en un punto tal como *d*, y uniendo *d* con *a*, se tendrá la perpendicular *dc*, porque evidentemente los triángulos *adc* y *cdb* son congruentes.

Nota. Tambien se podia haber demostrado la perpendicularidad de la recta *dc*, recordando el teorema (121).

2.° Si la recta fuese definida tal como *de* (Fig. 54) y la perpendi-

cular tuviera que trazarse en su punto médio, desde *d* con un rádio cualquiera se trazarian dos arcos, uno en cada region de la *dc:* desde *e,* con el mismo rádio, se describirán otros dos arcos que corten á los anteriores; y los puntos *c* y *f* así determinados, son de la perpendicular que se busca (121); luego uniendo *c* con *f,* se tendrá la recta pedida.

3.° *Desde un punto exterior.* Sea el punto dado *c* y la recta *ab;* (Fig. 54) desde *c* (Fig. 119) con una abertura suficiente de compás se señalan dos puntos *d* y *e* sobre la recta, equidistantes del *c:* desde estos puntos con una misma abertura se traza en la otra region de la recta *ab* (ó en la misma que el punto *c*) otro punto *f,* tambien equidistante de los dos *d* y *e.* La recta *cf* que une estos dos puntos equidistantes, es la perpendicular (121).

154. *Levantar una perpendicular á una recta en uno de sus extremos.* Sea la recta *ba* (Fig. 55) y el extremo *a* donde se quiere levantar la perpendicular. Es claro que si la recta *ba* se pudiera prolongar por *a,* se haria uso de la construccion esplicada (152). Si no se puede prolongar, se tomará una abertura conveniente de compás *ac* y desde *c* y *a* con la misma abertura, se marcará el punto *d;* es claro que el triángulo *adc* será equilátero, cuyos ángulos se sabe que valen $\frac{2}{3}$ de recto. Si se prolonga la *cd* y se toma una distancia $df=dc=da$ y se une *f* con *a*, la *fa* será la perpendicular pedida. En efecto, el ángulo $m=\frac{2}{3}$ de recto, y como el triángulo *cda* es equilátero tambien el $p=\frac{2}{3}$. Luego su adyacente $q=\frac{4}{3}$ de recto (pues entre los dos han de valer dos rectos) y por tanto, $r+n=2$ *rectos* $-q=2$ *rectos* $-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$. Ahora, como $r=n$ por ser el triángulo *daf* isósceles, se tiene $n=\frac{1}{3}$ de recto. Luego, por último, $m+n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$ de *recto* ó sea un *recto*: es decir, que la *fa* es perpendicular á la *ba.*

155. *Construir un triángulo dados los elementos que lo determinan.*

1.° *Sus tres lados.* La solucion de este problema está dada en el teorema (94).

2.° *Dos lados y el ángulo comprendido.* (Fig. 31). Sean los lados *a* y *b* y el ángulo que comprenden *m;* sobre una recta cualquiera se toma una parte igual *b* y en uno de sus extremos se construye un ángulo igual *m;* sobre el otro lado se toma una parte igual *a,* y la union de los dos extremos determinará el triángulo (95).

3.° *Dos lados* b *y* a *siendo* a *el mayor y opuesto al ángulo* m (Fig. 40) se construye un ángulo igual *m* de lados indefinidos: sobre uno de los lados se toma una parte *ba=a;* y desde *a* con una abertura de compás igual al lado *b,* se marca un punto sobre el otro lado del ángulo *m,* sea este el *f:* uniendo *a* con *f,* se tendrá el triángulo *abf* pedido (122).

4.° *Un lado* a *y sus dos ángulos adyacentes* m *y* n. (Fig. 32). Se toma una recta igual á la *a* y en sus extremos hácia un mismo lado se construyen dos ángulos respectivamente iguales á los dados, cuyos lados se prolongan hasta que se encuentran y se tendrá el triángulo (101) pedido. Si uno de los dos ángulos dados fuese el opuesto al lado conocido, podria fácilmente deducirse el tercer ángulo del triángulo del modo siguiente. Sean (Fig. 56) *m* y *n* los dos ángulos dados; si en un punto *c* de una recta *ab,* se construye un ángulo igual *m* y hácia la misma region (32) y sobre el lado *cd* un ángulo igual *n,* el ángulo *r* adyacente de la suma *(m+n)* será el tercer ángulo (27) del triángulo. Una vez conocido el otro ángulo *r* adyacente al lado conocido, se está en el caso anterior.

156. *Construir un polígono igual á otro dado.*

Se divide el polígono dado en triángulos por medio de diagonales y se van construyendo los triángulos uno á uno y en el mismo órden y posicion en que están (144).

Proporcionalidad de rectas y semejanza de las figuras planas rectilíneas.

CAPÍTULO XII.

De la proporcionalidad de las líneas rectas y semejanza de polígonos.

157. *Si á partir del punto de encuentro de dos rectas se divide una ellas* RP (Fig. 57) en partes iguales *Ra=ac=ec=eg, y por los puntos de division se trazan paralelas que encuentran á la otra recta* RS: 1.° *Esta queda tambien dividida en segmentos* Rb,bd, df *y* fh, *iguales entre sí.* 2.° *Las paralelas aumentan de longitud en una relacion determinada por la série natural de los números enteros.* En efecto, si por los puntos *b, d* y *f* se trazan las paralelas *bk, dm,* y *fn,* á la *RP* se determinan los triángulos congruentes *bRa= bkd=dmf=fnh,* porque tienen los lados *bk, dm* y *fn,* iguales á los seg-

mentos *ac, ce* y *eg* como paralelas entre paralelas, y como estos segmentos son iguales entre sí, estos lados son iguales entre sí. Además los ángulos adyacentes *aRb, kbd, mdf* y *nfh* son iguales por correspondientes entre paralelas, y los *Rab, bkd, dmf* y *fnh,* por lados paralelos y vértices en la misma direccion. Luego los lados *Rb, bd, df* y *fh* son iguales.

2.° Es evidente que *cd* es doble de *ab*, pues se tiene *ck=ab* por paralelas entre paralelas y *kd=ab* por la igualdad ya demostrada de los triángulos *Rab* y *bkd;* luego *ck+kd=cd=2ab.*

Análogamente *ef=3ab,* pues *em=cd=2ab* y *mf=kd=ab;* luego *em+mf=ef=3ab* etc. Es decir, que si se representa la longitud de la primer paralela por 1, las otras lo estarán por 2, 3, 4, etc.

158. *Si entre dos rectas que se cortan se tiran dos paralelas, las partes de éstas rectas son proporcionales.*

Primer caso: sean las dos rectas (Fig. 58) *as* y *at,* cortadas por las dos paralelas *bd* y *ce.* Si *ab* y *bc* se pueden dividir en partes iguales entre sí, (suponiendo que esta medida ó division comun es la *af*) se tendrá que *ab=7af* y *bc=4af;* luego las relaciones de magnitud de estas líneas se podrá expresar por la de 7 á 4; es decir, que *ab: bc::* 7:4. Si por los puntos de division se trazan paralelas á la *bd* las partes *ad* y *de* quedarán respectivamente divididas en 7 y 4 partes iguales entre sí; luego su relacion será *ad: de::* 7: 4. Esta proporcion y la anterior tienen una razon comun 7:4; luego *ab: bc:: ad: de.*

2.° Pudiera suponerse que las partes *ab* y *bc* no tenian medida comun (caso puramente especulativo, pues nunca ocurre en la práctica) en cuyo caso se llaman *incomensurables;* es decir, que ninguna division hecha en la una está exactamente comprendida en la otra: en este caso, al llevar una de las divisiones de la *ab* sobre la *bc,* el último punto no caería en *c*, sino por ejemplo en *c'* y trazando la *e'c'* paralela á la *bd*, se tendrá por ser las partes comensurables *ab: bc'* :: *ad: de'*.

Si se toma una division más pequeña que la *af,* por ejemplo, una fraccion de ella, y se lleva sobre la *bc* el último punto, caerá más próximo á el *c* que el *c'*, por ejemplo, en *c''*, y se tendrá *ab: bc'':: ad: de''*. Esto hace ver que todas las relaciones comensurables que, con cualquier número de divisiones, se establezcan entre las partes que determinan las paralelas *bd* y las *c'e'* ó *c''e''*, en las dos rectas, son siempre iguales, y como además es evidente que estas relaciones tienen por límites respectivo *ab: bc* y *ad: de* á las que se aproximan al paso que disminuye la medida, estos límites son iguales (Aritmética.) Luego tambien, en el caso de inconmensurabilidad de las partes, se tiene que *ab:bc:: ad:de.*

159. *Si á dos rectas que se cortan las dividen otras dos en partes proporcionales, estas otras son paralelas.*

En efecto, se tiene por hipótesis (Fig. 58) que *ab: bc:: ad: de,* de donde componiendo por suma de antecedente y consecuente, se tiene *ac: ab:: ae: ad*—(1.ª) Ahora bien, si la *bd* no fuese paralela á la *ce,* se podria trazar por *b* una recta tal como la *bd'* que lo fuese, y se tendria por el teorema directo anterior que *ac: ab:: ae: ad'*. Esta proporcion y la (1.ª) tienen sus tres primeros términos iguales, luego los cuartos deben ser iguales: es decir, que *ad=ad'*, lo cual es absurdo, y por tanto falso que la *bd* no sea paralela á la *ce.*

160. *Se llaman figuras semejantes las que tienen sus ángulos iguales y sus lados homólogos proporcionales.*

161. *Se llaman lados homólogos, los adyacentes ú opuestos á los ángulos iguales, y vértices homólogos donde se cortan dos lados homólogos. Las diagonales que unen dos vértices homólogos se llaman homólogas.*

162. *Si en un triángulo se traza una paralela á uno de los lados, el triángulo parcial que resulta es semejante al total.*

En efecto, sea un triángulo *abc*, (Fig. 59) tirando la *de* paralela al lado *bc,* se determina el triángulo *ade* que tiene los ángulos iguales á los del *abc,* porque el *m* es comun, el *q=n* y el *r=p* por correspondientes entre paralelas.

En cuanto á los lados se tiene que *ab: ad:: ac: ae;* tambien se tendrá *bc: de:: ab: ad*, porque teniendo las paralelas *bc* y *de* (157,2.º) tantas veces una misma medida como las *ab* y *ad*, si por ejemplo, *ab=7m* y *ad=4m*, se tiene *bc=7n* y *de=4n* ; luego *ab: ad:: bc: de.* Y por tanto, á causa de la razon comun todos los lados son proporcionales.

163. *Dos triángulos equiángulos son semejantes.* (Fig. 59) En efecto, suponiendo que entre los triángulos *abc* y *a'b'c'*, se tienen las condiciones *m=m'*, *n=n'*, *p=p'*. Tomando sobre el lado *ab* homólogo del *a'b'*, y á partir de *a,* una parte *ad=a'b'* y tirando la *de*, paralela al lado *bc*, los triángulos *ade* y *a'b'c'* son iguales por tener *ad=a'b'* por construccion y los ángulos *m* y *q* adyacentes á este lado, iguales á los *m'* y *n'*; (los *m* y *m'* por hipótesi, y el *q=n* por correspondiente y como *n=n'* el *q=n'*) y como el triángulo *ade* es semejante al total, tambien el *a'b'c'* es semejante al *abc.*

164. *Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, son semejantes*; pues los terceros ángulos tambien son iguales.

165. *Si dos triángulos tienen sus lados paralelos, son semejantes.* Pues no se pueden establecer entre estos ángulos más que las siguientes hipótesis:

1.ª *Los tres ángulos del uno, iguales á los tres del otro,* y en este caso son semejantes.

2.ª *Los tres ángulos del uno suplementos de los del otro;* lo que es absurdo, pues entónces los seis ángulos de dos triángulos valdrian más de cuatro rectos.

3.ª *Uno de los ángulos iguales, y los otros dos suplementarios:* lo que es absurdo, pues tambien la suma de los ángulos de los dos triángulos valdria más de cuatro rectos.

4.ª *Dos ángulos iguales y los terceros suplementarios:* hipótesi admisible, pero que está comprendida en el caso de semejanza del número (164). Luego en las dos únicas hipótesis admisibles que son 1.ª y 4.ª, los triángulos son semejantes.

166. *Si dos triángulos tienen sus lados perpendiculares, son semejantes.* En efecto, haciendo las mismas hipótesis que en el caso anterior, se vé que en las únicas admisibles (1.ª y 4.ª) los triángulos son equiángulos, y por tanto semejantes.

167. *Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman proporcionales.*

Sean (Fig. 59) los dos triángulos abc y $a'b'c'$ que tienen $m=m'$ y entre los lados que forman estos ángulos la relacion $ab:a'b'::ac:a'c'$... (1).

Tomando á partir de a una parte $ad=a'b'$ y tirando la de paralela al lado bc, se tendrá $ab:ad::ac:ae$; esta proporcion y la anterior tienen tres términos iguales, luego los cuartos tambien lo son; ó sea $ac=a'c'$. Es decir, que los dos triángulos ade y $a'b'c'$ que tienen $m=m'$ y $ad=a'b'$; $ae=a'c'$ son iguales, luego los triángulos abc y $a'b'c'$ son semejantes.

168. *Dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.*

En efecto, sean (Fig. 59) los dos triángulos abc y $a'b'c'$ en los que se verifica $ab:a'b'::ac:a'c'::bc:b'c'$.

Haciendo la construccion de los dos casos anteriores, se tiene $ab:ad::ac:ae::bc:de$ comparando esta série de razones con la dada por hipótesi, y observando que por construccion $ad=a'b'$, se deduce $ae=a'c'$; $de=b'c'$: luego los dos triángulos ade y $a'b'c'$ son iguales, (99) y por tanto los abc y $a'b'c'$ semejantes.

169. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, se baja una perpendicular á la hipotenusa.*

1.° *Es medio proporcional entre los segmentos de la hipotenusa.*

2.° *Cada cateto es medio proporcional entre toda la hipotenusa y el segmento adyacente.*

3.° *La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.*

4.° *Los cuadrados de los catetos son proporcionales á los segmentos de la hipotenusa.*

(Fig. 60). En efecto, sea el triángulo *abc* rectángulo en *a*; y *ad*, la perpendicular á la hipotenusa; se tendrá que el triángulo *abd* y el propuesto *abc*, son rectángulos y tienen el ángulo agudo en *b* comun. y por tanto, son semejantes: análogamente los triángulos rectángulos *abc* y *adc* que tienen el ángulo agudo en *c* comun, tambien lo son: además, los dos triángulos *bad* y *cad* semejantes al *abc* tambien lo son entre sí. Luego los tres son semejantes. Esto supuesto, comparando los lados homólogos de los *adc* y *adb*, se tiene *bd*: *ad*:: *ad*: *dc*.

2.ª Comparando cada uno de los triángulos *abd* y *adc* sucesivamente con *abc*, se tendrá *bc*: *ba*:: *ba*: *bd*, y tambien *bc*: *ac*:: *ac*: *dc* conforme con la proposicion (2.ª).

De estas relaciones se deduce (Aritmética 227) $ab^2=bc\times bd$ (1.ª) y $ac^2=bc\times dc$ (2.ª). Sumando ordenadamente $ab^2+ac^2=bc\ (bd+dc)=bc\times bc=bc^2$.

De esta relacion se deduce inmediatamente $ac^2=bc^2-ab^2$, ó sea que el *cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa, ménos el cuadrado del otro cateto.*

Por último, si se dividen ordenadamente las relaciones (1) y (2), se tendrá ab^2: ac^2:: *bd*: *dc*.

Nota. La propiedad de que el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos, es conocida en Geometría con el nombre de *teorema de Pitágoras*.

170. *Se llama proyeccion de un lado de un triángulo sobre otro, la distancia que hay desde el punto en que se cortan, al pié de la perpendicular bajada desde el otro extremo sobre el lado.* Así la proyeccion del lado *bc* (Fig. 61) sobre el *ac*, es *dc*.

171. *El cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo de un triángulo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el duplo del producto de uno de ellos, por la proyeccion del otro sobre él.* (Fig. 61).

En efecto, considerando el lado *bc* opuesto á un ángulo agudo, bajando desde *b* la perpendicular *bd* (la cual caerá dentro ó fuera del triángulo, segun que el ángulo *c* adyacente á este lado, *bc* sea agudo (como en Fig. 61) ú obtuso (como en Fig. 62), se tendrá en el triángulo rectángulo *bdc* que $bc^2=cd^2+bd^2$—(1.ª)

Pero en el triángulo rectángulo *bda*, se tiene $bd^2=ba^2-ad^2$, y como *cd*=*ac*—*ad* en el primero y *cd*=*ad*—*ac* en el segundo, en ámbos casos $cd^2=ad^2+ac^2-2ac.\ ad$, y sustituyendo en (1.ª) se tie-

ne $ac^2=ba^2-ad^2+ac^2+ad^2-2ac.\ ad$, ó sea $bc^2=ab^2+ac^2-2ac.\ ad$.

172. *El cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso de un triángulo, es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, mas el duplo del producto de uno de ellos, por la proyeccion del otro sobre él.*

En efecto, (Fig. 62) considerando el lado *ab* del triángulo obtusángulo *acb*, se tiene bajando la perpendicular *bd* sobre el lado *ab*, que en el triángulo rectángulo *abd* se verifica $ab^2=bd^2+ad^2-$(1.ª).

Pero como $bd^2=bc^2-cd^2$; y $ad=ac+cd$ ó $ad^2=ac^2+cd^2+2ac.cd$ sustituyendo en (1.ª) se tiene $ab^2=bc^2+ac^2+2ac.\ ad$.

173. *La bisectriz de un ángulo de un triángulo, divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados del ángulo bisecado.*

(Fig. 63). Sea AH la bisectriz del ángulo A tirando por B una paralela BD á la bisectriz, y prolongando el lado AC hasta que la encuentre en D, se tendrá en el triángulo BDC que AC: AD:: CH: HB. Ahora el ángulo $d=a$ por correspondientes entre paralelas el $b=c$ por alternos: y como por hipótesi $a=c$, es evidente que $b=d$; y por tanto el triángulo ADB es isósceles (102) en A y el lado AD=AB. Sustituyendo en la proporcion, se tendrá AC: AB:; CH: HB, segun se queria demostrar.

CAPÍTULO XIII.

De los polígonos semejantes.

174. *Dos polígonos semejantes pueden descomponerse en el mismo número de triángulos semejantes, y semejantemente dispuestos.* (Fig. 64).

Sean los polígonos semejantes *abcde* y $a'b'c'd'e'$; segun la definicion dada, (160) entre sus elementos, existen las dos séries de relaciones siguientes: 1.ª ángulos $a=a'\ b=b'\ldots.e=e'$; 2.ª lados $ab: a'b'::bc: b'c'::\ldots.\ ae: a'e'$.

Tirando desde dos vértices homólogos *a* y a' diagonales á las demás, se tendrán ámbos polígonos divididos en triángulos semejantes.

En efecto, los triángulos *abc* y $a'b'c'$, son semejantes por tener el ángulo $b=b'$ y los lados *ab* y *bc* que forman el ángulo *abc* proporcionales á los $a'b'$ y $b'c'$ que forman el $a'b'c'$.

Los *acd* y $a'c'd'$ tambien son semejantes; pues tienen el ángulo $acd=a'c'd'$, toda vez que son los restos de haber quitado de los án-

gulos iguales c y c', los ángulos iguales bca y $b'c'a'$; iguales estos dos últimos por pertenecer á los triángulos semejantes abc y $a'b'c'$; es decir, que $bcd-bca=b'c'd'-b'c'a'$ ó $acd=a'c'd'$.

Además, los lados ac y cd, que comprenden el ángulo acd, son proporcionales á los $a'c'$ y $c'd'$ que comprenden al $a'c'd'$. Pues se tiene por hipótesi $bc:b'c'::cd:c'd'$, y por la semejanza de los triángulos abc y $a'b'c'$ es $bc:b'c'::ac:a'c'$; luego á causa de la razon comun $bc:b'c'$, se tiene $ac:a'c'::cd:c'd'$; luego acd es semejante á $a'c'd'$.

Del mismo modo se demuestra que ade es semejante á $a'd'e'$, uego los dos polígonos han quedado descompuestos en triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.

RECÍPROCO.—*Dos polígonos* abcde *y* a'b'c'd'e' *que constan del mismo número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

En efecto; (Fig. 64) si abc es semejante á $a'b'c'$, acd á $a'c'd'$, y ade á $a'd'e$, se tendrá:

1.° Que los ángulos a y a', b y b', etc. son iguales, porque como el b y b', pertenecen íntegros á triángulos semejantes, ó como los a y a' están compuestos del mismo número de ángulos parciales, iguales tambien por pertenecer á triángulos semejantes; luego ángulos $a=a$; $b=b'$; $c=c'$ ....$e=e$ =(1).

2.° Entre los lados de los diferentes triángulos semejantes abc y $a'b'c'$... ade y $a'd'e'$, se tienen las relaciones $ab:a'b'::bc:b'c'::ac:a'c'$ tambien $ac:a'c'::cd:c'd'::ad:a'd'$ y $ad:a'd'::de:d'e'::ea:e'a$, luego á causa de las razones comunes $ac:a'c'$ y $ad:a'd'$, se tiene en fin, $ab:a'b'::bc:b'c'::cd:c'd'::de:d'e'::ea:e'a'$—(2.ª)

Es decir, que las séries de relaciones 1.ª y 2.ª, hacen ver que los polígonos dados, están dentro de la definicion de semejantes.

175. *Los polígonos regulares del mismo número de lados son todos semejantes.*

En efecto; respecto de los lados, se tiene que la série de relaciones de los lados del uno á los del otro, son iguales, porque todos los antecedentes y consecuentes son iguales por ser los polígonos regulares.

Respecto de sus ángulos, todos son tambien iguales, pues estando dado el valor de un ángulo de un polígono regular por la fórmula $\frac{2R(n-2)}{n}$, siendo n el número de sus lados, si se suponen polígonos del *mismo número de lados*, es claro que el valor de cada ángulo de uno, es igual á el valor *de cada ángulo del otro*. Por esto, *todos los triángulos equiláteros son semejantes*, y lo mismo los *cuadrados, pentágonos, etc., polígonos regulares.*

176. *Los perímetros de dos polígonos semejantes, son proporcionales á sus lados y líneas homólogas.*

En efecto, en los polígonos semejantes (Fig. 64) se verifica la série de relaciones $ab : a'b' :: bc : b'c' :: cd : c'd' :: de :: d'e' :: ea : e'a'$; luego sumando los antecedentes y los consecuentes, se tendrán $ab+bc+cd+de+ea : a'b'+b'c'+c'd'+d'e'+e'a' :: ab : a'b'$, y como $ab+bc+....ea$ y $a'b'+b'c'+....e'a'$, es lo que se llama perímetro, representándolos por $P : P'$ respectivamente se tiene $P : P' :: ab : a'b'$.

177. *La misma proporcionalidad pudiera demostrarse fácilmente que existe entre los perímetros de los polígonos semejantes y dos líneas homólogas cualesquiera.*

CAPÍTULO XIV.

CONSTRUCCIONES QUE SE FUNDAN EN LA TEORÍA DE PROPORCIONALIDAD DE LAS LÍNEAS Y SEMEJANZA DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

178. *Dividir una línea dada en cualquier número de partes iguales.*

El problema número (153-2.°) enseña á dividir una línea dada en dos partes iguales por medio de una perpendicular. Y como cada parte se puede á su vez dividir en otras dos iguales, repitiendo la misma construccion, claro es que la recta lo quedará en cuatro: y así sucesivamente en 8, 16, 32 y en general 2^n, partes.

Pero si se quiere dividir en tal número de partes que no esté comprendido en la fórmula 2^n, el método de las perpendiculares, es ineficaz, y se adopta el siguiente. Sea ab (Fig. 65) la recta que se quiere dividir en tres partes iguales. Por el punto a se traza una recta indefinida que forme con la ab un ángulo cualquiera, y sobre esta nueva recta á partir de a, con una abertura arbitraria de compás, se toman las tres distancias ac, cd y de iguales entre sí; se une e con b y trazando por d y c paralelas á la eb en los puntos f y g, queda la ab dividida en tres partes iguales.

La justificacion es evidente una vez demostrado el teorema (157).

179. *Dividir una recta en dos partes cuya relacion sea dada.*

Sea la recta ab (Fig. 66) y la relacion en que han de estar las partes en que se divide la de 5:6. Por el punto a se traza una recta indefinida que forme ángulo con la ab; y por b hácia la otra region se traza otra recta paralela á la que pasa por a: se toma sobre la traza-

da por *a* con una medida cualquiera cinco divisiones y sobre la trazada por *b* con la misma abertura se toman 6. Se une *c* con *d* y el punto *h* resuelve el problema. En efecto, los dos triángulos *ach* y *hbd* son semejantes porque tienen los ángulos en *h* iguales por opuestos por el vértice y el en *c=d;* y *b=a* por alternos internos entre paralelas, luego *ah*: *bh*:: *ac*: *bd* ó sea *ah*: *bh*:: 5:6.

Si la relacion en que se hubiera de dividir la *ab* fuese en la de dos rectas dadas *m* y *n*, en lugar de llevar una misma abertura várias veces sobre las rectas *ac* y *bd*, se tomarán sobre ellas dos distancias respectivamente iguales á las dos rectas *m* y *n*.

180. *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas* m, n *y* p (Fig. 67).

Sobre los lados indefinidos de un ángulo cualquiera, se toma una distancia *am=m* y una distancia *ap=p*, y sobre el otro, á partir de *a*, una distancia *an=n*, se une *m* con *n*, y por *p* se traza una paralela *px* á la *mn*, y el punto *x* marcará la distancia *ax*, que es la cuarta proporcional pedida. En efecto, de la construccion hecha, se deduce (162) que *am*: *an*:: *ap*: *ax*, ó sea *m*: *n*:: *p*: *ax*.

181. *Construir una media proporcional entre dos rectas dadas* m *y* n. (Fig. 68).

Sea *m* la mayor de las rectas: tomando la *ab=m* y levantando en su punto medio una perpendicular, si desde *b* con una abertura *bc=n* se marca el punto *c* y desde *c* se corta con la misma abertura la perpendicular en *d*, uniendo *d* con *b*, la *bd* será la media proporcional pedida. En efecto, uniendo *d* con *a* y con *c*, los dos triángulos *dcb* y *dab* son isósceles. El *dcb* porque *cb=cd*, y el *dab*, porque siendo el punto *d* de la perpendicular en el medio de la *ab*; *da=db* (120). Luego la relacion *da*: *db=dc*: *cb*, pues ámbas son iguales á 1. Además el ángulo *bdh* es comun, luego estos triángulos son semejantes (167), y por consiguiente la relacion *ab*: *bd* de un lado de los iguales á la base del primero, es lo mismo que *bd*: *dc* de los homólogos del segundo, es decir, que *ab*: *bd*:: *bd*: *dc* ó *m*: *bd*:: *bd*: *n*.

182. *Construir un triángulo semejante á otro dado.*

Sea el triángulo dado el *abc* (Fig. 69) sobre una recta cualquiera *ab* se construye hácia un lado dos ángulos *a'* y *b'* iguales respectivamente al *a* y *b* de triángulo *abc* el que así se determina *a'b'c'* es semejante al propuesto (163). Si la relacion de los lados fuese determinada, bastaría tomar la recta *a'b'* de tal longitud que tenga con la *ab* la relacion establecida.

183. *Construir un polígono semejante á uno dado.* Sea el polígono dado *abcde* (Fig. 64) desde uno de los vértices, el *a*, por ejemplo; se trazan las diagonales, y quedará el polígono propuesto dividido en

triángulos. Construyendo ahora un triángulo $a'c'd'$ semejante al acd: sobre el lado $a'd'$ otro triángulo $a'd'e'$ semejante al ade y sobre $a'c'$, otro $a'c'b'$ semejante al abc, se tendrá el polígono $a'b'c'd'e'$ semejante al $abcde$ (174). Si uno de los lados del polígono que se há de construir fuese dado, se seguiría la misma construccion.

184. *Tambien pudiera pedirse que el perímetro del nuevo polígono estuviese con él de el dado en la relacion de* m: n. En este caso se buscaria (179) primero una recta, por ejemplo, $a'c'$ que tuviese con la ac la relacion $m:n$. Es decir, que $ac : a'c' :: m : n$. Sobre la $a'c'$ por el método expuesto, se constituiría el polígono $a'b'c'd'e'$ semejante al $abcde$ y sus perímetros estarian en la relacion propuesta. En efecto, se sabe que llamado p y p' los perímetros de dos polígonos semejantes, se tiene (177) $p : p' :: ae : a'c'$ y como $ac : a'c' :: m : n$ sería $p : p' :: m : n$.

Áreas ó Planimetría en su estricto sentido.

CAPÍTULO XV.

EVALUACION DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS PLANAS TERMINADAS POR RECTAS.

185. *Se entiende por área la medida de una superficie.*

186. *La unidad de medida que se ha escogido para las superficies, es el cuadrado* (132).

187. *Se llama* BASE *de un polígono, el lado sobre que se considera insistiendo, y* ALTURA, *la perpendicular á la base bajada desde el vértice, más distante de ella.*

188. *La relacion de dos rectángulos que tienen iguales bases, es la misma que la de sus alturas.*

En efecto; (Fig. 70) sean $abcd$ y $a'b'c'd'$ dos rectángulos que tienen sus bases ad y $a'd'$ iguales: sus alturas, serán los lados contíguos ab y $a'b'$; (76) ahora bien, si estas alturas son comensurables, sea ae una medida comun de ellas, la que suponiendo que está 10 veces comprendida en la ab, y 4 veces en la $a'b'$, se tendrá la relacion $ab : a'b' :: 10 : 4$. Trazando ahora por los puntos de division, paralelas á las bases ad y $a'd'$, quedarán ámbos rectángulos divididos en rectángulos parciales, iguales todos entre sí, y los del uno á los del otro, pues tienen igual base y altura; (145) luego uno de ellos (de estos rectángulos parciales) puede ser elegido como unidad de superficie

entre los dos rectángulos, y entónces se tiene $abcd : a'b'c'd' :: 10 : 4$; luego á causa de la razon comun que tiene con la primera proporcion, será: $abcd : a'b'c'd' :: ab : a'b'$.

Si las alturas fuesen inconmensurables, un método análogo al empleado en el (158-2.° caso) probaría que la relacion de las superficies de los rectángulos propuestos y la relacion de sus alturas, son los límites de dos séries de relaciones comensurables, constantemente iguales, y por consiguiente, que estos límites tambien lo son.

189. NOTA.—Como en los rectángulos, los lados contíguos son perpendiculares; si uno se toma por base, es claro que el otro es la altura y vice-versa, y además ámbos expresan las dimensiones del rectángulo *(latitud y longitud)* por lo que la anterior proposicion se suele enunciar de este modo más general.

La relacion de dos rectángulos que tienen una dimension comun, es la misma que la que existe entre las otras dos dimensiones.

190. *La relacion de dos rectángulos cualesquiera, es la misma que la de los productos, de las bases por las alturas.*

En efecto; sea R un rectángulo, cuya base es b y su altura a; y sea R', otro rectángulo que tiene b' por base y a' por altura. Siempre se puede construir un tercer rectángulo R'' que tenga por base b (la del primero), y por altura a' (la del segundo); el cuadro de estos datos es

SUPERFICIES.	BASES.	ALTURAS.
R....	b....	a.
R'...	b'...	a'.
R''...	b....	a'.

Ahora bien, la relacion de los rectángulos R y R'' que tienen iguales bases, es la de sus alturas; así $R : R'' :: a : a'$. La de los rectángulos R'' y R' que tienen iguales alturas, es la de sus bases. Luego $R'' : R' :: b : b'$... Si se multiplican ordenadamente las dos proporciones y se suprime el factor R'', comun al antecedente y consecuente de la primera razon, se tendrá $R : R' :: a \times b : a \times b'$.

191. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.* En efecto, sea R un rectángulo b, su base y a, su altura. Sea C el cuadrado unidad, y l su lado. Se tendrá $\frac{R}{C} = \frac{a \times b}{l^2}$. Al elegir C por unidad de superficie, su lado será la unidad lineal, y por tanto $l^2 = 1$ en cuanto á $\frac{R}{C}$ es lo que se ha definido por área del rectángulo; luego área de $R = a \times b$.

192. NOTA.—1.ª Este producto $a \times b$ es un número é indica las veces que el cuadrado unidad está contenido en la superficie del rectángulo.

193. 2.ª El cuadrado es tambien rectángulo, para evaluar su área cuando convenga tomar por unidad otro cuadrado menor que él, es claro que bastará medir su base y altura con el lado del cuadrado unidad, y multiplicar los números que resulten; pero como la base y la altura del cuadrado son iguales, resultará siempre que el producto será la segunda potencia del valor de su lado. Así un cuadrado cuyo lado fuese un decámetro, si se evalúa su área en metros cuadrados, ésta seria 10×10 ó sean 100 metros cuadrados. Por esto se dice que el *área de un cuadrado es la segunda potencia de su lado. Tomando por unidad para medir está recta, el lado del cuadrado unidad.*

194. *El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura* (Fig. 71).

Sea el paralelógramo *abcd;* tomando por base el lado *ad,* la altura será *be;* ahora bien, si desde *c* se baja otra perpendicular *ch* á la prolongacion de la base, los dos triángulos *abe* y *chd*, serán iguales; (50, 126 y 100) luego los restos de separarlos sucesivamente de la figura total, serán equivalentes; pero separando el *cdh*, queda el paralelógramo propuesto *abcd;* y separando el *abe,* queda el rectángulo *behc*. Es decir, que área de *abcd*=área de *bech*.

Pero el área de *bech* es (191) *bc*×*be,* ó sea *ad*×*be;* luego la del paralelógramo es tambien *ad*×*be*.

195. Nota.—La primer parte de esta demostracion justifica tambien la proposicion siguiente: *Todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura.*

196. *El área de un triángulo tiene por medida la mitad del producto de su base por su altura.*

En efecto, sea el triángulo *abc*; (Fig. 72) tomando *bc* por base, la altura será *ad,* trazando por los vértices *c* y *a* dos paralelas *ce* y *ae* á los lados opuestos *ab* y *bc,* resultará el paralelógramo *abce,* el cual queda dividido por la diagonal *ac* en dos triángulos iguales; luego uno de ellos que es el propuesto *abc,* es la mitad del paralelógramo.

Ahora bien, el área del paralelógramo, tomando por base el lado *bc,* es *bc*×*ad*; luego la del triángulo será $\frac{1}{2}$ *bc*×*ad,* y como estas rectas son la base y altura del triángulo, queda demostrada la proposicion.

197. *El área de un trapecio tiene por medida, el producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

En efecto, sea el trapecio *abcd;* (Fig. 73) en el cual considerando, como generalmente se hace, á uno de los lados paralelos como su base, la altura será la *ae:* tirando la diagonal *ac,* queda el trapecio dividido en los dos triángulos *abc* y *acd,* los que si se consideran ser

sus bases los lados paralelos *ad* y *bc* del trapecio, tienen la misma altura *ae* que éste: es evidente, por otra parte, que el área del trapecio se compone de la suma de las áreas de estos dos triángulos; luego se tendrá área del trapecio *abcd*=área del triángulo *acb*+área del $acd=\frac{1}{2}ae\times bc+\frac{1}{2}ae\times ad=ae\,\frac{(bc+ad)}{2}$

198. Como la línea *gh* que une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio, es igual en valor numérico á $\frac{bc+ad}{2}$. El área del trapecio propuesto tiene tambien por expresion; área de $abcd=ae\times gh$.

Es decir, que *el área de un trapecio tiene por medida el producto de su altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

199. *El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de la apotegma por el perímetro.*

En efecto, sea (Fig. 49) *abcdef* un exógono regular. Trazando desde el centro *o*, (147) rectas á los vértices, quedará dividido en tantos triángulos iguales, como lados tiene. El área de uno de estos, por ejemplo *aob*, tomando como base el lado *ab* del polígono, es $\frac{1}{2}\ oh\times ab$ (esta *oh* es la perpendicular bajada desde el centro á el lado y se llama *apotegma*) y como es evidente que la suma de las áreas de estos triángulos, constituye la de el polígono, y esta suma se consigue repitiendo la del triángulo *aob* tantas veces como lados haya, se tendrá: área de $abcdef=\frac{1}{2}ab\times oh\times 6=\frac{1}{2}oh\times P$; pues $6\times ab$, es lo que se llama perímetro.

200. *Para medir el área de un polígono irregular, se le divide en triángulos; y calculando separadamente el área de cada uno de estos triángulos, la suma de todas ellas será la del polígono.*

Si se emplean las diagonales para la division del polígono en triángulos, se van considerando las diagonales como las bases, y bajándole desde los vértices perpendiculares, basta medir las diagonales y las perpendiculares, y se tienen los datos necesarios para evaluar el área del polígono.

CAPÍTULO XVI.

De la comparacion de las áreas.

Se llaman figuras equivalentes, las que tienen una misma área y no pueden coincidir.

201. *Las áreas de dos rectángulos que tienen una dimension*

comun, están en la misma relacion que la de sus otras dimensiones.

Las áreas de dos rectángulos cualesquiera, tienen la misma relacion que los productos de sus dos dimensiones. Ambos teoremas quedaron demostrados números 188 y 189.

202. *Las áreas de dos paralelógramos cualesquiera, tienen la misma relacion que los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, sea P y P' las áreas de los paralelógramos a y b las dimensiones del primero, a' y b' las del segundo; se sabe que área de $P=a\times b$ y de $P'=a'\times b'$, de donde dividiendo ordenadamente P: P':: $a\times b$: $a'\times b'$.

Si $a=a'$ ó $b=b'$, resulta P: P':: b: b' ó P: P':: a: a'. Es decir, que si los paralelógramos tienen *iguales bases*, sus áreas tienen la misma relacion que *sus alturas*, y si tienen *iguales alturas*, la *misma que sus bases.*

203. *La relacion de las áreas de dos triángulos cualesquiera es la misma que la de los productos de sus bases por sus alturas.*

En efecto, sean T y t las áreas de dos triángulos que tienen a y b por base y altura y a' y b' respectivamente, se sabe que $T=\frac{1}{2}a\times b$; y que $t=\frac{1}{2}a'\times b'$, dividiendo ordenadamente y suprimiendo el factor comun $\frac{1}{2}$, se tendrá T: t:: $a\times b$: $a'\times b'$.

204. Es claro, *que si las alturas* a *y* a' *son iguales, las áreas tienen la relacion de los bases; y si las bases* b *y* b' *son iguales, tiene la misma que la de las alturas.* Así todos los triángulos que tienen la misma base y sus vértices están sobre una paralela á esta base, son equivalentes; pues equidistando dos paralelas en todos sus puntos, todos estos triángulos tienen la misma altura y además idéntica base.

205. *Si dos triángulos tienen un ángulo igual, la relacion de sus áreas es la misma que la de los productos de los lados que forman dicho ángulo.*

Sean *abc* y *def* (Fig. 74) dos triángulos que tienen el ángulo $d=a$. Tomando sobre *ab* á partir de *a* la distancia $am=de$ y trazando la *mn* que forme con la *am*, un ángulo $amn=def$, es claro que los dos triángulos *amn* y *def* son iguales (101).

Hecho esto, tirando la *mc*, los dos triángulos *abc* y *amc* que tiene el vértice comun *c*, y sus bases *am* y *ab* en línea recta, tendrán la misma altura, y sus áreas por tanto están en la relacion de sus bases: es decir, que *acb*: *acm*:: *ab*: *am*. (1).

Por la misma razon, entre las áreas de los triángulos *amc* y *amn* que tienen el vértice comun *m* y sus bases *ac* y *an* en línea recta, se tiene *amc*: *amn*:: *ac*: *an*. (2).

Multiplicando ordenadamente las proporciones (1) y (2) y suprimiendo el factor *amc* comun á la primera razon, y teniendo en cuenta que $amn=edf$ y $am=de$ y $an=df$, se tendrá $abc : def :: ab \times ac : ed \times df$.

206. Si la *mn* fuese paralela á la *bc*, las segundas razones de las relaciones (1) y (2) serían iguales, y entónces las primeras darían $abc : amc :: amc : amn$.

Es decir, que el área del triángulo *amc*, seria media proporcional entre las de los otros dos triángulos.

207. *Las áreas de dos triángulos semejantes tienen la misma relacion que los cuadrados de sus lados homólogos.*

Sean *abc* y $a'b'c'$ (Fig. 69) dos triángulos semejantes: siendo iguales los ángulos, se tendrá entre sus áreas la relacion (205) $\frac{abc}{a'b'c'}=\frac{ca}{c'a'}\times\frac{cb}{c'b'}$ (1) pero por ser semejantes los triángulos, se tiene $\frac{ca}{c'a'}=\frac{cb}{c'b'}$, sustituyendo esta relacion en (1) dirá $\frac{abc}{a'b'c'}=\frac{ca^2}{c'a'^2}$. Como en las figuras semejantes, todas las rectas homólogas tienen la misma razon, se podria haber puesto tambien $=\frac{cb^2}{c'b'^2}=\frac{ab^2}{a'b'^2}$

208. *Las áreas de dos polígonos semejantes tienen la misma relacion que los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Sean *abcde* y $a'b'c'd'e'$ (Fig, 64) dos polígonos semejantes: si desde dos vértices homólogos se tiran las diagonales homólogas *ac* y $a'c'$; *ad* y $a'd'$ los polígonos quedarán descompuestos en el mismo número de triángulos semejantes, y semejantemente dispuestos (173).

Ahora bien, las áreas de los triángulos semejantes *abc* y $a'b'c'$, están la relacion de los cuadrados de sus lados homólogos, luego se tendrá $abc : a'b'c' :: ab^2 : a'b'^2$.

Pero por idéntica razon $acd : a'c'd' :: cd^2 : c'd'^2$ y $ade : a'd'e' :: ae^2 : a'e'^2$.

Tambien á causa de la semejanza de los polígonos, se tiene $ab : a'b' :: bc : b'c' ::$.... y tambien $ab^2 : a'b'^2 :: bc^2 : b'c'^2 ::$....

Luego siendo iguales las segundas razones de las proporciones, se tendrá $abc : a'b'c' :: acd : a'c'd' :: ade : a'd'e' :: ab^2 : a'b'^2 :: ac^2 : a'c'^2$.

Pero en una série de razones iguales, la suma de los antecedentes es la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente ó sea $abc+bcd+ade : a'b'c'+b'c'd'+a'd'e' :: ab^2 : a'b'^2$.

Pero la suma de los triángulos es el área del polígono, luego la proporcion será $abcde : a'b'c'd'e' :: ab^2 : a'b'^2$.

.209. *El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas, es*

equivalente al cuadrado construido sobre la primera, mas el cuadrado construido sobre la segunda, más el duplo del rectángulo construido sobre estas dos líneas.

En efecto; sean *ab* y *bc* (Fig. 75) estas dos rectas, construyendo sobre la suma *ac* el cuadrado *acgi;* tomando *ae=ab,* y trazando la *ef* paralela á la *ab,* y la *bh* paralela á la *ai;* es claro, que todos los ángulos de esta figura son rectos; además, las rectas *ae, bd* y *cf* son iguales entre sí, (33) y por la misma razon, las *ab, ed* é *ih;* y como *ae=ab,* se tiene *ae=bd=cf=ab=ed=ih.*

Tambien las rectas *bc, df* y *hg* son iguales entre sí, (126) como las *ie, hd* y *gf;* además, por ser *ai=ac,* y *ae=ab,* se tiene *ai—ae=ac —ab,* ó sea *ei=bc,* y por tanto, *bc=df=hg=ie=hd=gf.*

Esto supuesto, es evidente que *abde* es el cuadrado construido sobre *ab;* y *hdfg* es el cuadrado construido sobre *bc;* además *bcfd* y *edhi* son dos rectángulos iguales construidos sobre las rectas *ab* y *bc.*

Pero la suma de estas cuatro figuras compone el cuadrado *acgi,* construido sobre la suma *ab+bc;* luego este cuadrado equivale al cuadrado de *ab,* mas el de *bc,* mas el doble del rectángulo *ab* y *bc.*

Si pues se hace *ab=a,* y *bc=b,* se tiene que el área del cuadrado *ag* se representa por $(a+b)^2$ y se vé que consta de el área a^2 de *ad,* más b^2 de *dg,* más dos veces $a \times b$ de las áreas de los dos rectángulos.

210. *El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas, es equivalente al cuadrado construido sobre la mayor, más el construido sobre la menor, menos dos veces el rectángulo construido sobre estas dos rectas.*

En efecto, sean *ab* y *bc* (Fig. 76) las dos rectas; construyendo los cuadrados *ackh* y *abde,* es claro que *ae=ab* y *ah=ac;* luego *ae—ah= ab—ac,* ó sea *he=bc.*

Prolongando *de* y *kh* en las longitudes *ef* y *hg,* iguales á *bc,* y uniendo *f* con *g,* es claro que la figura *fghe* es un cuadrado igual al que se construyese sobre la *bc.*

Prolongando *ck* hasta que se encuentre en *i* al lado *ed,* y siendo *db=ab* (pues *abde* es un cuadrado), el rectángulo *dbci* es igual al que se construyera sobre las dos rectas *ab* y *bc.*

Tambien, como *id=cb,* y *fe=bc,* es claro que *fe=id,* y por tanto *fi=ed=ab;* por otra parte, *fg=he=cb;* luego el rectángulo *fikg* es igual al que se construyera sobre las líneas *ab* y *bc.*

Esto supuesto, es evidente que el cuadrado *ackh* equivale á el cuadrado *abde,* más el cuadrado *fghe,* ménos el rectángulo *icbd,* ménos el *ikgf;* es decir, que el cuadrado construido sobre *(ab—cb),* es igual á el cuadrado construido sobre *ab,* más el cuadrado construido sobre *bc,* ménos dos veces el rectángulo construido sobre estas líneas.

NOTA.—Reemplazando estas líneas por sus medidas a y b, la relacion anterior se podrá escribir bajo esta forma: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

211. *El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de las áreas de los construidos sobre los catetos.*

En efecto, sea *abc* (Fig. 77) un triángulo rectángulo; suponiendo construido un cuadrado sobre cada uno de sus lados, si desde el vértice *a*, del ángulo recto se baja una perpendicular *ad*, á la hipotenusa y se prolonga hasta *e*, uniendo *a* con *l*, y el punto *c* con el *k*, se tendrá que los dos triángulos *kbc* y *abl* son iguales, pues tienen el lado *bc*, del uno igual á el *bl* del otro, y el *kb=ba* por lados de cuadrados.

En cuanto á los ángulos *kbc* y *abl*, que comprenden estos lados, son iguales, porque cada uno se compone de un recto, más el ángulo *abc*. Esto supuesto, el área de el triángulo *abl*, tomando por base *bl*: es $\frac{1}{2}$ *bd* $\times$*bl*, pues *a* y *d* están sobre la *ae* paralela á la base *bl;* el área del rectángulo *bdel*, es *bl*$\times$*bd;* luego el triángulo es la mitad del rectángulo. Por otra parte, el área de *kbc* es $\frac{1}{2}$ *kb*$\times$*ab*, pues el vértice *c*, está en la *hc* paralela á *kb;* y como el área del cuadrado *abkh* es *kb.ab*, el triángulo *kbc* tiene la mitad del área del cuadrado. Como ya se probó que los dos triángulos *kbc* y *abl* son iguales, los dobles de sus áreas tambien lo serán; es decir, que el rectángulo *bdel* igual en área al cuadrado *abkh*. Del mismo modo, tirando las rectas *am* y *bf*, se prueba que siendo los triángulos *bcf*, y *amc* iguales y mitades respectivamente de las áreas del cuadrado *acfg*, y rectángulo *dcme*, estas figuras son iguales; luego la suma de los dos rectángulos *bdel*+*demc*= *abkh*+*acfg* ó sea el cuadrado *bcml=abkh*+*acfg*.

CAPÍTULO XVII.

PROBLEMAS RELATIVOS Á ESTA SECCION.

212. *Convertir un polígono en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

Sea *abcdef* (Fig. 78) el polígono dado; tirando la diagonal *ac* y por el vértice *b* una paralela *bi* á la diagonal determinada por su encuentro con la prolongacion del lado *fa;* uniendo *i* con *c*, el polígono *icdefai* que tiene un lado ménos que el propuesto, le es equivalente.

En efecto, los dos triángulos *aíb* y *cíb* son equivalentes, porque tienen la base comun *íb* y sus vértices *a* y *c*, sobre una paralela á esta base (203); luego los restos de quitarlos sucesivamente de la figura total *íbcdefaí*, deben ser tambien equivalentes, ó sea que *íbcdefaí—aíb=íbcdefaí—cbí*, ó lo que es lo mismo *abcdef=icdefaí*, que es lo que se pedia en el problema.

213. Nota.—Este método puede tambien aplicarse á un polígono cóncavo. En efecto, (Fig. 79) sea *abcdefg* un polígono que tiene el ángulo entrante *abc;* empleando el método anterior se tiraría la diagonal *ac*; por *b* la *bí* paralela á *ac* determinada por su encuentro con el lado *ga*. Uniendo *í* con *c*, se tiene que los triángulos *abc* y *aíc* tienen la misma base *ac* y sus vértices *b* é *í* sobre una paralela á la base, luego son equivalentes; restándolos sucesivamente de la figura total, los restos *abcdefg* y *cdefgí* son equivalentes.

214. Es claro, que repitiendo esta operacion suficientemente número de veces, se *reducirá cualquier polígono á triángulo.*

215. *Se llama cuadrar una figura, determinar un cuadrado cuya área sea equivalente á la de la figura dada.*

216. *Cuadrar un rectángulo.* Sea *a* la altura y *b* la base del rectángulo, y sea *x* el lado del cuadrado que se busca: como el área del cuadrado es x^2, y la del rectángulo $a \times b$, es claro que se debe tener $x^2 = a \times b$; luego *x* es una media proporcional entre *a*, *b*, la cual se puede determinar numérica ó geométricamente, segun se ha visto esto último. (181).

217. *Cuadrar un paralelógramo triángulo, y trapecio ó polígono regular.* El método indicado para el rectángulo es aplicable á todas aquellas figuras cuya área puede expresarse por el producto de dos rectas; así para cuadrar un paralelógramo, se buscará una media proporcional entre su base y su altura; para un triángulo una media proporcional entre la mitad de su base y su altura; para un trapecio se hallará entre su altura y la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos; y por último, para un polígono regular, la media proporcional se buscará entre su perímetro y la mitad de su apotegma.

Fin de la Planimetría rectilínea.

SEGUNDA PARTE.

DE LA PLANIMETRIA.

TRATADO DE LA CIRCUNFERENCIA DE CÍRCULO.

PRELIMINARES.

218. En la geometría elemental no puede hacerse un estudio completo de todas las curvas que se pueden trazar en un plano, porque los conocimientos de Aritmética y Álgebra que tienen generalmente los que la estudian, no son suficientes para ello. Limítase su estudio á una sola curva, á saber: *la circunferencia de círculo*, tanto porque sus propiedades son más extensas, comunes y fáciles que las de otras curvas, cuanto porque están íntimamente ligadas con las construcciones y propiedades de las figuras rectilíneas.

219. En algunas de las construcciones de la planimetría rectilínea, se ha hecho ya uso de la propiedad fundamental de esta curva, y por la cual se define, á saber: si una recta gira alrededor de uno de sus extremos hasta dar la vuelta completa, su otro extremo, ó mejor dicho, cada uno de sus puntos, describirá *una línea que en todos sus puntos estará igualmente distante del extremo fijo.* Esta es la propiedad fundamental de todas las demás que en tal línea se consideran. De modo que

220. *Se llama circunferencia una línea curva plana cerrada, cuyos puntos distan igualmente de uno interior.*

221. *El punto interior equidistante de todos los de la circunferencia, se llama centro.* Así, (Fig. (80) el centro es *c*.

222. *Se llaman rádios, las rectas que van desde el centro á la circunferencia:* (Fig. 80) los *ca*, *cb* y *cf*.

223. *Por definicion, todos los rádios de una misma circunferencia son iguales.*

224. *Se llama cuerda, la recta que vá de un punto á otro de la circunferencia.* (Fig. 80) Tal es la *ab* ó *bf*.

225. *Se llama diámetro, la cuerda que pasa por el centro.* Así (Fig. 80) la *bf*.

226. *Todos los diámetros de una circunferencia son iguales.* Esto es evidente porque cada uno se compone de dos rádios.

227. *La superficie encerrada dentro de la circunferencia, se llama círculo.*

228. Como en la palabra círculo vá representada la superficie y la línea que la limita, se suele emplear comunmente por la de circunferencia, principalmente si no se trata de propiedades especiales, yá de la longitud de la línea, yá del área que encierra, que entónces deben emplearse con distincion.

229. *La circunferencia no puede tener dos puntos consecutivos comunes con una recta.*

Sean *a* y *b*, dos puntos cualesquiera de una circunferencia (Fig. 80) uniéndolos por medio de la recta *ab;* si desde el centro *c*, se baja la perpendicular *cd*, ésta y todas las oblícuas tiradas desde *c*, á la recta *ab*, que caigan más cerca de la perpendicular que las *ca* y *cb*, son menores que estos rádios (116), y por tanto, sus extremos tienen que estar dentro de la circunferencia; luego por pequeña que se considere una recta secante *ab*, en una circunferencia, tiene todos sus puntos dentro de la misma, escepto aquellos dos en que la corta. Es decir, no tiene dos consecutivos comunes: de aquí el que

230. *La circunferencia sea una línea tal, que en todos sus puntos cambia de direccion*, conforme con la definicion dada (XIV).

CAPÍTULO I.

De las posiciones de una recta en una circunferencia. Tangentes y su uso para la determinacion de la direccion y forma de la circunferencia.

231. Las posiciones principales de una recta respecto de una circunferencia, son dos: 1.ª *Que corte oblícuamente al rádio tirado á su punto de encuentro con la curva.* 2.ª *Perpendicularmente.*

232. *Si una recta corta oblícuamente al rádio tirado al punto*

de encuentro con la circunferencia, corta á la misma en un segundo punto, y la perpendicular levantada en el medio de la cuerda, pasa por el centro de la circunferencia. En efecto; (Fig. 80) si la línea *eb* encuentra oblícuamente al rádio *cb*, es claro que desde *c* se le puede bajar una perpendicular, y siendo esta última más corta que el rádio *cb*, encontrará á la recta dentro de la circunferencia; y como al otro lado de la perpendicular se puede trazar una oblícua *ca*, igual al rádio *cb*, su pié *a* pertenecerá á la circunferencia (220). Luego la recta *eb*, encuentra á la circunferencia en un segundo punto. Ahora bien, como los extremos *a* y *b* de la cuerda, equidistan del centro (220) de la circunferencia, la perpendicular que se levante en su punto medio *d*, precisamente ha de pasar por todos los equidistantes de estos extremos, (120) y entreellos, por el centro, que es uno de los que gozan de esta cualidad.

233. *Recíprocamente. La perpendicular bajada desde el centro de una circunferencia sobre una cuerda, pasa por el punto medio de ésta.*

En efecto; (Fig. 80) los rádios *ca* y *cb* tirados á los extremos de la cuerda *ab*, siendo dos oblícuas iguales, sus piés *a* y *b* se apartan igualmente de el pié de la perpendicular, luego ésta pasa precisamente por el punto medio *d*, de la cuerda.

234. *Tres puntos que no están en línea recta fijan la posicion de una circunferencia.* En efecto, sean *a, b* y *c* los tres puntos (Fig. 81) uniéndolos por medio de las dos rectas *ab* y *bc;* si se imagina que por esos tres puntos pasa una circunferencia, las dos rectas *ab* y *bc* serán cuerdas y por tanto su centro se encontrará en cada una de las perpendiculares levantadas á estas cuerdas en sus puntos medios respectivos *d* y *e;* luego precisamente será el único punto *o*, comun á estas dos rectas, ó sea donde se cortan. Una vez conocido el centro *o*, el rádio está conocido, pues será cualquiera de las distancias iguales *oa*, *ob*, ú *oc*. Luego por tres puntos de un plano que no están en línea recta, siempre puede pasar una circunferencia. Además, no puede pasar más que una, porque no cortándose las dos perpendiculares *do* y *eo*, por más que se prolonguen, más que en un punto, (8) en todo el plano indefinido donde están las dos rectas *ab* y *bc*, no hay más punto equidistante de los tres *a, b* y *c*, que el ya determinado *o;* luego todas las circunferencias que se conciban por ellos, tienen el mismo centro; tambien tienen el mismo rádio, pues han de pasar por *a, b* y *c:* luego todas se confunden, ó son una sola.

235. *Se llama tangente á una circunferencia, la recta que no tiene más que un punto comun con ella. Este punto se llama de contacto.*

236. *La recta perpendicular al rádio en el punto que este corta á la circunferencia, es tangente á ésta.*

En efecto; si en el extremo *a* del rádio *ca* (Fig. 82) se traza la perpendicular *bd*, todas las rectas que desde *c* vayan á la recta *bd*, serán oblícuas (82), y por tanto, mayores que la *ca* (116), y precisamente han de salir fuera de la circunferencia (220) para encontrar la *bd*. Luego esta recta tiene todos sus puntos exteriores á la circunferencia, escepto uno que es el *a*, el cual es comun; luego es tangente.

237. *Recíprocamente. Si una recta es tangente á una circunferencia, el rádio tirado al punto de contacto le es perpendicular.*

En efecto; si la recta *bd* (Fig. 82) es tangente á la circunferencia *c*, y el punto de contacto es *a*, la recta *ac* es la más corta que se puede trazar desde la *bd* al centro, y por tanto, (118) es perpendicular á la *bd*.

238. *De aquí se deduce que la línea perpendicular á una tangente en su punto de contacto, contiene el centro de todas las circunferencias tangentes á la recta en el punto dado.*

239. *La tangente á una circunferencia, expresa la direccion de esta curva en el momento de contacto.*

En efecto, se han definido las líneas curvas, como aquellas cuya direccion varía constante ó contínuunmente; luego es evidente que si varía la direccion, en cada punto debe tener una determinada, y que por próximo que dos puntos se consideren en las circunferencias, se ha demostrado que no están en línea recta, es decir, que una recta no puede tener dos puntos consecutivos comunes con ella (229). Ahora bien, la determinada y momentánea direccion de un punto, puede ser expresada por una recta, pero ha de ser tal que solo corte ó toque á la curva en este punto; si la cortase en otro no expresaría la direccion de uno. Una recta de estas condiciones es lo que se ha llamado tangente, la cual expresa, por tanto, la direccion de la curva en el punto de contacto y nada más que en este punto.

240. *El ángulo de dos tangentes mide la variacion de direccion de la circunferencia entre los dos puntos de contacto.*

En efecto; sean *fh* y *eg* (Fig. 83) dos tangentes á la circunferencia *c*, en los puntos *a* y *d*. El ángulo de dos rectas está engendrado por la diferencia de su direccion, luego el *feg* de las dos tangentes, marcará la diferencia de su direccion, y como cada una de ellas tiene la direccion de la curva en los puntos *a* y *d*, evidente es que este mismo ángulo *feg* puede denotar lo que ha variado la direccion de la circunferencia desde el punto *a* hasta el *d*.

241. *El ángulo de dos tangentes es igual al que forman los dos rádios trazados á los puntos de contacto.*

En efecto; (Fig. 83) el ángulo *fed* tiene por suplemento á su adyacente *dea;* por otra parte, los ángulos del cuadrilátero *aedc*, valen cuatro rectos, y como los en *a* y en *d* son rectos, (237) el ángulo en *c* y el *dea* valen dos rectos: luego los dos ángulos *fed* y el *c*, que tienen el mismo suplemento *dea*, son iguales.

242. COROLARIO.—*La circunferencia es una curva igualmente formada en todas sus partes.*

En efecto, si se toman dos arcos *ad* y *dk* que puedan superponerse, y se trazan los rádios *ca, cb* y *ck*, los ángulos *acd* y *dck*, cuyo vértice está en el centro, son iguales, pues han sido engendrados por el mismo movimiento de giro que los dos arcos *ad* y *dk;* por consiguiente, á iguales arcos, iguales ángulos en el centro, é iguales ángulos de las tangentes. Por tanto, en las circunferencias, á igual longitud está ligado igual cambio de direccion, y de consiguiente es una curva regular en todas sus partes.

243. *Trazar una tangente á una circunferencia:* 1.° *en un punto dado sobre ella;* 2.° *desde un punto exterior.* Sea la circunferencia *c* y el punto de tangencia *a;* (Fig. 82) si se traza el rádio *ca* y en su extremo *a* se le levanta una perpendicular *bd*, ésta será la tangente pedida (236).

244. NOTA 1.ª—*Es evidente que en un punto de una circunferencia, solo se le puede trazar una tangente*, pues en un punto, solo se puede trazar una perpendicular al rádio, y esta es condicion precisa.

2.° Si el punto fuese exterior como el *a;* (Fig. 84) suponiendo trazada la tangente *ab* y el rádio *cb*, evidentemente el triángulo *acb* es rectángulo en *b*, (237) y como se conoce de él la hipotenusa *ac*, que es la recta que une el punto dado con el centro, y el cateto *cb* se puede por la construccion del triángulo *acb* (122) determinar la longitud de la tangente *ab*. Hecho esto, no habrá más que desde el punto *a* con el rádio *ab*, describir una circunferencia, y los dos puntos *b* y *d*, donde corte á la primera, serán los de contacto. Es claro que se pueden tirar dos tangentes, pues al construir con los datos expuestos el triángulo *abc*, se pudo hacer hácia las dos regiones de la recta *ac*.

245. NOTA 2.ª—*Dos tangentes á una circunferencia que partan de un mismo punto, son iguales.*

En efecto; los triángulos *abc* y *acd* (Fig. 84) son rectángulos con la hipotenusa *ac* comun, y los catetos *cb* y *cd* iguales por rádios de una circunferencia; luego (123) *ab=ad.*

CAPÍTULO II.

De la circunferencia como medida de los ángulos.

246. *Ángulos centrales.*

Si se consideran dos rectas ligadas por uno de sus extremos, y que una de ellas gira alrededor de este punto, resulta que en cada momento del giro, las direcciones de las dos rectas forman ángulos diferentes, y que cada punto de la recta que gira describe un arco de circunferencia cuyo centro es el vértice del ángulo. *Estos ángulos, cuyo vértice está en el centro del arco comprendido entre sus lados, se llaman centrales,* y la parte de circunferencia que abrazan, *su arco correspondiente.*

247. *La relacion de los ángulos es la misma que la de sus arcos correspondientes.* En efecto: 1.° Si en una circunferencia se consideran dos ángulos en el centro, iguales, sus arcos tambien lo son, pues han sido engendrado por el mismo cambio de direccion, y la circunferencia es una curva regular; luego en este caso la relacion de los ángulos es la misma que la de sus arcos.

2.° Si se tuvieren dos ángulos centrales de diferente magnitud *ab* y *acd*, (Fig. 85) considerándolos divididos en partes iguales por medio de rectas que partan del vértice, por ejemplo, el *acb* en 4, y el *acd* en 7, es claro que *acb*: *acd*:: 4:7. Por otra parte, como los arcos *ab* y *ad* quedan divididos en partes iguales, (247) es evidente que *ab*: *ad*:: 4:7. Luego *acb*: *acd*:: *ab*: *ad*.

248. *Los arcos pueden servir para la medida de los ángulos.*

249. *Division de la circunferencia.* Puesto que una recta al dar una vuelta completa sobre otra, á la cual está ligada por un punto, describe cuatro rectos, y cada uno de sus puntos una circunferencia, es claro que todo ángulo central es una parte tal de cuatro rectos, como el arco que describe, es de toda la circunferencia. De aquí el expresar la medida de los ángulos por partes ó arcos de circunferencia, y el haber dividido á ésta para comodidad y exactitud en 360 partes iguales que se llaman grados, cada grado en 60 partes llamadas minutos y cada minuto en 60 segundos: en adelante, si hay necesidad de más fraccion de arco, se expresa por décimas, centésimas, etc., de segundos.

Los grados, minutos y segundos, se espresan respectivamente en la escritura con un cero, ó un acento, ó dos. Así 34° 2'. 3,"4

expresan 34 *grados*, dos *minutos* y tres y cuatro décimas de *segundo*. Esta es la division llamada sexagesimal.

250. Hay otra introducida por los autores del sistema métrico decimal, que divide toda la circunferencia en 400 partes, llamadas tambien grados, cada grado en 100 minutos y cada minuto en 100 segundos, etc. Esta division es poco usada.

251. Segun esto, en la primera division, un recto mide 90°, dos 180°, tres 270°, y cuatro 360°; de modo que ángulo de 90° equivale á decir ángulo recto.

252. *Se llaman ángulos escéntricos, todos los que sin tener el vértice en el centro de una circunferencia, interceptan entre sus lados uno ó más arcos de ésta.*

Tales son los formados por dos cuerdas que se cortan en la circunferencia (inscriptos) ó en el *círculo*, ó los formados por *tangente* y *cuerda*, ó por *dos tangentes* ó *dos secantes*. Todos estos pueden expresarse ó medirse por una cierta funcion de los arcos que interceptan.

253. *La medida del ángulo formado por una tangente y una cuerda, es la mitad del arco que comprenden sus lados.*

Sea el ángulo m, formado por la tangente da, y la cuerda ab (Fig. 86) si desde el centro c se trazan los rádios ca y cb, el ángulo m es la mitad del central acb, pues bajando la perpendicular ce á la cuerda se tiene por una parte bisecado el ángulo acb (108), de modo que ángulo $p=\frac{1}{2}\ acb$. Por otra parte, los ángulos p y m tienen por complemento al n: (68) luego $m=p=\frac{1}{2}\ acb$; ahora bien, el ángulo acb como central mide el arco ab; luego el m tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco ab.

254. Nota.—Si el ángulo propuesto fuera el daq, formado por la tangente y un diámetro, el teorema sería evidente, pues daq es recto (237) y mide 90° ó sea $\frac{1}{2}$ del arco abq que abraza.

255 Por último, si el propuesto fuere el bag, entre él y su adyacente dab, componen dos rectos, ó sea la mitad de los dos ángulos acb cóncavo, y acb convexo (20). Pero el ángulo m es igual á la mitad del acb cóncavo, luego el bag es igual á la mitad del acb convexo, y como éste es central y mide el arco aqb, el bag medirá $\frac{1}{2}$ arco aqb.

256. *Se llama ángulo inscrito el que tiene su vértice en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas.*

257. *La medida del ángulo inscrito es la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

En efecto, sea n (Fig. 87) un ángulo inscrito, si por el vértice a se traza la tangente de, se tendrán los tres ángulos m, n, y p, que juntos miden la mitad de toda la circunferencia (251). Pero m mide $\frac{1}{2}$ arco ab y p, $\frac{1}{2}$ arco ac (253); luego el n precisamente mide $\frac{1}{2}$ arco bc.

258. NOTA.—*Los ángulos inscritos que abrazan media circunferencia son rectos.* En efecto, su medida es la mitad de media circunferencia, ó sea ½ de ½ de circunferencia, que es igual á ¼ ó cuadrante, ó 90°, que es la medida del recto.

259. *Es evidente que todos los ángulos inscritos que abrazan el mismo arco son iguales.* Así, (Fig. 89) los ángulos *acb*, *adb*, *aeb* y *afb* son iguales y todos aquellos cuyo vértice esté en el arco *acdefb* y sus lados pasen por *a* y *b*.

260. *La parte de círculo* acdefb *donde están estos ángulos inscritos, se llama segmento, y á los inscritos en él, ángulos del mismo segmento.*

261. El arco *acdefb*, se dice *arco capáz* del ángulo constante que está inscrito en él.

262. Es claro que dado un arco *ab*, todo ángulo que mide la mitad de él y sus extremos pasan por *a* y *b*, tiene su vértice en la parte restante de la circunferencia.

263. *Se llama ángulo escéntrico interior, el formado por dos cuerdas que se cortan dentro del círculo, como el* abc (Fig. 88).

264. *La medida del ángulo escéntrico interior á el círculo, es la semisuma de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones.*

En efecto, sea *abc* el ángulo de que se trata: trazando la cuerda *ac*, se forma el triángulo *abc*, cuyos tres ángulos (58) miden la mitad de la circunferencia; pero los ángulos *m* y *n*, como inscritos, miden respectivamente ½ arco *ec* y ½ arco *da;* luego el *abc* precisamente mide lo que á estos arcos le falta para componer la mitad de la circunferencia ó sea ½ arco *ac*+½ arco *de*.

265. *La medida del ángulo escéntrico exterior, es la semidiferencia de los arcos que comprende.*

1.° Sea el ángulo *bac* (Fig. 90) formado por dos secantes; si se une *b* con *e*, se tendrá el triángulo *bae*, y su ángulo exterior *m*=*n*+*bae* interiores no adyacentes; luego *bac*=*m*—*n*; y como *m* y *n* son inscritos, sus medidas con ½ arco *bc* y ½ arco *de;* luego *bae* tiene por medida ½ arco *bc*—½ arco *de*.

2.° Si el ángulo exterior está formado por tangente y secante como el *abc*, (Fig. 91) trazando la cuerda *dc*, se tiene el triángulo *bcd*, cuyo ángulo exterior *m*=*n*+*dbc*; de donde *dbc*=*m*—*n*; como el *m* mide ½ arco *ac* por inscrito, y el *n*, ½ arco *dc*, por formado entre tangente y cuerda, la medida del *abc* será ½ arco *ac*—½ arco *dc*.

3.° Si el ángulo exterior lo forman dos tangentes, como el *abc* (Fig. 92) trazando la cuerda *ac*, se tiene *m*=*abc*+*n;* de donde *abc*=*m*—*n*, y como la medida del *m* es ½ arco *akc*, y la del *n;* ½ arco *ahc*, por

formados por tangente y cuerda, se tendrá que la medida del *abc* es ½ arco *akc*—½ arco *ahc*.

CAPÍTULO III.

De las cuerdas y rectas proporcionales en el círculo.

266. Cuerdas.—*El diámetro es la mayor de las cuerdas que se pueden trazar en un círculo.*

En efecto; (Fig. 93) sea el diámetro *ab* y una cuerda cualquiera *df;* como esta última no pasa por el centro, se puede desde este punto trazar dos rádios *cd* y *cf* á sus extremos, con lo que se formará un triángulo *cdf,* en el cual $cd+cf>df$, y como $cd+cf=ab$, (225) se tiene $ab>df$.

267. *El diámetro divide á la circunferencia en dos partes iguales.*

En efecto, (Fig. 93) estando los tres puntos *a, c* y *b* en línea recta, la *ac* y *cb* forman el ángulo (15) lineal ó de dos rectos, tanto en la parte superior como en la inferior; luego los arcos *adb* y *afb* son iguales.

Tambien pudiera demostrarse por superposicion directa, pues si se dobla la figura por la *ab,* como sobre ella está el centro, todos los puntos del arco *adb* caerán sobre los de el *afb;* pues si se supone que uno cayese en el interior ó exterior, el rádio tirado á ese punto sería más corto ó más largo que todos los demás, lo cual es contrario á las condiciones de la curva de que se trata.

268. *Se entiende generalmente por arco correspondiente á una cuerda, el menor de los que subtiende.* En este sentido se enuncian los teoremas siguientes.

269. *Los arcos iguales en una misma circunferencia, están subtendidos por cuerdas iguales á el arco mayor lo subtiende mayor cuerda.*

En efecto; (Fig. 94) si el arco $ab=bd$, tirando las cuerdas *ab* y *bd* y los rádios *ca, cb* y *cd,* se formarán dos triángulos *acb* y *bcd* iguales, porque tienen dos lados iguales (el *bc* comun y el $ac=cd$ por rádios) é igual el ángulo comprendido *acb* y *bcd* (porque son centrales y abrazan el mismo arco); luego cuerda $ab=bd$.

Si el arco $af>ab$, haciendo la misma construccion los triángulos *acb* y *acf,* tienen dos lados iguales (el comun *ac* y $bc=cf$); pero el ángulo $acb<acf$; (246) luego (115) el tercer lado $ab<af$.

270. *Las recíprocas son ciertas. Es decir, en una misma circunferencia ó circunferencias iguales á cuerdas iguales, corresponden arcos iguales, y á mayor cuerda corresponde mayor arco.*

En efecto: (Fig. 94) 1.° Si cuerda $ab=bd$, los triángulos acb y bcd son iguales por tener sus tres lados iguales; luego ángulo $acb=bcd$, y por tanto (247) arco $ab=bd$.

2.° Si la cuerda $ab<af$, los triángulos acb y acf tienen ac comun y $cb=cf$; pero $ab<af$, y por tanto (247) ángulo $acb<acf$; luego arco $ab<af$.

271. *Las cuerdas iguales equidistan del centro y la mayor dista ménos.*

Si la cuerda $ab=bd$, (Fig. 94) las perpendiculares ck y ch trazadas desde el centro, irán á los puntos medios de las cuerdas; (233) luego los triángulos rectángulos ach y bck, que tienen las hipotenusas ac y cb iguales por rádios, y el cateto $ah=bk$ por mitad de rectas iguales, son tambien iguales, (123) y por tanto $ch=ck$, que son las que miden la distancias del centro á las cuerdas (118).

Si la cuerda $af>ab$, tomando un arco $fm=ab$ y trázando su cuerda fm, será igual á la ab; y lo que se demuestre de la fm y fa respecto de su distancia al centro, quedará demostrado para la ab y fa. Esto supuesto, si se trazan las perpendiculares cn y cp, se tiene $cn<cr$, pues la cr es oblícua á la cuerda fa; pero es evidente que $cp>cr$, luego á *fortiori* $cp>cn$.

Fácilmente se demuestran las recíprocas.

CAPÍTULO IV.

Rectas proporcionales en el círculo.

272. *Si dos cuerdas se cortan en un círculo, sus segmentos son inversamente proporcionales.*

Sean las ab y dc (Fig. 95) que se cortan en f: uniendo a con d y c con b, los triángulos afd y cfb, tienen los ángulos en f, iguales por opuestos por el vértice, los en d y b, y en a y c, respectivamente iguales dos á dos, por inscritos que abrazan un mismo arco; luego son equiángulos, y por tanto (163) $af : fc :: fd : fb$.

273. *Si desde un punto fuera del círculo se trazan dos secantes que terminen en el segundo punto de interseccion, están en razon inversa de sus segmentos externos.*

En efecto; sean ad y ae las secantes (Fig. 96) uniendo los puntos

b y *e; c* y *d* se forman dos triángulos *acd* y *abe* equiángulos (pues el ángulo *a* es comun y los en *d* y *e* iguales por inscritos en el mismo segmento), los cuales dan la proporcion (163) *ad*: *ae*:: *ac*: *ab*.

274. *Si desde un punto fuera de una circunferencia se trazan una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre toda la secante y su segmento externo.*

En efecto; (Fig. 96) se ha visto que la proporcion *ad*: *ae*:: *ac*: *ab* es verdadera; ahora bien, si se supone que la secante *ae* gira alrededor de *a* de izquierda á derecha, los dos puntos *c* y *e*, tenderán á reunirse y habrá un momento en que así suceda, que será cuando la *ae* se convierte en la tangente *af;* pero en todas estas posiciones la proporcion se verifica; luego tambien se verificará cuando *ae*=*ac*=*af* y dirá *ad*: *af*:: *af*: *ab*.

Tambien pudiera haberse demostrado por triángulos semejantes, trazando las cuerdas *df* y *bf*.

CAPÍTULO V.

De la relacion entre la recta que une los centros de dos circunferencias y los rádios, segun la respectiva posicion de éstas.

275. *Se llaman circunferencias secantes, las que se cortan en dos puntos, y tangentes las que solo tienen un punto comun.*

276. Es evidente, *que dos circunferencias no se pueden cortar más que en dos puntos.* Pues se ha demostrado que por tres puntos que no están en línea recta, solo puede pasar una circunferencia.

277. *Si dos circunferencias son tangentes, el punto de contacto está sobre la línea que une los centros.*

En efecto; si se supone que *c* y *c'* (Fig. 97) sean los centros de dos circunferencias, y *a* el punto de contacto, fuera de la línea *cc'* de los centros, se tendrá que bajando desde *a* la perpendicular *ab* á la *cc'* y prolongada una parte *ba'*=*ba*, el punto *a'* pertenece á la circunferencia cuyo centro es *c*, por ser *ca*=*ca'* (116 y 220) tambien pertenece á la circunferencia cuyo centro es *c'*, porque *c'a*=*c'a'* (116 y 220). Luego pertenece á las dos circunferencias, ó lo que es lo mismo, las dos circunferencias son secantes, pues tienen un segundo punto comun. Es decir, que para hacer ver que sólo tienen un punto de contacto, éste se ha de hallar precisamente sobre la línea que une los centros.

278. *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los*

centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia.

En efecto, (Fig. 98) sean c y c' los centros de dos circunferencias secantes; uniéndolos entre sí, y con uno de los puntos de contacto a, que precisamente está fuera de la cc', se tendrá formado un triángulo en el cual se verifica que $cc'<ca+c'a$ y tambien $cc'>ca-c'a$.

NOTA.—Si se llama d á la distancia de los centros y R y r, á los rádios, se tendrá que $d<R+r$ y que $d>R-r$.

279. *Si dos circunferencias son tangentes, la distancia de los centros es igual á la suma ó diferencia de los rádios, segun que sean exteriores ó interiores.*

En efecto; el punto de contacto precisamente se halla sobre la línea que une los centros y la inspeccion de las (Fig, 99 y 100), dá evidentemente para la primera ó sea tangencia exterior $cc'=ca+c'a$ ó sea $d=R+r$. Y para la tangencia interior $cc'=ca-c'a$ ó sea $d=R-r$.

280. *Si dos circunferencias son exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los rádios, y si son interiores es menor que la diferencia.*

Ambas proposiciones quedan demostradas con la inspeccion de las (Fig. 101 y 102), pues se tiene en la (Fig. 101) $cc'=ca+ab+c'b$ y á *fortiori* $cc'>ca+c'b$ ó sea $d>R+r$. Y para la (Fig. 102) $cc'=cb-(c'a+ab)$ y á *fortiori* $cc'<cb-c'a$ ó sea $d<R-r$.

281. *Las recíprocas son ciertas.* En efecto; sea por ejemplo, la recíproca de la proposicion, (278) á saber: *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los rádios y mayor que su diferencia, las circunferencias son secantes.*

En efecto, siendo $d<R+r$ y $d>R-r$, desde luego no pueden ser ni tangentes exteriores ni interiores. Tampoco pueden ser exteriores porque se opone la condicion $d<R+r$, ni interiores á causa de que $d>R-r$; luego no pueden ser más que secantes, toda vez que no existen más posiciones respectivas entre dos circunferencias.

Por análogo método de exclusion se demuestran las demás recíprocas.

CAPÍTULO VI.

CONSTRUCCIONES CUYA RESOLUCION DEPENDE DE LAS PROPOSICIONES ANTERIORES.

282. Es evidente que una circunferencia queda determinada de magnitud y posicion, si se conoce su centro y su rádio; y por tanto,

que al conocimiento de estos datos se deben dirigir los esfuerzos en la resolucion de aquellos problemas que dependen del trazado de esta curva. Hay porcion de problemas que no tienen por objeto el trazado de una circunferencia con estas ó aquellas condiciones, y sin embargo, para resolverlos, ó es indispensable su trazado ó al ménos los facilitan extraordinariamente. En todos estos casos conviene tener presente: 1.° Que dados tres puntos por donde pasa una circunferencia, ésta queda determinada inmediatamente. 2.° Que dada la magnitud y posicion del diámetro, tambien puede considerarse como trazada la circunferencia, pues hallando su punto medio (153-2°) ese será el centro (221) y su mitad el rádio (225).

283. *Sobre una recta dada* m, *construír un arco capáz de un ángulo dado* k. (Fig. 103).

Es claro que la recta *m* será una cuerda de la circunferencia, y por tanto, tomando una recta *ab=m* y levantando en su punto medio *d* una perpendicular, en ésta se hallará el centro; para determinar en qué punto de ella se encuentra, se observa que si por uno de los extremos *a* ó *b* de la recta se construye un ángulo *abh=k*, la mitad de el arco de circunferencia que pase por *a* y por *b* y sea tangente á la *bh* en el punto *b*, medirá este ángulo, (253) y por tanto al *k*, y además la perpendicular á la tangente en el punto *b*, pasará por el centro de la circunferencia; luego su intercesion con la *dg* lo determinará tal como en *c;* como ha de pasar por *b*, el rádio será *cb;* con lo cual se podrá trazar la circunferencia; el arco *agb* será el pedido, pues todos los ángulos inscritos en él, medirán ½ arco *ab* ó sea lo mismo que el *k*.

284. *Dados dos lados y el ángulo opuesto á el mayor, construir el triángulo.* Sean *m* y *n* (Fig. 103) los lados y *k* el ángulo opuesto al mayor *m*: construyendo sobre el *m=ab* el arco *agb* capáz del ángulo *k*, sobre este arco estará el otro vértice, y como ha de estar distante del punto *a* ó de el *b* la cantidad *n*, desde uno cualquiera de estos puntos con una longitud *ar=n* se corta á el arco *agb*, y el triángulo *ahb* es el pedido. Es claro que tales pueden ser los datos que el problema no sea posible.

285. *Si el triángulo fuera rectángulo y se diese la hipotenusa* m *y un cateto* n; (Fig. 104) considerando á la recta *m=ab* como diámetro y trazando la circunferencia, el arco *acb* será el capaz del ángulo recto, (258) luego con una distancia igual *n*, se marcará desde *a*, por ejemplo, el punto *c*, y el triángulo rectángulo (258) *acb* será el pedido.

286. *Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas* m *y* n.

Este problema se resuelve muy fácilmente por las circunferen-

cias. En efecto; (Fig. 105) sobre una recta se toma $ab=m$ y $bc=n$ y considerado á ac como diámetro, se describe una circunferencia, si desde b se levanta la perpendicular bd, ésta será la media proporcional pedida. En efecto, uniendo d con a y c, se forma el triángulo adc rectángulo en d, y por tanto, se tiene la proporcion (169) $ab : bd :: bd : bc$.

287. Tambien hubiera podido tomarse $ac=m$ y $ab=n$, y en este caso, haciendo la misma construccion, la media proporcional sería la cuerda ad (169),

288. *Se dice que una recta está dividida en media y extrema razon, cuando su parte mayor es media proporcional entre toda la recta y su parte menor.*

289. *Dividir una recta dada* ab *en media y extrema razon.* Por el extremo b se levanta una perpendicular $bc=\frac{1}{2}ab$ y se describe desde c una circunferencia; trazando desde a la secante ag que pase por el centro, y llevando la parte af sobre la ab, el punto h, que marca la extremidad f, será el pedido.

En efecto, la circunferencia será tangente á la ab (236) y dará (274) $ag : ab :: ab : af$ ó sea (Aritmética) $ag-ab : ab :: ab-af : af$. Pero $bc=cg=\frac{1}{2}ab$, luego $2cg=fg=ab$ y tambien $af=ah$, luego $ag-ab=ag-fg=af=ah$ y $ab-af=ab-ah=hb$; luego la proporcion será $ah : ab :: hb : ah$ ó sea $ab : ah :: ah : hb$. . . .

POLIGONOS EN EL CIRCULO.

CAPITULO VII.

De los polígonos inscritos y circunscritos.

290. *Un polígono se dice que está inscrito en una circunferencia, cuando sus vértices están en ella y sus lados son cuerdas de la misma.*

291. *Se dice circunscrito, cuando sus vértices están fuera del círculo y sus lados son tangentes.*

292. Los polígonos regulares son inscriptibles y circunscriptibles en una circunferencia. (Fig. 107).

En efecto, se ha demostrado (147) que todo polígono regular tiene un punto interior o, equidistante de los vértices: luego haciendo cen-

tro en ese punto *o*, con un rádio *oa*, igual á la distancia á uno de los vértices, la circunferencia que se describa pasará por todos ellos, (220) ó lo que es lo mismo, el polígono quedará inscrito.

Tambien es circunscriptible, pues siendo sus lados cuerdas iguales del círculo en que está inscrito, equidistan del centro; (270) luego si desde el centro *o* con el rádio *og*, que mide esta distancia, se describe una circunferencia, ésta pasará por los puntos medios de los lados, y si se trazan los rádios á estos puntos medios, serán perpendiculares, (191) y por tanto, tangentes; (236) luego el polígono es circunscriptible.

293. *El centro de los círculos á los que está el polígono inscrito y circunscrito, es uno mismo que el del polígono.*

294. *El rádio del círculo al cual está circunscrito un polígono, se llama apotegma del polígono, que como se vé, es lo mismo que la perpendicular bajada desde el centro al lado del polígono.*

295. *El círculo en el cual está inscrito un polígono, se dice circunscrito al polígono, y vice-versa aquél á el que está circunscrito, se llama inscrito en el polígono.*

296. *Si se divide una circunferencia en tres ó más arcos iguales, y por los puntos de division se trazan cuerdas, éstas forman un polígono regular inscrito, y si se trazan tangentes, forman un polígono regular circunscrito.* En efecto, si la circunferencia *o* (Fig. 107) se divide en seis arcos iguales, las cuerdas *ab, bc... fa* serán iguales, (269) y los ángulos *a, b,.. f*, tambien lo serán; (259) luego el polígono *abcdef* es regular y por su construccion está inscrito.

2.° Si se trazan las tangentes *hi, ij, jk... m h* los ángulos del polígono *hijklm* serán iguales, y sus lados tambien, pues los triángulos insósceles (245) *hbc, icd..... mab*, son todos iguales por tener las bases iguales, y los ángulos adyacentes á las mismas; luego los ángulos *h, i..... m* del vértice, son iguales, y los duplos de los lados iguales, á saber: *hi, ij.... mh*, tambien lo serán, luego el polígono que forman es regular.

297. Nota 1.ª—Es claro que inscrito ó circunscrito un polígono, si cada arco se divide en dos partes iguales, y se trazan cuerdas ó tangentes, se formará un nuevo polígono inscrito ó circunscrito, que será tambien regular y de duplo número de lados que el propuesto; porque se está en el mismo caso de tener dividida la circunferencia en partes iguales.

2.ª *Si por los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscrito, se trazan tangentes, el polígono circunscrito que se forma será regular y semejante al*

inscrito, y cada dos vértices estarán en línea recta con el centro.

En efecto, sea (Fig 108) un triángulo *abc* equilátero inscrito, los puntos medios *d, f, g* de los arcos subtendidos, dividen á la circunferencia en partes iguales, luego las tangentes que por ellos se trazen, formarán un polígono regular. Además, será semejante al inscrito, porque son del mismo número de lados (195). Por último, cada dos vértices, por ejemplo, *b* y *b'* está en línea recta con el centro, porque si se traza la cuerda *df* los puntos *b'*, *b* y *o* equidistan de sus extremos *d* y *f* (245) (269) y (223), y por tanto estáns obre la perpendicular *ob'* á la *df* (121) en su punto medio; es decir, están en línea recta.

298. *El lado del exágono regular inscrito, es igual al rádio.*

En efecto, sea *abcdef* un exágono regular (Fig. 107) si desde el centro *o,* se trazan dos rádios *oa* y *ob,* á los extremos de un lado, el ángulo central *aob* valdrá $\frac{4}{6}$ ó $\frac{2}{3}$ del recto, luego los en $a+b$ del triángulo *aob* valdrán juntos $\frac{4}{3}$ (111), y como son iguales, porque el triángulo es isósceles en *o,* cada uno valdrá $\frac{2}{3}$; es decir, que los tres ángulos del triángulo *aob* son iguales, luego sus tres lados tambien lo son (111) ó sea $ab=ob=oa$.

299. *El lado del decágono regular inscrito, es igual á la parte mayor del rádio dividido en media y extrema razon.* En efecto, sea *ab* (Fig. 109) el lado del decágono regular, y *oa* y *ob* los rádios; el triángulo *aob* es isósceles en *o;* y como el ángulo *o* vale $\frac{2}{5}$ de recto, los en *a* y *b* valen cada uno $\frac{4}{5}$ pues $a+b+o=\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=2$ rectos. Esto supuesto, si se biseca el ángulo *a,* se tiene $n=\frac{2}{5}$ y $p=\frac{2}{5}$: y por ser $n=\frac{2}{5}$ y $m=\frac{2}{5}$ el triángulo *oac* es isósceles en *c*, y por tanto $ac=oc$, por ser $p=\frac{2}{5}$ y $r=\frac{4}{5}$ se tiene $q=\frac{4}{5}$ luego el triángulo *acb* es isósceles en *a,* y por tanto, $ac=ab$; es decir que $ab=ac=oc$.

Por otra parte, por ser *ac* bisectriz de un ángulo de un triángulo, se tiene la proporcion $ao : ab :: oc : cb$, pero $ao=ob$ por rádios y $ab=oc$, segun se ha visto, luego $ob : oc :: oc : cb$, es decir, que en *c* está dividido el rádio *ob,* en media y extrema razon, y su parte mayor *oc* es igual á *ab*, lado del decágono regular inscrito.

CAPÍTULO VIII.

Construcciones referentes á esta seccion.

300. *Dividir la circunferencia en tres partes iguales.* Sea la circunferencia *c* (Fig. 110) desde un punto cualquiera de ella *a,* con una abertura de compás igual rádio, se marcan á derecha é izquierda dos puntos *b* y *d;* el arco *dab* será $\frac{1}{3}$ de la circunferencia; tomando la cuerda *db,* desde *d,* se marcará el punto *e* y quedará dividida la circunferencia en tres arcos iguales. En efecto; los arcos *ad* y *ab* son iguales entre sí, (270) y cada uno $\frac{1}{6}$ de la circunferencia; (299) luego la suma de los dos será $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

301. Nota.—Esta construccion es la misma que si se pidiera inscribir ó circunscribir un triángulo equilátero, pues para lo primero se trazarían las cuerdas de los arcos *db, de* y *be;* y para lo segundo, por los puntos *d, b* y *e,* se trazarían tangentes; lo mismo se tendrá por dicho en las siguientes divisiones.

302. *Dividir la circunferencia en cuatro partes iguales.*

Para ello se trazan dos diámetros perpendiculares y sus extremos marcarán los de los arcos que son $\frac{1}{4}$ de la circunferencia. En efecto, dos diámetros perpendiculares forman cuatro ángulos centrales rectos, y por tanto iguales; luego los arcos que abrazan tambien son iguales.

303. *Dividir la circunferencia en seis partes iguales.*

Se lleva sobre la circunferencia una abertura de compás igual á el rádio y estará contenida seis veces exactamente.

304. *Dividir la circunferencia en diez partes iguales.*

Se divide el rádio en media y extrema razon, (299) y su parte mayor llevada como cuerda sobre la circunferencia, estará contenida diez veces exactamente.

305. Nota.—*Para dividir la circunferencia en cinco partes iguales.* Se divide en diez, y cada dos arcos serán $\frac{1}{5}$ de la circunferencia.

306. *Dividir una circunferencia en quince partes iguales.* Para ello se observa que $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ y por tanto que el arco de $\frac{1}{15}$ de

la circunferencia es la diferencia de los arcos $\frac{1}{6}$ y $\frac{1}{10}$ de la misma; luego si desde un punto *a* de una circunferencia se marca un arco $m=\frac{1}{6}$ (303) y desde el mismo punto otro arco $n=\frac{1}{10}$ (304), el arco diferencia de los dos será $\frac{1}{15}$ de la circunferencia: tomando la cuerda de este arco diferencia, cabrá 15 veces exactas en la circunferencia.

307. *¿Qué divisiones exactas pueden hacerse en la circunferencia?*

Se acaba de ver que puede dividirse en 3, 4, 5, 6, 10 y 15 partes exactas, y como cada una de estas partes puede exactamente dividirse en dos, por medio de una perpendicular bajada desde el centro á la cuerda, se tiene que por medios geométricos pueden hacerse en la circunferencia las siguientes séries de divisiones.

1.ª 3; 6; 12; 24..... 3×2^n lados. 2.ª 4; 8; 16..... 4×2^n lados. 3.ª 5; 10; 20..... 5×2^n lados. 4.ª 15; 30; 60..... 15×2^n lados.

CAPÍTULO IX.

CÁLCULO DEL PERÍMETRO DE LOS POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS Y CIRCUNSCRITOS EN UNA CIRCUNFERENCIA.

308. Se sabe que perímetro de un polígono significa la suma de los valores numéricos de sus lados, y es claro que si el polígono es regular, para conocer el perímetro basta conocer el valor de un lado, toda vez que siendo todos iguales, su valor se hallará multiplicando el de el lado conocido por el número de ellos.

309. Para determinar el valor numérico de una línea, es necesario fijar la unidad: en los polígonos inscrito y circunscrito conviene que esta unidad sea el rádio de la circunferencia, porque de esa manera se simplifican las fórmulas halladas en funcion de éste.

310. *El lado del exágono regular inscrito es igual á el rádio.*

311. *El lado del triángulo equilátero inscrito es igual á el rádio multiplicado por* $\sqrt{3}$.

En efecto; (Fig. 111) sea *ad* la cuerda de $\frac{1}{3}$ de la circunferencia: trazando el diámetro *ab* y la cuerda *bd*, el arco $adb=\frac{1}{2}$ de la circunferencia; luego arco $bd=adb-ad=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ de la circunferencia.

Es decir, que la cuerda bd es igual á el rádio; esto supuesto, el triángulo adb es rectángulo en d, y segun el teorema de Pitágoras, dá $ad^2=ab^2-bd^2$; pero $ab=2r$ (llamando r al rádio) y $bd=r$; luego sustituyendo $ad^2=4r^2-r^2=3r^2$; de donde extrayendo la raíz cuadrada y prescindiendo del doble signo, pues sólo se desea su valor absoluto, $ad=r\sqrt{3}$.

312. *El lado del cuadrado es igual al rádio multiplicado por* $\sqrt{2}$.

En efecto; (Fig. 111) sea ef la cuerda de $\frac{1}{4}$ de la circunferencia: trazando los rádios ce y cf, el triángulo cef es rectángulo en c, (y segun el teorema de Pitágoras), se tiene $ef^2=ce^2+cf^2=r^2+r^2=2r^2$; de donde extrayendo la raíz cuadrada y tomando el valor positivo, $ef=r\sqrt{2}$.

313. *Dado un lado de un polígono regular inscrito en un círculo, calcular el de duplo número de lados regular é inscrito.*

Sea (Fig. 112) $ab=a$ el lado de un polígono regular inscrito; si se baja el rádio perpendicular cg á la cuerda ab, el arco ag será mitad del ab, y por tanto, su cuerda ag el lado del polígono de duplo número de lados: se trata, pues, de calcular el valor de ag en funcion del numérico a, de el ab, y del rádio. Para ello se observa que el ángulo acb, por ser interno de un triángulo, vale ménos de dos rectos, y por tanto, su mitad acg es agudo, y aplicando segun esto al lado ag del triángulo acg el teorema (171) se tendrá: $ag^2=ac^2+cg^2-2cg.ch$, ó sea llamando r al rádio; $ag^2=r^2+r^2-2r.\ ch$. Para resolver la cuestion, bastará poner á ch en funcion del rádio y del número a, y para ello, como ch es un cateto del triángulo rectángulo ach, cuya hipotenusa es el rádio r y el otro cateto $ah=\frac{1}{2}a$, se tiene (169-3.º) $ch^2=r^2-\frac{a^2}{4}$; de donde $ch=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$. Luego $ag^2=2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$; y extrayendo la raíz cuadrada de ámbos miembros y sacando en el segundo, $2r$ de factor comun, se tiene $ag=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}\right)}$

314. EJEMPLO. *¿Teniendo el lado de un exágono regular inscrito* 10.^{m} *y siendo el rádio* 10.^{m}; *cual será la longitud del lado del dodecágono regular inscrito en el mismo círculo?* Sea x este lado, se tiene $a=10$ y $r=10$; luego $x=\sqrt{2.10\left(10-\sqrt{10^2-\frac{10^2}{4}}\right)}=5^m,175$

315. *Dado el valor de el lado de un polígono regular inscrito, hallar el de semejante circunscrito.* Sea $ab=a$ (Fig. 112) el valor del lado de este polígono regular inscrito; si se baja desde el centro el rá-

dio cg perpendicular á la cuerda, y por g se traza una tangente limitada por las prolongaciones de los rádios ca y cb que van á los extremos de la cuerda, se tendrá el lado df del polígono regular circunscrito semejante al inscrito, (297) cuyo valor se busca. Observando ahora que los triángulos cdf y cab son semejantes (162) y comparando lados homólogos, se tendrá $df : ab :: cg : ch$; pero ab su valor es a; y $cg=r$ y se ha visto en el problema anterior que $ch=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$; luego sustituyendo será $df : a :: r : \sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}$, de donde

$$df=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}.$$

Ejemplo. *¿Teniendo en una circunferencia cuyo rádio son* 10.^{m} *el lado del exágono regular inscrito* 10.^{m}; *cual será la longitud del semejante circunscrito?* Ahora $a=10$; $r=10$; luego llamando x el valor que se busca, será $x=\frac{10.10}{\sqrt{10^2-\frac{10^2}{4}}}=11{,}545.$

Áreas de las figuras circulares.

CAPÍTULO X.

Rectificacion y cuadratura del círculo.

316. Las líneas curvas así como las rectas, tienen su longitud determinada, pues solo varian la una de la otra en que la direccion que siguen en la una es constante y en la otra varía contínuamente, segun se ha establecido en sus respectivas definiciones. La medida de las líneas rectas, tambien se ha dicho que es su relacion con otra que se toma por unidad; ahora bien, cuando se mide la longitud de una línea curva tomando por unidad una recta, ó en otros términos: cuando se halla la relacion entre la curva y la recta unidad, se dice que se ha rectificado la curva. Esta relacion nunca es exacta, pero se puede hallar con la aproximacion que se desee.

317. *En la circunferencia se ha tomado como unidad su diámetro;* y es claro, que determinada la relacion queda rectificada la curva.

318. Para determinar la relacion de una circunferencia con su rádio ó diámetro, se ha considerado á ésta como un polígono regular de un número infinito de lados; es decir, que tiene más lados que cualquier polígono que se considere inscrito ó circunscrito en ella, y en virtud de esta consideracion, se halla su rectificacion. Para ello se anteponen las siguientes proposiciones:

319. 1.° *Si hácia un mismo lado de una recta se trazan dos líneas quebradas, si la interior ó envuelta es convexa, será menor que la exterior ó envolvente.*

En efecto, sea *ab* una recta (Fig. 113) y *aghb* una línea convexa envuelta por la *acdb;* prolongando las rectas *ag* y *gh* hasta que corten en *e* y *f*, la exterior, se tendrán las desigualdades siguientes: $ag+ge<ac+ce$ y $gh+hf<ge+ed+df$; tambien $hb<hf+fb$; sumando ordenadamente y suprimiendo los sumandos comunes á ambos miembros, $ge+hf$; se tendrá $ag+gh+hb<ac+cd+db$.

320. *La circunferencia, considerada como un polígono regular de un número de lados mayor que cualquiera dado, es el límite superior de los perímetros de los polígonos inscritos, y menor de el de los circunscritos.*

En efecto, respecto de los circunscritos, es siempre una línea convexa quebrada envuelta, y con relacion á el de los inscritos, es envolvente.

321. *La relacion de la circunferencia al diámetro, es una cantidad constante; es decir, que no varía de una á otra circunferencia.*

En efecto; sean *C, C', C''*.... várias circunferencias rectificadas, sean R, R', R''..... sus rádios; supóngase inscritos en ellas varios polígonos regulares de igual número de lados, y sean P, P', P''..... sus perímetros; como todos estos polígonos son semejantes, (175) y sus rádios son los de las circunferencias en que están inscritos, se tiene $\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}=\frac{P''}{R''}=....$ y como estas relaciones son siempre iguales, cualquiera que sea el número de lados de que consten estos polígonos, sus límites tambien serán iguales (Aritmética). El límite de P es *C*, el de P' es *C'*, y el de P'' es *C''*; luego $\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}=\frac{C''}{R''}=.....$ y tambien $\frac{C}{2R}=\frac{C'}{2R'}=\frac{C''}{2R''}=....=constante.$

322. *El número constante que indica la relacion de toda circunferencia con su diámetro, se ha denotado con la letra griega* π. Así se establece la igualdad $\frac{C}{2R}=\pi$ ó sea $C=2\pi R$.

323. *Determinacion aproximada de* π.

Si se inscribe en una circunferencia un *cuadrado*, despues un *octógono*, despues un polígono de 16 lados, y así sucesivamente, ó más exactamente, si se calcula el perímetro de un *cuadrado* inscrito, despues por las fórmulas dadas el del circunscrito, despues se halla por las mismas fórmulas el perímetro de un *octógono inscrito* y *circunscrito*, despues los de un polígono de 16 lados, despues los de el de 32, 64, 128, 256.... etc., (pues el cálculo se puede llevar hasta donde se quiera), y se toma el rádio como unidad, se tendrá que al llegar al polígono de 256 lados dá como perímetro del inscrito P=6, 28301, y para el circunscrito, P'=6, 28302. Es decir, que difieren en ménos de 0,00001; luego la longitud de la circunferencia diferirá de cualquiera de estos dos valores (de P ó P') en ménos todavía, puesto que está comprendida entre las de P y P'. Ahora bien; esto dá un valor aproximado para π, puesto que si se toma á C=6,28302 como R=1, se tendrá $\frac{C}{2R}=\pi=3$, 14156. Si se quisiera más aproximacion para π, se calcularían los perímetros de los polígonos de duplo número de lados de 256 en adelante, hasta lograr la aproximacion que se deseára. Lo mismo podria haberse hecho partiendo de el triángulo equilátero ó del pentágono regular; pero este método que solo sirve para dar una idea de cómo se halla un valor aproximado para π, no es el que ha servido para hallarlo con 150 decimales como por procedimientos analíticos superiores se ha determinado.

Las diez primeras cifras exactas del valor aproximado de π son π=3, 1415926535. El valor aproximado de π fué expresado por Arquímedes por la fraccion $\pi=\frac{22}{7}$ y por Mecio $\pi=\frac{355}{113}$ que es más exacta.

324. *Cuadratura del círculo.*

Siendo el círculo el límite de todos los polígonos regulares inscritos en él, es evidente que su área será el límite de las áreas de estos polígonos, cuando su número de lados aumenta indefinidamente; ahora bien, cualquiera que sea un polígono regular, su área (199) llamando P al perímetro y a, la apotegma tiene por espresion $\frac{1}{2}a\times$ P. El límite de esta expresion, cuando el número de lados es indefinido, es el producto de los límites de sus factores; el factor $\frac{1}{2}$ como es numérico, no tiene variacion. El perímetro P tiene por límite la circunferencia rectificada C y la apotegma a, tiene por límite el rádio R; luego llamando A el área del círculo será A= *límite* $\frac{1}{2}a$. P.$=\frac{1}{2}C$. R; luego *el*

área del círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia rectificada por el rádio.

325. Como la circunferencia rectificada puesta en funcion del rádio es $C = 2\pi R$; sustituyendo en la fórmula anterior será $A = \pi R^2$; luego *el área del círculo es igual al producto de la relacion* π *de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del rádio.*

326. Es claro que si el cuadrado unidad tuviese por lado el rádio, R sería igual á 1, y la fórmula entonces se convertiría en $A = \pi$. *Es decir, que el área del círculo, tomando por unidad el cuadrado del rádio, es igual á la relacion* π *de la circunferencia al diámetro.*

327. *Se llama sector circular* (Fig. 114), *cada una de las partes* oamb, *ó* oanb *de círculo, comprendida entre dos rádios* oa *y* ob *y el arco* amb *en el primero, y* anb *en el segundo. El arco que lo termina se llama base del sector.*

328. *El área de un sector de círculo tiene por medida la mitad del producto de su arco por su rádio.*

En efecto, por un razonamiento idéntico al empleado en el número (247), se vé que las áreas de *dos sectores del mismo rádio, son proporcionales á los arcos que les sirven de bases;* admitiendo esto, se tiene llamando S y S' las áreas de los dos sectores en que queda dividido cualquier círculo por dos rádios, y a y a' sus arcos respectivos, que $S : S' :: a : a'$ de donde $S : S+S' :: a : a+a'$ pero $S+S'$ es todo el círculo, y $a+a'$ la circunferencia C; luego se tiene llamando R al rádio de este círculo que el área de $S+S$ = área del círculo = πR^2; y $C = 2\pi R$, sustituyendo en la anterior proporcion será

$$S : \pi R^2 :: a : 2\pi R \text{ ó sea } S = \frac{\pi R^2 a}{2\pi R} = \frac{R \times a}{2}$$

329. *Se llama segmento de círculo, la parte de círculo comprendida entre una cuerda y su arco.* Como toda cuerda subtiende dos arcos, toda cuerda determina dos segmentos, y excepto en el caso de ser un diámetro, uno es mayor que medio círculo y otro menor.

330. *Para evaluar el área de un segmento* (Fig. 114): 1.° *menor que media circunferencia como el* abm *se halla la del sector* oamb *y se le resta la del triángulo* oab.

2.° *Si el segmento fuese mayor que un semicírculo, como el* anb, *bastaría para evaluar su área, sumar las áreas del sector* oanb *y la del triángulo* oab.

331. *Se llama corona circular, el espacio que dejan entre sí dos circunferencias concéntricas* (Fig. 114).

Para evaluar el área de una corona, basta observar que este espacio es la diferencia entre las áreas de los dos círculos. Así, si se

llaman R y r los rádios se tendrá: Area de una corona $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2)$. *Es decir, que el área de una corona es igual á la relacion* π *de la circunferencia al diámetro, multiplicada por la diferencia de los cuadrados de los rádios.*

332. *Se llama trapecio circular el espacio* abcd *determinado por dos rádios en una corona.*

333. *El área de un trapecio circular se halla restando las áreas de los dos sectores.* Así (Fig. 114) el área del trapecio *adcb* será la diferencia de la del sector *oab* menos la del *odc.*

334. *Ejemplos. Un pátio circular tiene* 21,^{m} 6 *de diámetro. ¿Cuál es su área? Tomando* $\pi = 3$, 1416, *se tiene área* $= 366,^{m.\,c.}$ 43.

¿Cuál es el rádio de un círculo que tiene de área 6 *metros cuadrados?* Si en la fórmula $A = \pi r^2$ del área de un círculo, se despeja r, se tendrá $r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$ luego en el ejemplo, dividiendo 6 metros cuadrados por $\frac{22}{7}$ y estrayendo la raiz cuadrada al cociente, se tendrá $r = 1,^m$ 38.

¿Cuál es el rádio del círculo que tiene de área $5,^{m.\,c.}$ 47? Solucion: $r = 1,^m$ 319.

¿Cuál es el área de un sector circular, cuyo rádio son 10^m, *y el ángulo de* 75.°? Tomando $\pi = 3,146$, se tiene: *área del rector* $= 65,^{m\,c.}$ 45.

Hallar el rádio de un sector que tiene 32 $^{decim.\,c.}$ *de área y* 48° *de ángulo del centro, se tendrá* $r = 8,^{dec.}$ 74, *ó sea* $= 0,^m$ 874.

Si un círculo tiene 12 *centímetros de diámetro, ¿qué valor debe tener el ángulo de un sector para que su superficie sea igual* $50^{centim.\,c.}$?

La incógnita ahora es el arco a que será $a = 39°.\ 47'.\ 18'',\ 4.$

Fin del tratado de la circunferencia y de la planimetría.

SEGUNDA PARTE.

DE LA GEOMETRÍA ELEMENTAL.

STEREOMETRÍA.

PRIMERA SECCION.

RECTAS Y PLANOS.

CAPÍTULO I.

DE LA LÍNEA RECTA Y DEL PLANO.

335. De las definiciones dadas de la línea recta y del plano, resulta que *si una recta tiene dos de sus puntos en un plano, toda ella está en el plano.* De donde se sigue que *una recta no puede encontrar á un plano más que en un punto,* pues de lo contrario estaría toda ella en el plano.

336. *Por dos puntos pueden pasar infinitos planos.*

En efecto; si se unen los dos puntos por una recta, y por ésta pasa un plano y se hace girar alrededor de ella, en sus infinitas posiciones, siempre la contendrá; luego por los dos puntos pasan infinitos planos.

337. *Tres puntos que no están en línea recta fijan la posicion de un plano* (Fig. 115).

En efecto. Sean los tres puntos que no están en línea recta a, b, c, por dos puntos a y b, se sabe que pasan infinitos planos de magnitud indefinida; haciendo girar uno de ellos como si la ab fuese una charnela, es claro que habrá un momento que pasará por el tercer punto c, y entónces es evidente que por los tres puntos a, b y c, pasa un plano.

Si se supone que sea posible que un segundo plano pase por los tres puntos a, b y c, y para fijar las ideas se llama al primer plano m

y al segundo *n;* si se unen los dos puntos *a* y *b* por medio de una recta, es evidente que la recta *ab* estará toda ella en el plano *m* y en el plano *n;* y si se une *a* con *c*, tambien la recta *ac* estará toda ella en los dos planos (335).

Esto supuesto, sea *h* un punto cualquiera del plano *m;* trazando en este plano por el punto *h*, una recta *ef* que corte en *e* y *f*, respectivamente á las *ab* y *ac*, ó sus prolongaciones; la recta *af*, que tiene dos de sus puntos *e* y *f* en el plano *n*, está toda ella en este plano; luego el punto *h* es punto del plano *n:* pero por hipótesis se ha tomado sobre el plano *m*, luego es comun á los dos planos: lo mismo que se ha demostrado respecto del punto *h*, se demostraría de cualquier otro punto del plano *m;* luego estos dos planos que tienen todos sus puntos comunes coinciden en toda su extension y no son más que uno solo.

338. *Dos rectas que se cortan determinan un plano.*

En efecto, tomando sobre cada una de ellas un punto, éstos con el punto de encuentro, son tres puntos que no están en línea recta.

339. *Dos paralelas determinan un plano.*

En efecto, se pueden tomar dos puntos en una de ellas y uno en la otra, y serán tres que no están en línea recta.

340. *La interseccion de dos planos es una línea recta.*

En efecto: la interseccion, si fuese una línea curva ó quebrada, tomando sobre ella tres puntos que no estén en línea recta, se tendrian por ellos dos planos distintos, lo que es imposible (337).

341. *Si una recta* ao, *es perpendicular á otras dos* bo *y* co, *que pasan por su pié en un plano* mn, *es tambien perpendicular á cualquier otra* od, *que pase por su pié en el mismo plano.*

En efecto; (Fig. 116) trazando una recta cualquiera *bc* que corte á las tres dadas *ob, oc, od,* y prolongando la *ao* por la parte inferior del plano una parte $oa'=oa$, uniendo *a* y *a'* con los puntos *b*, *d* y *c*, se tendrá: 1.° en el plano de los tres puntos *a,b,a'* la $ba=ba'$ por oblícuas que se apartan igualmente del pié de la perpendicular *bo* á la *aa';* por igual razon en el plano *a,c,a'*, se tiene $ac=a'c$; luego los dos triángulos *abc* y *a'bc* son iguales, (pues *bc* es comun y $ac=a'c$, $ab=a'b$), y por tanto, sus ángulos homólogos, es decir, $abd=a'bd$.

Esto demostrado, se deduce que los triángulos *abd* y *a'bd* son iguales, (por tener *bd* comun $ba=ba'$ y el ángulo $abd=a'bd$) (100). Luego los lados homólogos son iguales, es decir, $da=da'$.

Se vé, pues, que en el plano de los puntos *ada'* se tiene $da=da'$, y por construccion $oa=oa'$; es decir, que la recta *do* tiene dos puntos *d* y *o*, equidistantes de *a* y *a';* luego la *do*, es perpendicular á la *aa'* en *o*.

342. *Todas las perpendiculares levantadas á una recta* ao *en uno de sus puntos* o, *están en un plano.*

En efecto; (Fig. 117) sean *ob* y *oc* dos perpendiculares á la *ao* en el punto *o*, y sea *mn* el plano de estas rectas, otra cualquiera perpendicular á la *ad* en el punto *o*, tiene que estar en el plano *mn;* pues si *oi* fuese una perpendicular á la *ao*, y no estuviese en el plano *mn*, construyendo el plano *od* de estas dos rectas, éste cortaría al *mn*, pues tiene un punto *o* comun con él sea *oe*, su interseccion, y se tendria que la *ao* sería perpendicular á la *oe* (341); esto es absurdo, pues entónces en *un mismo plano* que es el *od*, se tendrian dos rectas *oe* y *oi* perpendiculares á otra *oa* en un punto, lo que es imposible; luego la *oi* no puede ser perpendicular á la *ao*, y estar fuera del plano *mn*.

343. *Se dice que una recta es perpendicular á un plano, cuando lo es á todas las que pasan por su pié en el plano.*

Para que una recta sea perpendicular á un plano, basta que lo sea á dos que pasen por su pié en el plano (341).

344. *Se llama plano perpendicular á una recta, el que contiene todas las perpendiculares levantadas á esta recta en uno de sus puntos.*

345. *Por un punto fuera de un plano no se le puede bajar más que una sola perpendicular* (Fig. 118).

Sea el punto *o*, bajando la *oa* perpendicular al plano *mn;* si se supone que se puede bajar otra perpendicular, y que ésta sea la *ob*, uniendo *a* con *b*, la recta *ab* está en el plano *mn*, y se tendria que siendo las dos rectas *oa* y *ob* perpendiculares al plano, lo serian á la recta *ab* que pasa por sus piés en este plano: es decir, que en el triángulo *aob* habria dos ángulos rectos, lo que es absurdo.

346. *Por un punto de un plano, no se le puede levantar más que una perpendicular.* (Fig. 118).

Sea el punto *a*, y suponiendo que por él se puedan levantar al plano *mn*, dos perpendiculares *oa* y *ca*, éstas determinan un plano, cuya interseccion con el *mn* será una recta tal como *ab*. Es decir, que las tres rectas *oa*, *ac* y *ab* están en un mismo plano, que es el *aobc*. Ahora bien; las *oa* y *ac* perpendiculares al plano *mn*, lo será tambien á la *ab* que pasa por su pié en este plano; luego se tendría en un mismo plano *aobc* levantadas dos perpendiculares á una recta *ab* en un mismo punto, lo que es absurdo.

347. *Por un punto de una recta no se le puede trazar mas que un plano perpendicular.*

En efecto, se ha demostrado que un tal plano debe contener todas las perpendiculares tiradas á la recta dada por el punto dado, y que todas estas perpendiculares están sobre un solo y único plano.

348. *Por un punto fuera de una recta, no se le puede trazar mas que un plano perpendicular* (Fig. 118).

Suponiendo, que, en efecto, por el punto *o* esterior á la recta *ab* pudiesen pasar dos planos perpendiculares á esta recta: sean *a* y *b*, los puntos en que estos planos cortan á la recta *ab*, uniendo *o* con *b* y *a*, los dos ángulos *oab* y *oba*, serían rectos; habría, por tanto, un triángulo con dos ángulos rectos, lo que es imposible.

349. La recta que encuentra á un plano, y no le es perpendicular, se llama *oblícua* al plano.

350. *La perpendicular trazada desde un punto á un plano, es menor que cualquiera oblícua trazada desde el mismo punto al plano.*

En efecto, (Fig. 118) sea el punto *o* y el plano *mn*; *oa* la perpendicular y *ob* la oblícua: uniéndose *a* con *b*, se tiene el triángulo *oab*, rectángulo en *a*, y se sabe que la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos; luego $oa<ob$.

351. *Se llama distancia de un punto á un plano, la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

352. *Si desde un punto se trazan una perpendicular y varias oblícuas á un plano:* 1.° *Las que sus piés equidisten del de la perpendicular, son iguales.*

2.° *Las que disten más, son mayores que las que disten ménos* (Fig. 119).

Sea el punto *a* bajando la perpendicular *ao* sobre el plano *mn* y las oblícuas *ab*, *ac*, *ad*, tales que sus piés *b*, *c*, *d*, equidisten de *o*; tirando las rectas *ob*, *oc*, *od*, los triángulos rectángulos *aob*, *aoc*, *aod* son iguales, por tener el cateto *oa* comun, y los otros $ob=oc=od$, por hipótesis, luego las hipotenusas tambien lo son: es decir, que $ab=ac=ad$.

2.° Sea ahora la distancia $oe>oc$, la oblícua *ae* será mayor que la *ac*, porque en el triángulo *ace* la *ae* se opone al ángulo mayor que es el obtuso *ace*, el cual es obtuso por adyacente al agudo *aco* del triángulo *aoc* rectángulo en *o*.

353. *Si dos oblícuas á un plano son iguales, se apartan igualmente del pié de la perpendicular:* pues si alguna se apartase más ó ménos que cualquiera otra, ésta sería mayor ó menor que todas las demás.

354. *Dos oblícuas á un plano que son desiguales, la mayor se aparta más del pié de la perpendicular.* En efecto, si siendo $ae>ac$ no se tuviere $oe>oc$, precisamente se debería tener $oe=oc$ ó $oe<oc$; pero de $oe=oc$ se duduciría $ae=ac$ contra el supuesto: y de $oe<oc$

se deduciría $ae<ac$ tambien contra el supuesto; luego solamente es posible que $oe>oc$.

355. NOTA.—*Si desde el pié de una perpendicular á un plano se describe en éste una circunferencia, todos los puntos de la perpendicular equidistan de ella;* pues tirando las rectas que miden estas distancias, todas serán iguales por oblícuas equidistantes.

356. TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES.—*Si desde el pié* o, *de una perpendicular á un plano* mn, *se traza otra perpendicular* od, *á una recta* bc *situada en el plano, y se une el pié* d, *de esta segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, la recta* ad *que resulta, será perpendicular á la situada en el plano* (Fig. 120).

En efecto, tomando $bd=dc$ y trazando las rectas ab y ac; ob y oc, se tienen que $ob=oc$, por oblícuas, equidistantes de la perpendicular od: los triángulos rectángulos aob y aoc son, por tanto, iguales (pues ao comun y $ob=oc$); luego $ab=ac$. Esto supuesto, como las rectas ab, ad, ac, bc, están en un mismo plano bac, pues cada una de ellas tiene dos puntos en este plano, se tiene que la ad, cuyos extremos a y d equidistan de los b y c de la bc, le es perpendicular.

357. *Una recta es paralela á un plano, ó dos planos son paralelos, cuando indefinidamente prolongados las rectas y el plano ó los dos planos no se encuentran.*

358. *Si dos ángulos en el espacio tienen sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, son iguales.*

Sea el ángulo abc de lados paralelos á los del def, y dirijidos en el mismo sentido. Tomando sobre ellos las partes $ba=ed$ y $bc=ef$ y trazando las rectas be, ad, cf, ac y df. Siendo las rectas ab y de iguales, y paralelas la figura $abed$, es un paralelógramo, y por tanto, $ad=be$ y paralela.

Análogamente, la $cf=be$ y paralela: luego la $ad=cf$ y paralela: de aquí se deduce que el cuadrilátero $adfc$ es un paralelógramo, y por tanto, que $ac=df$ y paralela.

Esto demostrado, los dos triángulos abc y def son evidentemente iguales (99), y por tanto, el ángulo $abc=def$.

CAPÍTULO II.

DE LOS ÁNGULOS DIEDROS.

359. *Se llama ángulo diedro, la separacion ó abertura de dos planos que se cortan.*

360. *Los planos que lo forman se llaman caras y la recta en que se cortan aristas.*

361. *Los ángulos diedros se leen con cuatro letras; una de cada plano y las dos de la arista en medio.*

Así (Fig. 122) los dos planos *mcd* y *ncd*, forman un ángulo diedro cuyas caras son estos planos; su arista la recta *dc* y se designa *mcdn*.

En el caso de no haber formado sobre una recta más que un diedro (como en la Fig. 122) se podrá designar con las dos letras de la arista y decir el diedro *dc*.

362. *La magnitud de un diedro depende de la abertura de sus caras, no de la magnitud de éstas.*

363. *Se llama* ÁNGULO PLANO CORRESPONDIENTE *á un diedro, el formado por dos perpendiculares levantadas á su arista en un punto y una en cada cara.*

364. *Si dos diedros son iguales, sus ángulos planos correspondientes tambien lo son* (Fig. 122).

En efecto, sean *mcdn* y *m'c'd'n'* dos diedros iguales: tomando un punto *o*, en la arista del primero y trazando las perpendiculares *oa* y *ob* á esta arista, una en cada cara del diedro; haciendo lo mismo en el diedro *m'c'd'n'*, resultarán los dos ángulos planos *aob* y *a'o'b'* correspondientes á los diedros propuestos, y se vá á demostrar que si *mcdn=m'c'd'n'*, se verifica que *aob=a'o'b'*.

Para ello se coloca el diedro *mcdn* sobre el *m'c'd'n'* de modo que sus aristas coincidan y que el punto *o* venga sobre el *o'*, lo cual siempre es posible. Ahora bien; como los diedros son iguales, si se hace girar el *mcdn* sobre su arista hasta que una de sus caras *dm* coincida con la *d'm'*, la otra *cn* coincidirá con la *c'n'*: esto supuesto, la recta *oa* coincidirá con la *o'a'*, pues ámbas tienen que ser perpendiculares á una misma recta (la arista *oc*) en un mismo punto (el *o*) y en un mismo plano, pues el *dm* y *d'm'* han coincidido. Por idénticas consideraciones la recta *ob* coincide con la *o'b'*; luego el ángulo *aob=a'o'b'*.

365. La recíproca tambien es cierta, á saber: *si dos ángulos planos son iguales, los diedros á que corresponden tambien son iguales* (Fig. 122).

En efecto; colocando el diedro como anteriormente *m'c'd'n'* sobre el *mcdn*, de modo que las aristas *c'd'* y *cd* coincidan, y una de las caras *m'd'* y *md*, y tambien los puntos *o'* y *o*, las *a'o'* y *ao* coincidirán segun se ha demostrado. Ahora bien; las cuatro rectas *oa, ob, o'a', o'b'* perpendiculares á la arista *cd* en un mismo punto *o*, están en un solo plano perpendicular á esta arista, (343) y puesto que los ángulos *a'o'b'* y *aob* son iguales, precisamente coincidirán. Por con-

siguiente, las caras *cn* y *c'n'* que tienen comunes las dos rectas *ob* y *o'b'*, *oc* y *o c'* que se cortan, coinciden (338); luego los diedros *m'c'd'n'* y *mcdn* son iguales.

366. *La relacion de dos diedros es la misma que la de sus ángulos planos correspondientes* (Fig. 123).

En efecto, cualesquiera que sean los diedros que se propongan, siempre se puede considerar que la arista y una de las caras han coincidido. Sean *mden* y *mdep* dos ángulos colocados de este modo.

Por un punto cualquiera *o* de la arista comun, se levantan las perpendiculares *oa*, *ob*, *oc* á la arista, cada una respectivamente en las caras *dk*, *dn* y *dp*. En el plano que determinan estas perpendiculares (342) y desde *o* como centro, se describe un arco de círculo *abc*. Se tendrá, que si respectivamente tienen estos arcos 3 y 5 veces una medida, se verificará que *aob*: *aoc*:: 3: 5.

Si por los rádios tirados á los puntos de division y por la arista *ed* se hacen pasar planos, quedará el diedro *mdep* dividido en 5 diedros parciales, y el *mden* en 3, los cuales tendrán por ángulos planos correspondientes (263) los iguales en que se dividieron los planos *aob* y *aoc*, y por tanto, estos diedros parciales serán iguales (364), escogiendo uno de ellos por unidad para comparar los diedros propuestos, se tendrá *mden*: *mdep*:: 3: 5. Lo cual hace ver que la relacion de los diedros es 3:5 la misma que la de sus ángulos planos correspondientes.

Lo mismo se demostraría si no fuesen comensurables los diedros y ángulos planos, puesto que entónces la relacion de los diedros es el límite de una série de relaciones de diedros comensurables, siempre iguales á la de sus ángulos planos y cada vez más aproximados á los propuestos.

367. Cuando dos planos se cortan mútuamente, forman cuatro ángulos diedros (Fig. 124).

Si por un punto cualquiera *o* de la arista comun se trazan en las caras de los diedros perpendiculares como *oa*, *ob*, *oc*, *od*, estarán en un plano, y los ángulos que forman serán los correspondientes á las medidas de los diedros. Es claro que si estos cuatro ángulos planos son iguales (es decir, rectos) los diedros lo serán tambien y se nombran así mismo *diedros rectos*.

368. El ángulo *diedro recto* es el que se toma *como unidad para los diedros*, lo mismo que el ángulo recto plano se toma para los ángulos planos, ó como los cuadrantes para los arcos.

Midiéndose los diedros por ángulos planos y éstos á su vez por *grados*, *minutos* y *segundos*, es evidente que *tambien los diedros*

se podrán expresar por grados, minutos, etc.: así el *diedro recto tiene* 90°, *el diedro agudo ménos de* 90° *y el obtuso más.*

369. *Á los ángulos diedros les son aplicables las demostraciones dadas sobre rectas que concurren*, pues tienen las mismas propiedades que sus ángulos planos correspondientes. Así las proposiciones.

La suma de dos ángulos diedros adyacentes componen dos rectos.

Los diedros opuestos por la arista son iguales.

La suma de todos los ángulos diedros que se pueden formar alrededor de una recta, valen cuatro rectos.

Si dos diedros son suplementarios y tienen una cara comun, la otra está sobre un mismo plano, etc., etc. Se demostrarán como sus análogas de la parte plana, teniendo cuidado de sustituir la palabra *vértice* por *arista* y la de *lado* por *cara.*

370. La significacion de las palabras *suplemento* y *complemento*, lo mismo que la de diedros *adyacentes* ú *opuestos por la arista, etc.*, es la misma que la que tienen respecto de ángulos de rectas.

371. *Dos planos son perpendiculares cuando forman un ángulo diedro recto.*

CAPÍTULO III.

De los planos paralelos.

372. *Dos planos perpendiculares á una recta son paralelos.*

En efecto, si prolongados se encontráran, desde un punto cualquiera (de la interseccion), se tendrian dos planos perpendiculares á una recta, lo que es imposible.

373. *Si á dos planos paralelos* mn *y* pq *corta un tercer plano* rs, *las intersecciones* ab y cd *son paralelas* (Fig. 125).

En efecto, las dos rectas *ab* y *cd* situadas en los planos paralelos *mn* y *pq*, por más que se prolonguen, no se encuentran; además están en un mismo plano que es el secante *rs;* luego están dentro de la definicion dada de rectas paralelas.

374. *Las partes de paralelas comprendidas entre planos paralelos, son iguales.*

Sean *pq* y *mn* dos planos paralelos; (Fig. 125) *ac* y *bd* dos paralelas comprendidas por estos planos; si por estas dos rectas se hace pa-

sar un plano (339), sus intersecciones *ab* y *cd* serán paralelas (373). Por tanto, la figura *abcd* es un paralelógramo, y de aquí el que *ac=bd*.

375. *Tres planos paralelos* mn, pq, rs, *cortan á dos rectas cualesquiera en partes proporcionales* (Fig. 126).

Sean *ab* y *cd* dos rectas cortadas por estos planos: si por el extremo *a* de una de ellas se traza la recta *afg* paralela á la *cd*, se tendrá *ch=af* y *hd=fg*.

Haciendo pasar un plano por los tres puntos *g*, *a* y *b*, sus intersecciones *fe* y *gb* serán paralelas, y por consiguiente (162) *af*: *fg*:: *ae*: *eb* ó sea *ch*: *hd*:: *ae*: *eb*.

376. *Dos planos paralelos* pq *y* rs *cortan á dos rectas* ab *y* ag *que concurren fuera de ellos, en partes proporcionales*. En efecto, la proporcion *af*: *fg*:: *ae*: *eb* demuestra el teorema.

377. *Si dos planos paralelos son cortados por un tercero, se forman ocho ángulos diedros que reciben las mismas denominaciones que los determinados por una recta secante con dos paralelas.*

Así los alternos internos serán (Fig. 125) *los* mabs *y* qcdr; nabs *y* pcdr.

Los alternos externos rabm *y* scdq; rabn y scdp.

Los correspondientes rabm *y* rcdp; rabn *y* rcdq; scdp *y* sabm; scdq *y* sabn.

378. *Si á dos planos paralelos corta un tercer plano. Los ángulos diedros alternos internos, ó alternos externos, son iguales entre sí. Los correspondientes tambien lo son. Los dos diedros internos de un mismo lado del plano secante, son suplementarios lo mismo que los dos externos* (Fig. 125).

En efecto, sean *mn* y *pq* dos planos paralelos, y *rs* uno secante: sus intersecciones *ab* y *cd*, aristas de los diedros formados por estos planos, serán *rectas* paralelas (373): si se traza ahora un plano perpendicular á estas aristas, y que corte á los dos paralelos y al secante, sus intersecciones respectivas serán las rectas *ef* y *hi* con los dos paralelos, y la *zt* con el secante: ahora bien, estando estas intersecciones en el plano perpendicular á las aristas, *ab* será perpendicular á las rectas *zt* y *ef*, y la *cd* á las *zt* y *hi*, que pasan por su pié en este plano. Es decir, que los ángulos planos formados por las dos rectas paralelas *ef* y *hi* con la secante *zt*, son las medidas de los diedros formados por los planos *mn* y *pq* con el secante *rs*. Pero entre estos ángulos rectilíneos se verifican las propiedades enunciadas en el teorema: luego entre los diedros á que sirven de medidas, tambien se verifican.

CAPÍTULO IV.

Del ángulo triedro y del poliedro.

379. *La posicion relativa de tres planos que pasan por un mismo punto, y que se cortan segun tres rectas distintas, se expresa tambien con la palabra ángulo, añadiéndole la de* TRIEDRO *para distinguirlo del caso que se refiere á la separacion de dos rectas, ó de dos planos.*

380. La (Fig. 127) representa un ángulo triedro ó simplemente un triedro. El punto *v* donde se reunen los tres planos, se llama *vértice del triedro*: y los planos (que se deben considerar indefinidos), *avb, avc* y *bvc* son las *caras* del triedro, y las rectas *va, vb, vc*, intersecciones de estas caras, se llaman sus *aristas*.

381. Los tiedros se designan, sea solamente con la letra de su vértice, sea haciéndola seguir de las letras de las aristas, para evitar confusion; así se puede decir, el triedro *v* ó el triedro *vabc*.

Un triedro consta de seis elementos, que son tres ángulos diedros y tres planos.

382. *Una cara cualquiera de un triedro, es menor que la suma de las otras dos, y mayor que su diferencia* (Fig 127).

En efecto, sea *vabc* un triedro cualquiera; ante todo, es evidente que la primer parte del teorema, solo tendrá que demostrarse para la mayor de las tres caras: sea esta la cara *avc*. Si en el plano *avc* se traza la recta *vd* tal que forme con la *va* un ángulo *avd=avb*, y se cortan las tres rectas *va, vd, vc* por una recta cualquiera *adc*, tomando *vb=vd* y uniendo el punto *b* con *a* y con *c*, se tendrá que los dos triángulos *avd* y *avb* son iguales (100), y por tanto, *ab=ad*. Por otra parte, $ac<ab+bc$ ó sea $ad+dc<ab+bc$, ó en fin $dc<bc$. Luego los dos triángulos *bvc* y *dvc*, tienen un lado comun *vc*, y otro igual por construccion, á saber: *vb=vd*; pero el tercer lado *dc* es menor que el *bc*, y por tanto, el ángulo $cvd<bvc$. Sumando á ambos miembros de esta desigualdad, las partes iguales *avd* y *avb*, se tendrá $dvc+avd<avb+bvc$, y observando que por estar los dos ángulos *dvc* y *avd* en un mismo plano, su suma es *avc*, se tendrá por fin $avc<avb+bvc$.

Demostrado para la mayor de las caras, es evidente que para las otras dos menores, tambien se verifica.

Para demostrar la segunda parte del teorema, basta restar de los

dos miembros de la desigualdad establecida con cada ángulo, uno de los ángulos planos. Así de la anterior resulta *avb>avc—bvc.*

383. *En todo triedro á caras iguales, se oponen diedros iguales, y á mayor cara mayor diedro* (Fig 128).

1.° Sean las caras *avb* y *bvc* iguales, se vá á demostrar que el diedro *va=vc.*

Para ello, sobre las tres aristas del triedro, se toman las partes iguales *vd=vf=vg;* tomando despues las partes *dh=gm,* y tirando por *g* y *h* planos perpendiculares respectivamente á estas dos aristas, se determinarán los ángulos *ihl* y *nmk,* medidas de los diedros *va* y *vc.* Si pues se demuestra que estos ángulos planos son iguales, el teorema quedará demostrado. Pero se tiene que siendo iguales (por la hipótesis y construccion) los triángulos *dvf* y *fvg,* los dos triángulos rectángulos *dhi* y *nmg* son tambien iguales, (pues *dh=gm* y el ángulo *hdc=mgn* por ser de la base de triángulo iguales); luego *hi=nm* y *di=ng;* tambien los triángulos *dhl* y *mkg* son iguales (pues *mg=dh* y ángulo *hdl=mgk* por ángulos de la base del isósceles *vdg)* y dán *hl=mk; dl=gk.* Pero por ser *df=fg* en el triángulo *dfg,* se tiene ángulo *fdg=fgd;* y por tanto, los triángulos *dil* y *nkg* son iguales, y dán *il=nk;* luego (99) el triángulo *ihl=nmk,* ó lo que es lo mismo diedro *va=vc.*

Si se supone (Fig. 128-2.ª) que en el triedro *vdeg* se tiene cara *dve>evg,* el diedro *vd<vg.*

En efecto; tomando como ántes *vd=ve=vg;* por ser, segun la hipótesis, *dve>evg,* se tendrá (115) *de>eg,* y por consiguiente *dh=hg,* y por tanto, los dos triángulos *dvh* y *hvg* serán iguales (99) y darán ángulo ó cara *dvh=hvg.*

Ahora bien; esto dice que en el triedro *vdhg* el diedro *vd=dvgh;* pero evidentemente el diedro *dvge* contiene al *dvgh,* y por tanto, es mayor que él, ó que su igual *vd.*

384. *Si en un triedro son iguales dos diedros, las caras opuestas son iguales, y si dos diedros son desiguales á mayor diedro, se opone mayor cara.*

385. *Si los tres diedros de un triedro son iguales, sus tres caras planas con tambien iguales.*

Estas proposiciones se demuestran fácilmente por reduccion al absurdo.

386. *Igualdad de triedros.*

Se llaman triedros iguales los que superpuestos coinciden sus aristas.

387. *Si dos triedros tienen sus tres caras iguales é igualmente dispuestas, son iguales* (Fig. 129).

Sean los triedros *vabc* y *v'a'b'c'* que tienen las caras *avb=a'v'b'*, *bvc=b'v'c'* y *avc=a'v'c'*.

Segun lo demostrado, sus diedros serán respectivamente iguales, y por tanto, colocando el triedro *v'* sobre el *v*, de modo que la cara *a'v'b'* coincida con su homóloga *avb*, las caras adyacentes *bvc* y *b'v'c'* tambien coincidirán por ser los diedros *v'b'* y *vb* iguales; y en su consecuencia la tercera cara *c'v'a'* y *cva* tambien coincidirán por la igualdad de los diedros *v'c'* y *vc*. Las aristas de los triedros han coincido, luego son iguales.

388. *Dos triedros son iguales cuando los tres diedros del uno son iguales á los tres del otro, y están igualmente dispuestos.*

En efecto, se demostró que si un triedro tiene sus driedros iguales, sus caras planas tambien son iguales, con lo cual basta para hacer ver la coincidencia de dos triedros, cuyos diedros sean iguales.

389. *Dos triedros que tienen un diedro igual comprendido entre caras iguales é igualmente dispuestas* (Fig. 129) *son iguales.*

Es decir, que diedro *vb=v'b'*, y caras *avb=a'v'b'*; *bvc=b'v'c'*.

En efecto, la demostracion consiste en repetir la superposicion del caso anterior.

390. *Dos triedros que tienen dos ángulos diedros iguales adyacentes á una cara igual é igualmente dispuestos respecto de esta cara son iguales* (Fig. 129).

Es decir, que la cara *avb=a'v'b'* y los driedros *va=v'a'*, *vb=v'b'*.

En efecto, tambien se demuestra por superposicion directa.

391. *Se llama ángulo poliedro el espacio determinado por varios planos que pasan por un punto.*

392. Los planos *avb*, *bvc*,*cvd*, *dva* (Fig. 130) que lo componen, se llaman *caras* del poliedro; sus intersecciones consecutivas de dos en dos, *va*, *vb*... *vd* son sus *aristas;* el punto *v*, donde concurren todas los aristas, se llama *vértice* del ángulo poliedro.

393. *Los ángulos poliedros se leen, ó por la letra del vértice ó haciendo seguir á esta letra todas las de las aristas; así el de la* (Fig. 130) *se leerá: ángulo* v, *ángulo* vabcdo.

394. Los *ángulos poliedros* se dividen en *cóncavos* y *convexos*.

Se llaman ángulos poliedros convexos, aquellos en que una recta no puede encontrar mas que á dos de sus caras, y por el contrario, en los cóncavos.

En adelante, siempre que de ángulos poliedros se trate, se sobreentenderán *convexos*, á ménos que exprésamente se establezca lo contrario.

395. *La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo, es menor que cuatro rectos* (Fig 130).

Sea *v* el poliedro convexo, cortando todas sus aristas por un plano, resultará el polígono convexo *abcd*; bajando desde el vértice *v* una perpendicular *vo* al plano de este polígono, y uniendo el punto *o* con los *a*, *b*, *c* y *d*. Si desde *o* y *v* se tirasen perpendiculares á la *ab*, éstas concurrirían sobre un mismo puesto de la *ab* (356), y por tanto, la *vo* será menor que la *ve* (350) y (342).

Esto supuesto, si se hace girar el plano *avb* alrededor de la *ab* como charnela, hasta que se coloque en el plano del *aob*, como la *ve*> *vo* el punto *v* caerá exteriormente al *o* y se tendrá en un plano la figura (131) en la que evidentemente el ángulo *avb*<*aob*.

Del mismo modo se haría ver que los ángulos *avd*<*aod*; *dvc*< *doc* y *cvb*<*cob*; sumando ordenadamente, y observando que la reunion de todos los ángulos formados alrededor del punto *o* en el plano *abcd* valen cuatro rectos, se tendrá *avb*+*bvc*+*cve*+*dva*<4 rectos.

SECCION SEGUNDA.

CUERPOS GEOMÉTRICOS.

De los tetráedros.

396. *Para limitar espacios por superficies planas, se necesitan al ménos cuatro,* toda vez que si con tres planos se forma un triedro, el espacio que comprenden queda ilimitado en el sentido opuesto al vértice, y para limitarlo en este sentido es necesario y basta un cuarto plano que corte á las otras tres. El cuerpo de esta manera originado recibe el nombre de *tetráedro*.

Tetráedo es, pues, el cuerpo determinado por cuatro planos (Fig. 132).

Los cuatro planos *avb*, *avc*, *bvc*, *abc* (Fig. 132) que forman el tetráedro, se llaman sus *caras*; estas cuatro caras son triángulos.

397. Se llama *base* de un tetráedro, *la cara sobre la cual se considera que insiste ó descansa:* el vértice opuesto á la base se llama *vértice del tetráedro*.

Se llama ALTURA, *la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.*

Igualdad de tetráedros.

398. *Dos tetráedros son iguales si tienen tres caras del uno iguales á tres caras del otro é igualmente dispuestas.*

Sean los tetráedros (Fig. 132) *vabc* y *v'a'b'c'*, tales que *avb*= *a'v'b'; bvc=b'v'c'; cva=c'v'a'*, y están igualmente dispuestas.

Es claro que por la hipótesi, los dos triedros formados en *v* y *v'*, tienen sus tres ángulos planos iguales, y por tanto son iguales. Luego si se superpone el triedro *v* sobre *v'*, sus tres aristas *va, vb, vc*, seguirán la misma direccion que las *v'a', v'b', v'c'*; y por ser iguales las caras, la *avb* coincidirá con la *a'v'b'*, la *bvc* con la *b'v'c'* y la *cva* con la *c'v'a'*; luego los aristas *ab, a'b', bc, b'c', ca, c'a'*, tambien coincidirán, y por tanto, los tetráedros coinciden.

399. *Si dos tetráedros tienen dos caras iguales é igualmente dispuestas, é igual el diedro comprendido, son iguales.*

Fácilmente se demuestra la coincidencia en este caso, por superposicion directa.

400. *Si dos tetráedros tienen una cara* avb=a'v'b' *é iguales los tres diedros* va=v'a'; vb=v'b'; ab=a'b' *adyacentes é igualmente dispuestos* (Fig. 132) *son iguales.*

Tambien se demuestra por superposicion directa.

401. *Se llaman tetráedros semejantes, los que tienen sus ángulos diedros iguales y sus caras respectivamente semejantes.*

402. *Si en un tetráedro se traza un plano paralelo á la base el tetráedro parcial que resulta es semejante al total.*

Sea el tetráedro *vabc* (Fig. (133) si se traza el plano *a'b'c'* paralelo al *abc*, se tendrá determinado otro tetráedro *va'b'c'* que con el propuesto tiene.

Los ángulos diedros *va=va'; vb=vb'; vc=vc'* por ser continuacion unos de otros, es decir, por ser unos mismos. Y los *vabc=va'b'c'* etc., por ser correspondientes entre planos paralelos *abc, a'b'c'*.

Respecto de las caras, se tiene que las laterales *vab, va'b'* son semejantes por ser las rectas *ab* y *a'b'* paralelas (162); y lo mismo se diría de las demás laterales; y respecto de las bases *abc* y *a'b'c'*, tambien son semejantes, porque evidentemente de la semejanza de las laterales, se deduce que los lados de estos triángulos son proporcionales; luego estos tetráedros son semejantes.

403. *Se llaman caras homólogas, las opuestas á ángulos diedros iguales; aristas homólogas, las pertenecientes á diedros iguales, y vértices homólogos, los vértices donde concurren las aristas homólogas.*

404. *Si dos tetráedros tienen sus ángulos diedros iguales é igualmente dispuestos, son semejantes* (Fig. 133).

Sean los tetráedros *vabc* y *v'def*, tales que los diedros *va=v'd; vb=v'e;.....ab=de*. Si partir del vértice *v* y sobre la arista *va*, se toma una parte *va'=vd* y se traza el plano *a'b'c'* paralelo al *abc*. El tetráedro *va'b'c'* resultante será semejente al *vabc*.

Ahora los dos tetráedros *va'b'c'* y *v'def*, son iguales porque tienen una arista igual por construccion *va'=v'd*, y todos los diedros iguales, (pues los *v'd*, *v'e*, *v'f* son por hipótesis iguales á los *va*, *vb*, *vc;* y los *de*, y *fd* iguales á los *a'b'*, *b'c'* y *c'a'*, porque son respectivamente iguales á los *ab*, *ac*, *bc*, los primeros por hipótesis y los segundos por correspondientes entre planos paralelos), y por tanto, el tetráedro *v'def* es semejante al *vabc*.

405. *Si dos tetráedros* vabc *y* vdef *tienen una cara semejante adyacente á tres diedros iguales, son semejantes.* (Fig. 133)

Sean las caras semejantes las *vab* y *v'de* y los tres diedros adyacentes *va=v'd*, *vb=v'e* y *ab=de*.

Haciendo la construccion de el caso anterior, los dos tetráedros *v'def* y *va'b'c'* tienen una cara *va'b'=v'de* (por triángulos que tienen un lado *va'=v'd*, y los dos ángulos adyacentes iguales por pertenecer á triángulos semejantes por hipótesis); además los diedros adyacentes á estas caras son iguales, (los *v'd* y *v'e* iguales por hipótesis á los *va* y *vb*, y el *de=a'b'* por ser ambos iguales al *ab*, uno por hipótesis y el otro por correspondientes entre planos paralelos); luego estos tetráedros son iguales, y por tanto, el tetráedo *v'def* es semejante al *vabc*.

406. *Si dos tetráedros tienen dos caras semejantes y semejantemente dispuestos, é igual al diedro comprendido, son semejantes* (Fig. 133).

Sean *v'de* y *v'df* semejantes á *vab* y *vac* é iguales los diedros *va* y *v'd comprendidos*.

Repitiendo la construccion hecha anteriormente, los dos tetráedros *v'def* y *va'b'c'* tienen las dos caras *va'b'* y *va'c'* iguales á las *v'de* y *v'ef* é igual el driedro comprendido; luego son iguales, ó lo que es lo mismo, el tetráedro *v'def* es semejante al *vabc*.

407. *Si dos tetráedros tienen tres caras semejantes y semejantemente dispuestas, son semejantes.*

Sean las tres caras semejantes respectivamente las *vab*, *vac*, *vbc* á las *v'de*, *v'df* y *v'ef;* construyendo el tetráedro *va'b'c'*, se tendrá que éste es igual al *v'def* por tener tres caras *va'b'*, *va'c'*, *vb'c'* iguales á las *v'de*, *v'df* y *v'ef* (398). (Estas caras son iguales, pues por construccion los *va'b'* y *va'c'*, *v'de* y *v'df*, tienen el lado *va'=v'd* y los

ángulos adyacentes iguales, por pertenecer, ó ser iguales, á los de los triángulos supuestos semejantes; y los $v'ef$ y $vb'c'$ tambien iguales, porque demostrada la de los dos anteriores, tienen dos lados iguales vb' y vc' á los $v'e$ y $v'f$ é igual el ángulo comprendido por hipótesis).

408. *Las líneas homólogas de tetráedros semejantes son proporcionales* (Fig. 133).

Ante todo se observará que siempre es posible, dados dos tetráedros semejantes v y v', tirar en el primero un plano $a'b'c'$ tal, que determine un tetráedro $va'b'c'$ igual al v'. Esto supuesto, sean los tetráedros $vabc$ y $v'def$ semejantes: construyendo el $va'b'c'$ igual $v'def$, se tendrá que las caras avb y $a'vb'$ son triángulos semejantes y dan $\frac{va}{va'}=\frac{vb}{vb'}$; tambien en las caras semejantes bvc y $b'vc'$ se deduce $\frac{vb}{vb'}=\frac{vc}{vc'}$; luego $\frac{va}{va'}=\frac{vb}{vb}=\frac{vc}{vc'}=$.....*etc.*

Si se bajan las alturas vo y vo', desde vértices homólogos á las bases homólogas, como los planos de estas bases son paralelos, quedarán la va y vo' divididas por los dos planos paralelos, en partes proporcionales; es decir, que $\frac{va}{va'}=\frac{vo}{vo'}$; luego á causa de la parte comun $\frac{va}{va'}$ de esta igualdad con la anterior, se tendrá $\frac{va}{va'}=\frac{vb}{vb'}=...=\frac{bc}{b'c'}=.....\frac{vo}{vo'}$....

409. *Las áreas de las caras homólogas de tetráedros semejantes, tienen la misma relacion que los cuadrados de sus aristas homólogas, ó los cuadrados de sus alturas* (Fig. 133).

En efecto, siendo (por ejemplo) las caras avb y $a'vb'$ semejantes, se tiene $\frac{avb}{a'vb'}=\frac{va^2}{va'^2}$. Pero de la relacion entre todas las líneas homólogas se deduce que $\frac{va^2}{va'^2}=\frac{vb^2}{vb'^2}=.....\frac{bc^2}{b'c'^2}=\frac{vo^2}{vo'^2}$; luego $\frac{avb}{a'vb'}=\frac{va^2}{va'^2}=.....\frac{vo^2}{vo'^2}$.

410. *Si dos tetráedros tienen igual altura, las áreas de las secciones hechas á igual distancia del vértice paralelamente á sus bases, están en la misma relacion que estas bases* Fig. (134).

Sean $vabc$ y $v'a'b'c'$ dos tetráedros de igual altura, cuyas bases abc y $a'b'c'$ están en un mismo plano: sean def y $d'e'f'$ dos secciones paralelas y á igual distancia de las bases. Si desde los vértices v y v' se bajan las alturas vo y $v'o'$ como por hipótesis $vo=v'o'$; y por construccion los planos def y $d'e'f'$, se han trazado á la misma altura,

será $vg=v'g'$; siendo semejantes los tetráedros *vabc* y *vdef*, se tiene $abc : def :: vo^2 : vg^2$; pero tambien los tetráedros semejantes $v'a'b'c'$ y $v'd'e'f'$ dan $a'b'c' : d'e'f' :: v'o'^2 : v'g'^2$; y como los segundos miembros son iguales, se tiene $abc : a'b'c' :: def : d'f'e'$.

411. *Si las bases de dos tetráedros de igual altura son equivalentes, las secciones equidistantes de las bases y paralelas á ella tambien son equivalentes.*

En efecto, (Fig. 134) si se supone que $abc=a'b'c'$, la relacion $abc : a'b'c'=1$; luego $def=d'e'f'$.

412. *Se llama tronco de tetráedro, la parte comprendida entre la base y un plano paralelo á ella.*

413. Se dá el nombre de *tetráedro regular*, á aquel cuyas caras son triángulos equiláteros. Es claro que de la igualdad de todas las aristas de este cuerpo, se deduce la de sus ángulos planos, y de aquí la de sus diedros, y por tanto, se le dá el nombre de regular.

414. *Todos los tetráedros regulares son semejantes.*

CAPÍTULO V.

Pirámides.

415. *Se llama pirámide, el cuerpo que tiene por base un polígono cualquiera y sus caras son triángulos que se reunen en un punto que se llama vértice de la pirámide.*

Las pirámides toman el nombre del número de lados que tiene su base: así se llaman pirámides *triangulares* (que no son otra cosa que el tetráedro), *cuadrangulares, pentagonales*, etc., segun que su base sea un *triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.*

Las pirámides se leen, poniendo primero la letra del vértice y despues las de la base.

416. Si por uno de los vértices de la base de una pirámide se tiran diagonales, y por la arista correspondiente á este vértice y cada diagonal se hace pasar un plano, es evidente que la pirámide quedará descompuesta en tetráedos, y éstos serán en número de $(n-2)$, si n indica el número de los lados de su base.

Se llaman PLANOS DIAGONALES, *los que pasan por una arista lateral y una de las diagonales de la base de la pirámide.*

417. *Si dos pirámides tienen sus bases y dos caras laterales contiguas iguales é igualmente dispuestas, son iguales* (Fig. 135).

Sean *vabcde* y *v'a'b c'd'e'* dos pirámides tales que la base *abcde*= *a'b'c'd'e'* y las dos caras contíguas *avb* y *bvc* son iguales á las *a'v'b'* y *b'v'c'*.

Si se trazan los planos diagonales *avc* y *a'v'c'*, como los triángulos *abc* y *a'b'c'* son iguales, por la hipótesi de que las bases *abcde* y *a'b'c'd'e'* son iguales; los tetráedros *vabc* y *v'a'b'c'* serán iguales (398). Esto demostrado, si se imagina que las bases de esta pirámides se han hecho coincidir, es claro que los triángulos *abc* y *a'b'c'* y los tetráedros *vabc* y *v'a'b'c'* tambien coincidirán por ser iguales: luego los vértices *v* y *v'* coinciden y los *a, b, c, d, e* y *a', b', c', d', e'*; es decir, que las pirámides coinciden.

418. *Se llaman pirámides semejantes, las que tienen sus diedros iguales y semejantes sus caras.*

419. *Si en una pirámide se tira un plano paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la propuesta.* (Fig. 135)

En efecto, sea *va"b"c"d"e"* la pirámide determinada en la *vabcde*, por el plano *a"b"c"d"e"*, paralelo á la base *abcde*, se tendrá que los diedros formados sobre las aristas laterales, (es decir, los *va"* y *va*, *vb"* y *vb*, etc.) son unos mismos; y los formados por las bases y los planos laterales (es decir, los *va"b"a"* y *vabd*, *vb"c"e"* y *vbce*, etc.), tambien son iguales por correspondientes entre planos paralelos. Luego estas pirámides tienen sus diedros iguales.

Respecto de sus caras, las laterales son semejantes, por que determinándose los triángulos *va"b"*, *va"b"*, etc., por las intersecciones del plano *a"b"c"d"e"*, paralelo á la base *abcde* con las caras laterales, precisamente estas intersecciones son rectas paralelas; es decir, que *a"b"*, *b"c"*, etc., son paralelas á las *ab*,*bc*, etc.; luego los triángulos así determinados *va"b"* y *vab*, *vb"c"* y *vbc*, etc., son semejantes. Respecto de las bases *a"b"c"d"e"* y *abcde*, tienen sus lados paralelos, y en el mismo sentido, y por tanto, sus ángulos iguales (358); además, como por la semejanza de las caras laterales se tiene la série de razones iguales *ab*: *a"b"*:: *bc*: *b"c"*..... *de*: *d"e"*, las bases *abcde* y *a"b"c"d"e"* son semejantes.

420. *Las secciones hechas en una pirámide por planos paralelos á su base, son polígonos semejantes á esta base* (Fig. 135). Con cualquiera seccion paralela á la base *abcde* se puede repetir la demostracion que se ha hecho respecto de la *a"b"c"d"e"*.

421. *Las aristas ó alturas homólogas de pirámides semejantes, son proporcionales.*

En efecto, (Fig 135) la semejanza de las caras homólogas dá una série de razones iguales *ab*: *a"b"*:: *va*: *v"a"*, y si se trazan las alturas *vo* y *vo"*, haciendo por la arista *va* y la altura pasar un plano, se

determinarán dos triángulos *vao* y *va"o"* semejantes, y que dán *va*: *va"*:: *vo*: *vo"*; luego *ab*: *a"b"*:: *va*: *va"*.

422. *Se llaman pirámides regulares, aquellas cuyas bases son polígonos regulares, y cuyos triángulos laterales son todos isósceles é iguales.*

423. *La altura de uno de los triángulos laterales se llama apotegma de la pirámide.*

424. *En una pirámide regular, la altura cae en el centro de la base* (Fig 135). Pues siendo las aristas de la pirámide iguales, el pié de la perpendicular bajada desde *v*, sobre el plano de la base, equidistará de los puntos *a,b,c,d,e*, piés de las oblícuas iguales; (355) luego precisamente pasará por el centro del polígono regular *abcde*.

425. *Dado un tronco de pirámide regular hallar las alturas de la total y deficiente.*

Sea el tronco dado *a"c* (Fig. 135): si se supone completa la pirámide, se tendrá bajando la altura *vo*, y haciendo pasar por ella y la arista *va* un plano, que *vo*: *vo"*:: *oa*: *o"a"* ó sea *vo—vo"=oo"*:*vo*:: *oa—o"a"*: *oa* y tambien *oo"*: *vo"*:: *oa—o"a"*: *o"a"*, la primera dá $vo=\frac{oo"\times oa}{oa-o"a"}$ y la segunda $vo"=\frac{oo"\times o"a"}{oa-o"a"}$.

CAPÍTULO VI.

Prismas.

426. *Se llama prisma el cuerpo en que dos de sus caras son polígonos iguales y paralelos y las demás son paralelógramos.*

Estas dos caras paralelas se llaman *bases del prisma:* las otras que siempre son paralelógramos, se llaman caras *laterales*.

Altura de un prisma, es la perpendicular bajada desde una de las bases al plano de la otra.

427. De la definicion dada de prisma, se deduce que *las aristas laterales son todas iguales*.

En efecto; siendo paralelas de dos en dos, son todas paralelas entre sí: además están comprendidas entre planos paralelos, que son las dos bases; luego son iguales (374).

428. *Los prismas toman el nombre del número de lados que tiene el polígono de su base:* así se llaman prismas *triangulares*, *cuadrangulares*, *pentagonales*, etc., segun que su base sea un triángulo, cuadrilátero, pentágono, etc.

429. Los prismas suelen leerse con dos letras de vértices opuestos en las dos bases: así se dice el prisma *ai* ó el prisma *a'i'* (Fig. 136).

430. *Si dos prismas tienen las bases y una de las caras laterales iguales, é igualmente dispuestas, y formando ángulo diedro igual, son iguales* (Fig. 136).

En efecto, colocando el prisma *ai* sobre el *a'i'* de modo que sus bases *abcde* y *a'b'c'd'e'* coinciden, lo cual se verificará por ser iguales; la cara *abfg* seguirá la direccion *a'b'f'g'*, por formar ángulos diedros iguales con estas bases; y por ser iguales estas caras, los vértices *f* y *g* coincidirán con *f'* y *g'*: ahora bien; las aristas laterales son todas paralelas á éstas que han coincidido, y parten de los vértices de las bases que coincidieron, precisamente seguirán la misma direccion unas que otras; y además, como son iguales, sus extremos *h*, *i*, *k*, coincidirán con los *h'*, *i'*, *k'*; todos los vértices han coincidido, luego los primas coinciden.

431. *Toda seccion hecha en un prisma por un plano paralelo á las bases, es un polígono igual á estas bases* (Fig. 136).

En efecto; la seccion *mnopq* y una cualquiera de sus bases, tienen sus lados paralelos, (373) y por tanto, iguales (374), y además, sus ángulos iguales; (358) luego son iguales.

432. *Se llama prisma recto, aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares á los planos de sus bases, y oblícuo en el caso contrario.*

433. *Las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.*

En efecto, siendo las aristas perpendiculares á las bases, lo son á las rectas que pasan por sus piés en estas bases; luego las caras laterales son rectángulos.

434. *La altura de un prisma recto es igual á una de las aristas.*

435. *Dos prismas rectos son iguales, si tienen igual base é igual altura.*

436. *Se llama prisma regular, al que, además de ser recto, tiene por base un polígono regular.*

437. *Se llama seccion recta de un prisma oblícuo, la determinada en su superficie por un plano perpendicular á las aristas.*

438. *Se llama prisma troncado ó tronco de prisma, á el cuerpo que resulta cortando todas las aristas de un prisma, por un plano que no es paralelo á la base.*

439. *Todo prisma puede descomponerse en prismas triangulares y en tantos como lados tiene el polígono de su base, ménos dos,* (Fig. 136).

En efecto, si por una de las aristas *fa*, y por las diagonales tiradas

desde el vértice *a* de la base, se hacen pasar planos, los cuerpos en que queda descompuesto el prisma primitivo tendrán por bases los triángulos iguales *abc* y *ghf*, etc., en que se descomponen las dos bases, y por caras laterales paralelógramos, (pues el plano *afhc* tiene sus lados paralelos dos á dos). Estos cuerpos son, por tanto, (426) prismas triangulares.

CAPITULO VII.

De los paralelepípedos.

440. *Los prismas cuadrangulares cuyas bases son paralelógramos, se llaman paralelepípedos. En un paralelepípedo, por tanto, sus seis caras son paralelógramos.*

Los *paralelepípedos* gozan de todas las propiedades de los prismas, y además de las suyas peculiares siguientes:

441. *Las caras opuestas de un paraletepípedo, son iguales y paralelas.*

En efecto; (Fig. 137) sean dos caras opuestas *aehd* y *bcgf* de las cuales se vá á demostrar que son iguales y paralelas; en efecto, la arista *ae* es igual y paralela á *bf*, por lados opuestos del paralelógramo *abfe:* tambien la *ad* igual y paralela á la *bc*, por lados opuestos del paralelógramo *abcd* y el ángulo *dae* de las dos primeras, igual al *fbc* de las dos segundas (358); luego los paralelógramos *adhe* y *bcfg* son iguales (134) y sus planos paralelos.

442. Siendo todas las caras de un paralelepípedo paralelógramos, dos cualesquiera de ellas opuestas pueden ser tomadas como *bases: la altura* es entónces la perpendicular comun á estas bases.

443. Se llaman *vértices opuestos* en los paralelepípedos, dos que no estén en la misma cara; tales son los *a* y *g* ó los *h* y *b*, etc.

En cada vértice del paralelepípedo se reunen tres planos y forman, por tanto, un triedro.

Se llaman *diagonales de un paralelepípedo, las rectas que unen dos vértices opuestos.* Así la recta *ec* es una diagonal (Fig. 137).

444. *El plano que pasa por dos diagonales de un paralelepípedo, se llama* PLANO DIAGONAL.

Todo plano diagonal *aegc* divide evidentemente al paralelepípedo en dos prismas triangulares *adchge* y *abcefg*.

445. *Se llama paralelepípedo rectángulo, el que además de ser recto su base es un rectángulo.*

446. *En todo paralelepípedo rectangular, el cuadrado de una diagonal es igual á la suma de los cuadrados de las tres aristas que parten de uno de sus vértices* (Fig. 137).

En efecto, sea *ec* una diagonal haciendo pasar un plano por la arista *ea* y la diagonal *ec*, su interseccion con la cara *abcd* será una diagonal *ac*. Ahora bien; por ser la arista *ea* perpendicular á esta cara, lo será á la *ac* que pasa por su pié en el plano; luego el triángulo *eac* es rectángulo y dá por el teorema de Pitágoras $ec^2=ae^2+ac^2$. Pero el triángulo *cba* evidedentemente es rectángulo y por el mismo teorema se tiene $ac^2=bc^2+ab^2$ y observando que $bc=ad$; se tendrá en fin, $ec^2=ae^2+ab^2+ad^2$.

447. *Se llama cubo, al paralelepípedo recto rectangular, cuyas seis caras son cuadrados.*

CAPÍTULO VIII.

De los poliedros en general.

448. *Se llama poliedro en general, á todo cuerpo terminado por superficies planas.*

Estas superficies se llaman *caras del poliedro.*

449. *Los poliedros se dividen en cóncavos y convexos: los primeros son aquellos en que una recta encuentra á su superficie en más de dos puntos, y convexos los que no puede encontrarla más que en dos puntos.*

450. *Las rectas que determinan las caras del poliedro, se llaman* ARISTAS; *los puntos donde concurren y terminan las aristas* VÉRTICES. *Las rectas que unen dos vértices que no están en una misma cara,* DIAGONALES. *Los planos que pasan por tres vértices que no están en la misma cara,* PLANOS DIAGONALES.

451. *Todo poliedro puede descomponerse en pirámides.*

En efecto, si se considera un punto interior del cualquier poliedro, y desde este punto rectas á los vértices, es evidente que concibiendo planos por cada dos de estas rectas y el punto interior, quedará descompuesto el poliedro en pirámides cuyas bases son las caras del poliedro y cuyo vértice comun es el punto interior.

La misma descomposicion puede hacerse eligiendo otro cualquier punto del poliedro.

452. *Un poliedro puede siempre descomponerse en tetráedros.*

En efecto, demostrado que puede descomponerse en pirámides, co-

mo estas á su vez se descomponen en tetráedros (416), es evidente que un poliedro puede descomponerse en tetráedros.

453. *Se llaman poliedros iguales, los que tienen todas sus caras iguales é igualmente dispuestas é iguales los diedros comprendidos.*

454. *Dos poliedros son iguales si se pueden descomponer en el mismo número de pirámides iguales é igualmente dispuestas.*

En efecto, haciendo coincidir dos cualesquiera de estas pirámides iguales, las adyacentes evidentemente tendrán confundidas una de sus caras, y como por el supuesto son iguales y están igualmente dispuestas, coincidirán en toda su extension. Lo mismo acontecerá con las adyacentes á estas primeras, y así sucesivamente con todas las pirámides de que se componen ambos poliedros; luego éstos coinciden y coincidiendo es evidente que sus caras son iguales lo mismo que sus diedros.

Análogamente, *dos poliedros son iguales si se pueden descomponer en igual número de tetráedros iguales é igualmente dispuestos.* Esto es una consecuencia de lo anterior.

455. *Dos poliedros iguales pueden descomponerse en el mismo número de pirámides iguales é igualmente dispuestas.* La demostracion es fácil de hacer, comparando pirámide á pirámide.

De los poliedros regulares.

456. *Se llaman poliedros regulares, los que sus caras son polígonos regulares iguales entre sí, y cuyos ángulos sólidos son tambien iguales y están formados por igual número de aristas.*

457. *Los poliedros regulares son cinco.* En efecto, para formar ángulo sólido, se necesitan al ménos tres ángulos planos (379). Además, el valor de estos ángulos planos no puede llegar á cuatro rectos (396): uniendo estas condiciones con las de la definicion de poliedro regular, se tiene: 1.° que reuniendo tres ángulos del triángulo equilátero en cada vértice, se puede formar un poliedro que tenga cuatro caras y se llama *tetráedro regular,* porque los tres ángulos de cada vértice valen 2 rectos y están por tanto dentro de las condiciones enunciadas.

2.° Con cuatro ángulos de triángulo equilátero en cada vértice (cuyo valor es $\frac{8}{3}$ de recto), se forma un poliedro convexo regular de 8 caras, que se llama *octáedro regular.*

3.° Con cinco ángulos de triángulo equilátero en cada vértice (su valor $\frac{10}{3}$ de recto), se forma un poliedro regular de 20 caras llamado *icosáedro regular*.

Con más de cinco ángulos de triángulo equilátero en cada vértice, no se puede puede formar ángulo sólido, pues el valor de seis ya es $\frac{12}{3}$ de recto.

4.° Con tres ángulos de cuadrado en cada vértice (su valor de 3 rectos), se forma un poliedro regular de seis caras que se llama *exáedro* ó *cubo*.

Con más de tres ángulos de cuadrado, no se puede evidentemente formar ángulo sólido.

5.° Con tres ángulos de pentágono regular en cada vértice (su valor $\frac{18}{5}$ de recto), se forma un poliedro regular de 12 caras, llamado *dodecáedro regular*.

Con más de tres ángulos de pentágono regular no se puede formar ángulo sólido.

No hay más órdenes de poliedros regulares que éstos.

En efecto; siendo el valor de un ángulo de un polígono regular $a=2r-\frac{4r}{n}$, es claro que si n aumenta, el valor de a aumenta tambien. Ahora bien; como tres ángulos de exágono regular, cuyo valor es cuatro rectos, son demasiado grandes para poder formar ángulo sólido, es evidente que con mayor razon será imposible con tres de eptágono de octógono... etc. regular. Luego no puede cumplirse con la definicion de poliedro regular y las dos condiciones de existencia de ángulo sólido, sino en los cinco casos explicados.

CAPÍTULO IX.

Semejanza de poliedros.

458. *Los poliedros se llaman semejantes, cuando cumplen con las dos condiciones de igualdad de diedros y semejanza de sus caras homólogas, suponiendo además que sus elementos están igualmente dispuestos.*

459. *Los elementos homólogos en poliedros semejantes (caras, aristas, vértices, diagonales, ángulos diedros, ángulos poliedros, etc.), son los que están semejantemente dispuestos.*

460. *Se llama razon de semejanza, la constante que existe entre todos estos elementos homólogos respectivamente.*

Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetráedros semejantes y semejantemente dispuestos, siendo igual la razon de semejanza (Fig. 138).

Sean los dos poliedros *abc....lm* y *a'b'c'....l'm'* que se suponen semejantes; dividiéndolos en tetráedros de un modo análogo, y suponiendo que sean dos semejantemente dispuestos de estos tetráedros componentes, *abcl* y *a'b'c'l'*, éstos serán semejantes por tener un ángulo triedro en *b* igual al *b'*, los cuales son iguales por ser ángulos homólogos de poliedros semejantes.

Separando estos dos tetráedros, los poliedros que queden tendrán las condiciones de la definicion (458), pues como los diedros que se le han quitado al separar los dos tetráedros semejantes, son iguales, y los de los poliedros primitivos tambien son iguales, los restos son iguales: lo mismo se dirá respecto de la semejanza de las caras; luego el poliedro que queda, separando estos dos tetráedros, tienen sus diedros iguales y sus caras semejantes. Esto supuesto, considerando otros dos tetráedros de los nuevos poliedros, se vería que tambien son semejantes, y separándolos á su vez, los poliedros restos, serian tambien semejantes. Continuando así, es claro que se llegará á el último tetráedro de ámbos poliedros, que serán semejantes. Luego queda demostrada la primera parte.

Respecto de la razon de semejanza, como todos los tetráedos se ligan respectivamente en ámbos poliedros por una cara comun, todos tienen la misma razon de semejanza.

461. *Dos poliedros compuestos de igual número de tetráedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

En efecto: 1.° Si se consideran dos caras homólogas, de ámbos poliedros, no se pueden presentar más que dos casos, ó estas caras pertenecen íntegras á dos de los tetráedros semejantes, en cuyo caso son semejantes; ó se componen de igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, á los de que se compone su homóloga en el otro poliedro, (pues todos estos triángulos pertenecen á tetráedros semejantes) y en este caso tambien son semejantes.

Se vé, pues, que los dos poliedros tienen todas sus caras homólogas semejantes.

2.° Respecto de sus ángulos diedros homólogos, todos serán iguales, ya por pertenecer íntegros á tetráedros semejantes, ya por componerse de igual número de diedros iguales, por ser homólogos de tetráedros semejantes. Luego los diedros de ámbos poliedros son iguales.

462. *En dos poliedros semejantes, las aristas y diagonales homólogas tienen una razon constante de semejanza.*

En efecto; de la semejanza de las caras, resulta la igualdad de relacion de sus aristas, y como cada arista es comun á dos caras, todas tienen una relacion constante de semejanza.

463. *Las áreas de las caras homólogas de los poliedros semejantes, están en la misma relacion que los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Pues se sabe que las caras tienen la misma relacion que sus aristas y que las aristas tienen una relacion constante de semejanza.

464. *Los poliedros regulares de la misma especie, son semejantes.* Es decir, que todos los tetráedros regulares son semejantes entre sí; todos los octáedros, icosáedros, exáedros, dodecáedros regulares, son respectivamente semejantes.

CAPÍTULO X.

De las áreas totales y parciales de los cuerpos.

465. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular, es igual á la mitad del producto de su apotegma por el perímetro de su base.*

En efecto; cada una de las caras laterales es un triángulo isósceles, y su área, es uno de los lados de la base de esta pirámide por la mitad de su altura.

Así, llamando a, esta altura ó sea la apotegma de la pirámide, y b á este lado, el área de uno de estos triángulos tendrá por expresion $\frac{1}{2}\, a \times b$; la de todos ellos será la misma; luego al sumar estas áreas se podrá sacar en todas ellas $\frac{1}{2}\, a$ de factor comun, y se obtendrá así por expresion de la superficie lateral de la pirámide $\frac{1}{2}\, a$, factor comun de los lados de la base; ó sea del perímetro de esta base. Llamando p al perímetro, la expresion buscada será $\frac{1}{2}\, a \times p$.

466. *El área lateral de un tronco de pirámide regular, es igual á el producto de la altura de uno de los trapecios laterales, por la semisuma de los perímetros de sus dos bases.*

En efecto, el área de cado uno de los trapecios laterales es, (llamando a á su altura y l y l' sus bases) $a \times \frac{l+l'}{2}$; luego sumando las áreas de todos los trapecios laterales y sacando la altura de uno de

ellos por factor comun, se tendrá la altura multiplicada por los dos semiperímetros, ó sea $a \times \frac{p+p'}{2}$.

Como el perímetro de la seccion intermedia del tronco es igual á $\frac{p+p'}{2}$, llamándola p'', se tendrá por expresion del área lateral del tronco $a \times p''$.

467. *El área de la superficie lateral de un prisma recto, es igual á el producto de su altura por el perímetro de su base.*

En efecto; las caras laterales de un prisma recto son rectángulos, cuyo área se expresa por el producto de su base por su altura: llamando, pues, á la altura comun de todos ellos a, que es la misma que la del prisma, y b, b' b''... los lados de la base, que son las bases de los rectángulos, se tendrá por expresion de el área lateral del prisma, $a.b+a.b'+a.b''+...=a(b+b'+b''+...)=a.p$ llamando p al perímetro de su base.

Si el prisma es oblícuo, sus caras laterales son paralelógramos, y si para evaluar su área se toman como bases las aristas laterales, su altura respectiva serán los lados de la seccion recta (437). Cada uno, por tanto, tendrá por expresion de su área una arista lateral del prisma por uno de los lados de la seccion recta, y como todas las aristas laterales son iguales, sumando estas áreas y sacando la arista lateral de factor comun, se tendrá por expresion del área lateral del prisma oblícuo (llamando a' la arista lateral y p' el perímetro de la seccion recta) $a' \times p'$.

468. *El área lateral de un prisma oblícuo es igual á el producto de su arista lateral por el perímetro de su seccion recta.*

469. *Las áreas de dos poliedros semejantes están en la misma relacion que los cuadrados de sus líneas homólogas.*

Sean dos poliedros cualesquiera semejantes: como esta condicion envuelve la de semejanza de sus caras homólogas y proporcionalidad de sus aristas homólogas si se llaman C, C', C''... las áreas de las caras del primer poliedro, y A, A', A''...: sus aristas, c, c', c''... y a, a', a''... las áreas de las caras y las aristas del segundo poliedro, homólogas á las anteriores, se tendrá $C : c :: A^2 : a^2$; $C : c' :: A'^2 : a'^2$; $C'' : c'' :: A''^2 : a''^2$ etc., y como $A^2 : a^2 :: A'^2 : a'^2 :: A''^2 : a''^2$ se tendrá $C : c : C' : c' :: C'' : c'' :: ... :: A^2 : a^2$ de donde $C+C'+C''+... : c+c'+c''+... :: A^2 : a^2 :: A'^2 : a'^2$ etc.

Ahora $C+C'+C''+...$ es el área del primer poliedro, y $c+c'+c''+...$ la del segundo; luego queda demostrada la proposicion.

CAPÍTULO XI.

Volúmenes.

470. *Se llama volúmen de un cuerpo, la medida del espacio que ocupa.*

471. *El cuerpo tomado como unidad de volúmen, es el* exáedro regular ó cubo.

472. *Dos cuerpos se llaman equivalentes cuando sin ser idénticos tienen el mismo volúmen.*

473. *Un paralelepípedo cualquiera* ABCDEFGH, *puede convertirse en otro recto* abcdefgh, *que tenga igual altura y base equivalente* (Fig. 139).

Sea un paralelepípedo cualquiera el AG: tomando sobre la arista EF y su prolongacion dos puntos *e* y *f*, tales que su distancia sea igual á la arista EF; y trazando por estos puntos dos planos *eadh* y *fbcg* perpendiculares á las aristas (pues todas son paralelas): quedará determinado un paralelepípedo *recto*, ag.

Si se consideran las dos porciones ADHE*adhe* y BCGF*bcgf*, se vé que son dos primas troncados (pues sus bases no son paralelas), que tienen su base *adhe* del uno, igual á la *bcgf* del otro (441), y además, las aristas respectivas perpendiculares á estas bases, iguales; pues de *ef*=EF se deduce EF—*e*F=*ef*—*e*F, ó sea E*e*=F*f*: del mismo modo de *hg*=HG se deduce, restando la parte comun *h*G, que H*h*=G*g*; análogamente D*d*=C*c* y A*a*=B*b*.

Por tanto, si se hacen coincidir las bases iguales *adhe* y *bcfg* de estos dos troncos, las aristas seguirán una misma direccion por ser perpendiculares á estas bases, y además, como se ha demostrado que son iguales, los puntos B, C, G, F, de la otra base, coincidirán con los A, D, H, E, del otro tronco: es decir, que ámbos troncos B*g* y A*h* son iguales.

Ahora bien; si de la figura total se resta el tronco B*g*, queda el paralelepípedo AG propuesto, y si por otra parte, se resta de la misma figura el tronco A*h*, queda un paralelepíredo *recto, ag*, y es evidente que los restos de separar sucesivamente partes iguales de un mismo cuerpo, son equivalentes; luego paralelepípedo AG equivalente al paralelepípedo recto *ag*.

Falta sólo hacer ver que los paralelepípedos equivalentes AG y *ag* tienen base equivalente á igual altura; en efecto: 1.° Sus bases

son equivalentes, pues tomando como base del AG el paralelógramo ABCD, y del *ag* el rectángulo *abcd*, este paralelógramo y rectángulo tiene la misma base AB=*ab*, é igual altura. 2.° La altura de ámbos paralelepípedos, si se toma por base la ABCD del uno y *abcd* del otro, es la misma, pues ámbos tienen la otra base EFGH y *efgh* respectiva, en un mismo plano paralelo al primero.

NOTA.—Hay que advertir que las dos caras *adhe* y *bcgf* del paralelepípedo *recto ag*, pueden ser paralelógramos.

474. *Todo paralelepípedo recto, cuya base sea un paralelógramo, puede convertirse en otro paralelepípedo recto de base rectangular equivalente y de la misma altura* (Fig. 140).

Sea AG un paralelepípedo recto, cuya base es un paralelógramo; siendo recto, sus aristas laterales son perpendiculares al plano de su base; luego si por la arista HD se hace pasar un plano HD*ea* perpendicular á la arista HG, lo será á sus paralelas DC, AB y EF, é idénticamente el plano G*fb*C tirado por la G*c* perpendicularmente á HG, lo será á sus paralelas las aristas DC, AB y EF. Estos dos planos determinan con las caras rectangulares del paralelepípedo propuesto, un segundo paralelepípedo HD*eafb*GC recto rectangular, que es equivalente al propuesto, porque los dos cuerpos A*a* DE*e*H y B*b* CF*f*G son dos prismas triángulares rectos que tienen igual base (A*a*D=B*b*C, (AD=BC y *a*D=*b*C por paralelas entre paralelas, y el ángulo comprendido igual por lados paralelos y vértices dirigidos en el mismo sentido) é igual altura (toda vez que sus dos bases están en dos planos paralelos ABCD y EFGH); luego estos prismas son iguales.

Ahora bien; si de la figura total se resta el prisma B*b*CF*f*G, queda el paralelepípedo de base paralelográmica, propuesto AG; y si de la misma figura total se resta el otro prisma triángular A*a*DE*e*H, queda el paralelepípedo recto rectangular *a*G: luego estos dos paralelepípedos, restos de separar cuerpos iguales de un mismo cuerpo, son equivalentes.

Falta sólo hacer ver: 1.° Que el paralelógramo base ABCD es equivalente al rectángulo *ab*CD: pero esto es evidente, pues tienen igual base CD é igual altura, toda vez que los otros vértices están en la AB paralela á esta base. 2.° Que los dos paralelepípedos tienen igual altura, lo cual tambien es evidente, pues sus bases están sobre dos planos paralelos. □

475. *Un paralelepípedo cualquiera es equivalente á otro recto rectangulàr, de base equivalente é igual altura.*

En efecto; se ha visto que un paralelepípedo cualquiera es equivalente á otro recto, y que todo paralelepípedo recto de base paralelográmica es equivalente á otro recto rectangular; luego un parale-

lepípedo cualquiera es equivalente á otro recto rectangular de base equivalente é igual altura.

476. *Todo prisma triangular es la mitad de un paralelepípedo de base doble é igual altura.*

En efecto; (Fig. 137) si por los vértices *a* y *c*, *g* y *e* del prisma triangular *acdegh*, se trazan paralelas á las aristas opuestas, quedará formado el paralelepípedo *df*, que evidentemente consta de dos prismas triangulares: estos son iguales por tener igual base *adc=abc* é igual altura; luego cada uno de ellos es mitad del paralelepípedo *ag* de doble base é igual altura.

477. *La relacion de los volúmenes de dos paralelepípedos rectos que tienen iguales bases, es la misma que la de sus alturas* (Fig. 141).

Sean BG y *bg* dos paralelepípedos rectángulos cuyas bases ABCD y *abcd* son iguales: dividiendo sus alturas BE y *be* en partes iguales y suponiendo que admitan una medida comun que esté contenida 4 veces en la BE, y 8 en la *be*, es claro que BE: *be*:: 4: 8.

Si por los puntos de division se tiran planos paralelos á las bases de ámbos paralelepípedos, es evidente que quedarán divididos respectivamente en 4 y 8 paralelepípedos parciales, todos iguales entre sí, porque todos tienen igual base é igual altura y son rectos; por tanto, si uno de ellos se toma como unidad para comparar los volúmenes de los dos paralelepípedos propuestos, evidentemente se tendrá BG: *bg*: 4: 8.

Si las alturas fuesen incomensurables, (siguiendo el mismo método que en las proposiciones análogas núms. (158, 188, etc.), es decir, tomando cada vez más pequeña la unidad lineal con que se miden las alturas), la relacion incomensurable de ámbos paralelepípedos y la de sus alturas, son los límites de una série de relaciones comensurables iguales en todos los estados de magnitud en que se consideran, y por tanto (Aritmética 263) estos límites son iguales.

Este teorema se puede enunciar.

La relacion de los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos, que tienen dos dimensiones comunes, es igual á la de su tercera dimension, porque, en efecto, si dos paralelepípedos rectángulos tienen base igual, tienen dos dimensiones comunes, pues si el paralelepípedo es rectángulo, las tres aristas que concurren en cada vértice miden sus tres dimensiones, de las que dos pertenecen siempre á la cara que se tome por base.

478. *La relacion de los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimension comun é igual á la de los productos de sus otras dos dimensiones.*

En efecto, llamando P y P' los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera; a,b,c, las dimensiones del primero y a',b',c' las del segundo; siempre será posible construir un tercer paralelepípedo P'' que tenga dos dimensiones del uno y la tercera del otro de los propuestos; es decir, a, b, c'.

Esto supuesto, por el teorema anterior se tiene P : P'' :: c : c' y tambien P'' : P' :: b : b'. De donde multiplicando ordenadamente y suprimiendo el factor comun P'' de la primera razon, resulta P : P' :: $c \times b$: $c' \times b'$.

479. *La relacion de los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos que no tienen dimension comun, es igual á la de los productos de sus tres dimensiones.*

Sea P el volúmen de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones sean a,b,c. Sea P' el de otro cuyas dimensiones son a',b',c'. Sea un tercer paralelepípedo rectángulo de volúmen P'' y de dimensiones a, b', c', (es decir, dos comunes con las del uno, y una con las del otro) se tendrá entre P y P'', P : P'' :: $b \times c$: $b' \times c'$ y entre P' y P'' que P'' : P' :: a : a' multiplicando y reduciendo resulta P : P' :: $a \times b \times c$: $a' \times b' \times c'$.

480. *El volúmen de un paralelepípedo es igual al producto de sus tres dimensiones.*

En efecto, sea P, el volúmen de un paralelepípido rectángulo y sus dimensiones a, b, c. Sea C el de un cubo cuyo lado es l, se tendrá la relacion $\frac{P}{C} = \frac{a \times b \times c}{l^3}$.

Pero si el cubo representado por C, se toma por unidad de volúmen y su arista l, por unidad lineal para evaluar las aristas a, b, c del paralelepípedo P. El primer miembro de la relacion anterior es lo que se ha definido por volúmen de un cuerpo (470), y como l vale 1, respecto de las dimensiones de P, será *volúmen de* $P = a \times b \times c$.

Lo mismo se entiende demostrado para los paralelepípedos que no sean rectángulos, toda vez que son equivalentes á los de esta especie con altura y base equivalentes.

481. *El volúmen de un prisma cualquiera, es igual al producto de su base por su altura.*

Considerando primero un prisma triangular cualquiera: Se ha demostrado que es la mitad de un paralelepípedo de doble base é igual altura. Luego su volúmen será la mitad del volúmen de ese paralelepípedo: ahora bien, un paralelepípedo cualquiera tiene por expresion de su volúmen, el producto de su base por su altura; la mitad será la mitad de su base, que es justamente la del prisma triangular por su altura.

Considerando ahora un prisma poligonal cualquiera, si se descompone en prismas triangulares, trazando diagonales en su base y planos por éstas y una arista, es evidente que el volúmen del prisma poligonal propuesto, es equivalente á la suma de los volúmenes de todos estos prismas triangulares en que se ha descompuesto, y llamando A á su altura, y $b,b',b,''$.... los áreas de los triángulos en que se descompone el polígono base del primitivo, se tendrá (observando que los volúmenes de los prismas parciales tienen por expresion $A\times b$; $A\times b'$.... y que $b+b'+b''+$.... es igual á el área de la base B, del prisma propuesto). Volúmen del prisma $=A\times B$.

Dos prismas de base equivalente é igual altura, son equivalentes.

VOLÚMENES DE LAS PIRÁMIDES.

482. *Dos tetráedros de base equivalente é igual altura, son equivalentes* (Fig. 142).

Sean VABC y V'A'B'C' dos tetáedros, cuyas bases ABC y A'B'C' tienen igual área y cuya altura es la misma.

Colocados ambos tetráedros sobre un mismo plano horizontal TX, es claro que sus vértices vendrán sobre una misma línea recta VV', paralela á el plano TX, cuya distancia YY' á este plano, representará la altura comun á ambos tetráedros.

Dividiendo esta altura comun en partes iguales (por ejemplo en 4), y trazando planos por los puntos de division paralelos á el TX; determinarán en los dos tetráedros las secciones DEF y D'E'F'; GHJ y y G'H'J'; LMN y L'M'N', que serán equivalentes (411). Ahora trazando por los lados FE, JH, NM, planos EK, HP, MR, paralelos á la arista VA, y por los lados F'E', J'H', N'M', planos E'K', H'P', M'R', paralelos á la arista V'A', quedarán formadas dos séries de prismas, tales que los inscritos en el tetráedro VABC serán uno á uno, equivalentes á los inscritos en el tetráedro V'A'B'C', pues respectivamente tienen base equivalente é igual altura. Luego la suma de los prismas inscritos de este modo en el primer tetráedro, es equivalente á la suma de los inscritos en el segundo.

Si la altura comun YY', se divide en doble triple, cuádruple, etc, número de partes, y se construyen prismas inscritos en ambos tetráedros, es evidente que el número de prismas inscritos será doble, triple, cuádruple, etc. Pero la suma de los prismas inscritos en el tetráedro VABC, siempre será igual á la suma de los inscri-

tos en el V'A'B'C, y estas sumas variables son constantemente iguales, cualquiera que sea el número de partes en que se haya dividido la altura YY'. Luego en el límite, cuando la altura se considere dividida en infinito número de partes, tambien estas sumas son iguales. Pero estos límites respectivos son los dos tetráedros propuestos; luego estos tetráedros son equivalentes.

483. *El volúmen de un tetráedro es igual al tercio del producto de su altura por su base* (Fig. 143).

En efecto, sea VABC un tetráedro cualquiera: si por los vértices A y C se trazan paralelas á la arista VB y por V un plano DVE, paralelo á la base ABC, queda formado un prisma triangular VDEABC.

Ahora bien; si en este prisma se traza por los tres vértices D, V, y C un plano, quedará descompuesto en los tres tetráedros VABC, VADC y VDCE, los cuales son equivalentes.

Porque si se toma por vértice del VDEC el punto C, se tendrá el tetráedro CDVE, el cual es equivalente al VABC, por tener igual base é igual altura, que es la del prisma.

Tambien VDCE es equivalente al VDAC, pues las bases DEC y ADC son iguales, y además, por estar estas bases en un mismo plano y tener el vértice V comun, la altura es igual. Así, VDCE=VDAC. Luego VABC=VADC=VDCE. Es decir, que el tetráedro propuesto es la tercera parte del prisma ABCDVE, de igual base ABC, que el tetráedro, é igual altura.

Demostrado esto, es evidente que si la expresion del volúmen del prisma es, su base ABC, por su altura (que se llama a), la del tetráedro será un tercio de su base ABC, por su altura a, ó sea, llamando B á la base; volúmen de $T=\frac{1}{3}a\times B$.

484. *El volúmen de una pirámide cualquiera, es igual al tercio del producto de su base, por su altura.*

En efecto; si se descompone la pirámide en tetráedros, por medio de planos tirados por una arista lateral y las diagonales de la base que parten del vértice correspondiente á esta arista, es evidente que la suma de los volúmenes de estos tetráedros, dará el volúmen de la pirámide.

Ahora bien; todos estos tetráedros tienen por altura comun la de la pirámide (pues todos tienen su vértice en el de ésta, y sus bases están en el plano de la base de la misma); luego en la suma de las expresiones de los volúmenes, llamando a la altura comun, $\frac{1}{3}a$ será factor comun de la suma de las áreas de sus bases, de modo que si se llaman b, b', b''... las áreas de estos triángulos, se tendrá volúmen

de la pirámide=$\frac{1}{3}$ a $(b+b'+b''+...)=\frac{1}{3}$ $a\times$B, llamando B la base de la pirámide, y observando que $b+b'+b''+...=B$.

485. *El volúmen de un tronco de tetráedro de bases paralelas, es igual al tercio de su altura, por la suma de sus dos bases, más una media geométrica entre ellas* (Fig. 144).

Sea el tronco de tetráedro de bases paralelas el ABCDEF: tirando por los vértices A, F, B un plano, quedará descompuesto en el tetráedro FABC, y en la pirámide cuadrangular FABED.

Si en esta pirámide, por los tres puntos A, F y E, se hace pasar otro plano, quedará á su vez descompuesta en los dos tetráedos FADE y FAEB, ó sea leyendo el vértice del primero en A, el ADEF y FAEB.

Así el tronco está ya descompuesto en los tres tetráedros siguientes FABC+ADEF+FABE. Los dos primeros tienen por bases respectivamente las ABC y DEF del tronco, y por altura, la misma que la de éste, pues sus vértices F y A están en la base opuesta.

Respecto del FABE, si se tira la FG paralela á la arista EB, y se une G, con E y con A, se tiene el tetráedro FAEB=GABE, pues tienen la misma base AEB, y la misma altura, porque sus vértices están sobre FG, paralela á la base: y leyendo el vértice de este último en E, se tiene FAEB=EAGB; pero este último tiene su base en el plano de la base mayor del tronco, y su vértice en la otra base: es decir, que tiene la misma altura que la del tronco.

Esto supuesto, el volúmen del tronco es evidentemente igual á la suma de los volúmenes de estos tres tetráedros; así, llamando a la altura del tronco, y B y b, las áreas respectivas de sus bases, se tendrá:

Volúmen del tronco=volúmen de FABC+*volúmen de* ADEF+*volúmen de* EAGB; ó sea volúmen del tronco=$\frac{1}{3}$ $a\times$B+$\frac{1}{3}$ $a\times b+\frac{1}{3}$ $a\times$AGB.

Si se observa ahora que tirando la GH paralela á el lado AC, el área del triángulo AGB es medio geométrico entre las del ABC y BGH, (206) y que este último es igual al DFE; se tendrá AGB=$\sqrt{\text{B}.b}$ y sustituyendo en la fórmula anterior, será:

$$\textit{Volúmen del tronco}=\frac{1}{3}\,a\left(\text{B}+b+\sqrt{\text{B}.b}\right)$$

486. *El volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas, es igual al producto del tercio de su altura por la suma de sus bases, y de la de una media geométrica entre ellas.*

En efecto, dado un tronco cualquiera de pirámide, si se conside-

ra construida la total, siempre se puede imaginar que existe un tetráedro de base equivalente é igual altura, que será por consiguiente equivalente al volúmen de la pirámide: ahora bien, si se corta á la misma altura, á la pirámide y al tetráedro, por planos paralelos á sus bases, como sus secciones serán equivalentes (409) la pirámide parcial de la propuesta, y la del tetráedro tambien serán equivalentes por tener igual altura y base equivalente (484). Es claro que los dos troncos que quedan de separar de la pirámide y tetráedro total, la pirámide y el tetráedro parcial, serán equivalentes.

En resúmen, un tronco de pirámide se puede considerar siempre equivalente á un tronco de tetráedro con las condiciones siguientes: 1.ª Tener igual altura. 2.ª Que las dos bases de el uno sean equivalentes á las dos bases del otro.

Esto supuesto, el volúmen del tronco de pirámide tendrá por expresion la misma que la del tronco de tetráedro, y como la de éste es llamado a, B y b su altura y áreas de sus dos bases; $V=\frac{1}{3}a\left(B+b+\sqrt{B\,b}\right)$ se tendrá justificada la proposicion, observando que B y b son tambien las áreas de las bases del tronco de pirámide y que su altura a es tambien la misma.

CAPÍTULO XII.

Comparacion de los volúmenes de los poliedros semejantes.

487. *Los volúmenes de dos pirámides semejantes están en la misma relacion que los cubos de sus líneas homológas* (Fig. 135).

Siendo semejantes dos pirámides $vabcde$ y $va''b''c''d''e''$, los ángulos poliedros del vértice son iguales: así siempre se podrá colocar la primera sobre la segunda, de manera que las aristas homólogas de estos ángulos coincidan. De este modo la base $a''b''c''d''e''$ se colocará paralelamente á la $abcde$; luego la altura vo estará cortada en o'' en partes proporcionales á las aristas va y va'', y por lo tanto, á ab y $a''b''$: de modo que se tendrá $vo : vo'' :: ab : a''b''$.

Pero por semejantes las bases de las dos pirámides, se tiene $abcde : a''b''c''d''e'' :: ab^2 : a''b''^2$.

Multiplicando estas dos igualdades ordenadamente y dividiendo los dos términos de la primera razon por tres, dará $\frac{1}{3}\,vo''\times abcde : \frac{1}{3}\,vo''\times a''b''c''d''e'' :: ab^3 : a''b''^3$.

488. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes están en la misma relacion que los cubos de sus aristas homólogas.*

En efecto, se ha visto que dos poliedros semejantes pueden ser descompuestos en el mismo número de tetráedros semejantes y semejantemente dispuestos: por tanto, se puede formar una série de relaciones en las que los numeradores de los *primeros miembros sean los tetráedros del uno, y los denominadores los tetráedros del otro,* y en cuanto á los *segundos miembros, serán los cubos de las relaciones de sus aristas homólogas ó diagonales homólogas;* y como siendo semejantes los poliedros, las relaciones de sus aristas homólogas ó diagonales homólogas son iguales, y por tanto, los cubos de estas relaciones: es claro, que los primeros miembros de estas séries son iguales entre sí. Ahora bien: en toda série de relaciones iguales, la suma de los numeradores dividida por la de los denominadores, es igual á una cualquiera de las relaciones. Pero la suma de todos los numeradores, es el primer poliedro, y la suma de todos los denominadores es el segundo; luego se vé que la relacion de sus volúmenes es la misma que la del cubo de sus aristas diagonales y líneas homólogas.

SECCION TERCERA.

De los tres cuerpos redondos Cono, Cilindro y Esfera.

PRELIMINARES.

489. *Se llaman cuerpos redondos en Geometría elemental, aquellos que pueden considerarse engendrados por el movimiento de una figura plana alrededor de una recta que se llama eje.*

490. *Tres son los cuerpos que bajo esta generacion se consideran, á saber: el* Cono *y* Cilindro *circulares rectos, y la* Esfera.

491. *Se llama* Cono *circular recto, el cuerpo engendrado por un triángulo rectángulo* abc (Fig. 145) *que gira alrededor de uno de sus catetos* ac.

492. En este movimiento el cateto movible *bc* está siempre en un plano (342) y engendra un círculo del cual es rádio y cuyo centro es c (220). La hipotenusa *ab* engendra una superficie curva que es la

llamada *cónica;* en cuanto al cateto *ac* es fijo y se llama el *eje ó altura.*

El círculo que engendra el cateto móvil se llama *base del cono.*

493. La hipotenusa en sus diferentes posiciones se llama *generatriz ó lado del cono.*

494. *Se llama cilindro circular recto, el cuerpo engendrado por un paralelógramo rectángulo* (Fig. 146) abcd *que gira alrededor de uno de sus lados* ad.

495. En este movimiento los lados *ba* y *cd* adyacentes al eje *ad* describen dos círculos (342), (220) cuyos planos son paralelos. El lado *ad* es el *eje ó altura* y el opuesto *bc* engendra una superficie curva que es la llama *cilíndrica.*

496. *El lado que engendra la superficie cilíndrica se llama generatriz ó lado del cilindro.*

497. *Los dos círculos iguales y de planos paralelos se llaman bases del cilindro.*

498. Estos dos cuerpos se llaman *circulares,* porque el movimiento que los engendra es circular; y *rectos*, porque el *eje* es perpendicular al plano del círculo que se considera ser su base, y por esto el eje se llama tambien altura.

499. Esfera es el cuerpo engendrado por un semicírculo *adb* (Fig. 147) que gira alrededor de su diámetro *ab.* En este movimiento todos los puntos de la superficie engendrada, que se llama *esférica,* equidistan del centro del semicírculo generador, que tambien se llama *centro de la esfera,* y su rádio y diámetro en cualquiera de las posiciones que ocupe, *rádio* y *diámetro de la esfera.*

CAPÍTULO I.

Del cono.

500. *Toda seccion hecha por un plano en un cono, paralelamente á su base, es un círculo cuyo centro está en el eje.*

En efecto; (Fig. 145) sea la *ef* una seccion hecha por un plano, y sea *g* el punto donde corta al eje; como todos los puntos de la línea de seccion están en un plano que es el secante, bastará, para hacer ver que es una circunferencia, demostrar que sus puntos equidistan de uno interior; para ello tomando además de los *e* y *f*, el punto *h*, y haciendo pasar por el eje *ac* y por estos puntos, planos, cortarán á la ba-

se y la seccion en las rectas paralelas (373) *bc* y *eg; hc* y *hg; dc* y *fg;* luego los triángulos *abc* y *aeg* son semejantes, (376) y comparando lado homólogos dan *ac*: *ag*:: *bc*: *eg;* los *ahc* y *ahg* dan *ac*: *ag*:: *hc*: *hg,* y de los *adc* y *afg* resulta *ac*: *ag*:: *dc*: *fg;* y como *bc*=*hc*=*dc* por rádios de un mismo círculo, resulta que las tres proporciones anteriores tienen sus tres primeros términos idénticos y por consiguiente los cuartos tambien lo son; es decir, que *eg*=*hg*=*fg*.

501. *Dos conos son iguales si lo son sus bases y altura.* La demostracion es evidente por superposicion directa.

502. *Se llama tronco de cono, la parte comprendida entre la base y un plano paralelo á ella; tal sería la* ebdf (Fig. 145).

503. *Dado un tronco de cono, hallar la altura de el total, y de el deficiente.*

Sea (Fig. 145) *ebdf* el tronco dado; idénticas consideraciones á las hechas en el caso (425) de las pirámides, harian ver que basta determinar la altura de el deficiente, para que lo esté la de el total, y recíprocamente. Esto supuesto, considerando completo el cono y trazando un plano por el eje y una generatriz *ab*, cortará á las dos bases del tronco en dos rádios *bc* y *eg* paralelos; por lo cual se tendrá, comparando los triángulos *abc* y *aeg*, que *ac*: *ag*:: *bc*: *eg;* de donde $\begin{cases} ac—ag: ag:: bc—eg: eg \\ ac—ag: ac:: bc—eg: bc \end{cases}$ y como *ac*—*ag*=*gc*, que es la altura conocida del tronco que se llamará A, y *bc* y *eg* son los rádios conocidos de las bases que se llamarán R y *r* respectivamente las anteriores proporciones se escribirá la 1.ª A: *ag*:: R—*r*: *r;* de donde $ag=\frac{A\times r}{R—r}$, y la 2.ª A: *ac*:: R—*r*: R; de donde $ac=\frac{A\times R}{R—r}$.

504. *El área lateral del cono es ignal á la mitad del producto de su generatriz ó lado por la circunferencia de su base.*

Para evaluar este área se considera el cono como el límite de una pirámide regular, cuyo número de caras se duplica indefinidamente. Pues si en efecto se considera inscrita la base de una pirámide en la de un cono y su vértice coincide con el de éste, duplicando indefinidamente los lados de la base de la pirámide, tienen por límite la circunferencia (320) y las caras de las pirámides que resultan tienden á confundirse con la superficie cónica. Esto supuesto, sea *l*, el lado ó generatriz de un cono, y *c*, la circunferencia de su base; sea *p* el perímetro de la base de una pirámide regular inscrita en el cono y *a* su apotegma, se tendrá que el área lateral de la pirámide es (465) $\frac{1}{2}a\times p$. El límite de la apotegma *a*, es el lado *l* del cono, y el de *p*, es la circunferencia *c*. Luego el área lateral del cono es igual á $\frac{1}{2}l\times c$.

Si se llama *r* al rádio de la base del cono, se tendrá $c=2\pi r$, y

sustituyendo en la expresion anterior, será área lateral$=\pi rl$, que es la más usual para expresar el área lateral del cono.

505. *Se llama superficie curva desarrollable, la que puede estenderse en un plano sin desgarraduras ni pliegues.*

506. *La superficie cónica se desarrolla en un sector circular cuyo arco es igual en longitud á la circunferencia de la base del cono y cuyo rádio es la generatriz ó lado del cono.*

En efecto; (Fig. 145) suponiendo colocado el cono *abd* sobre un plano y que el lado *ad* coincida con éste, si se hace girar sin resbalar (de modo que el vértice *a* no cambie de lugar) hasta que el mismo lado *ad* vuelva á coincidir con el plano tal como en *an*, se tendra: 1.° que todos los puntos que recorre la circunferencia de la base del cono permanecen equidistantes del vértice *a*, toda vez que las generatrices del cono son iguales, y por tanto, están en el arco descrito desde *a* con esta generatriz por rádio (220) (222). Además, este arco evidentemente es igual en longitud á la circunferencia de la base del cono, pues todos los puntos de ésta se han ido aplicando sucesivamente sobre el plano. Luego la figura descrita en el plano por la sucesiva aplicacion de todas las generatrices, es la definida en la Planimetría (327) como *sector circular*, cuyo rádio y arco son respectivamente la generatriz y la circunferencia de la base.

507. *El área de la superficie lateral de un cono troncado, tiene por expresion el producto de su lado por la semisuma de las circunferencias de sus bases* (Fig. 145).

En efecto; sea el tronco de cono *ebdf:* considerando el cono completo *abc,* se sabe que su superficie desarrollada es el sector *adn:* por la misma razon, la del cono deficiente *aef* es la de el sector *afm:* ahora bien; es evidente que el área lateral del tronco de cono, es la diferencia entre las áreas laterales de los dos conos *abd* y *aef*, ó lo que es lo mismo, la diferencia entre las áreas de los dos sectores *adn* y *afm*, ó sea, en fin, igual al área del trapecio circular *fdmn*.

Pero el área del trapecio $fdmn=fd\,\frac{dn+fm}{2}$, y como $dn=C$ y $fm=c$ (llamando C y c las circunferencias de las bases del tronco), se tendrá: *Área lateral del tronco de cono*$=fd\times\frac{C+c}{2}$.

Nota.—Si en lugar de C y *c* se pone su valor en funcion de los rádios, R y *r* respectivamente, representando *fd* por *l* lado, será: Área del tronco$=\pi.\ l\ (R+r)$.

508. *El volúmen de un cono es igual al tercio de su altura por el área de su base.*

En efecto, considerando como ántes, inscrita en el cono una pirá-

mide, y llamando á su altura a, y b su base, el volúmen de esta pirámide sería $\frac{1}{3}\, a \times b$. Ahora bien; siendo el cono límite de las pirámides regulares en él inscritas, cuando se duplican indefinidamente sus caras, su volúmen será el límite de el de la pirámide; y como la altura a del cono y de la pirámide inscrita es idéntica, cualquiera que sea el número de caras de ésta, y el límite de el área de la base b es el área del círculo (la cual llamando r al rádio es) πr^2, se tendrá sustituyente estos límites en la expresion del volúmen anterior, que el del cono es $\frac{1}{3}\, \pi r^2 a$.

509. *Se llaman conos semejantes, aquellos cuyos triángulos generadores son semejantes y el giro se supone verificado sobre dos lados homólogos.*

510. *Las áreas laterales de dos conos semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus alturas, lados y rádios.*

En efecto, (Fig. 145) los dos conos *abd* y *aef* son semejantes, y sus triángulos generadores dan $ab : ae :: ac : ag$; tambien $bc : eg :: ac : ag$: multiplicando ordenadamente estas proporciones y además la primera razon de la que resulta por π, dirá $ab.\times\pi.bc : ae\times\pi.eg :: ac^2 : ag^2$, y como el primero y segundo término de esta proporcion representan las áreas laterales de los conos *abd* y *aef*, y además por ser semejantes los triángulos generadores, la relacion de los cuadrados ac^2 y ag^2 es la misma para todos los lados homólogos, queda demostrada la proposicion.

511. *Los volúmenes de los conos semejantes son proporcionales á los cubos de sus líneas homólogas.*

(Alturas, lados y rádios). Sean (Fig. 145) los conos semejantes *aef* y *abd*. Por ser los triángulos generadores semejantes, se tiene $ac : ag :: bc : eg$; por otra parte, es evidente que $\frac{1}{3}\, \pi bc^2 : \frac{1}{3}\, \pi\, eg^2 :: bc^2 : eg^2$ (Aritmética proporciones) multiplicando ordenadamente, se tendrá $\frac{1}{3}\, \pi\, bc^2.ac : \frac{1}{3}\, \pi\, eg^2.\, ag :: bc^3 : eg^3$. Y como los dos primeros términos son la expresion de los volúmenes respectivos de *abd* y *aef* y lo mismo dá la relacion $bc^3 : eg^3$ que la de los cubos de las alturas ó lados por ser semejantes los triángulos generadores, queda demostrado el teorema.

CAPÍTULO II.

Del cilindro.

512. *Toda seccion hecha por un plano en un cilindro circular recto paralelamente á las bases, es un círculo.*

En efecto, sea ésta *gk* (Fig. 146) y sea *h* el punto en donde el plano secante corta al eje; tomando en la línea de interseccion otro punto *l*, y haciendo pasar por el eje *ad* y por cada uno de los puntos *g*, *l* y *k* un plano, las intersecciones de estos planos con el secante *gk* serán paralelas respectivamente á sus intersecciones con la base *ce* del cilindro (373), y como las partes de generatrices *gc*, *ke* y *lm*, son tambien paralelas al eje, las rectas *hg*, *hl* y *hk* son respectivamente iguales (374) á las *dc*, *dm* y *de*, y como estas últimas son iguales entre sí por rádios de un mismo círculo, las primeras tambien son iguales entre sí: luego la curva *glk* de interseccion, además de ser plana, tiene sus puntos equidistantes de uno interior; luego es una circunferencia (220).

513. *Dos cilindros son iguales si lo son sus bases y alturas.*

La superposicion directa demuestra el teorema.

514. *El área lateral de un cilindro es igual al producto de su generatriz ó lado, por la circunferencia de su base.*

En efecto, por análogas consideraciones que las empleadas para el cono, el cilindro circular recto se considera como el límite de un prisma recto, cuando el número de sus caras se duplican indefinidamente, cuyas bases están inscritas en las del cilindro y cuya arista es igual á la generatriz de éste: ahora bien; siendo el área lateral de una prisma recto, el producto de su arista por el perímetro de su base (467) ó sea $a \times p$, la del cilindro límite, será el límite de a, arista, que siempre es igual á la generatriz, multiplicado por el límite del perímetro p de la base, inscrita en la del cilindro que es (320) la circunferencia c; luego *Área lateral de un cilindro* $= l \times c$. Si se llama r al rádio de la circunferencia, será $c = 2\pi r$, y sustituyendo en la expresion del área del cilindro, ésta será $= 2\pi rl$.

515. *La superficie cilíndrica es desarrollable en un rectángulo cuya base es en longitud igual á la circunferencia de la base del cilindro, y cuya altura es el lado de éste.*

En efecto, si el cilindro *bcfe* (Fig. 146) se coloca sobre un plano de modo que el lado *fe* coincida con él, y se hace girar sin resbalar

hasta que este mismo lado vuelva á colocarse sobre el plano, toda la superficie cilíndrica se habrá aplicado sucesivamente al plano, y en este movimiento, como los puntos de las dos circunferencias de las bases están siempre equidistantes, habrán descrito dos rectas paralelas *fp* y *eq* iguales en longitud á las circunferencias de las bases, toda vez que estas rectas se han engendrado por la aplicacion sucesiva de todos los puntos de ámbas circunferencias sobre el plano; además, como la *pq* es igual á la *ef*, la figura *pqef* es un paralelógramo; y es rectángulo, porque siendo el cilindro recto, las generatrices son perpendiculares á las bases.

516. *Se llaman cilindros semejantes, aquellos cuyos rectángulos generadores lo son, y además dos lados homólogos han servido de ejes.*

517. *Las áreas laterales de dos cilindros semejantes, son proporcionales á los cuadrados de sus lados, alturas y rádios de sus bases.*

Sean L y l los lados y R y r los rádios de las bases de dos cilindros semejantes; por definicion L : l :: R : r y evidentemente $2\pi R : 2\pi r :: R : r$; multiplicando ordenadamente, se tendrá $2\pi R \times L : 2\pi r \times l :: R^2 : r^2$. Y como los dos términos de la primera razon expresan las áreas laterales de los dos cilindros, y tambien $R^2 : r^2 :: L^2 : l^2$ queda demostrado el teorema.

518. *El volúmen de un cilindro es igual al producto del área del círculo de su base, por su altura.*

En efecto, considerando el cilindro como el límite de un prisma recto rectangular, cuyas bases están inscritas en las del cilindro y de igual altura, cuando este prisma duplica indefinidamente el número de sus caras, se tiene que siendo el volúmen de un tal prisma $a \times b$, llamando a su altura y b el área de su base, el del cilindro será el límite de esta expresion; pero la altura a no varía cualquiera que sea el número de sus caras, y la base b tiene por límite el círculo base del cilindro, que llamando r al rádio, su área es πr^2; luego al límite de este volúmen ó sea el del cilindro es $\pi r^2 a$.

519. *Los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas, lados y rádios.*

En efecto, por definicion llamando A y a las alturas; R y r los rádios de dos cilindros semejantes, se tiene A : a :: R : r; por otra parte, es evidente que $\pi R^2 : \pi r^2 :: R^2 : r^2$; multiplicando ordenadamente, será $\pi R^2 \times A : \pi r^2 \times a :: R^3 : r^3$, y por tanto, $:: A^3 : a^3$.

CAPÍTULO VIII.

De la esfera.

520. *Toda seccion hecha en una esfera por un plano, es un círculo.*

Sea (Fig. 147) la esfera *c*, y la seccion hecha por un plano la curva *dhe;* si desde el centro *c* de la esfera se baja un rádio perpendicular á este plano, el punto *o*, donde lo encuentre, equidistará de todos los de la curva, porque las oblícuas *cd*, *ch*, *ce*, etc., que se trazen desde el centro de la esfera á los puntos de esta curva, son iguales por rádios de la esfera y sus piés equidistan de el de la perpendicular; luego la curva de seccion *dhe*, además de ser plana (puesto que está hecha por un plano) tiene todos sus puntos equidistantes de uno interior; es por tanto, una circunferencia.

521. *Se llaman círculos máximos en la esfera, todas aquellas secciones hechas por un plano que pasan por el centro, y menores las que no pasan por él.*

522. *Los extremos del diámetro perpendicular al plano de un círculo de la esfera, se llaman polos de este círculo.*

523. *Los polos de un círculo en la esfera, equidistan de todos los puntos de la circunferencia.*

En efecto; (Fig. 147) sea el círculo *odhe*, y sea *ba* el diámetro de la esfera perpendicular á su plano; segun la definicion, los extremos *b* y *a* son los polos de este círculo; si desde *a* se consideran trazadas las líneas *ad*, *ah* y *ae*, serán iguales por oblícuas que se apartan igualmente del pié *o* de la perpendicular; toda vez que *od=oh=oe* por rádios. Lo mismo se diria de las rectas *bd*, *bh*, *bc*. Luego los extremos *b* y *a* equidistan de todos los puntos de la circunferencia del círculo *odhe*.

524. *Si desde un punto de la esfera, y con una abertura constante de compás, se describe una línea sobre la superficie esférica, ésta será una circunferencia, y el punto desde donde se describe, uno de sus polos.*

En efecto, sea el punto *a* (Fig. 147) y la curva trazada desde él la *dhe*. Si se une el centro de la esfera *c* con *a*, y se trazan los rádios *cd*, *ch* y *ce* y las rectas *ad*, *ah* y *ea*, los triángulos *acd*, *ach* y *ace* son iguales por tener sus tres lados iguales (el *ca* es comun, los *ad*, *ah* y *ae* es la abertura constante del compás, y los *cd*, *ch* y *ce* son los rá-

dios de la esfera); luego si desde los vértices homólogos *d*, *h* y *e* se bajan perpendiculares al lado comun *ca*, éstas caerán todas en el mismo punto *o*, y por tanto, todas estarán en un plano (342); luego la curva *dhe*, descrita es plana: además, las rectas *od*, *oe* y *oh* son iguales porque los triángulos rectángulos *doc*, *hoc* y *oce* son iguales por tener el cateto *co* comun y las hipotenusas iguales; por tanto, la curva *dhe*, además de ser plana, sus puntos equidistan de uno interior; luego es una circunferencia.

525. *Se llama plano tangente á una esfera, el que solo tiene de comun con ella un punto que se nombra de contacto ó tangencia.*

526. *El plano perpendicular al rádio en el punto que éste corta á la esfera, es tangente á la misma* (Fig. 147).

Sea *mn* el plano perperdicular al rádio *cb* en el punto *b* en que éste corta á la superficie esférica.

Si desde el punto *c*, se tira una recta cualquiera *ck* al plano *mn*, ésta tendrá que ser una oblícua, y por tanto, mayor que *cb;* y como para ser mayor que *cb* necesita salir de la esfera, es claro que el plano *mn* no puede tener más punto comun con la esfera que el punto *b;* luego le es tangente.

527. *El plano* mn *tangente á la esfera, es perpendicular al rádio* cb *tirado al punto de tangencia.*

En efecto, todos los puntos de este plano *mn* están fuera de la superficie esférica, escepto el de tangencia *b;* luego la recta más corta que se puede tirar del centro *c*, al plano, es el rádio *cb*, y por tanto, es perpendicular á este plano (352).

Área y volúmen de la esfera.

528. *El área de la superficie que engendra la base de un triángulo isósceles que gira alrededor de una recta que pasa por su vértice, puede expresarse por el producto de la proyeccion de la base sobre el eje, multiplicada por la circunferencia cuyo rádio es la altura del triángulo.*

Pueden suceder tres casos:

1.° Que la base (Fig. 148) sea paralela al eje; en este caso, al girar el triángulo *abc* alrededor de *rs*, la base *ab* engendra la superficie lateral de un cilindro cuyo área es (514) $ab \times 2\pi am$. Pero $ab = mn$ y $am = dc$; luego la superficie engendrada por la base *ab*, se puede expresar por $mn \times 2\pi cd$.

2.° Si la base *ab* toca á la recta *rs* como en la (Fig. 149) tra-

zando la perpendicular *am* y la altura *cd* del triángulo, al girar éste alrededor de la *rs*, la base *ab* engendra la superficie lateral de un cono que tiene por expresion (504) $\frac{1}{2}\ ab \times 2\pi \times am$. Pero los dos triángulos *cdb* y *amb* son semejantes (166) y dan $db : \frac{1}{2}ab :: mb : cd :: am$; de donde $\frac{1}{2}\ ab \times am = mb \times cd$; de donde $< \frac{1}{2}\ ab.2\pi am = mb.2\pi cd$.

3.° Si la base *ab* como en la (Fig. 150) no toca al eje, proyectándola sobre la *rs*, y trazando la altura *cd* del triángulo, se tendrá que al girar engendra la superficie lateral de un cono truncado, cuyo área tiene por expresion (507) $ab.2\pi dp$. Pero si desde *b* se traza una perpendicular *dh* á la *am*, los dos triángulos *cdp* y *ahb* son semejantes y dan $ab : cd :: bh = mn : dp$; de donde $ab \times dp = mn.cd$ ó sea $ab \times 2\pi dp = mn.2\pi.cd$.

529. *El área de una esfera, es cuádrupla de la de su círculo máximo.*

En efecto; sea (Fig. 151) *abcdefg* el semicírculo generador; si se considera dividida la circunferencia en partes iguales $ab = bc = cd = de = ef = fg$, y trazadas por ellas cuerdas, al girar engendran una superficie poliédrica inscrita en la de la esfera, la cual tendrá por límite á ésta cuando el número de los lados del sector poligonal aumenta indefinidamente. La expresion del área que engendra la base *abcdefg* de este sector al girar, es la suma de las engendradas por las bases de los triángulos isósceles *mab....mfg*, y observando que todos son iguales, y por tanto, la altura *mh* es comun: esta suma tendrá por expresion $2\pi mh \times (ak + kl + lm + mn + np + pg) = 2\pi mh \times ag$. Cuando el número de lados crece indefinidamente, en esta expresion, solo varía la altura *mh*, cuyo límite es *r* rádio de la esfera; luego en el límite, ó sea cuando de la superficie esférica se trata, la expresion de su área es $2\pi r.ag$ y como $ag = 2r$, será por fin $2\pi r.2r$ ó sea $4\pi r^2$.

530. *Se llama zona esférica, la parte de superficie esférica determinada por un plano ó comprendida entre dos planos paralelos como la* abe *ó* abcd (Fig. 152).

En el primer caso, las dos circunferencias *ab* y *bc*, se llaman sus bases. Si la zona es la determinada por un solo plano que corta la esfera como la *abe* tiene una sola base y tambien se llama casquete esférico.

531. *Se llama allura de una zona, la proyeccion de su arco sobre el eje:* así la altura de la zona *abcd* es *oh* y la de *abe* es *eh*.

532. *El área de una zona es igual á su altura multiplicada por el área del círculo máximo.*

En efecto, las mismas consideraciones que se han hecho para determinar el área de la esfera, conducen á hacer ver que el área de *abcd* es $oh.\pi r^2$, siendo *r* el rádio de la esfera. Y la de *abe* es $ch.\pi r^2$

533. *El volúmen de una esfera es igual al tercio del rádio multiplicado por el área de la esfera.*

En efecto; si se concibe que se toma sobre la superficie de una esfera un número muy grande de puntos muy cercanos los unos á los otros, y distribuidos uniformemente sobre toda su superficie, y que por todos estos puntos se hacen pasar planos tangentes, se tendrá de este modo un poliedro circunscrito á la esfera, y cuya superficie y volúmen diferirán tan poco como se quiera, de la superficie y volúmen de la esfera (pues para aproximarlo más y más, basta considerar mayor número de puntos sobre la esfera). Si se supone descompuesto este poliedro en pirámides, cuyo vértice comun sea el centro de la esfera, cada una de estas pirámides tendrá por base una de las caras de este poliedro, y por altura el rádio de la esfera; su volúmen será, por consiguiente, el tércio del rádio por el área de estas caras. Luego el volúmen del poliedro será el producto de su superficie, por el tercio del rádio de la esfera. Pero si los puntos que se han considerado estuviesen infinitamente próximos y en número infinitamente grande, el poliedro diferiría infinitamente poco de la esfera; luego el volúmen de la esfera es su límite y tiene por expresion el tercio de su rádio por su superficie, ó sea $\frac{1}{3}\, r.4\pi r^2$ ó sea $\frac{4}{3}\, \pi r.^3$

Esta última expresion se traduce diciendo que *el volúmen de una esfera es igual á los cuatro tercios del producto del cubo del rádio, por la relacion de la circunferencia al diámetro.*

534. *Se llama sector esférico, el cuerpo engendrado por un sector circular que gira alrededor de uno de sus rádios.*

535. *El volúmen de un sector esférico es igual al tercio del rádio por el área de la zona esférica que lo limita.*

En efecto, sirva ó nó de eje de giro uno de los rádios del sector circular, (Fig. 152) (en el primer caso seria el *oae* y en el segundo *oca*) generador del sector esférico, siempre se puede hacer el mismo razonamiento que para encontrar el volúmen de la esfera; es decir, tomar en su superficie puntos muy próximos, y por ellos hacer pasar planos tangentes á esta superficie, obteniendo así una parte de un poliedro, cuya superficie poliedral está circunscrita á la superficie esférica del sector, y cuyo volúmen diferirá tanto ménos de el del sector, cuanto más próximos y numerosos sean los puntos considerados en su superficie: ahora bien; como tal poliedro se puede considerar descompuesto en pirámides, cuyo vértice comun es el centro, se tiene que el volúmen es igual á la suma de los volúmenes de estas pirámides, cuya altura comun es el rádio del sector. Pero el volúmen de una de ellas es igual al tercio del rádio (que es su altura) por el área de su base; lue-

go el de todas será un tercio del rádio, por la suma de las áreas de sus bases, ó sea por el área de la superficie poliedral. En el límite, cuando se consideran infinitos puntos de la superficie del sector, este volúmen será *el tercio del rádio por el área del casquete esférico ó zona esférica que limita al sector.*

Así, que en una esfera de rádio r, el volúmen de un sector en que el área de su superficie esférica sea z, se tendrá por expresion del volúmen $v = \frac{1}{3} r \times z$. Y como $z = a.2\pi r$, llamando a la proyeccion del arco generador sobre el eje, se tiene, en fin, volúmen del sector $= \frac{1}{3} r \times a \times 2\pi r = \frac{2}{3}.a.\pi r^2$

Es decir, que el volúmen de un sector puede expresarse tambien por el *producto de los dos tercios de su altura* (proyeccion del arco sobre el eje) *multiplicados por el área del círculo máximo.*

536. *La relacion de las áreas de las esferas son proporcionales á los cuadrados de sus rádios ó diámetros.*

En efecto, es evidente que si R y r son los rádios de dos esferas, se tiene $4\pi R^2 : 4\pi r^2 :: R^2 : r^2 :: 4R^2 : 4r^2$.

537. *Los volúmenes de las esferas están en la relacion de los cubos de sus rádios ó diámetros.*

Pues si R y r son los rádios, es evidente que $\frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{4}{3}\pi r^3 :: R^3 : r^3 :: 8R^3 : 8r^3$.

Secciones cónicas.

538. *Se llama superficie cónica en general, la engendrada por una línea recta* ab (Fig. 153) *sugeta á pasar por un punto* v *y que gira siguiendo una curva* adl.

539. *Si esta curva (que se llama directriz) es una circunferencia, la superficie cónica se llama de revolucion, y si tiene un eje* oo' *que es perpendicular á el círculo* dla *en su centro la superficie cónica toma el nombre yá sabido de circular recta.*

540. *Siendo indefinida la recta* ab *y pasando á un lado y otro del vértice ó punto fijo* v, *es evidente que al girar engendra dos superficies cónicas á uno y otro lado de este punto, las cuales se llaman hojas del cono. Así en general, toda superficie cónica tiene dos hojas indefinidas é igualmente dispuestas, aunque en sentido contrario respecto del vértice.*

541. *Si una superficie cónica circular recta se corta por un plano oblicuo al eje, como el* gh, *que encuentra todas las generatri-*

ces en una hoja, se engendra una curva cerrada que se llama Elipse.

542. *Si se corta por un plano paralelo á una generatriz como el* mkl, *el cual no corta más que á una hoja del cono, se engendra una curva abierta é indefinida* mkl *que se llama parábola.*

543. *Si por último, el plano secante corta á las dos hojas del cono, se engendra una curva en cada hoja como las* nfp *y* qrs, *las cuales juntas se consideran una sola con dos ramas indefinidas, y la cual se llama Hipérbola.*

Antes de estudiar algunas de las más interesantes propiedades de estas curvas, conviene establecer algunas definiciones.

544. *Se llama en general tangente á una curva en un punto dado, el límite hácia el cual tiende la direccion de una secante que se hace girar alrededor de uno de los puntos de interseccion hasta que un segundo punto viene á reunirse con el primero.*

Se llama Asíntota, una línea á la cual se acerca constantemente una curva, á partir de un punto dado, pero sin que nunca lleguen á encontrarse ambas líneas, por grande que sea la distancia á que se consideren prolongadas.

En las tres curvas definidas, la que tiene asíntotas, éstas son líneas rectas.

Se llama centro de una curva, un punto tal, que toda recta que pasa por él y termina en la curva, queda dividida en dos partes iguales.

Se llama diámetro de una curva la línea que divide en dos partes iguales á un sistema de cuerdas paralelas.

Si estas líneas son rectas y perpendiculares á el sistema de cuerdas paralelas que bisecan (que se llaman sus CUERDAS CONJUGADAS*), entonces el diámetro toma el nombre de* EJE, *y los puntos donde corta á la curva,* VÉRTICES DE ESTA CURVA.

545. *Las tres curvas definidas son planas y convexas; es decir, que todos sus puntos están en un plano, pues por su interseccion han sido engendradas, y una recta no puede cortarlas en más de dos puntos.*

546. *Se llaman foco en estas curvas ciertos puntos situados sobre el eje, cuyas distancia á la curva gozan de propiedades determinadas.*

Las rectas que van desde los focos de una curva á un punto cualquiera de ella, se llaman rádios vectores.

547. *Se llama elipse, una curva plana cerrada, y que goza de la propiedad de que, la suma de las distancias de todos sus puntos, á dos fijos, es una magnitud constante.*

Las elipses tienen dos ejes desiguales, y los dos puntos fijos que se llaman focos, están sobre el eje mayor de la elipse; el punto donde se cortan los ejes es el centro.

Así en la elipse (Fig. 155) AA' es su eje mayor; BB' su eje menor; F y F' sus focos: las rectas FM y F'M, que ván de los focos á un punto cualquiera de la curva, son los rádios vectores.

Por definicion FM+F'M=constante: esta cantidad constante es el eje mayor, así, llamando $2a$ el valor numérico de AA' será FM+MF'=$2a$.

548. Las elipses se pueden construir en varios casos; entre ellos están los siguientes: 1.° *Dados sus ejes.* 2.° *Dado el eje mayor y los focos.*

Dados los ejes (Fig. 154): en este caso la construccion es por puntos; en efecto, sean $2a$ el eje mayor y $2b$ el menor. Se trazan dos rectas AA'=$2a$ y BB'=$2b$ perpendiculares en su punto medio, y considerando á AA' y BB' como diámetros, se describen dos circunferencias: hecho esto, desde un punto P del eje mayor, se levanta la perpendicular PC á este eje, hasta la circunferencia mayor: se une el centro con C, y por el punto H, en que el rádio OC corta á la menor, se traza la HM paralela á el eje mayor: este punto M, así obtenido, es de la elipse: de este modo se obtendrían todos los puntos que se quisieran, y uniéndolos con un trazo contínuo, se tendría la elipse.

Dado el eje mayor y los focos: Dada la longitud del eje mayor $2a$ y la posicion de los focos, se fija en los focos los extremos de un hilo inestensible y de longitud $2a$: despues, por medio de un lápiz ó estilete, se pone tirante este hilo, haciendo que se deslice el lápiz, y cuando haya dado una revolucion completa, se tiene trazada la elipse sobre el papel ó terreno.

549. *Por un punto* M, *dado sobre la elipse, tirarle una tangente* (Fig. 155).

Se tiran los rádios vectores FM y F'M, y prolongando el F'M una parte MH=FM, se une H con F: hecho esto, desde el punto M se baja una perpendicular TT' á la HF y ésta será la tangente.

550. *Dada la elipse construir sus ejes* (Fig. 155). Se trazan dos cuerdas paralelas cualesquiera CD y EG por sus puntos medios, se hace pasar una recta HM que es un diámetro de la elipse, y por su medio O se traza otra PQ paralela á las cuerdas bisecadas, cuya recta PQ es otro diámetro *conjugado* de el *primero.* Si se biseca el ángulo POM de éstos diámetros, se tendrá uno de los ejes BB', y si por el centro O se le traza la perpendicular AA' se tendrá el otro.

551. *El área de una elipse es igual al producto de sus semiejes, por la relacion* π *de la circunferencia al diámetro.*

Así; si una elipse tiene 16 metros de eje mayor y 12 de eje menor, su área será 8×6×3, 14954.

HIPÉRBOLAS.

552. *Se llama hipérbola, la curva plana cuyos puntos gozan de la propiedad de que, la diferencia de sus distancias á dos puntos fijos, es una magnitud constante.*

553. *Las hipérbolas constan, segun se ha dicho, de dos ramas indefinidas y tienen dos ejes, uno, que la corta en dos puntos, que son los vértices, y otro, llamado imaginario, que no la corta.*

554. Los puntos fijos aludidos en la definicion, que son los focos, están sobre el eje transverso; la magnitud constante *á la cual es igual la diferencia de dos rádios vectores tirados á un mismo punto de la curva, es la del eje transverso.*

555. *Las hipérbolas tienen asíntotas rectilíneas.*

Así, la (Fig. 156) es una hipérbola: F y F' los focos; AA' el eje transverso; BB' el imaginario; A á A' los vértices de la curva; FM y F'M los rádios vectores que cumplen con la condicion de F'M—FM= AA'. Las asíntotas son HH' y GG'.

556. *La hipérbola se llama equilátera, si el eje transverso y no transverso son iguales.*

557. *Dados los ejes, construir la hipérbola* (Fig. 157).

Sean los ejes AA' el transverso, y BB' el imaginario; sobre el transverso se toma una distancia OD=OB, por A se tira una paralela á la BB' y uniendo un punto cualquiera Q del eje imaginario con D; prolongando hasta que encuentre en *m* á esta paralela; llevando ahora la distancia Q*m* á derecha é izquierda de Q, sobre una paralela al eje AA', los puntos M y M' así obtenidos, son de la hipérbola.

558. *Dado el eje transverso y los focos.*

POR PUNTOS.

En efecto, (Fig. 156) si F, F' son los focos y 2*a* la longitud del eje transverso, se llevará primeramente sobre las rectas FF', y á partir de su punto medio C, dos distancias OA y OA' iguales á *a*, con lo que se obtendrán los puntos A y A', vértices de la curva. Despues, desde F y F' como centros, con un rádio cualquiera A'E (mayor que A'F'), se describen cuatro arcos de círculo hácia uno y otro lado de la recta AA'; desde los mismos puntos F y F' se describen otros cuatro arcos de círculo con el rádio AE (suma del eje transverso y del rádio anterior), que cortarán á los primeros en cuatro puntos, M, M', M'', M''', que serán de la hipérbola. Repitiendo esta construccion, se hallarán todos los puntos que se deseen de la curva, y tan próximos como se quieran: uniendo estos por un trazo contínuo, se tiene trazada la curva.

559. *Por un movimiento contínuo* (Fig. 156).

Para esto, dados los focos F y F' y la longitud $2a$ del eje transverso, se dispone una regla FL, de manera que puede girar alrededor de un eje fijo en uno de los focos, el F por ejemplo; en el extremo L de esta regla y al otro foco F se fija un hilo, cuya longitud sea $FL+2a$: este hilo se pone tirante por medio de un lápiz ó estilete, y se hace resbalar este lápiz ó punta á lo largo de la regla, procurando que siempre esté el hilo tirante, para lo cual la regla tiene que girar alrededor del punto F: de este modo, el lápiz describirá un cuarto de la hipérbola; repitiendo esta operacion con los dos focos, y á una y otra region del eje transverso, se describirá toda la hipérbola.

560. *Dados los ejes, construir las asíntotas de la hipérbola.*

Por los vértices A y A' de la curva se tiran dos paralelas al eje imaginario, iguales en longitud á este eje; y se une el centro con los extremos P, Q, R, S de estas rectas, y esas serán las asíntotas.

561. NOTA.—Puede observarse que si se tiran las rectas PQ y RS, la figura QPRS es un rectángulo cuyas dimensiones son los dos ejes; y que las asíntotas son las diagonales de este rectángulo.

PARÁBOLAS.

562. *Se llama parábola una curva plana de una sola rama indefinida, cuyos puntos distan igualmente de un punto dado y de una recta dada.*

El punto dado que está sobre el eje de la parábola, se llama su FOCO; la recta dada la DIRECTRIZ.

Así la (Fig. 159) es una parábola AX su eje; F su foco; O su vértice; DD' su directriz.

563. *La distancia del vértice* O, *de la parábola al pié* A, *de la directriz; es decir, la recta* OA *se llama el parámetro de la parábola.*

Las parábolas no tienen asíntotas. Segun la definicion de Parábola, conocido el parámetro OA y el eje se puede determinar el foco: pues tomando una distancia OF=OA el punto F es el foco.

CONSTRUCCION DE LAS PARÁBOLAS.

564. *Conociendo su eje* OX, *y su parámetro* OA (Fig. 159).

POR PUNTOS: se toma hácia la derecha de O, un punto R cualquiera, y sobre AR se describe una semi-circunferencia; se levanta por O una perpendicular al diámetro, y por R otra indefinida; se tira una paralela al eje, y el punto M donde encuentra á la perpendicular levantada en R, es de la parábola.

565. POR UN MOVIMIENTO CONTÍNUO.

Dado el eje y el parámetro y determinado el foco y directriz, se sitúa una escuadra BDC á lo largo de la directriz: despues se fijan los

extremos de un hilo de longitud DC, en los puntos C y F: poniendo tirante el hilo con un lápiz ó estilete y haciendo correr la escuadra á lo largo de la directriz, conservando siempre tirante el hilo, el lápiz describirá la rama superior de la parábola.

Por un punto M *de la parábola tirarle una tangente* (Fig. 159).

Se une F con M, y por M se tira la MD perpendicular á la directriz: uniendo F con D, y tirando por M una perpendicular MG á la FD, ésta será la tangente pedida.

567. *Todos los diámetros de la parábola son paralelos al eje.*

Recíprocamente toda recta paralela al eje de una parábola, es un diámetro.

568. *La tangente á la parábola forma ángulos iguales con el eje y el rádio vector de el punto de contacto.*

Es decir, que la HK forma con la HX y con la FM ángulos iguales, ó sea que KHX=HMF.

569. *La tangente forma ángulos iguales con el rádio vector y el diámetro que pasa por el punto de contacto.*

En efecto, siendo el diámetro MC paralelo á el eje OX, se tiene KMC=MHX, y por tanto =HMF.

570. *Se llama normal á una curva la perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

Así (Fig. 159) la MP es la normal á la parábola en el punto M.

571. *La normal de la parábola forma ángulos iguales con el diámetro y rádio vector que pasan por el punto en que corta á la curva.*

En efecto, siendo PM perpendicular á la HK, se tiene ángulo PMH=PMK por rectos; pero se ha visto que ángulo FMH=KMC; luego restando ordenadamente, resulta ángulo PMF=PMC.

Fin de la Stereometría.

NOCIONES

DE

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

1. *Se llama* TRIGONOMETRÍA, *la parte de las matemáticas que se ocupa de la resolucion de los triángulos, por medio del cálculo.*

2. *Segun que se ocupa de los triángulos rectilíneos ó esféricos, así se denomina trigonometría rectilínea ó esférica.*

3. Para su objeto se hace uso de ciertas líneas llamadas *seno* y *tangente* de un arco y cuya esplicacion es la siguiente (Fig. 160).

Sea una circunferencia O y en ella dos diámetros perpendiculares, uno horizontal y otro vértical: á partir del extremo de la derecha del diámetro horizontal, es decir, del punto A, considérense vários arcos AM, AM', AM''.... contando siempre de derecha á izquierda en el sentido AMM'M''.....

Ahora bien, se llama *seno de un arco, la perpendicular bajada desde un extremo* M *ó* M' *del arco, hasta el rádio ó diámetro que pasa por el otro extremo.* Luego el seno del arco AM es la línea MP, lo cual se escribe sen AM=MP.

Por definicion se tiene igualmente sen AM'=MP'; sen AM''=M''P'; sen AM'''=M'''P.

4. *Se llama tangente trigonométrica de un arco* AM, *la parte de tangente geométrica* AT, *tirada por un extremo* A *del arco y limitada por su encuentro* T, *con la prolongacion del rádio ó diámetro que pasa por el otro extremo.* Luego la tangente trigonométrica del arco AM es la línea AT: lo cual se escribe tang. AM=AT. Tambien por definicion tang. AM'=AT'; tang. AM''=AT; tang. AM'''=AT.

5. *Se llaman colíneas de un arco, las líneas trigonométricas de su complemento:* entendiéndose por complemento de un arco, el que se le debe *sumar ó restar* para que juntos formen un cuadrante; así el complemento de un arco de 120° será (—30°), pues 120 + (—30°)=90.

6. *El seno y tangente de un arco complementario, toman el*

nombre *de* COSENO *y* COTANGENTE *respecto del otro arco que complementa.* Así el sen 30°=cos 60°, pues el arco de 30°, es el complemento de 60°.

Por tanto, si se llama al número de grados de un arco a, su complemento será $(90—a)$ y entre las líneas de estos arcos existirá la relacion siguiente:

$$\text{sen } a=\cos(90—a) \qquad \cos a=\text{sen}(90—a)$$
$$\text{tang } a=\cot(90—a) \qquad \cot a=\text{tang}(90—a).$$

7. Aplicando estas definiciones de colínea á la (Fig. 160) se tiene

$$\begin{array}{llll} \cos AM & =MQ & =OP & \cot AM & =BS \\ \cos AM' & =M'Q & =OP' & \cot AM' & =BS' \\ \cos AM'' & =M''Q' & =OP' & \cot AM'' & =BS \\ \cos AM''' & =M'''Q' & =OP & \cot AM''' & =BS'. \end{array}$$

8. Por lo que se acaba de ver se habrá notado que el coseno de un arco puede siempre *considerarse como igual á la distancia que hay desde el pié del seno al centro del arco.*

9. Además, tratándose de cualquier arco, si se prolongase su seno hasta la circunferencia, resulta la cuerda del arco duplo del que se trata, siendo evidentemente el seno la mitad de esta cuerda. Así, si se prolonga MP hasta M''', la cuerda MM''' es, el doble del seno MP, y cuerda del arco MAM''', doble del arco AM. Luego se puede establecer que *el seno de un arco es igual á la mitad de la cuerda del arco duplo.*

10. No basta para el fin de la trigonometría el valor absoluto de las líneas trigonométricas, pues es muy fácil ver que los cuatro arcos AM, AM', AM'', AM''', que han servido de ejemplo, en la (Fig. 160) tienen líneas trigonométricas del mismo valor absoluto: y por consiguiente, al dar como dato para hallar uno de estos arcos, la magnitud en absoluto de sus líneas ¿á cuál de estos cuatro arcos se consideraría que pertenecian? habria, pues, una ambigüedad que haría inútil el empleo de estas líneas.

Para obviar esta dificultad, se debe tener presente que si bien es verdad que hay siempre cuatro arcos en una misma circunferencia, cuyas líneas trigonométricas tienen el mismo valor absoluto, estas líneas no tienen TODAS Á LA VEZ la misma POSICION, en dos cualesquiera de estos cuatro arcos, respecto de los dos diámetros perpendiculares, que pase uno de ellos por el extremo del arco. Ha sido preciso considerar en las líneas trigonométricas, no solo su valor absoluto, sino tambien su POSICION. La manera de introducir en el cálculo esta consideracion de POSICION, la proporciona el principio de que

11. *Los valores numéricos de dos magnitudes de posicion*

directamente contrarias, deben ir afectadas en el cálculo de signos opuestos.

Es decir, que si uno vá afectado del signo *más* (+), el otro debe llevar el signo *ménos* (—).

12. Para hacer aplicable el principio enunciado, se conviene generalmente, dada una circunferencia y dos diámetros perpendiculares en ella, uno horizontal y otro vertical.

1.° *En considerar como orígen de los arcos el extremo* A *de la derecha del diámetro horizontal.*

2.° *Todos los arcos contados en el sentido* AMM'.... *á partir del orígen, se consideran como positivos: y por tanto, entrarán en el cálculo afectados del signo más. Y por consiguiente, todos los arcos contados desde* A, *en el sentido* AM'''M''.... *entrarán afectados del signo ménos.*

3.° *Todas las líneas trigonométricas de los arcos que terminan en el primer cuadrante se consideran positivas, y por consiguiente las líneas trigonométricas de los demás arcos, que estén en posicion contraria á las de éste, deben ir precedidas del signo ménos.*

13. De esta última convencion se deriva:

1.° *Que deben ir precedidos del signo* MÁS, *todos los senos que como el* MP *caen en la parte superior del diámetro* AA', *y del signo* MÉNOS, *los que como* M''P' *caen por la parte inferior.*

2.° *Que deben ir precedidos del signo* MÁS *todos los cosenos que, como el* OP, *se cuenta de izquierda á derecha; y del signo* MÉNOS, *todos los que, como el* OP', *se cuenten de derecha á izquierda del centro.*

14. Este pudiera estenderse á las demás líneas trigonométricas, pero además de ser muy fácil su comprension, es inútil, toda vez que por medio de las funciones circulares, se dan fórmulas para determinar todas las líneas trigonométricas de un arco, en funcion del seno y coseno del mismo arco.

15. Poniendo á la vista el cuadro de los senos y cosenos de los cuatro arcos AM, AM', AM'' y AM''', en magnitud y signo, se tendrá

sen AM	=+M P	cos AM	=+OP
sen AM'	=+M' P'	cos AM'	=—OP'
sen AM''	=—M'' P'	cos AM''	=—OP'
sen AM'''	=—M'''P	cos AM'''	=+OP.

16. RELACIONES EXISTENTES ENTRE LOS SENOS Y COSENOS DE DOS ARCOS, IGUALES EN MAGNITUD Y DE POSICION CONTRARIA.

Sea AM un arco positivo, y AM''' otro de igual magnitud, pero de posicion contraria: es claro que conforme con el principio enun-

ciado (11), si se llama $+a$ la representacion numérica, ó sea el número de grados del arco AM, la del arco AM''' será $-a$.

Trazando el seno de ambos arcos $+a$ y $-a$, que segun la definicion (3), serán las líneas MP y M'''P, se vé que son iguales en magnitud, pero de contraria posicion, luego escribiendo sus valores numéricos, se tendrá (11) sen $(-a)=-$sen a.

En cuanto al coseno OP, es el mismo en magnitud y posicion para ambos arcos, luego cos $(-a)=$cos a.

17. Es decir: 1.° *Que los senos de dos arcos iguales, pero de posicion opuesta, son iguales, pero de signos contrarios.*

2.° *Los cosenos de dos arcos iguales y de opuesta posicion, son iguales y del mismo signo.*

18. Es evidente, que si un arco se representa por a grados, su suplemento será $180°-a$; pues $a+180°-a=180°$.

Tambien es evidente que $180-a$ se puede poner bajo la forma de $90+(90-a)$; y por último, que el complemento del arco $90+(90-a)$, es $-(90-a)$.

Esto supuesto, y teniendo presente lo establecido, (6 y 17) se tiene sen $(180-a)=$sen $(90+(90-a))=$cos $(-(90-a))=$cos $(90-a)=$sen a cos $(180-a)=$cos $(90+(90-a))=$sen $(-(90-a))=-$sen $(90-a)=-$cos a ó sea poniendo el primero y último miembro de estas trasformaciones sen $(180°-a)=$sen a cos $(180°-a)=-$cos a.

19. Que traducidas, dicen: *Que los senos de dos arcos suplementarios son iguales y del mismo signo; y los cosenos iguales y de signos contrarios.*

20. *Las líneas trigonométricas de un arco varian cuando este arco crece positivamente desde cero hasta* $+360°$, *ó negativamente desde* $0°$ *á* $-360°$

En efecto, si el punto M es móvil y coincide con A, origen de los arcos: entónces el arco a será nulo lo mismo que su seno, pero el coseno será igual al rádio AO; es decir, que para $a=0$ se tiene: sen $a=0$; cos $a=$R. Si el punto M que recorre el arco, se mueve hácia B, se irá alejando del diámetro AA' y aproximándose al BB': por tanto, el seno del arco que describe irá aumentando, y el coseno disminuyendo; así si a aumenta, sen a aumenta y cos a disminuye.

Cuando el punto M haya llegado en este movimiento á confundirse con el B, el seno del arco AB, es BO, y el coseno 0, luego para $a=90°$ se tiene sen $a=$R; cos $a=0$. Siguiendo el punto M en su movimiento, pasado el punto B, se vá acercando al diámetro A'A y alejando del BB', por tanto, si a aumenta mas de 90°, pero <180; sen a disminuye y cos a, aumenta en valor absoluto. Y cuando $a=180°$, se tendrá sen $a=0$; cos $a=-$R.

Fácilmente se verá que si a aumenta pero $<270°$; —sen a, aumenta y—cos a disminuye.

Si $a=270°$; sen $a=-R$; cos $a=0$.

Si a aumenta, pero $<360°$;—sen a disminuye, y cos a aumenta.

Si $a=360°$; sen $a=0$; cos $a=+R$.

Si se concibe que el punto a continúa en su movimiento, se tendrian arcos mayores que una circunferencia, pero que sus senos y cosenos serian los mismos que los de otros menores que una circunferencia.

Se vé tambien por el cuadro anterior, que cualquiera que sea el arco que en una circunferencia se considere, los límites de los valores que puede tomar su seno y coseno, son desde 0 á $\pm R$.

Funciones circulares.

21. Sea (Fig. 160) un arco AM, $=a$ tirando su seno, resulta el triángulo OMP, rectángulo en P, y por el teorema de Pitágoras, se tiene $MP^2+OP^2=OM^2$, ó sea $\text{sen.}^2a+\text{cos.}^2a=R^2$. (1). Si se traza la tangente AT, los dos triángulos rectángulos OAT y OPM, que tienen un ángulo agudo comun, dan AT: MP:: OA: OP, ó sea $\text{tang.}a$: sen$a$:: R: cos. a de donde $\text{tang.}a = R\,\dfrac{\text{sen.}a}{\text{cos.}a}$.... (2)

Poniendo en vez de a el arco $(90—a)$ se tendrá $\text{tang.}\,(90—a)=R\,\dfrac{\text{sen.}\,(90—a)}{\text{cos.}\,(90—a)}$.

Pero tang $(90—a)=\text{cot.}a$; y $\dfrac{\text{sen.}\,(90—a)}{\text{cos.}\,(90—a)} = \dfrac{\text{cos. }a}{\text{sen }a}$, luego

$$\text{cot a}=R\,\frac{\text{cos. }a}{\text{sen }a} \quad (3)$$

Si se aplican las fórmulas (1) y (3) á el arco $(180—a)$ suplementario del a, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \text{tg }(180°—a)&=R\,\frac{\text{sen}(180—a)}{\text{cos}\,(180—a)} \\ \text{cot}\,(180°—a)&=R\,\frac{\text{cos}(180—a)}{\text{sen}(180°—a)} \end{aligned}\right\}$$

y segun los valores dados por la fórmula del núm. (12) será

$\text{cot}(180—a)=-\text{cot }a$

$\text{tg }(180°—a)=-\text{tg }a$

22. Es decir *que las tangentes y cotangentes de dos arcos suplementarios, son iguales y de signos contrarios.*

23. Si se forma un cuadro de la variacion de los valores absolutos, que toman las tangentes de los arcos desde 0° á 360°, se tendrá

$a=$ 0° tg $a=0$ cot $a=\infty$; a crece$<$ 90° tg a crece; cot a dism.

$a=$ 90° tg $a=\infty$ cot $a=0$ a crece$\begin{matrix}>90° \\ <180°\end{matrix}$ tg a dism.; cot a crece

$a=180°$ tg $a=0$ cot $a=\infty$, a crece $\begin{matrix}>180°\\<270°\end{matrix}$ tg a crece; cot a dism.

$a=270°$ tg $a=\infty$ cot $a=0$ a crece $\begin{matrix}>270°\\<360°\end{matrix}$ tg a dism.; cot a crece.

24. En las fórmulas (1) (2) (3) núms. 21 y 22 si se hace el rádio R=1, es decir, si se toma por unidad, se tendrá sen $a^2+\cos^2 a=1$.... (1); tg $a=\frac{\text{sen } a}{\cos a}$.... (2); cot $a=\frac{\cos a}{\text{sen } a}$.... (3)

Esto simplifica las fórmulas y no inutiliza su empleo cuando el rádio del arco no se haya tomado por unidad, pues es muy fácil, obtenido un resultado bajo la hipótesis de ser el rádio la unidad, deducir de él, cual es en el caso de no ser el rádio 1.

25. En efecto, *basta sustituir en la fórmula hallada bajo la hipótesis de ser el rádio* 1, *en lugar de cada línea trigonométrica su relacion con el nuevo rádio:* así donde se vea tang a ó sen^2a etc., siendo el rádio 1, se pondrá si el rádio es r, $\frac{\text{tang } a}{r}$ ó $\frac{\text{sen}^2 a}{r^2}$ etc.

26. *Hallar las fórmulas del seno y coseno de la suma y diferencia de dos arcos en funcion de los senos y cosenos de estos arcos.*

Sea (Fig. 161) un arco $ab=a$ y $bc=b$, es evidente que el arco $abc=a+b$ y que tomando $bd=bc=b$ el arco $ad=a-b$. Esto supuesto, si se trazan los *senos* de estos arcos, la cuerda cd y el rádio ob perpendicular á la cuerda, y las rectas hk y dm y hn perpendiculares al *seno* cg y á la hk, se tendrá (observando que los triángulos cnh y hnd son iguales (G.ª 50,233 y 101) que

$$\begin{cases}\text{sen } (a+b)=cg=ng+cn=hk+cn\\ \text{sen } (a-b)=de=mk=hk-hm=hk-cn\\ \cos (a+b)=og=ok-gk=ok-nh\\ \cos (a-b)=oe=ok+ke=ok+md=ok+nh.\end{cases}$$

Pero la comparacion de los dos triángulos semejantes obf y ohk (162) dan tomando el rádio igual á 1, $ob:oh::bf:hk::of:ok$ ó sea $1:\cos b::\text{sen } a:hk::\cos a:ok$, de donde $hk=\text{sen } a \cos b$ y $ok=\cos a \cos b$.

Tambien la comparacion de los dos triángulos semejantes cnh y obf (166) dan $ob:ch::bf:nh::of:cn$ ó sea $1:\text{sen } b::\text{sen } a:nh::\cos a:cn$; de donde $nh=\text{sen } a \text{ sen } b$ y $cn=\text{sen } b \cos a$.

Sustituyendo estos valores de bk, cn, ok y nh en las igualdades anteriores, se tendrá

$$\left.\begin{matrix}\text{sen } (a+b)=\text{sen } a\cos b+\text{sen } b\cos a\\ \text{sen } (a-b)=\text{sen } a\cos b-\text{sen } b\cos a\\ \cos (a+b)=\cos a\cos b-\text{sen } a\text{ sen } b\\ \cos (a-b)=\cos a\cos b+\text{sen } a\text{ sen } b\end{matrix}\right\}\ldots.(4)$$

Estas fórmulas dicen, que

27. *El seno de la suma ó diferencia de dos arcos, es igual á la suma ó diferencia de los productos que se obtienen multiplicando el seno de cada uno de estos arcos, por el coseno del otro, teniendo en la diferencia cuidado de tomar por minuendo el producto del seno del minuendo en el primer miembro.*

28. *Que el coseno de la suma ó diferencia de dos arcos, es igual á la diferencia ó la suma entre los productos de los cosenos y senos de los dos arcos.*

29. *Hallar las fórmulas del seno y coseno de un arco en funcion de la tangente del mismo arco.*

Si se añade la unidad á el cuadrado de la relacion (2) n.° 24 se tendrá $1+\text{tg}^2a=1+\frac{\text{sen}^2a}{\cos^2a}$, ó $1+\text{tg}^2a=\frac{\cos^2a+\text{sen}^2a}{\cos^2a}$ y como $\text{sen}^2a+\cos^2a=1$ se tendrá $1+\text{tang}^2=\frac{1}{\cos^2a}$ de donde $\cos a=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2a}}$....(5)

Para la fórmula del seno, se observa que de la fórmula (2) se deduce sen a=tang a cos a, y sustituyendo por cos, a su valor (5), será $\text{sen}\,a=\pm\frac{\text{tg}\,a}{\sqrt{1+\text{tg}^2a}}$....

Si el problema hubiese sido: *Hallar el coseno y la tangente, en funcion del seno, ó el seno y la tangente de un arco, en funcion del coseno del mismo arco,* se obtendria fácilmente

En el 1.er caso: $\cos a=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2a}$.... $\text{tg}\,a=\pm\frac{\text{sen}\,a}{\sqrt{1-\text{sen}^2a}}$....

Y en el 2.°: $\text{sen}\,a=\pm\sqrt{1-\cos^2a}$.... $\text{tg}\,a=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2a}}{\cos a}$....

30. Si en las fórmulas núm.° (4) se hace $b=a$, se tendrá sen $2a=2\,\text{sen}\,a\cos a$.... (6) $\cos 2a=\cos^2a-\text{sen}^2a$.... (7).

Las cuales dicen (6) *Que el seno del duplo de un arco es igual al doble del producto del seno por el coseno del arco sencillo.*

Y (7) *Que el coseno del duplo de un arco, es igual al cuadrado del coseno, menos el cuadrado del seno del arco sencillo.*

31. Si se dividen una por otra las fórmulas (4) se tendrá la tangente del arco $(a+b)$, luego; $\text{tang}\,(a+b)=\frac{\text{sen}\,a\cos b+\text{sen}\,b\cos a}{\cos a\cos b-\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b}$.

Dividiendo ahora los dos términos del segundo miembro por cos a cos b, y teniendo presente que $\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}=\text{tang}\,a$ y vice-versa será $\text{tang}\,(a+b)=\frac{\text{tang}\,a+\text{tang}\,b}{1-\text{tang}\,a\,\text{tang}\,b}$.... (8)

Del mismo modo tang $(a-b)=\frac{\text{tang } a-\text{tang } b}{1+\text{tang } a \text{ tang } b}$.... (9)

Las cuales dicen: *Que la tangente de la suma ó diferencia de dos arcos es igual al cociente de la suma ó diferencia de las tangentes de estos arcos, dividida por la unidad ménos ó más el producto de dichas tangentes.*

32. Si en la fórmula (9) se hace $b=a$, se tendrá tang $2a=\frac{2 \text{ tang } a}{1-\text{tang}^2 a}$.... (10)

Es decir que *la tangente del duplo de un arco es igual al cociente del duplo de la tangente del arco sencillo, dividido por la unidad disminuida en el cuadrado de la misma tangente.*

De las tablas trigonométricas, su disposicion y uso.

33. Para hallar los logaritmos de las líneas trigonométricas, se necesita calcular primero el valor numérico de estas líneas; y como este valor numérico depende del número de grados del arco, y valor del rádio que en cada caso tenga la circunferencia en que se consideren, se ha tomado generalmente como circunferencia para calcular el valor numérico de las líneas trigonométricas, aquella cuyo rádio es 10^{10}; (ya sean varas, metros, kilómetros, etc.)

Esto impone la precisa necesidad de restablecer el rádio en todas las fórmulas que se vayan á calcular por logaritmos, cuando los arcos de que se trate en ellas no tengan por rádio 10^{10}.

Además tambien supone que dado el valor numérico del rádio y el número de grados del arco, se puede calcular el de las líneas trigonométricas.

Descripcion de las tablas trigonométricas de Vazquez Queipo.

34. Las tablas trigonométricas del Sr. Vazquez Queipo consideran la circunferencia dividida en 360° y comprenden directamente los logaritmos de los senos, tangentes, cotangentes y cosenos de todos los arcos desde 0° á 90°, creciendo de minuto en minuto, y en la siguiente disposicion.

Cada dos llanas comprenden un grado: el número de grados está señalado en la parte superior, y los minutos en la columnita de la izquierda de cada llana.

Esta disposicion se estiende, leyendo los grados situados en la parte superior, desde 0° á 44.° En la parte inferior de cada llana hay otra

graduacion que empieza en 89° y concluye en 45°; y en la derecha de cada llana otras columnitas de minutos.

Por esta disposicion, el conjunto de estas dos graduaciones comprenden todos los arcos de minuto en minuto desde 0° á 90°.

35. Entre las dos columnas de los minutos, están cuatro encabezadas *seno, tangente, cotangente, coseno,* que contiene directamente, con característica y parte decimal (hasta 7 decimales), los logaritmos de las respectivas líneas trigonométricas de los arcos señalados por los grados superiores, minutos de la columnita de la izquierda, y nombre de la línea que encabeza la columna.

Estas mismas columnas de logaritmos, llevan por la parte inferior escrito el nombre de la COLÍNEA, de la de la parte superior: de modo, que leida por la parte inferior, de izquierda á derecha, dice: *coseno, cotangente, tangente, seno....* é indican en qué columna se hallan los logaritmos de estas líneas pertenecientes á los arcos, cuyos grados están en la parte inferior, y sus minutos en las columnitas de la derecha de cada llana.

36. En cuanto al logaritmo de cada arco, se encuentra en línea horizontal con los minutos del arco, en su columna correspondiente.

Además, para no cansar la vista, se hallan encerrados los logaritmos y minutos en cuadros.

Por último, las características, para no cansar la vista, no están puestas mas que el primer logaritmo de cada grupo. Otras particularidades que contienen se esplicarán con el manejo de las tablas.

37. El valor del rádio en estas tablas se ha considerado igual á 1.

MANEJO DE LAS TABLAS DE VAZQUEZ QUEIPO.

38. El manejo de unas tablas trigonométricas, consiste en resolver las dos cuestiones siguientes: 1.ª *Dado un arco, hallar el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas.* 2.ª *Dado un logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el arco á que pertenece.*

39. Para resolver el primero de estos problemas, se distinguirán dos casos: 1.° *Que el arco sea un número completo de grados y minutos.* 2.° *Que tenga un cierto número de segundos.*

Si el arco es un número completo de grados y minutos, directamente se halla el logaritmo de cualquiera de sus líneas, leyendo la graduacion superior de las tablas y minutos de la izquierda, si está entre 0° y 45°, y la graduacion de abajo y minutos de la derecha, si está entre 45° y 90°.

Así, pedido el logaritmo tangente 37° 18', se busca en la parte superior de las llanas 37°; despues en la columnita de los minutos 18', y en la misma línea horizontal, en la columna de logaritmos que está encabezada *Tangentes*, está $\bar{1}$,881839. Por tanto, Log.° tang. 37°. 18'=$\bar{1}$,881839.

Si se pidiese log.° cos 78°. 25'; se busca 78° en la parte inferior de las llanas y 25' en la columnita de la derecha, enfrente, en la columma de logaritmo, que lleva por abajo *Coseno*, está $\bar{1}$,480140: por tanto, Log.° cos. 78°, 25'=$\bar{1}$,480140.

Del mismo modo Log.° sen 2°, 7'=$\bar{2}$,567481; Log.° tang 89°, 18'= 1,913003.

40. Si el arco de cuya línea trigonométrica se pide el logaritmo, tuviese segundos, entónces hay que distinguir dos casos: que esté entre 3° y 87°, ó que esté entre 0° y 3° ó 87° y 90°.

Si está entre 3° y 87°, *se halla el logaritmo, prescindiendo de los segundos, y despues se multiplica la parte proporcional que se halla en su columna respectiva por el número de segundos, añadiendo ó restando la parte entera de este producto á las últimas cifras del logaritmo hallado, segun que se trate de un seno y tangente ó de un coseno y cotangente.* Así

Log.° sen 23°. 14'.16″=$\bar{1}$,596120;
Log.° tang 59°. 42'.24″=$\bar{1}$,919294;
Log.° cot 85°. 38'.40″=$\bar{1}$,881762;
Log.° cos 66°. 52'. 2″=$\bar{1}$,594241.

Si el arco está entre 0° y 3°, 87° y 90° se reduce á segundos y se halla el logaritmo vulgar de el número que resulte: á este logaritmo se le agrega el constante $\bar{6}$,685 *que encabeza las columnas que están entre las de los senos y tangentes de las tablas, seguido de las tres últimas cifras, que en estas columnas, así encabezadas, se encuentran enfrente de los minutos del arco.*

Así, pedido el logaritmo seno 2°,20'.16″, se reduce todo á segundos, lo que da 8416″: se halla el logaritmo vulgar de 8146, que es 3,925106, y este logaritmo se suma con el auxiliar $\bar{6}$,685455, cuyas tres últimas cifras están enfrente del arco 2°,20', en el lado de los senos: con esto se tendrá Log.° sen 2°. 20'. 16″=3,925106+$\bar{6}$,685455= $\bar{2}$,610561.

Del mismo modo Log.° tang 1°. 9'. 14″=$\bar{3}$,317077.

Si el arco estuviese comprendido entre 87° y 90°, se opera con la colínea. Así Log.° cot 88°.15',16″=Log.° tang 1°.44'.54″=$\bar{3}$,317077.

En cuanto al logaritmo de los cosenos de los arcos, entre 0° y 3°,

disminuyen con tanta lentitud, que basta la inspeccion de las tablas para conocer la parte que debe restársele por cada segundo. Así, pedido el logaritmo coseno 2°.12'.15", se ve que el de 2°.12' es $\bar{1}$,999680, y el de 2°.13' es $\bar{1}$,999675, lo que dice que por 1' de diferencia en los arcos, disminuye el log.° coseno en 0,000005, luego por 15", ó sea $\frac{1}{4}$ de minuto, disminuirá en $\frac{1}{4}\times$0,000005, ó sea en 0,000001: así log.° cos 2°.12'.15"=$\bar{1}$,999679.

Queda resuelto el primer problema en todos los casos.

41. 2.° *Dado el logaritmo de una línea trigonométrica, hallar el arco á que pertenece.*

Para resolver esta cuestion, se busca en la tabla, en las columnas de logaritmos, señalados arriba ó abajo con el nombre de la línea cuyo logaritmo se ha dado, primero las tres primeras cifras, y despues las otras tres: si se encuentran las tres últimas, es decir, si el logaritmo dado se encuentra entre los de la tabla, se lee la graduacion de arriba y minutos de enfrente al logaritmo á la izquierda, si el nombre de la línea, cuyo logaritmo se dá, está arriba; ó la graduacion de abajo y minutos de la derecha, enfrente al logaritmo, si el nombre de la línea, cuyo logaritmo se conoce, está abajo.

Así, pedido el arco cuyo seno tiene por logaritmo $\bar{1}$,396150, se buscaría en las columnas señaladas *senos* (sea arriba ó abajo) las tres primeras cifras decimales 396, y encontradas, se buscarian al lado de ellas las tres últimas 150; se vé que efectivamente se encuentra en la tabla enfrente de 25', en la columna que *arriba tiene seno;* luego corresponde á los grados de lo alto de la página, y con esto se escribirá *arco cuyo logaritmo seno es* $\bar{1}$,396150=14°. 25'.

Del mismo modo si se sabe que log.° tg=0,363428, se tendrá que su arco correspondiente es 66°. 35'.

42. *Si el logaritmo dado no se encuentra entre los de la tabla,* precisamente estará comprendido entre dos contenidos en ella y que se diferencian en 1': esto indica que el arco correspondiente tiene segundos, y para encontrarlos se requiere la marcha inverva de la explicada para el caso, dado el arco hallar su logaritmo. Que se reduce á buscar en la tabla el próximo menor, y restarlo del logaritmo dado; hecho esto se divide el resto por la parte proporcional que señala la tabla, y la parte entera del cociente serán los segundos que se deben sumar ó restar al arco que corresponde al logaritmo próximo menor de la tabla, segun que se hable de seno y tangente ó de coseno y cotangente.

Así, pedido cual sea el arco cuyo log.° tg=0,319742, se encontrará que el inmediatamente menor es 0,319556 que corresponde á 64°

24': y como el dado es mayor y se trata de una tangente para averiguar los segundos que deben añadirse á este arco, se dividirá la diferencia 186 entre ámbos logaritmos (el dado y el de la tabla) por 5,40 que es la parte proporcional, y su cociente entero 34 será el número de segundos que se busca: así el arco pedido es 64°. 24'. 34".

43. *Si el logaritmo más próximo se encuentra en las tres primeras llanas,* es decir, que el arco correspondiente es menor que 3° y mayor que 87°, hay que emplear el medio siguiente:

Supóngase que se pide el arco cuyo logaritmo seno=$\bar{2}$,129606: el próximo menor es el $\bar{2}$,126471 que cae en las tres primeras llanas, por lo que hay que retroceder en el método explicado y emplear el logaritmo auxiliar; así se vé que $\bar{6}$,685562 es el que le corresponde; y restándolo del log.° dado, su diferencia 3,444044 expresará el logaritmo vulgar del número de segundos que tiene el arco; por tanto, en la tabla de los números se busca el número cuyo logaritmo es esta diferencia, que es 2780: estos son los segundos del arco que reducidos á minutos y grados dan 0°, 46', 20", que es el arco buscado. Lo mismo se hará para las tangentes.

Así, pedido el arco cuyo logaritmo tg=$\bar{2}$,577942, se tendria 2°, 10', 1".

Si fuera este log.° propuesto de una cotangente, se tomaría el complemento á 1 del logaritmo dado y se operaría sobre el complemento dado y la tangente.

Así sea el log.° cot a=1,532976: el logaritmo que hay que sumarle para que la suma sea cero se halla buscando el complemento á la parte decimal y restándole 2 unidades, así log.° tg a=$\bar{2}$,467024, de donde a=1°, 40', 44".

44. Nota.—Si la línea cuyo logaritmo se dá fuese el coseno y perteneciere á un arco menor que 3°, el próximo menor de la tabla, entónces es fácil hallar los segundos que deben restarse, pues siendo 7 la mayor diferencia entre dos de estos cosenos, basta dividir 60" por la diferencia entre el logaritmo de la tabla y el dado, y restando los segundos que resulten como cociente del arco á que pertenece el logaritmo de la tabla. Por último, si el logaritmo coseno próximo menor fuera de un arco mayor que 87 grados (lo que se conoce si la columna en que se encuentra lleva por abajo coseno) se operará sobre el seno, caso ya examinado, y el arco en que se encuentre será el complemento del buscado.

Así; si se tiene logaritmo cos=$\bar{2}$,686408 se vé que el próximo menor está en la columna que por abajo lleva coseno: se opera, pues, como si se tratara de su seno y se vé que 4,001004 es el logaritmo de los se-

gundos del arco, complemento del que se busca: este arco complemento tiene 10023″ ó 2° 47′, 3″.

Fórmulas para la resolucion de los triángulos rectilíneos rectángulos.

45. Para más sencillez de las fórmulas de resolucion de los triángulos rectángulos, se conviene señalar los ángulos con las letras mayúsculas A, B, C, poniendo la A en el vértice del ángulo recto: el valor numérico de los lados se señala con las minúsculas *a, b, c,* iguales á las del vértice opuesto.

46. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto ó coseno del comprendido* (Fig. 162).

Sea el triángulo ABC, desde uno de los vértices de los ángulos agudos, el C por ejemplo, se describe con un rádio igual 1, el arco MQ, trazando su seno MP que será paralelo á el lado BA se tendrá BA: MP:: CB: CM ó sea; c: sen C:: a: 1, de donde, $c=a$ sen C.

Pero por ser el triángulo rectángulo, B<90° y C=90°—B, de donde sen C=sen (90°—B)=cos B, luego sustituyendo será; $c=a$ cos B.

47. *En todo triángulo rectángulo, un cateto es igual al otro multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero, ó cotangente del ángulo agudo adyacente.*

En efecto, si en la construccion anterior se traza la QN tangente del arco MQ, correspondiente á el ángulo C, se tendrá BA: NQ:: CA: CQ ó sea; c: tang C:: b: 1, de donde, $c=b$ tang C.

Pero de C=90°—B se tiene tang C=cot B; luego sustituyendo será $c=b$ cot B.

Fórmulas para la resolucion de los triángulos oblicuángulos.

48. *En todo triángulo, la relacion de dos lados es la misma que la de los senos de los ángulos opuestos.*

En efecto, sea el triángulo ABC (Fig. 163 y 164); bajando desde uno de sus vértices B, la perpendicular BD sobre el lado opuesto, ésta caerá dentro ó fuera del triángulo segun que el ángulo A sea agudo ú obtuso.

En el primer caso se tendrá en los triángulos rectángulos ABD y BDC, que BD=c sen A; BD=c sen C, luego; c sen A=a sen C, de donde c: a:: sen C: sen A.

Si desde A se traza la AE, se tendrá tambien AE=c sen B; AE=b

sen C, luego $c : b :: \text{sen C} : \text{sen B}$. De estas se deduce $c : \text{sen C} :: a : \text{sen A}$ y $c : \text{sen C} :: b : \text{sen B}$, de donde $a : \text{sen A} :: b : \text{sen B} :: c : \text{sen C}$.

49. Si el triángulo tuviese un ángulo obtuso como el BAC (Fig. 164), entónces la perpendicular BD caerá fuera y se tendrá en los dos triángulos rectángulos BDC y BDA, que $BD = a\,\text{sen C}$ y $BD = c\,\text{sen BAD}$; pero $BAD = 180 - BAC$, de donde $\text{sen BAC} = \text{sen BAD}$; luego $a\,\text{sen C} = c\,\text{sen A}$. Se está en el caso anterior.

50. *En todo triángulo el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, mas el duplo del producto de estos mismos lados por el coseno del ángulo opuesto al primero.*

En efecto, (Fig. 163 y 164) si en cualquiera de los triángulos, ya sea acutángulo ú obtusángulo, se baja la BD perpendicular á uno de los lados, se tendrá en la (Fig. 163) segun (Geom.ª 101 cor.os) $a^2 = b^2 + c^2 - 2b$. AD y en la (Fig. 164) $a^2 = b^2 + c^2 + 2b$. AD.

Pero en el primer caso en el triángulo rectángulo ABD se tiene: $AD = c \cos A$; y en el segundo en el BDA, $AD = c \cos BAD = (21)\ c \times -\cos BAC = -c \cos A$.

Sustituyendo será en uno y otro caso $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. fórmula aplicable á los tres lados de todo triángulo, cualquiera que sea el ángulo A.

Así para los lados b y c se tendrá $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Ejemplos de resolucion de triángulos por medio de las fórmulas halladas.

Ejemplos de rectángulos.

51. Advertencia.—Cuando se trate de resolver triángulos rectángulos, debe tenerse presente: La relacion demostrada entre los valores numéricos de sus lados, conocida por teorema de Pitágoras, á saber: $a^2 = b^2 + c^2$: y la relacion constante entre sus ángulos, á saber: $A = 90°$ $B + C = 90°$.

52. 1.° *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y un ángulo agudo.*

Segun las fórmulas se tiene $b = c \operatorname{tang} B$, ó $\operatorname{tang} B = \frac{b}{c}$ de donde log. tg. B = log. b — log. c.

Determinado B se tiene $C = 90° - B$. Por último, la hipotenusa a se puede determinar ya por la relacion $b = a \text{ sen B}$, ó $a = \frac{b}{\text{sen B}}$, de

donde log. a=log. b—log. sen B; ya por la conocida $a^2=b^2+c^2$ ó $a=\sqrt{b^2+c^2}$.

APLICACION $b=400^m$ $c=300^m$.

Se tendrá log. tang B=log. 400—log. 300=0,124939, de donde B=53°. 7'. 48", 3: luego C=36°. 52'. 11", 7. Tambien log. a=log. 400—log. sen 53°. 7'. 48", 3=2,698970, de donde $a=500^m$.

53. 2.° *Dada la hipotenusa* a *y un ángulo* B, *determinar los catetos* b *y* c, *y el otro ángulo agudo* C.

Primeramente C=90°—B.

De la fórmula $b=a$ sen B, se deduce log.° b=log.° a+log.° sen B.

Respecto al cateto c, se hallará por la expresion $c=a$senC, si se quiere hacer uso del ángulo C, ó por la fórmula $c=a$ cos B, si se quiere hacer solo uso del ángulo dado.

APLICACION $a=746^m,5$; B=52°. 9'. 10": inmediatamente C=37°. 50'. 50": log.° b=log.° 746,5+log.° sen 52°. 9'. 10"=2,770464: de donde $b=589^m,0$.

Haciendo uso del ángulo dado, se tiene log.° c=log.° 746,5+log.° cos 52°. 9'. 10"=2,660886: de donde $c=458^m,0$.

54. 3.° *Dada la hipotenusa* a *y un cateto* b, *determinar el* c *y los dos ángulos agudos* C y B.

Para el cateto c, se tiene por la fórmula de Pitágoras $c=\sqrt{a^2-b^2}$.

Respecto del ángulo B, se tiene de $b=a$ sen B; log. sen B=log.° b—log.° a.

Una vez determinado B, se conoce el ángulo C.

APLICACION.—Si $a=1500$ y $b=930$, se tiene: log. sen B=log.° 930—log.° 1500=$\bar{1}$,792392; de donde B=38°. 18'. 58", y de aquí C=51°. 41'. 2".

En cuanto á $c=\sqrt{1500^2-930^2}=621^m$.

4.° El caso de *dado un cateto y un ángulo agudo, es análogo al* 2.°

EJEMPLOS DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS.

55. *Dados un lado* a *y dos ángulos* B *y* C.

El tercer ángulo A estará dado inmediatamente, pues será el suplemento de los otros dos: así A=180—(B+C).

Determinados los ángulos, los lados incógnitos se determinarán

por la relacion que existe entre los lados de un triángulo (50) y los senos de los ángulos opuestos. Así, para el lado c se tiene $\frac{c}{a}=\frac{\text{sen C}}{\text{sen A}}$, de donde $c=\frac{a \text{ sen C}}{\text{sen A}}$, ó tomando log.^{os} será; log. c=log. a+log. sen C—log. sen A, y para el b, $\frac{b}{a}=\frac{\text{sen B}}{\text{sen A}}$, de donde $b=\frac{a \text{ sen B}}{\text{sen A}}$, ó tomando log.^{os} log. b=log. a+log. sen B—log. sen A.

Aplicacion numérica. a=356,7; B=57°. 14'. 22″,2; C=79°. 23'. 6″, 9; inmediatamente se deduce que A=180°—(B+C)=43°. 22'. 30″, 8.

Respecto á los lados, se tiene log. c=log. 356,7+log. sen (79°. 23'. 6″, 9)—log. sen (43°. 22'. 30″8)=2,707993; de donde c=510^{m},5.

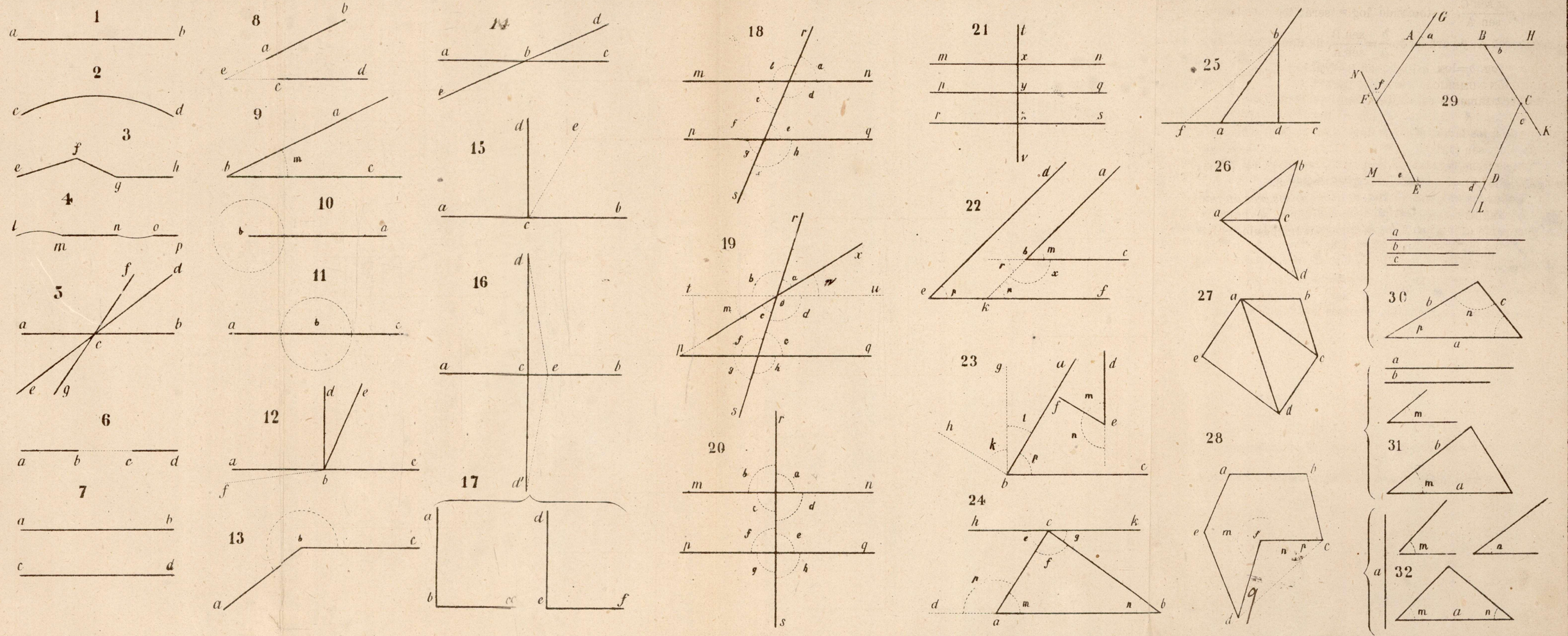
Para b, se tiene log. b=log. 356,7+log. sen (57°. 14'. 22″,3)—log. sen (43°. 22'. 30″,8)=2,640254; de donde b=436^{m},8.

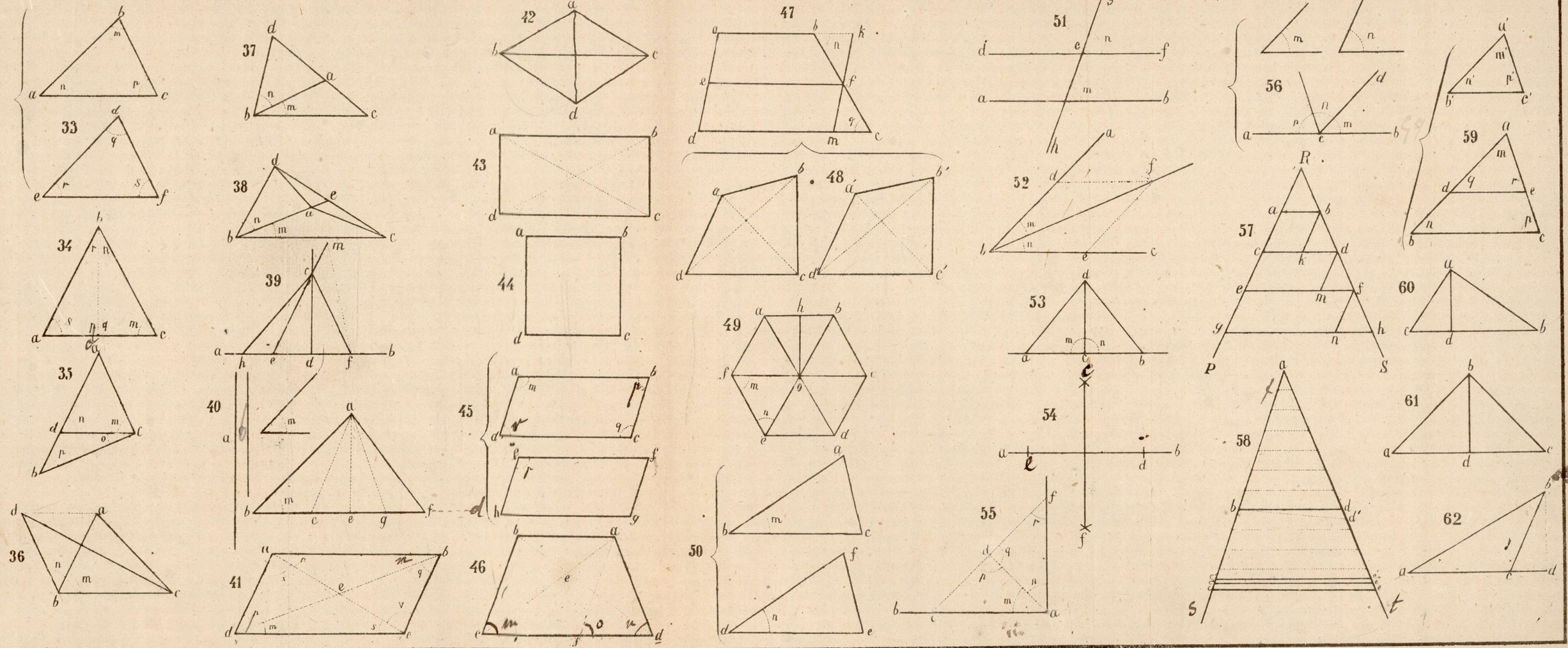
56. *Dados los tres lados* a, b *y* c, *calcular los tres ángulos.*

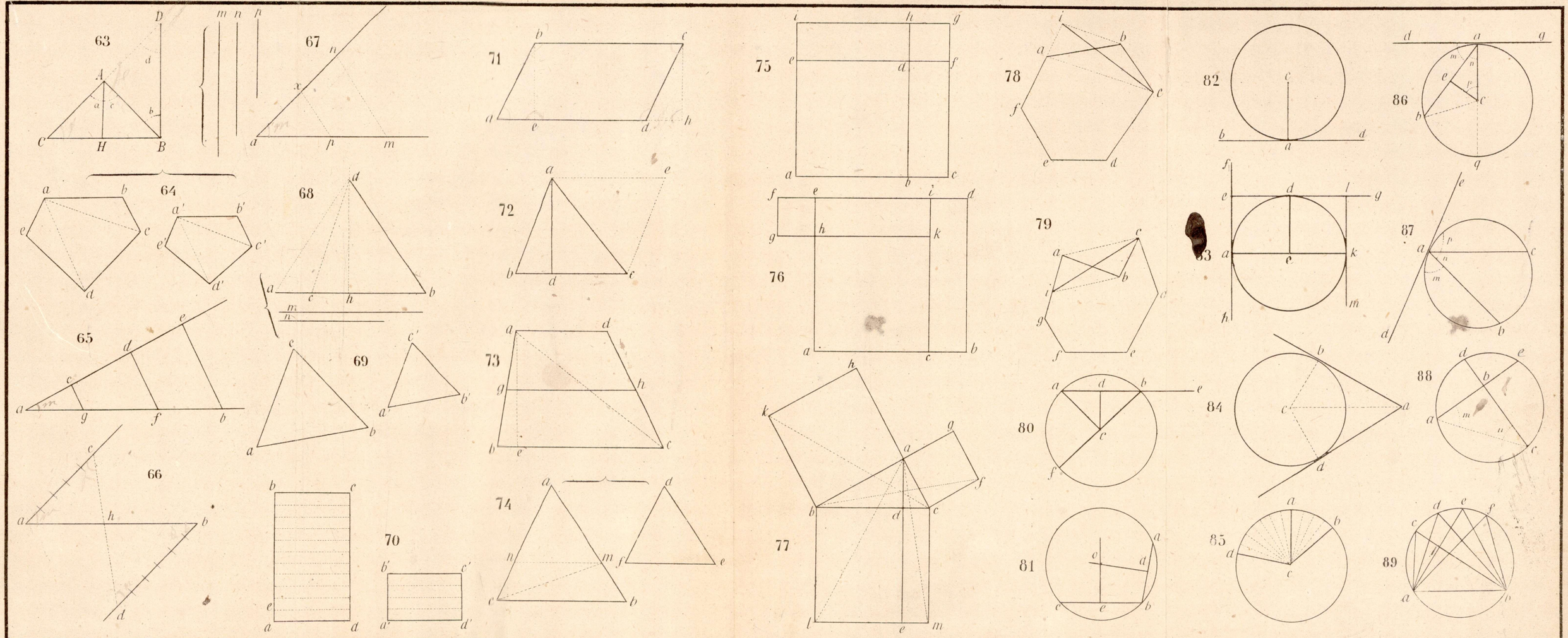
Sean los ángulos A, B y C. Para determinar A, se hará uso de la fórmula conocida (32), que se verifica en todo triángulo, así: $a^2=b^2+c^2-2bc$ cos A, de donde cos $\text{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

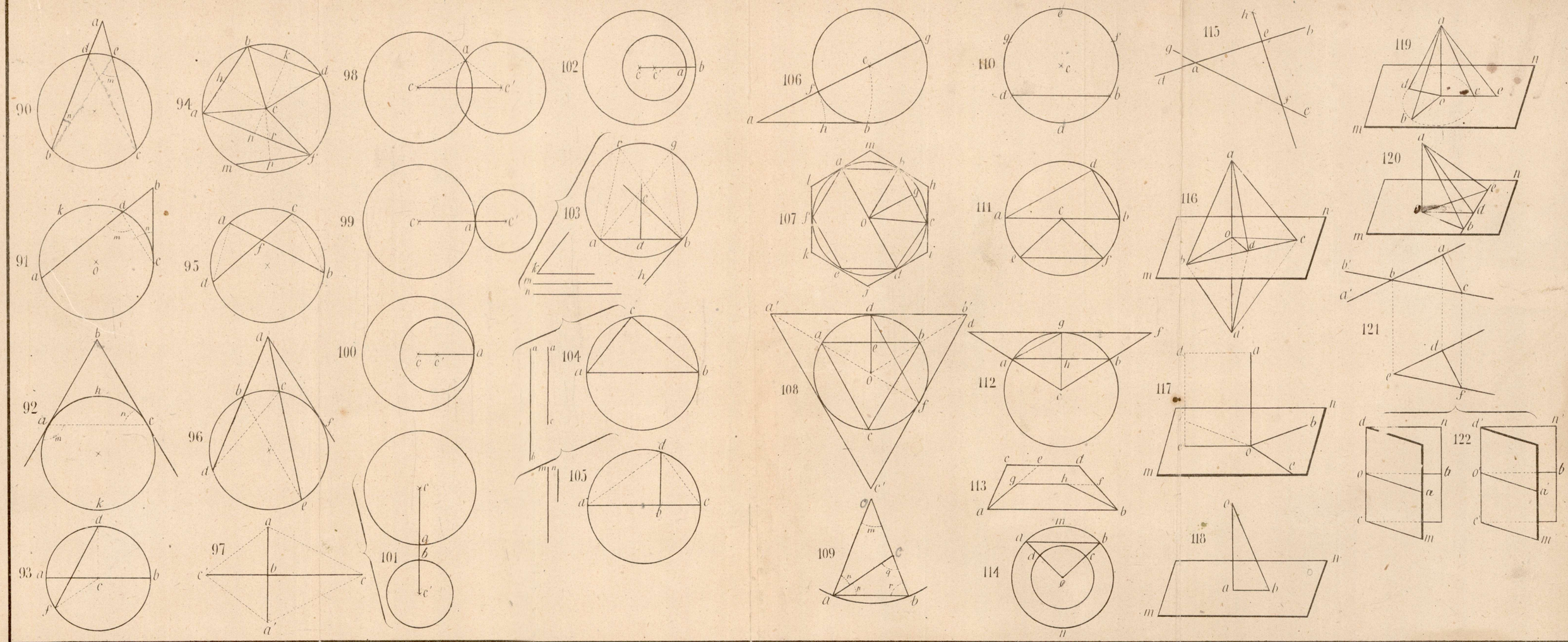
Lo mismo se calcularian los otros dos ángulos.

Fin de las Nociones de Trigonometría Rectilínea.

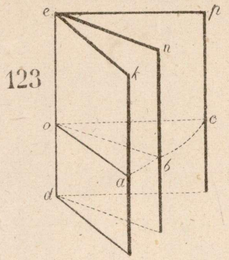

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32


33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62

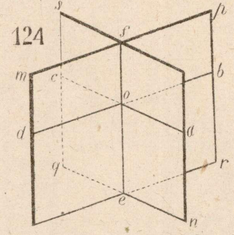

63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89


90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122

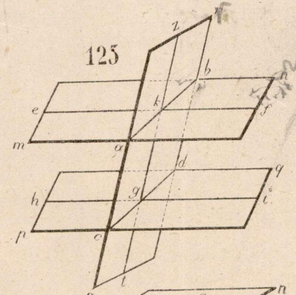
123



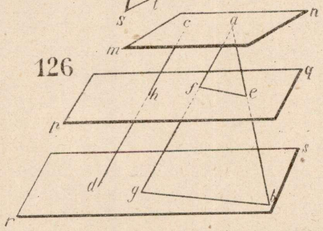
124



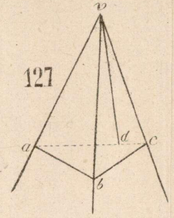
125



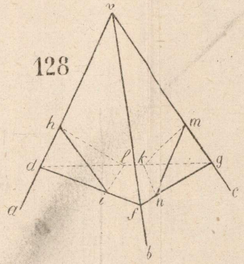
126



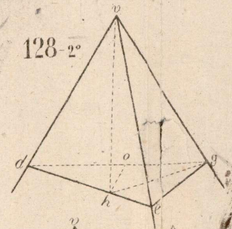
127



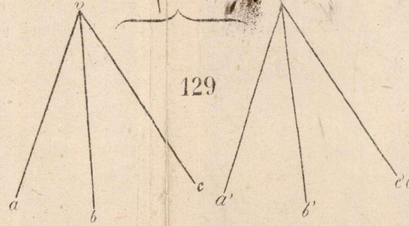
128



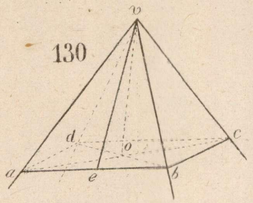
128-2º



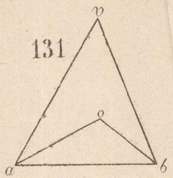
129



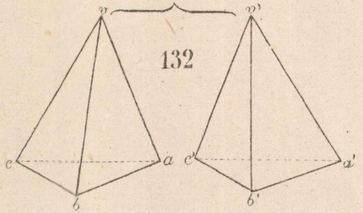
130



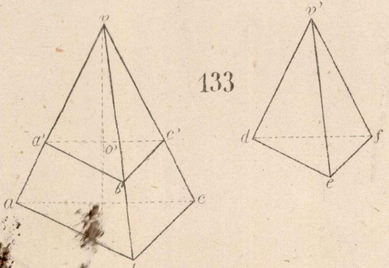
131



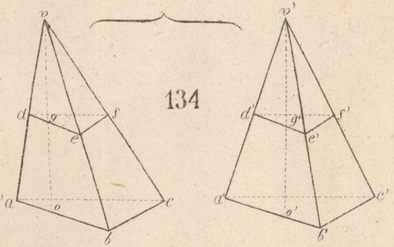
132



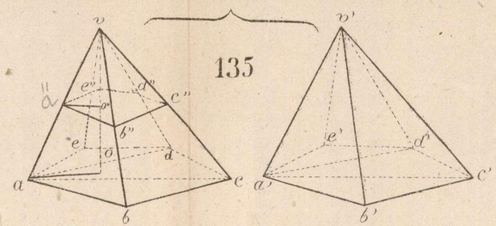
133



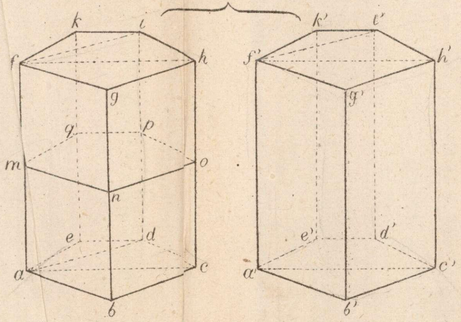
134



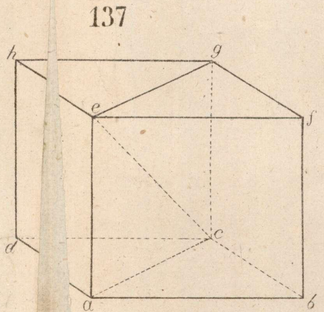
135



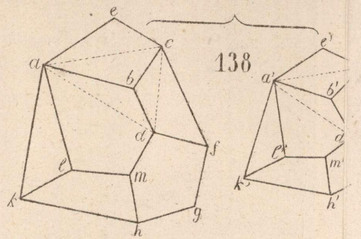
136



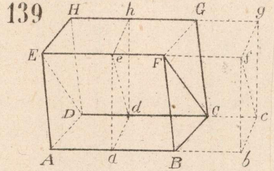
137



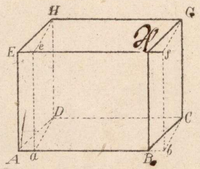
138



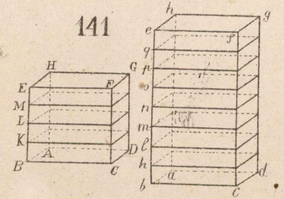
139



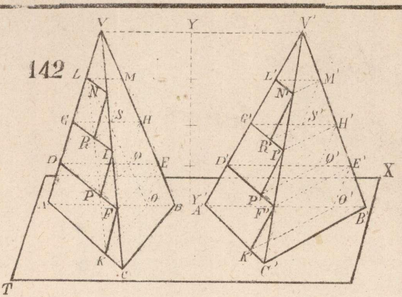
140



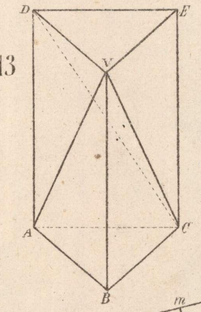
141



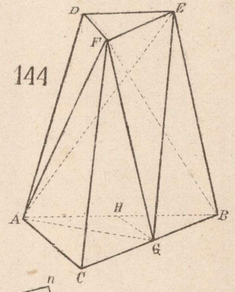
142



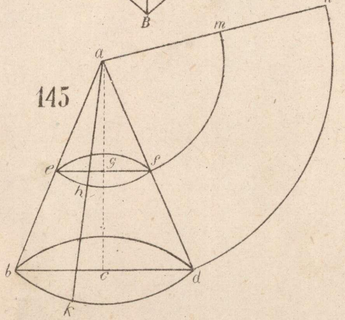
143



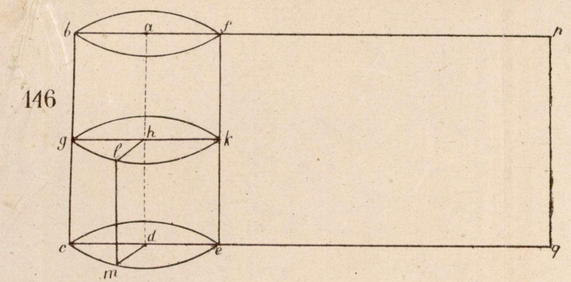
144



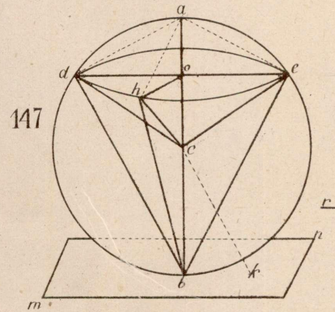
145



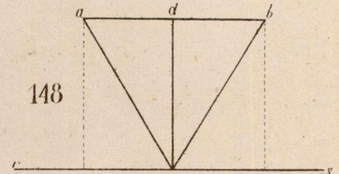
146



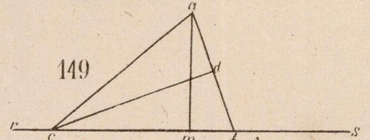
147



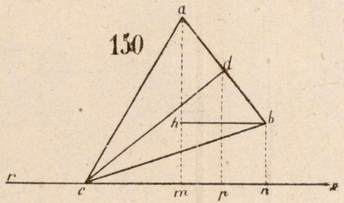
148



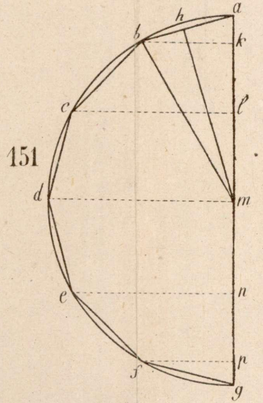
149



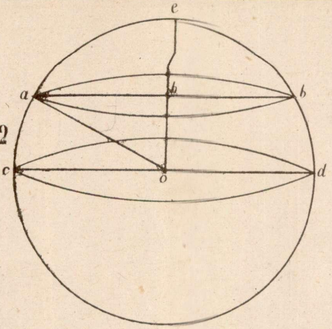
150



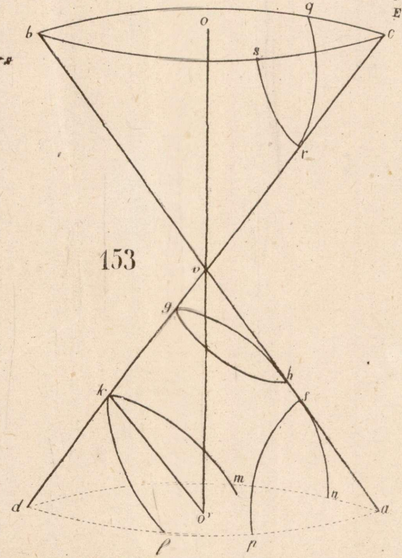
151



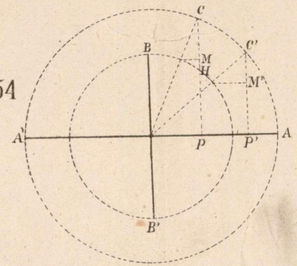
152



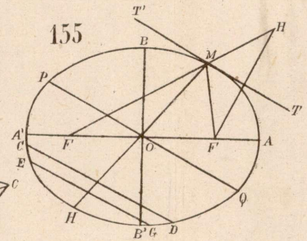
153



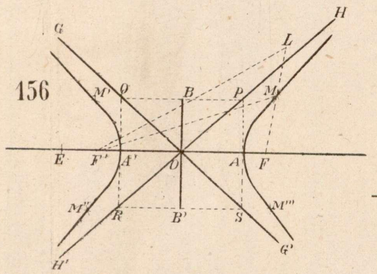
154



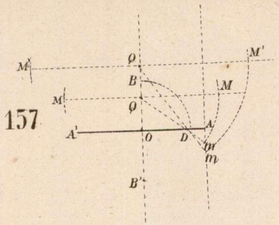
155



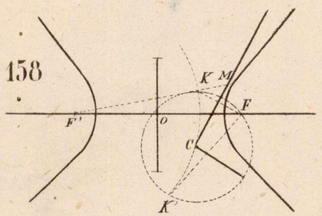
156



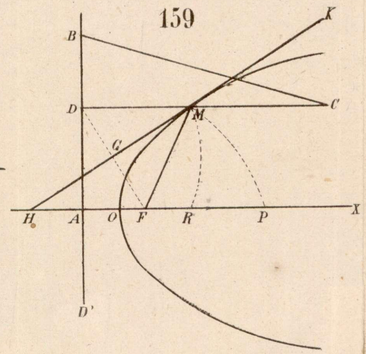
157



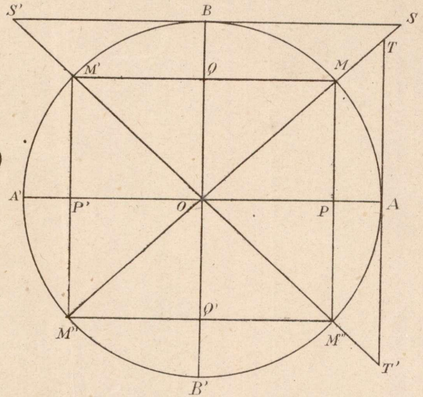
158



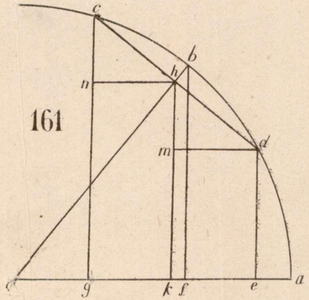
159



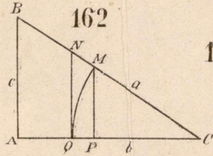
160



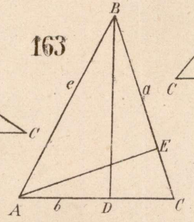
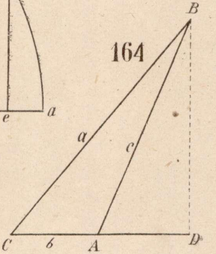
161



162



163



164