Y I II

ESTUDIOS FILOSÓFICOS

SOBRE

LA CIENCIA DEL CÁLCULO.

Regalado por el Sr. Benot.
abril 865.

ERRORES EN LOS LIBROS DE MATEMÁTICAS.

ESTUDIOS FILOSÓFICOS

SOBRE LA

CIENCIA DEL CÁLCULO.

POR

M. F. VALLÈS,

INGENIERO DE PUENTES Y CALZADAS, ANTIGUO DISCÍPULO
DE LA ESCUELA POLITÉCNICA.

TRADUCCION DE

EDUARDO BENOT.

> Muy á menudo he hallado mas doctrina, y sobre todo doctrina fecunda, en la verdadera filosofia de la ciencia que en las fórmulas algebráicas.

PRIMERA PARTE.

CADIZ.

IMPRENTA Y LIT. DE LA REVISTA MÉDICA,
CALLE DE LA BOMBA, NUMERO 1.
1863.

ADVERTENCIAS DEL TRADUCTOR.

La importancia colosal de la obra que Mr. Vallès escribió sobre la filosofía de la ciencia del cálculo me hizo emprender la traduccion que hoy sale á luz. En las matemáticas, á fuerza de manejar el lenguaje maravilloso del álgebra, más encomiado por los filósofos y por las personas *no profundamente* versadas en el cálculo que por los mismos geómetras, se habia dejado en cierto olvido la crítica racional de la *filosofía*, ciencia que está muy por encima de las matemáticas, porque de los principios racionales y de las formas de la dialéctica recibe la ciencia del cálculo la sancion que necesita. El primer objeto de esta obra es reivindicar para la verdadera filosofía trascendental, los derechos sin razon ninguna conculcados por los mecanismos algebráicos; que el instrumento nunca puede ser mas que el artífice, ni la lengua del álgebra mas que la razon humana.

El segundo objeto del libro de Mr. Vallès es patentizar lo fecundo de su principio general: las fórmulas algebráicas son expresion de los hechos naturales. Desde ahora llamo la atencion del lector hácia las consideraciones en que funda este principio, cuya trascendencia é importancia no es fácil calcular.

El tercer objeto que se propone la obra de Mr. Vallès es la reforma de los libros de matemáticas. La enseñanza de esta ciencia se hace generalmente en España, acaso como en ninguna parte, ó bien por traducciones de libros llenos de ingenio pero vacíos de verdadera filosofía, ó bien por compilaciones mas ó menos copiosas y acertadas, extractadas de originales que pecan de las mismas faltas. En esas obras no se hace caso de la crítica y toda la atencion se fija en la dialéctica; si la suma está exacta los sumandos son admisibles, *absurdo crítico* indebidamente generalizado á favor de su *verdad dialéctica*. ¿Cómo, si nó, las reglas de los signos, los irracionales y las imaginarias habian de haber embrollado la ciencia?

En mi obra titulada *Errores en materia de educacion y de instruccion pública*, tuve precision de consagrar un capítulo á este interesante particular, y voy á transcribirlo por dos razones: 1.ª porque presenta en relieve los defectos de que se trata, y 2.ª porque da una idea *condensada en compendio* de la misma obra de Mr. Vallès, que tuve presente al escribirlo, y de la cual copié fielmente períodos enteros, que el lector hallará repetidos en el texto, con ventajas sin duda para la memoria y la atencion.

En la traduccion he querido conservar en cuanto me ha sido posible el estilo y lenguaje del autor; no porque variando giros y redondeando frases hubiera dejado de ganar la expresion española comparada con la francesa, sino porque, á mi entender, la *forma* con que sale á luz el escrito original de un novador reformista lleva en su misma rigidez, insistencia y prolijidad un sello de conviccion profunda y de persuasiva atraccion que merecen respeto por pertenecer á la *esencia* de la obra, formando parte del invento.

El capítulo de mi citada obra, suprimiendo algunos pasajes escritos en un estilo incisivo de controversia y disputa que no cuadran en este lugar, atendido el carácter de exposicion dado por Mr. Vallès á su importante trabajo, está concebido en los términos siguientes:

"CAPÍTULO XI.

> "Debe mirarse como el principio fundamental del álgebra la teoría del órden de la situacion de las cosas independientemente de su tamaño.
>
> POINSOT.

"*Errores y contradicciones en los libros de matemáticas. Los libros de matemáticas están por hacer.*

"Con escándalo, con admiracion, con espanto habrán leido algunos que ven en las matemáticas la ciencia exacta por excelencia nuestra asercion de que sus libros están llenos de errores y contradicciones, pero en esos sentimientos no hay nada de malo, lo peor del caso es que nuestros asertos son verdad y que vamos á probarlo.

"Seguirémos en la exposicion el método de Mr. Vallès.—

"La tarea no es difícil: no hay ciencia cuyos libros estén mas en falso. Desde Keplero, Newton y Leibnitz que llevaron las matemáticas hasta donde se podia, valiéndose de los medios puramente geométricos, nada ha adelantado la ciencia en manos de los analistas; pero en cambio se ha embrollado en su exposicion y hasta en sus fundamentos.

"No hay cosa mas frecuente que oir decir, *escriba Vd. una cantidad*, como si las cantidades (esto es las longitudes, superficies, sólidos, fuerzas, pesos etc.) pudieran escribirse y como si el sistema de numeracion, que está destinado á designar la pluralidad y nó las cantidades, fuese el representante de estas.

"Si sobre una línea tomo una longitud partiendo de derecha á izquierda esa cantidad será, por ejemplo, positiva: si la tomo hácia la izquierda será negativa. Y no dejará por esta circunstancia de ser una longitud real, medible y apreciable de mil modos. Sin embargo, esa cantidad, por ser negativa, y segun se PRUEBA en los libros que andan en manos de todo el mundo, es menor que cero. ¡Menor que cero una vara de medir si se dirige hácia la izquierda!

"Con decir

$$-8 < 0$$

bastaria para que una persona de talento ó de un poco de sentido comun arrojase el libro en que tal cosa se probase, como se arrojan esos edificios lógicos de filosofía infeliz que nos han venido de Alemania, donde no se leen, y que terminan probando que *no* EXISTE Dios, ó que *no* EXISTE EL MUNDO, ó que *no* EXISTE EL HOMBRE.

"Entremos en materia.

"Conforme á las reglas de los signos, admitidos por todos, y sin motivo generalizadas, tenemos que

$$\frac{-a}{+a} = -q$$

y que

$$\frac{+a}{-a} = -q$$

de donde, conforme á todos los libros de álgebra, sale la proporcion

$$\frac{-a}{+a} = \frac{+a}{-a};$$

resultado asombroso, y tan grande, que no cabe en cabeza humana, pues no es concebible que lo ménos sea á lo más como lo más á lo menos.

"Se demuestra que

$$\frac{a}{0} = \infty;$$

pero, siendo toda cantidad negativa menor que cero, tendremos

$$-b < 0$$

"Ahora bien: ¿qué podrá responderse si se pregunta: á qué será igual $\frac{a}{-b}$? á qué $\frac{a}{-\infty}$? No hay respuesta racional posible, siempre que se atienda á las prescripciones del sentido comun y de la filosofía.

"Supongamos la ecuacion

$$(-a)^2 = (+a)^2$$

"Segun lo establecido, extraigamos la raiz cuadrada á ambos miembros, y tenemos el evidente absurdo de que

$$-a = +a$$

"Tomemos los logaritmos de los miembros de la anterior ecuacion y hallaremos

$$2 \text{ Log.}(-a) = 2 \text{ Log.}(+a);$$

ó bien

$$\text{Log.}(-a) = \text{Log.}(+a).$$

"Pero es una cosa demostrada que los números negativos no tienen logaritmos, luego ¿la carencia de una cosa es igual á la posesion de ella?

"Si los números negativos no tienen logaritmos, la operacion

$$-1258 \times 467$$

es operacion imposible: es así que la efectuamos por medio de los logaritmos siempre que nos ocurre esa ú otra de su clase,.... Luego....

"Sea un recipiente lleno de agua hasta cierta altura: supongamos en el fondo de ese recipiente un orificio por donde se escapa el líquido, y que al mismo tiempo se echa agua en el vaso por un conducto cualquiera: el aumento ó disminucion que experimenta el agua del recipiente podrá siempre representarse, si llamamos a al agua que se echa y b á la que sale, por

$$a - b$$

"Pero si el agua que sale es mas que la que entra resultará que

$$a - b = -c;$$

y como se dice que una cantidad negativa es $<$ que cero,

$$-c < 0,$$

se deducirá, si algo puede deducirse, que, habiendo salido ménos que nada, habrá en el recipiente más que habia.

"Sea

$$\text{ABCDE} = a$$

un arco medido desde A.

"Si lo medimos en el sentido EDCBA tendremos

$$\text{arco EDCBA} = -a;$$

de donde resulta, segun los principios establecidos, que cualquier cantidad puede al mismo tiempo ser $>$ y $<$ 0.

"Si dos cantidades son iguales ó desiguales, y á ambas se les hace experimentar la misma modificacion, los resultados permanecerán iguales ó desiguales, respectivamente. Esto es racional, mejor dicho, axiomático.

"Sea

$$-a < 0;$$

multipliquemos ambos miembros de la desigualdad por una cantidad cualquiera: sea esta $-b$

"Segun las reglas de los signos, tendremos

$$ab < 0;$$

pero, como una cantidad positiva no puede ser menor que cero, hay que entender las cosas al revés diciendo

$$0 < ab.$$

"El círculo cuyo radio es infinitamente pequeño es un punto.

"La circunferencia cuyo radio es infinitamente grande es una línea recta.

"Los conceptos al llegar aquí se pierden. Nos parece oir lo contradictorio: un ruidoso silencio: una oscuridad brillante: un blanco negro: un negro blanco. ¿Cómo lo que no tiene dimensiones es superficie? ¿Qué es una curva recta?

"Consideremos la serie

$$\div - \infty - \ldots - 3 - 2 - 1 . 0 . + 1 + 2 + 3 + \ldots + \infty$$

"Segun lo establecido

$$- \infty$$

es el límite de los números menores que 0.

"Se sabe que si el numerador de una fraccion permanece invariable y su denominador crece, el valor de la fraccion disminuye; luego si el denominador llega á ser el número mayor posible, el valor de la fraccion será el menor posible—y vice versa.

"Luego debemos tener

$$\frac{a}{+\infty} = -\infty \,,\quad \frac{a}{-\infty} = +\infty$$

"Es así que lo que se demuestra es que

$$\frac{a}{0} = \infty$$

"Luego....

"El volúmen de la esfera es igual á la superficie por el tercio del radio.

"Demostracion.

"La esfera puede considerarse como compuesta de un número infinito de pirámides, cada una de las cuales tenga por base un punto de la superficie y por altura el radio: el volúmen de una pirámide es el producto de su base por el tercio de la altura: tomando en la esfera al radio por factor comun, tendremos que la suma de todos esos volúmenes estará representada por la suma de las bases multiplicada por el factor comun; pero la suma de las bases es la superficie de la esfera, luego....

"Pero, segun esta representacion, al centro de la esfera concurrirán los vértices de todas esas pirámides; y como las bases son puntos, tendrémos que en el centro de la esfera hay tantos puntos como tiene la superficie, luego ¿el centro es igual á la superficie? ¿luego....

"A cada instante se usa en matemáticas la frase número infinito como aplicable á las realidades. El número infinito, para que lo sea es preciso que encierre todos los casos posibles: muchos de estos son contradictorios en la realidad, como lados entrantes y salientes al mismo tiempo, mayor y menor al mismo tiempo, igual y desigual al mismo tiempo... luego el número infinito en el órden de la pluralidad es imposible en el órden de la realidad.

"Detengámonos ya, que basta y sobra con lo dicho, sin necesidad de mas detalles, para dar á entender cuántas contradicciones entrañan los principios de que por ilacion lógica se desprenden los monstruosos absurdos que dejamos consignados.

"Y cuenta que la mies es abundante! ¡Cuánto no se puede decir sobre las raices imaginarias!! ¡Cuánto sobre las fórmulas trigonométricas!!

"Ahora bien, ¿no es extraño que la duda penetre en doctrinas al parecer inatacables? ¿Hay algun misterio en los apartados límites de la ciencia que exploran actualmente los geómetras? ¿O bién se ha dado demasiada extension á algun principio cierto, apartándolo así de su significacion primitiva y produciendo la confusion y el absurdo? Esto debe haber sucedido, si en las deducciones no se ha faltado á las leyes de una rigorosa lógica: si las consecuencias no son admisibles, forzoso es remontarnos al punto de partida.

"Siempre que medimos hacemos uso de una unidad. Vemos cuántas veces la cantidad que medimos contiene la unidad y llevamos en cuenta la direccion y posicion en que verificamos las mediciones. La unidad que nos sirve para medir es un *tipo*, un *pedazo*, una *parte* de la cantidad que nos ocupa, *con todas sus propiedades*; ópticas si es un rayo de luz, dinámicas si es una fuerza, geométricas si es una longitud. Pero el *número de veces* que la cantidad contiene á la unidad no es cosa real: es un CONCEPTO MENTAL de relaciones, por medio del cual recorremos la escala de la pluralidad: de modo que la UNIDAD EN ESTE SENTIDO es cosa muy distinta de la UNIDAD QUE NOS SIRVE PARA MEDIR: esta *tiene* siempre propiedades ópticas, dinámicas, geométricas, acústicas, etc., etc. y aquella *carece* absolutamente de propiedades de esta especie: su significacion, COMPLETAMENTE ABSTRACTA, es la del primer grado de la serie de los números ó el principio de la escala de la pluralidad: en una palabra, la unidad que sirve para medir está siempre en la region de lo CONCRETO: la unidad que sirve para contar nunca sale de la region de lo ABSTRACTO.

"Para darnos á entender con precision, y distinguir constantemente estas dos especies de unidades designarémos con el nombre de MÓDULO á la cantidad que sirva para medir otras de su especie, como un rayo de luz conocido, una fuerza conocida, un volúmen conocido, un peso conocido etc. y conservarémos el nombre de UNIDAD al primer grado de la escala de la pluralidad, á aquel de los *números abstractos* representativo de la operacion que consiste en tomar una cosa una vez.

"¿No se vé ahora claramente que *bajo el punto de vista abstracto* los números no pueden ser mas que ENTEROS? ¿No se observa que es incomprensible un cuarto de signo, medio ruido; un décimo de vida, que NO PUEDE HABER NADA MENOR QUE LA UNIDAD, que es ininteligible para nuestra razon la frase una casa repetida menos una vez, una moneda repetida menos tres veces, y que es ESENCIAL á la idea de número abstracto el que sea número entero? ¿No se vé ahora claro que desde el momento en que se diga número fraccionario, número negativo, se hace uso de una expresion incorrecta y contradictoria, como blanco negro, ruidoso silencio, cuadratura del círculo, realizacion de lo infinito en lo finito, puesto que lo que puede fraccionarse no es el número sino el módulo, que lo que puede variar de direccion no es el *grado* en la escala de la pluralidad, sino la *direccion* en que llevamos el módulo? ¿Que las expresiones de ***número abstracto negativo, número abstracto fraccionario, número abstracto irracional, número abstracto imaginario*** corresponden á imposibilidades lógicas? ¿Que los símbolos escritos ó hablados del sistema de numeracion no sirven para otra cosa mas que para precisar á qué grado de la escala de pluralidad corresponde una coleccion cualquiera de cosas?

"Por una especie de SINECDOQUE muy natural, pero *si no se tiene siempre en cuenta*, COMO ES POSIBLE Y CIENTIFICO, CONTRARIA ENTERAMENTE AL RIGOR DE LA LOGICA Y FATAL PARA LA EXACTITUD INTRANSIGENTE DE LAS MATEMATICAS, los números, SIMBOLOS REPRESENTATIVOS DE LA OPERACION DE CONTAR, se encuentran *de hecho* en la parte de la ciencia del cálculo que se designa con el nombre de álgebra, constituidos, por los escritos de los autores, EN SIGNOS INDICATIVOS DE LA MAGNITUD DE LAS CANTIDADES, cuyo tipo son los módulos, y además EN CARACTERES DE LA POSICION, O LA EXISTENCIA, O LA ACCION DE ESAS CANTIDADES.

"¿No se sospecha ya, no se concibe ahora claramente que, empleado el número en tres usos tan distintos, sea tal propiedad, lógica en uno de esos usos, absurda cuando se trate de EXTENDERLA á alguno de los otros dos; ó que sea IMPOSIBLE su aplicacion cuando CESANDO DE SER el mismo sea reemplazado por los otros?

"Los autores, cuando definen el número, definen la CANTIDAD y nó la TEORIA DEL ORDEN Y DE LA SITUACION DE LAS COSAS SIN NINGUNA CONSIDERACION A LA

MAGNITUD, segun la feliz objecion de Poinsot. Se define ordinariamente á las matemáticas como la ciencia de las magnitudes en general ó la ciencia de las cantidades y no se estudia el *número en sí mismo*, abstraido de las magnitudes. Hé aquí porqué implica contradiccion la idea aislada de positivo y negativo, puesto que si los números fuesen ESENCIALMENTE POSITIVOS nunca podrian ser negativos, so pena de dejar de ser números, por serles esencial lo positivo: y hé aquí tambien por qué lo que no puede hacerse con el número abstracto es ejecutable sobre el módulo: porque aquello á que se resiste la unidad de numeracion, INVARIABLE É INDIVISIBLE, es posible sobre la unidad módulo, tipo representativo de una cantidad, CONCRETO, VARIABLE Y DIVISIBLE, segun el deseo de cada cual y cuya grandeza y pequeñez nada limita.

"La fórmula

$$x = a\sqrt{2}$$

representa abstractamente una imposibilidad; pero reflexionando dirémos: puesto que $a\sqrt{2}$ no puede ser ni concebido ni practicado numéricamente, investiguémos si sucederá lo mismo con

$$\lambda\sqrt{2}$$

llamando λ la LONGITUD MÓDULO.

"Vemos en seguida que si $\lambda\sqrt{2}$ expresa una longitud realizable podrémos en consecuencia realizar tambien

$$a\sqrt{2}\ \lambda$$

para lo cual bastará repetir a veces, no la longitud λ sino la longitud $\lambda\sqrt{2}$: sabemos á priori que si formamos un triángulo rectángulo en el cual los lados del ángulo recto sean iguales á λ la hipotenusa será tal que su longitud respecto de λ debe expresarse por

$$\lambda\sqrt{2}.$$

"Pero si en lugar de $a\sqrt{2}$ se hubiese tenido $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$ construiriamos análogamente las longitudes $\lambda\sqrt{3}$, $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$,...; porque, en efecto, haciendo la hipotenusa del triángulo precedente, lado del ángulo recto cuyo otro lado fuese λ la hipotenusa de este segundo triángulo seria $\lambda\sqrt{3}$; y, procediendo del mismo modo, obtendriamos $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$,..., $\lambda\sqrt{N}$.

"De lo dicho se deduce:

Que las expresiones

$$N \times 1; N \times 0$$

no son multiplicaciones y que

$$1 \times N; 0 \times N$$

son multiplicaciones; puesto que el 1 y 0 están repetidos N veces;

"Que es esencial á la mayor parte de las cosas creadas el poder ser repetidas y que por consiguiente el multiplicando puede ser concreto y fraccionario;

"Pero que en todos los casos el multiplicador tiene que ser abstracto y entero;

"Y que si, bajo el punto de vista numérico, la ley de que el órden de factores no altera el producto debe admitirse como verdadera, no sucede lo mismo en las aplicaciones de la multiplicacion á las cuestiones concretas, porque la naturaleza de un factor no es TRASMISIBLE á otro.

"Un módulo puede dividirse y subdividirse y volverse á dividir. Si el módulo primitivo es λ, cada una de sus divisiones se expresará por λ' λ'', λ'''...., pero de aquí no se deducirá mas sino que el módulo secundario es menor respecto del primitivo, y que cuando tomémos una fraccion de λ esto es, $\frac{n}{\lambda}$, no harémos mas que tomar un NUMERO ENTERO DE VECES alguno de los módulos secundarios λ' λ'' λ'''.... Multiplicar quebrados es, pues, repetir un número entero de veces un módulo menor, relacionado con el módulo primitivo, y así multiplicar será siempre, conforme á su etimología, repetir y aumentar.

"Detengámonos, pues.

"Mucho sentimos que los límites de esta obra no nos permitan seguir la ilacion de estas ideas sin entrar en pormenores propios solamente de una obra de matemáticas, pero con lo dicho hay lo suficiente para que pueda concebirse una explicacion satisfactoria de las longitudes irracionales, y para que se vislumbre cómo la teoría de las expresiones imaginarias ha podido dar por resultado que $\sqrt{-1}$ es el signo de la perpendicularidad, y tambien para comprender, cómo pueden considerarse lógicamente las cantidades positivas y negativas con relacion á las imaginarias y cómo puede pasarse de lo real á lo imaginario. En suma que es absolutamente necesario admitir en álgebra dos sistemas de numeracion, el uno llamado *cuantitativo* y el otro *ordinal.* Quien desee mas pormenores acuda á nuestra traduccion de la obra de Vallès.

"¿Semejantes contradicciones, tal galimatías, tanta confusion, no merecen ser profundamente estudiadas y cuidadosamente aclaradas para levantar el velo que cubre tantas oscuridades?

"Mientras mas se reflexiona sobre estas materias, menos de admirar es el que tantas inteligencias se muestren rebeldes á los estudios matemáticos;.... ¿quién sabe si los mas lógicos de todos, han de buscarse entre los espíritus que despues de algunos ensayos los han rechazado? ¿Y quién es quien se atreveria á decir que entre los que han cultivado con éxito la ciencia, se hallará uno solo que durante un tiempo bastante largo no se haya visto obligado á admitir como verdades probadas lo que no era aun para él mas que *verba magistri*? Quién sabe, en fin, si hasta el término de su carrera, nuestros mas grandes geómetras han estado mas bien PERSUADIDOS que CONVENCIDOS de la verdad de ciertos principios pasados en autoridad de cosa juzgada?

"Mientras no se haga la distincion debida entre unidad, módulo, y direccion;

"Mientras que los signos de la pluralidad sean representantes de módulos y direcciones;

"Mientras que en la ciencia se continúe afirmando que todo número abstracto es esencialmente positivo;

"Mientras que no se proclame en principio que todo número fraccionario es concreto;

"Mientras que se continúe haciendo diariamente uso, sin dar explicacion ninguna, de cantidades ó de expresiones imaginarias; . . . . . .

"Nunca se tendrá derecho para criticar á los que rehusen comprender, en su conjunto, la exposicion de los principios de la ciencia *y nunca se podrá reprender á los que exijan que las matemáticas* entren en el terreno de que se han separado los autores al sentar sus bases y al exponer sus principios.

"¿Puede ahora quedar duda de la razon que teníamos al decir que es imprescindible dar á los escritores el DERECHO de ser escuchados al criticar los programas, y que al efecto es necesario que estos programas, se conozcan oficialmente si no querémos estadiza ni estancada la instruccion pública y si deseamos que el error no se perpetúe en la enseñanza?

"Mas de un siglo hace que Leibnitz y D'Alembert indicaron la necesidad de marcar con símbolos diferentes la numeracion, los módulos y su estado: en el siglo actual muchos matemáticos filósofos, los Carnot, los Poinsot, los Vallès, han clamado repetidamente por la reforma.... ¿qué se ha conseguido?... Los libros de texto no varian y el error ó lo contradictorio se enseña con todo el aparato de la lógica y la solemnidad de lo científico.

"Y ahora ¿quedará duda de que las matemáticas no deben pedirse á los niños de once años? Si no satisfacen sus teorías á los hombres porqué se tiene de imbuir en ellas á los niños?"

INTRODUCCION.

No son necesarias largas y profundas observaciones para notar que quien por primera vez comunica con novedad el fruto de sus meditaciones, se halla expuesto á encontrar dos poderosos obstáculos: primero, la incredulidad que niega la realidad ó al menos la importancia de los nuevos descubrimientos, y despues ese antagonismo hostil á todo lo nuevo, cuyas variadas causas son quizá difíciles de apreciar en su justo valor, pero cuyo seguro efecto es atribuir á los autores muertos todo el mérito que pueda tener el trabajo útil de los autores vivos.

Natural es ciertamente que se acojan con alguna desconfianza las ideas nuevas, y hasta es necesario que estas ideas sean examinadas por todos con una prudente reserva y con esa disposicion de ánimo que reclama la prudencia de la duda.

Pero apenas se comprenderia, si no nos lo testificase la experiencia diaria, cómo hombres de un mérito incontestable se resisten á creer la realidad de las innovaciones anunciadas y la de sus consecuencias, aun antes de haberse tomado la molestia de examinarlas. Encerrándose en una oposicion sistemática, proclaman antes de todo exámen y antes de todo debate, que no pueden tener confianza en las nuevas doctrinas, y pasma, en fin, cómo en la ciencia exacta por excelencia, sustituyendo al método lógico la inspiracion de algunas preocupaciones, responden con una negacion á convicciones matemáticamente formuladas.

Con respecto á esto puedo unir mi propia experiencia á la experiencia de lo pasado, pues todas las tentativas que he hecho para difundir las ideas expuestas en esta obra han tropezado en el primer obstáculo que acabo de indicar.

¿Sucederá lo mismo con el segundo? Y si es dado á este trabajo obtener honrosos sufragios, ¿no atribuirán algunos á otro y no á mí el mérito de las ideas que contiene? Seria hacerme ilusiones no esperar semejante resultado. Pero, con respecto á este particular, séame lícito presentar algunas observaciones.

¿A quién se debe atribuir la propiedad real de una idea? ¿A quien haya hablado de ella en términos mas ó menos vagos sin conocer toda su extension, y sin haberla quizá sometido á pruebas de raciocinio ó de experiencia? ¿O á quien, examinándola bajo todas sus fases, estudiándola en todas sus relaciones, comprendiendo todas las necesidades de su existencia, todas las condiciones de su extension, toda la fecundidad de sus aplicaciones, la hace penetrar en la ciencia con todas sus consecuencias, sostenida por raciocinios incontestables, generalizada cuanto lo consiente su naturaleza, sancionada por las concluyentes pruebas de la experiencia, formulada, en fin, segun las exijencias de una verdadera teoría?

La respuesta á esta pregunta no puede ser dudosa; pues si bastase haber pronunciado algunas palabras con motivo de una doctrina ó de un principio, para gozar todo el mérito de su descubrimiento, seria necesario renunciar en este mundo al poderoso móvil de la emulacion, y al legítimo deseo de ilustracion que inclina al hombre al estudio y las meditaciones, pasion honrosa que impele incesantemente á la raza humana hácia las fuentes de la verdad.

No se me objete, pues, para quitarme todo mérito, que otros, antes que yo, han meditado sobre los asuntos de que esta obra trata, ó que ya hay publicados algunos opúsculos sobre tal materia. Que, por ejemplo, se han intentado ensayos de interpretacion de las expresiones imaginarias, y que el hecho capital en que descansa esta interpretacion, y por el cual se establece que en geometría el signo $\sqrt{-1}$ representa la perpendicularidad, está propuesto ya hace tiempo á la consideracion de los geómetras.

La respuesta á estas observaciones es fácil: mucho menos se trata en efecto de este principio en sí mismo que de los medios de conviccion que ha sido necesario descubrir para hacerlo admitir en el número de las verdades matemáticas, é importa menos tambien haber entrevisto una relacion entre el signo de las imaginarias y la perpendicularidad, (lo que no hace mas que conexionar con el álgebra la ciencia geómetrica) que haber demostrado que podia existir una relacion del mismo género para otras cantidades *distintas* de las longitudes, y aplicarlo todo á estudios diferentes de los de las líneas y los ángulos.

Tengo, además, que añadir otra cosa mucho mas concluyente: en efecto ¿no ha sucedido que cuanto se ha escrito sobre este asunto tiene que mirarse solo como una presuncion, tanto menos admisible cuanto que los razonamientos en que se apoya son enteramente falsos? (1) Por eso, pues, no es de admirar que desde el momento en que estas tentativas vinieron á fijar la atencion de los geómetras, quedáran abandonadas á su esterilidad, sin disipar ningunas dudas, y sin corregir nada de lo pasado, por ser incapaces de producir algo para el porvenir.

Quizá se me objete tambien que talentos de primer órden han significado en varias ocasiones lo indispensable de introducir en el estudio de la ciencia la distincion de que es objeto el capítulo primero de esta obra, y en virtud de la cual se debe evitar cuidadosamente la confusion entre el número que se emplea como signo de la operacion de contar y el número que sirve de signo representativo del tamaño de las cantidades.

No quiera Dios que deje yo de conocer la verdad de semejante observacion. Lejos de eso declaro que si alguna confianza tengo en la vitalidad de lo que he escrito, es porque su objeto y las consecuencias que de él se deducen, están conformes enteramente con esas mismas indicaciones á que hago alusion.

Mr. Poinsot, pues este nombre cuando se trata de la filosofía de las ciencias matemáticas es el primero que ocurre, Mr. Poinsot, cuyas palabras cito á menudo en esta obra, ha llamado desde hace mucho tiempo la atencion de los geómetras hácia la importante distincion que acabo de recordar, aunque añadiendo que *los elementos de esta teoría nueva y profunda apenas nos son conocidos*.

---

(1) El capítulo 4.º de esta obra contiene la refutacion de las teorías emitidas con este motivo.

En una lectura reciente hecha en la Academia de las ciencias, (véase mas adelante) ha renovado sus tentativas para demostrar los inconvenientes que resultan del olvido ó de la omision de la distincion de que se trata.

Pero esa lectura del sabio académico, cuyo mérito é importancia bajo el punto de vista crítico no se puede cuestionar, no reune ni con mucho las mismas cualidades considerada bajo el aspecto de la organizacion y de la verdadera constitucion de las doctrinas científicas.

Permítanseme aquí sobre este punto algunas observaciones, aun cuando han sido ya publicadas.

Si las reflexiones de Mr. Poinsot son admisibles bajo el punto de vista teórico, lo cual no puede cuestionarse con fundamento, falta mucho para considerarlas como un medio de realizacion práctico. El autor observa un vacío y lo designa; entrevee algunas relaciones entre dos ramos de las matemáticas y las indica; pero no nos dice cómo podrá llenarse ese vacío, ni cómo los que en adelante se dediquen al estudio de las matemáticas huirán el escollo que muestra, ni cómo la ciencia de los números, tal cual la concibe, pasará á la enseñanza, ni cómo, en fin, evitarémos que se confunda con la de las magnitudes y por qué medios la distinguirémos de esta, no solo bajo el punto de vista absoluto sino tambien bajo el punto de vista relativo que conduce á la consideracion de las cantidades llamadas *positivas* y *negativas*. ¿Y qué seria si yo añadiese *imaginarias?* En una palabra, Mr. Poinsot prueba sin réplica que estamos en mal terreno, pero no me parece que nos da á conocer nada de ese estado futuro en que debemos constituirnos para salir de tan mala situacion.

En prueba de la verdad de estas aserciones presentaré la tentativa que hace para dar una explicacion filosófica de la existencia necesaria de las n raices de una ecuacion del grado n. Mucho temo que, sin explicaciones ulteriores, estén los geómetras mas dispuestos á dudar aun (como dudaba d'Alembert) que á acojer sin reserva las razones por las cuales Mr. Poinsot trata de establecer que esta multiplicidad está en la naturaleza de las cosas.

He aquí los motivos de esta opinion.

Sucede muy á menudo que las raices de las ecuaciones son imaginarias, y no hay que olvidar que para todo algebrista la forma imaginaria no se comprende, ni se explica, ni se interpreta: es un misterio. Ahora bien: admito con Mr. Poinsot que en una cuestion, la ecuacion obtenida no contiene ninguna imperfeccion respecto del enunciado; en una palabra, que es la misma cuestion perfectamente formulada. Siempre resultará muy difícil, si nó imposible, concebir cómo una cuestion, algunas veces muy simple, muy comprensible en el lenguaje vulgar, y en cuya enunciacion todo es claro, cómo, digo, esta cuestion transformada en lenguaje algebraico, acaba por llevarnos por una parte á respuestas tan claras, tan fáciles de comprender como su enunciacion; y por otra parte, á respuestas oscuras, misteriosas, que nos vemos obligados á considerar sin sentido real: en una palabra, á respuestas imaginarias. Pues bien: mientras no se me haga comprender en qué puede consistir esa singularidad del álgebra que transforma una expresion, esto es, una idea real en una idea imaginaria, me será imposible ver claro en esa multiplicidad de respuestas dadas á una misma cuestion, y continuaré aceptándolas como un *hecho algebráico;* pero sin poder ver en ellas *una consecuencia necesaria de la naturaleza de las cosas.* La explicacion de esta singularidad de que hablo aquí, y, por tanto, la interpretacion de las expresiones imaginarias, es la verdadera solucion filosófica de la cuestion presentada por Mr. Poinsot.

Permítaseme mostrar con un ejemplo muy sencillo la importancia de las reflexiones que acabo de exponer, y cómo, su aplicacion á las cuestiones mas elementales, puede introducir la duda en algunos principios tenidos por inconcusos.

Si se pide el lado del cuadrado cuya superficie es S, esta cuestion conducirá á una ecuacion de segundo grado, de la que se deducirán por valor del lado pedido las dos expresiones (1)

$$+\sqrt{S}, -\sqrt{S}.$$

La cuestion presenta, pues, dos soluciones. En virtud de los principios admitidos en álgebra, hay que aceptar como una necesidad estas dos soluciones: ámbas son realizables por los procedimientos geométricos, y ámbas, en fin, son reales.

Pero si se pide ahora el lado del cubo cuyo volúmen es V, esta cuestion conducirá á una ecuacion de tercer grado, de la cual se deducirán para el lado pedido las tres expresiones

(1) Calcúlo segun los métodos ordinarios del álgebra, segun los usos generalmente adoptados; pues en las cuestiones que trato aquí no acepto por mi cuenta esta doble interpretacion: véanse con respecto á esto las objeciones que presento en el capítulo 1.° y las explicaciones mas detalladas sobre el cálculo de los signos que se producirán en la segunda parte de esta obra.

$$+\sqrt[3]{V}, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{V}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{V},$$

una sola de las cuales es real.

Ahora bien: dejando á un lado las consideraciones de análisis puro, para profundizar la cuestion en sí misma, ¿no ha de sorprendernos que cuando se trata de construir un cuadrado igual á una superficie dada, haya dos líneas *reales* que resuelven la cuestion, y que cuando se trata de formar un cubo que contenga un volúmen determinado, no haya mas que una solucion real? ¿No aparecerá esta circunstancia mas sorprendente aún, cuando se observe que la segunda cuestion, la del cubo, contiene implícitamente la solucion de la primera; pues pedir el lado de un cubo cuyo volúmen sea V es pedir tambien el lado de un cuadrado cuya superficie sea $\sqrt{V^2}$, cuyo cuadrado no es otra cosa que la base del cubo pedido? Así, para construir este cuadrado habrá dos soluciones *reales*, ¡y para formar el cubo de que este cuadrado puede considerarse como base, no hay mas que una solucion posible? En vez de estas dos soluciones, cuyo sentido es accesible á nuestra razon, y cuya realizacion geométrica es fácil, hallamos tres, de las cuales una sola puede ser practicada, siendo las otras dos una imposibilidad para nuestra razon. ¿En qué confusion no caemos?

Y sin embargo, estas dos cuestiones están contenidas una en otra. Bajo el punto de vista geométrico ó concreto, el eslabon que las encadena es sencillo, evidente, realizable, y por consiguiente muy real; ¿cómo, pues, sucede que su traduccion en lenguaje algebráico haga imaginaria esta trabazon? ¿Cómo las combinaciones analíticas pueden alejar una respuesta muy real, que desde ahora parece completamente anexa á la cuestion, para sustituirle, no ya una, sino dos respuestas cuya interpretacion no puede hacerse? En presencia de estos hechos hay que humillarse y reconocer que nos faltan explicacio-ciones sobre este punto, y que lo que se enseña en nuestros libros sobre los exponentes no constituye todo lo que es necesario saber acerca de ellos.

Concluyamos, pues, que la verdadera filosofía no puede iluminar con su antorcha las incertidumbres matemáticas sino con la condicion de hallar las relaciones, los lazos, las trabazones que unen lo real á lo imaginario; porque, bajo este concepto, el análisis puro y sencillo, que se limita á considerar los hechos aislados sin tener por objeto eslabonarlos, es estéril é impotente, y empecemos ya á reconocer la verdad de esta máxima, nueva hoy, pero que mañana será vulgar: NO PUEDE HABER MENOS ENSEÑANZA EN LA VERDADERA FILOSOFÍA DE LA CIENCIA QUE EN LAS FÓRMULAS ALGEBRAICAS.

Esta crítica de los trabajos producidos hasta este dia, puede servir de introduccion á las materias contenidas en este escrito, pues la investigacion de lo que falta á las obras de los geómetras que me han precedido, tanto respecto del rigor de los raciocinios como respecto de su generalidad, forma realmente el carácter especial de esta obra.

Ahora añadiré algunas palabras sobre el órden y la naturaleza de los objetos estudiados en esta *primera parte.*

En el capítulo primero expongo mis ideas sobre los principios que rijen la representacion de las cantidades en la ciencia del cálculo, así bajo el aspecto de su *magnitud* como bajo el de su *órden*, ó el de su *modo de existencia* ó de *accion*. Insisto sobre la consideracion de que esta representacion es COMPLEXA, porque se compone de un número y de una cantidad de la misma clase que la de que uno se ocupa, tomada por término de comparacion entre todas las de su misma especie; demuestro lo inconveniente de llamar UNIDAD á esa cantidad tomada por término de comparacion, y, para evitar toda confusion, propongo que se llame MÓDULO.

En seguida, hago ver que, siendo complexa la representacion de las cantidades, no quedará todo resuelto, contentándonos con examinar si las operaciones de cálculo á que haya de someterse la expresion de una cantidad, podrán ejecutarse sobre el número que figura en esta expresion: añado, que para quedar completamente dilucidado el asunto, será preciso tambien examinar si las operaciones, incomprensibles sobre el NÚMERO, podrán ser comprendidas perfectamente y practicadas sobre el MÓDULO: observacion tan sencilla como natural, cuyo olvido ha hecho nacer tantas incertidumbres en la ciencia, pero cuya aplicacion debe desvanecer mil dificultades, disipando por su claridad casi todas las dudas.

Estas primeras reflexiones demuestran que, puesto que el NÚMERO y el MÓDULO tienen cada uno su parte en la representacion de las cantidades, es indispensable para obtener una interpretacion racional é infalible de las expresiones algebráicas estudiar INDIVIDUAL Y SEPARADAMENTE las propiedades de los números y las de los módulos. Y estos son los objetos de los capítulos segundo y tercero.

En el segundo supongo que el NÚMERO está esencial y únicamente destinado á representar la operacion de CONTAR y que en su consecuencia es LA ABSTRACCION DE TODA CANTIDAD. Intento dar una definicion del número considerado bajo el único concepto de *pluralidad*, y pruebo la insuficiencia, ó, por mejor decir, la ausencia total de definicion del número, considerado en este sentido, en los varios escritos que tratan de la ciencia del cálculo.

Despues, examinando las operaciones fundamentales de la aritmética, dispuestas por grupos de operaciones directas é inversas, digo, al ocuparme de la adicion y de la sustraccion, cómo han podido introducirse en aritmética las ideas de *positivo* y *negativo*, y combinarse con la de número: critico algunos asertos acreditados desde hace mucho tiempo, y deduzco que en la region de lo abstracto, tal como lo entiendo y como lo he definido, el NÚMERO NEGATIVO ES UNA IMPOSIBILIDAD. Al hablar de la multiplicacion y de la division, despues de haber insistido sobre la verdadera naturaleza de los factores en una multiplicacion, combato los errores admitidos con motivo de la definicion de esta operacion, y establezco que, desde el punto de vista en que me hallo colocado en este capítulo, hay que considerar EL NÚMERO FRACCIONARIO COMO UN NUEVO CASO DE IMPOSIBILIDAD.

En fin, al tratar de la elevacion á potencias y de la extraccion de raices, presento algunas consideraciones sobre la naturaleza de la doble cuestion que se presenta, cuando por medio de cada operacion inversa queremos volver á los elementos de la operacion directa que le corresponde. Estas consideraciones conducen á la consecuencia de que es menester admitir dos especies muy distintas de expresiones negativas, fraccionarias é irracionales, la primera de las cuales se refiere á los números *sobre que se opera*, y la segunda á los números *operadores*. En fin, llego á la consecuencia de que, como en los casos precedentes, los NÚMEROS IRRACIONALES SON TAMBIEN SÍMBOLOS DE IMPOSIBILIDAD.

En el tercer capítulo estudio los módulos, sus modificaciones, y sus transformaciones. Aplico estos estudios á las longitudes, pero fácilmente comprenderá el lector que todas las observaciones, y todos los raciocinios que aduzco son aplicables á cuantas cantidades gocen de propiedades análogas á las de las longitudes, porque *sobre la existencia general de estas propiedades* y no *sobre la existencia individual de la longitud*, descansan esencialmente las bases de todas mis demostraciones.

Hago ver que, porque la longitud goza la propiedad de que el entendimiento puede concebirla dividida indefinidamente, la existencia de una expresion fraccionaria en el estudio de las longitudes no implicará ni contradiccion ni imposibilidad; que, en verdad, la division continuará siendo IMPRACTICABLE SOBRE EL NÚMERO que figure en la expresion, pero que será EJECUTABLE SOBRE EL MÓDULO, realizando así la solucion obtenida.

Hago ver, además, que, porque las longitudes gozan de la propiedad de que en ciertas figuras de geometría las relaciones que las eslabonan se expresan por números irracionales, sucederá aquí, como en el caso precedente, que la existencia de la forma irracional en el estudio de las longitudes, no implicará ni contradiccion ni imposibilidad; que, en verdád, la extraccion de la raiz continuará siendo IMPRACTICABLE SOBRE EL NÚMERO que figure en la expresion, pero que será EJECUTABLE SOBRE EL MÓDULO, realizando así la solucion obtenida.

Pasando á consideraciones de otro órden, estudio lo que sucederá en los cálculos cuando aparezcan el infinito ó cero.

Insisto sobre el punto de que no deben confundirse las expresiones *infinito* y *cero* con las expresiones *infinitamente grande* é *infinitamente pequeño*, pues estas son esencial y únicamente concretas, esto es, aplicables solo á cantidades, mientras las primeras pueden á la vez aplicarse á las cantidades y á las operaciones abstractas de la ciencia del cálculo. Digo qué sentido debe darse á las primeras, y, analizando la misma cuestion con respecto á las segundas, llego á la consecuencia de que en el estudio de las cantidades las consideraciones de infinitamente grande é infinitamente pequeño no implican las mas veces ni contradiccion ni imposibilidad; que, en verdad, lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño continuarán siendo INCOMPRENSIBLES é IMPRACTICABLES sobre el número que figure en la expresion; pero que las mismas ideas APLICADAS AL MÓDULO nos conducirán á concepciones REALIZABLES. Ahora deberemos proponernos la cuestion de saber lo que sucederia en la suposicion de que el módulo fuese infinitamente pequeño ó infinitamente grande, lo cual conduce muy á menudo NO A CERO, NO AL INFINITO, sino á MÓDULOS que con relacion al primero tiene constituidos la naturaleza en un estado relativo de pequeñez infinita ó de grandeza infinita; y, en virtud de estas consideraciones, podremos realizar, ó al menos comprender en muchas circunstancias lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño.

Tales son las consideraciones que he desenvuelto en la primera seccion de este capítulo, con motivo de la longitud considerada bajo el concepto de la magnitud ó de la pequeñez. En la segunda seccion de este mismo capítulo, la considero con independencia de todo tamaño, EN SU MANERA DE SER, EN SU DIRECCION.

Primeramente examino el caso en que dos direcciones son opuestas una á otra, y llego, á consecuencia de este estudio, al resultado de que la expresion negativa de una longitud se interpreta SIN DIFICULTAD, aplicando no al *número* sino al *módulo* el signo negativo; y esto porque el módulo goza de la propiedad de existir de dos modos, tales, que el uno es inverso del otro, como la sustraccion es inversa de la adicion. Generalizando en seguida lo que pudieran ofrecer estas consideraciones de particular para ciertas inteligencias, establezco que, en general, la oposicion en el modo de existir se reconoce en el carácter siguiente: «Dos cantidades, entre las que existe oposicion, se destruyen, relativamente á aquel de sus efectos cuyo estudio se hace actualmente, por su union ó por su adicion material y física, cuando por otra parte estas cantidades, consideradas aisladamente, tienen el mismo valor absoluto.»

Paso en seguida al caso en que dos direcciones son perpendiculares una á otra, y pruebo que, estando las dos direcciones directa é inversa caracterizadas por los factores $+1$ y -1, es menester que la direccion perpendicular lo esté por el factor $\sqrt{-1}$, lo que contiene en principio la interpretacion de las expresiones imaginarias. Añado, en fin, que, en general es preciso decir·

«Cuando una especie de cantidad posea entre »los dos estados contrarios que se llaman positivo »y negativo, un TERCER ESTADO INTERME- »DIO, y cuando este tercer estado sea tal que si, »despues de haber hecho para obtenerlo ciertas »operaciones sobre el estado positivo, sucede que, »despues de repetir sobre este ESTADO INTER- »MEDIO las mismas operaciones y en el mismo ór- »den, se pasa al estado negativo, este tercer estado »deberá caracterizarse en álgebra por el factor »$\sqrt{-1}$.»

En fin, la consideracion del caso en que dos direcciones forman entre sí un ángulo cualquiera α, conduce á la consecuencia de que, estando caracterizada una de ellas por el factor $+1$, la otra deberá estarlo en el cálculo por el factor $\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha$; lo cual completa la interpretacion de la forma imaginaria en las consideraciones concretas.

Puede decirse, pues, que los estudios contenidos en los capítulos II y III abarcan todo lo relativo á la representacion de las cantidades, y así se verá, que cuantas expresiones hay conocidas en álgebra pasarán en este exámen á nuestra vista recibiendo sucesivamente su verdadera significacion.

Estámos ya, pues, en posesion de los materiales necesarios para constituir bajo el punto de vista mas SENCILLO, mas NATURAL, mas LÓGICO, la enseñanza matemática. Y ¡cosa notable y digna de ser meditada! para establecer esta constitucion en cuanto tiene de mas completo, nos ha bastado interrogar nuestra razon sobre las consecuencias de los principios *mas elementales* de la ciencia: los de la representacion de las cantidades en el cálculo. Consideracion tan sencilla en apariencia que sin duda á su misma sencillez debe atribuirse el olvido en que yacia, pero tan fecunda en realidad, que, apenas ha entrado en esta via, se siente el geómetra conducido sin esfuerzo y casi instantáneamente hácia las regiones mas elevadas del análisis matemático, y hácia las formas algebráicas menos comprendidas hasta hoy. Así ¡qué admiracion no embarga el entendimiento cuando, concentrándose en sí mismo, llega á conocer cuan pocos esfuerzos necesitaba para descorrer el velo de tantas tinieblas, y cuan poca ciencia era menester para comprender y explicar cuanto la inteligencia de los sabios no podia entender ni interpretar!

Pero yo no podia terminar mi libro sin dedicar la mas séria atencion al exámen de una teoría presentada hace años sobre la interpretacion geométrica de las expresiones imaginarias, y mucho menos sin hacer aplicaciones de los principios expuestos en los primeros capítulos.

Así, pues, en el capítulo IV combato la teoría de las imaginarias presentada por varios geómetras; manifiesto el vicio de las demostraciones aducidas; rectifico sus errores, y reconstituyo los principios de esta teoría bajo el concepto puramente algebráico.

En este exámen me veo obligado á expresar dudas que vienen á corroborar las de que ya he hablado en el curso de esta introduccion con motivo del cálculo de los signos.

Y, en fin, en el capítulo V presento varias y notables aplicaciones de los principios que dejo establecidos.

Con respecto á estas aplicaciones, me he considerado en la obligacion de producirlas en gran número para dar desde luego una idea ventajosa del mecanismo, por medio del cual la enseñanza de la teoría desenvuelta en esta obra, deberá comprenderse y utilizarse en la práctica. Pero, una vez conseguido este objeto, todo lo que actualmente hubiera escrito, podia mas bien considerarse, y con razon, como una repeticion cansada. La segunda seccion del capítulo V está destinada sobre todo á dar una idea de este mecanismo.

Pero al mismo tiempo importaba demostrar que mi nueva teoría, mas ó menos simple que la antigua en sus procedimientos de investigacion, poseia incontestablemente sobre ella la preciosa ventaja de ensanchar para las expresiones algebraicas el campo de la REALIDAD, y de dar á las expresiones tenidas por imaginarias en el terreno de la abstraccion, una EXISTENCIA REAL, una forma determinada y una significacion precisa, igualmente accesible á nuestros sentidos que á nuestra razon. Tal es el carácter de las aplicaciones tratadas en la primera seccion del último capítulo.

Por lo demás, las aplicaciones que pueden hacerse de los principios expuestos en el curso de esta obra, son tan numerosas, tan generales, que no hay un ramo de la ciencia del cálculo en que no se puedan realizar; y si quisiera llevar mas lejos este exámen, tendria que presentar un trabajo de verdadera reforma de todos los métodos de exposicion: pero no es este el objeto que me he propuesto en la primera parte de esta obra; objeto que, por otra parte, no podria tratarse convenientemente sin algunos preliminares.

En efecto, no basta haber hallado un nuevo camino para deducir inmediatamente que es preferible al antiguo; es menester ante todo volver atrás, recorrer de nuevo esa antigua via, examinar todos sus pormenores, señalar todas sus imperfecciones; y solo despues de tal investigacion será posible hacer una eleccion racional, apreciando con exactitud todas las ventajas que deben ofrecer los nuevos procedimientos, tanto para la exposicion de lo que ya se sabe, como para descubrir lo que nos queda por saber. A esto consagraremos la segunda parte de esta obra (1).

Pero antes de dar al público las numerosas consecuencias á que me han conducido todas estas investigaciones, séame permitido detenerme un instante, pues el espíritu del hombre no es infatigable.

Además, experimento la necesidad de consejo sobre la importancia de este primer trabajo, y el tanto de mérito que deba concedérsele; materia sobre la cual así deseo la crítica como la alabanza, pues si esta es un poderoso móvil para crear, la primera es un estímulo esencial para la perfeccion.

(1) No ha salido aun á luz.

ESTUDIOS FILOSÓFICOS

SOBRE

LA CIENCIA DEL CÁLCULO.

> Los resultados trascendentales del cálculo son, como todas las abstracciones del entendimiento, signos generales cuya verdadera extension no se puede conocer sino *subiendo por medio del análisis metafísico hasta las ideas elementales que han conducido á él*, lo que ofrece á menudo grandes dificultades, pues al espíritu humano le es mas fácil dirijirse adelante que replegarse en sí mismo.
>
> (LA PLACE, *teoría analítica de las probabilidades.*)

CAPITULO PRIMERO.

DE LA NECESIDAD DE ESTABLECER UNA DISTINCION PRECISA EN EL ESTUDIO DE LOS NÚMEROS, SEGUN QUE SE EMPLEEN COMO SÍMBOLOS DE LA OPERACION DE CONTAR Ó COMO SIGNOS REPRESENTATIVOS DE LA MAGNITUD DE LAS CANTIDADES.

Dudas y objeciones en la ciencia del cálculo.

Si es cierto que la ciencia del cálculo, bajo el punto de vista lógico, debe colocarse en el primer lugar de todas las ciencias, si cada paso que se dá en su estudio se apoya en las reglas severas de un razonamiento siempre rigoroso, si, en una palabra, la expresion *verdad matemática* es de hecho en el lenguaje vulgar el prototipo de todo principio sobre el que no es permitido cuestionar ¿no debe parecer extraño que haya llegado á introducirse la duda en doctrinas al parecer inatacables? ¿No es sorprendente que pueda establecerse la controversia, y hasta permitirse, en teorías elaboradas segun todas las exijencias de lo verdadero?

Se concibe que semejantes vacilaciones tuviesen en suspenso los ánimos en los momentos de empezar á nacer una de las ramas del cálculo. Los primeros pasos que dan los hombres para descubrir la verdad son muchas veces errores, y aun en matemáticas la sancion de la experiencia no ha sido inútil para confirmar la exactitud de ciertos resultados. (1) Pero cuando el espíritu humano se halla en posesion hace tantos años de principios reputados como verdaderos, cuando esa experiencia de que acabo de hablar no es la de un dia, cuando tantas aplicaciones han proclamado la verdad de estos principios, parece que una duda debe destruirse tan pronto como se suscite, y que una discusion puede promoverse, pero no ser de larga duracion.

—*¿A qué causas deben atribuirse estas incertidumbres?*

¿Habrá algun misterio oculto en esos límites lejanos de la ciencia hácia los cuales se dirijen ahora las investigaciones de los geómetras? ¿Y debemos esperar su revelacion antes que una luz bienhechora deje ver lo que

---

(1) Dice La Place que puede considerarse el paso de lo positivo á lo negativo, de lo real á lo imaginario, como un medio de descubrimiento igual á la induccion y á la analogía, empleadas desde hace mucho tiempo por los geómetras, primero con una extremada reserva y despues con una entera confianza, por *haber justificado su uso gran número de ejemplos.*—Sin embargo, siempre es necesario confirmar con demostraciones directas los resultados obtenidos por estos diversos medios.—(*Teoría analítica de las probabilidades:* introduccion, pág. 34, 3.ª edicion.)

son y lo que valen las objeciones suscitadas por la filosofía de la ciencia?

¿O bien hemos de buscar la causa de todas estas dudas en algun principio desconocido ú olvidado, ó cuya accepcion verdadera, apartada de su significacion primitiva, ha tenido inoportunamente demasiada extension ó demasiada restriccion?

Por mi parte estoy dispuesto á creer que ha de atribuirse á este último motivo, porque las reglas del raciocinio no pueden cambiar los principios; y, en efecto, si está reconocido que no se ha faltado á las leyes de la lógica, si las consecuencias se han deducido rigorosamente, y si estas consecuencias sin embargo parecen dudosas, preciso es que la duda venga del punto de partida, y solo volviendo hácia él podrémos descubrir las causas de las contradicciones observadas.

Ahora bien, y fijémonos en esto, ¿desde el instante en que nos encontramos con las expresiones fraccionarias y negativas, no vienen á asediar las dudas nuestro entendimiento, ó al menos no se deja sentir cierta falta de precision? ¿En cuanto empezamos á hacer uso de esas mismas expresiones fraccionarias ó negativas en la elevacion á potencias ó extraccion de raices, no tenemos que habérnosla con *dos palabras* algo distantes por cierto de cuanto sugiere ideas exactas, y que, sin embargo, se han domiciliado en el lenguaje de las ciencias exactas (1)? ¿Y, en fin, desde que se empieza la exposicion del cálculo diferencial é integral, las expresiones de infinitamente grande é infinitamente pequeño, llamadas en nuestro auxilio para completar el estudio de los tamaños, no se ostentan como un verdadero escollo para las inteligencias, como causa de disgusto

(1) ¿Hay en efecto nada mas antilógico que la palabra IRRACIONAL, ó algo menos exacto que la palabra IMAGINARIO?

y repulsion quizás hácia la ciencia de las *magnitudes*, y como fuente inagotable de objeciones, que nó por echarse constantemente á un lado, dejan de tener una triste realidad?

Sin embargo, en medio de todas estas incertidumbres el entendimiento humano camina siempre adelante; y si, á pesar de estas trabas, consigue grandes y hermosas revelaciones, si del número de resultados obtenidos solo algunos están sujetos á controversia, ¡cuántos progresos no habria realizado y hasta qué límites no se hubiera dilatado el campo de la ciencia, si una viva luz hubiese dirigido constantemente su marcha, iluminando los objetos sometidos á sus investigaciones!!

—Medio propuesto para resolverlas.

Como se vé, estas consideraciones nos conducen, menos á las TEORIAS DETALLADAS de que se ocupa la ciencia de la cantidad que á la FILOSOFIA GENERAL de esta ciencia; pues en el punto en que estamos rara vez se ocultará mucho tiempo á nuestro atisbo un artificio inconsistente del cálculo, toda vez que lo que nos falta es una ley general, que, por su sola y simple enunciacion, tenga un poder de creacion mayor que el que es dado á todo un volúmen de fórmulas referentes á casos particulares.

Si no he padecido ilusion en los estudios á que me han conducido todos estos pensamientos, si los resultados á que he llegado son la verdadera expresion de LO QUE ES, esa ley general es simple como todas las leyes naturales y se resume en estas palabras:

"Siempre que en una cuestion de la ciencia del cálculo no se *comprenda* la operacion que haya de hacerse sobre una cantidad, téngase presente que la EXPRESION de toda cantidad debe componerse de DOS COSAS; primeramente un NUMERO y despues UNA CANTIDAD de la misma especie que la que se toma por término de comparacion. En tal supuesto, investíguese si la operacion cuyo sentido no se comprende PRACTICANDOLA SOBRE EL NUMERO, se comprenderia perfectamente y seria realizable PRACTICANDOLA SOBRE ESA CANTIDAD tomada por término de comparacion, y que *no por estar sobreentendida* deja de subsistir en la EXPRESION de la cantidad." El resultado de esta investigacion será la explicacion de muchas dificultades, la disipacion de casi todas las dudas.

A LA EXPOSICION DE ESA LEY ESTÁ CONSAGRADA ESTA OBRA: si no me he engañado respecto al grado de importancia que á tal ley debe concederse, y sobre la utilidad de los resultados á que me ha conducido, esta exposicion será una confirmacion incontestable de la verdad proclamada al frente de estos estudios: "no hay menos enseñanza en la verdadera filosofía de la ciencia que en las fórmulas algebraicas."

—Representacion de las cantidades en la ciencia del cálculo.

Por poco que se medite sobre el modo de representar las cantidades, no se tarda en conocer que es preciso de antemano ESCOJER una en cada especie, destinada á servir de término de comparacion entre todas las de la misma especie; que, hecho esto, hay que averiguar cuantas veces se ha de REPETIR la cantidad elegida para obtener aquella cuya expresion se desea; y, en fin, que cuando se ha determinado este "número de veces," puede decirse que la cantidad de que se trata está expresada por la que se ha tomado por término de comparacion, repetida tantas veces como indica el número en cuestion.

—Dos especies de unidad.

Esta cantidad tomada por término de comparacion entre todas las de una misma especie se llama ordinariamente UNIDAD; pero se vé que, en este caso, la palabra unidad debe tener un sentido ENTERAMENTE DISTINTO del que se le atribuye cuando sirve para representar la operacion de tomar una cosa una vez; pues en este último caso la palabra UNIDAD tiene una significacion COMPLETAMENTE ABSTRACTA: porque solo sirve para designar el primer grado de la série de los números, siendo por tanto el *principio* de la escala de la pluralidad.

En el otro caso, al contrario, lo que se llama unidad, permanece completamente *en la* REGION DE LO CONCRETO, es, siempre, un tipo, un trozo, una muestra, de la cantidad de que nos ocupamos, con todas las cualidades que dependen de su naturaleza: por ejemplo, con todas las propiedades ópticas si es un rayo de luz; dinámicas si es una fuerza; geométricas si es una longitud etc.

—Inconvenientes de la no adopcion de estas dos unidades.

Ahora bien, ¿no es evidente que emplear así la misma palabra para expresar dos ideas tan completamente distintas es exponerse á esenciales equivocaciones? Quizás se diga que contra estas falacias nos encontraremos siempre armados, no perdiendo nunca de vista la distincion que acabamos de hacer. Pero ¿quién podrá estar siempre seguro de no olvidar nunca esta distincion en el rápido uso que hay que hacer de estas dos importantes expresiones? Las palabras en el lenguaje de la ciencia, como en el lenguaje ordinario, tienen gran influencia sobre nuestras ideas, y á pesar nuestro nos dejamos fascinar por ese disimulado influjo, hasta el punto de caer en el error, cuando creemos con íntima conviccion no habernos separado de la verdad.

Y para dejar demostrado desde ahora que, por desgracia, es demasiado real lo que solo he querido presentar al empezar como hipotético, me bastará hacer notar que ha sido un grave asunto de controversia la famosa cuestion:

¿Hay algo por debajo de la unidad?

Sin entrar desde luego en su exámen ¿no aparece con toda evidencia que si la palabra unidad se hubiese destinado á significar en la REGION DE LO ABSTRACTO *el primer grado de la escala de la pluralidad*, jamás se le habria ocurrido á nadie el proponer semejante cuestion, ni aun siquiera el suponer que valia la pena de una discusion acalorada y séria?

—Definicion del módulo.

Pero si el doble uso contra el cual clamo ha podido ser, y ha sido realmente un perpétuo manantial de errores, hagamos desde ahora lo que hubiera debido hacerse desde el principio: convengamos 1.° en RESERVAR EXCLUSIVAMENTE la palabra UNIDAD para expresar aquel de los números abstractos representativos de la operacion que consiste en TOMAR UNA COSA UNA VEZ, y 2.° en llamar MODULO de una especie de cantidad aquella de esas cantidades que se ha CONVENIDO en tomar por término de comparacion entre todas las demás de la misma especie.

De donde resultará: que si yo designo para una misma especie de cantidades el módulo por μ, y veo que este módulo tiene que ser repetido α_1 vez para formar una de esas cantidades, α_2 veces para completar otra, α_3 veces para obtener una tercera y así sucesivamente, estas diversas cantidades se representarán por las expresiones siguientes:

$$\alpha_1\mu\ , \quad \alpha_2\mu\ , \quad \alpha_3\mu\ ,\ldots\ldots$$

—*Los* NÚMEROS *bajo el punto de vista abstracto solo pueden ser enteros.*

Claramente se vé segun estas convenciones que los números α_1, α_2, α_3...., que expresan "número de veces," NO PUEDEN SER SINO NUMEROS, ENTEROS y que, para comprender lo que podrian significar α_1, α_2, α_3... FRACCIONARIOS O NEGATIVOS, seria menester ante todo saber tambien lo que puede ser la operacion de REPETIR *alguna cosa un número de veces fraccionario ó negativo*: pero ¿no es evidente que lo que puede resultar para nuestro entendimiento del simple enunciado de tal operacion, es una idea de perfecta imposibilidad y nó otra cosa?

El número, en efecto, expresa la modificacion que produce en nosotros la percepcion de los objetos, en cuanto que, despojados de todas sus propiedades, queremos simplemente determinar cuantas veces, por ejemplo, seria necesario hacer cierto signo, repetir cierto ruido, trazar cierto carácter, para que hubiese tantos signos, tantos ruidos, tantos caractéres como objetos. Ahora bien: lo mismo que seria incomprensible hacer un cuarto de signo, ó un tercio de ruido, lo mismo el número, bajo el punto de vista en que lo consideramos aquí, no puede ser sino entero, y en el momento en que este número es fraccionario debemos afirmar resueltamente que es concreto. (1)

Hé aquí lo que desde luego ocurre cuando aplicamos el número á contar objetos que tienen una significacion puramente intelectual. Así, mientras que comprenderé muy

---

(1) En el segundo capítulo se tratará este punto detalladamente.

bien lo que es la mitad de un cuerpo que tiene la forma de una bola, expresaria una imposibilidad diciendo que en una urna en que se depositan bolas para votar, entraron bolas siete veces y media.

Como se vé, es ESENCIAL á los números EL SER DE POR SI ENTEROS, y esta es la única idea que podemos tener de ellos al principio de la ciencia, y, en tanto que no se quiera salir del dominio de la abstraccion, se negará nuestra inteligencia á considerarlos bajo otro concepto, cualesquiera que sean por otra parte los esfuerzos de raciocinio que se quieran intentar para cambiar nuestras ideas con respecto á este punto.

¿Se seguirá, sin embargo, de aquí que hay absurdo ó al menos superfluidad en estudiar las propiedades de los números consideradas bajo el punto de vista negativo, fraccionario, irracional y hasta imaginario?

Cuestion importante que promueve una inmensa discusion, y cuya respuesta, teniendo en consideracion el estado actual de nuestras ideas sobre la ciencia del cálculo, ha dado toda la materia de esta obra.

Ahora bien, antes de proceder á la solucion de esta cuestion importantísima, haré la observacion siguiente:

Si fuese posible al hombre, cuando quiere raciocinar solo sobre abstracciones, despojarse completamente de lo que sabe sobre las cantidades concretas, no vacilaria yo en decir que al empezar la ciencia ni siquiera habria pensado en estudiar los números bajo los diversos puntos de vista que acabo de enumerar. Si la idea de semejante estudio se le hubiese ocurrido, la habria desechado inmediatamente como un absurdo ó como un extravío de su inteligencia, porque ¿cómo, en efecto, entregarse razonablemente á un estudio cuyo punto de partida hubiera sido una imposibilidad para el entendimiento? ¿Cómo establecer un cuerpo de doctrina cuya base no es dable á nuestra razon comdrender ni definir?

Así, los geómetras que en el exámen de una cuestion se encontraron por la vez primera con un resultado negativo, dieron prueba de alta filosofía, resistiéndose á comprender semejante resultado, en que solo pudieron ver ideas contradictorias, y calificando de falsa solucion á la que venia á dar un solemne mentís á las ideas claras, perspicuas y precisas, que tenian de la naturaleza de los números.

—*¿Podrán las* CANTIDADES *ser inteligibles bajo el concepto fraccionario, negativo, irracional ó imaginario?*

Aquí es donde podrá llamarse útilmente en nuestro auxilio la ley general cuya enunciacion he hecho conocer. Dirijámonos, pues, esta pregunta:

Si nuestra razon se niega á darnos una explicacion clara de los NÚMEROS abstractos negativos, fraccionarios, irracionales, y con mayor razon de los imaginarios, si, por el contrario, no nos permite considerarlos bajo estos puntos de vista, sucederá lo mismo con las CANTIDADES?

Distincion tan sencilla como fácil, se dirá, y que todo el mundo ha podido comprender y ha comprendido quizás antes que yo: distincion que las soluciones de cualquier cuestion habrán hecho nacer y analizar.

Pero, responderé, si semejante distincion *en cada caso particular* es de tanta utilidad, si arroja una claridad perfecta sobre la interpretacion de los resultados, ¿porqué no produce, de un modo general y para el edificio todo de la ciencia, lo que concede solo para algunas de sus partes? ¿Porque no es un faro cuya luz se extiende á inmensas distancias y en todas direcciones?

No haré aquí lo que otros han hecho antes que yo: para todos los casos y de una vez haré lo que no se ha intentado hacer sino por partes y en diferentes tentativas.

En tal supuesto, considerarán este trabajo algunas personas solo como una generalizacion, ó como la transformacion en cuerpo de doctrina de varios elementos aislados, pero, por pequeña que sea la parte que se me quiera dejar, me quedará al menos la conviccion de que, aun bajo este punto de vista, faltaba este trabajo á la ciencia.

Volviendo, pues, á la distincion cuyo enunciado acabo de dar á conocer, á saber: si es posible á nuestra razon concebir lo que pueden ser CANTIDADES negativas, fraccionarias, irracionales ó imaginarias, la primera observacion que haré es que, propuesta así, adquiere la cuestion una inmensa generalidad, puesto que, para responder á ella convenientemente, será necesario ante todo un estudio de las propiedades inherentes á la naturaleza de cada especie de cantidad.

—Consecuencia de una respuesta afirmativa á la precedente pregunta.

Pero, dejando á parte por un instante ese aspecto general de la cuestion, supongamos que haya cantidades susceptibles de pasar por los estados correspondientes á lo que designamos ahora en álgebra con las expresiones *negativas*, *fraccionarias* etc., etc. Justamente de esto deduciré que para el módulo de esta clase de cantidades, (que, en definitiva, no es mas que una cantidad de la misma especie,) se podrá concebir igualmente lo que significan los estados negativo, fraccionario, irracional, ó imaginario; y, siendo así, en la expresion $\alpha\,\mu$ de cualquiera de estas cantidades, siempre será posible hacer la interpretacion de estos diversos estados, pues aunque tal interpretacion no se pueda hacer sobre el número abstracto α, siempre será posible ejecutarla en la expresion $\alpha\,\mu$, á causa del módulo μ.

Vése, pues, que en el paso de lo abstracto á lo concreto ha de haber expresiones incomprensibles en el primer caso que podrán, sin embargo, en el segundo ser de fácil comprension. Estas consideraciones no introducen perturbacion ninguna en la naturaleza de las cosas; porque el número permanece con las propiedades exclusivamente anexas á su esencia, y el módulo solamente es lo que se modifica, si su naturaleza consiente tales modificaciones.

Quizás deberia yo descender ahora á algunos pormenores, demostrando cómo se efectúan estas modificaciones en los módulos de las mismas cantidades; pero creo que será mejor proseguir por un instante aun el curso de las generalidades, á fin de que esta exposicion de los hechos sea un trasunto fiel de la armonía con que están enlazadas todas las ideas de cuyo desarrollo trato.

—¿Serán algebráicas las modificaciones que debe experimentar el módulo de una misma cantidad para representarla bajo diversos estados?

Despues de haber supuesto que existen cantidades para las que pueden concebirse distintos estados, ó distintos modos de existencia ó de accion, y despues de haber reconocido que en estas diversas circunstancias el módulo de tales cantidades habrá de recibir ciertas modificaciones, para que la expresion de la cantidad represente estos diversos estados, habremos de dirigirnos la pregunta siguiente: ¿podrán expresarse por signos de operaciones algebráicas las modificaciones del módulo de que acaba de hablarse?

Siendo así, y admitiendo interinamente la suposicion ¿no pasaria para siempre al cálculo el efecto de esas modificaciones, sin vernos de continuo obligados á estudiar individualmente los resultados de ese efecto en cada nueva expresion obtenida?

Si, por ejemplo, la cantidad de que nos ocupamos es una fuerza, y si φ es el módulo de las fuerzas, si φ', φ'', φ''', etc.

son el módulo φ, modificado segun las exigencias de los diversos modos de accion conforme á los cuales puede obrar, ¿no podria suceder que $\varphi', \varphi'', \varphi'''$ no fuesen otra cosa que φ, tratado segun alguna de las operaciones de que acabamos de hablar, como por ejemplo, $-\varphi$, ó bien $\frac{\varphi}{m}$, ó bien $\varphi \sqrt[n]{\ldots}$, ó bien $\varphi \sqrt{-1}$, etc?

Sin detenernos por el momento en lo que hay REALMENTE de admisible en semejante suposicion, concedamos que sea verdadera y veámos á qué consecuencias debe conducirnos.

—*Consecuencias que resultarian de esta suposicion si fuese verdadera.*

En el primer caso, en el de que se hubieran dejado al módulo modificado las formas φ', φ'', φ''' ,..., es evidente, que despues de haber escrito algebráicamente las condiciones de la cuestion, para que la expresion de estas condiciones fuese homogénea seria preciso que cada uno de sus términos estuviese compuesto de un número y de uno de los módulos φ, φ', φ'', φ''',... Ahora bien: en el estado de duda en que nos habiamos de encontrar respecto á las relaciones que unen entre sí estos varios módulos, no seria posible ir mas adelante en la solucion de la cuestion. Pero si advierto que estas relaciones hasta ahora ignoradas pueden representarse algebráicamente, como acabo de suponerlo, reemplazaré entonces en la expresion de las condiciones del problema los módulos φ', φ'', φ''',..., por sus equivalentes $-\varphi$, $\frac{\varphi}{m}$, $\varphi \sqrt{-1}$ etc., y desde este instante la solucion de la cuestion habrá dado un gran pasó.

En efecto, por una induccion justificada *á posteriori* por el raciocinio, podré transportar sobre el número que acompaña al módulo φ, las operaciones algebráicas de que esté afectado en cada término y separar en seguida del módulo el número. Por tal medio no tendré mas que una serie de números unidos entre sí por índices de operacion; efectuaré, en cuanto fuere posible, estas operaciones segun las reglas algebráicas y aritméticas conocidas, y llegaré de este modo á un resultado que uniré al módulo φ, á fin de obtener la expresion completa de la cantidad buscada. Si el resultado numérico vá precedido del signo —, tendré un indicio de que el verdadero módulo es $-\varphi$, y no φ, y de que, en su consecuencia, el problema no puede satisfacerse sino por el estado negativo de la cantidad: si el resultado numérico sale con el signo $\sqrt{-1}$ tendré un criterio para creer que el verdadero módulo es $\varphi\ \sqrt{-1}$ en lugar de φ, y que, en consecuencia, la cuestion no puede quedar resuelta sino por el estado imaginario de la cantidad, etc.

Vése, pues, la importancia del hecho (que no es todavía mas que una suposicion,) de que los módulos φ, φ', φ'',....., que corresponden á los diversos estados de una misma cantidad, recibiesen, para expresar estos estados, modificaciones susceptibles de expresarse por medio de φ y de expresiones algebráicas.

Entonces seria permitido hacer abstraccion del módulo φ, trasportar á los números que lo acompañasen los signos de las operaciones de que estuviese afectado, efectuar en seguida estas operaciones sobre esos números, y al cabo agregando el resultado al módulo φ, se obtendria la expresion de la cantidad buscada, que seria negativa, fraccionaria, irracional ó imaginaria, segun que el resultado numérico obtenido se hallase afecto (en su último límite de reduccion y al agregarlo al módulo φ) ó bien del signo de la sustraccion, ó bien del de la division, ó, en fin, del de una extraccion de raiz imposible.

—¿Es inútil el estudio de los números desde el punto de vista negativo, fraccionario, irracional ó imaginario?

Por las consecuencias que acabamos de enumerar se vé fácilmente que, hecha la precedente suposicion, la respuesta á la pregunta que nos hemos dirigido es muy sencilla y fácil.

¿Hay absurdo ó superfluidad en estudiar las propiedades de los números bajo el punto de vista negativo, fraccionario, irracional ó imaginario?

Sin duda que nó: segun la precedente suposicion no habria ni absurdo ni superfluidad en hacer este estudio; al contrario seria de grande utilidad, puesto que, una vez hecho sobre los números, se hallaria por lo mismo efectuado sobre todas las cantidades cuyos diversos estados pueden figurarse por los signos negativo, divisivo, irracional ó imaginario.

Ahora bien, considerando la cuestion desde este punto de vista se advierte cuán pueril seria, en esta region puramente abstracta de la ciencia del cálculo, querer explicar el sentido de un resultado cualquiera ; por lo cual ha quedado sin explicacion todo lo que se ha intentado en este género hasta el dia.

Pero háganse abstractamente cálculos conformes con las reglas propuestas; combínense de todas las maneras posibles los signos de las operaciones, los números operadores, y los números sobre que se opera, y llegará un dia en que los resultados obtenidos, y cuyo sentido ha quedado incomprensible, reciban en las aplicaciones á las cuestiones concretas una interpretacion fácil. Hé aquí cuanto puede esperarse, y cuanto es dado comprender.

—Exposicion de las investigaciones que hay que hacer sobre los módulos.

Que nos resta, pués, ahora que hacer? Examinar todas las diversas propiedades de las cantidades de cada especie, é inquirir cómo han de expresarse los módulos representativos de los distintos estados que pueden afectar las cantidades.

Ahora bien, no necesito hacer un estudio muy profundo de las diversas especies de esas cantidades. En efecto: lo que haya dicho y demostrado para una especie se aplicará á cualquiera otra que, como esta, sea susceptible por su naturaleza de modificaciones semejantes.

En tal concepto, y colocándonos en el punto de vista en que nos lo permite el estado actual de los conocimientos matemáticos, la eleccion de la especie de cantidad sobre que practiquemos nuestras investigaciones no puede ser dudosa. Esa cantidad será la *longitud*; pero no hay que perder de vista que lo que digamos de ella y de sus diversos estados, ha de aplicarse á cualquier otra cantidad que pueda admitir en todo ó en parte los cambios de estado de que ella misma es susceptible.

Si despues de haber hecho el exámen de todas las modificaciones á que se presta la longitud y de haber descubierto qué formas algebráicas les corresponden, quedasen aun inexplicables algunas de esas formas, seria necesario deducir, nó que esas formas son imaginarias, sino que ignoramos aun á QUÉ CANTIDAD y á QUÉ ESTADO ESPECIAL de esta cantidad corresponden esas formas.

Si, por el contrario, hallásemos que hay en la longitud algunos estados que, para expresarse, reclaman algo mas que una de las formas usuales de operacion algebráica, y para los cuales es preciso hacer uso de números tratados por otras operaciones distintas de las que constituyen los elementos de la ciencia, (1) esos nuevos números, esas nuevas formas, esas nuevas operaciones deberian pasar para siempre á la parte abstracta de la ciencia del cálculo, no solo por ser indispensables para satisfacer todos los casos que puede ofrecer la consideracion de las longitudes, sino porque puede haber en la naturaleza otras cantidades distintas de las longitudes, ya estudiadas ó susceptibles de serlo un dia, que, poseyendo estados análogos, necesitáran, para expresarse, de esas formas y de esas operaciones enteramente nuevas.

—Las indagaciones respecto á los módulos deben ir precedidas del estudio de los números considerados desde el punto de vista abstracto.

Las indagaciones cuyo plan acabo de trazar hallarian, pues, aquí su lugar natural, pues mas tarde se verá que los resultados á que conducen confirman en todo punto las hipótesis admitidas en el presente capítulo. Sin embargo, las siguientes consideraciones me determinan á diferir su exposicion hasta el capítulo tercero.

Puesto que las cantidades tienen siempre por expresion un número y un módulo, ¿no ha de ser conveniente para fijar con perfeccion la REPRESENTACION de las cantidades, estudiar, no solo lo que concierne al módulo, sino lo que puede tener relacion con el número *independiente* de este módulo, esto es, considerado aisladamente bajo el punto de vista que se ha convenido en llamar aritmético ó abstracto?

---

(1) Por ejemplo: las funciones que dependen de la consideracion de los ángulos. (Véanse con este motivo las admirables reflexiones de Mr. Poinsot al fin del capítulo 3.º)

Me parece, pues, que es necesario para adquirir un completo conocimiento de la representacion de que aquí se trata, y que es indispensable para saber interpretar con seguridad la expresion de una cantidad, el conocer á fondo los dos elementos constitutivos de esa representacion, y estar bien seguro de la influencia que cada uno ejerce en la expresion que resulte de su combinacion: y en fin, saber lo que puede ó debe practicarse sobre cada uno de ellos para realizar, ya las condiciones de los problemas, ya sus soluciones.

Estas consideraciones, nos conducen al estudio prévio de los números, considerados solamente como representantes de la operacion de CONTAR, é independientes de toda ACEPCION CONCRETA.

Por lo demás, este estudio, imprescindible, nada tiene de árido ni de fatigoso. En él hallaremos ocasion de reformar errores, de conocer bajo su verdadero punto de vista la naturaleza de las operaciones aritméticas que constituyen los elementos de la ciencia del cálculo, y de sentar, en fin, sobre bases sólidas la distincion que debe existir entre lo abstracto y lo concreto. Estos diversos objetos serán la materia del capítulo siguiente.

El estudio de los módulos, de sus modificaciones y de su uso en las ciencias matemáticas, formará el asunto del capítulo tercero.

CAPÍTULO II.

DE LOS NÚMEROS Y DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS DESDE EL PUNTO DE VISTA ABSTRACTO.

SECCION PRIMERA.

DE LA VERDADERA NATURALEZA DEL NUMERO ABSTRACTO.

—Imposibilidad de hallar una definicion del número negativo, fraccionario, irracional é imaginario bajo el concepto puramente abstracto.

Cuando se considera á los números como expresion solamente de los resultados que se obtienen de la operacion de contar, cuando se quiere que los números permanezcan en la region de lo abstracto, y solo se usan como medio de REPRESENTAR las cantidades, en una palabra, cuando prescindimos de toda consideracion que los refiera directa ó indirectamente á IDEAS CONCRETAS, entonces es de ESENCIA del número no ser inteligible para nosotros, sino en tanto que es ENTERO; y en tal caso, decir que un número es negativo, fraccionario, irracional ó imaginario es expresar ideas contradictorias, pues entonces ya no es posible á nuestro entendimiento concebir lo que podria ser CONTAR NEGATIVA, FRACCIONARIA, IRRACIONAL Ó IMAGINARIAMENTE.

Y en efecto, si bajo este punto de vista se quisiese buscar una definicíon clara, precisa y general del número negativo, fraccionario, irracional ó imaginario, semejante definicion, para ser lógica, deberia depender solo de la naturaleza y de las propiedades del número, tales como acabamos de darlas á conocer: de donde se sigue que no existiria ninguna de las aplicaciones que pudieran hacerse de la operacion de contar á las diversas cosas creadas cuya comprension no fuese accesible á nuestro entendimiento.

Pero nada hay mas sencillo que hacer ver que no puede ser así, porque en la série de las cosas creadas, acerca de las cuales podemos establecer suposiciones, existen muchas respecto de las que *á priori* sabemos que es un absurdo repetirlas negativa ó fraccionariamente etc.

En efecto, observaremos con este motivo que no sucede lo mismo con las dificultades que encuentra nuestra razon para establecer la generalidad de un principio, que con las que es preciso vencer para probar al contrario que esta generalizacion no es posible. En el primer caso debe probarse que no existe ninguna circunstancia en que no pueda demostrarse la verdad del principio, lo que exije muchas veces una série numerosa y aun infinita de investigaciones, y en el segundo solo es necesario haber probado, RESPECTO DE UNA SOLA CIRCUNSTANCIA, la imposibilidad de aplicar este principio, para deducir de ello que el principio no es general.

En tal supuesto, si se pretendiese haber hallado la definicion de que acabo de hablar, bastaria para mostrar que es falsa, hacer ver un SOLO caso en que la aplicacion de esta definicion fuese RACIONALMENTE imposible é incomprensible *á priori*.

¿Qué puede ser una casa repetida menos una vez, una vida repetida menos tres veces? ¿Qué es un cuarto de voto, un décimo de hombre etc.? Todo esto es evidentemente ininteligible para nuestra razon, sean los que fueren los esfuerzos que se quieran hacer, las palabras que se quieran emplear, los raciocinios de que se quiera hacer uso: siempre será imposible hacer entrar estas expresiones en la region de las cosas comprensibles. Tal seria sin embargo el resultado de la definicion de que se trata, si se consiguiese hallarla, lo cual, solamente, bastaria para probar la imposibilidad de que exista semejante definicion y la inutilidad de las tentativas para descubrirla.

—Estos diversos estados del número abstracto corresponden á imposibilidades.

Antes de definir lo que puede ser un número negativo, fraccionario, irracional ó imaginario, esto es, antes de decir lo que ha de ser para nuestra razon, el conjunto, formado por una parte con la idea de número, tal como la hemos dado á conocer al principio de este capítulo, y, por otra, con la idea propia de cada una de estas cuatro expresiones, preciso es que convengamos en el valor de estas últimas, y saber ante todo lo que deben significar tales palabras. Ahora bien, si al dedicarnos á esa investigacion hallamos que, en tanto que no se sale de la region de lo abstracto, todas estas expresiones significan operaciones imposibles, de distintas especies, pero siempre impracticables, ¿no deberemos ver en las expresiones *número negativo*, *número fraccionario* etc.; la idea de número hecha imposible por el agregado de esos cuatro calificativos, cuyo conjunto forma símbolos perfectos de otras tantas imposibilidades?

Ante todo averigüemos de qué modo estas diversas palabras han podido aparecer é introducirse por la primera vez en el lenguaje de la ciencia.

Verdadera definicion del número abstracto.

Para esto es preciso ante todo reconocer cual debe ser LA ESTENSION DE LA CIENCIA DE LOS NÚMEROS *cuando se reserva á esta expresion la significacion* que le hemos dado en el principio de este capítulo, esto es, cuando el número no sirve para otra cosa que para expresar los resultados de la operacion de contar. No podremos tener una clara idea de las cuestiones que nos ocupan sino cuando conozcamos la verdadera extension de LA CIENCIA DE LOS NÚMEROS desde este punto de vista.

Defino los números como sigue:

Son símbolos escritos ó hablados por cuyo medio expresamos las diversas percepciones que despierta en nuestra alma la idea de *pluralidad.* Son signos destinados á precisar, ya para nosotros mismos, ya para los demás, á qué grado de la escala de la pluralidad corresponde una coleccion cualquiera de cosas, ya semejantes, ya diferentes.

Contar será hacer cualquier operacion necesaria para determinar el valor del número por cuyo medio deberán designarse esas diversas colecciones.

Se me preguntará quizá lo que ha de entenderse por la palabra *pluralidad.* A esta pregunta responderé que la idea contenida en esta expresion es felizmente tan fácil de concebir como difícil de definir. No es necesario haber reflexionado mucho tiempo sobre el papel que está destinada á representar una definicion, para conocer que es absolutamente imposible definirlo todo. Definir una idea es hacerla comprender por medio de otras ideas ya conocidas; pero ¿quién no vé desde luego que recorriendo la cadena de las definiciones á que dará lugar una idea cualquiera, llegariamos necesariamente á un primer eslabon, á una idea primitiva, á una idea madre de que se derivarian todas las demás, y que, por consiguiente, no podria ya ser concebida, explicada, ni definida por medio de ninguna otra idea, sino por solo el testimonio de nuestra razon? Ahora bien, puesto que, en resúmen, DEFINIR ES HACER COMPRENDER; ¿qué nos importa comprender por medio de una parafrasis, ó por medio de esa conviccion interior, de ese irrecusable testimonio, hijo de la aplicacion de nuestros sentidos y de nuestro pensamiento á las diversas creaciones del mundo material y del mundo moral? ¿Quedariamos mas convencidos, porque se nos hubiesen dicho ciertas palabras, que por haber aplicado las facultades físicas é intelectuales al conocimiento de los hechos naturales? Sin duda que nó, porque esta aplicacion no es de un dia: empieza con el hombre: camina y progresa con su existencia. Ahora bien, ¿cómo dudar de las verdades que establece semejante estudio y porqué no las hemos de aceptar como verdaderas definiciones? ¿No nos vemos obligados á reconocer que nuestra razon no las admite por un vano capricho, sino porque son indispensables para explicar el cómo los efectos que incesantemente observa en torno suyo son realmente tales como se le aparecen ó presentan? ¿No son, por el contrario, estas verdades MAS POSITIVAS que nuestras DEFINICIONES ORDINARIAS? Pues si estas últimas dependen de las combinaciones de nuestro espíritu, que no es infalible, las otras no tienen otra base que las leyes inmutables de la naturaleza misma.

Perdóneseme esta digresion sobre un punto que si no está comprendido del todo en los asuntos que forman el objeto de esta obra, no le es, sin embargo, completamente ageno desde el punto de vista filosófico en que lo considero y sobre el cual no son de desdeñar algunas explicaciones exactas.

Volviendo ahora á la idea que representa la palabra pluralidad, nada mas sencillo que comprender como nace en nosotros. La vista, el tacto, el oido, todos nuestros sentidos, en una palabra, concurren á darnos cuenta de la existencia de las DIVERSAS cosas creadas: nuestras necesidades nos llevan en seguida á hacer un profundo exámen de las propiedades inherentes á la EXISTENCIA de las cosas, y de ahí el orígen de las ciencias. Pero, sin detenernos en el exámen profundo de la forma, del color, de la naturaleza de cada una de las obras de la creacion, observamos, como un hecho primitivo, que un ser, cualquiera que sea el que venga á herir nuestros sentidos, no existe AISLADO O SOLO en la naturaleza; á su lado observamos otro semejante ó diferente, luego otro, luego otro más, y así sucesivamente sin que nada limite esa facultad de admitir sin cesar nuevos objetos con los primeros. Simultáneamente, por otra facultad que nos ha concedido la naturaleza de percibir MAS DE UNA COSA A LA VEZ, adquirimos la idea de pluralidad, idea que, como todas las demás, se desenvuelve despues mas ó menos segun las disposiciones naturales del individuo, ó segun sus estudios mas ó menos perseverantes sobre las consecuencias de esta idea primitiva.

Ahora bien, ¿qué mas podria exigirse sobre la idea de pluralidad, que hacer ver, como acabamos de practicarlo, á qué facultad se refiere y por qué síntomas se revela? Si esta experiencia diaria, de todos los instantes, si estas observaciones, compañeras inseparables de todos los actos de nuestra vida, no fuesen bastantes para convencernos, ¿qué palabras serian capaces de destruir una incredulidad, que no fuera dado destruir al testimonio, renovado sin cesar, de todos nuestros sentidos?

Pasando ahora á examinar la explicacion precedente de la palabra número, me parece obvio, que, apreciada sanamente bajo el punto de vista de la pluralidad, la condicion de las cosas creadas, y examinadas únicamente bajo este punto de vista ya despojadas de las demás propiedades inherentes á su naturaleza particular, me parece evidente, digo, que los caractéres, la definicion, los usos del número deben ser los que he manifestado; y si, por ejemplo, se supiese que los objetos contados son esencialmente diferentes unos de otros, y que estos objetos no son de ninguna manera susceptibles de ser comparados, esto es, que no gozan de la propiedad de que uno cualquiera de entre ellos, pueda ser el equivalente de todo ó parte de otro, en tal caso, repito, seria imposible asignar al número otras funciones que las que resultan de la definicion precedente.

—De los diferentes usos del número en el estado actual de nuestras ideas, y de la necesidad de distinguirlos claramente unos de otros.

Pero, 1.°: como en ciertas circunstancias, y precisamente en aquellas en que el uso de los números presenta las aplicaciones mas importantes, los objetos sobre que se efectúa la operacion de contar son todos de una naturaleza semejante:

2.° Como que entonces sucede que estos objetos son comparables, esto es, que hay uno en su especie por medio del cual pueden concebirse y representarse todos los demás de la misma clase:

3.° Y como, en fin, al hacer la operacion de contar se ha conocido que el resultado obtenido podia no solo dar una idea del NÚMERO de las cosas contadas sino tambien del TAMAÑO que deberia tener una cosa de la misma especie para que representase por sí sola todas las demás tomadas en conjunto, los hombres, por una especie de sinécdoque muy natural, han atribuido á los números otras funciones distintas de la que acabamos de mencionar, y, á consecuencia de todo esto, ha sucedido que el número ha servido no solo para CONTAR LAS CANTIDADES sino que se ha convertido en *signo representativo del* TAMAÑO *de las cantidades.*

Pero, reflexionemos: mientras que la primera propiedad, la de contar las cantidades, no exigia ni en las formas primitivas dadas á los números, ni en las reglas con cuyo auxilio son designados ó combinados entre sí, ninguna modificacion de los principios de numeracion y de cálculo puestos en uso, no se tardó en advertir que *esos mismos principios eran* INSUFICIENTES cuando se queria hacer uso de los números como representativos de los TAMAÑOS de las cantidades; y, en su consecuencia, se hizo sufrir á estos principios MODIFICACIONES y EXTENSIONES (1) mas ó menos importantes, que han pasado al estudio de la ciencia y que han quedado para siempre en su dominio.

Mas tarde, se observó que para completar el estudio de las cantidades no bastaba haber hallado los medios de expresar *sus tamaños ó magnitudes.* Vióse que una misma cantidad podia, *sin cambiar de naturaleza*, ser considerada bajo diferentes aspectos, ó ser estudiada con relacion á tal ó cual modo de EXISTENCIA ó de ACCION; y, habiendo tratado el entendimiento humano nó de inventar nuevos medios, sino de expresar por los mismos *números* y *signos de* OPERACION ya conocidos y estudiados, estos diversos estados, resultaron nuevas modificaciones (2) de los principios primitivos de la ciencia del cálculo, de donde procede el TERCER aspecto de los números, ó sea el TERCER USO á que se les ha destinado.

---

(1) Por ejemplo, la multiplicacion y la division de las fracciones.

(2) A esto se refieren las reglas de los signos para las cantidades que se llaman *aisladas.*

Demostraré en el lugar oportuno que este término *no ha sido el último* y que las investigaciones matemáticas han dado aun MAS EXTENSION todavía al uso de los números en la ciencia del cálculo (1); pero, por el momento, no son necesarias, para lo que me propongo decir, estas nuevas explicaciones, que probablemente exigirian para ser suficientemente comprendidas en todos sus detalles, desarrollos impropios de unos elementos.

Limitándome, pues, á las precedentes observaciones se vé ahora que en la parte de la ciencia del cálculo que se designa bajo el nombre de *álgebra* y tal como DE HECHO se halla constituida por los escritos de los autores, pueden los números figurar bajo tres puntos de vista diferentes:

1.º COMO SÍMBOLOS REPRESENTATIVOS DE LA OPERACION DE CONTAR:

2.º COMO SIGNOS INDICADORES DEL TAMAÑO DE LAS CANTIDADES:

3.º COMO CARACTÉRES DE TAL Ó CUAL MODO DE EXISTENCIA Ó DE ACCION DE LAS CANTIDADES.

Ahora bien, en el estado actual de las cosas, creo que no se han distinguido bastante estos diversos usos á que están destinados los números, y esto consiste, á mi entender, en que estos usos no se han introducido de golpe en la ciencia, basados en teorías formadas, concebidas y meditadas de antemano, sino que, por el contrario, han ocupado su lugar en ella poco á poco, segun la voluntad de los varios geómetras que se han dedicado á los estudios matemáticos, y segun las exigencias de cada problema particular cuya solucion se presentaba.

En consecuencia, como todos estos usos no forman un

---

(1) Aludo á los cálculos diferencial é integral, en los cuales se pasa de una especie de cantidad ó otra, de una línea á un punto, de una curva á un ángulo, de una fuerza á una velocidad, etc.

cuerpo de doctrina sustentado por fundamentos profundos ni aun conocidos, no es de admirar que se haya introducido la confusion en esos tres objetos tan distintos á que se han destinado los números y que poco á poco hayamos llegado á un punto en que nos es forzoso preguntar: ¿En qué consiste que ciertas propiedades de los números *que no son falsas* en ciertos casos dejan de SER VERDADERAS Ó INTELIGIBLES en otros?

Las reflexiones que preceden nos proporcionan la clave natural de todas estas contradicciones, porque, efectivamente, se está de hecho empleando el número en tres usos diferentes, y así no podrá ser ya motivo de sorpresa el que tal propiedad de los números, procedente de uno de estos usos, no pueda ya aplicársele cuando el uso, CESANDO DE SER EL MISMO se amplíe á alguno de los otros dos.

Así en todas las discusiones que se han suscitado con este motivo ha habido á la vez razon y sinrazon; pero nadie ha podido entenderse, por haber observado que en la práctica ninguno se ha atenido á la definicion primitiva del número y que se ha dado este nombre á una cosa muy distinta de la primera. Para evitar, pues, toda confusion, en el estado actual de las cosas se deben distinguir tres especies de números, de manera que, antes de responder á las preguntas generales que puedan hacerse sobre las propiedades de los números, será preciso ante todo explicar y entender *la especie particular de número* de que se quiere hablar.

—Exámen de las definiciones de la palabra número dadas por los autores de elementos.

Me habia propuesto en un principio examinar las diversas definiciones del *número* dadas por los autores de matemáticas y demostrar sucesivamente lo incompleto de cada una de ellas; pero, cuando quise poner en ejecucion mi propósito, no tardé en advertir que iba á caer en una série de repeticiones fatigosas é inútiles á la vez, porque, efectivamente, el exámen que hice de tan varias definiciones me demostró que, con ciertas diferencias de redaccion, son todas iguales en el fondo. ¿Consistirá acaso esa conformidad en que los autores se han copiado mútuamente? ¿O en que esta definicion es la única que existe en nuestro sistema de enseñanza? Ganas dan de admitir esta última suposicion, al observar que ni uno solo de los autores de que hablo define el *número* antes de definir la CANTIDAD; de lo cual debemos deducir que desde el primer momento no atribuyen al número otra funcion que la de representar las MAGNITUDES de las cantidades. Si luego resuelven con los números algunas cuestiones independientes de la consideracion del tamaño, es como por un efecto del acaso y sin que ellos mismos sospechen que entonces hacen del número un uso distinto del indicado por su misma definicion.

En vista de esto, y del absoluto silencio que han guardado todos los autores sobre la distincion que me parecia tan necesario establecer entre el número *que sirve para contar* y el número destinado á *representar las cantidades*, esto es, entre el número que CUENTA el órden y la situacion de las cosas y el número que MIDE los tamaños, he vacilado mucho tiempo desconfiando de mí mismo, y muchas veces me he preguntado si me seducia una ilusion. Pero, al fin, reflexionando de nuevo y con mas intensidad sobre el asunto, han ido desapareciendo mis dudas sucesivamente, se han fijado mis irresoluciones y me ha parecido ir caminando por la via de la verdad. Desde entonces he logrado convencerme de que esa distincion que me habia parecido necesaria é indispensable estaba ya formulada claramente hace años por un geómetra de nuestros dias, y sancionada en la siguiente frase con toda la autoridad de los titulos científicos menos disputables.

"Hemos emprendido nuevamente y continuado todas "estas investigaciones, que están ligadas entre sí de la ma- "nera mas íntima y que tienen en general por objeto la "TEORIA DEL ORDEN y DE LA SITUACION DE "LAS COSAS CON ABSTRACCION COMPLETA DEL "TAMAÑO, teoría nueva y profunda, cuyos elementos "apenas nos son conocidos, pero que se debe mirar como el "primer fundamento del álgebra y la fuente natural de las "principales propiedades de los números." (1)

Despues M. Poinsot ha sido mas explícito: en una lectura hecha en la Academia de ciencias el 10 de Mayo de 1841 se expresa en estos términos:

"Regularmente se definen las matemáticas como la ciencia "de las *magnitudes* en general, ó la ciencia de las *cantidades*, "lo cual en el fondo es lo mismo que decir la ciencia de "las RELACIONES: esta es la definicion mas general que "se ha dado hasta aquí de las matemáticas. Pero, aunque "esta definicion parezca abrazar toda la ciencia, creo "que no dá una idea de ella bastante profunda ni bas- "tante extensa, porque las matemáticas no son solo la "ciencia de las relaciones, esto es, que no se atiende en "ellas únicamente á la PROPORCION y á la MEDIDA, sino que "deben estudiar tambien el número en sí mismo, esto es, "el órden y la situacion de las cosas con abstraccion com- "pleta de sus relaciones y de las distancias mas ó menos "grandes que las separan." "Recorriendo cualquiera de "las diferentes partes de las matemáticas siempre encuentra "el geómetra estos dos grandes objetos de nuestras expe- "culaciones."

Ahora bien, ¿no es de admirar que, haciendo ya tan-

(1) Memoria de M. Poinsot, tomo XIV de las memorias del Instituto.

tos años que se proclamó esta gran verdad, no haya habido un solo autor de elementos capaz de aprovechar lo que hay de útil en esta definicion de la palabra número, si nó en sus diversos pormenores, al menos en su base?

Lejos de esto, esa palabra ha permanecido siendo lo que era antes, porque en la definicion ha entrado siempre *la magnitud* de las cantidades.

Es verdad que los autores distinguen (ó creen al menos distinguir) dos especies de números; el número *concreto* y el número *abstracto*: sirve el primero, dicen, para representar las cantidades cuyo número y especie son conocidas; y el segundo, para todas las especies sin designacion particular de ninguna. ¡Grado singular de abstraccion, que consiste en dejar á un lado un nombre ó un apelativo!! Pero ¿qué adelantan? ¿Vislumbran acaso ese grado sublime de abstraccion, tan importante y tan profundo, que, no haciendo caso en los objetos contados de ninguna de sus propiedades físicas, mecánicas, geométricas, materiales en una palabra, los considera únicamente bajo el aspecto solo de su ORDEN, de su SITUACION y de su NUMERO, y, segun la feliz expresion del gran geómetra que acabo de citar, *con abstraccion perfecta de la magnitud?*

Tal es el estado de confusion en que se halla la ciencia matemática de nuestros dias desde los principios mismos de su exposicion. (1) El mecanismo del cálculo, la manipulacion de las cifras, de las letras y de los signos; hé aquí únicamente lo que se enseña á los discípulos. Y ¿en materia de análisis? Nó es el de la filosofía, sino únicamente el de los procederes algebráicos el que se encuentra en nuestras obras de enseñanza.

---

(1) Con este motivo no puedo menos de citar la definicion siguiente que encuentro en una obra de álgebra, adoptada por la Universidad y que en 1828 habia llegado á la quinta edicion: se llama *número absoluto* á un número tal como se entiende en aritmética.

SECCION II.

ESTUDIOS SOBRE LA ADICION Y LA SUSTRACCION.

—De la introduccion de lo positivo y de lo negativo en aritmética.

Despues de haber mostrado cuan necesario es, en el estado actual de la ciencia, considerar varias especies de números, volvamos ahora á la definicion primitiva que hemos dado de esta palabra, y supongamos que el número está solo destinado á representar la operacion de contar: el número, pues, será siempre *un cierto tanto de veces.*

Investiguemos si en este caso puede haber números negativos, y tratemos de explicar lo que podrian ser semejantes números.

En el lenguaje vulgar empleamos las palabras sí y NÓ, afirmacion y negacion, afirmativo y negativo, para expresar dos ideas completamente *opuestas* una á otra, y tales que lo que una ha hecho nacer en nuestro espíritu se halla completamente destruido por la otra, de modo que la existencia simultánea de estas dos ideas, su REUNION inmediata, deja nuestras facultades intelectuales en el mismo estado de nulidad que si quedasen inertes, y nuestro pensamiento, despues de esta doble operacion, se halla en la misma situacion que al empezar.

Ahora bien, como en aritmética la adicion y la sustraccion son dos operaciones inversas una de otra en el mismo sentido en que lo entendemos aquí, puesto que por medio de la segunda operacion *se anula* en un número lo que se le ha aumentado por medio de la primera, ha podido suceder que se haya infiltrado la idea de *sí* y de *nó*, de *afirmativo* y *negativo* en los signos indicadores del sumar y del restar. Debe notarse que ha ocurrido en esto una anomalía, que se presenta tambien en muchas ocasiones análogas cuando se hacen aplicaciones semejantes, y es que una de las dos expresiones no se ha conservado, siendo reemplazada por otra equivalente; y por esto en vez de decirse *afirmativo*, se ha dicho *positivo*.

Así el signo de la adicion, designado primero por *mas*, se ha llamado signo *positivo*, y el signo de la sustraccion, designado en un principio por *menos*, se ha llamado *negativo*.

Tal es, si no me engaño, la introduccion mas natural de las palabras *positivo* y *negativo* en el lenguaje de la ciencia, y así es como puede suponerse que, por la primera vez, las ideas que estas palabras representan se hayan conglomerado y aglutinado en la de *número*.

Pero, obsérvese bien que no es el *número* lo que estas palabras han venido á modificar ni que es la idea de número lo que ha recibido modificacion: á operaciones hechas ó por hacer sobre los números es á lo que esas voces se aplican, porque únicamente se destinan á designar tal ó cual uso que se haga del número, y porque, en cuanto al número en sí mismo, no dicen absolutamente nada mas ni menos especial de lo que ya se sabia sobre su verdadera naturaleza, esencialmente abstracta.

—Las palabras POSITIVO y NEGATIVO no pueden tener mas que un valor de relacion.

Observemos en segundo lugar que, por sí mismas y consideradas AISLADAMENTE, las palabras *positivo* y *negativo* no tienen valor absoluto, y que, tanto en el lenguaje aritmético como en el vulgar, tienen significado por causa de la comparacion. En efecto; puesto que el *sí* y el *nó* están destinados á representar ideas contradictorias en el sentido en que lo hemos explicado arriba, todo lo que resultará es que, despues de haber caracterizado una de esas ideas declarándola *afirmativa*, habremos de aplicar á la otra la voz de negativa; pero, como nada obliga á elegir para esto la una mas bien que la otra, tendremos que, segun la voluntad del calculador, lo que se considera como positivo por uno podrá ser considerado por otro como negativo, y, sin embargo de esta diversidad en la eleccion, no resultará confusion ninguna, siempre que tengamos comprendida de antemano la naturaleza de cualquiera de las dos ideas ó de las dos operaciones contrarias á que se haya CONVENIDO en llamar *positiva*.

Por lo demás, á poco que se reflexione, se comprende fácilmente que no hay problema que no pueda ponerse de dos modos, de tal manera; que, para expresar el mismo hecho, será menester, segun el giro dado á la frase en que se haya de hacer la pregunta, responder ya sí, ya nó, aunque en ambos casos la cosa que se quiere enunciar quede invariable.

Por ejemplo, si se trata de expresar la idea de que debe cesar la accion de andar, responderemos *nó*, cuando nos pregunten si vamos á continuar, y responderemos *sí*, cuando nos pregunten si vamos á parar.

En resúmen, hasta ahora vemos:

1.° Que las palabras positivo y negativo no pueden tener significacion absoluta:

2.° Que solo tienen una significacion relativa, que, en general, sirve para expresar la oposicion en dos ideas inversas:

3.° Y que, en este supuesto, no han podido razonablemente introducirse en la ciencia aritmética sino para designar operaciones opuestas, como son la adicion y la sustraccion.

Prosigamos ahora estas explicaciones, y veamos cómo las ideas de positivo y negativo, han podido pasar de las OPERACIONES á los NUMEROS.

—De los números abstractos positivo y negativo.

Ahora bien, puesto que se ha convenido en llamar al signo de la adicion positivo, y al de la sustraccion negativo, parece que nó cometeré ningun error diciendo que todo número que haya que añadir es *positivo*, y todo el que haya que quitar *negativo*. Es evidente, en efecto, que, lejos de ocasionar errores esta convencion, podrá, al contrario, ser de alguna utilidad en la práctica, y, al ponerla por obra, no haremos por otra parte mas que enunciar una cosa ya estipulada de antemano, puesto que todo número agregable debe ir con el signo de la adicion que se ha convenido en llamar positivo, y todo número que tenga de restarse debe ir con el signo de la sustraccion, que se llama negativo.

Así, con tal que explícita ó implícitamente se entienda que HAY QUE hacer una adicion ó una sustraccion, es fácil concebir hasta ahora lo que puede ser un número abstracto positivo ó negativo.

Pero ¿sucederá lo mismo suprimiendo toda idea de adicion ó de sustraccion, si fuese preciso, independientemente de toda idea sobre estas operaciones, concebir aun los números positivos y negativos? Sin duda que nó, y, para comprenderlo, solo hay que suponer que en cada cuestion se ejecutan todas estas operaciones, si no por completo, al menos, en tanto cuanto es posible. Por tal medio, nos desprendemos de las consideraciones anexas á estas operaciones, practicamos con este motivo todo lo que el problema exije, y, cuando, hecho esto, nos encontramos aun en presencia de un número que debe reputarse como negativo y en el cual no puede ya hacerse ni concebirse sustraccion, se reconoce que la existencia de semejante número es un verdadero misterio, y que es imposible dar un paso mas para enunciar una explicacion racional acerca de su existencia.

Así, cuando hallemos escrito — 14, comprenderémos que el número 14 debe sustraerse de otro número; si, segun la cuestion propuesta, este número es 19, el resultado de la sustraccion será 5. Si el número de que hay que restar 14 es tambien 14, el resultado de la sustraccion será cero. Pero siempre que el número de que tengamos que quitar 14, sea menor que 14, entonces la operacion será incomprensible é inejecutable.

Supongamos, por ejemplo, que tal número sea 9; para que lo que se pide sea practicable, seria preciso que se pudiese quitar del número 9, el número 14. ¿Qué habremos de hacer? Es preciso buscar cual es el grado de la escala de pluralidad á que se llega quitando del grado 9 de esta escala el grado 14. Pero si existe semejante grado es evidente que, añadiéndolo á 14, se deberá reproducir 9: consecuencia absurda, porque 9 es menor que 14, y un grado cualquiera, aumentado en otro grado, debe siempre dar un grado superior al primero.

Es, pues, imposible quitar 14 de 9: todo lo que se podrá hacer será descomponer 14 en dos partes, 9, y 5; y lo mismo vendrá á ser quitar 14 de 9, que quitar del 9, 9 y 5; condicion cuya forma obtendré, escribiendo, segun nuestras precedentes convenciones, — 9 y — 5.

Muy bien puedo quitar á 9 la primera de las dos partes en que he descompuesto el 14; tendré entonces 9 — 9, lo que dá cero por resultado; pero de este modo no habré hecho mas que una parte de lo que se pedia, porque el problema consistia en sustraer el 14 todo entero de 9, y nó una parte solo de 14. Si, pues, yo quisiese que el problema estuviese completamente resuelto, seria preciso ahora quitar todavía cinco, operacion representada por —5; pero ¿de dónde lo tengo de quitar? Ya no es del 9, puesto que el 9 ha desaparecido en la primera sustraccion, no quedando nada. ¿Es, pues, del cero? Pero, ¿qué es quitar 5 de cero? ¿Ó lo que lo mismo que es 0 — 5? Ó bien, ¿qué es — 5?

Todo esto es ahora incomprensible, y se vé, que no tenemos mas medio ni mas modo de explicar por palabras lo que es este — 5, sino diciendo que es la expresion de una imposibilidad.

Parece, pues, supérfluo, en esta parte puramente abstracta de la ciencia del cálculo llevar mas adelante el exámen del número precedido del signo negativo: lo que hemos dicho de esta última palabra encierra todo lo que podemos decir de ella en aritmética, y la última consecuencia á que llegamos es que todo numero negativo, (ó sea, todo número precedido del signo *menos*, cuando ya no hay sustraccion en que pueda entrar en juego, y cuando este número es abstracto á la manera con que lo hemos explicado,) contiene el indicio de una perfecta imposibilidad, siendo para nuestra inteligencia un signo seguro de una falta absoluta de sentido ó de una pura contradiccion.

Lo que acabo de decir del número negativo, lo diré tambien del número positivo, esto es, del número agregable; porque ¿qué puede significar + 5, considerado *aisladamente*, y con independencia de toda idea de adicion? No hay que salir con la consideracion de que siempre es posible una adicion, cualquiera que sea el número que haya que añadir, y que en su consecuencia siempre se podrá saber lo que significa + 5.

Sin duda una adicion siempre es posible cuando se tienen los elementos de que se compone, pero cuando es preciso hacer una adicion, y únicamente tenemos un SOLO elemento de esta operacion, es completamente ininteligible lo que queremos decir. Ahora bien: + 5 significa dos cosas: por una parte, que 5 deberá añadirse; por otra, que concebimos aislada é independientemente á + 5 sin ninguna idea de adicion: ¿no es claro que nos ponemos voluntariamente en el terreno de lo contradictorio, escribiendo con el signo + y enunciando con la palabra *mas* ó *positivo* que el número 5 está sometido á cierta operacion, y diciendo en seguida que lo concebimos independientemente de toda operacion?

Hé aquí porqué es tan refractario para la inteligencia un número positivo que no debe agregarse á algo como un número negativo que no debe quitarse de nada.

Así, en la parte de la ciencia del cálculo en que se consideran los números como representantes únicamente de los diversos grados de la escala de pluralidad, un número negativo es solo un número precedido del signo de la sustraccion, ó un número que es menester sustraer. Ahora bien; únicamente hay dos casos en que la sustraccion será posible, y entonces la existencia ó la manifestacion de un número negativo no implicará contradiccion. Pero, si la sustraccion es imposible, la contradiccion y la imposibilidad resultarán en el acto manifiestas, porque, despues de haber efectuado la sustraccion en tanto cuanto fuere posible, cuando ya no hubiera sustraccion que hacer, seria menester, sin embargo, para que tuviese sentido el resultado, que aun fuese practicable la operacion ya agotada de restar.

—Exámen de esta asercion: todo número abstracto es esencialmente positivo.

No dejaré este punto sin hacer una observacion sobre un aserto contenido en muchas obras: *todo número abstracto es esencialmente entero y positivo.* Las últimas observaciones que acabo de hacer son ya de naturaleza bastante á probar que la última parte de este aserto es, por lo menos, muy incierta; pero examinémosla mas en particular.

No hay duda que todo número abstracto es entero, y tanto que mientras no se haya explicado lo que es media vez, un tercio de vez, un cuarto de vez, no será posible comprender lo que es un número abstracto fraccionario.

Pero de ninguna manera veo que todo número abstracto sea esencialmente positivo, y no sé porqué se quiere pretender que debe ser mas bien positivo que negativo. Por de pronto no perdamos de vista que las expresiones *positivo* y *negativo* no tienen mas que un valor de relacion una con respecto á otra, que nos servimos de ellas solo para caracterizar la oposicion que existe entre dos ideas, dos operaciones, ó dos hechos contradictorios que se destruyen mútuamente. En este supuesto, como ya lo he hecho observar, cada una de estas ideas ó cada una de estas dos operaciones puede ser arbitrariamente llamada positiva ó negativa, con tal de que se reserve para su inversa aquella de las dos expresiones de que no se haya hecho primeramente uso. Sentado esto, no se puede comprender cómo se quiere hacer una excepcion con los números, ni porqué se dice que son mas bien positivos que negativos. Por sí mismos los números no son ni una cosa ni otra, y á poco que se reflexione sobre el cómo se han aplicado á los números las calificaciones de positivo y negativo, fácilmente nos convenceremos de tan clara verdad.

En efecto, número positivo no puede significar otra cosa que número precedido del signo de la adicion: esto es, número agregable, número que hay que añadir; y número negativo querrá decir número que separar. Ahora bien, ¿no es evidente que si se hubiese convenido en llamar negativo al signo de la adicion, y positivo al de la sustraccion, como ciertamente ha podido hacerse, hubiera sido menester decir entonces que todo número abstracto es esencialmente negativo? Y hé aquí el aserto anterior cambiado completamente. Pero esto solo concierne á la forma; en cuanto al fondo, vemos que si sirviéndose de la palabra positivo los escritores de que hablo han querido realmente decir número que debe sumarse, se han engañado tan perfectamente en este caso como en el primero.

¿Porqué el número abstracto se ha de sumar mas bien que restar? ¿Dónde constan los privilegios de la adicion sobre la sustraccion? ¿Porqué han de ser los números admitidos sin exámen á los honores de una de esas operaciones y marcados con un signo de reprobacion con respecto á la otra?

Y en hecho de verdad no sucede así: el número es á la vez llamado á funcionar como aditivo y como sustractivo. ¿Nos hemos de inclinar á nombrarlo positivo, porque nos parezca el empleo del número en el segundo caso mas limitado que en el primero? Si hemos de pensarlo así, digámoslo francamente para que se sepa el motivo que nos impulsa; pero en tal caso borremos la palabra ESENCIALMENTE, porque dice mas de lo que estamos autorizados á decir.

—El uso del número negativo no es mas limitado que el del número positivo.

Por otra parte, cuidemos de no caer en un nuevo error, diciendo que el empleo del número como sustractivo, es mas limitado que el del número considerado como aditivo.

Pudiera ser así si una sustraccion imposible no fuese una verdadera respuesta á una cuestion propuesta; pero semejante sustraccion es tambien una solucion de un problema que puede ser el resultado de una adicion ó de una sustraccion efectuadas. En un caso sabemos que la cuestion propuesta no es posible: en el otro que lo es. Quizás se añadirá que cuando la cuestion es posible, de más se sabe lo que es menester hacer para obtener su solucion; pero respondo que en tal concepto el primer caso no es mas estéril que el segundo, y que la sustraccion imposible, aun conociendo la imposibilidad del problema, muestra al mismo tiempo lo que sería necesario hacer sobre los datos para que estos dejasen de expresar una imposibilidad. Tan perfectamente sabemos *el cuánto* se aparta la cuestion del límite de lo posible, como sabíamos antes lo que era preciso hacer por el otro lado de este límite, en la region de lo posible, para resolverla.

No es este el lugar propio para desenvolver con mas extension este aserto, pero no es necesario haberse internado mucho en el estudio del Algebra para convencerse de esta verdad. Bien difícil es, pues, decidir si el uso de los números negativos ó sustractivos es mas limitado que el de los números positivos ó aditivos. En cuanto á mí, no sé si debo admirarme más cuando hallo en la ciencia los medios de resolver una cuestion que cuando la ciencia me indica que una cuestion es imposible, y, rectificando mis errores ó ilustrando mi ignorancia sobre el estado de esta cuestion, me muestra por sí misma el CÓMO ó el CUÁNTO debo reformar su enunciado para hacer desaparecer las imposibilidades.

—Respuesta á algunos sofismas.

Si, apurando todas las argucias de una escuela que no está en la verdad, quisiera alguno presentar la batalla en otro terreno, defendiendo que todo número sumado con cero no deja de ser el mismo número, y que así puede concebirse siempre que un número es el resultado de su adicion real ó posible con cero; y si, además, se dedujese de aquí, que siempre hay una adicion que PUEDE hacerse ó concebirse para cualquier número, en cuyo caso hay suficiente fundamento para sostener que el número es ESENCIALMENTE positivo, responderé que, aun admitiendo que el agregar cero á un número sea hacer una verdadera y real adicion, semejante posibilidad no es una propiedad del número de tal modo característica, de tal modo inherente á su naturaleza, de tal modo distintiva de su esencia, que pueda decirse, aun admitiendo la batalla en tal terreno, que el número es ESENCIALMENTE positivo; pues, por el contrario, todos los objetos creados, todos los séres posibles, ya en el mundo físico, ya en el mundo moral, gozan de esa llamada propiedad, atribuida solamente y sin razon al número, de que si NADA se les añade no dejan de ser lo que son.

No es, pues, eso una propiedad esencial solamente al número, sino una propiedad comun á todo y aplicable á todo; y por otra parte salgamos de estas lastimosas argucias bajo las cuales nos refugiamos, á menos que no sea en el fondo de las cosas donde no tratemos de ver claro, deteniéndonos solo en la forma.

¿Realmente es sumar agregar cero?

¿Es hacer algo no añadir nada?

En el lenguaje aritmético, tal como lo estudiamos aquí, cero no es, ni ha sido, ni jamás puede ser mas que el signo de la nada, y ¿no se vé entonces que hacer adicion de nada es en el fondo no hacer nada? ¿Que al razonar así se juega del vocablo? ¿Que lo que resulta es solo el hábito de estudiar la ciencia por sofismas, y no desenvolver los principios sino por medios completamente extraños á su esencia?

En fin, si se dijese que todos los números pueden concebirse como formados por el primero de ellos, llamado

UNIDAD, añadido sucesivamente á sí mismo, y que, bajo este punto de vista, siendo todos los números resultados de adiciones, pueden ser llamados POSITIVOS, responderé, primero, que el principal error de esta interpretacion es sacar de quicio la cuestion, pues número positivo no es el que resulta de una adicion HECHA, sino el que debe formar parte de una adicion por HACER, y ciertamente no se necesitaria mas para mostrar que, teniendo en consideracion el objeto que nos ocupa, semejante interpretacion no es de ninguna importancia; pero, como los errores cometidos sobre estas particularidades de la ciencia de los números han sido tan científicamente repetidos, añadiré algunas palabras sobre esta formacion de los números.

No disputaré que sea posible y aun cómoda, pero creo que está lejos de ser *esencial*, esto es, que no es tal que sin ella no puedan ser inteligibles los números.

En efecto, si para esta formacion la unidad y la adicion constituyen un medio cómodo, no es un medio, sin el cual no podamos pasar. Y esta consideracion facilita sin duda la percepcion de los números, pero no es indispensable para engendrar en nuestra alma la idea de pluralidad que, á mi parecer, es preexistente á la de adicion ó de sustraccion.

¿No podré, para formar los números comprendidos entre los dos límites 1 y A, decir que se derivan todos de A por la sustraccion sucesiva de la unidad? La única diferencia entre estos dos procederes es que en vez de tomar el límite mas pequeño, tomo el mayor. Confieso que el otro modo es mas cómodo; pero lo que se trata de probar es que sea *esencial*, fundado en la naturaleza y dependiente de la naturaleza íntima del número.

¿Ahora bien, ese punto de partida es mas esencial ni mas natural que el mio? ¿El número 1 está mas en la naturaleza que el número A? Mucho trabajo costaria, establecer semejante principio, y la pluralidad me parece difundida por todas partes con profusion. ¿No hay mas que una sola estrella en el cielo y un solo grano de arena en el Océano? ¿Un árbol se compone de una sola hoja y el mar de una sola gota de agua?

Por muchos esfuerzos que se hagan, jamás se encontrará una base sólida para el aserto de que el número es *esencialmente* positivo.

—*Resúmen.*

En resúmen, me parece que resulta de la anterior discusion:

1.° Que, bajo el punto de vista en que he anunciado al principio que consideraba los números, no es posible admitir en el lenguaje aritmético propiamente dicho, ó por mejor decir en el abstracto, que las palabras *positivo* ó *negativo* puedan aplicarse á otra cosa que á las dos operaciones inversas de sumar y restar:

2.° Que por las expresiones, *número positivo*, *número negativo* no puede entenderse otra cosa sino *número que* HAY QUE *añadir*, *número que* HAY QUE *sustraer*:

3.° Que es contradictorio querer comprender aislada é independientemente de toda operacion de adicion ó de sustraccion, LO QUE PUEDE SER un número *positivo* ó *negativo*, puesto que desde el instante en que se unen las palabras *positivo* ó *negativo* á la palabra *número*, ó bien los signos + y — á los *caractéres* que sirven para representar los números, ya no los consideramos, de hecho, aisladamente, sino al contrario como próximos á entrar en juego en una adicion ó en una sustraccion:

4.° Que el signo — delante de un número indica necesariamente un caso de perfecta imposibilidad, cuando todas las operaciones que hay que hacer, segun la enunciacion de la cuestion, están agotadas:

5.º En fin, que lo único que resulta ESENCIAL para los números es la propiedad de SER ENTEROS; pero que no es mas lógico decir que son *esencialmente positivos*, que el querer negarles la propiedad de representar alguna vez algo posible cuando son negativos: que, bajo este punto de vista, en cada cuestion particular habrá que hacer un exámen prévio, para saber cual es de estas dos calificaciones la que debe atribuirse á los números que figuren en la cuestion, y que si los números fuesen esencialmente positivos, nunca podrian ser negativos, so pena de dejar de ser números por serles esencial lo positivo.

SECCION III.

ESTUDIOS SOBRE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION.

—Preámbulo.

Acabamos de ver en la seccion precedente, las consideraciones á que nos ha conducido el exámen atento de las dos primeras operaciones de la aritmética; y hemos visto:

1.º Que la adicion en tanto que figura sola en las operaciones que hay que hacer para resolver una cuestion, es una señal de que el problema es *posible*.

2.º Que si por el contrario un problema no es posible se revelará esta circunstancia por la presencia en los cálculos de una sustraccion impracticable, y por la permanencia despues de hechos todos los cálculos de un número afectado del signo —, ó sea de un número negativo.

Ahora, vamos á ver que lo mismo sucede con los otros varios grupos de operaciones, y que los diversos caractéres de imposibilidad de los problemas aritméticos se revelarán, como el precedente, por una de esas operaciones imposibles de realizar.

—De la multiplicacion y de la naturaleza de sus factores.

Suponiendo que se agregan varios números unos á otros, y que estos números son todos iguales entre sí vendremos á parar al caso particular de la adicion que se ha convenido en designar por un nombre particular, y que se considera como una operacion nueva.

Pero en realidad lo que hay de nuevo es el nombre y el procedimiento para obtener el resultado; porque en la esencia siempre es una adicion lo que se ejecuta. En el caso de que hablamos, esta adicion recibe el nombre de *multiplicacion*: el número REPETIDO se llama *multiplicando*, EL NUMERO DE VECES que el multiplicando se repite se llama *multiplicador*, y el resultado obtenido, en vez de conservar el nombre de suma, se llama *producto*: se dice tambien del multiplicando y del multiplicador que cada uno de ellos es *factor* del producto.

Ahora bien, como en la adicion, considerada bajo un punto de vista general, los números repetidos son y no pueden dejar de ser enteros, se sigue de aquí que en la multiplicacion el *multiplicador* será constante y necesariamente entero, y que nunca representará mas que la idea de UN CIERTO NUMERO DE VECES, siendo por consiguiente un número *abstracto* tal como lo hemos definido al principio. Se vé, pues, que, ascendiendo hasta el verdadero orígen de la multiplicacion, es imposible COMPRENDER y admitir que el *multiplicador* no sea entero; como igualmente es imposible comprender y admitir que este número pueda ser CONCRETO, esto es, que represente una cantidad cualquiera que sea; porque este número, en una palabra, es y no puede ser mas que un número de veces.

En cuanto al multiplicando nada se opone á que sea *concreto*, porque, en efecto, puede uno proponerse el repetir varias cantidades; y, como en la ciencia del cálculo las cantidades se representan por números, puede suponerse que el multiplicando es uno de estos números destinados á representar las cantidades. Se vé que aquí admito como demostrada la proposicion de que las cantidades pueden representarse por números. Si hubiese ahora de detenerme en este punto, no estarian fuera de lugar los pormenores todos que exije la teoría de esta representacion; pero como á esto he destinado el tercer capítulo de esta obra, me basta por el pronto conceder que el multiplicando es abstracto como el multiplicador, y que estos dos números, en lo que vá á seguir, nunca son otra cosa mas que ciertos grados de la escala de pluralidad.

Resulta evidentemente de estas consideraciones que en la suposicion en que nos colocamos de que el multiplicando es abstracto, y por consiguiente entero, (*debiendo siempre serlo el multiplicador* SEGUN SU NATURALEZA) el producto de toda multiplicacion no puede ser sino un número entero. Pero la proposicion inversa no es verdadera, y todo número entero no es el producto de una multiplicacion, al menos si se admite que la unidad no multiplica, esto es, que no es REPETIR tomar UNA vez. Pero con este motivo permítaseme presentar algunas observaciones.

—*La expresion* $N. \times 1$ *no es una multiplicacion.*

Quizá parezca pueril abrir una discusion séria con motivo de semejante cuestion; y realmente seria así, si ante todo se hubiese tratado de introducir en la exposicion de la ciencia explicaciones sacadas del dominio de la verdadera filosofía; pero en esta ocasion, como en otras muchas, los matemáticos se han separado del camino razonable para entrar en el terreno de las argucias escolásticas. Sin duda no han podido arraigarse en los hombres sensatos la mayor parte de las ideas que aquí combato; pero ¡cuán escasas son las inteligencias avaras de la precision que *naturalmente* tienen los raciocinios exactos! ¡Cuántas hay que parecen complacidas únicamente cuando introducen en sus demostraciones el capricho ó la rareza de los medios, la sutileza ó el discreteo en las razones!! Y por desgracia, esto es lo que se encuentra en la mayor parte de las obras de enseñanza!!

Ahora bien; como al escribir este libro he sentido la necesidad de que se introduzcan imprescindiblemente reformas en el plan de los tratados elementales, ha de perdonárseme mi insistencia hasta en aquellos pormenores que, con el tiempo han de contribuir quizás á facilitar el estudio de las ciencias matemáticas.

Vuelvo á mi asunto.

Si tratamos de darnos cuenta del sentido que tienen las palabras *multiplicar*, *repetir*, lo primero que razonablemente nos ocurre es que encierran en sí la idea de pluralidad de la cosa repetida, y que esta idea no se satisface como esta cosa no se repita ó se tome dos veces por lo menos. Bajo este punto de vista los analistas tienen mucha razon, tanto en la esencia como en la forma, cuando dicen que la unidad no multiplica, y por consecuencia yerran y se sirven de una expresion viciosa cuando dicen multiplicar por *uno*; pues multiplicar por uno, ya no es hacer una multiplicacion, porque la idea de repeticion ó de multiplicidad, ó pluralidad, contenida en la voz *multiplicar*, se halla en contradiccion con la de unidad, por haber entre ambas incompatibilidad completa.

Por fortuna poseemos un regulador irrecusable y de una aplicacion general, ya para esta dificultad, ya para otra cualquiera relativa á la multiplicacion, que consiste en ascender al orígen de la operacion que, como hemos dicho, es la suma. Recordemos, pues, que la multiplicacion es una adicion en que todos los números añadidos son iguales entre sí.

De esta definicion resulta forzosamente que siempre que una pretendida multiplicacion no se resuelva en una suma, no habrá motivo ninguno para calificar la operacion con el título de multiplicar; pues para que haya adicion es preciso, indispensable, que DOS números *al menos* ya iguales ó desiguales entren en juego. Luego tomar un número solo, tomar un número una vez no es hacer una adicion, y, por consiguiente, mucho menos será hacer una multiplicacion. Así, por cualquier lado que se examine la cuestion, siempre resultará que, siendo N un número cualquiera, no debe darse el nombre *de multiplicacion á ninguna operacion escrita bajo la forma* $N \times 1$.

Lo que decimos aquí del multiplicador 1, tiene la mayor analogía con lo que ya hemos dicho de la adicion de un número con cero, y, en efecto, hemos demostrado que no se debe dar el nombre de adicion á ninguna operacion escrita bajo la forma $N + 0$, pues que esta forma indica en realidad que nada hay que añadir.

Esta analogía nos lleva á una observacion que no debo pasar en silencio, y es que las dos expresiones $N \times 1$ y $N + 0$ son realmente iguales entre sí; pues cada una expresa que es preciso tomar el número N, sin hacerle nada absolutamente, por lo que podemos escribir:

$$N \times 1 = N + 0.$$

Esta relacion prueba tambien que $N \times 1$ no puede ser una multiplicacion, pues, si á pesar de todo lo que dejo dicho para probar que $N + 0$ no es una adicion, se persistiese en atribuirle el carácter de suma, deberia al menos concederse que los números agregados N y 0, no son iguales entre sí, y que por consiguiente, aun suponiendo que la fórmula representase una suma, no podia ser nunca una multiplicacion. Así, las dos formas $N \times 1$, $N + 0$, no representan ninguna operacion que haya que ejecutar con N, pues, al contrario, son dos indicios que aparecerán en los cálculos siempre que no haya nada que hacer con el número N para resolver una cuestion.

Segun estas observaciones se vé que se ha procedido filosóficamente conservando la denominacion de números primos á todos los que no son producto de la multiplicacion de otros dos; y, en efecto, todos los números, excepto estos, pueden mirarse como derivados de otros números, como consecuencia de la existencia de estos otros números, y como secundarios con relacion á ellos, condicion que no existe en los primos.

—La expresion $N \times 0$ no es una multiplicacion.

Un caso no menos notable que el que acabamos de examinar es aquel en que el multiplicador es cero.

Veamos, pues, lo que puede significar $N \times 0$.

Es evidente que esto indica, que el número N no debe tomarse absolutamente, y que en su *consecuencia la única significacion razonable que puede* tener la expresion anterior es cero.

¿Pero puede esto considerarse como una multiplicacion? Sin duda que nó, pues si repetir una cosa una vez no es multiplicar, con mayor razon dejará de serlo no repetirla ninguna ni hacer nada con ella.

Además, y segun la observacion antes hecha, para que $N \times 0$ fuese una multiplicacion seria preciso que hubiese una adicion en que entrase N y cuya suma fuese nula, lo que es evidentemente absurdo. De todas las operaciones que hemos examinado hasta ahora, la siguiente sustraccion $N - N$ seria la única que, no haciendo uso mas que de N, daria el mismo resultado que $N \times 0$; de modo que podemos escribir

$$N \times 0 = N - N.$$

Y estos serán los dos símbolos que aparecerán en el cálculo siempre que para resolver una cuestion que presupone la existencia del número N sea menester, por el contrario, destruir este mismo número para obtener la solucion del problema.

Ahora vemos que si, conforme el uso adoptado, se continúa diciendo que $N \times 1$ y $N \times 0$ son multiplicaciones, tal incorreccion no puede ser admitida mas que en virtud de una extension natural, pero nó filosófica, porque solo se funda en la *forma* bajo que se presentan esas dos expresiones, puesto que en el *fondo* no es exacto proceder así: por consiguiente, toda ley que se aplique á la multiplicacion en general, no podrá extenderse sin reserva á esas dos raras expresiones de que ahora tratamos.

—*Falsa aplicacion de la ley de la invariabilidad del producto.*

Sin embargo, puesto que el órden de los factores no altera el producto, pudiera raciocinarse así:

Las expresiones $N \times 1$ y $N \times 0$, son lo mismo que $1 \times N$ y $0 \times N$.

Ahora bien: $1 \times N$ expresa que 1 se repite N veces, lo cual es una verdadera adicion en que los números añadidos son todos iguales entre sí; luego $1 \times N$ es una multiplicacion.

Tambien $0 \times N$ expresa que 0 se repite N veces, y es tambien una suma en la que los números añadidos son todos iguales entre sí, de donde se sigue que $0 \times N$ es una multiplicacion.

En uno y otro caso, (si admitimos que $0 + 0 + 0 + \ldots$ pueda mirarse como una adicion) las consecuencias del raciocinio son exactas; pero ¿qué prueban esas consecuencias? Hay que observarlo bien, solo prueban que $1 \times N$ y $0 \times N$ son multiplicaciones, pero nó que lo sean $N \times 1$ y $N \times 0$.

En efecto, la ley de que se hace uso no es aplicable sino cuando, cambiando el órden de los dos factores, la operacion indicada continúa siendo una multiplicacion y cuando no se sabe de antemano que una de estas operaciones deja de serlo. Ahora bien, esto es lo que nùnca sucede á $N \times 1$ y $N \times 0$, puesto que hemos establecido á priori que estas dos operaciones no pueden, segun la definicion adoptada, ser una multiplicacion, de manera que se aplica la ley de la invariabilidad del producto á un caso para el que es evidente la imposibilidad de su aplicacion.

No quiere esto decir que $(N \times 1)$ no sea igual á $(1 \times N)$ ni que $(N \times 0)$ deje de serlo á $(0 \times N)$: al contrario, fácil es probar á priori que estas expresiones son iguales entre sí. Pero de que exista tal igualdad no se sigue que las operaciones que hay que hacer para realizar una y otra, son iguales, lo cual es simplemente lo que nos proponíamos demostrar.

Estas observaciones, pues, patentizan por una parte cuanto importa en la ciencia del cálculo discutir todos los CASOS y examinar todas las excepciones, so pena de caer en el error; y por otra indican (cosa que hasta hoy no se habia advertido), que las demostraciones, tanto antiguas como futuras de la invariabilidad del producto, cuando se cambie el órden de los factores, dejarán de ser exactas en cuanto uno de ellos es menor que 2.

—Dudas y dificultades introducidas en la ciencia del cálculo con motivo de la definicion de la palabra multiplicar.

La definicion que he dado de la multiplicacion no está admitida por todos los autores de elementos, aunque es la mas, clara y sencilla y pueden sacarse de ella todas las propiedades de esta operacion, puesto que es la única realmente admisible bajo el punto de vista en que estamos colocados, esto es, partiendo de que no se puede operar sino con números abstractos, con números que ni directa ni indirectamente se refieran á ninguna idea concreta, lo que á mi entender excluye desde luego los números fraccionarios, al menos bajo el punto de vista teórico.

Pero esta diferencia en el modo de proceder consiste en que esos autores han dado al terreno de lo abstracto mas extension de la que realmente tiene incluyendo en él á los números que se llaman fraccionarios; pero yo probaré que la existencia de semejantes números es incomprensible, como no se refieran á ideas CONCRETAS. Cuando las fracciones por primera vez aparecen en el cálculo de los números indican una imposibilidad, porque la unidad, mientras no sirve mas que para contar, mientras no representa una cantidad, en una palabra, mientras no es CONCRETA, es *por su naturaleza* INDIVISIBLE, y no es dado á nuestra razon comprender qué puede ser una fraccion ó un pedazo cualquiera de la UNIDAD DE NUMERACION.

Ligado de este modo por los geómetras el estudio de las fracciones al de los números, desde luego se advirtió que lo que con el tiempo se ha llamado multiplicacion de las fracciones no encajaba en la definicion que he dado, por lo que trataron de hallar otra aplicable á todos los casos. ¿Lo lograron? Esto es lo que ahora vamos á examinar.

"La multiplicacion de un número por otro, dicen estos autores, es una operacion por la cual se compone un tercer número con el primero como el segundo está compuesto con la unidad."

A poco que se examine con cuidado esta definicion no se tardará en descubrir que no sirve para otra cosa que para indicar la composicion del producto, y que ciertamente carece del verdadero carácter de una buena definicion, puesto que no solo no dice nada, sino que ni aun hace presentir los medios que deben emplearse para obtener el producto.

Porque si se quiere componer un número con otro, y si esta composicion ha de ser análoga á la de un tercer número con la unidad, es preciso, cuando menos, que se nos haga conocer con todos los pormenores convenientes el cómo se componen los números con la unidad. Pero siendo en la region de lo puramente abstracto siempre enteros los números, podemos considerarlos como formados por la adicion sucesiva de la unidad. Si repetimos, pues, para formar el producto tantas veces el multiplicando cuantas ha sido preciso repetir la unidad para formar el multiplicador, entonces se viene á parar literalmente á la definicion que he dado de la multiplicacion, con la sola diferencia de que á la palabra *componer* he sustituido la de *contener*, lo cual es infinitamente mas claro, porque conduce naturalmente á la série de operaciones que es preciso practicar para obtener la operacion definida.

Así, en la region de lo abstracto y en los límites que he trazado, la definicion de la multiplicacion dada por los autores de que hablo es ciertamente menos clara y menos explicativa que la que he dado á conocer.

Pero se dirá, si bajo este punto de vista la definicion parece, en efecto, llena de inconvenientes ¡cuánto no aventaja á la otra por su generalidad!!

Esta proposicion puede parecer verdadera á primera vista, sobre todo á los que, habiendo ya estudiado la ciencia, han podido desde hace mucho tiempo meditar sobre la naturaleza de cada operacion; para estos, digo, la nueva definicion del multiplicar ofrece un resúmen corto y fácil de cuanto hasta este dia ha recibido el nombre de multiplicacion. Mas para el discípulo que empieza, para el que quiere estudiar por la primera vez la ciencia del cálcuto, para el que no sabiendo nada necesita marchar progresivamente en este estudio, esa generalidad que á vuestros ojos forma el mérito de vuestra definicion vá á ser un manantial de incertidumbres, de errores, y aun quizá una causa insuperable de repugnancia al estudio.

Si, en efecto, parece racional una separacion en la ciencia que nos ocupa entre lo que es abstracto y lo que es concreto, si, como lo probaré pronto, la confusion de estas dos ramas de la ciencia ha oscurecido su inteligencia y á menudo detenido sus progresos, quedaremos convencidos de que, por ahora, esto es, al empezar los estudios, la definicion que critico debe ser rechazada, pues que acabo de demostrar, en efecto, que en el dominio abstracto, tal como lo entiendo y lo he definido, satisface muchísimo menos que la anteriormente dada por mí.

Si salimos de la region de lo abstracto, esto es, del caso en que los números son enteros, y si tenemos que operar con números fraccionarios, preciso será que empecemos por explicar cómo un número fraccionario se compone con la unidad. Llevada la cuestion á este especial terreno, se reconocerá que no puede darse un paso por él y que es preciso recurrir á consideraciones concretas. Entonces la unidad, que hasta ahora llevamos estudiada, lo que yo llamo unidad de numeracion, que es el primer grado de la escala de pluralidad, aparece insuficiente y nos vemos obligados á dar esa denominacion á todas las CANTIDADES susceptibles de representarse por números.

Pero ¿se dice algo en aritmética de esa representacion de las cantidades por los números? ¿Al empezar el estudio de la ciencia se dá algo á conocer respecto de esa misma representacion, que es la base de todas las aplicaciones del cálculo, que ejerce su accion en todo, y sin la cual no existe el estudio de las cantidades? Nociones acaso, y casi siempre nada.

Y sin embargo ¡qué inmensa diferencia existe entre la unidad de NUMERACION y la unidad representativa de una CANTIDAD, entre la unidad *numérica* y la unidad *cuantitativa*, entre la unidad NUMERO DE VECES, y la unidad MODULO, entre la unidad invariable é indivisible y aquella cuyo valor cambia con el capricho de cada cual, y cuya grandeza ó pequeñez nada limita, entre la unidad igual para todos los hombres y para todos los pueblos, y la unidad por esencia fraccionable!!

Sin tan importante distincion vuestra definicion no es mas que un caos; y ¿cómo podreis hacer comprender toda su extension antes de haber hablado largamente de los números abstractos y de los números concretos, esto es, antes de estar iniciados en los secretos de la ciencia? Tal definicion puede pasar como un resúmen útil para el hombre que sabe, pero debe desecharse como un obstáculo para el que quiere aprender.

Y por otra parte, aceptándola desde luego ¿en qué dédalo no se pierde la inteligencia relativamente á la naturaleza del multiplicador?

En efecto, ascendiendo á la verdadera fuente de la multiplicacion, hemos reconocido que el multiplicador no puede ser otra cosa que un cierto *número de veces*, y que era imposible suponer que representase otra cosa mas que un *grado de la escala de pluralidad*, porque el MULTIPLICADOR, en una palabra, NO PUEDE SER CONCRETO.

Ahora bien; si ese multiplicador es una fraccion, esta fraccion no será inteligible sino en tanto que la unidad á la cual se refiera represente una cantidad: la composicion de esta fraccion será, pues, concreta como la unidad de que se deriva, y nos encontrarémos con una multiplicacion en que el multiplicador no será abstracto. (1)

¿Y habrá quien piense que semejantes contradicciones no merecen un profundísimo estudio y cuidadosas explicaciones? ¿O que algunas líneas bastan para levantar el velo que cubre tantas oscuridades? Yo de mí sé decir que, mientras mas reflexiono sobre estas materias, menos me admiro de que tantas inteligencias se muestren rebeldes al estudio de las matemáticas; ¡y quién sabe si las mas lógicas han de buscarse entre las que no han seguido adelante despues de las primeras tentativas? ¿Ni quién se atreverá á sostener que entre los que han cultivado la ciencia se hallará uno siquiera que, durante mucho tiempo, no se haya visto obligado á admitir, como verdades probadas lo que no era para él mas que *verba magistri*? ¿Quién sabe si hasta el fin de su carrera nuestros mas célebres geómetras han estado mas bien persuadidos que con-

---

(1) Hé aquí como con este motivo se expresa M. Lacroix en sus *Ensayos sobre la enseñanza*, 1805 pág. 260 y 261. Una dificultad, por la que han pasado con demasiada ligereza la mayor parte de los autores, es la aplicacion á los números fraccionarios de las definiciones de la multiplicacion y de la division relativas á los números enteros. Hay aquí un tránsito muy notable de una acepcion dada á las palabras multiplicar y dividir segun el caso menos complejo de la idea que expresan, á una acepcion general en que se envuelven casos nuevos, no unidos á los primeros mas que por simples analogías, *exigiendo la indicacion de estas analogías la consideracion de los números concretos...* Sin incurrir en inexactitud en la marcha del raciocinio, no se puede pasar en silencio una extension de ideas tan importante. *Hasta exije una nueva definicion de los términos* que pueda prestarse á ello y cuyas consecuencias implican nada menos que las modificaciones que deben introducirse en la ciencia del cálculo para aplicarse *á casos que parecen enteramente opuestos.*

vencidos de la verdad de ciertos principios pasados en autoridad de cosa juzgada?

Mientras que en la ciencia se continúe afirmando que todo número abstracto es esencialmente positivo,

Mientras que no se proclame en principio que todo número fraccionario es concreto,

Mientras que se continúe haciendo diariamente uso, sin explicacion, de cantidades ó de expresiones imaginarias,

Nunca habrá derecho para inculpar á los que rehusan comprender, en su conjunto, la exposicion de los principios de la ciencia.

Despues de esta digresion, que por un instante nos ha llevado á nuestro pesar á la consideracion de los números fraccionarios, entremos en el objeto especial que nos ocupa y continuemos nuestras observaciones sobre la multiplicacion y la division de los números enteros.

—Resúmen de las observaciones relativas á la multiplicacion.

Resumiendo las observaciones que hemos presentado sobre la naturaleza de la multiplicacion, hallamos:

Que como está en la esencia de la mayor parte de las COSAS creadas el poder ser repetidas, podemos desde ahora preveer que en las aplicaciones de la multiplicacion el multiplicando podrá ser concreto y fraccionario:

Pero que en todos los casos el multiplicador será abstracto y entero:

Que cuando los dos factores se suponen abstractos y enteros el producto siempre es un número entero:

Pero que todo número entero no es un producto; y hemos añadido que se llama primo todo número entero que no es producto de otros dos diferentes de él y de la unidad.

—De la operacion inversa de la multiplicacion y de las dos distintas cuestiones á que dá origen.

Despues de haber visto que los números sirven para componer otros por medio de la multiplicacion, podemos proponernos el problema inverso, esto es, dado un número, reconocer si es ó nó producto de otros dos, y en el caso de que la respuesta sea afirmativa determinar el valor de estos otros dos números.

De aquí nace la operacion de dividir.

Pero al tratar de esta operacion nueva bajo este punto de vista, adquiere un grado de generalidad que la hace salir del plan que me he trazado; pues promueve nada menos que la importante cuestion de la determinacion de los números primos que hasta este dia no se ha resuelto sino por tanteos y por medio de una série de divisiones.

Mas para hacer desaparecer de esta cuestion esa generalidad de que no quiero ocuparme por ahora, supondré que se sabe de antemano que el número propuesto es realmente producto de otros dos números, que uno de estos dos números es conocido y que se trata de obtener el otro.

No me detendré aquí á enumerar los procedimientos descritos en arimética para resolver la cuestion, pues no considero en esta obra bajo el punto de vista práctico las operaciones del cálculo, sino mas bien en su esencia y relativamente á su verdadera significacion teórica.

Cuando los dos factores son abstractos, como en tal caso el producto no varia cualquiera que sea el órden de los factores, se deduce que siempre habrá que hacer la misma operacion ya para buscar el multiplicando, conocido el producto y el multiplicador, ya para determinar este último, conocido el multiplicando y el producto. *Numéricamente* ninguno de estos dos casos de la division tiene un carácter distinto del otro, pues hay completa identidad entre su objeto, los medios y los resultados.

Pero si se supone que la cosa repetida, el multiplicando, en vez de ser un número abstracto expresa un ser concreto, una CANTIDAD, entonces excusado es decir que el producto, (que es esa misma cantidad repetida varias veces), será un *ser concreto* DE LA MISMA ESPECIE que el multiplicando. Luego si se dan el producto y el multiplicando y se trata de obtener el multiplicador, el resultado que se busca será *un número abstracto*, UN NUMERO DE VECES, y si al contrario se dan el producto y el multiplicador, la cosa buscada será *un número* CONCRETO, *una* CANTIDAD de igual naturaleza que el producto.

Así, mientras que en el caso precedente el número buscado era siempre abstracto, en este será unas veces abstracto y otras concreto, de donde se sigue que, siempre que entremos en la region de lo concreto, será preciso distinguir dos clases de division, segun se trate de determinar con el producto y uno de los factores ya el multiplicando, ya el multiplicador.

Esto muestra que si, bajo el punto de vista numérico, la ley de la invariabilidad del producto aunque cambie el órden de los factores debe tenerse por verdadera, no sucede lo mismo en las aplicaciones de la multiplicacion á las cuestiones CONCRETAS, pues entonces, para no introducir ningun desórden en el estado de la propuesta, ni cambiar la inteligencia de estas cuestiones, ni engañarse respecto á la interpretacion que ha de darse á los resultados obtenidos, puede muy bien invertirse el órden de los factores en cuanto á su VALOR NUMÉRICO, pero NO SE PUEDE obrar del mismo modo relativamente á su NATURALEZA que no es TRANSMUTABLE de un factor á otro.

Despues de esta corta digresion respecto á lo concreto, entremos en el objeto especial de este capítulo y volvamos á la division de los números abstractos.

—En abstracto las expresiones fraccionarias son el símbolo de una imposibilidad.

Como no es dado al hombre comprender en conjunto y por decirlo así á primera vista las relaciones que las cosas pueden tener entre sí, resulta que entre todas las cuestiones que pueden presentarse para determinar estas relaciones las habrá cuya solucion será posible aunque no parezca evidente; mientras que otras, al contrario, podrán al principio no parecer imposibles, aunque despues de un exámen mas detenido y profundo se advierta que son insolubles.

Por ejemplo, si se quiere determinar numéricamente la relacion que existe entre los números 277 y 21, ó en otros términos cuantas veces contiene exactamente 277 á 21, á primera vista no se sabrá si la cuestion propuesta es posible ó nó; pero, si se llega á conocer que 277 es un número primo, se deducirá en seguida que la cuestion propuesta es imposible, y que ni 21 ni ningun otro número puede hallarse contenido un número exacto de veces en 277.

Sin embargo, si quiero ejecutar, al menos en tanto cuanto es posible la operacion propuesta, hallaré que dividiendo 277 por 21 obtengo por cuociente 13 y por resíduo 4.

Pero si yo dijera que el cuociente pedido ó la relacion entre 277 y 21 se representa por 13 cometeria un error, puesto que 13 no seria cuociente de una division por 21 sino para el número 273, y lo que se pide es este mismo cuociente para el número 277.

A fin de completar la solucion de la cuestion propuesta que consiste en saber cuantas veces 277 contiene á 21 se podrá raciocinar como sigue:

Puesto que 277 es lo mismo que $273 + 4$, será menester que yo divida $273 + 4$ por 21 lo cual se escribe así:

$$\frac{273 + 4}{21}$$

Nada mas fácil que ejecutar la primera parte de esta operacion, y ya hemos dicho que dá por resultado 13; falta, pues, para acabar todo lo que hay que hacer, dividir 4 por 21 ó efectuar la operacion representada por $\frac{4}{21}$.

Todos los números de que aquí se trata son abstractos, esto es, son grados de la escala de pluralidad, y por tanto para ejecutar la operacion representada por $\frac{4}{21}$ será preciso hallar uno de estos grados que repetido veinte y una veces dé por resultado el grado 4. Pero es evidente que reducido el problema á estos términos es imposible hallar lo que se busca, puesto que siendo 21 ya mayor que 4, con mucha mas razon el producto de 21 por otro número lo será tambien.

Es pues cierto, como lo anunciamos en el principio de este capítulo, que cuando *en la parte abstracta de la Ciencia del Cálculo* la existencia de los números que se llaman fraccionarios se manifiesta por la primera vez, aparece como signo de una verdadera imposibilidad, ó bien como indicio de que la cuestion es insoluble, al menos bajo el punto de vista abstracto; porque ninguna operacion de cálculo ni ningun número puede satisfacerla, *en el sentido en que ha sido propuesta.*

SECCION IV.

ESTUDIOS SOBRE LA ELEVACION Á POTENCIAS Y EXTRACCION DE RAICES.

—De la elevacion á potencias y extraccion de las raices.

La naturaleza de las aplicaciones que preceden y los pormenores con que los hemos tratado nos permitirán exponer con mas brevedad lo relativo á la elevacion á potencias y á la extraccion de raices.

Se sabe que se dá el nombre de *elevacion á potencias* á una série de multiplicaciones en que todos los factores son iguales; el factor empleado es el número que se eleva á la potencia, y se dice de él que es su raiz: el número de veces que este factor entra en juego, se llama el grado de la potencia, y, en fin, la potencia es el resultado ó producto definitivo.

La operacion inversa á la que acabamos de definir ha recibido el nombre de *extraccion de raices* y consiste en volver de una potencia cuyo grado se conoce al factor ó á la raiz que ha servido para formarla.

Pero es evidente que esta cuestion no es la única que se puede proponer cuando se quiere bajar de las potencias á la raiz. ¿No puede suponerse en efecto que la potencia y la raiz son conocidas y que se trata de determinar el grado? Así, en este caso, como en los de la sustraccion y la division, es preciso reconocer que pueden proponerse dos clases diferentes de problemas cuando por medio de la operacion inversa se quiere volver á los elementos de la operacion directa.

Pero entre estos tres casos no es perfecta la semejanza, y al pasar de uno á otro, se hallan diferencias que son muy importantes para que pasen en silencio.

—Advertencia sobre la naturaleza de la doble cuestion que se presenta cuando por medio de cada operacion inversa se quiere volver á los elementos de la operacion directa que le corresponde.

En general, si tres números cualesquiera están representados por a, b, c, investiguemos qué clase de relacion tienen entre sí para que el tercero c sea resultado de los dos primeros combinados segun las diversas operaciones aritméticas de que tenemos hablado.

El caso mas sencillo es el de la adicion: es evidente que en este caso la relacion buscada debe ser $a + b = c$.

Si ahora se quiere volver de c á uno de los dos números a y b, habrá que examinar dos casos, y los valores buscados serán dados por las fórmulas

$$a = c - b,$$
$$b = c - a.$$

Pero es evidente que en cada uno de estos dos casos la naturaleza de la operacion que haya que hacer para obtener ya a, ya b, será idénticamente la misma, y, excepto las cifras que variarán, los procedimientos de cálculo serán completamente iguales en ambas circunstancias.

Esta perfecta semejanza se observará siempre, ya sean los números sumados puramente abstractos, ya se supongan concretos, porque en la suma los sumandos y el resultado son constantemente de la misma especie, pues no es posible admitir en esta operacion, como en las siguientes, que la naturaleza de algunos de los números sea abstracta al mismo tiempo que la de los números restantes lo sea concreta.

Así, los dos problemas á que conduce la operacion inversa de la adicion gozan en su esencia de una identidad perfecta, no solamente en cuanto al proceder de cálculo que es preciso emplear para resolverlos, sino tambien en cuanto al sentido en que haya de interpretarse la naturaleza de los resultados obtenidos en ambos casos.

Pero pasemos á la multiplicacion: para esta operacion la relacion buscada será

$$a\,b = c.$$

Si en este caso como en el precedente se quiere ir desde c á uno de los dos números a y b, habrá tambien que examinar dos casos, y los valores buscados se obtendrán por las fórmulas

$$a = \frac{c}{b},$$

$$b = \frac{c}{a}.$$

Ahora bien: se sabe que tambien aquí la naturaleza de la operacion que hay que hacer para obtener a ó b será la misma para estos dos números: solo variará el valor de las cifras, pero el procedimiento quedará uniforme.

Pero aquí ya no es posible añadir, como lo hemos hecho para la adicion, que esa semejanza se *extenderá* igualmente al SENTIDO en que debe interpretarse la naturaleza de los resultados obtenidos en ambos casos. Será así mientras no salgamos de lo abstracto, y en cada uno de los dos casos que se presentan la naturaleza del resultado será abstracta é idéntica.

Pero, cuando se pase á lo concreto, esta identidad de interpretacion *desaparecerá*, pues que la naturaleza del resultado será *concreta* si se trata de determinar el multiplicando y *abstracta* siempre que busquemos el valor del multiplicador.

Hé aquí, pues, entre estas dos primeras operaciones de la aritmética y sus inversas una diferencia que importa no perder de vista: y puede observarse, además, que mientras que en los dos problemas inversos de la adicion la identidad en los procedimientos numéricos es evidente de por sí, no sucede lo mismo cuando se trata de la multiplicacion, porque solo en virtud de la ley de la invariabilidad del producto parece demostrada esa identidad, y la tal ley está ciertamente muy lejos de ser evidente por sí misma. Así, á medida que se adelanta en el estudio de las operaciones aritméticas, se reconoce no solo que las proposiciones son menos evidentes, sino que empiezan á manifestarse desemejanzas notables.

Estas observaciones se confirman y se hacen cada vez mas dignas de atencion cuando se pasa á la operacion que nos queda por examinar.

En efecto, en la elevacion á potencias la relacion entre a, b y c es de la forma

$$a^b = c$$

Si queremos obtener a por medio de b y c nos valdremos de la fórmula

$$a = \sqrt[b]{c}$$

Pero aquí ya no seria verdad decir, como en los casos precedentes que la naturaleza de las operaciones aritméticas que dan a por medio de c y b es la misma que la de los procedimientos que es necesario emplear para obtener b con c y a, de manera que seria completamente falso escribir siguiendo la analogía

$$b = \sqrt[a]{c};$$

porque se sabe en efecto, que en este caso el valor de b es igual á la relacion de los logaritmos de c y de a, por lo que hay que hacer uso de la fórmula

$$b = \frac{\log. c}{\log. a}.$$

Hasta la uniformidad en los procedimientos numéricos que se habia encontrado en la adicion y la multiplicacion desaparece, pues, completamente en la elevacion á potencias.

En cuanto á la NATURALEZA de los resultados ó al SENTIDO en que haya precision de interpretarlos, es evidente que, mientras permanezcamos en lo abstracto, los resultados serán abstractos, sea que se quiera obtener a por medio de c y de b, sea que se busque b por medio de c y de a. Pero, cuando pasemos á lo concreto, sucederá algo análogo á lo que hemos dicho para la multiplicacion, porque como que el grado de la potencia no puede evidentemente ser sino *abstracto*;

1.° la naturaleza del resultado podrá ser *concreta* cuando se quiera determinar a,

y 2.° esa naturaleza será siempre *abstracta* cuando se trate de la determinacion de b.

—*Observacion importante sobre el caso en que* SE SUPONE *que el número que hay que elevar á una potencia es concreto.*

Por lo demás, este oscuro caso de que nos ocupamos (cuando a es concreto) presenta una verdadera dificultad y exije, para ser comprendido perfectamente, explicaciones muy detalladas, de las que con gran admiracion mia no he hallado vestigio ninguno en las obras de aritmética y álgebra. No creo fácil, mientras no expongamos la teoría de la representacion de las cantidades por los números y los signos algebráicos que se comprendan en su conjunto las explicaciones que aquí anuncio, pero al menos puedo en pocas palabras dar á conocer su inmensa importancia.

Si a es número ABSTRACTO las multiplicaciones sucesivas de a por a, de a^2 por a, de a^3 por a,... se harán sin ninguna dificultad, porque la naturaleza del multiplicador, que siempre debe ser *abstracto*, no cesará de conservar esta propiedad; pero, si se dice que a es CONCRETO, es imposible sin una explicacion anterior que comprendamos lo que significa hacer uso de un *multiplicador* CONCRETO. En la multiplicacion comun, siendo los dos factores (à natura sua) diferentes é independientes uno de otro, nada se opone á que uno sea concreto, pues esto no implica contradiccion con la naturaleza del otro, que siempre puede suponerse abstracto. Pero en la elevacion á potencias no sucede lo mismo, porque, siendo todos los factores iguales, decir que uno de ellos es concreto, es, si nó *afirmar* al menos *hacer creer* que todos lo son, y por consiguiente se suscitarán en nuestra inteligencia fundadas dudas sobre tan extraña cuestion. Indispensables serán, pues, explicaciones especiales para este caso particular que hagan comprender en qué sentido se entiende la elevacion á potencias de un número concreto.

Por ahora, no me detendré más sobre este asunto, cuya importancia he querido desde luego dar á entender, y al cual volveré mas adelante para tratarlo con todos los pormenores necesarios. Solamente necesito añadir con respecto á este particular que, al presentar las observaciones que anuncio sobre el asunto, no omitiré el exámen escrupuloso de la multiplicidad de las raices de una misma potencia, analizando la causa primera á que debe atribuirse esta multiplicidad tan sencilla como satisfactoria de la presencia de las n raices en una ecuacion del grado n.

—Bajo el punto de vista abstracto las expresiones irracionales son símbolo de una imposibilidad.

Volvamos ahora á los dos problemas á que dá lugar la operacion inversa de la formacion de las potencias, y todavía encontraremos, como en las operaciones precedentes, nuevos casos de imposibilidad.

Basta formar las diversas potencias de los primeros números de la série natural para reconocer que las que son del mismo grado están separadas por intervalos tanto mayores cuanto mas lo son sus raices y mas alto es el grado, resultado experimental muy fácil de descubrir.

Figurémonos ahora que se trata del grado m y llamemos N y N′ las dos potencias de dos números consecutivos cualesquiera n y $n+1$.

Si N″ es un número comprendido entre N y N′ y si se pregunta cual es la raiz del grado m de N″ es evidente que no será posible responder á esta pregunta. Para resolver la cuestion seria preciso, en efecto, hallar un número ENTERO que, empleado m veces como factor, diese N″. Este número debería ser mayor que n, puesto que n^m es igual á N, menor que N″; y al mismo tiempo debería ser menor que $n+1$, puesto que $(n+1)^m$ dá por resultado N′, mayor que N″.

La cuestion propuesta es, pues, insoluble bajo el punto de vista abstracto, de donde se sigue que la expresion $\sqrt[m]{N''}$ es un símbolo de imposibilidad.

A la expresion de cualquier número semejante se dá el nombre de número *irracional.*

Pero como sabemos que los dos problemas inversos de la elevacion á potencias no corresponden uno á otro ni siquiera bajo el punto de vista de las operaciones numéricas, es evidente que no basta haber examinado uno solo de estos problemas para conocer todos los casos de imposibilidad á que puede dar lugar la operacion inversa de las potencias.

Podemos proponernos tambien determinar *el grado* por medio de la *potencia* y de la *raiz*: por ejemplo se puede preguntar á qué grado es menester elevar n para obtener N″.

Si elevamos n á las diversas potencias cuyos grados marca la série natural de los números

$$n^1, n^2, n^3, \ldots\ldots n^m, \ldots\ldots,$$

será fácil ver que dos cualesquiera resultados consecutivos difieren entre sí un número de unidades que va sin cesar aumentando con el grado. En general para los grados m y $m+1$, esta diferencia es igual á $n^m(n-1)$.

Ahora, admitamos que N″ está entre n^m y n^{m+1}; no es necesario entrar en minuciosos pormenores para probar que, en esta hipótesis, la cuestion propuesta es imposible; pues el grado que se busca debe ser al mismo tiempo superior á m é inferior á $m+1$, esto es, que para resolver el problema, seria menester tomar n mas de m veces como factor y menos de $m+1$ veces, condicion que no se puede satisfacer, de donde deducimos que la expresion $\frac{\log.\ N''}{\log.\ n}$ es un nuevo símbolo de imposibilidad, siempre que N″ no sea verdadera potencia de n.

Se dá el nombre de número *irracional* al que se representa en álgebra por la expresion precedente.

—Hay dos clases muy distintas de números irracionales, fraccionarios y negativos.

Importa, pues, distinguir dos clases de números irracionales aun bajo el punto de vista de los procedimientos numéricos y sin salir de la region de lo abstracto.

La una se manifiesta cuando se busca el número que hay que elevar á una potencia determinada para obtener un resultado conocido de antemano.

La otra cuando se busca el grado de la potencia á que hay que elevar un número conocido para obtener igualmente un resultado tambien conocido.

Ahora bien, como en este último caso lo que se busca es siempre ABSTRACTO, mientras que en el primero puede suponerse que el número buscado es concreto, distinguiremos estos dos casos de irracionalidad llamando al primero NUMERO IRRACIONAL CONCRETO y al segundo NUMERO IRRACIONAL ABSTRACTO.

Por lo demás, (no hay que hacerse ilusiones, que nuestros estudios posteriores confirmarán ámpliamente esta verdad;) *la misma distincion* EXISTE *entre los números fraccionarios*; pero como son idénticas bajo el punto de vista numérico las dos operaciones inversas de la multiplicacion, nadie se ha cuidado de distincion tan clara. Pero en el fondo es evidente que cuando nos proponemos volver al multiplicador, el número fraccionario obtenido no puede ser sino *abstracto*, mientras que cuando queremos volver al multiplicando el número fraccionario obtenido PUEDE SER *concreto*.

Y lo mismo sucede con los números negativos.

En una adicion los números sumados pueden suponerse ó abstractos ó concretos. En estos dos últimos casos y bajo el punto de vista numérico, esta distincion es ilusoria, y quizás por este motivo, lo repito, ha pasado desapercibida; pero no sucede lo propio en cuanto concierne á la comprension ó á la inteligencia de los resultados ni al sentido en que este ha de interpretarse, pues, si mas tarde se demuestra que un número *concreto*, esto es, que una CANTIDAD (repárese que no decimos un número) negativa, fraccionaria, irracional ó imaginaria es cosa inteligible, es idea muy comprensible, deduciremos que al pasar de lo abstracto á lo concreto, habremos disminuido considerablemente el número de las imposibilidades hasta ahora demostradas, apareciendo en toda su importancia la evidente y necesaria distincion que nos ocupa.

—De las expresiones imaginarias.

La imposibilidad de extraer de un número cualquiera una raiz de un grado determinado dá orígen á los números irracionales, y la extraccion de las raices produce las imaginarias; pero difícil seria en aritmética hacer comprender no solo toda la extension de esta expresion analítica, sino hasta dar de su simple manifestacion una explicacion satisfactoria, porque esta manifestacion es una consecuencia de la regla llamada de los signos en álgebra, enteramente extraña á la ciencia aritmética.

Respecto de lo que precede he hecho ya comprender que en la operacion designada con el nombre de elevacion á potencias se presentaba desde luego una verdadera dificultad al suponer que la raiz representaba un número concreto; dificultad consistente en que en la elevacion á potencias, como en toda multiplicacion, no es posible que haya mas de un factor concreto, por lo que sin prévia explicacion no se puede concebir lo que ha de resultar, si nó bajo el punto de vista numérico, al menos bajo el punto de vista racional de la suposicion de una raiz concreta.

He añadido que mas adelante estudiaríamos esta cuestion; y desde ahora puedo anunciar que no causarán poca sorpresa las consecuencias á que ha de conducirnos y el número de errores que este exámen está llamado á extirpar.

Pero mientras no se dén estas explicaciones será casi imposible expresar con claridad la naturaleza de los irracionales y de las imaginarias, por lo cual debo ahora limitarme al simple hecho de su existencia, contentándome sencillamente con decir que se dá el nombre de *imaginaria* á toda expresion en que está escrito que se debe extraer una raiz de *grado par* de un número negativo.

El símbolo mas sencillo de un número imaginario es, pues, $\sqrt{-1}$, y sabemos que lo mas importante de las dificultades que suscita la explicacion racional de las imaginarias es descifrar el enigma de lo que expresa $\sqrt{-1}$.

—Observaciones finales.

Tales son las principales observaciones elementales de que me ha parecido susceptible el asunto que acabo de tratar en este capítulo, y creo haber dicho lo bastante, para dar á entender:

1.° La necesidad de considerar el número no solamente como representativo de las cantidades, sino como computador del órden y de la situacion de las cosas independientemente de la magnitud de las cantidades:

2.° El verdadero sentido de las operaciones de la ciencia aritmética cuando los números se emplean como símbolos únicamente de la idea de pluralidad;

3.° En fin, la impotencia en que estamos de dar (siempre bajo el mismo punto de vista), un sentido razonable á los números negativos, fraccionarios, irracionales é imaginarios, y la necesidad de considerar estos diversos números, cuando se manifiestan en el exámen de una cuestion, como la expresion aritmética de la imposibilidad de resolver esta cuestion en el sentido en que se ha enunciado.

Este capítulo estaba, pues, consagrado á establecer la verdadera naturaleza del número bajo el punto de vista abstracto de la pluralidad; y creo que, considerada en su conjunto esta parte de la ciencia aritmética, se habia omitido por completo en nuestras obras de enseñanza.

Establecida así esta primera base de la ciencia, paso á exponer los diversos principios del empleo del número, como representante ya del tamaño de las cantidades, ya de su estado, ó situacion, ya de sus diferentes modos de existencia ó de accion, y haré ver que, para llenar esos diferentes objetos, se *combina* el número *con los diversos signos de operaciones*: así se concebirá que en este segundo uso del número la forma final obtenida por las varias representaciones de que acabo de hablar, es siempre COMPLEXA; y que, por no haber sido suficientemente RECONOCIDA y EXPLICADA esta *complexidad* ha resultado hasta el dia ó insuficiente ó imposible una interpretacion filosófica y general, no ya solo de los números, sino tambien de las expresiones negativas, fraccionarias, irracionales, é imaginarias.

CAPÍTULO III.

ESTUDIOS SOBRE LOS MÓDULOS.

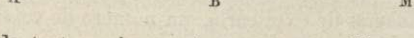
Al empezar este capítulo debo advertir que los estudios que forman su objeto, aunque especializados en su forma y aplicados á las longitudes, son susceptibles de generalizacion y de adaptarse á TODAS las cantidades. Desde luego se comprenderá esto en virtud de las observaciones que terminan el capítulo primero, sin perjuicio de las cuales lo iremos confirmando cada vez mas ampliamente, á medida que adelantemos en nuestro trabajo.

SECCION PRIMERA.

DE LA LONGITUD Y DE SUS DIFERENTES ESTADOS BAJO EL PUNTO DE VISTA DE GRANDEZA Ó DE PEQUEÑEZ.

—Modo de expresar las longitudes.

En lo que vá á seguir convendremos en designar por λ el módulo de la cantidad distinguida bajo el nombre de longitud.



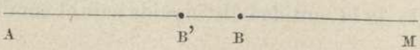
A fin de tratar primero el caso mas sencillo y de no introducir en la cuestion complicacion ninguna, supondré expresamente que todas las longitudes de que voy á ocuparme están contadas sobre la línea AM á partir del punto A. De este caso particular pasaré en seguida al exámen de los casos mas generales.

Si, habiendo tomado á partir del punto A sobre AM una longitud AB, necesito expresar esta longitud, llevaré sobre AB, partiendo del punto A, el módulo de las longitudes λ, y si a es el número de veces que ha sido necesario repetir este módulo, colocándolo una vez tras otra, para llegar desde A al punto B, diré que la expresion $a\lambda$ es la representacion algebráica de la longitud AB; porque, en efecto, cualquier otra longitud que partiese del punto A y se tomase sobre AM tendria una expresion distinta de la precedente, de modo que es imposible ninguna duda sobre la verdadera longitud que se ha querido representar.

Si, por el contrario, dada la expresion $a\lambda$ se quisiese figurar geométricamente la longitud á que corresponde, se llevaria á partir de A el módulo λ sobre AM tantas veces como indicase a, y se llegaria, procediendo así, al citado punto B: luego la longitud AB seria la pedida.

—Modificaciones que debe experimentar el módulo para expresar todas las longitudes posibles.

Mientras que el módulo λ pueda quedar contenido un número exacto de veces en la longitud AB, la operacion no presenta dificultad ninguna.



Pero si despues de haber llevado sobre AM el módulo λ, como acabamos de explicarlo, un número de veces igual á a, sucede que el punto B' á que se llega queda distante de B una cantidad menor que λ, entonces se hace imposible representar la longitud AB por medio del procedimiento que acabamos de dar á conocer.

Pero fácilmente se presenta un medio propio para evitar la dificultad que nos detiene; porque, en efecto, es una propiedad inherente á la naturaleza misma de la CANTIDAD de que nos ocupamos el poderla concebir fraccionada en tantas partes como se quiera sin que nada limite el grado de pequeñez que nuestra imaginacion puede atribuir á esas diversas partes; de donde resulta que, si suponemos que en vez del módulo escogido, esto es, en vez de la conocida longitud λ, ensayamos y probamos otras varias longitudes convenientemente mas pequeñas, habremos de dar tal vez con una que se halle contenida un número exacto de veces en AB; de modo que, si a' y λ' representan este nuevo número y esta nueva longitud, la expresion de AB será $a' \lambda'$.

Si se pretendiese que, por pequeño que fuese λ', nunca se podria conseguir darle un valor tal que estuviese contenido un número exacto de veces en AB, podria responderse que al menos, á medida que λ' disminuyese, se disminuiria igualmente la primera diferencia obtenida B′B, y como B′B es siempre mas pequeño que λ', á cuya disminucion no hay límite, no lo habria tampoco á la de esta diferencia, que se haria así tan pequeña como pudiera desearse.

—*Esta modificacion es algebráica.*

Para llegar á esa disminucion sucesiva del módulo, la naturaleza de la *cantidad* de que me ocupo permite suponer que los nuevos módulos, que sustituyen al primero, no son otra cosa que este dividido en cierto número de partes iguales, y los procedimientos geométricos conocidos indican, en efecto, la manera de efectuar esa division y conocer la nueva longitud que es su resultado. En tal supuesto, si

m es el número de partes en que se halle dividido λ, y si λ' es una de estas partes, es evidente que tendré la ecuacion

$$\lambda' = \frac{\lambda}{m}.$$

Y hé aquí el primer ejemplo de una relacion algebráica que une entre sí los módulos de una misma cantidad considerada bajo dos estados diferentes, y una primera comprobacion de que la suposicion que hemos hecho es, con efecto, susceptible de recibir aplicaciones en el exámen de las cuestiones concretas.

—Aplicacion al antiguo sistema de medir las longitudes.

No será inútil presentar, como aplicacion de lo que acabamos de decir, el antiguo sistema de que haciamos uso para las longitudes.

Acabamos de ver que, si se quisiese con un solo módulo obtener la expresion de todas las longitudes, seria necesario hacer igual el módulo λ á la mas pequeña de todas las longitudes conocidas; pero, además de que seria muy difícil hacer esto inteligible para todos, es evidente que tal medio, muy simple bajo el punto de vista teórico, seria muy complicado en sus resultados, puesto que entonces habria precision, ya en el lenguaje, ya en la escritura ordinaria, de emplear muchas palabras ó caractéres para expresar las longitudes.

Inconveniente tan grave debió hacer que se recurriera á otros procedimientos, y hé aquí el que se adoptó.

Despues de convenir en un primer módulo para las longitudes, se hizo uso de este mismo módulo para medir todas las longitudes cuya expresion no requeria, en las necesidades ordinarias de la vida, números muy complicados.

Así, pues, para expresar las longitudes mayores que la convenida se adoptó un módulo mayor que el primero, y para expresar las longitudes menores, se hizo uso de otro módulo mas pequeño.

En el antiguo sistema habia, pues, para las longitudes la legua, la toesa, el pié, la pulgada, la línea, y el punto.

Ahora bien, partiendo de la longitud llamada punto, que representarémos por el módulo λ_0, todos los demás se derivaban de este del modo siguiente:

Para la línea, el módulo....	$\lambda_1 = 12\,\lambda_0$
Para la pulgada............	$\lambda_2 = 144\,\lambda_0$
Para el pié................	$\lambda_3 = 1.728\,\lambda_0$
Para la toesa..............	$\lambda_4 = 10.368\,\lambda_0$
Para la legua..............	$\lambda_5 = 20.736{,}000\lambda_0$

Y se vé que por este procedimiento, si el módulo λ_0 representaba la mas pequeña de las longitudes conocidas, fácilmente se expresarian todas las longitudes por medio de los números abstractos y de λ_0.

Pero si en una cuestion preveo que uno de estos módulos, el pié por ejemplo, podrá ser bastante, me será dable limitarme á hacer uso de λ_3 solamente.

Sin embargo, si al medir una longitud encuentro que contiene á λ_3 un número de veces igual á a, y además una parte menor que λ_3, podré, para darme cuenta del valor de este resíduo, llevar sobre él el módulo menor λ_2, que estará por ejemplo contenido b veces: despues, si esto no es aun suficiente por quedar todavía algun resto, se echará mano del módulo λ_1, y, en fin, si todavía no basta, del λ_0; medios en cuya virtud la longitud de que se trata tendrá por expresion

$$a\,\lambda_3, + b\,\lambda_2 + c\,\lambda_1 + d\,\lambda_0.$$

Por lo dicho se vé que si en las múltiples investigaciones de la ciencia del cálculo se hubiesen conservado constantemente los módulos, la idea de los números fraccionarios ni siquiera se habria presentado al entendimiento ni su uso hubiera sido necesario. Pero con razon ó sin ella se ha hecho lo contrario, se han abandonado los módulos y solo se han conservado los números.

Una vez adoptado este partido, se observó que el módulo λ_3 es doce veces mayor que el módulo λ_2, y por consiguiente este doce veces menor que λ_3; luego, en lugar de λ_2, se pudo escribir la doce ava parte de λ_3, lo que está convenido en representarse así:

$$\frac{\lambda_3}{12}$$

y entonces, poniendo $\frac{\lambda_3}{12}$ en lugar de λ_2, las dos primeras partes de la longitud propuesta pudieron escribirse:

$$a\lambda_3 + b\frac{\lambda_3}{12}.$$

Continuando el mismo sistema se verá que la expresion entera quedará modificada del modo siguiente:

$$a\lambda_3 + b\frac{\lambda_3}{12} + c\frac{\lambda_3}{144} + d\frac{\lambda_3}{1728}.$$

Pero lo que importa mucho observar bien es que los NÚMEROS ABSTRACTOS a, b, c, d, no están modificados por estas consideraciones, sino SOLO y SIEMPRE LOS MÓDULOS, y que sobre λ_3 únicamente deberán hacerse todas las divisiones y operaciones indicadas. Tal es la consecuencia inmediata que es posible deducir de los precedentes raciocinios.

Pero, como al estudiar las reglas del cálculo se ha observado que habia ciertos medios de operar sobre a, b, c, d, con los números 12, 144, 1278...., tales que en la práctica se obtiene igual resultado que si con estos mismos números se hubiese operado sobre los módulos, se ha suprimido el módulo y se han hecho con solos los números las operaciones á que debia estar sometido únicamente el módulo.

Pero en teoría, como se vé, no es el número lo que puede resultar modificado, sino SIEMPRE el módulo, cuyas propiedades fraccionables deben constantemente tenerse en cuenta, so pena de ver desaparecer la IDEA DE CANTIDAD y de que el número se reduzca á ser un símbolo de una operacion del entendimiento.

—*Interpretacion de las expresiones fraccionarias de las* CANTIDADES.

Si, pues, en adelante al tratar una cuestion cuya solucion haya de ser una longitud, hallo que, siendo λ el módulo adoptado, esta longitud debe tener por expresion $\frac{a}{b}\lambda$, este resultado no será ya para mí una imposibilidad, pues le daré en seguida una significacion precisa, suponiendo que para hallar la longitud dada, no es λ lo que hay que repetir un número de veces igual á $\frac{a}{b}$, *lo cual seria incomprensible*, sino que es preciso empezar por dividir λ en un número de partes igual á b, y que la longitud buscada se obtendrá repitiendo a veces una de estas partes considerada como sub-módulo ó módulo nuevo.

Y así empieza á comprobarse nuestra gran ley general.

"Siempre que una operacion sea incomprensible sobre "el número abstracto que figura en la expresion de una "cantidad, examínese si se puede concebir y ejecutar sobre "el módulo."

En el caso que nos ocupa, si a no contiene á b un número exacto de veces, la operacion $\frac{a}{b}$ es INCOMPRENSIBLE; pero entonces, efectuando la division del módulo λ en b partes, esta misma operacion SE CONCIBE Y SE EXPLICA por medio de esta interpretacion; y la expresion $\frac{a}{b}\lambda$ recibe una significacion clara y precisa, sin que nuestro entendimiento se vea obligado á admitir *à priori* la existencia de los números fraccionarios.

—*Consecuencias de esta interpretacion para la teoría de los números fraccionarios.*

Pero, una vez reconocido cuanto hay de razonable y exacto en la explicacion anterior, y comprendida perfectamente la verdadera significacion de la expresion $\frac{a}{b}\lambda$ ó de cualquiera otra semejante, cuando, en fin, no se puedan cometer ya errores sobre el particular, entonces se ocurrirá acaso la idea de saber si, suprimido por un instante en las expresiones el módulo λ, se pueden efectuar sobre la parte numérica $\frac{a}{b}$ de esas expresiones, considerada *aislada é independientemente* de todo módulo, ciertas operaciones aritméticas, de tal suerte que se puedan preparar así de antemano colecciones de resultados. Porque entonces no habrá mas que agregar esos mismos resultados á los diferentes módulos de las cantidades sobre que se hayan propuesto las cuestiones para conocer la solucion respectiva.

Nada se opone á semejante concepcion, pues nada hay que impida prescindir de los módulos en las expresiones de las cantidades, conservando solo las partes numéricas ó algebráicas, ni ejecutar con la parte numérica todas las combinaciones que las reglas del cálculo autorizan, ya haciendo cambiar á voluntad los valores de estas partes numéricas, ya modificando de todos los modos posibles los signos de las operaciones que relacionen unas con otras.

—Importancia de una discusion prévia sobre la ley de la homogeneidad en el tránsito de lo abstracto á lo concreto.

Pero, cuando de estos resultados puramente abstractos se quiera pasar á aplicaciones sobre cantidades concretas, habrá siempre que raciocinar sobre el tránsito de lo abstracto á lo concreto. Porque será preciso que el módulo se reincorpore de tal manera en la expresien numérica, que se vea bien claro que los diversos términos de que se componga el resultado final son homegéneos, esto es, que todos son expresiones de cantidades de la misma especie que la de que nos ocupamos; pues á no ser así el resultado final será tambien incomprensible. En una palabra, dado un resultado puramente algebráico, tendrán que ir precedidas sus aplicaciones á las cantidades concretas de una discusion destinada á establecer racionalmente en qué condiciones y de qué modo debe entenderse lo que dice el resultado para que las aplicacioues estén en armonía con la ley de la homogeneidad.

Mas adelante se verá que, por falta de análisis y de atencion acerca de un punto tan delicado como es el tránsito de lo abstracto á lo concreto, muchas dificultades y dudas se han introducido en la ciencia del cálculo, especialmente en lo que concierne á la representacion general de las curvas por ecuaciones.

Esta digresion me ha separado por un instante del objeto actual de mis investigaciones; pero era difícil no hablar de ello en el momento en que lo exijia, por decirlo así, el asunto de que trataba, y por otra parte todas estas observaciones, una vez hechas, no podrán menos de simplificar la exposicion y la inteligencia de lo que nos queda por decir.

Ahora, pues, se vé cómo se introdujeron los números fraccionarios en la ciencia del cálculo, y cómo, despues de estudiadas sus combinaciones en abstracto, se puede hacer la aplicacion de los resultados meramente numéricos á todas las cuestiones concretas.

—¿Hay algo menor que 1?

Si ahora vuelvo á la cuestion iniciada en el capítulo I "¿Hay algo menor que 1?" quizá nos sea menos difícil resolverla que comprender como siquiera ha podido ocurrirse semejante contrasentido.

Por de pronto en la naturaleza no hay nada grande ni pequeño.

"Estas palabras (1) no pueden entenderse en una acep-"cion ENTERAMENTE ABSOLUTA; y si alguna vez "creemos emplearlas en tal sentido, es porque subentende-"mos siempre una comparacion. Así, por ejemplo, cuando "decimos de un árbol que es grande ó pequeño, lo com-"paramos *implícitamente* al término medio del tamaño de "los árboles, y no podemos expresarnos de este modo sinó "porque la altura de los árboles tiene dos límites extremos "que nos son bien conocidos; pero no sucederá lo mismo con "respecto á objetos cuya grandeza ó pequeñez no tienen "límites necesarios, pues el que por ejemplo exigiese que le "trazáran una línea recta del tamaño usual, tendria una "exigencia de manifiesta insensatez.

"No conocemos de los tamaños mas que sus relaciones, "y esto es lo que nos es posible dar á conocer á los demás,

(1) Anales de matemáticas, tomo XXI, pág. 325.

"pues por mucho que se intentase torturar la lengua, ó in-
"troducir en ella palabras ó giros nuevos, nunca se conse-
"guiria hacerle expresar una magnitud independiente de
"otra magnitud de su misma naturaleza."

Pero si en un sentido absoluto no hay nada grande, nada pequeño, ¿qué significará esta pregunta, *hay algo mas pequeño que* 1?

O este ALGO no es de la misma naturaleza que el UNO, en cuyo caso la pregunta es absurda, puesto que no se pueden comparar objetos heterogéneos:

O bien ese ALGO es de la misma naturaleza que UNO, y entonces es menester préviamente dejar convenido lo que se entiende por UNO.

Si ese UNO es abstracto, si es lo que hemos convenido en llamar *unidad*, (nó módulo), si esa unidad es el primer término de la série de los números, se hace evidente que NO PUEDE HABER otro término de la série que sea menor que *uno*; pues, por mas que se quisiese sutilizar en la cuestion y hasta acudir á los números fraccionarios, siempre responderiamos, apoyados en las ideas precedentes, que los números fraccionarios son *séres de convencion*, que por sí mismos no tienen significacion ninguna, implicando al contrario una falta de sentido para la razon, por no ser susceptibles de representar ninguna cosa mientras permanecen en la region de lo abstracto, ni tener para nuestra inteligencia ningun valor, sino cuando referimos su orígen y uso á las consideraciones concretas.

Si, por el contrario, la unidad de que se trata es concreta y representa por consiguiente un tamaño, responderé que todo tamaño menor que este será una cosa mas pequeña que UNO.

Es, pues, evidente que, si en vez de llamar UNIDADES á estas diversas cantidades que se toman por término de comparacion entre todas las cantidades de la misma especie, se les hubiese dado otro nombre, como nosotros hemos hecho llamándolas módulos, á nadie se le habria ocurrido pensar que habia diversidad de UNOS, ó sea UNOS de diferentes clases ¡dependientes de cada naturaleza de cantidad! y mucho menos por supuesto que existian varias unidades en la misma especie: se hubiera sobre todo evitado la confusion entre la unidad abstracta, la unidad numérica é inmutable, con las unidades concretas, que son enteramente de convencion, variables por consecuencia segun la voluntad de cada cual, é inconcebibles sobre todo sin una determinacion prévia de la especie de cantidad de que se trata; y la ciencia no habria sufrido desde los principios mismos de su exposicion.

—De las longitudes irracionales.

Hemos desenvuelto bastante en el capítulo segundo las circunstancias que se refieren á la manifestacion de los números irracionales, y hemos demostrado que la existencia en abstracto de semejantes números no puede comprenderse; que su manifestacion era el símbolo de una imposibilidad y que, en consecuencia, toda cuestion, cuya solucion depende de un número irracional, contiene necesariamente en su enunciado una ó varias incompatibilidades.

Pero si el número, considerado en sí mismo, no puede conducirnos á la explicacion de la irracionalidad, ¿se seguirá de aquí que estamos condenados para siempre á permanecer en la ignorancia, y que, en las aplicaciones de la ciencia del cálculo á las cuestiones concretas, hemos de continuar considerando como insolubles todas las que conduzcan á expresiones que contienen la indicacion de raices imposibles de extraer? En una palabra, ¿no se podrán en la práctica realizar y producir longitudes cuya expresion aritmética sea irracional?

El lector ha respondido de antemano afirmativamente á esta pregunta, y ya sin duda la propiedad fundamental del triángulo rectángulo se ha presentado á su entendimiento.

Y es que, en efecto, es de esencia de la longitud, es una propiedad inherente á su naturaleza, no solo el ser divisible en las partes que se quieran, sino el poder constituirse por medio de ciertas figuras, de ciertas operaciones geométricas, en un estado de aumento ó de disminucion correspondiente exactamente al que se figura por un signo radical. La interpretacion de lo irracional en las longitudes se podrá hacer, pues, nó por virtud del número abstracto, en el que la extraccion de la raiz continuará siendo imposible, sino por virtud del módulo, sobre el cual la extraccion podrá ejecutarse, si nó aritméticamente, al menos por procedimientos geométricos equivalentes.

Pasemos á un ejemplo y supongamos que se quiere resolver la cuestion siguiente:

Varios árboles están plantados formando un cuadrado: contado el número de árboles de que se compone uno de los lados del cuadrado ha resultado igual á a: hay dos cuadrados iguales y se quiere con los árboles que contienen los dos y empleándolos todos formar un solo cuadrado.

Se pregunta: ¿cuántos árboles tendrá el lado de este nuevo cuadrado?

Si se designa por x este número la condicion del problema se expresará evidentemente por la siguiente ecuacion:

$$x^2 = 2\,a^2,$$

de la cual se deduce

$$x = a\sqrt{2}.$$

La naturaleza de esta solucion nos dice que no hay ningun NÚMERO posible de árboles que pueda satisfacer la cuestion propuesta: la presencia del factor irracional $\sqrt{2}$ es, como suficientemente lo hemos explicado, un símbolo de la imposibilidad de resolver esta cuestion, y cualesquiera que sean nuestros estudios sobre la naturaleza del *objeto concreto* de que nos ocupamos, *un árbol*, no hallaremos en este objeto ninguna propiedad por medio de la cual la operacion $\sqrt{2}$, impracticable sobre el número que figura en la expresion precedente, pueda realizarse sobre el módulo que el número acompaña. Nos es, pues, imposible conseguir en este caso una interpretacion cualquiera de semejante resultado.

Pero admitamos ahora que la cuestion propuesta sea la siguiente:

Hay dos cuadrados iguales: el lado tiene la longitud a: se pide un tercer cuadrado tal que la superficie sea igual á la suma de los otros dos. ¿Cuál será la longitud del lado de este cuadrado?

Si designamos, como antes, por x la longitud desconocida del lado del cuadrado pedido, se tendrá, tambien como antes, la ecuacion

$$x^2 = 2\,a^2,$$

de la cual se saca

$$x = a\sqrt{2}.$$

Por la naturaleza de esta solucion, deberiamos á primera vista considerar la cuestion propuesta como imposible, pero, reflexionando mejor y fundándonos en los principios expuestos en los capítulos precedentes, podremos raciocinar del modo que sigue:

¿Cómo se ha introducido en la cuestion el número a? Habiendo elegido cierto módulo λ para las medidas de las longitudes, hemos encontrado que el lado de los dos cuadrados contiene á este módulo un número de veces igual á a, de manera que, en realidad, la verdadera representacion de la longitud de este lado es $a\lambda$. Por una consecuencia muy natural de esta observacion, diré que la verdadera representacion de la longitud x debe ser $a\sqrt{2}\,\lambda$, esto es, que para realizar x seria necesario repetir el módulo primitivo λ un número de veces representado por $a\sqrt{2}$. Pero esta operacion, como hemos dicho, es de imposible ejecucion con los números; y he aquí el caso de experimentar si, en virtud de nuestra ley general, podriamos ejecutar sobre el módulo lo que no podemos ni aun concebir siquiera para el número.

Observo que el número a no introduce dificultad alguna en la cuestion; debemos, pues, atribuir al factor $\sqrt{2}$ la causa de la imposibilidad que se manifiesta: puesto que $a\sqrt{2}$ no puede ser concebido ni practicado, investiguemos si sucederá lo mismo con $\lambda\sqrt{2}$. Desde luego observo que si $\lambda\sqrt{2}$ expresa una longitud realizable, podré por lo mismo realizar tambien $a\sqrt{2}\,\lambda$ para lo cual bastará repetir a veces, no ya la longitud λ, sino la longitud $\lambda\sqrt{2}$.

Tal es la aplicacion para este caso de nuestra ley general, en virtud de la cual hemos dicho que, en las consideraciones de la ciencia del cálculo referentes á las cuestiones concretas, cuando una expresion algebráica se presenta con algunas indicaciones de operaciones imposibles de ejecutar sobre el NÚMERO, es preciso examinar si estas mismas operaciones son ejecutables sobre el MÓDULO, y si la naturaleza de este módulo permite, ó bien concebirlas ó bien practicarlas, lo que tambien puede conducir á una interpretacion tan razonable como útil del resultado obtenido.

Nuestro exámen, llevado hasta este punto y aplicado á la cuestion de saber si por medio de λ la longitud $\lambda\sqrt{2}$ es realizable, no presentará ya ninguna dificultad; pues que sabemos en efecto *à priori* que si formamos un triángulo rectángulo, cuyos dos lados del ángulo recto sean iguales á

λ, la hipotenusa de este triángulo rectángulo será tal que su longitud respecto de λ deberá expresarse por $\lambda\sqrt{2}$. La consecuencia de esta observacion es que, tratándose de longitudes, la solucion figurada por el resultado $a\sqrt{2}$ no presenta ya imposibilidad ninguna, pues que se explica fácilmente y conduce en el acto al conocimiento de la longitud pedida.

Si en vez de $a\sqrt{2}$ se hubiese obtenido $a\sqrt{3}$, $a\sqrt{4}$, $a\sqrt{5}$..., con procedimientos semejantes se habrian construido las diversas longitudes de $\lambda\sqrt{3}$, $\lambda\sqrt{4}$, $\lambda\sqrt{5}$.... En efecto, convirtiendo la hipotenusa del triángulo precedente en cateto del ángulo recto de un nuevo triángulo rectángulo cuyo otro cateto fuese λ, la hipotenusa de este segundo triángulo seria $\lambda\sqrt{3}$; despues, convirtiendo $\lambda\sqrt{3}$ en cateto del ángulo recto de un tercer triángulo rectángulo cuyo otro cateto fuese tambien λ, obtendriamos una tercera hipotenusa cuya longitud seria $\lambda\sqrt{4}$, y así sucesivamente; de manera que este procedimiento, continuado indefinidamente, realizaria todas las longitudes cuya expresion general es $\lambda\sqrt{n}$; esto es, que este procedimiento proporciona la interpretacion de todas las longitudes cuya expresion contiene un número irracional del segundo grado.

No es este lugar oportuno para entrar en largos detalles sobre las nuevas consideraciones geométricas necesarias para realizar las longitudes irracionales de los grados superiores al segundo, porque aquí no estudiamos geometría, si bien podrémos probar en lo sucesivo el cómo las expresiones irracionales del grado n se realizan geométricamente con la division de un arco en un número n de partes. Sea lo que fuere, aquí se trata menos de conocer estos procedimientos para todos los casos posibles de los números irracionales, que dejar consignado en uno solo de estos casos que la concepcion de la forma irracional, de imposible que era en la region de lo abstracto y desde el punto de vista de la pluralidad, se hace practicable y muy comprensible cuando nos trasladamos á la region concreta, y cuando, por ejemplo, se aplica á las longitudes.

Concluyamos, pues, que el exámen que acabamos de hacer prueba que nada es mas fácil que realizar las longitudes $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$... esto es, todas las que se expresan por irracionales del segundo grado, porque los procedimientos de la geometría ordinaria nos demuestran que las relaciones entre las longitudes que entran en ciertas figuras deben, segun los principios de esta ciencia, expresarse por $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$,....

Todo lo cual, (aun SUPONIENDO que fuese imposible realizar por figuras geométricas longitudes cuyas relaciones tuviesen por expresion irracionales de un grado cualquiera), indica, nó que la concepcion de una longitud semejante sea imposible, sino solamente que su realizacion estará subordinada al descubrimiento ulterior de alguna propiedad geométrica que haga intervenir una expresion irracional de este grado en la relacion de dos longitudes.

De nuevo hemos venido á parar á la verdad fundamental de que solo por el completo estudio de las propiedades modales inherentes á los módulos, y en general á las cosas creadas, nos hallarémos en estado, por una parte, de interpretar el sentido en que deben entenderse los resultados de la ciencia del cálculo, y por otra de realizar en la práctica, por medio de los módulos de las cantidades y de las operaciones y números con que estos módulos se combinan, las soluciones indicadas por esos resultados. Con verdad, pues, hemos podido afirmar al principio de esta obra que el medio mas seguro de hacer desaparecer las dudas y las incertidumbres matemáticas, consiste en investigar si las operaciones que no se pueden concebir ni practicar respecto de los números, son comprensibles y ejecutables respecto de los módulos.

—Del cero y del infinito desde el punto de vista abstracto.

Vamos ahora á pasar á consideraciones de gran importancia y que pueden considerarse como la clave del cálculo infinitesimal. Aludo al sentido que se debe dar en la ciencia á las expresiones *cero é infinito.*

Aquí tambien tenemos que distinguir los dos casos que tanto nos ocupan: el de la abstraccion y el de las cuestiones concretas.

Por de pronto, y en abstracto, es decir, cuando solo entran en juego las ideas de los números, es evidente que cero no puede representar mas que un puro nada.

En efecto, desde el instante en que decimos que no queremos salir de las ideas abstractas, prescindimos de toda idea de cantidad. ¿Y qué idea puede entonces quedar en el entendimiento? Nada mas que la idea de contar. Pero cero viene tambien á destruir esta última idea, de tal modo que no nos ocupa ya ni la idea de cantidad, ni tampoco la de la operacion de contar; luego en cuanto concierne á la ciencia del cálculo (que tiene por objeto estas dos cosas), cero es y no puede ser sino el símbolo de la nada.

¿Qué será el infinito bajo el punto de vista abstracto? El infinito representará en nuestro espíritu la operacion de contar como imposible para nosotros á causa de su inmensidad; el infinito será un número á que nunca podremos llegar, por mucho que prolonguemos la accion de repetir una cosa; y si el infinito aparece como respuesta á una cuestion presentada tendremos una prueba manifiesta de que hay imposibilidad de satisfacer el problema.

Así, en abstracto, el CERO representará la *extincion* de la operacion que consiste en contar, y el INFINITO expresará que esta operacion es *imposible de realizar* en su conjunto.

Estos son los dos límites en que se hallan colocadas todas las *operaciones* ejecutables de la ciencia del cálculo sobre los *números.*

—Del cero y del infinito bajo el punto de vista concreto.

Pero pasemos á las cuestiones concretas y veamos primeramente lo que será la *expresion* de una cantidad que se hace nula ó infinita, y despues la de una *cantidad nula*, la de una *cantidad* infinitamente pequeña y la de una *cantidad* infinitamente grande.

Ocupémonos en primer lugar del caso en que se trate de hacer nula ó infinita la expresion de una cantidad.

Para darnos una cuenta exacta de ello, preciso es volver á nuestra primera observacion, que consiste en no perder de vista que una cantidad se expresa siempre por un número y un módulo. Si, pues, esta cantidad es una longitud y si λ es el módulo de las longitudes se podrá representar esta longitud por $a\lambda$.

Si para satisfacer á una cuestion hallo que la expresion $a\lambda$ de una longitud debe ser igual á cero, fácilmente podré llenar esta condicion, suponiendo que el NÚMERO a es cero, esto es, suponiendo que no hay nada que hacer con el módulo cualquiera que sea.

Pero nótese bien, que esto no implica de modo alguno la anulacion ó destruccion del MÓDULO λ, el cual permanece siempre siendo tal como es, ó como ha parecido conveniente tomarlo, de manera que, aunque $a\lambda$ deba ser nulo, la idea de longitud no desaparece, porque en realidad la cuestion podria siempre satisfacerse aun conservando λ y haciendo uso de él. Supongamos por ejemplo que la cuestion propuesta sea esta;

¿Qué camino deberé recorrer para encontrarme en el punto de partida?

Puedo satisfacer á esta pregunta no moviéndome ó no haciendo ningun uso de λ. Puedo igualmente satisfacerla andando $b\lambda$ y despues retrocediendo la misma cantidad $b\lambda$. Y en este caso, cualquiera que haya sido λ, la cuestion queda resuelta no solo sin que sea necesario anular el módulo λ sino, al contrario, despues de haber hecho uso de él con un valor real lineal, sea la que fuere la dimension que se le haya atribuido. Así, no puede decirse que, cuando $a\lambda$ es nulo, solo resuelve la cuestion el punto de partida, pues, por el contrario, la resuelven una infinidad de longitudes diferentes. Cuando hayamos hablado de la interpretacion de las cantidades negativas, la relacion que quiero dar á entender será mas fácil de percibir; pero creo que, por el momento, basta con lo dicho, que es sobremanera claro y comprensible.

Para hacer esto mas claro aun, no hay mas que suponer que el punto de partida está sobre una circunferencia de círculo, y que se pregunta qué camino es necesario seguir en esta circunferencia para volverse á hallar en este punto de partida.

Si α es el arco que convengo en tomar por módulo de los arcos, y si b es el número de veces que es preciso repetir este arco para satisfacer el problema, es evidente que no solo el problema quedará resuelto admitiendo que b es nulo, esto es, que no se hace uso de α, sino tambien tomando á α del tamaño que se quiera y repitiéndolo, tanto á él como á sus divisiones, el número de veces necesario para reproducir una ó muchas veces la circunferencia entera.

En una palabra, se puede (sin que sea necesario para esto suponer que el módulo de las longitudes es nulo, antes bien haciendo uso de este módulo, cualquiera que sea), satisfacer á problemas cuya solucion exije que la expresion de una longitud sea nula, y para obtener la solucion de estos problemas es menester ó no hacer ninguna operacion con el módulo, ó bien hacer con el módulo escogido una série de operaciones, compatibles con las cualidades inherentes á la naturaleza de este módulo, pero tales que su efecto se destruya mútuamente.

Lo que acabo de decir para el caso en que la expresion de una longitud es nula, lo repetiré igualmente para el caso en que esta expresion haya de ser infinita.

Es evidente que en este caso no se necesita suponer que el módulo de las longitudes llega á ser infinito, como tampoco tuve antes necesidad de admitir que el módulo era nulo. Al contrario, puedo suponer que este módulo tiene una longitud finita cualquiera; pero para resolver el problema será preciso repetir este módulo un NUMERO INFINITO DE VECES, lo que corresponde, como ya he observado, á una imposibilidad.

Así, cuando en el exámen de una cuestion se sabe solo que la *expresion de una longitud* debe ser ó nula ó infinita, esto no prejuzga nada acerca del módulo, ni quiere decir que no haya módulo de longitud, ó bien que no haya mas que un módulo infinito que resuelva la cuestion, antes bien, puede interpretarse diciendo que, en el primer caso, las operaciones que hay que hacer con el módulo SE DESTRUYEN mútuamente y que, en el segundo, son en NUMERO infinito.

—*De las longitudes infinitamente grandes é infinitamente pequeñas.*

Pero, si tales son los raciocinios á que venimos á parar cuando nos encontramos con una longitud cuya expresion es nula ó infinita, los resultados son del todo diferentes cuando la cuestion es la recíproca, esto es, cuando se pregunta qué debemos hacer en la expresion de una longitud para que *esta longitud* sea infinitamente pequeña ó infinitamente grande.

Y esto consiste en que cero no es sinónimo de infinitamente pequeño, como tampoco infinito lo es de infinitamente grande.

Las palabras infinitamente pequeño é infinitamente grande no pueden concebirse sino aplicadas á una *cantidad*: las palabras cero é infinito, al contrario, pueden muy bien entenderse de una ó varias operaciones cuyos efectos se destruyen ó á cuyo término es imposible llegar, y así se vé que la condicion para que *la expresion* de una cantidad sea *cero* ó infinita no prejuzga nada sobre el módulo. Pero cuando digo que quiero que una longitud sea infinitamente pequeña ó infinitamente grande, entonces fijo y determino, de manera que no queda lugar á dudas, que la idea misma de *longitud* ha de admitir en sí las condiciones á que haya que satisfacer, cualesquiera que sean por otra parte las operaciones á que esta longitud pueda estar sometida.

Por haber confundido las expresiones que acabo de precisar se han introducido en la ciencia del cálculo numerosas incertidumbres: unas veces el signo de cero ó del infinito se ha de entender del número, otras del módulo, y, cómo la distincion no está claramente establecida, ya porque no se ha presentado con bastante lucidez al análisis de la razon, ya porque el hábito de prescindir de los módulos no deja ver en el cálculo mas que números, ha sucedido que no siempre se ha podido raciocinar de un modo cierto sobre la verdadera naturaleza de los resultados obtenidos.

Recordemos aquí los principios que ya hemos tenido ocasion de dar á conocer. "En la naturaleza nada hay "grande, nada pequeño, y estas palabras no pueden enten- "derse en un sentido enteramente absoluto. No conoce- "mos de las cantidades sino las relaciones, y, cualesquiera "que sean nuestros esfuerzos, *nunca conseguiremos expresar* "*tamaño ninguno independientemente de otro tamaño de su* "*misma naturaleza.*"

Si esto es así, y nadie podrá disputar que no lo sea, ¿qué pueden, pues, significar esas expresiones "longitud *infinitamente* pequeña," "longitud *infinitamente* grande" con carácter exclusivo y absoluto?

Mientras me hablen de una longitud mayor ó menor que otra, podré suponer que, permaneciendo invariable el módulo por pequeño que sea, la comparacion del módulo con una longitud ha debido efectuarse llevando el módulo siquiera con la imaginacion mas ó menos veces sobre la longitud; pero siempre será preciso al menos hacer este transporte una vez, y entonces la longitud será pequeña, muy pequeña si se quiere, pero nunca *infinitamente* pequeña.

Del mismo modo si el módulo es muy grande, ó si el número de veces que se le transporta es extremadamente grande, la longitud que lo contenga podrá ser muy grande, pero por mas que se haga nunca llegará á una longitud infinitamente grande.

Esto nos enseña, pues, que nunca podremos llegar á la *realizacion* de una longitud *infinitamente pequeña* ó *infinitamente grande*, cualquiera que sea el estado del módulo de las longitudes, ó cualesquiera que fueren las operaciones que haya que hacer con el módulo.

Si hay, pues, en geometría ALGO que pueda reputarse como longitud infinitamente pequeña ó longitud infinitamente grande, no siendo ese ALGO susceptible de expresarse con el módulo de las longitudes, necesariamente será menester que para pasar de una á otra de estas expresiones haya cambio de módulo, desaparicion del módulo de las longitudes y sustitucion de un nuevo módulo á este.

Quizá de un gran número de especies de cantidades seria embarazoso decir á qué consideraciones nos arrastrarian estos tránsitos de un módulo á otro: siempre habria que hacer un estudio para cada especie, y sin duda surgirian consideraciones dignas de meditacion. Pero, tratándose de longitudes, la solucion de esta cuestion es fácil y se presenta espontáneamente, porque ¿quién no vé, en efecto, que cuando el módulo de la longitud vá disminuyendo progresivamente hasta llegar al término en que nos es preciso considerarlo como nulo, quién no vé que entonces se presenta por sí mismo *el punto geométrico* para sustituirse al módulo? ¿Quién no advierte que así podemos decir, nó que existen longitudes infinitamente pequeñas, (lo que es imposible) sino *que la constitucion de los séres geométricos y su dependencia mútua* es tal que nos es lícito considerar el punto como una longitud infinitamente pequeña? ¿Quién no distingue que apoyarse en semejante consideracion cuando raciocinamos es seguir paso á paso el órden con que ha procedido la naturaleza en sus múltiples creaciones?

Y, además, puesto que, por grande que sea el módulo, una longitud infinitamente grande nunca podria realizarse repitiendo el módulo, no habrá medio de hacer inteligible esta expresion sino suponiendo que el módulo mismo de la longitud es el que se transforma en infinitamente grande. Pero ¿á qué consideracion geométrica nos conduce semejante suposicion? Aquí repetiré, como antes, que existen sin duda varias especies de cantidades acerca de las cuales seria difícil concebir los efectos de semejante transformacion; pero, tratándose de la longitud, esos efectos son evidentes; pues si el módulo se hace infinitamente grande es porque consideramos la recta en toda su extension como *direccion indefinida.* Efectivamente esta cantidad, en tal concepto, *no termina nunca* y no hay por consiguiente longitud finita que pueda realizar la definicion.

Ciertamente no dudo de que estas consecuencias sean admitidas por todo el mundo, pues los algebristas hacen un uso diario de tales verdades. Pero seria difícil no reconocer que la consideracion de los módulos, esto es, de la naturaleza de la cantidad misma, podia solamente conducir á la demostracion inmediata de ley tan fundamental en geometría.

¿Porqué hasta ahora han dominado las dudas en este asunto? Porque en nuestros cálculos hemos querido referirlo todo al número, por estar habituados á fijarnos solo en él cuando interpretamos las expresiones algebráicas, sin apreciar suficientemente la importancia de las consideraciones concretas acerca de ésas expresiones; de donde ha resultado que, cuando nuestros raciocinios nos han conducido á esos límites extremos en que LAS CANTIDADES dejan de existir, no hemos sabido leer en la expresion algebráica de esas mismas cantidades mas que la evaluacion NUMERICA del cero y del infinito, lo que, bajo el mismo concepto numérico, no dejaba en nuestra razon, ya que nó en la práctica, al menos en teoría, mas que la idea ABSOLUTA de la nada ó de lo imposible. Pero las consideraciones concretas nos enseñan que esa idea de nada ó de imposibilidad, que es, en efecto, una consecuencia necesaria de las suposiciones extremas de que partimos, en vez de ser admitida en un concepto *absoluto*, debe serlo *relativamente* á la especie de cantidad de que se trate. Así habrá disminucion hasta *cero* ó aumento hasta el infinito de la cantidad; pero, en vez de traducir *exclusivamente* estas circunstancias por las palabras *nada* é *imposible*, y para ver claramente todo lo que son susceptibles de expresar segun los razonamientos que á ellos nos han conducido, será preciso investigar si á la cantidad que suponemos infinitamente pequeña viene naturalmente á sustituirse la consideracion de alguna otra cantidad, y si sucede lo mismo en el caso de admitir que la cantidad se hace infinitamente grande.

Esto no excluye sin duda el caso en que la nada absoluta y la imposibilidad absoluta fuesen las solas consecuencias razonables de lo infinitamente pequeño ó de lo infinitamente grande; pero aun esto hace ver que esos casos no son los únicos que pueden existir, y que, donde el número abstracto es insuficiente para indicarnos por sí mismo una solucion, las consideraciones concretas podrán algunas veces revelarnos una ó varias.

En fin, nuestro análisis manifiesta que en el estudio de las relaciones que unen entre sí las varias obras de la creacion, las consideraciones infinitesimales deben ser un poderoso medio de descubrimiento. Hace siglo y medio que esta verdad halla diariamente nueva confirmacion en nuestros cálculos. Pero á mi parecer hasta ahora no se habia demostrado, *á priori* y en general, que es una consecuencia muy inmediata de las leyes constitutivas que en la naturaleza gobiernan las cosas que queremos someter á nuestras expeculaciones.

—De la transformacion de ciertos módulos en otros y de los infinitamente pequeños de distintos órdenes.

Si ahora dirigimos la atencion hácia las consideraciones sobre los infinitamente pequeños, que erizan de dificultades la introduccion al cálculo diferencial, creo que se hallará en lo que precede una primera aclaracion á algunas de sus dificultades. Si se pregunta, por ejemplo, "¿existen cantidades infinitamente pequeñas?" nadie vacilará en responder que una cantidad puede hacerse muy pequeña, pero que mientras sea cantidad de la misma especie, NUNCA se convertirá en infinitamente pequeña; y así será erróneo decir que una longitud, un tiempo, una fuerza, pueden por sí y sin dejar de ser longitud, tiempo ó fuerza, convertirse en infinitamente pequeños y *à fortiori* en infinitamente pequeños de primer órden, de segundo órden, de tercero &c.

Pero siempre habrá razon para decir que hay en la naturaleza cantidades cuya constitucion, cuya esencia es tal que, *con relacion á otras cantidades*, pueden reputarse como infinitamente pequeñas del 1.º 2.º y del 3.º órden.

Así, (acabamos de verlo), el punto *comparado* con la longitud es un infinitamente pequeño, como una longitud cualquiera *comparada* con la recta indefinida es otro infinitamente pequeño; y es fácil ver, sin entrar con este motivo en nuevas amplificaciones, que la recta indefinida es de por sí infinitamente pequeña con relacion al plano indefinido, y que, en fin, este es infinitamente pequeño con relacion al espacio. De donde se sigue que, bajando la escala y yendo del espacio al punto, pasamos por una serie de infinitamente pequeños de diversos órdenes, siempre COMPARADOS los unos con los otros.

Semejantes analogías existirán, si nó en totalidad al menos en parte, para otras clases de *cantidades*, y será posible concebir de nuevo en otro órden de cosas lo infinitamente pequeño y lo infinitamente grande *comparativamente*.

Así, si reflexiono sobre la intensidad g de la gravedad en la superficie de la tierra, y si la *comparo* á la accion atractiva molecular de que es resultante, esta última será infinitamente pequeña con relacion á g, y la presion que comunicaria esta fuerza g á un punto material, seria lo infinitamente pequeño de la presion ó del peso que dá á un cuerpo de volúmen finito.

En el curso de esta obra, se precisará por completo lo que estos ejemplos contuvieren aun de vago; pero por un momento los he unido á los precedentes para hacer comprender mejor que solo CAMBIANDO de módulo es posible á nuestra inteligencia concebir lo infinitamente pequeño y sus diferentes órdenes.

Porque la consideracion aislada é incomparativa de una *sola y misma* cantidad, no puede engendrar, ni lo infinitamente grande ni lo infinitamente pequeño.

Cero é infinito, hé aquí las operaciones que se destruyen en cuanto á sus efectos ó que no tienen fin: por una parte negacion de longitud, por otra imposibilidad de crearla ; pero cuando pensamos en salir de la longitud, cuando investigamos lo que podria reemplazarla, ya destruyendo el módulo, ya dándole una longitud infinita, entonces se hallan séres geométricos, que vienen, por decirlo así, personalmente á sustituirse á la longitud eliminada, para dar una forma inteligible á los resultados de semejante suposicion.

En una palabra, si no está concedido al hombre tener conciencia del *infinito absoluto* le es dado no obstante realizar, ya en sus concepciones, ya en sus obras el INFINITO RELATIVO. Cuando estudiamos con detenimiento la naturaleza en sus efectos no tardamos en percibir lo infinito en casi todos ellos, por ser el medio casi exclusivo que para producir emplea la naturaleza, siendo esta sin duda la razon de nuestra ignorancia sobre el mecanismo de los procedimientos que pone en juego. Pero nada nos impide apreciar los resultados de esos procedimientos, ni distinguir, ya con la razon, ya con los sentidos, las propiedades de que gozan, ni por consiguiente en varias circunstancias afirmar que, partiendo de un resultado dado y aplicándole la consideracion del infinito, iremos naturalmente á otro resultado de antemano previsto.

Por ahora no extenderé más mis consideraciones sobre el asunto, si bien no puedo dejar á un lado una importantísima observacion.

Salta ya á la vista que la ciencia del cálculo se extiende por regiones inmensamente mas estensas de lo que en un principio nos habiamos imaginado, pues, en efecto, hasta ahora nuestras investigaciones nos habian hecho pensar que no eran susceptibles de COMPARACION mas que las cantidades de una misma especie, lo cual es el objeto del álgebra.

Pero, puesto que es posible por una concepcion racional pasar en ciertos casos de una especie á otra, podemos ya vislumbrar el vasto horizonte de recursos que esta ciencia posee para efectuar ese tránsito, con tal de que haya siempre entre las especies respectivas una trabazon que auxilíe la inteligencia al efectuar la transformacion.

—Consecuencias relativas á los métodos de exposicion de los principios del cálculo diferencial é integral.

Lo que ahora es una esperanza, lo que todavía es una duda, será en breve certeza y veremos pronto los dominios y el objeto esencial del cálculo diferencial é integral. Pero, cómo hasta este dia poco se ha ocupado nadie de los módulos, y no habia sido suficientemente profundizada la consideracion de las transformaciones de los unos en los otros, ha resultado de aquí que no se ha podido dar un paso en esta parte de la ciencia sin recurrir á lo que, en el estado actual de las ideas, es el equivalente de estas transformaciones, esto es, á la consideracion de una misma cantidad que se hace infinitamente grande ó infinitamente pequeña. Tal es el orígen de todas las oscuridades que reinan aun en la exposicion del cálculo infinitesimal, obscuridades que desaparecerán completamente y serán reemplazadas por un método de exposicion tan claro como fácil cuando se traiga á la cuestion lo que solo debe figurar en ella, la transformacion de los módulos.

Pero antes continuemos examinando los diferentes estados de una longitud.

SECCION II.

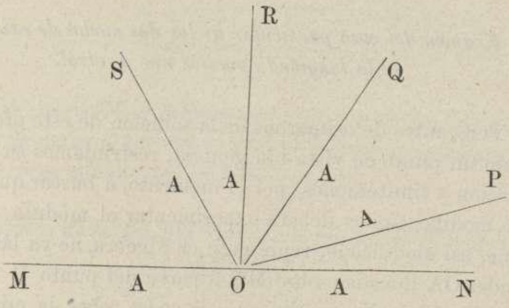
DE LA LONGITUD Y DE SUS DIFERENTES ESTADOS RESPECTO DE LA DIRECCION.

—*Enunciado general de la cuestion.*

Al considerar la longitud bajo el punto de vista de su grandeza ó de su pequeñez, creo que hemos llegado á obtener algunas ideas claras sobre la naturaleza de las cantidades fraccionarias é irracionales y sobre la de las cantidades que, comparadas entre sí, pueden ser tenidas por infinitamente pequeñas ó infinitamente grandes. Luego hemos visto como, con tales ideas, se podia si nó comprender, al menos admitir la existencia de los números fraccionarios é irracionales, y someterlos, en este estado, á los cálculos algebráicos. Mas tarde veremos lo que son en estos mismos cálculos las consideraciones de infinitamente grande é infinitamente pequeño.

Ahora despojemos por un instante la longitud de su propiedad de ser mas ó menos grande, y no la consideremos sino en su propiedad de ser aplicada segun la direccion de tal ó cual recta.

Pero para proceder siempre de lo simple á lo compuesto, imaginemos primero que no salimos de un mismo plano, y, á fin de precisar mas la cuestion, supongamos que habiendo trazado sobre este plano una línea indefinida MN, tomo sobre esta línea un punto O, y que luego por este punto O hago pasar una série de líneas rectas OP, OQ, OR, OS.....



Dada una longitud cualquiera OA puedo concebir que esta longitud es llevada á partir del punto O, ya sobre la direccion ON, ya sobre la direccion OP, ya sobre la OQ, ya, en fin, sobre cualquiera otra que pase por el punto O: de ahí resultan evidentemente una infinidad de diversos modos de existencia de la longitud OA en virtud de los cuales, esta longitud podrá gozar de propiedades diversas segun que sea llevada sobre direcciones diferentes unas de otras.

En tal supuesto, si he elegido cierto módulo λ para la longitud OA contada sobre ON, yendo de O hácia N, y si quiero distinguir estas de las otras longitudes OA segun las diferentes direciones, haré uso para estas últimas de nuevos módulos que llamaré λ', λ'', λ''',... etc.

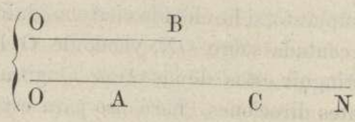
La cuestion importante que ahora habrá que resolver, será saber si estos nuevos módulos λ', λ'', λ'''... pueden, como lo hemos hecho presumir, expresarse por medio del módulo primitivo λ, modificado por algun signo de operacion ó de expresion algebráica.

—Exámen del caso particular de los dos modos de existencia de la longitud opuestos uno á otro.

Pero, antes de ocuparnos de la solucion de este problema bajo un punto de vista tan general, restrinjamos su enunciacion y limitémonos, por el momento, á buscar qué clase de modificaciones deberá experimentar el módulo λ para que, así modificado, represente en álgebra, no ya las longitudes OA llevadas sobre MN á partir del punto O con direccion hácia N, sino las que, llevadas sobre la misma línea MN á partir del mismo punto O, se dirijan hácia M.

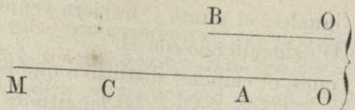
El problema se halla, pues, como se vé, restringido al caso particular en que las dos direcciones que se estudian estén sobre la misma recta, pero opuestas una á otra.

A fin de dirigirnos bien en el modo de investigacion que debemos seguir para resolver esta cuestion, procedamos á la discusion que debe preceder á la solucion de toda cuestion, esto es, al exámen de las propiedades de que gozan los datos.



Cuando no me ocupo sino de las longitudes que partiendo del punto O van todas dirigidas hácia N, advierto que, dadas dos de estas longitudes cualesquiera que ellas sean, OA y OB, si las agrego una á otra sumando OB con OA y aplicando el punto O de OB sobre el punto A, llegaré así á un nuevo punto C obteniendo una tercera longitud OC mayor que cada una de las otras dos é igual á su suma.

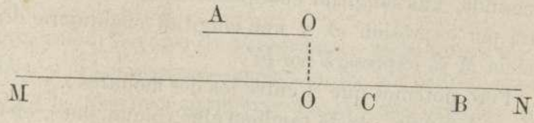
Lo que acabo de decir de las longitudes dirigidas hácia N y comparadas entre sí, podré decirlo igualmente de las longitudes OA y OB,



dirigidas hácia M, y comparadas entre sí como las primeras, de manera que estas observaciones son comunes á los dos casos aunque de direccion opuesta.

—*Expresion de la ley que rije la oposicion en el modo de existencia.*

Pero no sucede lo mismo cuando se quieren comparar las longitudes de la primera *categoría* con las de la segunda, y entonces se observa que los resultados á que se llega son esencialmente distintos del que acabamos de comprobar.



En efecto, si se supone que una de las dos longitudes precedentes OB es de la primera categoría y por consiguiente dirigida desde O hácia N, y si la otra longitud OA es de la segunda categoría y dirigida desde O hácia M cuando traslademos OA sobre OB de modo que coincidan, como antes, el punto O con el punto B, entonces el punto A en lugar de venir á ocupar la posicion C, primitivamente colocada tras el punto B á una distancia mas distante del punto de partida que OB; este punto A, digo, vendrá en virtud *de la direccion impresa* á OA á colocarse en C entre O y B á una distancia del punto de partida mucho menor que OB, de modo que el resultado de esta operacion será no dejar subsistir de OB sino una parte, la parte OC.

Y por consiguiente, si las dos longitudes OA y OB hubiesen sido iguales, el punto C hubiera venido á colocarse en el punto O coincidiendo con él.

Hé aquí, pues, el carácter distintivo que las dos direcciones que consideramos dan á las longitudes que se aplican sobre ellas, porque cuando dos de estas cantidades son iguales en cuanto á la longitud y se suman *dejando á cada una su* DIRECCION *y el* SENTIDO *en que deben marchar en virtud de esta direccion* nos encontramos, despues de hecha la suma, en el mismo orígen, esto es, en el punto de partida de la primera longitud, lo que exije que la expresion de las operaciones hechas así sea cero.

Tal es la ley general á que deben obedecer los datos del problema.

Ahora bien, si λ es el módulo de las longitudes de la primera categoría, y si λ' es el de las longitudes de la segunda, una longitud cualquiera dirigida hácia N, tendrá por expresion $a\lambda$ y una longitud cualquiera dirigida hácia M se expresará por $b\lambda'$.

Pero notemos que si entre los dos módulos λ y λ' existe una diferencia, existe tambien algo comun, pues, en efecto, estos dos módulos, que difieren en cuanto á la direccion, expresan uno y otro una longitud. Pero, bajo este último concepto, nada se opone á que yo admita que las dos longitudes que representan tienen el mismo valor absoluto, y que su diferencia, designada hasta ahora en la escritura por la acentuacion del segundo, consiste solo en que este tiene una direccion inversa de la del primero.

Siendo así, y teniendo los módulos igualdad de longitud, es evidente que cuando dos longitudes sean iguales é inversas una á otra si la una se representa por $a\lambda$, la otra lo será por $a\lambda'$, puesto que el resultado de la operacion del transporte de estos módulos, (el número a), sobre sus líneas respectivas, será el mismo ya se vaya de izquierda á derecha, ya se camine de derecha á izquierda.

Esto supuesto, traduzcamos ahora al álgebra la condicion á que deben satisfacer los datos del problema; para lo cual será necesario escribir que si se suma con la longitud $a\lambda$ la longitud $a\lambda'$ (por el carácter de direccion que la acentuacion representa) se debe obtener por resultado cero, esto es,

$$a\lambda + a\lambda' = 0.$$

En adelante podré, pues, tomar en consideracion en los mismos cálculos las dos cantidades λ y λ' con tal de no perder de vista que siempre que halle la suma $a\lambda + a\lambda'$, deberé en su lugar poner cero.

—*Modificacion en el módulo primitivo de las longitudes para que exprese longitudes opuestas á las primeras.*

Pero, como se vé, si no se introduce nada nuevo en la cuestion y si nos paramos en este punto, no podrán suprimirse en la escritura algebráica usual y admitida los módulos λ y λ', ni trabajar solo con los números que unidos á los módulos completan la expresion de las cantidades. Será preciso para prevenir los errores conservar siempre estos módulos; y así, sabremos constantemente que $a\lambda$ sumado con $a\lambda'$ debe dar cero y no $2a$, como nos veriamos obligados á escribir en cuanto los módulos no figurasen ya en los cálculos.

Ahora, para comprender bien lo que tengo que decir, supongamos que por un instante olvidamos todo lo que hemos aprendido acerca de las cantidades positivas y negativas, y que nos colocamos en la humilde posicion del alumno que empieza el álgebra y sabe solamente que el signo + quiere decir añadir y el signo — quitar.

En este estado, el principio precedente, la ley concreta, si puedo expresarme así, que representa los dos modos de existencia opuestos de la longitud, esa ley, figurada por la fórmula

$$a\lambda + a\lambda' = 0,$$

será inexplicable en la teoría del cálculo; pues, segun las ideas desenvueltas en esta teoría, nunca por medio de la adicion podrá obtenerse un resultado nulo, nunca sumando se tendrá cero.

Puesta así la cuestion, y bien reconocida la dificultad, podré hacer la siguiente observacion: puesto que, considerando las cosas concretamente, la suma de las dos expresiones $a\lambda$ y $a\lambda'$ debe dar 0, ALGEBRAICAMENTE podré obtener este mismo resultado si antes de todo cálculo y despues de haber reconocido la oposicion entre las dos expresiones, demuestro, por medio de una preparacion hecha sobre el módulo λ', que este módulo, igual por otra parte á λ en cuanto á la significacion de la longitud, debe ser sustraido constantemente en vez de ser sumado: lo cual se indicaria fácilmente haciendo preceder al módulo λ el signo de la sustraccion, y escribiendo $-\lambda$ en lugar de λ'.

Por este medio satisfago á todas las exigencias de la cuestion.

Primeramente establezco una diferencia clara y precisa entre los dos módulos, condicion primordial que era necesario llenar: en segundo lugar esa distincion deja ver con ventaja que los dos módulos son de la misma longitud, puesto que el mismo signo los representa, y, en fin, esa misma distincion es tal que en adelante, en todos los cálculos aritméticos que haya que hacer con las dos longitudes que tienen un modo opuesto de existencia, la condicion

$$a\lambda + a\lambda' = 0$$

se hallará siempre satisfecha de por sí misma, porque entonces $a\lambda'$ se cambia en $-\lambda$ repetido a veces, ó sea $-a\lambda$, convirtiéndose la condicion en una verdadera identidad.

Resumamos, pues, diciendo que siempre que cantidades de igual especie han de estudiarse en una misma cuestion con dos modos de existencia opuestos, podremos representarlas por un mismo módulo, salvo que ese solo módulo en la expresion de una de ellas irá precedido del signo de la sustraccion, á fin de indicar que, si se quieren aplicar las reglas ordinarias del cálculo á estas cantidades, en vez de sumar habrá que sustraer constantemente las cantidades marcadas con este signo.

—Interpretacion de las expresiones negativas.

Hé aquí, pues, una segunda aplicacion de nuestra ley general, por la que vemos que las expresiones negativas SOLO representan EL MODO de existencia de una cantidad opuesto á otro. Hé aquí tambien una segunda comprobacion de que, como digimos al principio de esta obra, las modificaciones que debe experimentar el módulo primitivo de una cantidad para representarla en sus diversos estados, son susceptibles de expresarse por medio de ese módulo acompañado de algun signo ó expresion algebráica, pudiendo así el EFECTO de estas modificaciones entrar desde luego en la expresion algebráica de las condiciones de un problema.

Séame ahora permitido detenerme un instante en algunas consideraciones acerca de las cantidades positivas y negativas; pues, desde el punto de vista en que me hallo, todos los hechos aislados de la ciencia del cálculo, hasta los que parecen mas independientes unos de otros, se me muestran unidos entre sí por un lazo tan íntimo que no hay separacion posible entre los principios teóricos y los hechos naturales.

El punto sobre el cual deseo insistir mas particularmente en este momento es el siguiente: la naturaleza de los raciocinios que se acaban de leer sobre las longitudes positivas y negativas es tal que todos nuestros razonamientos, aunque concretados á las longitudes, son generales y susceptibles de aplicarse á todas las cantidades en que se hayan reconocido los dos modos de existencia opuestos.

Ahora bien, y para hablar, pues, de un modo general, diremos con este motivo que la oposicion en el modo de existencia entre dos cantidades se reconoce par el carácter siguiente:

Dos cantidades entre las que existe esta oposicion quedan, cuando se suman, destruidas en lo que respecta á aquel de sus efectos ó estados que se estudia ó se considera en cada caso actual: mas claro: se destruyen por su reunion ó por su adicion MATERIAL y FISICA, cüando esas cantidades, consideradas aisladamente, tienen el mismo valor absoluto.

Así, puesto que el movimiento que un peso colocado en el plato de una balanza comunica á este instrumento en derredor de un punto fijo se destruye con la adicion de un peso igual al primero, pero colocado en el otro plato, diré que los modos de existencia ó de accion de esos dos pesos son opuestos uno á otro.

Puesto que los fenómenos eléctricos producidos por un cuerpo que posea cierta cantidad de electricidad vítrea se destruyen y desaparecen completamente cuando se añade á este cuerpo una cantidad igual de fluido resinoso, diré que los dos modos de existencia ó de accion de estos dos llamados fluidos son opuestos uno á otro.

Puesto que en el fenómeno de las interferencias la claridad producida por un rayo luminoso se halla en ciertas bandas destruida por la adicion de un rayo luminoso procedente del mismo orígen que el primero, siendo por consiguiente igual á él, diré que los dos modos de existencia ó de accion de estos dos rayos son opuestos uno á otro.

De manera que se vé sucesivamente salir de un mismo principio y referirse á un mismo punto de partida la existencia de todas esas cantidades que, en las diversas ramas de las matemáticas aplicadas, han debido ó deberán un dia considerarse bajo los conceptos positivo y negativo.

Pero aquí se presenta una consideracion digna de toda nuestra atencion:

Es evidente *á priori*, y ya hemos tenido gran cuidado de mencionarlo en la definicion precedente, que no son las CANTIDADES lo que debe destruirse y desaparecer con su reunion, sino los EFECTOS que pueden producir y que actualmente se estudian: lo que deja de producirse por destruccion ó compensacion es el efecto de cada una de dos cantidades de accion opuesta, pero las cantidades no se destruyen: las cantidades continúan subsistiendo.

Así, acerca de las longitudes y de sus direcciones debemos decir que no son las longitudes propiamente dichas ni los caminos que toman lo que desaparece: los efectos de su traslacion ó movimiento respecto del orígen ó punto de partida es lo que se compensa. Y un móvil que hubiera seguido las dos longitudes habria andado en realidad, pero esta marcha, relativamente al punto de partida, no hubiera producido nada.

Así, los dos pesos iguales que se colocan en los platillos de una balanza no se destruyen como pesos, pues, al contrario, obran con toda su doble energía sobre el punto de apoyo que sostiene el instrumento; pero, anulado mútuamente el movimiento que cada uno imprime en su particular á la balanza, resulta de su reunion ó de su existencia simultánea el reposo del equilibrio.

De manera que, en el primer caso y atendiendo á la *traslacion* definitiva, las dos longitudes son como si no hubiesen existido, mientras que, atendiendo al *camino recorrido*, hay que tener en cuenta á una y á otra.

En el segundo caso, atendiendo al movimiento de la balanza, el instrumento está absolutamente en la misma situacion que si no tuviese pesos; mientras que, atendiendo á la estabilidad y á la resistencia del punto de apoyo ó á la traccion que experimenta, nos es preciso reconocer que este punto está sometido simultáneamente á la doble accion de cada peso, la cual es tan importante y tan real, que, en pasando de ciertos límites, arrancaria con violenta fractura el mismo punto de apoyo.

Por lo demás, la observacion de que son los efectos y nó las cantidades lo que se destruye, parece vulgar en la apariencia, y, sin embargo, aplicada al fenómeno de óptica que acabo de indicar, viene á confirmar lo que sabemos hoy sobre el modo de trasmision de los fenómenos luminosos.

En efecto, es evidente que un rayo luminoso no puede ser inmaterial; pero si este rayo es material segun el modo de la emision, esto es, si son corpúsculos lo que produce la vision por la série no interrumpida de sus choques, nunca se comprenderá que estos corpúsculos, cualquiera que sea su forma, cualesquiera que sean sus movimientos giratorios, puedan, hiriendo un objeto siempre en el mismo sentido, destruir ni aun disminuir los efectos de los choques que producen, pues por el contrario esos efectos tendrán que acrecentarse.

Esto nos conduce á pensar que la sustancia productora de la vision, persistiendo siempre, debe moverse de tal manera que, en los fenómenos de las interferencias, las modificaciones que produce en la retina, se destruyan; de donde sacamos inmediatamente la consecuencia de que en un mismo instante los rayos que producen el fenómeno deben solicitar el órgano de la vista, el uno en cierta direccion y el otro en una direccion opuesta; pues así la retina quedará en reposo y no habrá vision.

No necesita más el físico para vislumbrar movimientos vibratorios de un medio elástico y formular la teoría de las ondulaciones.

Procediendo por analogía con los fenómenos eléctricos no se dirá que los que llamamos fluido vítreo y fluido resinoso se destruyen con su adicion ó su reunion en un mismo cuerpo; pero podemos pensar que lo que llamamos electricidad vítrea no es mas que una fuerza con un modo de existencia opuesto á lo que llamamos electricidad resinosa, lo que no quita que esas fuerzas sean iguales y produzcan los mismos efectos cuando obran aisladamente sobre cuerpos inertes respecto de ellas.

¿Son las velocidades del éter iguales y contrarias? ¿O bien variaciones iguales de dilatacion y de condensacion del éter con relacion á cierto estado de densidad de este fluido que, seria particular á cada cuerpo, y cuyo equilibrio estaria interrumpido sin cesar por la accion de agentes exteriores? ¿O, en fin, otros modos, otros estados físicos, desconocidos quizá aun, por los cuales se puede y se podrá concebir mas tarde que fuerzas iguales y contrarias se desarrollan en un *medio* elástico? Esto es lo que el estado actual de nuestros conocimientos no permite determinar. Pero, al menos, la existencia de estas fuerzas iguales y contrarias, cualquiera que pueda ser su modo de generacion, me parece incontestablemente demostrada, porque los fenómenos fundamentales satisfacen completamente á la ley general que rige la oposicion en el modo de existencia.

No dejaré este asunto sin consignar aun en algunas palabras una observacion cuyas ulteriores consecuencias me parece han de ejercer un influjo incontestable en las aplicaciones de la ciencia del cálculo al estudio de las leyes y de los hechos naturales.

Si volvemos al ejemplo de la balanza solicitada por dos pesos iguales y si, para mas sencillez, sustituimos á esta balanza una polea por cuya garganta pase un cordon cuyos dos extremos sostengan los pesos en cuestion, el efecto de este sistema será tal que en los cálculos y razonamientos deberemos, considerado uno de estos pesos como positivo, mirar al otro como negativo, pero siempre teniendo en cuenta el aparato sobre que obran.

Este aparato, realiza, pues, físicamente la operacion aritmética llamada *sustraccion* y es evidente que aquí el OBJETO FISICO que llamamos polea, reemplaza al signo algebráico —.

Esta observacion tan natural, con motivo de un aparato tan sencillo, corrobora el pensamiento, (que ampliaremos aun) de que las operaciones del cálculo deben REPRESENTAR LAS LEYES DE LAS RELACIONES FISICAS bajo la influencia de las cuales nacen, crecen, y obran las cantidades (nó los números). La misma observacion nos muestra que no es tan poco matemático, como se pudiera creer á primera vista, introducir las relaciones físicas en las cuestiones de análisis; y, en fin, nos conduce por la via recíproca á la conclusion de que á su vez las fórmulas algebráicas pueden REALIZARSE FISICAMENTE por aparatos ó por máquinas, como algunos lo han emprendido ya.

Pero importa notar que mientras que la ciencia aritmética no ofrece sino medios MUY LIMITADOS para ejecutar los cálculos que indican las fórmulas, no sucede lo mismo con los PROCEDIMIENTOS QUE LA NATURALEZA pone á nuestra disposicion y que pueden variar al infinito. Para presentar un ejemplo muy sencillo, citaré *la division*, que en los polipastos resulta de una série de sustracciones, y en el plano inclinado aparece de una vez.

Estas consideraciones engrandecen y ensanchan la órbita de las investigaciones á que puede consagrarse la inteligencia humana para SUSTITUIR A LOS CALCULOS PROCEDIMIENTOS FISICOS. Y, en efecto, basta haber observado que las mismas formas algebráicas se aplican al estudio de las longitudes, de los pesos, de la luz, de la electricidad &c., para concluir que no son solo los aparatos dinámicos los susceptibles de ejecutar cálculos, sino que no hay quizá una sola rama de las ciencias que no pueda un dia regalar al hombre su contingente de utilidad. ¿No ha sucedido, por ejemplo, que donde los procedimientos ordinarios de la geometría y de la areometría son insuficientes para dar á conocer con exactitud el débil espesor de ciertas capas y de las diferencias de densidad en los gases, las cuales se pudieran reputar como infinitesimales, no ha sucedido que los procedimientos ópticos han venido á sustituirse á los antiguos, introduciendo en las determinaciones obtenidas una precision casi igual á la que solo el cálculo hubiera podido suministrar?

— *Observaciones sobre el paso de esta primera parte de nuestros estudios á la siguiente.*

Mis reflexiones hasta ahora habrán podido parecer de un interés secundario, porque, aun cuando contribuyan á dar mas claridad y precision á ciertas doctrinas, como estás doctrinas eran ya conocidas y aplicadas diariamente, no podian revelar nada absolutamente nuevo; pero no sucederá lo mismo con lo que tiene que seguir, y el interés de curiosidad que los hombres prestan á la revelacion de todo lo que ha sido hasta el dia misterioso, incomprensible ó inexplicado quizá dé mas valor á la segunda parte de mi trabajo.

Sin embargo (tan grande es la fuerza de la preocupacion en todos los ánimos) no causará poca sorpresa saber que, en su orígen, lo que primeramente descubrí y lo que me ofreció mas facilidades fué la interpretacion de las expresiones imaginarias; y que, dado aquel primer paso, me fué dable interpretar las expresiones negativas, despues las espresiones fraccionarias é irracionales, y, en fin, las expresiones de los infinitamente grandes é infinitamente pequeños.

Y aunque ahora la inteligencia de mis ideas sea mas clara y mas sencilla para todos, por el resultado mismo de mis observaciones, quizá haya personas que presten fácilmente aquiescencia á mis consideraciones sobre los módulos y sus modificaciones para la interpretacion de las expresiones imaginarias y tambien para la de las cantidades infinitamente pequeñas é infinitamente grandes, y se nieguen á prestarla á la interpretacion de las expresiones negativas y con mayor razon á la de las fraccionarias, pretestando que se sabe desde hace mucho tiempo lo que son estas últimas, acerca de las cuales no hay por qué hacer innovacion ninguna.

La fatal tendencia á que aludo, y cuyos efectos temo en algunas personas, he tenido que empezar por combatirla en mí mismo; pues yo tenia, como todo el mundo, las mismas preocupaciones, contra las cuales mis primeras dudas solo pudieron luchar muy flojamente, por lo que no me determiné á sacrificarlas hasta que la verdad me pareció explicarse con acentos tan poderosos y tan irresistibles que conservar mas tiempo la vacilacion habria sido querer permanecer á sabiendas en el error.

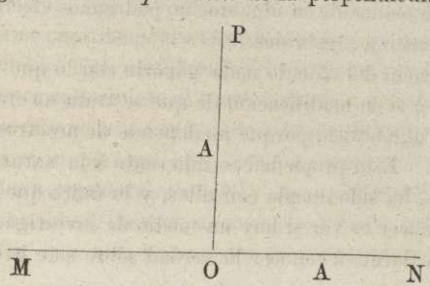
Si yo hubiese sido dueño de escojer para mi trabajo el modo de exposicion que hubiera querido, no habria titubeado en darle principio explicando primeramente todo lo nuevo que tengo que decir sobre las expresiones imaginarias, y, entrando así en un terreno tan misterioso, tan interesante y tan poco explotado hasta ahora, habria podido llevar al lector por el camino que me hubiera parecido conveniente, y, como de ello no le habia de resultar contrariedad ninguna en sus hábitos, no hubiera vacilado en marchar conmigo confiadamente por el nuevo camino que le trazaba.

Pero si este modo de exposicion presentaba ventaja á la persona del autor, ofrecia para el objeto científico grandes inconvenientes, por lo cual, tuve que renunciar á él, resignándome á representar el papel de reformador, que está erizado de dificultades, en vez de el de novador, que no es ni con mucho tan expuesto.

Estas observaciones podrán servir de excusa á algunas amplificaciones quizá largas en lo que precede, si bien cuando las ideas que presento sean generalmente adoptadas por verdaderas, su exposicion se hará dentro de algunos años en poquísimas líneas, suprimiéndose muchas cosas de este escrito que actualmente me han parecido, si nó indispensables, al menos muy útiles para hacer admisibles mis nuevas ideas.

—Exámen del caso particular de los dos modos de existencia de la longitud perpendicular á otra.

El método en este estudio, como en los precedentes, consistirá en indagar el carácter esencial de los dos estados de que nos ocupamos y que los distingue de todos los demás: en una palabra, será preciso encontrar la enunciacion algebráica *si es que existe* de la perpendicularidad.



Si O es siempre el punto de partida de todas las longitudes que estudiamos, y si OA ó $a\lambda$ es una longitud situada sobre ON, será menester, para obtener esta misma longitud sobre OP, perpendicular á ON, ejecutar primero ciertas operaciones geométricas, por medio de las cuales trazaremos *la* DIRECCION de OP, y, determinada y fija ya esa direccion, llevaremos sobre OP, partiendo siempre de O, el módulo λ un número de veces igual á a.

Ahora, tratemos de saber si existe una modificacion de λ (*que interinamente representaré* por λ') tal que $a\lambda'$ exprese que la longitud OA debe considerarse como existente en la perpendicular OP en vez de existir en ON; esto es, (para volver á una idea expresada varias veces en esta obra), tratemos de averiguar si hay una OPERACION ALGEBRAICA QUE REPRESENTE LA OPERACION GEOMETRICA por medio de la cual se pasa de un estado primitivo de direccion al estado perpendicular.

En la incertidumbre en que me hallo con este motivo podria inventar para esta representacion, tal como acabo de definirla, un signo cualquiera, con el cual distinguiriamos á λ, y por este medio diferenciaríamos las primeras longitudes situadas sobre ON de las que están situadas sobre su perpendicular OP.

Pero algebráicamente este invento no adelantaria nada la cuestion, puesto que con signo tan arbitrariamente escogido, y desconocido en álgebra, no podriamos efectuar ninguna operacion algebráica.

La ciencia del cálculo nada ganaria con lo que nos proponíamos, si la modificacion de que se trata no era de naturaleza algebráica; porque no depende de nosotros que sea ó nó así. Esta propiedad es inherente á la naturaleza de las cosas, ha sido creada con ellas, y lo único que nos queda que hacer es ver si hay un medio de investigacion propio para darnos á conocer la verdad sobre este hecho.

Mas *si es posible* que el nuevo módulo λ' no sea otra cosa que λ MODIFICADO ALGEBRAICAMENTE, siempre podremos admitir que el tal modificador algebráico será un cierto factor desconocido p, y escribir por consiguiente $\lambda' = \lambda p$, quedándonos siempre que descubrir, si es posible, lo que puede ser ese p algebráico y desconocido.

Sentado esto, marchemos adelante en nuestra investigacion que quizá demos con algo algebráico que represente la perpendicularidad.

—Investigacion de la ley de la perpendicularidad.

Ante todo, observo que es propio de la perpendicularidad y que este carácter no pertenece sino á ella, que si ahora hago sobre OP, y en el mismo órden, las mismas operaciones que he hecho al principio sobre ON, iré á parar exactamente sobre la direccion OM opuesta á ON. Hé aquí, pues, un hecho, una relacion geométrica que une entre sí estas tres direcciones; tal es el principio geométrico de la perpendicularidad. Veamos lo que dice el álgebra de él.

Pero si la multiplicacion del módulo primitivo λ pertenece á una direccion que por otra parte puede ser cualquiera; si la multiplicacion de este módulo por p debe tener por objeto expresar que la direccion no se refiere ya á la línea primitivamente escogida, sino á su perpendicular, se deduce que, no faltando á las prescripciones de este principio, y aplicándolo al nuevo módulo λp, esto es, á la direccion OP, y, por consiguiente, multiplicando este módulo por p, lo que dará λp^2, se obtendrá el módulo de las longitudes perpendiculares á OP, las cuales resultan de la repeticion sobre OP de las mismas operaciones que se habian hecho sobre ON, practicadas exactamente en el mismo órden.

Ahora bien, geométricamente esto me hace volver á OM; pero ya he probado que el módulo de las longitudes que están situadas sobre OM debe, relativamente al módulo λ, estar representado por $-\lambda$; luego al fin la ley de la perpendicularidad exije que se tenga $-\lambda = \lambda p^2$, y como esto debe acontecer cualquiera que sea el módulo λ que se escoja, *se deducirá de aquí* que p debe ser igual á $\pm \sqrt{-1}$.

En cuanto al doble signo lo hemos introducido por no faltar á los usos algebráicos. (1)

Pero es evidente que, limitándonos al caso particular que nos ocupa, como sabemos de antemano que no hemos introducido en la cuestion al factor p con el signo de la sustraccion, resultará que p debe ser igual á $+\sqrt{-1}$ ó bien á $\sqrt{-1}$.

Pero, como está en la naturaleza del razonamiento que hemos empleado, hacernos llegar al mismo resultado final $-\lambda = \lambda p^2$, sea que tomemos á p con el signo $-$ ó con el signo $+$, no es de admirar que la solucion obtenida se presente con estos dos signos.

Por otra parte fácil es de ver á qué corresponde el segundo signo: lo que ya sabemos sobre los dos modos de

(1) Lo que hay de notable, y esta verdad será suficientemente demostrada en la segunda parte de esta obra, es que la regla ordinaria de los signos para los monómios no es racionalmente aplicable sino al caso que nos ocupa, á la consideracion de las direcciones, y de ningun modo al tamaño de las cantidades; y, como esta distincion bajo el punto de vista teórico nunca se ha expresado claramente, resulta, que respecto á este particular todos nuestros métodos de exposicion carecen de precision: en el capítulo siguiente se verá otra conclusion de la misma clase. Algunos autores de elementos han reconocido la insuficiencia de las demostraciones ordinarias de la regla de los signos para lo que se califica de cantidades aisladas, dando en ello prueba de gran discernimiento. En realidad la regla de los signos no es aplicable sino á las direcciones; y es una inutilidad, cuando no un vicio, querer generalizarla, y continuar aplicándola á las cuestiones en que solo entra en juego la consideracion de los tamaños.

existencia opuestos bastaria para hacernos ver *á priori*, que si $\lambda\sqrt{-1}$ es el módulo de las longitudes situadas sobre OP, $-\lambda\sqrt{-1}$ debe ser el de las longitudes opuestas á esta, y por consiguiente situadas sobre OQ, prolongacion de la perpendicular por debajo de MN. Pero el raciocinio directo conduce tambien á este resultado; porque, en efecto, si, como lo hemos indicado, p representa la reunion de las operaciones geométricas que hay que hacer para obtener OP, es evidente que, dando á estas operaciones un modo de existencia ó de accion inverso del precedente con relacion á la línea ON, obtendré OQ. Ahora, puesto que este es un modo inverso del primero, deberá representarse por $-p$ estándolo el primero por p; de donde se sigue que el módulo relativo á OQ será $-\lambda p$; despues, repitiendo sobre OQ las mismas operaciones $-p$ que he hecho sobre ON, tendré por módulo de la nueva direccion obtenida $-p\times-\lambda p$ ó λp^2; pero esta nueva direccion es OM, cuyo módulo es $-\lambda$: por tanto, se tendrá, como antes, $-\lambda=\lambda p^2$: y, como sé que p se ha empleado en el razonamiento con el signo $-$, deduciré de aquí $p=-\sqrt{-1}$: lo cual demuestra de nuevo que el módulo de las longitudes contadas sobre OQ debe ser $-\sqrt{-1}$.

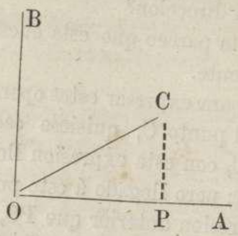
Hé aquí completamente resuelto el problema que nos propusimos, y esta solucion viene de nuevo á confirmar triunfalmente nuestra ley general: en la ciencia del cálculo, las formas ó expresiones algebráicas, incomprensibles sobre los números abstractos, son algunas veces susceptibles de interpretacion clara y precisa cuando se pasa á la consideracion de las cantidades concretas.

—Método de investigacion que me condujo la primera vez á la representacion algebráica de la ley de la perpendicularidad.

He dicho que, al empezar mis investigaciones sobre el objeto de esta memoria, se me ocurrió ante todo la interpretacion de las expresiones imaginarias; pero, como la demostracion que se acaba de leer parece una consecuencia de la ley general enunciada, y que por consiguiente la interpretacion de las expresiones imaginarias no ha podido ocurrírseme sino despues de descubierta la ley, y como, además, en la demostracion me apoyo en lo que ya se ha demostrado con motivo de las cantidades negativas, se podria creer, contra lo que he anunciado, que lo relativo á la interpretacion de las negativas debió preceder á la interpretacion de las imaginarias.

Todo esto seria cierto, si la demostracion que acabo de hacer fuese realmente la que me condujo á la interpretacion, y si por el contrario no hubiese venido despues; pero solo tras haber meditado largo tiempo sobre las consecuencias de este primer descubrimiento, fué cuando se me patentizó la importancia de la consideracion de los módulos, y cuando se presentó á mi espíritu la enunciacion de la ley general que he dado á conocer, resultando de todo un conjunto de consideraciones, ligadas á un principio general, del cual posteriormente he conseguido sacarlo todo. Pero al principio procedí de otro modo, y, como este punto es de una importancia incontestable, creo que no será inútil exponer aquí *el cómo*, sin ninguna consideracion referente á la ley de los módulos, llegué en su orígen á descubrir la significacion del signo $\sqrt{-1}$.

Hé aquí lo que en el mes de Abril de 1839 escribia con este motivo:



”Voy á examinar qué sucederá en el ángulo recto AOB por causa de las múltiples direcciones que una linea, tirada por el punto O, pueda tomar en este ángulo.

”Imaginemos que una línea, que designaré por a, se aplica sobre OA á partir del punto O, y que, sin dejar de tener su punto de partida en O, gira, elevándose, sobre OA tomando así todas las posiciones posibles entre OA y OB.

”Esta línea, en cuanto á su longitud, se representará siempre algebráicamente por a; pero ¿cómo dar una idea de sus diversas posiciones? Tal es el problema que me propongo resolver.

”Ahora bien: sea OC una de esas posiciones: observo que en bajando del punto C una perpendicular CP, si se me diesen OP y CP, me seria muy fácil obtener el punto C, y por consiguiente conocer OC, no solo en su longitud sino tambien en su posicion con respecto al punto O y á la línea OA.

”Para esto seria preciso, llevar á partir del punto O sobre OA, la longitud OP, elevar en P sobre OA una perpendicular, y tomar sobre esta perpendicular, á partir de su pié, la distancia PC; este procedimiento conduciria al punto C sin poder nunca dar otro punto diferente del C.

”Pero puede esto escribirse algebráicamente? ¿Puede expresarse todo esto con los solos signos del álgebra, y ejecutar con resultados exactos las operaciones algebráicas ordinarias sobre la expresion obtenida de este modo de la longitud *a* y de su direccion?

"A primera vista parece que esta cuestion ha de ser resuelta negativamente.

"En efecto, si para expresar estas operaciones geométricas que me dan el punto C, quisiese escribir que OC es igual á OP + PC, con esta expresion llegaria al punto P sobre la línea OA; pero llegado á este punto nada me indicaria en la expresion anterior que PC, debe ser llevado perpendicularmente á OA; y, por tanto, no podria hacer mas que añadirlo á OP á continuacion del punto P obteniendo así una longitud OP, sobre OA, que de ningun modo será la misma que quiero representar, ni en lo que concierne á la LONGITUD ni en lo que respecta á la POSICION.

"Sin embargo, me es lícito hacer la observacion de que, si á la cantidad PC agregase un signo particular destinado á indicar que la direccion de PC debe ser perpendicular á OA, por causa de este signo la expresion OP + PC, tomaria el carácter que quiero darle, representando así fielmente las operaciones geométricas que es preciso ejecutar para llegar de O á C.

"Si al efecto invento el signo $\overline{\quad}|$, entonces la expresion OP + PC (perpendicular á OP) será

$$OP + \overline{PC}|$$

"Lo que quiere decir que PC debe medirse á partir del punto P, no ya sobre la línea OA en la prolongacion de OP, sino perpendicularmente á OA.

"Hé aquí sin duda un convenio al cual nada se opone y de que podremos servirnos en las investigaciones geométricas; pero, si *b* y *c* son las longitudes de OP y de PC, la expresion

$$b + \overline{c}|$$

no representará ya nada algebráico, puesto que no sabemos de ninguna manera lo que en álgebra puede significar el signo $\rceil$; y entonces, ¿cómo aplicar á una cantidad afectada con este signo las consideraciones de la ciencia del cálculo?

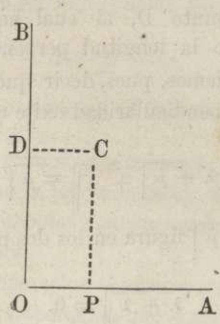
"Así, inventando un símbolo particular para la perpendicularidad, podemos indicar á la vista, en la escritura ordinaria esa direccion especial de una línea con respecto á otra; pero nos será imposible aplicar esos símbolos á los cálculos algebráicos.

"Veamos, pues, si adelantando en nuestras investigaciones conseguimos realizar lo que hasta ahora no pasa de un deseo.

"Por de pronto veo que, siendo arbitraria la direccion que he tomado para la línea OC, podré representar todas estas direcciones por medio de las longitudes *b* y *c* y del signo de la perpendicularidad. Siendo suficiente este último signo para expresarlo todo, ocupémonos únicamente de su investigacion.

"Pero para conocer entre todos los símbolos el que será mas á propósito, nos conviene antes conocer bien la ley del principio cuyo representante ha de ser este símbolo.

"Estudiemos, pues, la ley fundamental de la perpendicularidad.



"Para esto, tómese á partir del punto O una longitud λ que llegue hasta P, elévese en P una perpendicular PC cuya longitud sea μ, y en C sobre CP elévese otra CD que corte á OB en D.

"Es sabido en geometría que ejecutada esta figura (siendo por otra parte el ángulo en O recto), las dos longitudes CD y DO son respectivamente iguales á OP y PC ó á λ y μ; y no solamente estos hechos son consecuencias de la perpendicularidad, sino que son su PROPIEDAD EXCLUSIVA, de manera que cualquier otra direccion distinta de la perpendicular no daria á la vez $CD = \lambda$ y $DO = \mu$.

"Esta figura expresa, pues, la ley fundamental de la perpendicularidad; veamos cómo podremos representarla algebráicamente.

"PC ó μ, siendo perpendicular á OA, podrá representarse segun nuestro convenio por $\overline{\mu}|$.

"Siendo el mismo CD perpendicular á PC, que está representado por $\overline{\mu}|$, será preciso, segun nuestro propio convenio, cubrir á CD ó á λ dos veces con el signo de la perpendicularidad y entonces CD se representará por $\overline{\overline{\lambda}}\|$.

"Pero, despues de haber sumado por via de perpendicularidad las tres longitudes OP, PC, CD, LLEGO GEOMÉTRICAMENTE al punto D, al cual habria directamente llegado tomando la longitud perpendicular OD ó $\overline{\mu}|$.

"Segun esto podemos, pues, decir que la ley física del principio de la perpendicularidad exije que se obtenga algebráicamente

$$\lambda + \overline{\mu}| + \overline{\overline{\lambda}}\| = \overline{\mu}|$$

ó bien, puesto que $\overline{\mu}|$ figura en los dos miembros,

$$\lambda + \overline{\overline{\lambda}}\| = 0.$$

"Pero esta ley, expresada por una ecuacion en que los signos algebráicos $+$ y $=$ están combinados con un signo convencional que hasta ahora no representa operacion ninguna de cálculo, es absolutamente incomprensible en álgebra, porque no indica operaciones ALGEBRAICAMENTE EJECUTABLES sobre λ.

"¿Pero no pudiéramos hacerle adquirir de algun modo esta propiedad?

"Al efecto, lo mas natural es investigar si existe algun factor algebráico que modificando una longitud cualquiera λ, pueda hacer de la expresion de esta longitud así modificada, y sustituida en la ley escrita de la perpendicularidad, una fórmula VERDADERAMENTE ALGEBRAICA, esto es, una identidad.

"Ahora bien, si p es ese factor, $\overline{\lambda|}$ se representará por λp y $\overline{\overline{\lambda||}}$ por λp^2.

"La ley de la perpendicularidad será, pues,

$$\lambda + \lambda p^2 = 0,$$

ó bien

$$\lambda(1 + p^2) = 0;$$

y, como λ no puede ser nulo, puesto que es un valor cualquiera, se tendrá

$$1 + p^2 = 0;$$

de donde

$$p = \pm \sqrt{-1}.$$

"Luego hay una expresion algebráica, y esa expresion es $\sqrt{-1}$, que hace que la ley en cuestion deje de quedar en el dominio de los símbolos convencionales, entrando así en el terreno del álgebra.

"Hay, pues, una operacion algebráica, representacion EN EL CALCULO de la operacion que consiste EN GEOME-

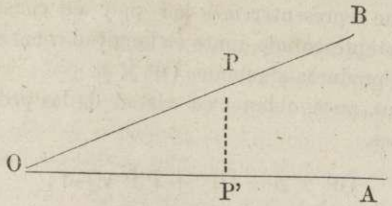
TRIA en elevar una perpendicular á una línea, así como en la misma álgebra hay operaciones que reemplazan á la de añadir ó quitar sobre una misma línea una longitud á otra, ó como tambien hay en álgebra otra operacion que expresa la que se ejecuta en geometría cuando se lleva varias veces á continuacion una de otra la misma longitud."

Hé aquí por qué medio llegué á convencerme en un principio de que $\sqrt{-1}$ era el símbolo algebráico de la perpendicularidad geométrica. En esta demostracion no figuran mis ideas respecto de los módulos, y se vé que no tuve necesidad de considerar en las cantidades los dos modos opuestos de existencia.

Pero este procedimiento, aunque rigoroso en sí mismo, está lejos á mis ojos de ser tan filosófico como el que he expuesto al principio, porque este no es ya sino un caso particular de un método general y fecundo, del que debe resultar no solo lo que es relativo á un modo particular de existencia de una misma cantidad, sino además lo que se refiere al conjunto general de todos los modos de existencia posibles; que es lo que vamos á continuar exponiendo.

—Exámen del caso particular de los dos modos de existencia de la longitud cuando forma con otra un ángulo cualquiera etc.

En este nuevo exámen, como en los que le han precedido, empezaremos por estudiar las diversas relaciones geométricas que existen entre los datos de la cuestion, y solo nos quedará que examinar si el álgebra nos dá los medios de expresar analíticamente estas mismas relaciones.



Sea OA la direccion que tomamos por orígen de partida, y OB una direccion que forme con la precedente un ángulo α.

Si de un punto cualquiera P de la direccion OB bajamos una perpendicular PP′ sobre OA, será un hecho geométrico patente que las dos líneas OP′ y P′P sumadas, *teniendo en cuenta tanto* sus *longitudes como* sus DIRECCIONES, conducirán al punto P, al cual se hubiera llegado directamente siguiendo la longitud OP, ó sea, caminando sobre OB, cuya inclinacion y posicion respecto de OA conocemos por estar dado el ángulo α.

Ya sabemos que por ser la direccion P′P perpendicular á la OA es necesario que la expresion de la longitud P′P vaya acompañada del factor algebráico $\sqrt{-1}$, de modo que el camino OP′P tiene por expresion analítica

$$OP' + P'P \sqrt{-1}.$$

Escribamos, pues, que esta expresion es igual á la que debe servir para representar la distancia ó longitud OP tomada sobre OB.

En el estado de incertidumbre en que nos encontramos sobre la forma analítica que debe servir para representar la direccion OB respecto de la OA, admitamos por un instante, como lo hemos practicado en las antecedentes investigaciones, que esta forma consiste en cierto factor desconocido, que representaremos por p; y en consecuencia OP quedará representado, tanto en longitud como en direccion, por el producto algebráico $\mathrm{OP} \times p$.

Deberemos, pues, obtener en virtud de las precedentes observaciones.

$$\mathrm{OP} \times p = \mathrm{OP}' + \mathrm{P'P}\sqrt{-1},$$

ecuacion de la que sacaremos

$$p = \frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}} + \frac{\mathrm{P'P}}{\mathrm{OP}}\sqrt{-1}.$$

Tal es el valor de p: tal es, pues, la forma de la expresion analítica que se puede llamar el coeficiente de direccion de una línea que forma un ángulo α con OA.

Racionalmente hablando, puesto que esta forma debe, en las investigaciones algebráicas, representar la direccion de la línea OB, es evidente que debe convenir á todos los puntos de esta línea, y, por consiguiente, no depender de la consideracion particular de uno de sus puntos P.

Y ese precisamente es el carácter propio de la expresion anterior, pues si el punto P figura en ella solo es en apariencia. En efecto, es otra verdad geométrica, dependiente de la naturaleza de la línea recta y del ángulo, que las relaciones $\frac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}}$ y $\frac{\mathrm{P'P}}{\mathrm{OP}}$ son invariables cualquiera que sea el punto P que se haya tomado sobre OB, de tal modo que, representando, como es costumbre hacerlo, los valores constantes de estas relaciones por *cos* α y *sin* α, resulta definitivamente

$$p = \cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha,$$

forma bajo la cual se pone de manifiesto la independencia del valor de p con relacion al punto P, ó á cualquier otro de la direccion OB.

Queda, pues, demostrado que las direcciones de las rectas, unas con respecto á otras, tienen una expresion analítica, de tal manera que sirviéndonos de esta expresion podrán someterse esas direcciones al cálculo con la misma facilidad que se someten á él las longitudes representadas por los números. Se vé tambien que en estos cálculos se podrá, como practicamos en geometría, hacer á la vez sobre las longitudes y las direcciones toda clase de investigacion; pues que la expresion múltiple

$$r\,(\cos \alpha + \sqrt{-1}\,\sin \alpha)$$

designa simultáneamente una línea cuya longitud es r, y que forma un ángulo α con la direccion tomada por línea de partida.

Detengámonos un instante á reflexionar sobre los hechos notables que se desprenden de los principios que acabamos de establecer.

—Logaritmos circulares.

Las investigaciones analíticas hechas desde Euler han confirmado la identidad que existe entre las dos expresiones $e^{\alpha\sqrt{-1}}$, y $\cos \alpha + \sqrt{-1}\,\sin \alpha$. Pero ahora que sabemos que una de estas expresiones, $\cos \alpha + \sqrt{-1}\,\sin \alpha$, representa en geometría la direccion de una línea que forma con la tomada por orígen de partida un ángulo α, la ecuacion siguiente

$$\cos \alpha + \sqrt{-1}\,\sin \alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}$$

que, hasta este dia, no ha sido otra cosa mas que una especie de símbolo, viene á ser una extension muy natural de los conocimientos debidos á la teoría logarítmica.

En efecto, ¿qué es el logaritmo de una cantidad? Bajo el punto de vista mas general, es el lugar que ocuparia segun su tamaño esta cantidad en una progresion en que todas las cantidades de la misma especie se hallasen dispuestas segun el órden de su desarrollo.

Pero si por analogía queremos hacer la aplicacion de esta idea primitiva á las direcciones, reconoceremos que al desenvolverse forman en derredor de un punto fijo una série que abraza toda la circunferencia al rededor de este punto. De manera que tomada una de ellas por línea de partida, el lugar de cada una de las otras podrá contarse por el arco de circunferencia que intercepta á partir de la primera, ó, en otros términos, por el ángulo que forman entre sí. Pudiéramos establecer como principio, segun la observacion precedente, que el ángulo es el logaritmo de la direccion; y hé aquí porqué el análisis, en su rigorosa lógica, confirmando de antemano esta verdad, y cuando los geómetras no sabian aun que $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$ es la expresion analítica de las direcciones, habia igualado esta expresion á una exponencial del ángulo.

Mucho me alejaria de mi objeto si hubiese de seguir este pensamiento en toda su extension, porque es nada menos que el gérmen de los logaritmos que pudieran llamarse *circulares*, y porque iríamos á parar á las mas importantes cuestiones de la teoría de los números, sobre las que arroja una claridad inesperada.

—Aplicacion á la teoría de los números.

Con pocas palabras daré á entender la importancia de esta última asercion.

Si un número X es primo con *a* y si se dividen sucesivamente todos los múltiplos de X comprendidos entre X y

(a — 1) X por el número a, se tendrá constantemente un resíduo: estos resíduos marcharán en progresion por diferencia, pero la progresion será circular, y hé aquí como se debe entender este particular. Se dividirá una circunferencia en a puntos de division y se pondrán sucesivamente sobre esos puntos todos los números desde 1 hasta a inclusive. Hecho esto, para contar todo el largo de la circunferencia en progresion por diferencia es menester salvar el mismo número de divisiones.

Si, por ejemplo, se toma para este número el valor del resíduo de la primera division $\frac{X}{a}$ y se hace uso de él á partir del punto marcado a, se obtendrán así sucesivamente y en el órden en que están presentados los diferentes resíduos.

Pero es evidente que los puntos de division de la circunferencia pueden para este objeto ser reemplazados por las direcciones de los radios que van á parar á estos puntos, y de esta simple observacion resulta bien claramente que habrá analogía completa entre el órden sucesivo de estas direcciones y el de los resíduos. Llegamos, pues, guiados solo por consideraciones de un órden *enteramente elemental* á ese género de analogía notable señalado por M. Poinsot (1) entre los resíduos de las raices primitivas de un número y las n raices de la ecuacion binomio, que, como se sabe, no son otra que expresiones de la forma $\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$, esto es, *direcciones*. Fácil es, pues, entrever desde este momento que toda la teoría de los resíduos en el estudio de los números está íntimamente ligada con la de las direcciones, y por consecuencia, cual-

(1) Memorias del Instituto, tomo XIV y último, años 1813, 1814 y 1815, pág. 386, y Memorias de la Academia real de las Ciencias años 1819 y 1820, pág. 100.

quier propiedad de que gocen las últimas podrá inmediatamente aplicarse á los primeros. De aquí nace un modo de investigacion que conduce desde luego á la comprobacion de varias verdades. Pero este es asunto en que no me puedo detener aquí mas tiempo.

—Generalidad de los principios precedentes é interpretacion de las expresiones imaginarias.

Lo que ya he dicho con motivo de las cantidades positivas y negativas me dispensará de repetir que los raciocinios que se acaban de leer, aunque aplicados á las longitudes, pueden extenderse á todas las cantidades que, como las longitudes, tienen modos de existencia determinados por condiciones análogas. Así diremos en un sentido general:

"Cuando una especie de cantidad posea entre los dos estados contrarios que se llaman positivo y negativo, un tercer estado intermedio, y cuando este tercer estado sea tal que si, despues de haber hecho para obtenerlo ciertas operaciones sobre el estado positivo, sucede que, repitiendo sobre este estado intermedio las mismas operaciones y en el mismo órden, se pasa al estado negativo, ese tercer estado deberá representarse en álgebra por la expresion $\sqrt{-1}$.»

Así se comprende toda la generalidad de nuestros principios, y se vé que no es solo una interpretacion geométrica de las expresiones imaginarias la que se dá en esta obra, sino una interpretacion general de esas expresiones para todas las cantidades cuyos diversos modos de existencia estén determinados por condiciones análogas á las que rijen entre sí las direcciones. En esto precisamente se distingue este trabajo de esos pocos ensayos publicados hasta ahora sobre esta importantísima materia y cuya insuficiencia demostraré en el capítulo siguiente; pues de ningun modo es el resultado de una coincidencia observada acaso por casualidad entre una figura de geometría y algunas expresiones algebráicas; sino que es el producto del pensamiento tan fecundo como simple de que lo que está ligado por la naturaleza pudiera estarlo tambien en ciertos casos por el cálculo, y de que cuanto está ligado de la misma manera deberá sin duda tener por expresion analítica los mismos símbolos de operacion.

—De las cantidades positivas y negativas con relacion á las imaginarias y del paso de lo real á lo imaginario.

Cuando los geómetras han tratado de considerar en una misma recta direcciones opuestas, han visto primero y probado en seguida la intervencion necesaria de los signos + y — sin pasar jamás de ahí. Al adoptar para la representacion analítica de las curvas las coordenadas rectangulares, han destinado el factor + 1 á las abscisas positivas y el factor — 1 á las abscisas negativas, porque han advertido que entre estas dos direcciones opuestas hay una relacion obligada. En cuanto á las coordenadas las han ligado entre sí con una relacion del mismo género. Pero entre las ordenadas y las abscisas nada han visto comun mas que la ecuacion misma de la curva, esto es, la funcion que une el tamaño de la ordenada al de la abscisa.

Así las cantidades positivas y negativas forman una clase aparte enteramente distinta de las cantidades imaginarias; y hasta ahora conocen tan mal á esos diferentes miembros de una misma familia, que clasifican á las primeras en la region de los entes *reales*, mientras que las segundas pertenecen á un mundo *imaginario.*

Sin embargo, el cálculo, que es un dialéctico rigoroso, enseñaba que entre

$$+1,\ -1,\ \sqrt{-1},\ \text{y}\quad \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

debia existir una conexion forzosa, puesto que las dos primeras expresiones son solamente casos particulares de la cuarta; pero esta circunstancia, lejos de aclarar la cuestion, la oscurecia más, y el tránsito de lo real á lo imaginario, empleado como un poderoso auxiliar en las investigaciones puramente analíticas, era y es para la inteligencia, y bajo el punto de vista filosófico, una circunstancia incomprensible.

El pasage siguiente, de Laplace, dá una idea del estado de incertidumbre que reina en los ánimos con respecto á este particular.

"Una observacion importante, dice, que depende de la gran generalidad del análisis y que permite extender este método (el que dá á la vez la funcion comprendida bajo el signo integral y los límites de la integracion) á las fórmulas y á las ecuaciones por diferencias que la teoría de las probabilidades presenta mas frecuentemente, es que las séries á que se llega, suponiendo reales y positivos los límites de las integrales definidas, son valederas en el caso en que la ecuacion que determina estos límites no tiene mas que raices negativas é imaginarias.

"Estos tránsitos de lo positivo á lo negativo, y de lo real á lo imaginario, que yo he sido el primero en utilizar, me han conducido tambien á los valores de muchas integrales definidas singulares, que despues he demostrado directamente. Puédense, pues, considerar estos tránsitos como un medio de descubrimiento semejante á la induccion y á la analogía, empleadas desde hace mucho tiempo por los geómetras, primero con una gran reserva, y despues con entera confianza, por haber justificado su uso un gran número de ejemplos. Sin embargo, siempre es necesario confirmar con demostraciones directas los resultados obtenidos por estos diferente medios." (*Teoría analítica de las probabilidades*, introduccion, pág. 34, 3.ª edicion.)

Se vé, pues, que estos tránsitos de lo real á lo imaginario que Laplace declara haber empleado por primera vez y de que los geómetras actuales hacen frecuente uso, son medios de descubrimiento fundados nó sobre una teoría positiva y racional, sino solamente sobre la sancion de la experiencia. Por eso Laplace no cree que de ningun modo lleven consigo un testimonio de justificacion, y por eso dice, que *siempre es necesario confirmar con demostraciones directas los resultados obtenidos por esos diferentes medios.*

Pero ahora que nosotros hemos probado que la expresion $\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$ lo es de una direccion y que las relaciones que existen entre las direcciones positivas, negativas perpendiculares y angulares son, por decirlo así, el resultado de una sola ojeada sobre una figura geométrica, la conexion que existe entre

$$+1, -1, \sqrt{-1} \text{ y } \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

queda naturalmente establecida, no ya solo como una consecuencia puramente analítica, sino como una necesidad comprobada *à priori* por el raciocinio y que es independiente de toda demostracion por medio del cálculo.

Concíbese tambien con la mayor facilidad que el tránsito misterioso de lo real á lo imaginario vá á ser NECESARIAMENTE una de las mas simples concepciones matemáticas por no haber en ello mas que un simple cambio de la línea, ó del eje, ó de la direccion primitivamente tomada por orígen de partida de las direcciones, ó (para hablar con toda generalidad,) EL PASO DE LO REAL Á LO IMAGINARIO VENDRÁ Á SER PURA Y SENCILLAMENTE, SEGUN LA ESPECIE DE CANTIDAD DE QUE UNO SE OCUPE, *el* TRÁNSITO DEL MODO DE EXISTENCIA O DE ACCION, QUE SE TOMA POR PUNTO DE

PARTIDA EN LOS CÁLCULOS A OTRO MODO DIFERENTE.

Con razon podemos, pues, repetir que la única relacion que los geómetras han visto entre las abscisas y las ordenadas de una curva es la funcion que conexiona el tamaño de las unas con el de las otras. Sin embargo, puesto que, independientemente de la forma particular de la curva y antes de todo cálculo, se hallaban obligados por el mismo estado de las cosas á hacer distincion entre lo positivo y lo negativo ¿no era natural observar que, dada la direccion positiva ó negativa, la posicion perpendicular quedaba *ipso facto* fijada irrevocablemente y esto con *entera independencia de cualquier dato numérico*? ¿No habia motivo para pensar que debia existir una relacion algebráica entre una cosa y otra?

Pero se han contentado con decir: si llamo + 1 la direccion OA, me veo obligado á llamar — 1 la direccion OB. Mas ¿porqué pararse en el camino y no preguntar como se llamará la direccion OC, la cual, dada la OA, no queda menos irrevocablemente fijada que la de OB?

Hé aquí, pues, consideraciones muy sencillas que, como se vé, nos conducen directamente al objeto; y, en verdad, cuanto mas se reflexiona sobre este asunto, mayor trabajo cuesta comprender como un hecho tan claro, tan racional, y cuya verdadera expresion matemática se ha entrevisto por geómetras distinguidos ha podido permanecer tanto tiempo en la region de las dudas.

Consiste á mi parecer en habernos dedicado mas bien á buscar efectos que á estudiar causas, y en no habernos penetrado lo bastante de esta gran verdad.

Los resultados trascendentales del cálculo son, como todas las abstracciones del entendimiento, signos generales cuya verdadera extension no se puede conocer sin ascender por el análisis metafísico hasta las ideas que los han engendrado.

Ahora, para terminar este capítulo, demos una idea de las consecuencias que se desprenden de los principios expuestos relativamente al estudio completo de las cantidades por el cálculo.

—De la necesidad de admitir en adelante en álgebra dos sistemas de numeracion: el uno llamado cuantitativo y el otro ordinal.

De los principios expuestos en el presente capítulo resulta una analogía entre la medida de las longitudes y la de las direcciones, ó entre las expresiones por medio de las cuales unas y otras se representan en la ciencia del cálculo, demasiado notable para no tratar aquí el asunto con todos sus pormenores.

Si λ es el módulo que nos conviene adoptar para medir las longitudes, las diversas longitudes que se puedan obtener con este módulo entero, se expresarán por

$$\lambda, 2\lambda, 3\lambda, 4\lambda, \ldots\ldots, p\lambda, \ldots\ldots$$

Si α es un ángulo convenido de antemano para indicar una série de direcciones, todas las que se puedan producir con este ángulo entero, se expresarán por

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha,$$

$$\cos 2\alpha + \sqrt{-1} \sin 2\alpha,$$

$$\cos 3\alpha + \sqrt{-1} \sin 3\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

$$\cos p\alpha + \sqrt{-1}\sin p\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots,$$

Si dividimos el módulo λ de las longitudes en un número cualquiera n de partes iguales, las diversas longitudes que se puedan obtener con una fraccion exacta de denominador n de este módulo, serán

$$1\frac{\lambda}{n},\quad 2\frac{\lambda}{n},\quad 3\frac{\lambda}{n},\ldots\ldots\ldots\ldots\; p\frac{\lambda}{n},\ldots\quad [1].$$

Si se divide el arco α que sirve para contar las direcciones en un número cualquiera n de partes iguales, las diversas direcciones que se obtendrán con una fraccion exacta de denominador n de este arco serán:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\alpha}{n},\\ \cos 2\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin 2\frac{\alpha}{n},\\ \cos 3\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin 3\frac{\alpha}{n},\\ \ldots\ldots\ldots,\\ \cos p\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin p\frac{\alpha}{n},\\ \ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\quad [2].$$

Así como todas las expresiones [1] en cuanto $\frac{\lambda}{n}$ se hace igual á λ' vuelven á adquirir la forma primitiva

$$\lambda',\, 2\lambda',\, 3\lambda',\ldots\ldots p\lambda',\ldots\ldots,$$

del mismo modo toman la primitiva forma que queda expresada todas las expresiones [2] en cuanto se hace $\frac{\alpha}{n} = \alpha'$.

De modo que si, como se hace en los cálculos por puro hábito, puede decirse (*prescindiendo del tamaño del módulo*) que todas las longitudes pueden designarse por la série de los números 1, 2, 3, 4,..... p,..... del mismo modo (*prescindiendo tambien del tamaño del arco*) todas las direcciones pueden designarse por la série de las expresiones

$$\cos 1 + \sqrt{-1} \sin 1,$$

$$\cos 2 + \sqrt{-1} \sin 2,$$

$$\cos 3 + \sqrt{-1} \sin 3,$$

$$\ldots\ldots,$$

$$\cos p + \sqrt{-1} \sin p,$$

$$\ldots\ldots.$$

De lo dicho es imprescindible consecuencia afirmar que en la teoría del álgebra no basta con un solo sistema de numeracion si se quiere dar á la ciencia toda la extension que exije, y que es preciso tener dos sistemas, el uno expresado por la série de los números reales 1, 2, 3, etc. para representar los tamaños ó las intensidades de las cantidades, y el otro expresado por la série de las fórmulas ó si se quiere de los números imagiñarios,

$$\cos 1 + \sqrt{-1} \sin 1,$$

$$\cos 2 + \sqrt{-1} \sin 2,$$

$$\cos 3 + \sqrt{-1} \sin 3,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots$$

para representar su órden, su situacion, sus diferentes modos de existencia ó de accion.

El primero podria llamarse sistema de NUMERACION CUANTITATIVA.

El segundo, sistema de NUMERACION ORDINAL.

Como decíamos, en adelante tendrá que ocuparse el álgebra de algo mas que de la numeracion cuantitativa, pues, al demostrar, como acabamos de hacerlo, que existen expresiones algebráicas, por cuyo medio se puede contar el órden ó la situacion de los cosas, hemos establecido la incontestable necesidad de que el estudio de la numeracion ordinal avance de frente con el de la numeracion cuantitativa, y así *hemos apoyado sólidamente sobre su base, y ya podemos seguir en sus desarrollos* la admirable teoría vislumbrada por Mr. Poinsot hace tantos años, LA TEORIA DEL ORDEN Y DE LA SITUACION DE LAS COSAS CON PERFECTA ABSTRACCION de sus tamaños.

Veámos, pues, la confirmacion mas elemental y mas brillante á la vez de estas verdades filosóficas, que tengo una gran satisfaccion en reproducir al terminar este capítulo, y que fueron proclamadas en estos términos por el ilustre geómetra á quien acabo de citar. (1)

"La teoría de los ángulos, no pertenece solo á la geome-"tría como pudiera creerse á primera vista, porque es tam-"bien una PARTE ESENCIAL del análisis matemático. "Estas notabílisimas cantidades, ó mas bien, estas relaciones "geométricas llamadas ángulos, se presentan en álgebra de "una manera tan natural y tan necesaria que los exponen-"tes ó los logaritmos, por sus propiedades enteramente "semejantes, son inseparables de ellas. Pues si la division

(1) Investigaciones sobre el análisis de las secciones angulares, 1825.

"del logaritmo en partes iguales, corresponde á la extrac-
"cion de la raiz de una cantidad real, la division del ángu-
"lo en partes iguales corresponde igualmente á la extraccion
"de la raiz de una cantidad imaginaria. Pero las canti-
"dades reales y las que se llaman imaginarias se presen-
"tan lo mismo en nuestras transformaciones analíticas;
"se mezclan por decirlo así en todos nuestros cálculos, y
"justamente en esta combinacion de símbolos reales é ima-
"ginarios consiste la naturaleza propia y el carácter dis-
"tintivo del álgebra. Se vé, pues, que esta ciencia, para
"la ejecucion actual de las operaciones que indica, exije
"á la vez la consideracion de los ángulos y las de los loga-
"ritmos.

. . . .

"Aduzco de paso todas estas reflexiones, interesado en
"favor de la filosofía de la ciencia, parte no cultivada por
"los autores, siendo quizá la mas digna de estudio, pues
"nuestras fórmulas y nuestros teoremas mas notables son
"menos útiles y menos preciosos en sí mismos, que esa
"especie de matafísica que los ilustra y domina, porque es
"lo único que puede dar al entendimiento nuevas fuerzas y
"la necesaria energía para adelantar en las regiones no ex-
"ploradas de la ciencia."

Despues de leidos tan profundos pensamientos, entregados hace años al dominio de la publicidad, ¡y sin embargo, tan poco comprendidos hasta el dia! ¿no tenemos fundado motivo para creer que el género de investigaciones contenidas en esta obra y que sometemos hoy al exámen de los geómetras camina con firmeza por el terreno de la verdad? ¿Cómo pudiera quedar en nuestro espíritu vacilacion alguna, duda ninguna, cuando de nuestros mismos estudios se desprende, como consecuencia inmediata, que la doble consideracion de los tamaños de las cantidades y de su atributo ordinal exije un doble sistema de numeracion?

¿Cuando vemos que los símbolos constitutivos de estos dos sistemas son esas mismas expresiones reales é imaginarias que vienen incesantemente á entrometerse en todos nuestros cálculos? ¿Y cuando, en fin, leemos palabra por palabra en todas nuestras consecuencias esas mismas verdades filosóficas que acabo de transcribir?

Tengo, pues, confianza en que si he podido incurrir en algunos errores de pormenor me serán fácilmente perdonados, porque espero que ante todo los geómetras solo prestarán atencion en esta obra al plan esencial de mis investigaciones generales sobre la filosofía de la ciencia, viendo únicamente en los detalles medios incidentales de explanacion ó amplificacion.

Estos estudios sobre la metafísica del cálculo, recomendados con tan justo motivo por Mr. Poinsot, contienen en sí mismos la demostracion de su utilidad; y la naturaleza de las consecuencias á que me han conducido ya, y que amplificaré en los capítulos siguientes, demostrará hasta la evidencia que deben ser de un poderoso auxilio en la aplicacion de la ciencia matemática al estudio de la filosofía natural.

CAPÍTULO IV.

EXÁMEN DE UNA TEORIA CUYO OBJETO ES LA INTERPRETACION GEOMÉTRICA DE LOS SÍMBOLOS IMAGINARIOS.

—Objeto de este capítulo.

Geómetras distinguidos han hecho algunas tentativas para hallar una interpretacion, si nó universal, al menos geométrica de los símbolos imaginarios.

Su trabajo está publicado hace mucho tiempo, y, sin embargo, no ha conducido á ninguna consecuencia importante ni ha corregido error ninguno, y del escaso número de sábios que ha tenido conocimiento de ese trabajo ni uno solo quizá ha querido aceptar sus razones como principios incontestables.

Nadie, sin embargo, hasta el dia ha probado que sean falsas estas razones; nadie ha indicado en qué punto deben ser rectificados sus raciocinios: por lo cual veo claramente que, si no tomo yo la iniciativa, no dejarán de oponerse esos trabajos á los mios, diciendo que otros me han precedido en este género de investigaciones.

Voy á demostrar que semejante inculpacion es completamente infundada.

Porque ¡cosa admirable! si los hechos consignados en las memorias de que hablo son exactos, si las consecuencias á que van á parar los autores son expresion de verdades incontestables, nada es mas falso que los raciocinios por cuyo medio han creido poder establecer estas verdades, de manera que me ha sido preciso en el exámen que he hecho de ese trabajo demostrar que el fin era bueno aunque los medios eran malos, y hacer ver que no han estorbado la aparicion de la verdad raciocinios basados sobre errores.

Esta crítica bajo el punto de vista filosófico tendrá, pues, un doble interés, el de borrar algunas manchas en la ciencia del cálculo y el de mostrar cómo en las combinaciones del espíritu humano puede entrar en juego el error de modo que produzca la verdad. En fin, las materias tratadas en este capítulo, aunque parecen aplicarse á una especialidad, no estarán contenidas, sin embargo, en un terreno tan estrecho que no puedan proporcionarnos una importante coleccion de conocimientos utilísimos.

—*Historia.*

Hace años que, habiéndome ocupado de algunos puntos de geometría con motivo de los anales de matemáticas publicados por M. Gergonne, tuve que leer dos memorias de MM. Français y Argand sobre la interpretacion geométrica de los símbolos imaginarios.

Ambos geómetras sacaban la notable conclusion de que el signo $\sqrt{-1}$ es un signo de posicion, con cuyo auxilio deben caracterizarse las direcciones de las rectas perpendiculares á una recta dada.

Estas publicaciones se hicieron hacia fines del año 1813, y están insertas en el tomo 4.º de los Anales. En el mismo volúmen se lee una nota de M. Lacroix concebida así:

"En la primera parte de las Transacciones filosóficas de "1806, pág. 23, hallo una memoria, escrita en francés por "M. Buée, comunicada á la sociedad real de Lóndres por "M. Williams Morgan, y cuyo objeto es el mismo que el "de las memorias de MM. Français y Argand. El autor "pretende que $\sqrt{-1}$ no es símbolo de ninguna operacion "aritmética, ni tampoco de operacion alguna puramente "geométrica: que es un signo de perpendicularidad, un "signo puramente descriptivo, un signo, en fin, que indica "la DIRECCION de una linea, PRESCINDIENDO de su "longitud (tales son las expresiones del autor)."

De los tres geómetras que acabamos de citar, solo dos pueden considerarse como inventores de la nueva idea; pues, en efecto, en el curso de su memoria M. Français se expresa así:

"En honor á la verdad, debo declarar que el fondo de "estas nuevas ideas no me pertenece. Lo he hallado en "una carta de M. Legendre á mi difunto hermano, en la "cual este gran geómetra le comunica (como una cosa que "le ha sido trasmitido y como objeto de pura curiosidad) lo "esencial de mis definiciones segunda y tercera, de mi "teorema primero, y del corolario tercero de mi teorema "segundo."

Y mas adelante añade, pág. 225.

"Acabo de recibir en este instante la memoria de M. "Argand que he leido con el mayor interés. No me ha sido di- "fícil reconocer en ella la explanacion de las ideas conte- "nidas en la carta de M. Legendre á mi difunto hermano, "y no me queda la menor duda de que no se debe á M. "Argand, la primera idea de representar geométricamente "las cantidades imaginarias."

En cuanto á la cuestion de saber cuál de los dos señores Argand ó Buée debe obtener la prioridad es muy difícil resolverla, pues en el mismo año de 1806 fué cuando, por una parte, M. Argand imprimió su "Ensayo sobre un modo de representar las cantidades imaginarias en las construcciones geométricas" y por otra hizo M. Buée aparecer su memoria en las Transacciones filosóficas.

M. Legendre examinó á su debido tiempo el manuscrito de M. Argand, y este es el orígen de la comunicacion mencionada por M. Français.

Pero sea lo que fuere, la exposicion de estas nuevas ideas es absolutamente la misma en los escritos de los tres geómetras; y basta, para tener un completo conocimiento de ellos, estudiar uno solo. En tal concepto, el de M. Français, parece merecedor á la preferencia.

Con fecha del 23 de Noviembre de 1813, M. Servois, dirigió al redactor de los Anales una carta con una crítica de las memorias de MM. Français y Argand, carta en que Servois manifestaba los motivos que no le permitian admitir como exactas las demostraciones de estos geómetras; pero el objeto de M. Servois al atacar estas nuevas ideas no es calificarlas de inútiles y erróneas, sino solo de hacerles adquirir lo que les falta aun bajo el punto de vista de la *evidencia* y de la *fecundidad*.

Mas adelante trataré de esta carta, pues la crítica que contiene es la única que conozco sobre este asunto.

—Los geómetras parecen dispuestos á admitir como verdadero el fondo de esta teoría.

El redactor de los Anales parece mucho mas benévolo que Mr. Servois: en su carta y en la discusion suscitada con este motivo apoya con consideraciones muy especiosas los asertos de MM. Français y Argand; en principio parece dispuesto á adoptar como verdadera la idea de mirar al signo $\sqrt{-1}$ como representante de la perpendicularidad, y, para prueba de este aserto transcribo la observacion con que acompaña la nota citada de M. Lacroix.

"Al publicar esta nota está muy lejos de nuestro ánimo "la pretension de quitar á M. Argand la propiedad de sus "ideas: la principal, que consiste en considerar $\sqrt{-1}$ como "un signo de perpendicularidad, es por otra parte tan sen"cilla y natural que, lejos de sorprender que tambien se "haya ocurrido á M. Buée, hay motivo para admirar que "por el contrario haya tardado tanto tiempo en aparecer, "y que no se haya ocurrido igualmente á mayor número de "geómetras."

En apoyo de esta misma opinion citaré además la nota con que M. Gergonne ha concluido la memoria de M. Français.

"Hace dos años, dice, que escribiendo á M. de Maizières "con motivo de su memoria, inserta en la pág. 368 del primer volúmen de los Anales, le decia que habrá quizás "error en querer incluir todos los tamaños numéricos en "una simple série, y que por su naturaleza parecian deber "formar una tabla de doble entrada, que, limitada solo á "los números enteros podia tener la figura siguiente:

$$
\begin{array}{llllll}
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\\
\ldots, & -2+2\sqrt{-1}, & -1+2\sqrt{-1}, & 2\sqrt{-1}, & 1+2\sqrt{-1}, & 2+2\sqrt{-1},\ldots\\
\ldots, & -2+\sqrt{-1}, & -1+\sqrt{-1}, & \sqrt{-1}, & 1+\sqrt{-1}, & 2+\sqrt{-1},\ldots\\
\ldots, & -2 & ,\ 1 & ,\ 0 & ,\ 1 & ,\ 2\quad ,\ldots\\
\ldots, & -2-\sqrt{-1}, & -1-\sqrt{-1}, & -\sqrt{-1}, & 1-\sqrt{-1}, & 2-\sqrt{-1},\ldots\\
\ldots, & -2-2\sqrt{-1}, & -1-2\sqrt{-1}, & -2\sqrt{-1}, & 1-2\sqrt{-1}, & 2-2\sqrt{-1},\ldots\\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}
$$

"De esta figura se deduce que yo, como M. Français, "suponia de la forma $n\sqrt{-1}$ los números situados en una "línea perpendicular á la que contiene los números de la forma n, y que, como él tambien, representaba los números "situados fuera de estas líneas por la suma de sus proyec"ciones sobre una y sobre otra.

"El mismo M. de Maizières, con motivo de algunas di"ficultades que yo habia opuesto en la memoria que acabo "de citar, me decia en el mes de Abril de 1811:

"*Lo que aquí expongo sobre las imaginarias, es una idea* "*atrevida que me alegro de presentar, y cuya exactitud ya* "*habrá Vd. reconocido*: y mas adelante: *Esta paradoja cesa*"*rá de serlo cuando haya probado que las imaginarias del* "*segundo grado y, por consiguiente, de todos los grados son tan*

"poco imaginarias como las cantidades negativas ó las imagi-
"narias del primer grado; y cuando nos hallemos colocados
"con respecto á las unas en la situacion en que estaban nues-
"tros algebristas del siglo diez y siete con respecto á las otras.

"Recordando estas circunstancias, continúa M. Gergon- "ne, está ciertamente lejos de mi ánimo la intencion de "privar á M. Français, ni al geómetra cuyas indicaciones "tan bien supo este aprovechar, de sus respectivas ideas; "pues solo quiero patentizar que estas ideas no son de "ningun modo tan extrañas, que no haya podido germinar "su esencia en varias cabezas á la vez."

Por lo que precede queda bien probado que M. Servois, el mas hostil de todos los geómetras citados, al par que hace objeciones contra los métodos de MM. Français y Argand no considera, sin embargo, sus ideas ni inútiles ni erróneas.

Y resulta tambien probado que estas ideas han ocurrido á varios geómetras distinguidos, MM. Français, Argand, Buée, de Maizières; que M. Legendre parece haberles prestado algun asentimiento; que, en fin, M. Gergonne las acepta completamente, admirándose de que hayan tardado tanto en germinar y que no se hayan ocurrido á mayor número de geómetras, y quizás á esta lista podriamos añadir los nombres de la mayor parte de los lectores de los Anales.

—Pero la exactitud de la teoria en cuanto á su forma está generalmente puesta en duda.

Esto en cuanto á la esencia: pero ¿sucede lo mismo con la forma? ¿Está en el propio caso la dialéctica qué ha querido hacer de esas ideas verdades matemáticas?

Aquí no encontramos ya la misma unanimidad.

En efecto, M. Legendre, en la carta citada, presenta el asunto como un objeto de pura curiosidad: el trabajo que habia anunciado M. Maizières sobre la interpretacion de las imaginarias no llegó á publicarse: M. Servois, bastante fácil respecto al fondo, se levanta enérgicamente contra las demostraciones, aunque sirviéndose de consideraciones sobre las cuales hablaré; M. Français, confundido por M. Servois, no encuentra recursos personales ni replica casi nada mas que lo que ya M. Gergonne habia respondido por él, y pronto patentizaré la insuficiencia de esta respuesta. M. Argand mismo está quizás menos convencido que M. Français, y tanto, que es importante citar sus propias palabras, subrayando aquellas expresiones en que deseo que se fije mas la atencion del lector.

"La teoría que acabamos de bosquejar puede mirarse "desde un punto propio para ilustrar *lo que aun tenga de "oscuro y que parece ser su objeto principal, á saber: esta-"blecer nociones nuevas sobre las cantidades imaginarias*. En "efecto, *dejando á parte la cuestion de si esas nociones son "verdaderas ó falsas*, podemos limitarnos á considerar esta "teoría como un medio de investigacion de sí las líneas en "direccion pueden ser signos de las cantidades reales ó "imaginarias y á no ver en el uso que hemos hecho de "ellas sino el simple empleo de una notacion particular; "para esto, basta empezar demostrando por medio de los "primeros teoremas de la trigonometría las reglas de mul-"tiplicacion y de adicion dadas mas arriba, las aplicacio-"nes irán despues y solo quedará que examinar la cues-"tion didáctica: que si el empleo de esa notacion puede "ser ventajoso ó haber caminos mas cortos y fáciles pa-"ra demostrar ciertas verdades, solo puede decidirlo la ex-"periencia."

Vese pues, que la fé de M. Argand en lo principal de su teoría está lejos de ser inquebrantable: él mismo dice que todo no puede ser claro, y el saber si las nuevas nociones son verdaderas ó falsas queda en duda.

En fin, M. Gergonne, que mas que ningun otro, parece dispuesto á la propagacion de la nueva doctrina y que no vacila en aceptar el fondo como verdadero, se expresa como sigue en la nota que termina la memoria de M. Français.

"Sin duda queda mucho por hacer para *obviar todas las* "*objecciones, para aclarar todas las dificultades, para disipar* "*todas las nubes, para extender y perfeccionar la nueva teoría* "*y hacer bien evidentes su espíritu, su objeto, y sus ventajas*; "pero no se pueden esperar estos resultados sino del tiem- "po y de los esfuerzos reunidos de todos los que no quie- "ran desechar esta teoría con desden sin haberla examina- "do seriamente."

Estas observaciones hablan bastante alto y prueban claramente que si M. Gergonne no formula cargo directo contra la nueva teoría está muy lejos de hallarla irreprochable: *hay dificultades que aclarar, nubes que disipar, es preciso hacer muy evidentes su espíritu, su objeto y sus ventajas.*

Creo que de lo que acabo de decir puede deducirse que al aparecer la teoría sedujo á los geómetras por su novedad, su originalidad, y sobre todo por la perspectiva de las consecuencias notables que hacia entrever, pero que todos convinieron en mirar como insuficiente la base sobre que se queria presentarla entre las verdades matemáticas: en una palabra: hubo duda.

¿Se ha disipado la duda con el tiempo? ¿Han venido nuevas explicaciones á aclarar las dificultades ya enunciadas ó concebidas?

Preciso es reconocer que no hay nada de esto, y un silencio de tantos largos años nos haria creer, al contrario, que las meditaciones de los geómetras sobre una cuestion tan notable, lejos de disipar las incertidumbres y de obviar las objeciones, les han dado quizá mas vigor del que tenian en su su orígen.

—Exámen de esta teoría en la memoria de M. Français.

Consagrémonos, pues, á un sério exámen de la teoría de M. Français, estudiando todas sus definiciones, todos sus teoremas, y procurando en este género de investigaciones delicadísimas, en que el raciocionio marcha siempre por las pendientes del sofisma, comprender bien los puntos litigiosos y mostrar en qué concepto dan lugar á la crítica algunos de sus razonamientos.

—Definiciones.

M. Français, conforme con todos, llama *relacion de tamaño* á la relacion numérica entre los tamaños de dos rectas y *relacion de posicion* á la inclinacion de dos rectas una sobre otra, ó sea al ángulo que forman entre sí.

Cuando nos ocupamos del tamaño de una recta, representamos este tamaño por una simple letra a, b, c, etc.

Pero para indicar el tamaño y la posicion de una recta, distinguiré, dice M. Français, la letra destinada á designar su valor absoluto con un símbolo expresivo del ángulo que hace esa recta con otra recta fija é indefinida tomada arbitrariamente. Así, pues, a_α, b_β, c_γ,........ representan rectas cuyos tamaños absolutos son a, b, c,....., pero que forman respectivamente con la recta fija ángulos α, β, γ.....

M. Français añade en seguida que cuatro rectas están en *proporcion de tamaño y de posicion* cuando entre las dos primeras hay igual relacion de tamaño y de posicion que entre las dos últimas; de donde se sigue que, si se adoptan las notaciones de M. Français, la expresion

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$$

exije que se haga á la vez

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y

$$\alpha - \beta = \gamma - \delta.$$

Pasando á las proporciones de tamaño y de posicion contínuas, concluye que para que una recta b_β sea á la vez media proporcional de tamaño y de posicion entre a_α y c_γ es menester que se tenga

$$b = \sqrt{ac}.$$

y

$$\beta = \tfrac{1}{2}(\alpha + \gamma)$$

de modo que b_β divide en dos partes iguales el ángulo formado por las rectas a_α, c_γ.

Hasta ahora, como se vé, se trata de una notacion cómoda para el género de investigaciones que se proponia M. Français, y de definiciones que cada autor es siempre dueño de plantear y que entran por otra parte en un órden de ideas admitido por todos los geómetras.

—M. Français atribuye á sus definiciones mas extencion de la que tienen.

Pero, establecidas estas premisas, llegamos á las primeras deducciones y ya aquí tiene que empezar nuestra crítica.

M. Français se expresa así:

"*Notacion* 2. Ahora podemos separar en la notacion lo "que es relativo al tamaño absoluto de una recta de lo que "es relativo á su posicion."

La palabra *separar*, cuando se aplica á expresiones algebráicas, presenta tal vaguedad en su interpretacion que es imposible atribuirle una idea fija, precisa é inmutable, siendo por otra parte difícil darse cuenta del verdadero sentido que el mismo autor le suponia.

Por de pronto, segun las definiciones del autor, cuando se trata de comparar entre sí y simultáneamente los tamaños y las direcciones, la *separacion* de lo que es relativo al tamaño y de lo que es relativo á la posicion es fácil y evidente, pues resulta de las condiciones definidas: así, en la relacion colectiva de a_α á b_β sé muy bien que lo relativo al tamaño será el cuociente ordinario $\frac{a}{b}$, y que lo relativo á la posicion debe ser la diferencia $\alpha - \beta$, por cuyo medio queda efectuada completamente la separacion.

Hemos visto igualmente el cómo en la expresion que M. Français llama proporcion de tamaño y de posicion, lo que esta expresion ofrece primero de colectivo, se separa en dos proporciones una por cuociente aplicable solo al tamaño, y otra por diferencia concerniente solo á la posicion.

Pero no es en la relacion, no es en la proporcion, sino en la notacion misma a_α considerada aisladamente, donde M. Français se propone luego *separar* lo relativo al *tamaño* de lo relativo á la *posicion*. Pero, aunque de antemano no define lo que entiende por la palabra *separar*, siempre podremos darnos cuenta de ello por sus operaciones subsiguientes.

Hé aquí como procede M. Français:

"Desde luego se tiene, por la primera notacion,

$$a_0 = a; \ 1_0 = 1;$$

"y en seguida se obtiene por la segunda definicion,

$$1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha.\text{»}$$

Estos dos asertos son inadmisibles y yo niego que resulten el primero de la notacion 1, y el segundo de la definicion 2.

¿Qué dice en efecto la primera notacion? Copio tambein textualmente:

"Representaremos *aquí el tamaño absoluto* de una recta, "por una simple letra a, b,... y para indicar á la vez el "tamaño y la posicion de una recta, distinguiremos la letra "destinada á designar su valor absoluto con un signo ex- "presivo del ángulo que forma con una recta fija."

De estas palabras evidentemente no se puede sacar sino la conclúsion siguiente respecto de la ecuacion $a_0 = a$, á saber: que en esta ecuacion a_0 representa una longitud a tomada sobre la recta fija que sirve de punto de partida para medir los ángulos, y esto es incontestablemente lo que indica el símbolo 0, así como el a del segundo miembro expresa una longitud a, cuya posicion NO ESTA EXPRESADA y que, por consiguiente, puede ser cualquiera; en otros términos, M. Françaisha caido aquí en el error, en que sin un sumo cuidado es fácil dar, de que escribir cero es lo mismo que no escribir nada, que no caminar es lo mismo que hallarse en el punto de partida, etc., etc.

Pero cuando nos ocupamos *esencialmente* de las relaciones de posicion y de su medida ¿qué significa, la expresion de igualdad entre una longitud *dirigida* segun *una recta* y la misma longitud cuya direccion queda *indeterminada?* Porque, observémoslo bien, desde que en una relacion algebráica entran en juego rectas que tienen una *direccion especial* expresada por una notacion complexa, siempre habrá que deducir de esta relacion dos: lo cual resulta efectivamente de la primera definicion.

De $a_0 = a$ deduciré que las longitudes son iguales, ó sea $a = a$ pero respecto á las direcciones ¿qué podemos conocer? No solo no se puede deducir nada bajo el punto de vista intelectual, pero ni aun siquiera respecto de la escritura tenemos forma que presentar á los ojos.

Estas objeciones conservan toda su fuerza cuando se aplican al segundo aserto:

$$1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$$

y aquí la argumentacion es aun mas directa.

En efecto, Français dice:

"Para tener proporcion de tamaño y de posicion entre "cuatro rectas es menester que haya entre las dos prime- "ras igual relacion de tamaño é *igual relacion de posicion* "que entre las dos últimas."

De donde saco que si me es imposible expresar estas dos relaciones estamos fuera de la cuestion, y por consiguiente fuera del caso relativo al género de proporción que se ha definido.

Porque si es cierto que de la relacion precedente puedo deducir la proporcion de tamaño

$$1 : 1 :: a : a,$$

me hallo, relativamente á la proporcion de posicion, en la angustia que antes he señalado; pues no puedo darle por medio de la escritura forma alguna ni verdadera ni falsa.

Para raciocinar con exactitud habria sido preciso ante todo presentar la proporcion como sigue:

$$1_0 : 1_\alpha :: a_0 : a_\alpha.$$

En este estado es incontestable: pero fijémonos bien en la observacion que vá á seguir, pues es de una importancia capital.

Puesto que bajo las condiciones de la definicion 1 se puede dar un sentido razonable á la proporcion general

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta,$$

esta definicion no autoriza indefinidamente el uso que se puede hacer de las *operaciones de la aritmética y del álgebra* en las cuatro expresiones a_α, b_β, c_γ, d_δ; todo lo que resulta de ello es que la forma anterior reemplazará, COMO MEDIO DE ESCRITURA, las dos relaciones

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \alpha-\beta=\gamma-\delta$$

pero no AUTORIZA DE NINGUN MODO á decir, por ejemplo, que

$$d_\delta=\frac{b_\beta\, c_\gamma}{a_\alpha}$$

y á ligar así los dobles símbolos a_α, b_β,..... por medio de los signos de operaciones deducidos de las propiedades *exclusivas* de la progresion por cuociente; porque la expresion

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$$

no es una mera progresion geométrica, pues no hay que perder de vista, que esa expresion es á la vez una progresion por cuociente y una progresion por diferencia.

Habeis hecho intervenir en la cosa definida una expresion ya usada en álgebra, habeis escrito vuestra definicion bajo una forma que en esta ciencia goza de ciertas propiedades, y habeis venido á aplicar, sin sospechar siquiera vuestra equivocacion, á los términos y al objeto definido las propiedades de aquella forma; en esto os habeis equivocado, resultando que os habeis expuesto á prejuzgarlo todo y á dar demostraciones especiosas en la forma pero viciosas en el fondo.

Suponed, por ejemplo, que en vez de escojer la forma de las progresiones por cuociente hubieseis elegido la de las progresiones por diferencia y que escribiendo

$$a_\alpha . b_\beta \because c_\gamma . d_\delta$$

maquinalmente hubierais deducido nó que

$$d_\delta = \frac{b_\beta \times c_\gamma}{a_\alpha}$$

sino

$$d_\delta = b_\beta + c_\gamma - a_\alpha .$$

Nadie dudará de que se pudo representar el conjunto de las dos proporciones tanto por la forma característica de la una como por la forma característica de la otra: ó, por mejor decir, todo el mundo convendrá en que es inconveniente emplear cualquiera de estas dos formas, pues cada una de ellas prejuzga propiedades que, por este solo hecho, se han creido aplicables gratuitamente y admisibles sin demostracion.

Pero ya que la observacion está hecha, y que se puede preveer que la memoria de M. Français es un sofisma, se comprende que precisamente á favor de esta forma y de las propiedades ordinarias que le son inherentes, se ha introducido el paralogismo manteniéndose oculto de tal modo que hasta el dia ha pasado desapercibido.

Se puede sin duda y sin grandes inconvenientes dar á la expresion $a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta$ el nombre de proporcion. Pero observemos bien que, aplicándose la palabra proporcion, aisladamente, á las dos clases de proporcion por *diferencia* y por *cuociente*, es indispensable, cuando se habla de cuatro números que están en proporcion, especificar de qué género de proporcion se trata.

Ahora, lo mismo sucederá con esa tercera especie de proporcion que inventais, y como las operaciones que hagais sobre esos cuatro números cuando la proporcion sea por cuociente serán muy diferentes de las que se puedan practicar sobre ellos cuando esos propios números estén en progresion por diferenoia, análogamente las nuevas operaciones que puedan hacerse con los cuatro números, ó, por mejor decir, sobre los cuatro símbolos que constituyen la tercera especie de progresion, habrán de ser de un género completamente diferente de las que son aplicables á los dos casos precedentes.

Si para dar con una sola expresion una idea de la relacion complexa de tamaño y de posicion se hubiese escrito:

$$a_\alpha \; \mathrm{O} \; b_\beta \; \Theta \; c_\gamma \; \mathrm{O} \; d_\delta$$

entonces probablemente se hubiera empezado, ó bien inquiriendo de qué propiedades podia gozar semejante reunion de los cuatro símbolos a_α, b_β, c_γ, d_δ, ó bien se hubiera investigado si se podia aplicar á esos símbolos, con la doble representacion que se les atribuye, una operacion cualquiera de aritmética, y creo que entonces se habria experimentado grave dificultad en resolver afirmativamente la cuestion. Es posible sobre a, b, c, d, separados, hacer las operaciones expresadas en $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y las que dependen de ellas; es igualmente posible obrar separadamente sobre α, β, γ, δ, y aplicarles las operaciones indicadas en $\alpha - \beta = \gamma - \delta$, y las que dependen de ellas. Pero antes de aplicar á a_α una operacion cualquiera, seria preciso haber definido lo que puede ser en este caso semejante operacion, que es precisamente la dificultad que se presentará siempre cuando se emplee en álgebra un signo para representar nó una operacion de la aritmética, nó una cantidad, sino una convencion. Porque mientras la relacion que puede existir entre los procedimientos del cálculo y el órden de los hechos á que se aplica la convencion no esté sometida á sérias reflexiones, será imposible deducir nada. Pero téngase en cuenta que no hay que buscar la relacion de que hablo en ninguno de los artificios conocidos del cálculo, ni en el juego de algunas fórmulas ni en la correlacion poco fundada de algunos resultados mas bien algebráicos que racionales, porque esto seria comprometerse en una via poco satisfactoria para el entendimiento y demasiado abundante en obstáculos. Será preciso deducirla de la naturaleza misma de este órden de hechos, de su esencia, comparada directamente con la de las operaciones diversas de que se compone la ciencia del cálculo, de la analogía completa que puede existir entre los diversos resultados producidos por este órden de hechos sobre las cantidades á que se aplica, y los que á su vez producen las operaciones del cálculo en los números que representan estas cantidades. Si en esta comparacion se halla una analogía completa entre los resultados naturales y los resultados calculados, entonces, pero entonces solamente, se tendrá derecho para concluir que bajo el punto de vista algebráico, las operaciones que han producido estos resultados numéricos son lo equivalente de las circunstancias, de las operaciones naturales, bajo la influencia de las cuales pasan los hechos representados por estos números; y, desde este instante, el signo convencional podrá reemplazarse por una operacion de cálculo.

Tal es la verdadera marcha filosófica que es preciso seguir siempre que se quiera saber si existe alguna relacion, alguna analogía entre cierto órden de hechos y las diversas operaciones de que se compone la lengua general conocida con el nombre de álgebra, por cuyo medio expresamos las relaciones que las cosas ya de igual especie, ya de especies diferentes pueden tener entre sí.

Pero mas adelante insistiré y con mas pormenores sobre este objeto importante: vuelvo ahora á la memoria de M. Français.

De lo que precede se debe deducir:

1.° Que no tiene sentido la ecuacion $\alpha_0 = \alpha$.

2.° Que tampoco lo tiene la expresion $1 : 1_\alpha :: a : a_\alpha$.

3.° En fin, que aun cuando esta última expresion pudiera considerarse como representativa de una proporcion colectiva de tamaño y de posicion segun las ideas de M. Français, no se halla nada en el razonamiento del autor que autorice á aplicar á los términos de esta proporcion colectiva tal ó cual operacion del cálculo. Deducir, pues, de la expresion precedente la relacion $a_\alpha = a . 1_\alpha$, es suponer que las reglas de la progresion geométrica se aplican á la progresion colectiva, lo que no ha sido demostrado; de donde se sigue que todo el edificio entero de M. Français se derrumba con su base.

Quizá se juzgue ahora que no es necesario proseguir mas tiempo nuestra crítica, y que lo que acabamos de decir es muy suficiente para hacer desechar completamente la teoría de M. Français; pero, como estos errores no son los únicos que existen en la obra, y como puede ser muy útil discutir asuntos que, cual este, pertenecen á la metafísica de la ciencia, y como además semejantes discusiones son siempre un manantial de útiles revelaciones que difunden por consecuencia saludable luz sobre la constitucion de las doctrinas científicas, creo muy conveniente dar á esta interesante crítica mayor amplificacion.

— Teorema primero de M. Français.

Patentizado ya el cómo ha dado M. Français á sus definiciones mayor extension de la que tienen, pasemos á sus teoremas y entreguémonos sobre todo á un exámen profundo del primero.

M. Français en este teorema se propone demostrar que las cantidades imaginarias de la forma $\pm a\sqrt{-1}$ representan en geometría POSICION DE LAS PERPENDICULARES AL EJE DE LAS ABSCISAS.

Pero toda la fuerza de su argumentacion, está en que la cantidad $\pm a\sqrt{-1}$ es una media proporcional de tamaño y de posicion entre $+a$ y $-a$.

En apoyo de este aserto, no solo M. Français no presenta ninguna prueba directa, sino que ni aun ofrece consideracion alguna mas ó menos plausible, mas ó menos especiosa: es un hecho que sin duda M. Français considera como suficientemente establecido, y en esto, como lo haré ver ahora, es al menos consecuente con su definicion primera tomada en toda la latitud que, en su error, ha creido oportuno atribuirle.

— Crítica y error de M. Servois con motivo de este teorema.

Contra esta aserto principalmente se dirije la crítica de M. Servois; pero M. Servois no demuestra el porqué es inadmisible, limitándose á observar que no está demostrado.

Citemos las expresiones de este geómetra:

"La demostracion del primer teorema de M. Français, "es á mi parecer enteramente insuficiente é incompleta. "En efecto, esta proposicion que forma su base, *la canti- "dad* $\pm a\sqrt{-1}$ *es una media proporcional de tamaño y de "posicion entre* $+a$ y $-a$ equivale á estas dos, una de "los cuales es evidente ($\pm a\sqrt{-1}$, término medio de ta- "maño entre $+a$ y $-a$) mientras que la otra ($\pm a\sqrt{-1}$ "término medio de posicion entre $+a$ y $-a$) no está pro- "bada y contiene precisamente el teorema de que se "trata."

Aquí tendremos que condenar á la vez á la crítica y al crítico. Cuesta trabajo concebir como M. Servois ha podido hallar evidente que la cantidad $\pm a\sqrt{-1}$ es un término medio de tamaño entre $+a$ y $-a$.

¿Qué es $+a$ y qué es $-a$? No son dos cantidades consideradas bajo el concepto solo de su tamaño; pues, si fuese así, como los tamaños expresados son iguales, seria preciso decir que cada una de estas cantidades representa la misma cosa y que entre las dos expresiones $+a$ y $-a$ hay perfecta igualdad, lo que no es cierto.

$+a$ y $-a$ son dos longitudes iguales, pero sus direcciones son opuestas, que es lo que evidentemente expresan los dos signos $+$ y $-$.

Es, pues, incontestable que cuando multiplico $+a$ por $-a$, llevo en cuenta no solo el tamaño a de cada una de las dos líneas, sino tambien los signos $+$ y $-$ que acompañan á la expresion de su tamaño, esto es, que indican sus direcciones: es preciso, pues, á consecuencia de esta observacion, reconocer que el producto obtenido conservará un ALGO Ó RESULTANTE de esas dos direcciones: y que, por tanto, este producto, en su conjunto no puede ser solo funcion del tamaño: en fin, su raiz cuadrada tendrá alguna indicacion de que los signos de direccion entraron en juego en las diversas operaciones productoras del resultado final. Nadie puede negar tales consecuencias, y con gran discrecion, pregunta M. de Gergonne como $\pm a\sqrt{-1}$ puede ser término medio de tamaño entre $+a$ y $-a$, ni como un ser de razon, un ser imaginario, puede ser medio entre dos tamaños efectivos.

Esto supuesto, volvamos al aserto de M. Français y tratemos de suplir al silencio de M. Servois.

—Razonamiento de M. Gergonne en apoyo del teorema primero.

Hé aquí como M. Gergonne intenta hacer concebir la verdad del teorema primero de la teoría de las imaginarias.

"La media proporcional de tamaño entre $+ a$ y $- a$ no "es ni puede ser mas que a, pues cuando se habla únicamente de tamaño, se debe hacer abstraccion de los signos, "y $\sqrt{a\,a} = a$. Pero cuando se toma por término medio $\pm a \sqrt{-1}$, se enuncia por esto mismo que se han tenido en cuenta las posiciones inversas de $+ a$ y $- a$, debiendo entonces el término medio conservar el sello de esta consideracion, y ser por este mismo hecho un término medio de posicion, así como lo es de tamaño."

Se vé que el género de consideraciones sobre que se apoya M. Gergonne es exactamente de la misma naturaleza que el usado por mí para señalar y combatir el error de M. Servois; toda la discusion se reduce ahora á este punto: Puesto que empleando $+ a$ y $- a$, el resultado debe aparecer con un símbolo procedente y significativo de las primitivas direcciones, ¿será buena lógica deducir que simultáneamente y por esto solo haya de ser ese símbolo una media proporcional de tamaño y una media proporcional de direccion?

Tal es el verdadero punto discutible, y temo que todo el mundo prevea, desde este momento, que, siendo este el estado de la cuestion, no ha de haber quedado muy resuelta la dificultad.

—Refutacion del argumento deducido de la influencia de los signos.

En efecto, si semejante tésis fuese verdadera, si razones tan vagas ó expresiones tan poco matemáticas pudiesen pasar en autoridad de cosa juzgada, habria que negar á la ciencia del cálculo la calificacion de exacta, sustituyendo á la certidumbre matemática una probabilidad muy incierta.

Supongamos un momento que el raciocinio que acabo de exponer sea fundado y apliquémoslo al cálculo, que no nos pasmarán poco las consecuencias á que nos ha de conducir.

Por ejemplo:

El término medio *por diferencia* entre las longitudes a y b, es incontestablemente igual á $\frac{a+b}{2}$, resultado á que se llega el geómetra cuando no se ocupa mas que de los tamaños; pero si supongo que la direccion a es opuesta á la direccion b expresaré esta circunstancia, haciendo preceder los números a y b de los signos — y $+$, de modo que en este caso, el término medio buscado, será $\frac{-a+b}{2}$.

¿Podriamos ahora decir, reproduciendo textualmente el razonamiento de MM. Gergonne y Français, que, como se han tenido en cuenta las posiciones inversas de $-a$ y de $+b$, el término medio debe entonces conservar el carácter de esa consideracion, siendo, por el hecho mismo, un término medio por diferencia de posicion así como de tamaño?

Y puesto que el resultado final $\frac{-a+b}{2}$, estará alternativamente marcado con el signo $+$ y con el signo —, segun que b sea mayor ó menor que a, y puesto que, por otra parte, no puede ser afectado de otro signo, resulta que el término medio de posicion entre las dos direcciones inversas, caracterizadas por $+$ y —, debe siempre confundirse con la línea misma sobre que se cuentan las dos direcciones, pudiendo alternativamente coincidir ya con la direccion primitiva, ya con la direccion inversa de esta línea, pero nunca con la direccion perpendicular, como sin embargo debia ser, ó se pretende que sea.

Tales son las singulares consecuencias á que iriamos á parar si pudiese adoptarse ese modo de raciocinar como verdadero.

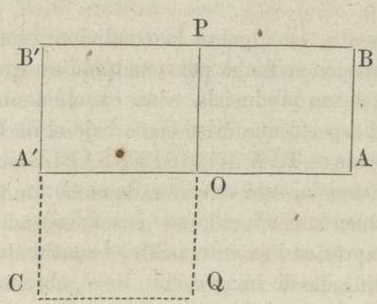
Prosigamos:

Es sabido que, si a representa una longitud, la superficie del cuadrado construido sobre esta longitud tendrá por expresion a^2: operemos ahora *sucesivamente* sobre las dos rectas $+a$ y $-a$, iguales en tamaño, pero dirigidas en sentido inverso: el cuadrado de la primera se obtendrá multiplicando $+a$ por $+a$, y, segun las reglas conocidas, este cuadrado será $+a^2$; el cuadrado de la segunda se obtendrá multiplicando $-a$ por $-a$: y, tambien segun las reglas conocidas, el cuadrado será como antes $+a^2$.

Pero segun las ideas de MM. Gergonne y Français será preciso decir:

Teniendo en cuenta las posiciones inversas de $+a$ y de $-a$, el resultado tiene que conservar el carácter de esta diferencia de posicion y el resultado habrá de indicar por el hecho mismo, la posicion del cuadrado construido así como su tamaño.

Mas aquí evidentemente peca la regla, pues en el caso actual, tamaño y posicion son iguales en el cálculo,



y, sin embargo, realmente, en la ejecucion práctica, es de toda evidencia que la posicion del cuadrado construido sobre OA′ es muy diferente de la del cuadrado construido sobre OA; porque estos cuadrados OABP, OA′B′P están, nó superpuestos, como deberia suceder si su posicion fuese la misma, sino juxtapuestos, lo que es muy diferente.

Y por cierto que todavía pudiera decirse, que si OABP es el cuadrado representado por $(+a) \times (+a)$, puesto que OA y OP, son las direcciones positivas de los ejes, no sucede lo mismo con OA′B′P que no podria ser el cuadrado representado por $(-a) \times (-a)$ sino el figurado por

$$(-a) \times (+a);$$

pero, debiendo expresarse este último cuadrado por $-a^2$, se deja ver una distincion manifiesta entre los dos casos: uno con el signo + y otro con el signo —.

A este modo de raciocinar se presenta una objecion grave y muy propia para mostrarnos cuán lejos de las ideas recibidas nos conduciria la teoría que critico.

En efecto, esta explicacion nos induciria nada menos que á considerar la expresion $(-a) \times (+a)$ como un cuadrado, lo que, bajo el punto de vista algebráico, es inadmisible.

Efectivamente, en álgebra la condicion esencial para que una expresion se tenga por cuadrada es que los dos factores que deben producirla sean exactamente iguales, tanto bajo el aspecto numérico como bajo el de los signos, y esta condicion es TAN INDISPENSABLE en el estádo actual de la ciencia, está considerada como tan fundamental, que, habiendo conducido en sus consecuencias á un género de expresion incomprensible, á cantidades ininteligibles, y calificadas de imaginarias, los algebristas han preferido humillarse ante esas formas misteriosas y reconocer su existencia como LEGAL, si es lícito expresarse así, mas bien que rebelarse contra el principio establecido en la definicion del cuadrado.

Sin embargo de todo ¿han tenido razon los algebristas en este punto ó nó? ó bien solo les ha faltado establecer alguna distincion? Esto es lo que no me corresponde examinar aquí: pero siempre es cierto que su modo de proceder está establecido como principio en la doctrina actual del álgebra.

Siendo formalmente contrarias á este principio las consecuencias de la interpretacion precedente, esto es, de la aplicacion de las ideas de MM. Français y Gergonne, deduzco que es imposible, en el estado actual de nuestras ideas sobre el álgebra, admitir esta interpretacion como verdadera.

Por otra parte, examinemos mas directamente la cuestion, pues por todos sus aspectos es muy fácil combatirla. Si no quereis, diremos, reconocer el cuadrado OA′B′P como representante de $(-a) \times (-a,)$ será preciso necesariamente admitir que este cuadrado está figurado por OA′CQ, puesto que para este y relativamente al cuadrado OABP, se tiene á la vez $OA' = -a$ y $OQ = -a$.

Pero muy lejos de obtener por este medio un cuadrado superpuesto al primero y con igual posicion que él, nos resulta un tercer cuadrado cuya posicion está mas distante aun de la del primero que lo estaba la posicion del segundo.

Así, por cualquier lado que se mire la cuestion, es imposible, aplicándole las ideas de MM. Gergonne y Français, sacar una consecuencia razonable, ni deducir un resultado algebráico, conforme con los de las operaciones geométricas, pues el resultado algebráico, sea que se emplee $+a$, sea que se trabaje con $-a$, aparece siempre con el signo $+$, mientras que la construccion geométrica conduce á dos cuadrados, cuyas posiciones respectivas, segun todas las ideas recibidas, tienen que mirarse como inversas una á otra, y por consiguiente caracterizadas por los signos opuestos + y —.

—Dudas y objeciones con motivo de la regla de los signos en álgebra.

Las objeciones generales que aquí presento no son únicamente hostiles á la memoria de M. Français, pues son extensivas á uno de los puntos mas delicados de las doctrinas algebráicas: á las cantidades negativas aisladas, y á la famosa regla de los signos, que se cree demostrada con argumentos incontestables, aunque el evidente asunto que acabamos de tratar nos suministra armas para una muy séria objecion. ¿No es claro, en efecto, puesto que bajo el concepto algebráico los cuadrados $(+a) \times (+a)$ y $(-a) \times (-a)$ son exactamente iguales, tanto con relacion al tamaño como con relacion á los signos, que deberiamos concluir que los cuadrados geométricos correspondientes deben tener IGUAL superficie é IGUAL posicion? Pero si la experiencia prueba que no es así, toda vez que hay igualdad de superficie, pero no coincidencia de posicion, será preciso deducir ó que la regla de los signos no es exacta ó que al menos *no siempre es aplicable.*

Adoptando esta última suposicion que es la menos excéntrica, habria que decir:

El cuadrado de $-a$ es igual á $+a^2$, como lo es el cuadrado de $+a$, y nó porque — multiplicado por — dé +, sino porque, cuando se trata de superficies, es preciso hacer abstraccion de los signos, ó, por mejor decir de las direcciones, y ocuparse exclusivamente de las longitudes. Y por otra parte ¿la demostracion geométrica, por medio de la cual se enseña á determinar la superficie de un cuadrado construido sobre una línea, se funda acaso en alguna consideracion directa ó indirecta acerca de la posicion de esa línea? ¿Os conduce á alguna consecuencia respecto al influjo que esta posicion puede tener sobre la del cuadrado? De ninguna manera: en cuanto á esto la demostracion es muda, y no solo es muda sino que su espíritu es mas bien contrario que favorable á semejante consecuencia. No demos, pues, en álgebra á esta proposicion una extension mayor de la que autoriza la definicion geométrica, esto es, su verdadera base.

—*Resúmen de esta discusion.*

Repetiré lo que acabo de decir: no es este lugar propio para tratar á fondo la importante cuestion que suscito, pero era necesario decir mucho sobre ella, para mostrar que en esta materia podia permitirse la duda, y para hacer ver cuán razonable era suponer que, aun en las proposiciones generalmente admitidas por todos los algebristas, hay motivo para no aplicar, por lo menos, sin reserva la regla de los signos á todas las circunstancias del cálculo.

Hemos atacado y combatido la proposicion de M. Français, nó de una manera indirecta, nó en algunos pormenores de forma, sino en la esencia, en su orígen, en la parte á que tiende esta proposicion, si nó á falsear la metafísica de la regla de los signos, al menos á abusar de ella.

Puedo ahora decir á M. Français:

Pruebo que vuestro razonamiento, aplicado palabra por palabra á proposiciones distintas de la vuestra, conduce á consecuencias contrarias á vuestras propias deducciones y á los principios admitidos en las doctrinas algebráicas. Luego esta clase de razonamientos no puede aplicarse á todos los casos, y así es evidente que, antes de fundaros en él, era necesario que probáseis que tenia suficiente autoridad.

Hago mas: demuestro que aun en los casos en que ordinariamente se hace uso de él, aun en aquellos precisamente en que su empleo no ha parecido hasta ahora sujeto á ninguna controversia, la regla ordinaria de los signos, aplicada á las CALIDADES aisladas, conduce á resultados algebráicos que no coinciden siempre con los resultados geométricos de que deberian ser representantes.

Pero toda la economía de vuestra demostracion estriba en una aplicacion de la regla de los signos á cantidades aisladas representativas de cantidades geométricas,

Luego, es imposible no considerar como problemáticas *por lo menos* las consecuencias que deducís de semejante género de demostracion.

Creo, pues, que aun está por hacer la demostracion del teorema primero de M. Français, y que su teoría de las imaginarias descansaba sobre la base deleznable que acabamos de destruir.

—Nueva refutacion del teorema primero de M. Français bajo el concepto de su forma algebráica.

Quizás podria terminar aquí mis observaciones críticas: pero séame lícito examinar aun bajo un nuevo aspecto el teorema primero de M. Français, nó porque me parezca necesario entrar en nuevos pormenores para corregir los errores de este geómetra, sino porque este nuevo exámen nos pondrá en camino para indagar lo que hay que hacer con su teoría de las imaginarias, á fin de darle lo que le falta.

Hé aquí estas nuevas observaciones:

En virtud del teorema primero de M. Français la cantidad $a\sqrt{-1}$, debe ser término medio proporcional de tamaño y de posicion entre $+a$ y $-a$.

Escribo, pues, segun este geómetra:

$$+a : a\sqrt{-1} :: a\sqrt{-1} : -a.$$

¿Qué dice la definicion primera, pues á ella siempre hay que volver los ojos para darnos cuenta exacta de toda proporcion colectiva de *tamaño* y *posicion*? Dice que semejante proporcion es equivalente á otras dos: una por cuociente relativa á los tamaños, y otra por diferencia relativa á las posiciones.

Ahora, puesto que los signos $+$, $-$, $\sqrt{-1}$ son, tanto segun las ideas recibidas como segun las de M. Français, los caractéres algebráicos de las direcciones, no hay mas que hacerlos desaparecer, y entonces será preciso que haya proporcion por *cuociente* entre los símbolos restantes, que solo expresarán tamaños: esto es en efecto lo que sucede, puesto que se tiene

$$a : a :: a : a.$$

Pasemos á la segunda prueba y busquemos nuestra progresion *por diferencia*; para lo cual es preciso al contrario hacer desaparecer ahora los tamaños dejando solo los signos; en este caso, se tienen los cuatro símbolos:

$$+1, +\sqrt{-1}, +\sqrt{-1}, -1$$

y será preciso segun la definicion primera de M. Français que resulte

$$+1 . +\sqrt{-1} : +\sqrt{-1} . -1$$

ó

$$1 - \sqrt{-1} = \sqrt{-1} + 1$$

lo que es falso.

Nos es, pues, imposible en la proporcion colectiva de M. Français, volver á hallar á la vez las dos proporciones por cuociente y por diferencia que, segun la primera definicion, deben constituirla.

Sin embargo, si, reconociendo que $\sqrt{-1}$ no puede satisfacer á la progresion por diferencia anterior, llamamos x á la expresion desconocida que debe satisfacerla, tendremos para determinar x

$$+1 . x : x . -1.$$

Pero de esta relacion, lo que se saca es que $x = 0$, de donde habrá que deducir que la cuestion es insoluble.

Tal es la última palabra de la proposicion de M. Français, cuando se apuran las consecuencias que de ella se pueden deducir: nueva prueba de la insuficiencia de su teoría de las imaginarias.

—Las proposiciones de M. Français, carecen de demostracion, pero quizás no son falsas.

Con tales antecedentes percibí desde hace mucho tiempo que la teoría de M. Français era inadmisible. El silencio que todos los lectores de los Anales han guardado sobre esta teoría y su esterilidad desde el dia en que se publicó, á pesar de lo fecundos que parecian sus principios, me han hecho siempre creer que no existe un solo geómetra que se juzgue suficientemente autorizado para admitirla: todo lo cual, explica porqué yace en abandono.

Pero si en el estudio de las ciencias es importante señalar los errores, combatirlos y destruirlos, no lo es menos investigar si á estos errores puede sustituirse una verdad.

Observemos que en el caso actual hemos demostrado que M. Français dió á sus definiciones mas extension de la que les corresponde, admitiendo como evidente una proposicion que no lo es. Pero esto no prueba que en realidad no exista esta extension, ni que la proposicion por no demostrada no sea verdadera.

¿No podemos ver en MM. Français y Gergonne dos inteligencias de esas que obedecen á una especie de instinto que les hace ver claro en una cuestion, aunque la preocupacion les haga prejuzgar el resultado? Y es que el instinto, en los hombres de talento especialmente, no siempre se engaña ni toda preocupacion supone errores.

—*Reflexiones sobre la metafísica de la ciencia del cálculo.*

Hace cinco años próximamente que, conducido por un trabajo sobre los logaritmos, á las consideraciones de las cantidades negativas y positivas, á las de los infinitamente pequeños, y en una palabra á todos estos objetos que de tan cerca tocan á la filosofía de la ciencia y que tienen entre sí tan gran conexion, tuve que ver de nuevo la memoria de M. Français, y, reflexionando segunda vez sobre las objeciones que se acaban de leer, reconocí que habia poco que hacer para dar á este trabajo una parte de lo que pedia M. Servois, esto es, el complemento de evidencia que le falta. Pero en cuanto á la fecundidad no me parecia lo mismo, y mucho menos que lo que yo habia hecho era suficiente para extender y perfeccionar la nueva teoría (en el sentido que le daba M. Gergonne) haciendo evidentes su espíritu, objeto y ventajas. Habia resuelto, si se quiere, la cuestion bajo el punto de vista algebráico, pero esto no me bastaba, pues yo queria ver el fondo de otro modo que á través de los símbolos del cálculo.

Estos pensamientos fueron manantial de numerosas reflexiones sobre la representacion de las cantidades por medio de las formas algebráicas. Empezé á reconocer primeramente algunos abusos ó, si se quiere, usos no justificados de algunos signos de operaciones: luego me pareció que estos mismos signos, de que se habia abusado en ciertas circunstancias, podian emplearse ventajosamente en otros casos que se habian abandonado: mas tarde me pareció necesario establecer una distincion clara y precisa entre los diversos elementos que figuran en toda expresion algebráica. De aquí resultó la clasificacion de esos elementos en dos especies, segun que sirven para designar tamaños ó que representan operaciones de cálculo, y al fin vino el pensamiento fecundo de que así como los primeros elementos ó los NUMEROS representan en álgebra el TAMAÑO de las cantidades, del mismo modo los SIGNOS de operacion algebráica podrian muy bien ser los representantes de los HECHOS con que la naturaleza constituye las cantidades en tal ó cual estado, en tal ó cual órden, y esto con INDEPENDENCIA DE SU TAMAÑO; pensamiento muy simple sin duda alguna y que aparece á los ojos de la irreflexion como supérfluo, pero que yo no titubeo en mirar como *el verdadero lazo que une la filosofía natural á la ciencia del cálculo, el verdadero intermediario que transforma las leyes del Mundo Creado en fórmulas algebráicas siempre comprensibles, el tránsito indispensable con cuyo auxilio nuestra razon sin cometer errores llega á poner los problemas naturales en ecuacion.*

Pero la exposicion completa de estas doctrinas me hacia evidentemente salir de los límites de una refutacion. Y no podia colocarlas en ella como un episodio, porque su importancia, al contrario, las hacia objeto principal, tanto que su conjunto constituye toda esta obra. Pero entremos en materia.

—Rectificacion de la teoría de las imaginarias.

Réstame ahora dar á conocer el complemento que he anunciado, en cuya virtud el trabajo de M. Français puede, si nó bajo el punto de vista filosófico, al menos bajo el punto de vista algebráico ser admitido como exacto.

Hé aquí, pues, la série de raciocinios que me parece propia para dar á la teoría de las imaginarias un carácter verdaderamente matemático.

Se ha visto que lo vituperable en M. Français es haber admitido tácitamente en primer lugar que la proporcion colectiva de tamaño y de posicion podia escribirse

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta,$$

esto es, bajo la forma de las progresiones por cuociente, y en segundo lugar, que por eso mismo, podia gozar de todas las propiedades de esta clase de progresion.

Evidentemente lo ha hecho así, poniendo la ecuacion $a_\alpha = a.\, 1_\alpha$ y diciendo que $a\sqrt{-1}$ es media proporcional de tamaño y de posicion entre $+a$ y $-a$.

Desprendiéndose esta idea de nuestra crítica sigámosla un instante en sus consecuencias.

Como los signos convencionales adoptados para representar las diversas circunstancias de cierto órden de hechos no autorizan, mientras solo tienen carácter de convencion, el uso de las operaciones del cálculo, puede preguntarse si en lugar de a_α, b_β, etc., podria encontrarse una expresion algebráica tal que las reglas ordinarias de la proporcion por cuociente fuesen aplicables á la proporcion colectiva de M. Français

$$a_\alpha : b_\beta :: c_\gamma : d_\delta .$$

Para ilustrar esta cuestion supongamos un instante que sea posible, y designemos, en consecuencia, por $f(a, \alpha,)$ esta expresion desconocida en la que a y α deben figurar. Es inútil detenerse mucho para hacer ver que siendo la funcion f independiente del valor particular de (a y α), esta funcion será la misma para la expresion de toda recta, y en su consecuencia la forma asignada por M. Français, será:

$$f(a, \alpha) : f(b, \beta) :: f(c, \gamma) : f(d, \delta) \qquad [1]$$

y será preciso determinar la funcion f de tal modo que las dos ecuaciones de condicion primitiva

$$a : b :: c : d$$

$$\alpha . \beta : \gamma . \delta$$

aparezcan siempre, y puedan deducirse una y otra de la expresion [1] y esto conservando por otra parte su independencia, de tal modo que los valores de a, b, c, d, no influyan en nada sobre los de α, β, γ, δ, y reciprocamente, pues esa es la condicion precisa de los datos de la cuestion.

En tal concepto, no se necesita reflexionar mucho para advertir que si la funcion $f(a, \alpha)$ es de la forma $a\,F(\alpha)$ se satisface ya la mitad del problema; porque, en efecto, la proporcion precedente tendrá esta forma:

$$aF(\alpha) : bF(\beta) :: cF(\gamma) : dF(\delta).$$

Si la naturaleza de los datos y la de la forma F autorizan esta proporcion se deducirá

$$\frac{a.\ F(\alpha)}{b.\ F(\beta)} = \frac{c.\ F(\gamma)}{d.\ F(\delta)} \qquad [2].$$

Y, como por otra parte los mismos datos dicen de antemano que se debe tener separadamente la proporcion de tamaño $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se sigue de aquí que la relacion [2] se reducirá solo á

$$\frac{F(\alpha)}{F(\beta)} = \frac{F(\gamma)}{F(\delta)}.$$

Esto es, que la primera proporcion del problema subsistirá tal cual es, y la segunda, de proporcion por diferencia que era, se convertirá en proporcion por cuociente.

—La direccion de una recta tiene por expresion algebráica la funcion logarítmica.

Queda, pues, que examinar ahora cual debe ser la forma de la funcion F para que la proporcion por diferencia

$$\alpha.\ \beta : \gamma.\ \delta$$

pueda ser legítimamente reemplazada con la proporcion por cuociente,

$$F(\alpha) : F(\beta) :: F(\gamma) : F(\delta).$$

Pero enunciar semejante cuestion es resolverla, pues es evidente, en efecto, que esta enunciacion no es otra cosa mas que la exposicion de la propiedad fundamental de la funcion logarítmica.

Llamando, pues, z la base desconocida del sistema de logaritmos de que pueda aquí tratarse, tendremos

$$F(\alpha) = z^{\alpha}$$

y entonces la proporcion colectiva de M. Français, se escribirá bajo la forma

$$az^{\alpha} : bz^{\beta} :: cz^{\gamma} : dz^{\delta}.$$

Ahora se hace patente que siendo cierto que a, b, c, d estén en proporcion por cuociente y α, β, γ, δ en proporcion por diferencia, se podrán aplicar á la proporcion colectiva anterior las reglas de la proporcion por cuociente; y, en efecto, siguiendo estas reglas, tenemos

$$\frac{a}{b} z^{\alpha-\beta} = \frac{c}{d} z^{\gamma-\delta},$$

o que, en virtud de los dos condiciones

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ y } \alpha - \beta = \gamma - \delta$$

es incontestable.

—*Determinacion de la base de este sistema de logaritmos.*

Qué queda, pues, que hacer ahora? Determinar el valor de la base z, y, como esta determinacion es independiente de los tamaños, podremos suprimir estos y fijarnos en la proporcion

$$z^{\alpha} : z^{\beta} :: z^{\gamma} : z^{\delta}.$$

Ahora, para determinar z, bastará examinar un caso particular. Admitamos, al efecto, que α es nulo y δ igual á π, esto es, que las dos posiciones z^{α} y z^{δ} están sobre la recta tomada por punto de partida, pero que son inversas una á otra, y tratemos de buscar entre ellas un término medio: sabemos de antemano que este término medio será la perpendicular á la recta precedente, de modo que en virtud de lo anterior su expresion algebráica deberá ser $z^{\frac{\pi}{2}}$. Por otra parte, puesto que la forma general z^{α} autoriza la aplicacion de las reglas de cálculo que rijen las proporciones por cuociente, se sigue que, designando por x la expresion analítica de la direccion media buscada, se deberá tener

$$z^{0} : x :: x : z^{\pi},$$

de donde

$$x = \sqrt{z^{0}\, z^{\pi}}$$

y por consiguiente, puesto que sabemos de antemano que x es igual á $z^{\frac{\pi}{2}}$, podremos escribir,

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{z^{0}\, z^{\pi}}.$$

Tal es la ecuacion de condicion de la que deduciré el valor de z. Pero parece á primera vista que esta ecuacion no puede servir para nada, por ser una identidad siempre satisfecha cualquiera que sea z. En efecto, $z^{0}\, z^{\pi}$ es lo mismo que

$$z^{0+\pi} \text{ ó } z^{\pi},$$

y, siendo $z^{\frac{\pi}{2}}$ la raiz cuadrada de esta cantidad, la ecuacion precedente dá idénticamente

$$z^{\frac{\pi}{2}} = z^{\frac{\pi}{2}}.$$

Sin embargo, aunque tal sea el resultado á que se llega considerando esta condicion en sí misma y fuera de cualquier otro punto de vista algebráico, no sucede lo mismo ni con mucho cuando se intenta combinar la série de ideas nuevas de que es representante la notacion z^{α} con ciertos principios adquiridos en la ciencia y sancionados por una experiencia de todos los dias. En efecto, se sabe y se prueba *à priori*, que en las consideraciones que se refieren al estudio de las direcciones, y á causa de las relaciones necesarias que existen entre ellas, para tener en cuenta el estado directo é inverso que puede tomar una misma longitud, es preciso designar uno de estos estados por $+ a$, y el otro por $- a$, ó, mas bien, hacer ver que los signos $+$ y $-$ no afectan al tamaño, sino solo á la direccion por $a. (+ 1)$ y por $a. (- 1.)$ En tal suposicion, nos vemos obligados á admitir que debe haber identidad completa entre las expresiones $+ 1$, y z^0, que representan algebráicamente la posicion directa y entre $- 1$ y z^{π} que representan algebráicamente la posicion inversa.

Es manifiesto que este es el único medio de evitar ulteriormente contradicciones en las diversas investigaciones algebráicas.

De estas analogías se deducirá que el producto $z^0\ z^{\pi}$ es igual á $- 1$, y que la raiz de este producto no es otra cosa que $\sqrt{-1}$; de modo que la precedente ecuacion se transforma en la que sigue:

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}.$$

Bajo esta nueva forma esta ecuacion no es ya una identidad, es el gérmen de una teoría fecunda en cuya virtud la ciencia del cálculo vá á conquistar un sistema completo de numeracion para las direcciones, como posee uno para los tamaños, y esto es lo que he desenvuelto suficientemente al terminar el capítulo anterior.

En cuanto al valor de z deducido de la ecuacion

$$z^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}$$

solo hay que decir que no depende ya sino de un cálculo muy corto. En efecto, si en la fórmula conocida

$$\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x = e^{x\sqrt{-1}}$$

se hace $x = \frac{\pi}{2}$ tendremos,

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

Comparando, pues, se deduce inmediatamente

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = z^{\frac{\pi}{2}}$$

de donde

$$z = e^{\sqrt{-1}}$$

Tal es el valor de la base del sistema de logaritmos, en cuya virtud se computarán las direcciones.

En verdad que á los ojos de muchos geómetras estos principios de la teoría de las imaginarias parecerán establecidos de una manera incontestable y quizás no pidan más; en cuanto á mí yo he sido mas exigente.

Sin duda la importante verdad de que $\sqrt{-1}$ es el signo de la perpendicularidad resulta suficientemente probada de lo que acabamos de leer; pero por este procedimiento no me parece inmediatamente deducida de las nociones fundamentales de la geometría, toda vez que estriba en consideraciones de álgebra que, á la verdad, no permiten la duda, pero cuya analogía con las consideraciones correspondientes de geometría no es siempre inmediata. Se ha visto en el capítulo tercero con qué sencillez llego á la misma consecuencia por medio de mis principios sobre la representacion de las cantidades; y, si tengo una prediléccion decidida por la demostracion que recuerdo aquí, es porque posee á mis ojos el gran mérito de ser esencialmente filosófica, pues se deduce inmediatamente de la definicion misma de la perpendicularidad geométrica. Pero este es asunto sobre el que las explicaciones desenvueltas en el capítulo tercero me dispensan de extenderme mas.

Réstame ahora dar una idea de la utilidad de los principios expuestos en esta obra, bajo el punto de vista de su fecundidad en la region de las aplicaciones; y esto es lo que paso inmediatamente á hacer en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO V.

APLICACIONES DE LAS DOCTRINAS EXPUESTAS EN LOS CAPÍTULOS PRECEDENTES Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES Y Á LA GEOMETRÍA.

—*Objeto de este capítulo.*

En el capítulo tercero de esta obra he demostrado esta proposicion capital: si se toma cierta recta por punto de partida de la medida de los ángulos, y si una nueva recta forma con ella un ángulo α, la direccion de la segunda con respecto á la primera se caracterizará algebráicamente y se distinguirá de la direccion de cualquier otra por la expresion,

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha.$$

No ignoro que este hecho, enteramente nuevo, podrá á primera vista hallar en los ánimos alguna oposicion: haciendo tanto tiempo que se hace uso de estas formas algebráicas ¿cómo no se ha pensado, dirán, en semejante interpretacion? ¿Cómo admitir que tantos sábios célebres, que en el curso de sus investigaciones han puesto en práctica sin cesar las expresiones imaginarias, no hayan entrevisto una propiedad tan general y tan fecunda, que abraza por sí sola toda la trigonometría actual y una buena mitad del estudio de la geometría?

Estas objeciones hace tiempo que me las he suscitado yo mismo, pues si el hecho analítico de que se trata aquí, se presenta desde luego á la inteligencia de los lectores como un medio de dar á expresiones misteriosas hasta el dia una significacion clara y fácil, no se tarda en reconocer, meditando mas profundamente en este asunto, que el hecho mismo, si está matemáticamente establecido, no tiende nada menos que á dar una nueva faz á los métodos de enseñanza adoptados hasta ahora. Se concibe fácilmente, que tal grado de importancia no me permitia entrar en esta via nueva sin haber reflexionado maduramente sobre el hecho en sí mismo, y sin haberlo justificado, no solo con la prueba del raciocinio, sino tambien con la de la experiencia, pues, como he dicho al principio de esta obra, hasta en matemáticas la sancion de la experiencia es á menudo de gran peso para confirmar la exactitud de ciertos resultados.

Se ha podido ver en lo que precede por qué série de consecuencias racionales he llegado á la interpretacion que doy de las expresiones imaginarias. Pasemos ahora á la prueba de la experiencia, entrando en la region de las aplicaciones.

Nadie me vituperará por no haberme sujetado en lo que vá á seguir al órden didáctico que conviene á una obra de enseñanza. En este escrito mi objeto no es exponer con todos los pormenores necesarios para discípulos por qué procedimientos se aplican al estudio de la ciencia los principios expuestos arriba, porque quiero solamente demostrar á las personas que ya poseen el conocimiento de las doctrinas científicas cuán propios son estos principios para explicar una clase de hechos que hasta el dia era incomprensible y como se convierten en un nuevo método de investigaciones en los estudios matemáticos.

Entro, pues, en materia:

SECCION 1.ª

APLICACION Á LA TEORÍA DE LAS FUNCIONES CIRCULARES.

—*Se demuestra por la experiencia que la expresion*

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha,$$

es en efecto admisible en álgebra como símbolo de la direccion determinada por el ángulo α.

Lo primero que hay qùe hacer, es ver si en efecto la expresion algebráica

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha,$$

conviene por las variaciones diversas de α i los valores geométricos que estos cambios del ángulo α producen en la direccion primitiva.

Empezemos por suponer que el ángulo α cambia de signo, esto es, que se cuenta en un sentido opuesto relativamente á la línea que sirve de punto de partida.

Si repetimos para este caso lo que hemos dicho para el primero, si reproducimos en esta circunstancia las mismas explanaciones con cuyo auxilio hemos determinado el coeficiente de direccion de la línea que forma con la de partida el ángulo primitivo α, advertiremos que el único cambio que hay que introducir será el del sentido en que se ha tirado la perpendicular, lo que conduce á sustituir

$$-\sqrt{-1} \text{ á } \sqrt{-1}.$$

El coeficiente de direccion relativo al ángulo α debe, pues, ser,

$$\cos\alpha - \sqrt{-1}\,\sin\alpha.$$

Este es, en efecto, el resultado que se obtiene cuando en la expresion general

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha,$$

se reemplaza α por $-\alpha$, pues esta expresion toma entonces la forma

$$\cos(-\alpha) + \sqrt{-1} \sin(-\alpha).$$

Pero segun las nociones mas elementales de trigonometría se tiene

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \text{ y } \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Substituyendo pues, estos valores, en la expresion anterior encontramos como antes,

$$\cos \alpha - \sqrt{-1} \sin \alpha.$$

Si el ángulo α aumenta un número entero cualquiera de circunferencias, la direccion permanecerá siendo evidentemente la misma. Será preciso, pues, que su expresion analítica no varie. Ahora bien, en álgebra un número n de circunferencias se representa por $2n\pi$, el coeficiente de direccion se convierte en este caso en

$$\cos(\alpha + 2n\pi) + \sqrt{-1} \sin(\alpha + 2n\pi)$$

expresion que es exactamente la misma que

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha.$$

Si α aumenta en media circunferencia, la direccion nueva es la inversa de la precedente, es preciso pues que las dos expresiones

$$\cos \alpha + \sqrt{-1} \sin \alpha$$

y

$$\cos(\alpha + \pi) + \sqrt{-1} \sin(\alpha + \pi)$$

difieran solo en el signo.

Lo cual, en efecto, es lo que resulta de las relaciones trigonométricas conocidas.

Si α aumenta un cuarto de circunferencia, la nueva direccion será perpendicular á la primera. Ahora bien, los coeficientes de estas dos direcciones son respectivamente

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

y

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Pero, puesto que hemos demostrado que el hecho geométrico de la perpendicularidad de una direccion sobre otra se expresa en álgebra por el factor $\sqrt{-1}$, será preciso que el segundo coeficiente no sea otra cosa mas que el primero multiplicado por $\sqrt{-1}$, y que en su consecuencia se tenga la ecuacion

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)\sqrt{-1} =$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\ \sin\ \alpha + \frac{\pi}{2},$$

ó bien

$$\cos\alpha\sqrt{-1} - \sin\alpha =$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).$$

Esta relacion es exacta de todo punto, puesto que es sabido que

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha,$$

y que

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

Si la cantidad añadida á α es no ya una circunferencia ó una media ó un cuarto, sino un ángulo cualquiera β, hé aquí como en virtud de nuestros principios deberemos raciocinar.

Los coeficientes de las dos direcciones que se consideran son respectivamente

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha,$$

y

$$\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta).$$

Pero, puesto que hemos demostrado que el hecho geométrico en virtud del cual una direccion está distante de otra un ángulo β, se expresa en álgebra por el factor

$$\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta,$$

será preciso que el segundo coeficiente no sea otra cosa mas que el primero multiplicado por

$$\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta$$

y que en consecuencia se tenga la ecuacion

$$\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)=$$

$$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta),$$

consecuencia plenamente justificada por las verdades bien conocidas de la trigonometría, en virtud de las cuales se tiene

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

Continuando un raciocinio semejante á este, nuestros principios nos conducen á este resultado,

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\ldots)$$

$$=(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$

$$(\cos\gamma+\sqrt{-1}\sin\gamma)(\cos\delta+\sqrt{-1}\sin\delta)\ldots$$

fórmula fecunda, por cuyo medio se determina el seno y el coseno de la suma de varios arcos por medio de los senos y cosenos de estos arcos.

En el caso particular de ser iguales entre sí los ángulos α, β, γ, δ, que yo supongo en número n, esta relacion se transforma en la siguiente:

$$\cos n\alpha + \sqrt{-1}\sin n\alpha = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n.$$

Nuestros principios nos conducen de nuevo á consecuencias algebráicas desde hace mucho tiempo reconocidas como verdaderas.

Prosigamos:

—*Traduccion geométrica de la ecuacion.*

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\cos n\alpha.$$

Si en la ecuacion precedente se cambia el signo de α, resultará

$$(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha - \sqrt{-1}\sin n\alpha,$$

y, si se suman estas dos expresiones, tendremos

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\cos n\alpha.$$

Hasta el dia la verdad algebráica expresada por esta ecuacion únicamente ha sido un hecho analítico incontestable, y no solo no se ha hecho su traduccion geométrica, sino que es probable que nunca se haya preguntado si habia motivo para hacerla y en qué podia consistir. Vá á verse que, segun mis principios, no es mas que la reproduccion en álgebra de una figura de geometría muy sencilla.

(Véase figura 1.ª)

¿Qué es

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n?$$

Esto representa en geometría la direccion ON, á la cual se llega despues de haber tomado sobre la circunferencia OA, cuyo rayo es la unidad, n veces el arco α á partir de la línea de base OA.

Luego cambiar el signo α, en cuyo caso se convierte la expresion en

$$(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n,$$

seria igual á tomar por debajo de OA el propio ángulo α un mismo número de veces, lo que conduce geométricamente á la direccion ON′, completamente simétrica á ON con relacion á OA.

En tal suposicion, segun la fórmula, es necesario á la recta ON añadir la recta ON′; para esto precisa tirar á continuacion de la primera, por el punto N, una línea paralela á la segunda ON′, por ejemplo NP, y tomar NP=ON′; pero es bien sabido en geometría que haciendo esto se llega á un punto P situado sobre la línea AB. Es preciso, pues, para que haya armonía entre la fórmula algebráica y las operaciones geométricas que se tenga $OP = 2\cos n\alpha$, lo que es de toda evidencia. Hé aquí, pues, una de las fórmulas mas importantes de la teoría de las funciones circulares que, segun nuestros principios, no es mas que la traduccion de una figura muy sencilla de geometría.

—Traduccion geométrica de la ecuacion

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\sqrt{-1}\sin n\alpha.$$

Si en vez de sumar las dos precedentes expresiones se restan será preciso, á continuacion de la direccion ON, reproducir no ya la direccion ON′ en el sentido que le pertenece de O hácia N′, sino en sentido contrario, lo que geométricamente se reduce á tirar NQ igual y paralela á N′O, ó por mejor decir á su prolongacion ON″. Pero se sabe que, haciendo esto, se llega, como distancia y como direccion, á un punto Q situado sobre la línea OC perpendicular á la direccion OA tomada por punto de partida, lo que, en virtud de nuestros principios, debe expresarse algebráicamente por OQ $\sqrt{-1}$. Y como es conocido que OQ es igual á $2 \sin n\alpha$, se sigue que debe obtenerse:

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n - (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 2\sqrt{-1}\sin n\alpha.$$

Esta última ecuacion, muy usada en la teoría de las funciones circulares, es, pues, como la precedente, la traduccion algebráica de una figura muy sencilla de geometría.

— *Traduccion geométrica de la ecuacion*

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n\,(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 1.$$

Hemos probado que el coeficiente de la direccion que forma con la línea de base un ángulo α es el factor

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

de donde se sigue que, por el contrario, si se divide la expresion analítica de la direccion de la base, que es 1, por el factor

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

deberá resultar la direccion determinada por un ángulo α, igual al precedente, pero situado debajo de la base, direccion cuya expresion hemos dicho que es

$$\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha.$$

Es preciso, pues, que se tenga

$$\frac{1}{\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha} = \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha$$

de donde

$$(\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) = 1,$$

y en general

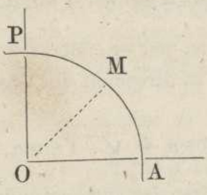
$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)^n (\cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha)^n = 1,$$

fórmulas cuya verdad es muy conocida en álgebra.

—*Explicacion geométrica de las expresiones*

$$\sqrt{-1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[4]{-1},\ \sqrt[5]{-1},\ \text{etc.}$$

La forma de raciocinio de que he hecho uso para llegar á la investigacion del factor de la perpendicularidad referida á las dos direcciones extremas $+1$ y -1, entre las que está colocada simétricamente, puede aplicarse palabra por palabra, á la investigacion de la expresion de toda direccion simétricamente colocada entre otras dos.



Por ejemplo, descríbase el cuadrante PA: si dividimos el ángulo recto POA en dos partes iguales, tendremos una direccion OM: sea p el factor de esta direccion con relacion á OA; si ahora de OM quiero pasar á OP, deberé hacer tambien uso del factor de direccion p lo que producirá p^2, y puesto que, hecho esto, llego precisamente á la direccion perpendicular OP, se sigue de aquí que deberé tener

$$p^2=\sqrt{-1}, \text{ de donde } p=\sqrt[4]{-1}$$

y haciendo raciocinios análogos se llegará á la consecuencia de que las expresiones algebráicas

$$\sqrt[4]{-1},\ \sqrt[6]{-1},\ \sqrt[8]{-1}, \text{ etc.}$$

representan las direcciones de las líneas que dividen el ángulo recto en 2, 3, 4, 5, etc., partes iguales, y que en general las expresiones algebráicas

$$\sqrt[2]{-1},\ \sqrt[3]{-1},\ \sqrt[4]{-1},\ \sqrt[5]{-1}, \text{ etc.}$$

representan las direcciones de las líneas que dividen la semicircunferencia en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, etc. partes iguales.

—*Explicacion geométrica de las n raices de la unidad.*

En fin, si en vez de la media circunferencia nos ocupamos de la circunferencia entera, concibiéndola dividida en 2, 3, 4, 5, 6, y, en general, en n partes iguales, siendo p el coeficiente de direccion de la primera línea divisoria, el coeficiente de direccion de la última n será p^n; pero esta última, es precisamente la línea de base, de modo que se deberá tener $p^n=1$ de donde $p=\sqrt[n]{1}$.

Esto nos muestra, y los resultados algebráicos conocidos confirman plenamente esta indicacion, que no es enteramente indiferente en todos los casos sustituir

$$\sqrt[n]{1} \text{ á } \sqrt[m]{1} \text{ y á } 1.$$

$\sqrt[n]{1}$ se aplica á la direccion de la línea que divide en n partes la circunferencia, y $\sqrt[m]{1}$ á la de la línea que la divide en m partes iguales, cosas que en la naturaleza son esencialmente distintas unas de otras, y que deberán por consiguiente serlo igualmente en el cálculo.

Pero, como cuando se nos ha pedido que dividamos la circunferencia en n partes iguales, el procedimiento que hemos empleado se limita á escribir, que al cabo de n repeticiones de un cierto ángulo α, á lo largo de la circunferencia, llegamos á la línea de partida, como tambien si hubiésemos tomado el ángulo 2α en vez de α, y si lo hubiésemos repetido n veces hubiéramos llegado evidentement- á la misma líneade partida, como además si hubiésemos tomado el ángulo 3α y lohubiésemos repetidos n veces, hubiéramos llegado á la misma línea de partida, y así sucesivamente hasta el ángulo $n\alpha$, se sigue de aquí que lo que hemos escrito debe igualmente convenir á todos estos casos, de donde à fortiori debemos concluir que de nuestra ecuacion de relacion es preciso necesariamente deducir n valores distintos de p, lo que nos conduce á la consecuencia de que deben existir n raices del grado n de la unidad. Lo que es un hecho completamente admitido en álgebra.

En fin, puesto que los valores de p corresponden, segun nuestra teoría, á los coeficientes de direccion de las líneas determinadas por los ángulos α, 2α, 3α, etc., puesto que hemos probado que estos coeficientes son de la forma

$$\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

$$\cos 2\alpha + \sqrt{-1}\sin 2\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y puesto que, en el caso actual, α es igual á $\frac{2\pi}{n}$, se sigue que los valores de p, y por consiguiente las n raices de la unidad, deben ser de la forma

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{n}$$

$$\cos 2\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin 2\frac{2\pi}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin(n-1)\frac{2\pi}{n},$$

$$\cos n\frac{2\pi}{n}+\sqrt{-1}\sin n\frac{2\pi}{n}.$$

Verdad desde hace mucho tiempo consagrada en la ciencia algebráica.

Este seria quizás el lugar apropósito para hacer notar como todas las propiedades de las raices n de la unidad se desprenden de nuestros principios; pero, como en álgebra es donde especialmente se trata de la resolucion de la ecuacion $x^n=1$, entraré en mayores pormenores sobre este objeto, cuando, en la segunda parte de esta obra, me ocupe de la aplicacion de mis principios á este ramo de la ciencia del cálculo.

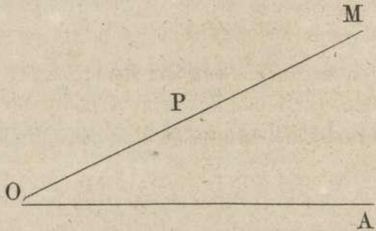
Podria sin trabajo dar mas extension aun á estas citas, pero no hago aquí un tratado especial de la materia, y creo que lo que precede es muy suficiente para mostrar la verdad y la fecundidad de nuestros principios.

SECCION II.

APLICACIONES Á LA GEOMETRÍA ELEMENTAL.

—Detalles preliminares sobre la manera de representar en álgebra las rectas y sus direcciones.

Acabamos de ver en lo que precede las consecuencias importantes á que nos ha conducido el principio por el cual hemos aprendido á representar en álgebra las direcciones de las rectas. Combinemos ahora las longitudes con las direcciones y vamos á llegar á otras consecuencias no menos dignas de observacion.



Tírese por el punto O una recta OM formando un ángulo θ con la línea de base OA; y tómese sobre la línea OM un punto P. Si para abreviar represento por r la distancia OP, la recta OP, tanto en tamaño como en direccion se representará en el cálculo por la expresion

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta),$$

como quedó probado en el capítulo III.

Con tal antecedente, si en esta expresion, en que θ es constante, se supone que r es variable desde cero al infinito, la expresion anterior representará todas las longitudes cuya existencia es posible, dirigidas segun θ. Esta expresion podrá, pues, tambien emplearse para representar todos los puntos de la recta indefinida OM, y es evidente que no podrá aplicarse sino á los solos puntos de esta recta.

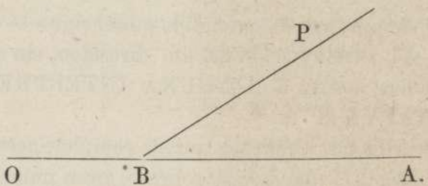
En cuanto á cualquier porcion de esta recta por debajo del punto O y en su prolongacion, GUARDEMONOS DE DECIR que se obtendrá con la suposicion de r negativo; pues no hemos de perder de vista que r expresa solo una longitud y nada mas: lo único que puede ser negativo, lo único susceptible de una existencia determinada ó inversa es la direccion. Así la expresion:

$$-r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

se aplicará á la línea OP prolongada mas allá del punto O, entendiéndose bien que el signo — NO AFECTA A r, SINO A

$$\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta.$$

Si la línea de que nos ocupamos no pasa por el punto O, hé aquí como, partiendo del orígen, podremos ir á parar á uno cualquiera de sus puntos P



Designando por B la posicion del punto donde corta la línea de base OA, llamando d la distancia OB y r la BP, en fin, llamando θ el ángulo que PB forma con la línea de base, se verá que el camino OB, tanto en longitud como en direccion está representado por d, que el camino BP tanto en longitud como en direccion está representado por

$$r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta),$$

y que en su consecuencia la suma de estos dos caminos, que fija irrevocablemente la posicion del punto P, tendrá por expresion

$$d+r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

Si ahora se supone que r es variable desde cero hasta el infinito, la expresion anterior representará todos los caminos cuya existencia es posible para ir de O á un punto cualquiera de la recta BP, siguiendo primero la parte comun OB.

Esto es, que la expresion anterior, en que r es variable, puede emplearse para expresar todos los puntos de la recta BP referidos al punto O y á la línea OA.

Observaré, además, que en cuanto á la porcion de la recta BP, situada en su prolongacion por debajo del punto B, se representará por la suposicion de que en la expresion precedente el segundo término se hace negativo, lo que dá

$$d - r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).$$

Pero siempre queda entendido que el signo — debe atribuirse AL COEFICIENTE de direccion, sin que nunca puede haber motivo á NINGUNA INTERPRETACION RELATIVA A r.

Si yo redactase ahora un tratado completo acerca de esta materia, tendria que insistir sobre un gran número de pormenores preliminares, pero escribo en este momento nó para discípulos que tengan que aprenderlo todo, sino para lectores que han de familiarizarse pronto con esta clase de materias y para los cuales pueden suprimirse algunas explanaciones.

—*Relaciones entre una recta cualquiera y su perpendicular.*

Volvamos al caso de una línea que pasa por el orígen, y cuya expresion analítica es

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta).$$

Propongámonos hallar la expresion analítica de la línea que, pasando por el orígen, le es perpendicular. Si r' designa la distancia de un punto cualquiera de esta línea al orígen y θ' el ángulo que forma con la línea de base, su expresion será

$$r'\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta').$$

Pero, siendo perpendicular á la anterior, será menester que su coeficiente de direccion no sea otra cosa que el de la línea dada multiplicado por $\sqrt{-1}$; se tendrá, pues, para la expresion analítica de la perpendicular

$$r' \sqrt{-1}\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Si en vez de pasar la perpendicular por el orígen, pasase por un punto de la recta dada distante del punto O la cantidad a, la expresion analítica de la perpendicular seria evidentemente

$$a(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + r'\sqrt{-1}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

ó bien

$$(a + r'\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

en la que todo es constante excepto r'.

Designando por x la distancia desconocida, contada á partir del orígen, en que esta perpendicular viene á cortar la línea de base, y por y el valor r' que corresponde á esta interseccion, se deberá tener

$$(a + y\sqrt{-1})\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = x;$$

igualando respectivamente lo real y lo imaginario, tendremos las dos relaciones

$$a\cos\theta - y\sin\theta = x$$

$$a\sin\theta + y\cos\theta = 0.$$

Se saca de la segunda

$$y = -a\,\mathrm{tang}\,\theta,$$

lo que demuestra que este valor de y debe contarse sobre la direccion de la perpendicular que pasa por debajo de la línea dada.

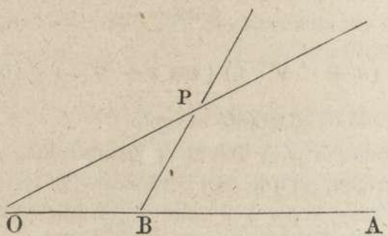
Sustituyendo este valor en la primera, se saca de él

$$x = a\,\frac{1}{\cos\theta}.$$

Estos son justamente los valores que se encuentran por los procedimientos ordinarios de la geometría analítica.

—Interseccion de dos rectas.

Pasemos á otras cuestiones.



Sea siempre OA nuestra línea de base, y tiremos dos rectas cualesquiera OP, BP de las que pase una por el orígen, y otra por un punto B distante de este orígen la cantidad OB $= d$, sus expresiones analíticas serán

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

$$d + r'(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta').$$

Propongámonos determinar las longitudes OP y BP, que determina su interseccion.

Si llamamos x é y estas longitudes, será preciso escribir que el camino

$$x(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

es igual al camino

$$d + y\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\,\sin\theta').$$

Poniendo, pues, esta ecuacion, y despues igualando respectivamente por una parte y otra lo real y lo imaginario, resultará

$$x\cos\theta = d + y\cos\theta'$$

$$x\sin\theta = y\sin\theta'.$$

Y resolviendo estas ecuaciones hallaremos los valores siguientes:

$$y = d\,\frac{\sin\theta}{(\sin\theta - \theta')},$$

$$x = d\,\frac{\sin\theta'}{(\sin\theta - \theta')}.$$

Que son los valores que se obtienen por los procedimientos conocidos del álgebra.

—*Fórmulas fundamentales de la trigonometría de los triángulos.*

Además, si en el triángulo anterior OBP se ponen sucesivamente

$$OB = a,\ BP = b,\ PO = c,$$

$$OPB = A,\ POB = B,\ PBO = C$$

si se observa que entonces

$$A = \theta - \theta',\ B = 0,\ y\ C = \pi - \theta'$$

las dos ecuaciones de condicion anterior se convierten en

$$c\cos B = a - b\cos C,$$

$$c\sin B = b\sin C.$$

Que son las fórmulas fundamentales de la trigonometría para la resolucion de los triángulos rectilíneos.

—Principios fundamentales de la teoría general de los polígonos.

Si una recta forma con la línea de partida un ángulo θ_1 su coeficiente de direccion será

$$\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1.$$

Si una segunda recta corta á esta, segun un ángulo θ_2, su coeficiente de direccion con respecto á la línea de base será

$$(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2),$$

ó bien

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2).$$

Si una tercera recta corta la precedente formando un ángulo θ_3, su coeficiente de direccion con respecto á la línea de base será

$$(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)$$
$$(\cos\theta_3 + \sqrt{-1}\sin\theta_3);$$

ó bien

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3).$$

En fin, si se continúa así hasta una recta n, el coeficiente de direccion de esta recta n, siempre referida á la línea de base, tendrá por expresion

$$(\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + \sqrt{-1}\sin\theta_2)\ldots$$
$$\ldots(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\sin\theta_n)$$

ó mas simplemente

$$\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)+\sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n).$$

Ahora bien, si se supone que la última recta se confunde con la direccion positiva de la línea de base, la expresion analítica de esta direccion, siendo $+1$ se tendrá

$$(\cos\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)+\sqrt{-1}\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)$$
$$=+1$$

de donde se deducirá

$$\theta_1+\rho_2+\theta_3+\ldots+\theta_n=2k\pi,$$

siendo k un número entero.

En cuanto al valor de k, es evidente que será igual al número de veces de las vueltas completas ejecutadas para la construccion precedente.

(Véase figura 2.ª)

En tal supuesto, si se dirige la vista á la figura citada, que representa un polígono, y si se supone que la direccion de uno de los lados de este polígono AB, está tomada por base de partida, es fácil ver que los ángulos sucesivos θ_1, θ_2, ρ_3..., que forman los lados entre sí, son lo que se llama en geometría los ángulos externos del polígono, y se deducirá de la fórmula precedente que, en el caso de la figura anterior, la suma de los ángulos externos es igual á una circunferencia ó á cuatro ángulos rectos, de donde se sigue que la suma de los ángulos internos es igual á tantas veces dos ángulos rectos como hay lados menos dos, que son los teoremas fundamentales de la teoría de los polígonos.

Si se supone, que todos los ángulos θ_1, θ_2, θ_3,..., θ_n, son iguales entre sí, los ángulos internos lo serán igualmente;

ahora bien, en este caso, la ecuacion de condicion será

$$n\theta_1 = 2k\pi,$$

esto es,

$$\theta_1 = \frac{2k\pi}{n}$$

Lo que conduce á varios valores de θ_1, y se vé de un golpe que las direcciones correspondientes á estos valores del ángulo θ_1 tendrán precisamente por expresiones algebráicas las n raices de la unidad.

De aquí se deducirá que el problema consistente en construir un polígono de n vértices con todos los ángulos iguales, es susceptible de n soluciones, hecho comprobado desde hace mucho tiempo por los elegantes teoremas de M. Poinsot sobre los polígonos regulares.

Imaginemos ahora que $a_1, a_2, a_3, .., a_{n-1}, a_n$ son respectivamente las longitudes de los lados del polígono correspondiente á los ángulos externos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_n$. Es evidente que si se parte del punto B siguiendo el polígono para volver al punto B, será preciso que la suma de los varios caminos así recorridos sea nula, lo que conduce á la relacion siguiente:

$$\begin{aligned}
&a_1 (\cos\theta_1 + \sqrt{-1}\sin\theta_1) \\
&+ a_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\
&+ a_3 [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)] \\
&+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
&+ a_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + \sqrt{-1}\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)].
\end{aligned}$$

Condicion de la cual, teniendo en cuenta la relacion

$$\theta_1 + \theta_2 + \ldots\ldots + \theta_n = 2k\pi,$$

se sacan las dos siguientes:

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$
$$+ \ldots\ldots + a_{n-1} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots \theta_{n-1}) = a_n,$$
$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_3 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$
$$+ \ldots\ldots + a_{n-1} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \ldots + \theta_{n-1}) = 0.$$

lo que quiere decir:

1.° Que la suma de las proyecciones de los lados de un polígono, sobre la direccion de uno de ellos, es igual con signo contrario á la longitud del lado sobre que se proyecta.

2.° Que la suma de las proyecciones de los lados de un polígono sobre una direccion perpendicular á la de uno cualquiera de los lados es nula.

Y mas en general aun: si las direcciones, en lugar de ir referidas á uno de los lados del polígono, se refieren á una línea cualquiera, llamando φ el ángulo que esta línea forma con el lado que al principio se habiá tomado por base, será preciso, para pasar del caso precedente á este otro, multiplicar todos los coeficientes de direccion por

$$\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi.$$

Las ecuaciones anteriores recibirán en este caso modificaciones que me excuso de transcribir, pero de las cuales se deducirá sin trabajo que la suma de las proyecciones de los lados de un polígono sobre una recta cualquiera es constantemente nula.

Vuelvo á recordar que no estoy redactando un tratado completo sobre la materia, y que por tanto no tengo para qué expresar ahora hasta las últimas ramificaciones de los diversos resultados que he obtenido, porque ha de bastar para el objeto que me propongo comprobar, por una parte, la fecundidad de estos resultados, y por otra su coincidencia con las verdades ya conocidas.

—Del círculo.

Lo que precede será, á mi entender, suficiente para indicar cómo los principios que he demostrado se aplican á las longitudes y á las direcciones rectilíneas.

Pasemos ahora al círculo.

Si se toma por orígen el centro del círculo, la línea de base será uno de sus diámetros, de modo que, siendo r el tamaño del radio, uno cualquiera de los puntos del círculo tendrá por expresion

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Así, suponiendo á θ variable y á r constante, esta expresion representará un punto cualquiera de la circunferencia, y suponiendo variables á la vez á θ de cero á 2π y á r de cero á r, esta misma expresion será la de un punto cualquiera de la superficie del círculo.

—De la tangente al círculo.

Siendo perpendicular á la direccion del radio que pasa por un punto del círculo la tangente á ese punto, se sigue que el coeficiente de direccion de esta tangente será igual al producto del coeficiente de direccion del radio por $\pm\sqrt{-1}$.

Así, para el radio determinado por el ángulo θ, el coeficiente de direccion de la tangente será

$$\pm(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1}.$$

(Véase figura 3.ª)

Designando por ρ la distancia variable del punto R á un punto cualquiera T de esta tangente, hallarémos que la posicion de este punto T se determinará por OR + RT ó

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) \pm \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1},$$

que puede escribirse tambien

$$(r \pm \rho\sqrt{-1})(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

correspondiendo el signo + á la porcion de la tangente situada por encima de OR y el signo — á la situada por debajo.

Propongámonos ahora determinar la distancia desconocida OM en que la tangente corta la línea de base, y la longitud RM comprendida entre la misma línea de base y el punto de contacto.

Hágase para abreviar

$$\text{OM} = x, \ \text{RM} = y,$$

y dejemos á un lado la consideracion del doble signo $\pm$ que el coeficiente de direccion reproduce por otra parte de por sí mismo.

La condicion del problema es que los caminos geométricos OR y RM sumados con sus direcciones son el equivalente del camino OM.

Esto dá inmediatamente la relacion

$$(r + y\sqrt{-1})(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = x.$$

Desarrollando é igualando separadamente á cero lo que es real y lo que es imaginario, se obtienen las dos ecuaciones

$$r\cos\theta - y\sin\theta = x,$$

$$r\sin\theta + y\cos\theta = 0.$$

De la segunda inmediatamente se saca

$$y = -r\,\text{tang}\,\theta.$$

Así mientras que el punto R corresponda al cuadrante para el cual tangente θ es constantemente positivo, el valor de y será negativo, esto es, que la tangente cortará la línea de base debajo de OR; y poniendo este valor de y en la primera ecuacion, hallaremos

$$r\left(\cos\theta+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)=x,$$

de donde

$$x=\frac{r}{\cos\theta}.$$

Que son los valores ordinarios de x y de y.

—Interseccion de dos circunferencias.

Tomarémos por línea de base la línea de los centros y por orígen el centro de uno de los dos círculos; de donde se sigue que si r_1 es el radio de este, su expresion analítica será

$$r_1\left(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta'\right).$$

En cuanto al otro, si r_2 es su radio y si d es la distancia de los centros, su expresion será

$$d+r_2\left(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\sin\theta_2\right).$$

Busquemos su punto de interseccion; será preciso para obtenerlo, igualar una á otra estas dos expresiones, lo que dá

$$r_1\left(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta_1\right)=d+r_2\left(\cos\theta_2+\sqrt{-1}\sin\theta_2\right)$$

ecuacion de la cual se saca

$$r_1\cos\theta_1=d+r_2\cos\theta_2$$

$$r_1\sin\theta_1=r_2\sin\theta_2,$$

y por medio de estas dos se determinarán θ_1 y θ_2.

Para conseguirlo, hagamos la suma de sus cuadrados, resultará

$$r_1^2 = d^2 + 2\,d\,r_2 \cos \theta_2 + r_2^2;$$

luego

$$\cos \theta_2 = \frac{(r_1^2 - r_2^2) - d^2}{2\,d\,r_2}$$

y por tanto

$$\cos \theta_1 = \frac{(r_1^2 - r_2^2) + d^2}{2\,d\,r_1}.$$

Dados por sus cosenos los ángulos θ_1 y θ_2, se deduce que el problema tiene siempre dos soluciones, y se vé que estas dos soluciones serán simétricas con relacion á la línea de los centros. En consecuencia la línea que une los dos puntos de interseccion es perpendicular á la linea de los centros.

No me detendré en discutir estos valores, usados diariamente, porque aquí debo solo patentizar el cómo estos nuevos principios se aplican á la investigacion de las verdades geométricas y cuán fácil es la nueva via abierta para descubrirlas, á cuyo fin me parece digna de interés la discusion que vá á seguir.

—Propiedad fundamental de los ejes radicales.

(Véase figura 4.ª)

Sea un círculo cuyo centro esté en C y del que CO sea un diámetro; levántese sobre este diámetro una perpendicular OI indefinidamente prolongada, y por un punto cualquiera S de esta perpendicular tírese una tangente al círculo; se pide la longitud ST de esta tangente.

Tómese por línea de base el diámetro CO y por orígen su punto de interseccion O con la perpendicular.

Háganse para abreviar CT $= r$ y ángulo ACT $= \theta$: segun nuestros principios será preciso que la suma de los caminos OC + CT + TS sea igual al camino OS. Ahora bien, el camino CT tiene por expresion

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

el camino TS, que es perpendicular á CT, tendrá por expresion

$$\mathrm{TS}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1};$$

y, en fin, el camino OS ó bien OI + IS se expresará por

$$(\mathrm{OI}+\mathrm{IS})\sqrt{-1}.$$

Escribamos ahora la igualdad anteriormente mencionada, y resultará

$$\mathrm{OC} + r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$+\mathrm{TS}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1} = (\mathrm{OI}+\mathrm{IS})\sqrt{-1}.$$

De aquí se deducen las dos relaciones siguientes:

$$\mathrm{OI} + \mathrm{IS} = r\sin\theta + \mathrm{TS}\cos\theta,$$

$$-\mathrm{OC} = r\cos\theta - \mathrm{TS}\sin\theta.$$

Para obtener TS, tomemos la suma de los cuadrados: resultará

$$(\mathrm{OI}+\mathrm{IS})^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2 = r^2 + \overline{\mathrm{TS}}^2.$$

Y, desarrollando el primer miembro, observarémos que

$$\overline{\mathrm{OI}}^2 + \overline{\mathrm{OC}}^2$$

es igual á r^2 Suprimiendo, pues, esta última cantidad en los dos miembros, se hallará definitivamente

$$\overline{\mathrm{TS}}^2 = \mathrm{IS}(\mathrm{IS} + 2\,\mathrm{OI}) = \mathrm{IS}\times\mathrm{SG}.$$

Este valor de TS es, pues, independiente del radio del círculo, y tanto que IS y SG permanecerán siendo los mismos, sin que cambie la longitud de la tangente, de donde se deducirá que, si por los mismos puntos I y G se hacen pasar tantas circunferencias como se quiera todas las tangentes llevadas de un punto S de la línea IG á estas diversas circunferencias serán iguales entre sí.

—*Propiedad de las secantes tiradas por un punto exterior.*

A esta primera conclusion podemos añadir otra: en efecto, puede observarse que no solamente TS es independiente de r sino que es tambien independiente de θ, de donde resulta que lo que hemos dicho de la recta que pasa por S y corta la circunferencia en los puntos I y G podria decirse igualmente de cualquier otra recta que pasase por S y cortase la circunferencia en los puntos I′ y G′. Tomando el diámetro perpendicular á esta línea por línea de base y su interseccion por orígen, se obtendrá la ecuacion

$$\overline{TS}^2 = I'S \times SG'$$

de donde salen los teoremas conocidos en geometría sobre las secantes al círculo tiradas desde un punto externo.

—*Tangente comun á dos circunferencias.*

(Véase figura 5.ª)

Sean C y c los centros de las dos circunferencias, R y r sus radios, T y t los puntos de contacto de la tangente comun con cada circunferencia, en fin S la interseccion de la tangente comun con la línea de los centros.

Sabemos que, puesto que Tt es una tangente, los dos radios ct y CT le serán perpendiculares, de manera que relativamente á la direccion tT las direcciones r y R tendrán por valor $\sqrt{-1}$; en cuanto al camino cC, designando por θ el ángulo CST, su direccion con relacion á la de tT se expresará por

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta.$$

Esto supuesto, escribamos que el camino $tc + c\mathrm{C}$ es igual al camino $t\mathrm{T} + \mathrm{TC}$, lo que conduce inmediatamente á la ecuacion siguiente, en la que d representa la distancia de los centros:

$$r\sqrt{-1} + d(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = t\mathrm{T} + \mathrm{R}\sqrt{-1},$$

de donde se deducen las dos siguientes:

$$t\mathrm{T} = d\cos\theta,$$

$$\mathrm{R} - r = d\sin\theta,$$

de las cuales se saca inmediatamente

$$\overline{t\mathrm{T}}^2 = d^2 - (\mathrm{R} - r)^2$$

y

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{R} - r}{\sqrt{d^2 + (\mathrm{R} - r)^2}}$$

Implícitamente hemos supuesto aquí que las direcciones de r y R van en el mismo sentido, lo que corresponde á la tangente externa; en cuanto á la tangente interna, basta cambiar el signo de $r\sqrt{-1}$, y resultará, pues,

$$\overline{t\mathrm{T}}^2 = d^2 - (\mathrm{R} + r)^2,$$

y

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{R} + r}{\sqrt{d^2 + (\mathrm{R} + r)^2}}$$

Como se vé, podria multiplicar estas citas, pero los ejemplos que acabo de presentar son muy suficientes para dar una idea de la generalidad y del modo de aplicacion de los nuevos principios.

Solo añadiré para concluir algunos pormenores sobre la determinacion de la expresion algebráica de las secciones cónicas.

—*Expresion algebráica de la elipse.*

Se sabe que la elipse goza de esta propiedad: si de sus dos focos se tiran radios vectores á un mismo punto de la curva, la suma de estos radios vectores será constante; busquemos segun esta propiedad su expresion.

(Véase figura 6.ª)

Sean F y F′ los dos focos, llamemos d la distancia que los separa, tomemos por orígen el punto F y por línea de base la línea FF′.

Si P es un punto cualquiera de la curva, y si se llama r el radio vector FP, y θ el ángulo que forma con la línea de base, el punto P se determinará por medio de la expresion

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

Pero, en tal estado, esta expresion no enseña nada de particular: es menester reemplazarla con la indicacion general del radio r, ó sea con un valor particular que indique como en la curva de que nos ocupamos r varia con θ. Para esto, escribamos en virtud de nuestros principios los datos de la cuestion:

Llévese al punto P el segundo radio vector F′P, que para abreviar llamaré r', y sea θ' el ángulo que forma con la línea de base.

Será preciso que el camino geométrico FF′ + F′P sea igual al camino FP, escribiremos, pues:

$$r\,(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = d + r'\,(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta').$$

Pero, como la suma $r + r'$ es constante, llamando s esta constante, resultará $r' = s - r$, y podremos así reemplazar la precedente ecuacion por la siguiente:

$$r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$

$$= d + (s - r)(\cos\theta' + \sqrt{-1}\sin\theta').$$

De donde, igualando separadamente lo real á lo real y lo imaginario á lo imaginario, resultará

$$(s - r)\cos\theta' = r\cos\theta - d$$

$$(s - r)\sin\theta' = r\sin\theta.$$

Haciendo la suma de los cuadrados quedarán efectuadas todas las reducciones.

$$(s - r)^2 = r^2 - 2\,dr\cos\theta + d^2.$$

Desarrollando el primer miembro, suprimiendo por una parte y otra la cantidad comun r^2, y resolviendo la ecuacion en relacion á r se obtiene

$$r = \frac{s^2 - d^2}{2(s - d\cos\theta)}.$$

La expresion general de un punto cualquiera de la elipse será, pues,

$$\frac{s^2 - d^2}{2(s - d\cos\theta)}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

—Expresion algebráica de la hipérbola.

No repetiremos los cálculos en cuya virtud determinariamos la expresion analítica de la hipérbola por ser en todo iguales á los precedentes. En vez de suponer constante la suma de los dos radios vectores, basta escribir que lo es su diferencia: de modo que llamando t esta constante, será menester reemplazar la condicion $r + r' = s$ por $r - r' = t$, esto es, que en vez de $r' = s - r$ se pondrá $r' = r - t$; segun lo cual se vé que, para conocer el resultado que se busca, bastará cambiar el signo de r y reemplazar $+ s$ por $- t$, lo cual dá inmediatamente

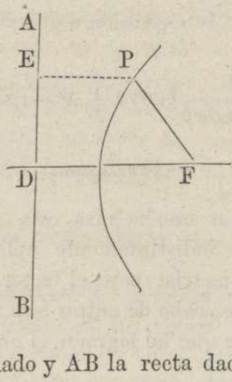
$$r = \frac{t^2 - d^2}{2(t + d\cos\theta)}.$$

De donde se sigue que la expresion analítica de un punto cualquiera de la hipérbola será

$$\frac{t^2 - d^2}{2(t + d\cos\theta)}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

—Expresion algebráica de la parábola.

En fin, en cuanto á la parábola, la determinaremos en virtud de esta propiedad: cada uno de sus puntos está á igual distancia de un punto fijo y de una recta fija dadas.



Sea F el punto dado y AB la recta dada: del punto F bajemos sobre AB una perpendicular FD y tomemos el punto D por orígen y la recta FD por línea de base: segun la propiedad que acabamos de enunciar, será preciso que, si del punto P se tira, 1.° el radio vector FP; 2.° la perpendicular PE, se tenga PE=PF.

En tal supuesto, designemos por r la longitud comun de PF y PE, y por θ el ángulo de PF con la línea de base, y escribamos que el camino DF + FP es igual al camino DE + EP. Tendremos, designando por d la distancia conocida DF, y por y la altura desconocida DE,

$$d + r(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = y\sqrt{-1} + r,$$

de donde resultarán las dos ecuaciones siguientes:

$$d + r\cos\theta = r,$$

$$r\sin\theta = y,$$

que dan inmediatamente

$$r = \frac{d}{1-\cos\theta},\ y = \frac{d\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

y, en consecuencia, la expresion algebráica de la parábola será

$$\frac{d}{1-\cos\theta}(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta).$$

—*Conclusion.*

Podria amplificar mucho mas esta clase de investigaciones, pues es indistintamente aplicable á todas las cuestiones de geometría; pero el lector juzgará que los pormenores en que acabo de entrar son mas que suficientes para demostrar que he logrado el objeto que me propuse.

La extraordinaria conformidad de los resultados que consigo por medio de ese nuevo modo de investigacion á que me han conducido mis indagaciones con los resultados ya obtenidos por los procedimientos ordinariamente puestos en uso, prueban de un modo inconstestable que mis nuevas doctrinas son la expresion de la verdad, y que las consideraciones á que me he consagrado, ya para la investigacion, ya para el establecimiento de esas doctrinas, son una justa apreciacion de las relaciones que deben existir entre los hechos naturales y la lengua algebráica.

Acabamos de ver, por la série de aplicaciones que he presentado en este capítulo, la influencia que estas doctrinas deben tener sobre la enseñanza de la teoría de las funciones circulares que hasta el dia solo ha sido abstracta y analítica y que espero haber hecho pasar para siempre á la region de lo concreto. Se ha visto igualmente cómo estas doctrinas establecen una via fecunda para todas las investigaciones de geometría; y he presentado bastantes ejemplos y aplicaciones para que su importancia pueda apreciarse, y para que esta gran clasificacion de la ciencia del cálculo en dos partes muy distintas, una aplicada á la computacion de la cantidad, y otra á la del órden y de la situacion de las cosas, se introduzca definitivamente en el terreno de la enseñanza, no ya como un ACCIDENTE útil solo en algunos casos aislados, sino como base ESENCIAL, que ejerce una influencia NECESARIA, é indispensable en la discusion de todas las cuestiones que la ciencia del cálculo está llamada á resolver.

—Trabajos ulteriores.

Mi tarea está muy lejos de terminar, pues si he descubierto la interpretacion de un género de expresiones incomprensibles ó no entendidas hasta el dia, y si he demostrado que estas expresiones tienen que ser en manos de los geómetras un instrumento precioso para todas sus investigaciones, resta aun hacer ver que estas nuevas consideraciones aplicables, no solo á las longitudes y á sus direcciones sino á todas las cantidades, son la CONDENACION de doctrinas pasadas en autoridad de cosa juzgada y que en el álgebra propiamente dicha, están llamadas tanto á esclarecer lo que hay de obscuro, como á destruir lo que hay de falso.

Queda tambien que demostrar el cómo dan á la metafísica del cálculo infinitesimal esa claridad que le falta, y esa precision que tanto se ha buscado, pero que no ha podido obtenerse todavía.

Quedan, en fin, por desarrollar las grandes ventajas que producirán las nuevas consideraciones en toda APLICACION de la ciencia del cálculo al estudio de los HECHOS NATURALES.

La exposicion de estas nuevas investigaciones constituye la materia de la segunda parte de esta obra. (1)

---

(1) No ha parecido aun.

Para que se vea si Mr. Vallès tiene razon al decir que sus principios son la CONDENACION de doctrinas pasadas en autoridad de cosa juzgada, queremos presentar la ecuacion siguiente, que, como todas las que contienen la misma *clase* de incompatibilidad en los datos, no tiene valor ninguno ni real ni imaginario que, *sustituido en ella,* realice la supuesta igualdad.

$$(2x-5)+\sqrt{x^2-7}=0.$$

A continuacion presentamos una lista de la literatura revolucionaria en materia de matemáticas, si es permitido llamarla así. ¿No es cosa que admira la persistencia de los hombres de la ciencia en no variar el algoritmo cuando hace tanto tiempo que se está dando la voz de ALERTA?

FIN.

LISTA de algunos escritos en los cuales se discuten los símbolos peculiares del Algebra.

Lóndres, 1685, fólio. JOHN WALLIS. *A Treatise of Algebra, both historical and practical.* Reimpreso en latin con adiciones en el segundo tomo de Wallis's Works, Lóndres, 1693, fólio.

Nápoles, 1687, fólio. GIL FRANCISCO DE GOTTIGNIES. *Logistica Universalis.*

Lóndres, 1758, 4.° FRANCIS MASERES. *A Dissertation on the use of the Negative Sign in Algebra.*

Lóndres, 1796, 8.° WILLIAM FREND. *The Principles of Algebra.*

Philosophical Transactions for 1778 and 1802 [PLAYFAIR], (Woodhouse.) *On the necessary Truth of certain Conclusions obtained by aid of Imaginary Expresions.*

Cambridge, 1803, 4.° ROBERT WOODHOUSE. *The Principles of Analytical Calculation.*

Philosophical Transactions for 1806. El Abate BUÉE. *Mémoire sur les Quantités Imaginaires.* (Leida en 20 de Junio de 1805.) Véase tambien la Revista vol. XII de la Edinburgh Review. Abril—Julio, 1808 (escrita por Playfair.)

Lóndres, 1804. *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement of Science.*

París, 1806. ARGAND. *Essai sur la manière de représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géometriques.*

Annales des Mathématiques 1813.—FRANÇOIS, ARGAND, SERVOIS, GERGONNE. *Observaciones.*

Lóndres, 1817, 4.° Benjamin Gompertz. *The Principles and Application of Imaginary Quantities.* Libro I, (al cual se hallan agregados algunas observaciones y porismos.

Lóndres, 1818, 4.° Benjamin Gompertz. *The Principles and Application of Imaginary Quantities.* Libro II, (derived from a particular case of functional projections.

París, 1828, 8.° C. V. Mourey. *La vraie théorie des Quantites Négatives et des Quantites Prétendues Imaginaires. Dedié aux amis de l'évidence.*

Cambridge, 1828, 8.° John Warren. *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.*

Philosophical Transactions for 1829. John Thomas Graves. *An Attempt to rectify the Inaccuracy of some Logarithmic Formulæ.* (Leido el 18 de Diciembre 1828.)

Philosophical Transactions for 1829. John Warren. *Consideration of the Objections raised against the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities.* (Leido el 19 de Febrero 1829.) El mismo volúmen contiene. John Warren. *On the Geometrical Representation of the Powers of Quantities, whose indices involve the Square Roots of Negative Quantities.* (Leido el 4 de Junio 1829.)

Cambridge, 1830, 8.° George Peacock. *A Treatise on Algebra.*

Philosophical Transactions for 1831. Davies Gilbert. *On the Nature of Negative and of Imaginary Quantities.* (Leido el 18 de Noviembre 1830.)

Lóndres, 1836, Anónimo. [George Peacock.] *A Syllabus of a course of Lectures upon Trigonometry* *and the aplication of Algebra to Geometry.*

Cambridge, 1837, 8.° anónimo. (OSBORNE REYNOLDS.) *Strictures on Certain Parts of* "Peacock's Algebra", by a Graduate.

Lóndres, 1837. A. DE MORGAN. *Elements of Algebra.*

Lóndres, 1837. A. DE MORGAN. *Elements of Trigonometry and Trigonometrical Analysis, preliminary to the differential Calculus.*

Edinburgh. Philosophical Transactions. Vol. XIV, Parte I. (GREGORY.) *On the Real Nature of Symbolical Algebra.*

Ladies' Diary. London, 1839. THOMAS WHITE. *On the Algebraical Expansion of Quantity and on the Simbol* $\sqrt{-1}$ (which is usually considered to denote impossible or imaginary quantity.

Cambridge. Philosophical Transactions vol. VII. Parte II. Vol. VII, parte III y vol. VIII. (Leidos el 9 de Diciembre 1839, Noviembre 29 1841 y 27 1843.)

A. DE MORGAN." *On the foundation of Algebra.*"

París, 1841. M. F. VALLÉS. *Etudes Philosophiques sur la Science du Calcul.*

Cambridge, 1842 et 1845. (GEORGE PEACOCK.) *A Treatise on Algebra.* Vol. 1. *Arithmetical Algebra.* Vol. 2. *Symbolical Algebra and its aplications to the Geometry of Position.*

Lóndres, 1843. 12.° MARTIN OHM [traducido por Alexander John Ellis]. *The Spirit of Mathematical Analysis and its relation to a logical System.*

Lóndres, 1849. A DE MORGAN. *Trigonometry and double Algebra.*

Recomendamos las obras de PEACOCK y de MORGAN.

INDICE.

CAPÍTULO PRIMERO.

DE LA NECESIDAD DE ESTABLECER UNA DISTINCION PRECISA EN EL ESTUDIO DE LOS NÚMEROS, SEGUN QUE SE EMPLEEN COMO SÍMBOLOS DE LA OPERACION DE CONTAR Ó COMO SIGNOS REPRESENTATIVOS DE LA MAGNITUD DE LAS CANTIDADES.

CAPÍTULO II.

DE LOS NÚMEROS Y DE LAS OPERACIONES ARITMÉTICAS DESDE EL PUNTO DE VISTA ABSTRACTO.

SECCION PRIMERA.—DE LA VERDADERA NATURALE. DEL NÚMERO ABSTRACTO.

SECCION II.—ESTUDIOS SOBRE LA ADICION Y LA SUSTRACCION.

SECCION III.—ESTUDIOS SOBRE LA MULTIPLICACION Y LA DIVISION.

SECCION IV.—Estudios sobre la elevacion á potencias y extraccion de raices.

CAPÍTULO III.

Estudios sobre los módulos.

SECCION PRIMERA.—De la longitud y de sus diferentes estados bajo el punto de vista de grandeza ó de pequeñez.

SECCION II.—De la longitud y de sus diferentes estados respecto de la direccion.

Fig 1ª

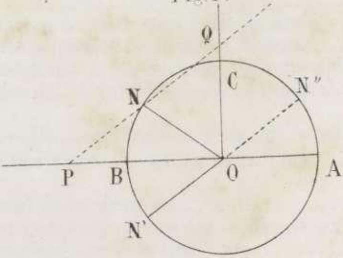


Fig 2ª

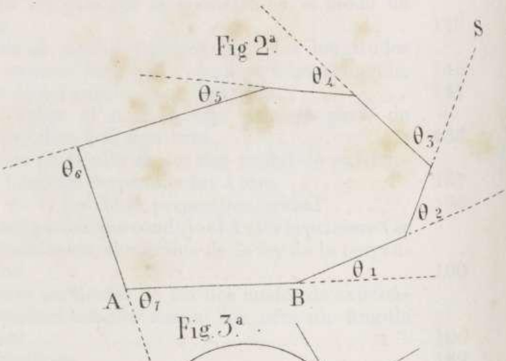


Fig 3ª

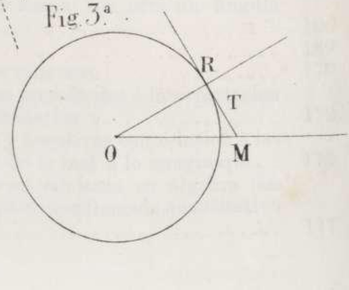


Fig. 4ª.

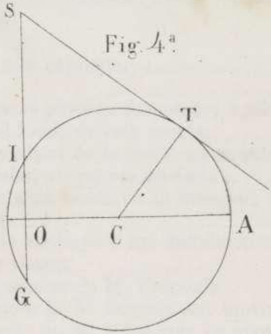


Fig. 5ª.

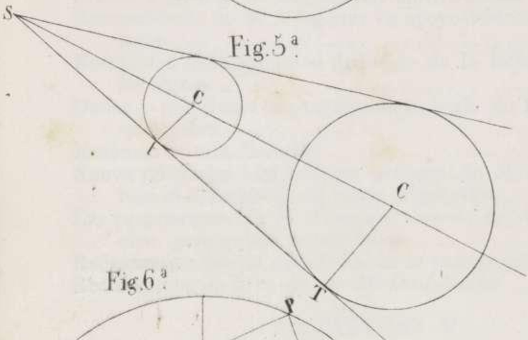
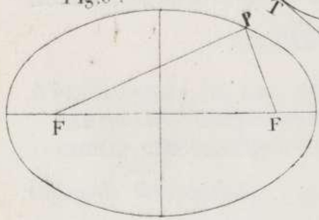


Fig. 6ª.



CAPÍTULO IV.

Exámen de una teoría cuyo objeto es la interpretacion geométrica de los símbolos imaginarios.

CAPÍTULO V.

Aplicaciones de las doctrinas expuestas en los capítulos precedentes á la teoría de las funciones circulares y á la geometría.

SECCION PRIMERA.—Aplicacion á la teoría de las funciones circulares.

SECCION II.—Aplicacion á la geometría elemental.