



F.A.S
331

Juan Lopez

Calvera

1^{er} año 5^a Sección

Nº 480

2^a Promoción

Curso de

1925 a 1926

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA.

APLICACIONES

Á LA

CONSTRUCCION DE LAS SOMBRAS

Y AL

DIBUJO DE LOS CUERPOS

POR

D. JOAQUIN DE CABANYES,

TENIENTE CORONEL GRADUADO, COMANDANTE DE ARTILLERÍA.

J. L. V.
BIBLIOTECA

N-46

BARCELONA:

ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO DE LUIS TASSO.

CALLE DEL ARCO DEL TEATRO, NÚMS. 21 Y 23.

1880.

PRELIMINARES.

1. *Utilidad del empleo de las sombras en el dibujo.*— Sabido es, que uno de los objetos de la Geometría Descriptiva es representar con exactitud las formas de los cuerpos; y bajo este solo punto de vista, la determinacion de las sombras es un auxiliar muy útil para conseguirlo, puesto que proporciona un medio de representacion muy ventajoso para hacer comprender más fácilmente la disposicion general de las diversas partes de una figura.

En efecto, cuando se considera la descripcion de un cuerpo representado por medio de sus dos proyecciones, deben mirarse simultáneamente la proyeccion horizontal y la vertical, y por esta constante comparacion es como únicamente se consigue tener una idea clara de la forma, dimensiones y posicion del objeto propuesto. A pesar de la elegancia y sencillez del método de proyecciones, la necesidad de comparar incesantemente dos proyecciones es un trabajo penoso y que distrae del estudio, mientras que si en el plano horizontal, por ejemplo, estuviesen trazadas las sombras arrojadas por los diversos cuerpos, los unos sobre los otros, ó sobre el plano horizontal, encima del cual estén colocados, á la vista de esta sola proyeccion, las figuras y la extension de estas sombras manifestarían claramente la forma y la situacion respectivas de estos cuerpos, y darían inmediatamente una idea clara de las dimensiones verticales que no pueden representarse sobre este plano.

Claro es, que si se tienen las proyecciones horizontal

y vertical de una figura, y en ámbas sus sombras construidas, se tendrá su más propia representacion definiéndose con toda fijeza el objeto. (¹)

2. *Definiciones y principios fundamentales.*—Para la mejor inteligencia de la teoría de sombras, asentaremos las siguientes definiciones y principios de Física.

1.^a Un *medio* es el espacio, lleno ó vacío, en donde se produce un fenómeno: el aire, el agua, el vidrio, son medios en los cuales se propaga la luz. Es *homogéneo* un medio cuando en todas sus partes su composicion y su densidad son las mismas.

2.^a La luz es el agente de la naturaleza que produce en nosotros, por su accion sobre la retina, el fenómeno de la vision.

3.^a Se llaman *cuerpos luminosos* los que emiten luz, como el sol y las sustancias en ignicion. Se denominan *cuerpos opacos* aquellos que se oponen al paso de la luz, como las maderas, los metales, etc.

1.^{er} *principio.* Todo cuerpo luminoso emite, de todos sus puntos y en todas direcciones, rayos luminosos.

2.^o *principio.* En todo medio homogéneo, la luz se propaga en línea recta.

3. *Determinacion de las sombras.*—La determinacion de las sombras comprende dos partes: es una la descripcion gráfica del contorno ó figura de estas sombras, y la otra enseña la manera de representar los cuerpos cuando se tienen sus sombras conocidas.

Nos ocuparemos sucesivamente de cada una de ellas.

(¹) Pronto tendremos ocasion de ver (8), que geométricamente hablando, una sombra sobre un plano equivale á una proyeccion oblicua del objeto en cuestion sobre dicho plano, la que unida á la proyeccion ordinaria es suficiente para su representacion exacta.

CAPÍTULO PRIMERO.

De las sombras y su construccion gráfica.

§. I.

TEORÍA DE SOMBRAS.

4. Se entiende por *sombra*, la *carencia de luz*: de modo que la habrá allí donde los rayos de luz no puedan llegar á penetrar.

5. Esto sabido: concibamos en un medio homogéneo (fig. 1.^a) un punto luminoso L en presencia de un cuerpo opaco T. Los rayos que en todas direcciones emite el punto L (2-1.^o pr.^o), respecto al cuerpo T son de tres especies:

1.^a *Rayos que no encuentran al cuerpo T*, como los Lx , Lz , $Ld...$ etc. Son completamente extraños á él (2-2.^o p.^o), y segun su direccion difunden luz en el espacio.

2.^a *Rayos que encuentran la masa del cuerpo*, como los Lm , Ln que iluminan sus elementos m , n .

Para determinar toda la porcion de la superficie del cuerpo alumbrada, sirven los de la

3.^a especie que son: *Los rayos que tocan al cuerpo*, como los La , Lb , $Lc...$ etc.; los cuales forman una superficie cónica tangente al cuerpo T, y en el que la curva $abc...$, segun la cual la superficie del cuerpo toca á este cono que lo envuelve, separa la parte iluminada de la que permanece oscura. En efecto, la porcion de superficie cónica $Labc...$ está rellena de rayos de luz que pro-

ceden de L (2-1.º p.º), así que todos los elementos de la porcion de superficie del cuerpo T contada desde la curva $abc...$ hácia el lado de L, recibirán un rayo de luz cada uno, de modo que estarán *todos ellos* completamente iluminados por el punto L; al paso que la parte tronco-cónica $abc \overline{abc}$ prolongada indefinidamente del lado opuesto á L, comprenderá todos los puntos del espacio que no pueden recibir luz directa de L, porque es evidente que ningun rayo de L puede llegar á ellos sin atravesar el cuerpo T (2-2.º p.º) que suponemos opaco; este tronco de cono $abc \overline{abc}$ es pues hueco y determina la *sombra producida por el cuerpo T en el espacio*. Así, pues, la línea de contacto $abc...$ divide la superficie del cuerpo T en dos porciones bien distintas, la $abcmn$ iluminada por el punto L, y la otra $abc rs$ que no puede recibir ningun rayo de luz directa, estará totalmente en sombra: por esto, á la curva $abc...$ se llama la línea de *separacion de luz y de sombra* sobre el cuerpo T. Finalmente, si interponemos en la sombra producida por el cuerpo T un plano P ó cualquier otra superficie, resultará una curva de interseccion $\overline{abc}...$ que encerrará todos los puntos de la superficie P que no reciben luz directa de L, miéntras que todos los puntos exteriores á esta curva como los $\lambda, \delta...$, se encontrarán iluminados porque siempre habrá un rayo de luz de L que llegue á ellos (2-1.º p.º); de aquí que la porcion comprendida por la línea $\overline{abc}...$ se llame la *sombra arrojada* por el cuerpo T sobre la superficie P.

6. Se comprende fácilmente, que determinada la línea $abc...$, la podremos mirar como la directriz del cono cuya interseccion con las superficies exteriores será el contorno de la sombra arrojada.

7. Cuando el cuerpo iluminado es un poliedro, la *línea de separacion* se compone de *todas las aristas* que

separan las caras iluminadas de las oscuras; el cono representado en la figura 1.^a pasa á ser una pirámide, y su interseccion con un plano P será un polígono que determinará la sombra arrojada por el poliedro.

8. En los dibujos geométricos se supone siempre que la luz proviene del sol, y en este caso se admite que los rayos son paralelos entre sí; de modo que (2-1.^{er} p.^o) por un punto cualquiera del espacio pasa siempre un rayo de luz paralelo á la direccion que tendrían los enviados del sol. Resultado de esta hipótesis es poder prescindir de las penumbras que irisan los contornos de las sombras propias y arrojadas y que el cono ó la pirámide formado por los rayos luminosos que envuelven al cuerpo, pasan á ser un cilindro ó un prisma ó parte de uno y otro (fig. 15), lo cual en nada hace variar lo establecido en n.^o 5.

9. Aunque la direccion de la luz puede ser cualquiera, en los dibujos geométricos aplicados á la industria se elige casi siempre de modo que sus rayos sean paralelos á la diagonal del cubo que tiene sus caras paralelas á los planos de proyeccion (figs. 2 y 2^{bis}), con lo que resulta que sus dos proyecciones $a^h b^h$, $a^v b^v$ forman con L T ángulos de 45°. Esta direccion tiene la propiedad, que si la naturaleza de la cuestion exige para su resolucion el uso de un tercer plano de proyeccion perpendicular á L T, la nueva proyeccion $a^r b^r$ si ha variado el plano vertical ó la $a^h b^h$ si ha cambiado el horizontal, forman tambien con las líneas de tierra trazadas, ángulos de 45°, lo cual permite poderla dibujar sin construccion previa.

Suele tambien emplearse una direccion de luz que forma ángulo de 45° con su proyeccion. Más adelante (35) haremos ver las ventajas que esta direccion puede proporcionar.

10. La determinacion gráfica de las sombras en un cuerpo, se reduce segun lo dicho á encontrar:

1.^o *La curva de contacto del cuerpo dado, con un cilin-*

dro circunscrito de generatrices paralelas á la direccion del rayo de luz; esta curva será la separacion de luz y sombra sobre este cuerpo y determinará por tanto la sombra propia.

2.º *La interseccion de este mismo cilindro con una superficie cualquiera, que será el contorno de la sombra arrojada por el cuerpo sobre ella.*

Ambas cuestiones han sido resueltas de un modo general en Geometría Descriptiva; así la determinacion de las sombras de los cuerpos debe mirarse como una de sus aplicaciones, sencillas en sí, porque muchas veces, las reglas allí expuestas pueden recibir notables simplificaciones segun la forma ó posicion de los cuerpos, como tendremos ocasion de ver en las siguientes aplicaciones á algunas figuras geométricas que pueden considerarse como los elementos de una construccion cualquiera.

Empezaremos por las más sencillas, resolviendo en cada una de ellas el problema siguiente: *Conocidas la forma y posicion de una figura, determinar su sombra propia, la arrojada sobre superficies cualesquiera y tambien las sombras que en ella puedan producir uno ó varios puntos, bien pertenezcan á la misma superficie ó le sean exteriores.*

§. II.

PUNTO.

11. En este ejemplo no debemos considerar al punto, tal como se le definió en Geometría Elemental, porque para que produzca sombra (5) es indispensable que tenga masa que intercepte rayos de luz; debemos, pues, mirarle como un volúmen cuyas dimensiones han llegado al límite de reduccion, pero sin dejar de ser tal volúmen;

un grano pequeño de arena, por ejemplo ⁽¹⁾. Aun de esta suerte considerado, el punto no presenta superficie apreciable, por lo que no cabe distinguir *línea de separación*, y por lo cual el punto carece de *sombra propia*.

El cilindro envolvente al cuerpo (8) se convierte en este caso en una recta paralela al rayo de luz que pasa por el punto, y á partir del cual se transforma en *rayo de sombra*. La *sombra arrojada* por el punto será pues la interseccion de esta paralela con la superficie que primero encuentre. Por esto el punto *a* (fig. 3), cuya posición hace que la paralela al rayo de luz encuentre primero al plano horizontal en su traza $\bar{a}$, se dice que arroja sombra sobre el plano horizontal en $\bar{a}$. Análoga construcción hace ver que el punto *b* la arroja sobre el plano vertical en $\bar{b}$. Como la paralela á la dirección del rayo de luz que pasa por el punto *c* encuentra *primera-*mente al plano P, paralelo al horizontal, la sombra que arroja sobre este plano el punto *c* tiene por proyecciones $\bar{c}^h \bar{c}^v$. Del mismo modo, si la paralela á la dirección del rayo de luz encuentra primero al plano Q, como sucede á la del punto *d*, la sombra arrojada por este punto sobre el plano será el punto de él $\bar{d}^h \bar{d}^v$.

En cada una de las figuras 10 y 11 el plano está dado por rectas que se cortan; la sombra $\bar{a}$ que sobre ellos arroja el punto *a* se obtiene, como hemos dicho, determi-

(1) Reconocida la realidad objetiva de la extension, así como sus caracteres de multiplicidad y continuidad, la vista de un punto indivisible, del punto *matemático*, es ciertamente una idea contradictoria: por abstraccion, sin embargo, merced á la que descomponemos un conocimiento adquirido y separamos mentalmente uno ó más elementos de los que siempre se hallan invariablemente unidos en nuestras nociones individuales, podemos tomar el punto por origen y base de exposicion, y más, teniendo en cuenta, que en los libros de enseñanza no se busca lo más filosófico, sino lo más útil para enseñar; razon por lo cual se ha distinguido siempre entre el método de enseñanza y el de invencion.

nando la interseccion del *rayo de sombra* correspondiente al punto *a* con dichos planos, problema resuelto en Geometría Descriptiva y cuya construccion indican las citadas figuras.

Las mismas consideraciones nos conducirían á determinar la sombra arrojada por un punto sobre una superficie cónica, cilíndrica, esférica, y en general cualquiera de generacion dada, como tendremos ocasion de ver al tratar de aquéllas en particular.

Concluiremos, pues, diciendo, que para conocer la situacion de la sombra arrojada por un punto dado, basta encontrar la *interseccion de la recta paralela á la direccion del rayo de luz que pase por dicho punto, con la primera superficie que se oponga á su prolongacion.*

§. III.

LÍNEAS.

12. Consideraciones análogas á las que hemos hecho al tratar del punto nos conducen á establecer, que de igual manera que aquél, las líneas no tienen *sombra propia*.

Línea recta.—Los rayos luminosos que se apoyan en la recta determinan un plano paralelo á la direccion del rayo de luz (Geometría Elemental), y su interseccion con otro plano cualquiera dará la *sombra arrojada* sobre éste por la recta dada. Una cualquiera de las paralelas al rayo de luz que se apoye sobre la recta propuesta determina con ésta el plano mencionado; esta regla general se simplifica por la consideracion de que, de la interseccion citada no necesitamos más que la parte comprendida entre las paralelas al rayo de luz que pasan por los puntos extremos de *ab* (fig. 4), cuya faja á partir de ella se llama

plano de sombra: así, en lugar de determinar el plano dicho para buscar su interseccion con el segundo P, es más breve *hallar las sombras arrojadas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ por los puntos extremos a y b y unirlos por una recta.*

Así lo hemos hecho con la recta ab de la figura 5; los puntos extremos arrojan sombra en $\bar{a}$ y $\bar{b}$, luego la recta ab arroja sombra sobre el plano horizontal segun $\bar{a}\bar{b}$.

La sombra arrojada por la recta cd (fig. 5), que toca perpendicularmente á la línea de tierra en c , pasará por este punto por ser c la traza del rayo de luz correspondiente al extremo c ; el otro extremo d arroja sombra en $\bar{d}'$ (11), luego la recta cd arroja sombra en el plano vertical y es $c\bar{d}'$.

13. La anterior construccion aplicada á la recta horizontal ab (fig. 6), nos dice que su sombra arrojada sobre el plano horizontal es la recta $\bar{a}\bar{b}$ igual y paralela á ab ; lo cual es fácil comprender si se observa que la recta ab es una horizontal del plano de sombra que ella determina y $\bar{a}\bar{b}$ una porcion de la traza horizontal de dicho plano. Podremos, pues, establecer en general que: *la sombra arrojada por una recta sobre un plano paralelo á ella es siempre igual y paralela á esta recta.*

14. En la figura 7 se observa; que el extremo a de la recta ab arroja sombra en $\bar{a}$ sobre el plano horizontal, mientras que el otro b la produce sobre el vertical en $\bar{b}'$, lo cual indica que una parte de la sombra arrojada por la recta ab está en el plano horizontal de proyeccion, entanto que otra parte está en el vertical. Para determinarla, basta la sencilla consideracion siguiente: si un plano de proyeccion, el vertical por ejemplo, no existiera, el punto b arrojaría sombra sobre el horizontal en $\bar{b}$ (11), y la sombra arrojada por la recta ab sería $\bar{a}\bar{b}$ (12), pero interponiéndose realmente el plano vertical,

la parte $\overline{c\bar{b}}$ no existe, pues que los rayos de sombra correspondientes habrán encontrado ántes al plano vertical, como se ve en el del punto $\bar{b}$ que lo encuentra en $\bar{b}'$: por otra parte, el punto $\bar{c}$ en que la sombra $\overline{a\bar{b}}$ encuentra á la línea de tierra, podemos mirarlo como un punto de sombra arrojada sobre el plano vertical, y como el $\bar{b}'$ es el otro, la parte de sombra sobre este plano será $\overline{c\bar{b}'}$ (12) y la total de la recta ab la línea angulosa $\overline{a\bar{c}\bar{b}'}$. Si se desea el punto de ab que arroja sombra sobre LT, bastará desde $\bar{c}$ trazar paralelas á las proyecciones del rayo de luz y darán el punto c^h, c^v .

La investigacion de la sombra arrojada por la recta mn (fig. 7) que se apoya sobre los dos planos de proyeccion, no puede ofrecer dificultad, porque siendo m y n las trazas de la recta, estos mismos puntos serán tambien las trazas del mismo nombre de los rayos de sombra que por ellos pasen. Si el plano vertical desapareciese, el punto n pasaría á ser uno cualquiera del espacio de proyecciones n^h, n^v , y su sombra sobre el horizonte sería $\bar{n}$ (11); y repitiendo las mismas consideraciones dichas al tratar de la recta ab , deduciremos que la sombra arrojada por la mn es la parte $m\bar{p}$ sobre el plano horizontal y la $\bar{p}n$ sobre el vertical. El mismo procedimiento nos llevaría á encontrar la sombra $q\bar{s}r'$ arrojada por la recta qr perpendicular á LT.

15. Por modo igual, la construccion aplicada á las rectas de la figura 8 hace ver, que la ab arroja sombra sobre el plano vertical desde $\bar{a}'$ á $\bar{b}'$ obedeciendo á la regla dada en n.º 13, la cd segun $\overline{c\bar{r}\bar{d}'}$ y la mn sobre el plano horizontal desde $\bar{m}$ á $\bar{n}$. Si la recta mn en vez de ser perpendicular al plano horizontal lo fuese al vertical, sus sombras respectivas nos conducirían á establecer la siguiente regla general: *Cuando una recta es perpendicular*

á uno de los planos de proyeccion, su sombra sobre este plano es paralela á la proyeccion del rayo de luz.

16. Si fuese un plano P cualquiera (fig. 9) el que interceptara la direccion del plano de sombra de la recta ab , la sombra arrojada sobre este plano por ella se obtendría uniendo por una recta las sombras $\bar{a}^h, \bar{a}^v, \bar{b}^h, \bar{b}^v$ arrojadas por sus extremos a y b sobre este plano (11).

Finalmente, la sombra arrojada por la recta mn , se deduce fácilmente, considerando, que si el plano Q no existiera, la recta mn arrojaría su sombra segun $\bar{m} \bar{r} \bar{n}'$ (14), pero interpuesto el plano Q la sombra hallada subsiste sólo en las porciones $\bar{m} \bar{p}$ y $\bar{q}' \bar{n}'$, lo cual indica que la definitiva es la $\bar{m} \bar{p} \bar{q}' \bar{n}'$.

17. La sombra arrojada por una recta sobre una superficie cualquiera se obtiene sin dificultad, encontrando la interseccion causada en esta superficie por su plano de sombra, y de lo cual nos ocuparemos en el lugar correspondiente.

18. La sombra arrojada por una línea poligonal, sea ó no plana, sobre una superficie exterior cualquiera, se obtiene hallando la sombra arrojada sobre dicha superficie por sus distintos lados.

19. La sombra arrojada por una línea curva sobre una superficie dada, se obtiene hallando las sombras arrojadas por sus distintos puntos. El problema admite simplificacion tratándose de la circunferencia de círculo y de la elipse, como veremos al tratar de las sombras arrojadas por las áreas que encierran estas curvas.

§. IV.

SUPERFICIES.

20. **Areas planas. Polígonos.**—Los rayos luminosos que se apoyan en los lados del polígono 1-2-3 (fig. 4),

determinan un prisma (8) cuya directriz es el mismo polígono 1-2-3. Por otra parte, se concibe fácilmente que si una cara de este polígono está iluminada la otra debe estar oscura, de modo que el perímetro 1-2-3 es verdaderamente la *línea de separacion de luz y sombra*. En *sombra propia* estará pues el reverso, ó sea la parte opuesta á la sobre que incida la direccion de la luz, fácil de conocer por reducirse á determinar la sombra arrojada por un punto sobre un plano (11). Así se ve que las caras iluminadas del polígono de la figura 10 son las visibles en ambas proyecciones.

La interseccion del prisma mencionado, que á partir del polígono 1-2-3 es un *prisma de sombra*, con un plano P, dará el contorno $\overline{1-2-3}$ de la sombra producida por el polígono 1-2-3 sobre este plano. Su construccion se consigue (fig. 10) determinando las *sombras arrojadas por los distintos lados del poligono*, como hemos dicho en n.^{os} 12 á 14.

21. Aplicada la anterior construccion al polígono 1-2-3 paralelo al plano horizontal (fig. 11), se observa que su sombra arrojada $\overline{1-2-3}$ es un polígono igual al propuesto; lo cual se concibe porque aquél y su sombra pueden mirarse como las intersecciones de un prisma por dos planos paralelos, y tambien como una consecuencia de la regla del n.^o 13.

Generalizando este caso podremos decir: que *la sombra arrojada por una figura plana sobre un plano que le sea paralelo es siempre igual á esta figura*.

22. Reduciéndose el problema de hallar la sombra arrojada por un área poligonal plana, á determinar las que arrojan los lados de su perímetro, el obtenerlas sobre superficies cualesquiera queda implícitamente resuelto con lo indicado en n.^{os} 17 y 18.

23. **Círculo.**—Todos los rayos de luz que se apoyan

en la circunferencia del círculo C (fig. 4) engendran una superficie cilíndrica (8) cuya directriz es la circunferencia misma, que por tanto es la *línea de separacion de luz y sombra*, porque es evidente que si una cara de este círculo está iluminada su reverso estará oscuro. La cara en *sombra propia* se distinguirá mediante las consideraciones expuestas en el n.º 11 por tratarse de un área plana.

La *sombra arrojada* tendrá por límite la curva interseccion del cilindro de sombra con el plano P, que puede construirse tomando sobre la circunferencia un cierto número de puntos *m, n, p, q,...* etc. (fig. 4), y las sombras arrojadas por ellos sobre el plano determinarán el contorno buscado $\overline{m} \overline{n} \overline{p} \overline{q}$ etc.

Siendo circular la directriz de este cilindro, su interseccion con el plano P es una elipse ó círculo, lo cual hace que su construccion pueda obtenerse por medios más sencillos, como se indica en los siguientes ejemplos.

24. En la figura 12, el círculo, que tiene una posición cualquiera respecto los planos de proyeccion, está dado por su centro o^h, o^v y la elipse $1^h-2^h-3^h-4^h$ en el plano horizontal; con lo cual á la vez que se tiene la magnitud 1^h-2^h del diámetro del círculo dado se puede construir su proyeccion en el plano vertical que es otra elipse (1).

(1) En la elipse del plano vertical son diámetros conjugados las proyecciones verticales correspondientes de los $1^h-2^h, 3^h-4^h$ toda vez que estos son proyecciones de dos diámetros perpendiculares del círculo del espacio (Geometría Descriptiva).

La sola elipse $1^h-2^h-3^h-4^h$ proporciona todos los datos necesarios para determinarlos; en efecto:

El eje mayor 1^h-2^h siendo proyeccion del diámetro horizontal del círculo, se proyecta verticalmente segun 1^v-2^v paralelo á L T.

El eje menor 3^h-4^h que es la proyeccion del diámetro del círculo que coincide con la máxima pendiente horizontal de su plano, no suministra él solo datos suficientes para deducir su correspondiente proyeccion vertical, por lo que tendremos que proporcionarnos otra recta tal como el diámetro $a^h b^h$ pa-

Conocidas las dos proyecciones del círculo, para construir la elipse sombra arrojada sobre cualquier plano, bastará tener dos diámetros conjugados de ella, que obtendremos segun se ha visto en Geometría Descriptiva, eligiendo del círculo del espacio los extremos de dos diámetros perpendiculares ⁽¹⁾: tales son en la figura los 1-2, 3-4 de las elipses proyecciones: buscando pues las sombras arrojadas por los cuatro puntos 1, 2, 3, 4 (11), la elipse cuyos diámetros conjugados sean $\overline{1-2}$, $\overline{3-4}$ es la sombra producida por el círculo dado, sobre el plano horizontal. Esta razon es la que nos ha dispensado de dibujar la elipse de la proyeccion vertical.

25. En la figura 13 el círculo es perpendicular á los dos planos de proyeccion, y así se proyecta sobre ellos segun dos diámetros perpendiculares á la línea de tierra. Esta posicion especial en nada hace variar las construcciones ántes dichas para hallar su sombra arrojada, siendo necesario únicamente un rebatimiento del plano del círculo ó una nueva proyeccion tal como la vertical segun L' T' que hemos elegido como más sencilla, para tener bien determinadas las proyecciones de varios puntos de la circunferencia del círculo si se desea aplicar el proce-

ralelo á L T que, por corresponder al diámetro del círculo paralelo al plano vertical, se proyecta sobre éste en su verdadera magnitud; luego se obtendrá cortando las proyectantes que se levanten de a^h y b^h por arcos de círculo de centro o^v y rádio o^h-r^h que es el del círculo.

Definido ya el plano del círculo por las dos rectas que se cortan 1-2 y $a-b$, muchos medios se ocurren para construir en direccion y magnitud la proyeccion vertical correspondiente á la 3^h-4^h. En nuestra figura hemos trazado por el punto 1 la paralela á la 3-4, cuya proyeccion horizontal 1^h-n^h encuentra á la prolongacion de a^h-b^h en n^h y su proyeccion vertical correspondiente n^v permite conocer la direccion 1^v-n^v . La paralela á ella trazada por o^v y limitada por las proyectantes que se levantan de 3^h y 4^h determinará el diámetro 3^v-4^v conjugado del 1^v-2^v, y ellos la elipse proyeccion vertical del círculo del espacio.

(1) No se olvide que estamos buscando la interseccion del cilindro de sombra correspondiente al círculo dado con un plano.

dimiento dicho en el n.º 23, ó los extremos de dos diámetros perpendiculares si se quiere seguir el indicado en el n.º 24; hemos, pues, empleado una simplificación del último procedimiento, determinando primero la traza horizontal o_1 de la paralela al rayo de luz que pasa por el centro o ; luego, buscando en la proyección auxiliar dos diámetros perpendiculares y fijando las sombras arrojadas $\bar{1}$ y $\bar{2}$ por un extremo 1 y 2 de cada uno de ellos; y, por último, uniendo estos puntos $\bar{1}$ y $\bar{2}$ con o_1 y prolongando estas rectas cantidades iguales, hemos obtenido los diámetros conjugados $\bar{1}-\bar{a}$ y $\bar{2}-\bar{b}$ de la elipse sombra (¹).

(¹) Siendo la elipse una curva empleada muy frecuentemente en el trazado de sombras, no estará fuera de lugar recordar su construcción cuando se tengan de ella los ejes ó un sistema de diámetros conjugados así como para pasar de unos á otros. Suponemos conocidos los principios en que se fundan cada una de las que vamos á exponer.

Construir una elipse conocidos sus dos ejes.—Entre los diversos medios que se usan en el dibujo, indicaremos el que parece más ventajoso, por no exigir ninguna línea auxiliar.

Sobre una cinta de papel X (fig. 32) que tiene uno de los lados rectilíneo, se marca una longitud ea igual al semieje mayor y otra eb igual al semieje menor; de este modo ab expresa la diferencia de los semiejes. Se coloca luego esta cinta X de modo que el punto b se encuentre sobre la dirección del eje mayor y el punto a sobre la del menor; la posición del punto e dará un punto de la elipse. Haciendo mover esta cinta de modo que siempre los dos puntos a y b estén sobre las rectas indicadas, el punto e señalará sucesivamente diferentes puntos de la curva que podrán reunirse por un trazado continuo.

Igualmente, si á partir de un punto e del borde de una cinta de papel Z cortada como la anterior en línea recta, se toma la longitud del semieje mayor de e á a , y el del semieje menor de e á b , con lo cual la porción ab será igual á la suma de los semiejes, y hacemos mover esta cinta Z de manera que las dos extremidades a y b estén siempre, la a sobre la dirección del eje menor y la b sobre la del mayor, el punto e indicará distintos puntos de la elipse pedida.

Construir una elipse, conocidos dos diámetros conjugados en magnitud y dirección.—Sean (fig. 33) AA' y BB' los diámetros conjugados; fórmese con los semidiámetros el paralelogramo $oAPB$, divídase el lado BP en un cierto número de partes iguales, y en igual número el oB ; tírense las rectas prolongadas A'm', A'n', A'p', A'q'... y las Am'', An'', Ap'', Aq'',... los puntos $m, n, p,$

En las figuras 12 y 13 las elipses cortan á la línea de tierra, lo cual indica que los círculos dados arrojan sombra sobre ambos planos de proyeccion; para obtener la total, basta construir las sombras que dichos círculos arrojarían sobre cada plano de proyeccion en el supuesto de que no existiera el otro, y dibujar luégo las porciones de ambas elipses situadas en la parte visible; como comprobacion del dibujo, deben pasar ambas elipses por los mismos puntos de la línea de tierra, porque geométricamente hablando, ellas son la interseccion de un cilindro con dos planos que se cortan. Si se quiere saber cuales son los puntos del círculo que arrojan sombra sobre LT, bastará trazar por $\bar{p}$ y $\bar{q}$ paralelas á la direccion de la luz hasta su encuentro con las proyecciones del círculo, eligiendo de los dos puntos en que cada proyeccion corta á aquél, el correspondiente, que se conocerá comparándolo con el eje del cilindro de sombra. Esta cons-

$q, r, \dots$ en que se cortan cada dos rectas correspondientes, son puntos de la elipse. Del mismo modo pueden construirse las otras tres partes de la elipse, ó tambien pueden deducirse de la ya construida por simetría.

Conocidos dos diámetros conjugados de una elipse, determinar sus ejes.—Sean $a' b'$ y $c' d'$ (fig. 34) los diámetros conjugados dados. Por un extremo de cualquiera de ellos, el a' del $a' b'$, por ejemplo, se traza una paralela al otro y se levanta á esta HK una perpendicular $a' O$ igual al otro semidiámetro $o c'$; desde O como centro se describe la circunferencia de radio $O a'$, se unen los dos centros por una recta $O o$ y del medio r de ésta se tira una perpendicular que cortará á HK en un punto s , tomando este punto s por centro se describe una circunferencia con radio so que pasará tambien por el otro centro O y cortará á HK en puntos m y n ; obteniéndose ya las direcciones de los ejes con sólo unir con el o cada uno de los m y n así determinados. Para limitarlos bastará trazar $O m$ y $O n$, y dirigir desde A y B paralelas á $O o$ que cortarán la direccion del eje mayor en a y b , y desde C y D otras paralelas á la misma $O o$ hasta encontrar á la direccion del eje menor en los puntos c y d ; las porciones ab y cd serán los ejes de la elipse correspondiente al sistema de diámetros conjugados dados $a' b'$ y $c' d'$.

A pesar de estas sencillas construcciones, nos creemos en el deber de advertir que en la mayoría de los casos, la práctica aconseja como procedimiento más breve para encontrar las sombras arrojadas de círculos, el indicado en el n.º 23.

truccion debe aplicarse en cuantas ocasiones de esta naturaleza ocurran; en las figuras citadas los puntos de la circunferencia son los p y q y no los r y s .

26. Si el círculo es paralelo á un plano de proyeccion, al horizontal, por ejemplo (fig. 14), originará sobre este plano una sombra circular de rádio igual al del círculo dado; así lo dice la inspeccion de la figura 4 y es tambien una consecuencia de la regla dada en el n.º 21, por manera que la cuestion en este caso queda reducida á encontrar la traza horizontal o_1 de la paralela al rayo de luz que pase por el centro o del círculo dado, que es el eje del cilindro de sombra, y de este punto como centro describir un círculo de rádio igual al dado.

27. Si el área dada estuviese limitada por una elipse, el procedimiento para encontrar su sombra arrojada sería exactamente el mismo que los anteriormente expuestos.

La sombra arrojada por un punto ó línea sobre un círculo ó elipse, se obtiene por el medio indicado al tratar de un área plana (11).

Las sombras arrojadas por un círculo, elipse ó área cualquiera sobre otras figuras dadas, se obtienen determinando las que producen sobre ésta los distintos puntos de la curva que limita el área, como tendremos ocasion de ver para la circunferencia al tratar de las sombras en los conos, esferas ó cilindros huecos. Pudiera hallarse tambien encontrando la interseccion de la superficie con el cilindro de sombra correspondiente, procedimiento explicado en general en Geometría Descriptiva al tratar de las intersecciones de superficies entre sí.

§. V.

CUERPOS.

28. Cuerpos limitados por superficies planas. Poliedros.—Las caras de un poliedro (fig. 15), toda vez que

son planas, se hallarán, por ser los rayos luminosos paralelos entre sí, ó enteramente oscuras ó por completo iluminadas, á ménos que no reciban sombra arrojada por algun cuerpo exterior.

Así las aristas de un poliedro pueden clasificarse de la manera siguiente:

1.º *Iluminadas*, que provienen de la interseccion de dos caras iluminadas;

2.º *Oscuras*, que resultan de la interseccion de dos caras en sombra;

3.º *De separacion*, que son las de interseccion de una cara iluminada con otra oscura.

El conjunto de estas últimas líneas determina por tanto sobre su superficie, la *sombra propia* del cuerpo.

29. Toda la dificultad consiste, pues, en saber encontrar sobre el poliedro la línea de separacion de luz á sombra, porque la arrojada por ella, considérese ó no como directriz del prisma de sombra, fija el contorno de la que produce el poliedro (18, 20).

30. La regla general para conocer esta línea de separacion, que como se ve es la línea poligonal de contacto entre la superficie del poliedro y la formada por generatrices rasantes á él y paralelas á la direccion del rayo de luz, ha sido dada ya en Geometría Descriptiva, pues el problema actual es no más que un caso particular del de interseccion de superficies, sinó que en vez de buscarse como allí interseccion se necesitan en este caso contactos.

Las construcciones serán pues las siguientes (fig. 16): cortar el poliedro y prisma envolvente por un plano vertical auxiliar R paralelo á la direccion del rayo de luz, el cual causará en el poliedro el polígono $\alpha\beta\gamma\theta\pi\delta$ y en el prisma la infinidad de rayos que resulten encontrarse en este plano, limitados por los dos extremos $m\alpha$ y $n\theta$ rasantes al poliedro; para evitar confusion en la figura 16, está trasladada paralelamente la seccion causada por el

plano R á la figura 16^{bis}, y en ella es fácil reconocer, que las caras del poliedro en que están los lados $\alpha\delta$, $\delta\gamma$, $\gamma\theta$ de la interseccion se hallan iluminadas, miéntras que las caras correspondientes á las secciones $\theta\pi$, $\pi\delta$, $\delta\alpha$ se encuentran en sombra porque un rayo luminoso no podría llegar á ellas más que atravesando la masa del cuerpo (3-2.º pr.º), que no es posible por tratarse de un cuerpo opaco (3-3.ª). Las aristas, pues, 8-9 y 3-4 de los puntos α y θ pertenecen á la línea de separacion de luz á sombra; así como las que contienen los puntos δ y γ están iluminadas y las de los puntos π y δ son oscuras.

Empleando nuevos planos auxiliares paralelos al R convenientemente elegidos y haciendo en las secciones que ellos produzcan en el poliedro las consideraciones que acabamos de indicar para el plano R, podríamos fácilmente clasificar todas las aristas del poliedro, de cuyo exámen deduciríamos que la *línea de separacion* en la figura citada pasa por los vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

A fin de que esta clasificacion se haga con la brevedad posible, conviene elegir los planos auxiliares de modo que intercepten el mayor número de aristas.

La *sombra arrojada* por el poliedro se obtiene hallando la arrojada por los distintos lados de la línea de separacion (30, 18), cuya construccion en la figura hace ver se extiende por los dos planos de proyeccion.

Con el empleo tambien de un plano proyectante, se determina igualmente la sombra a que un punto a produce en el poliedro, que como se sabe, es la interseccion del rayo de sombra de este punto con la superficie del mismo: la construccion necesaria está en la figura citada.

La que originaría una recta, sería la interseccion que en él causara el plano de sombra correspondiente; pero tambien puede obtenerse, determinando las sombras arrojadas por dos de sus puntos sobre cada cara y uniendo

por rectas estas sombras, debiendo concurrir en un punto de la arista las que resulten estar en caras adyacentes, lo que permite asegurarse de la exactitud de la construcción. Finalmente, la sombra arrojada por una línea curva se construye hallando las que producen sus distintos puntos y es la intersección del poliedro con el cilindro de sombra correspondiente á la línea dada.

Las anteriores reglas, que son generales, pueden simplificarse segun la forma y posición del cuerpo, como vamos á ver en los siguientes ejemplos.

31. Pirámides.—El prisma envolvente (28), para la posición de la figura 17, se reduce á dos planos paralelos á la dirección de la luz, y las aristas de la pirámide que toquen á estos planos serán las de *separación de luz á sombra*; para determinarlas basta considerar, que los dos planos por pasar por el cúspide de la pirámide se cortan segun la paralela al rayo de luz que pasa por él, por lo que si de su traza horizontal $\bar{c}$ se tiran dos rectas $\bar{c}-1$, $\bar{c}-3$ ⁽¹⁾ rasantes al polígono de la base, estas rectas serán las trazas horizontales de los dos planos que sustituyen al prisma de sombra; las aristas de apoyo $c-1$, $c-3$ son pues las que indican que las caras $1-c-2$, $2-c-3$ están oscuras y constituyen por tanto la *sombra propia* de la pirámide.

La *sombra arrojada* se obtiene hallando la que produce la línea de separación $1-c-3$ sobre la primera superficie que se interponga; en la figura es el contorno $1-\bar{c}-3$ sobre el plano horizontal (12), el mismo que han determinado las trazas de los planos que han hecho conocer la línea de separación.

La sombra que un punto α pueda arrojar sobre la pirámide se encuentra como se ha indicado al tratar de un poliedro (30), pero es más sencillo emplear el plano auxiliar que determinan el rayo de sombra correspondiente

(1) La notación 3^h de la figura 17 debe ser 3.

al punto dado a y la paralela á él que pasa por el cúspide c , cuyo plano produce la interseccion bc con una cara iluminada sobre la cual está el punto $\bar{a}$ sombra arrojada por el punto a .

La sombra que una línea recta ó curva pudiera arrojar sobre la superficie de una pirámide, se construye sin dificultad, toda vez que esta figura es un caso particular de un poliedro.

32. Si la base de la pirámide no estuviera en el plano horizontal, las aristas de separacion las determinarían rasantes al polígono de la base tiradas desde el punto de interseccion de su plano con la paralela al rayo de luz que pasara por el cúspide de la pirámide (Geometría Descriptiva), ó aplicando la regla general para un poliedro cualquiera (30) si resultara su construccion más sencilla.

Así, en el tronco de pirámide de bases paralelas al plano horizontal representado en la figura 18, la línea de separacion la hemos deducido: 1.º tirando por el cúspide c la paralela al rayo de la luz, 2.º buscando la interseccion d de esta paralela con el plano de la base y 3.º tirando desde d^h las dos rectas d^h-1^h , d^h-5^h que toquen á la base de la pirámide; las aristas 1-2, 4-5 que pasan por los puntos 1 y 5 son las que determinan la línea de separacion en la superficie lateral. Como la situacion particular de las dos bases hace ver facilmente que la inferior está oscura y la superior iluminada, la total *línea de separacion* del tronco de pirámide representado, es la de las aristas que determinan los vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6, lo cual permite en seguida distinguir las caras iluminadas de las oscuras, es decir la *sombra propia*.

La *sombra arrojada* puede obtenerse siguiendo las construcciones hechas en los núms. 12 á 15, ó más brevemente hallando solo las sombras arrojadas $\bar{1}$ y $\bar{4}$ de un vértice cualquiera 1 de la base inferior y otro 4 de la

superior y construir, á partir de estos puntos, líneas poligonales respectivamente iguales y paralelas á las dos bases que son líneas de separacion de luz y sombra (21).

33. Prismas. (Fig. 19.)—El lugar geométrico de todos los rayos luminosos rasantes á un prisma hace ver, que dos planos paralelos á la direccion del rayo de luz y que le toquen segun una arista, bastan para determinar la línea de separacion de luz á sombra. Esta se conseguirá pues por el órden de operaciones siguiente:

1.^a Por un punto arbitrario m , trazaremos una paralela á la direccion del rayo de luz y otrá á las aristas del prisma; el plano que ellas determinan es paralelo á los dos ántes mencionados.

2.^a Construiremos la interseccion nr de este plano con el de la base del prisma, que en la figura es su traza horizontal.

3.^a Tirando dos paralelas $1-2$ y $5-4$ ⁽¹⁾ á la nr y que toquen á la base del prisma, tendremos las trazas horizontales de los dos planos primeros. Las aristas 1-2, 4-5 del prisma, que están en estos planos, son de la línea de separacion de luz á sombra sobre su superficie lateral; y como la base superior en la figura está iluminada (20), resulta que la línea que separa las caras iluminadas de las oscuras y que determina por tanto la *sombra propia* del prisma, pasa por los puntos 1, 2, 3, 4, 5. Construyendo la sombra producida por esta línea de separacion (18), se tendrá determinado el contorno $1-2'-3'-4'-5$ de su sombra arrojada.

La sombra que un punto, α , arroja sobre el prisma, es el punto $\bar{\alpha}$ de la interseccion de esta superficie con el rayo de sombra correspondiente, el cual puede determinarse, como para una pirámide se ha dicho, siguiendo la construccion dada para este caso es un poliedro (30),

(1) La notacion 5^h de la figura 19 debe ser 5.

pero es más sencillo y conforme á las reglas de Geometría Descriptiva, imaginar por el rayo de sombra un plano paralelo á las aristas del prisma, cuya traza horizontal se obtiene tirando por a , la a, b paralela á nr ; cuyo plano corta á la cara iluminada del prisma segun la recta $b\bar{a}$ paralela á las aristas, y su interseccion con el rayo de sombra del punto a da el punto $\bar{a}$ que se pide.

34. La figura 20 representa un prisma proyectante recto, elevado sobre el plano horizontal é iluminado segun la direccion $a^h b^h$, $a^v b^v$.

Los planos de apoyo con el prisma y paralelos á la direccion de la luz, siendo perpendiculares al horizontal, tendrán sus trazas cd y gk paralelas á la proyeccion horizontal $a^h b^h$ de la direccion de la luz. Las aristas de contacto 1-2, 5-6 serán las de separacion en la superficie lateral, y como la base superior está iluminada y la inferior oscura (20), la total línea de separacion que determina la sombra propia del cuerpo, pasa por los vértices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

La sombra de cada uno de estos puntos, determinará el contorno de la arrojada por el prisma; pero estando las bases en planos paralelos al horizontal, basta (21) determinar la sombra arrojada $\bar{6}-\bar{5}$ por una arista lateral 6-5 (15) y construir á partir de sus extremos, líneas poligonales respectivamente iguales y paralelas á las 2-3-4-5 y 6-7-8-1.

35. Hemos elegido en este ejemplo la direccion de la luz formando 45° con el plano horizontal de proyeccion, para dar á conocer las propiedades que tiene y simplificaciones que proporciona en los dibujos esta inclinacion que la hacen preferible en muchas ocasiones.

Las más importantes son:

1.ª No determinándose las proyecciones de la direccion del rayo de luz, puede elegirse á voluntad la horizontal $a^h b^h$, de manera que resulten bien iluminadas

determinadas partes del objeto con preferencia á otras ménos importantes, ó tambien para que las diversas sombras arrojadas se destaquen unas de otras á fin de producir el mejor efecto posible en el conjunto del dibujo.

2.^a El rebatimiento del rayo de sombra correspondiente á un punto cualquiera 2, ó el ser $a^h b^h = a^v s$, hace ver que son $xb = xy$ y $xa = xz$ y en general, *la sombra arrojada por un punto sobre el plano de proyeccion con quien el rayo de luz forma 45° ó sobre todo otro plano que le sea paralelo*, se encontrará separada de la proyeccion del punto una cantidad igual á la distancia que existe entre este punto y *el plano sobre el cual su sombra es arrojada*; propiedad notable que proporciona muchas simplificaciones cuando se han de construir sombras arrojadas por los cuerpos.

36. De las anteriores propiedades se deduce, que un objeto cualquiera tal como el prisma representado en la figura 20, estará completamente definido *con solo darse su proyeccion horizontal y la sombra arrojada* trazada, como está, segun un rayo de luz inclinado 45° ; porque la longitud de las sombras $6-6$, $5-5$, etc. indican la altura exacta á que se encuentran sobre el plano horizontal los puntos correspondientes proyectados en 6, 5, etc., conociéndose así la tercera dimension del objeto, que no podía darla la sola proyeccion horizontal; esto permite así apreciar muy facilmente las alturas del objeto representado en una sola proyeccion.

37. **Cuerpos limitados por superficies curvas.** — **Cono.** — Considerando la superficie cónica como límite de una pirámide, se determinan las sombras siguiendo el procedimiento explicado al tratar de ella (31 y 32); puede, sin embargo, hacerse más directamente con solo tomar en cuenta el conjunto de los rayos luminosos que pasan rasantes al cono (fig. 15), deduciéndose como inmediata consecuencia, lo mismo que en el primer caso, que la

superficie envolvente (30) se compone de dos planos tangentes á aquél paralelos á la direccion de la luz, y de una canal cilíndrica que tiene por directriz la porcion de curva de la base que determinan las generatrices de contacto de los dos planos tangentes. Es evidente, por tanto, que tan luégo como estas $c-1$, $c-3$ sean determinadas, lo estará la porcion de arco de la base $1-2-3$.

Sea (fig. 21) el cono de cúspide c y base circular situada en el plano P , de centro o y radio dado (¹). Representado el cono por sus contornos aparentes, la determinacion de las generatrices de separacion se consigue *encontrando las de contacto de los planos tangentes paralelos á la direccion de la luz*, problema que ha sido tambien resuelto en Geometría Descriptiva, por lo que ahora nos limitamos á seguir la construccion correspondiente, que consiste: en trazar por el cúspide c la paralela al rayo de luz y hallar su interseccion d con el plano de la base; las tangentes $d-1$, $d-3$ dan las generatrices de contacto buscadas $c-1$, $c-3$, y como la base está en sombra (23), la línea $c-1-a-b-2-a-3-c$ será la de separacion y determinará la *sombra propia* del cono; la *arrojada* por él la limitará el contorno de la producida por esta línea, que no se ha representado en la figura por no hacer confuso el dibujo, y porque no puede ofrecer dificultad atendido á que las partes arrojadas por $c-1$, $c-3$ se encuentra segun las reglas dichas para la recta (12 á 15) y la de la parte $1-a-b-2-a-3$ por las dadas para el círculo (23 á 26). Se

(¹) El dibujo de las elipses proyecciones del círculo de la base del cono, que ha sido ya explicado en Geometría Descriptiva, se ha hecho: en la proyeccion horizontal, empleando un nuevo plano vertical, perpendicular al del círculo, con lo que los ejes de la elipse en el plano horizontal son, el eje mayor el $b^h b^h$, igual al doble radio $o^v a^v$ del círculo, y $a^h a^h$, proyeccion horizontal del diámetro $a^v a^v$, el eje menor; y del mismo modo, con el auxilio de un nuevo plano horizontal, perpendicular tambien al del círculo se obtienen igualmente los dos ejes $n^v n^v$, $m^v m^v$ de la elipse segun la cual el círculo dado se proyecta sobre el plano vertical.

comprobará la construccion viendo si las sombras arrojadas por las generatrices $c-1$, $c-3$ resultan tangentes al arco de elipse que se obtenga para sombra arrojada por el arco $1-2-3$, cuya propiedad debe verificarse cualquiera que sea la posicion que el cono pueda tener.

Aplicando lo que acabamos de decir al cono recto de la figura 22, se tiene la sombra propia determinada por la línea de separacion $\overline{c-1-2-b-3-c}$ y la arrojada sobre el plano horizontal $\overline{c-1-2-3-c}$ siguiendo lo expuesto en el núm. 12 para las generatrices $c-1$ y $c-3$ y lo explicado en núm. 26 para la arrojada por la porcion circular $1-2-b-3$; ó más sencillamente del siguiente modo, que se deduce de las construccioncs anteriores, y consiste en determinar la sombra arrojada $\overline{c}$ por el cúspide del cono así como la $\overline{1-2-3}$ del círculo de su base (26), y trazar desde $\overline{c}$ dos tangentes á este círculo, con lo que tambien quedan señaladas las generatrices $c-1$, $c-3$ de separacion.

Si se quiere construir la *sombra arrojada* sobre el cono por un punto exterior a , lo que se reduce á hallar la interseccion del rayo de sombra correspondiente á este punto con el cono, se trazarán los dos rayos cd y aa_1 , que determinan un plano que contiene el cúspide y el punto dado: este plano, cuya interseccion con el de la base del cono es a_1d , corta á la superficie en la parte iluminada segun la generatriz cb , y su interseccion con el rayo de sombra aa_1 , determina el punto $\overline{a}$ que es la *sombra arrojada* por el punto a sobre el cono.

La sombra arrojada por una línea sobre la superficie cónica, será consecuencia de la de cada uno de sus puntos que sabemos ya determinar; si fuera recta, solo sería preciso hallar la interseccion con el cono, del plano de sombra correspondiente.

38. Observaciones.—1.^a Las anteriores construccioncs se simplificarían si el cono considerado descansara por su base sobre el plano horizontal, pues el punto d

pasaría á ser la sombra arrojada por el cúspide y las dos tangentes $d-1$, $d-3$ determinarían ellas solas la sombra arrojada por el cono, puesto que la línea de separacion sería únicamente $1-c-3$ toda vez que la base no podría arrojar sombra, quedando así reducida la construccion á una análoga á la empleada para la pirámide de la figura 17 (31).

2.^a Si el punto d resulta dentro del círculo de la base del cono, indicará que su superficie lateral se encuentra toda iluminada y no arrojará sombra sobre el plano horizontal.

39. Si el cono recto tiene una posicion inversa del de la figura 22, debe distinguirse si es sólido ó hueco.

En el primer caso (fig. 23), la determinacion de su sombra propia y la arrojada se consigue por los mismos medios explicados en el caso precedente, como deducidos que son de las consideraciones hechas para un cono en una posicion cualquiera (37). Las construccionen serán pues: tirar por el cúspide c la paralela al rayo de luz prolongada hasta su encuentro d con el plano de la base, y trazar desde este punto d , dos tangentes $d-1$, $d-3$ á la circunferencia de la base que fijarán las generatrices de separacion $c-1$, $c-3$; como la base del cono está iluminada (23), la total línea de separacion que determina la *sombra propia* es la $c-1-2-3-c$.

El contorno de la *sombra arrojada*, siendo el producido por la línea de separacion, se obtiene por partes segun las reglas explicadas en los números 14, 24 y 26.

Finalmente, la sombra a que un punto exterior a arroja sobre el cono, se encuentra siguiendo exactamente la construccion explicada para este mismo caso en el ejemplo anterior, por cuya circunstancia nos creemos dispensados de repetirla. La figura 23 está anotada igualmente que la 22 para que la explicacion de aquélla convenga á ésta.

40. **Cono hueco.**—Consideremos el tronco de cono hueco de la figura 23^{bis} (1). La superficie cilíndrica de generatrices paralelas al rayo de luz (30) se compone de dos hojas bien distintas; una formada, como en el caso anterior, por los rayos tangentes á la superficie exterior que determina, como allí, la línea de separacion de luz á sombra de la parte convexa. La otra hoja cilíndrica la constituye la canal formada por los rayos que se apoyan en una porcion de la circunferencia interior de la base del cono, y su interseccion con la superficie cóncava de él, determina el contorno de la sombra arrojada por ella dentro del cono.

La línea de separacion sobre la superficie convexa del tronco de cono así como la sombra arrojada por ella, se obtiene como se ha dicho para un cono sólido (39), con la variacion consiguiente á tener la figura que nos ocupa la base menor en sombra (23), lo cual permite no dibujar la construccion que haría confusa la figura.

La parte hueca de la figura 23^{bis} está limitada por una superficie cónica colocada de igual modo que la del ejemplo anterior; la determinacion de la línea de separacion en ella se obtendrá, por consiguiente, segun la construccion allí dicha (39): trazaremos, pues, por el cúspide c la paralela cd á la direccion del rayo de luz, desde el punto d de interseccion con el plano de la base tiraremos las dos tangentes $d-1$, $d-3$ y la línea de separacion sobre la superficie cóncava será la $c-1-\delta-2-\lambda-3-c$; de ella, el arco $1-\delta-2-\lambda-3$ es el que arroja sombra en el interior del cono, por lo que las generatrices $c-1$, $c-3$, que fijan los extremos de este arco, no tienen la importancia que en el caso anterior.

La *sombra arrojada* por el arco $1-\delta-2-\lambda-3$ se obtiene

(1) Representamos la proyeccion vertical cortada por un plano que pasa por el eje, para que pueda ser visible la sombra en el interior del cono, toda vez que sus paredes son opacas.

determinando la que producen sus distintos puntos (37), y para conocer la que origina uno de estos, basta fijarse en que para tener la causada por un punto exterior a en una posicion cualquiera del espacio, debemos aplicar la construccion dada en número 37, sirviendo aquella explicacion para la figura actual, á cuyo fin se han colocado las mismas letras en el detalle de la construccion. Repitiendo ésta para los distintos puntos del arco 1- δ -2- λ -3, que son posiciones especiales del a , tendremos la sombra arrojada en el interior del cono. Así para un punto m construiremos:

1.º Las paralelas al rayo de luz $m\bar{m}$ y cd que pasan por el punto que se considera y el cúspide del cono.

2.º La interseccion dmn del plano de las dos paralelas anteriores con el plano de la base del cono, interseccion que se obtiene directamente en este caso uniendo el punto que se considera con el d^h .

3.º La generatriz cn segun la cual el plano de estas dos paralelas corta á la parte iluminada del cono; y finalmente, la interseccion de cn con el rayo de sombra $m\bar{m}$, lo que dará el punto $\bar{m}$ sombra del punto m .

Por último, para fijar el contorno de la sombra que pueda arrojar alguna porcion del arco 1- δ -2- λ -3 sobre el plano de la base menor del tronco de cono, así como para averiguar que parte de este arco 1-2-3 la origina, basta considerar, que siendo paralelos el arco 1-2-3 y este plano, la sombra arrojada por él será un arco de círculo de igual rádio que el 1-2-3 (26). Es suficiente, pues, trazar por el punto o de la base superior la paralela al rayo de luz y su interseccion o_1 con el plano de la base inferior; la parte $\delta\bar{\lambda}$ del arco $\alpha\beta$ descrito con centro o_1 y rádio $o^h n^h$ es la sombra arrojada por la parte $\delta\lambda$ del arco 1-2-3 sobre dicha base. Segun la forma del tronco de cono, así el arco $\alpha\beta$ cortará, será tangente interior ó exteriormente ó quedará exterior al círculo de

la base inferior; el primer caso lo indica la figura, en el segundo todo el tronco de cono estará iluminado excepto la generatriz de tangencia y en los dos últimos casos toda la base inferior estará en sombra.

Una série de excavaciones, en la forma que afecta la figura 23^{bis}, y cuyos ejes cortan al terreno segun una disposicion especial, constituyen el obstáculo conocido en fortificacion con el nombre de pozo militar ó pozos de lobo.

41. Cilindro.—Cualquiera que sea la posicion de un cilindro en el espacio (fig. 15), podrá determinarse su sombra ya se la considere como límite de un prisma ó bien imaginando la forma de la superficie que constituyen los rayos luminosos rasantes á aquélla (30), de ámbas maneras se observa que está formada de dos planos paralelos á la direccion de la luz tangentes al cilindro, y de dos canales cilíndricos cuyas concavidades se miran y cuyas directrices son las porciones de arcos de las bases del cilindro limitados por las generatrices de contacto de los citados planos tangentes. La línea de separacion será pues conocida cuando lo estén estas generatrices, las cuales se obtienen siguiendo el procedimiento explicado en Geometría Descriptiva para construir planos tangentes á un cilindro paralelos á una recta dada.

Aplicando lo dicho al cilindro oblicuo de base circular de la figura 24 (1), la línea de separacion de luz y sombra resulta de las construcciones siguientes:

(1) Las elipses proyecciones del círculo de la base del cilindro, se han dibujado: la del plano horizontal, trazando las proyecciones horizontales de la horizontal y máxima pendiente de este nombre del plano P, que pasan por la proyeccion o^h del centro, y tomando sobre la primera $o^h\alpha=o^h\delta$ igual al radio del círculo, se tiene el eje mayor $\alpha\delta$ de la elipse que se busca: trasportando luego $o\sigma$ de o^h hasta ω se tiene el rebatimiento $\pi\omega$ de la máxima pendiente horizontal, y tomando en ella $\omega\lambda$ igual al radio del círculo, y deshaciendo el rebatimiento, el punto λ irá á δ , y prolongando $o^h\delta$ hasta $o^h\lambda=o^h\delta$ se tiene el

1.^a Por un punto cualquiera m se trazan las rectas mg y ml respectivamente paralelas á las generatrices del cilindro y rayo de luz.

2.^a Se encuentra la interseccion nr del plano de las dos rectas que pasan por m con el plano P de la base del cilindro.

3.^a Se trazan dos tangentes cd , gk á la base del cilindro y paralelas á la citada interseccion nr : los puntos de tangencia 1 y 3 determinan las generatrices 1-6, 3-4 de contacto de los planos tangentes al cilindro paralelos á la direccion de la luz.

Como en la figura está en sombra la base inferior y la superior iluminada (23), la total *línea de separacion* sobre el cilindro será la 1-2-3-4-5-6. Determinada por ésta la *sombra propia*, la *arrojada* por el cilindro se obtiene construyendo la producida por cada una de las partes de esta línea; así la causada por las porciones rectas 1-6 y 3-4 segun se ha explicado en los números 12 á 15, y las arrojadas por los arcos 1-2-3 y 4-5-6 segun se ha dicho en los números 23 á 26, las que deben resultar ser tangentes á las porciones rectas (Geometría Descriptiva), y cuya propiedad debe verificarse cualquiera que sea la naturaleza y posicion del cilindro que se considere.

En nuestra figura no las hemos construido porque no ofrecen ninguna dificultad y confunden el dibujo.

La sombra arrojada por un punto a sobre el cilindro se obtiene con la construccion explicada en Geometría Descriptiva para hallar la interseccion de una recta con un cilindro, cuyo problema, como allí se hizo ver, se resuelve más fácilmente por el intermedio de un plano auxiliar, que en este caso debe contener al rayo de sombra y ser paralelo además á las generatrices del cilindro. No

eje menor $\lambda \delta$, y con los dos ejes $\alpha \delta$ y $\lambda \delta$ la elipse conocida. Análogamente hemos construido los ejes de la elipse que es la proyeccion sobre el plano vertical del círculo de la base del cilindro.

son precisas las trazas de este plano para conocer su interseccion con el cilindro propuesto, porque teniendo la interseccion nr del plano P con el análogo al que ahora necesitamos, basta por el punto a_1 en que el rayo de sombra de a corta al plano P , trazar la paralela a_1b á la nr para tener la interseccion del nuevo plano con el P , y la generatriz $\bar{b}\bar{a}$ que pasa por b es la buscada; finalmente, el punto $\bar{a}$ en que se cortan esta generatriz y el rayo de sombra es el pedido.

Si una línea arroja sombra sobre un cilindro, se determinará aquélla fácilmente encontrando la producida por sus distintos puntos, reduciéndose la construccion, si fuera recta, á cortar el cilindro por un plano paralelo á la direccion de la luz.

Las anteriores construccionen pueden simplificarse si el cilindro tiene una representacion especial; por ejemplo, si la base descansara en el plano horizontal la construccion quedaría reducida á la análoga explicada en el número 33 para el prisma de la figura 19, ó tambien si se consideran posiciones particulares del cilindro recto como en los ejemplos siguientes.

42. Cilindro vertical.—Supongamos un cilindro circular colocado sobre el plano horizontal (fig. 25) ⁽¹⁾. Los planos tangentes paralelos al rayo de luz son proyectantes sobre el horizontal, por tanto sus trazas horizontales serán paralelas á la proyeccion sobre este plano de la direccion del rayo de luz. Trazaremos pues las tangentes 1-2, 5-4 paralelas á ella, las cuales dan por sus puntos de contacto 1 y 5 las proyecciones de las generatrices de separacion que son las 1-2, 4-5: como la base superior está iluminada (23), la total línea de separacion es la 1-2-3-4-5. La determinacion de la *sombra arrojada* no

(1) Debemos considerar la figura bajo el supuesto de representar únicamente las proyecciones de un cilindro sólido, de igual contorno aparente.

puede ofrecer ninguna dificultad encontrando la producida por las generatrices 1-2, 4-5 segun la regla del número 15 y la del arco 2-3-4, segun se dijo en números 23, 24 y 26, la cual tambien debe resultar tangente á 1-2, 5-4.

Observacion.—De la anterior construccion se deduce la siguiente regla que encuentra á la vez la sombra propia y arrojada de un cilindro de la forma y posicion del de la figura 25: determínese sobre el plano horizontal la sombra arrojada por la circunferencia de la base superior del cilindro (26), y las tangentes paralelas 1-2, 5-4 comunes á los dos círculos iguales de este plano dan las generatrices que determinan la sombra propia, y la arrojada sobre el plano horizontal.

43. Cilindro hueco.—La figura 25 representa ahora un cilindro hueco determinado por las superficies cilíndricas de eje comun y rádios 0-2, 0-7 respectivamente ⁽¹⁾.

La sombra propia y arrojada por la superficie convexa se obtienen segun lo dicho en el número anterior.

El contorno de la sombra arrojada en el interior de este cilindro lo determinan los rayos de luz rasantes á la circunferencia interior de rádio 0-7. Para conocer la porcion de arco de esta circunferencia, basta observar que siendo la parte cóncava la superficie de un cilindro recto (42), es suficiente, como en el caso anterior, imaginar dos tangentes á su base que forman 45° con LT; sus puntos de contacto 6 y 10 indican como el número 42 que la línea de separacion es la 6-7-8-9-10, de modo que el arco 7-8-9 es el que arroja sombra en el interior del cilindro, lo cual hace que las aristas 6-7, 9-10 no tengan en este caso objeto especial análogamente á lo que se dijo en el cono hueco (40).

(1). Suponemos que á la proyeccion vertical le falta una parte de la pared anterior, únicamente para que así pueda ser visible la sombra arrojada en su interior, pero para la construccion debemos suponerlo completo.

La sombra arrojada por el arco 7-8-9 es la sucesion de sombras producidas por sus distintos puntos que se obtienen segun la construccion explicada de un modo general en el número 41, y que ahora por la posicion especial de los datos puede simplificarse: así para hallar la que produce un punto m , trazamos por este punto la paralela $m\bar{m}$ al rayo de luz, y como la superficie cilíndrica es proyectante, el punto m^h será la proyeccion horizontal de la sombra que se busca, la cual se proyecta verticalmente en $\bar{m}^v$; esta construccion, aplicable á todos los puntos del arco 7-8-9, produce el contorno $7^v-\bar{m}^v-\bar{m}^v-9^v$ dibujado en la figura y hace ver tambien que los puntos 7 y 9 son los extremos de los que arrojan sombra en el interior del cilindro.

44. La figura 26 representa una canal semicilíndrica colocada respecto al plano vertical del mismo modo que el cilindro anterior lo está con el horizontal; la determinacion de su sombra propia y arrojada no puede ofrecer dificultad encontrando:

1.º La línea de separacion 1-2-3-4, 6-7-8 del prisma que contiene la canal y la sombra arrojada por ella (34).

2.º La tangente $\alpha\epsilon$ que determina la parte 9-10 del arco que arroja sombra en el interior de la canal (43).

3.º La sombra arrojada $\bar{9}-\bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}-\bar{6}$ por la arista 9- λ -6 (13).

4.º Finalmente, las sombras arrojadas $10-\bar{9}$ y $\bar{\lambda}-\bar{4}$ por los arcos de círculo 9-10 y 5-4 siguiendo las reglas dadas en los números 24 y 43 respectivamente.

45. Cilindro horizontal.—Si el eje del cilindro es horizontal é inclinado respecto al plano vertical, como el representado en la figura 27 ⁽¹⁾, los planos tangentes á su

(1) Dada la longitud del rádio y las proyecciones del eje oo del cilindro circular recto, las de este cilindro se dibujan tomando á partir de o_h y perpendicularmente á la proyeccion del eje longitudes $o^h\lambda^h = o^h\delta^h$ iguales al rádio de la base, de este modo $\lambda^h\delta^h$ es la proyeccion horizontal de una de las bases

superficie paralelos á la direccion de la luz pueden conseguirse directamente, pero es más sencillo referir el cilindro á un nuevo plano vertical que sea perpendicular á su eje, como el $L'T'$. En este nuevo plano el cilindro estará representado por el círculo o'' de radio igual á $o^h \delta^h$, y para tener la segunda proyeccion vertical del rayo de luz, bastará considerar las proyecciones de su direccion en el primer sistema, tales como la que pasa por el punto o , y estas nos darán la nueva proyeccion vertical $o''\lambda$. Como en el sistema $L'T'$ el cilindro tiene una posicion análoga al de la figura 25, la determinacion de la línea de separacion se obtiene en el caso que nos ocupa, refiriendo al plano vertical cuanto en la figura 25 se hizo en el horizontal; así, se trazan dos tangentes al círculo o'' paralelas á la direccion $o''\lambda$ de la luz en este plano, y las proyecciones horizontales de los puntos de contacto $1''$, $5''$ determinan las generatrices de separacion 1-2, 5-4, y como de las dos bases del cilindro, la de la izquierda está iluminada y la de la derecha oscura (23), la total línea de separacion que determina la sombra propia del cilindro es la 1-2-3-4-5-6-1.

La sombra arrojada por esta línea, dará el contorno de la producida por el cilindro, que se obtiene, la parte originada por las generatrices 1-2, 4-5 como se ha dicho en el n.º 13, y las arrojadas por los arcos de círculos 2-3-4 y 5-6-1 segun se ha explicado en los números 23, 24 á 25.

Si la construccion está bien hecha, deben corresponder las sombras arrojadas por los arcos 2-3-4, 5-6-1 á elipses iguales y tangentes á 1-2 y 4-5. Esta propiedad proporciona el siguiente sencillo procedimiento: bú-

del cilindro. Esta base tendrá por proyeccion vertical la elipse $\alpha''\lambda''\delta''\delta''$ que tiene el eje mayor $\alpha''\delta'' = \lambda^h \delta^h$ y por eje menor la porcion de horizontal $\lambda''\delta''$ deducida de la proyeccion de $\lambda^h \delta^h$. La otra base se dibujará del mismo modo, y con ellas se tiene conocido el cilindro por su contorno aparente.

quense las sombras arrojadas por las dos bases de la manera que se ha explicado para el círculo (25), y trácese dos tangentes 1-2, 4-5 á las dos elipses iguales que resulten.

46. La figura 28 es un sencillo caso particular de las 26 y 27; la sola inspeccion de ella es suficiente para deducir su construccion.

47. **Esfera.**—El conjunto de los rayos de luz que se apoyan sobre la esfera (Fig. 15) forman un cilindro circular recto de rádio igual al de esta esfera y cuyo eje es la paralela al rayo de luz que pasa por el centro de ella.

La línea de contacto entre ambas superficies, que como sabemos es la *línea de separacion de luz y sombra*, no es otra por tanto que la circunferencia de círculo máximo cuyo plano sea perpendicular al eje del cilindro citado, es decir, á la direccion de la luz, y por consiguiente se encontrará igualmente inclinado respecto los dos planos de proyeccion. Esta línea de separacion estará pues representada en ambas proyecciones por dos elipses iguales.

La interseccion del cilindro de sombra con un plano, dará tambien una elipse que será el contorno de la sombra arrojada por la esfera sobre este plano.

Si las circunferencias de rádios iguales o^h-1^h , o^v-3^v (figura 29) son las que representan la esfera propuesta, el eje de su cilindro de sombra será la recta $o-o_1$ paralela á la direccion de la luz, y las tangentes á estas circunferencias paralelas á estas proyecciones, determinarán el contorno aparente del cilindro de sombra.

Deduciéndose de los mismos datos del problema los elementos que determinan el cilindro de sombra, puede indistintamente conocerse la sombra propia, ó la arrojada, ó las dos á la vez, como vamos á ver desde luégo.

Con objeto de simplificar las operaciones gráficas, re-

feriremos las construcciones á un nuevo plano vertical segun $L'T'$ que sea paralelo á la direccion de la luz, para lo cual determinaremos las nuevas proyecciones verticales o^v del centro de la esfera y o^v-o_1 del eje del cilindro de sombra; desde el punto o^v como centro, con un radio o^v-2^v igual á o^h-1^h describiremos una circunferencia á la que trazaremos dos tangentes 2^v-2 , 2^v-2 paralelas á o^v-o_1 con lo cual tendremos las nuevas proyecciones verticales de la esfera y cilindro envolvente.

48. En esta disposicion el dibujo, podemos, como hemos dicho, hallar indistintamente la *sombra propia* ó la *arrojada*; propongámonos hallar la *línea de separacion* ó *sombra propia*. Podríamos, segun la regla general del n.º 30, emplear diversos planos secantes que fueran verticales y paralelos á la direccion de la luz, pero siendo la línea de separacion, como hemos dicho, una circunferencia situada en un plano perpendicular al eje del cilindro y que pasa por el centro de la esfera, se proyectará en la nueva proyeccion vertical segun el diámetro 2^v-2^v , (porque el indicado plano Q resulta ser perpendicular á este nuevo vertical). Conocida en el sistema $L' T'$ la proyeccion vertical 2^v-2^v de la circunferencia que se busca, fácilmente se obtiene la correspondiente horizontal, porque, segun se ha dicho en Geometría Descriptiva, las proyecciones horizontales $2^h, 2^h$ correspondientes á los extremos $2^v, 2^v$, determinan el eje menor 2^h-2^h de la elipse que se busca, y el eje mayor 1^h-1^h es perpendicular á él (horizontal del plano Q) é igual al diámetro de la esfera. Finalmente: la elipse $3^v-4^v-3^v-4^v$ igual á la $1^h-2^h-1^h-2^h$ y simétricas con respecto á $L T$, (47) será la proyeccion vertical de la línea de separacion en el sistema propuesto; pero puede obtenerse directamente la elipse $3^v-4^v-3^v-4^v$, y sirve de comprobacion al dibujo, repitiendo la construccion explicada para la $1^h-2^h-1^h-2^h$ refiriéndola al sistema $L' T''$ formado del plano

vertical primitivo y uno horizontal paralelo á la direccion de la luz.

49. *Sombra arrojada.*—Hemos dicho (47) que sobre cada uno de los planos de proyeccion es una elipse; ambas podrán construirse mirándolas como causadas por el círculo de la línea de separacion (23 y 24), pero es más breve, sin embargo, determinarlas como intersecciones del cilindro de sombra con estos planos de proyeccion, en cuyo caso las proyecciones auxiliares ántes encontradas simplifican notablemente las construcciones gráficas y permiten conocer directamente los ejes de ellas sin referirse á la línea de separacion. Se ve, en efecto, que en el sistema $L' T'$ los dos rayos $2''-\bar{2}$, $2'-\bar{2}$ determinan el eje mayor $\bar{2}-\bar{2}$ de la elipse segun la cual el cilindro de sombra queda cortado por el plano horizontal de proyeccion, así como que los rayos $1''-\bar{1}$, $1'-\bar{1}$ determinan en el mismo plano el eje menor $\bar{1}-\bar{1}$ que es igual al diámetro de la esfera (Geom.^a Descrip.^a). La elipse $\bar{1}-\bar{2}-\bar{1}-\bar{2}$ es, pues, la sombra arrojada por la esfera sobre el plano horizontal de proyeccion y de la cual no debe dibujarse más que la parte que esté situada en la extension visible de este plano.

Análogas construcciones repetidas en el sistema $L'' T''$ formado, como se ha dicho (48), por el plano vertical propuesto y uno horizontal paralelo á la direccion de la luz, nos darán la elipse $\bar{3}'-\bar{4}'-\bar{3}'-\bar{4}'$ sobre el plano vertical.

Como verificacion, las dos elipses $\bar{2}-\bar{1}-\bar{2}-\bar{1}$ y $\bar{3}'-\bar{4}'-\bar{3}'-\bar{4}'$ deben ser iguales y cortarse sobre la línea de tierra (25).

50. *Sombra arrojada por un punto sobre la esfera.*—El modo de obtenerla se reduce siempre, á construir la interseccion de la esfera con la paralela al rayo de luz que pasa por el punto dado. Así, para tener la sombra del punto a (fig. 29), se trazarán las dos proyecciones $a''-\bar{a}''$, $a'-\bar{a}'$ del rayo de sombra correspondiente al punto a , y en el nuevo plano vertical segun $L' T'$ se determi-

nará la segunda proyeccion vertical α'' del punto α : luégo, tomando el punto o'' como centro, con un rádio $o''-s''$ igual á r^h-s^h , se describirá el arco $\alpha''\delta''$ que es la nueva proyeccion vertical de la seccion hecha en la esfera por el plano vertical que contiene el rayo del punto α . La interseccion del arco $\alpha''\delta''$ con el rayo $\alpha''-\bar{\alpha}''$ paralelo á $o''-o_1$, dará el punto $\bar{\alpha}''$ del que se deducirá el $\bar{\alpha}^h$ y de este el $\bar{\alpha}'$, que son las proyecciones de la sombra causada por α .

La sombra arrojada por una línea sobre una esfera se obtiene hallando la sombra que sobre ella producen sus distintos puntos, lo cual equivale á buscar la interseccion de la esfera con un cilindro de generatrices paralelas al rayo de luz y cuya directriz fuera la curva dada. La construccion se simplificaría si la línea fuera recta.

51. Hemisferio hueco ⁽¹⁾ (fig. 30).—Buscamos únicamente la sombra arrojada en el interior de la semi-esfera cóncava por la parte correspondiente de la circunferencia del círculo máximo que la limita, porque la propia como la arrojada de la superficie convexa, es la encontrada en el caso anterior (48 y 49) si bien limitada por la debida al círculo exterior de la corona que la limita.

Siendo esférica la superficie cóncava, la determinacion en ella de la línea de separacion es un problema igual al anterior; por tanto las tangentes $l-1^h$, $l-1^h$ paralelas á la proyeccion del rayo de luz, determinarán los extremos del arco 1-2-3-2-1 que arroja sombra en el interior de la semi-esfera.

La sombra arrojada por un punto cualquiera del arco 1-2-3-2-1 ó por un punto exterior α , se determina como

(1) Representamos la proyeccion vertical cortada por un plano paralelo á él y por el centro, para que pueda ser visto el contorno de la sombra sobre la superficie cóncava.

se ha explicado en n.º 50. Se elejirá, pues, un nuevo plano vertical paralelo á la direccion de la luz, tal como el $L'T'$, y sobre él se fijarán las segundas proyecciones $3''-\alpha''-\delta''$ y $o''-o_1''$ de la semi-esfera y direccion de la luz respectivamente.

Empezaremos encontrando la sombra que produce el punto 3. El plano vertical que contiene el rayo del punto 3 corta á la esfera segun un círculo máximo que se proyecta sobre el nuevo plano vertical en el arco $3''-\alpha''-\delta''$, y la interseccion de este círculo máximo con el rayo $3''-\bar{3}''$ determina el punto $\bar{3}''$ del que se deduce el $\bar{3}^h$ y de éste el $\bar{3}^v$, que son las proyecciones de la sombra arrojada por el punto 3 en la esfera.

Conigual construccion hemos obtenido los puntos $\bar{2}, \bar{2}$ que son las proyecciones de la sombra arrojada por los puntos 2, 2.

Antes de pasar adelante debemos hacer ver una propiedad notable que tienen estos puntos de sombra y que sirve para facilitar su determinacion. En la nueva proyeccion vertical se han formado los dos triángulos $o''-3''-\bar{3}''$, $o''-2''-\bar{2}''$ que son isósceles, porque tienen $o''-3''=o''-\bar{3}''$ como ródios de un mismo círculo, y $o''-2''=o''-\bar{2}''$ por la misma razon; además el ángulo $o''-3''-\bar{3}''$ es igual al ángulo $o''-2''-\bar{2}''$ á causa del paralelismo de los rayos $2''-\bar{2}''$ y $3''-\bar{3}''$, de lo cual resulta que los ángulos $3''-o''-\bar{3}''$ y $2''-o''-\bar{2}''$ son tambien iguales, y por consiguiente, los puntos o'' , $\bar{2}''$, $\bar{3}''$ están en línea recta. Esta propiedad hace ver que la sombra arrojada dentro de la esfera por el arco 1-2-3-2-1 es un arco de círculo máximo, por ser una curva plana al proyectarse segun una recta $o''-3''$ sobre el plano vertical $L'T'$ (Geometría Descriptiva) y además porque pasa su plano por el centro de la esfera. Merced á ella, las operaciones para determinar las proyecciones $\bar{2}, \bar{2}$ se reducen á tra-

zar por los puntos 2^v , 2^h , $2^{v'}$ las paralelas á las proyecciones respectivas del rayo de luz, y la interseccion del rayo $2^{v'}-2^{v'}$ con $o^v-3^{v'}$ da $2^{v'}$ del cual se deducirán los puntos pedidos 2^h y 2^v .

Con los ejemplos de los números 40, 43, 44, 46, 51 hemos resuelto, segun indicamos en n.º 27, el problema de hallar la sombra arrojada por una línea sobre un cono, cilindro y esfera.

52. Cono, Cilindro y Esfera.—En la imposibilidad de presentar un ejemplo que reuna todos los casos que en la práctica ocurren, nos limitamos al indicado en la figura 31 que contiene las tres figuras elementales que hemos estudiado separadamente.

Los datos en ella son: las proyecciones horizontales de un cono circular recto C cuya altura es siete veces el radio de su base, la del cilindro circular recto DD y esfera E, colocados tangentes uno al otro en el orden que la figura indica; y se trata de dibujar todas las sombras bajo el supuesto que la direccion de la luz forma 45° con el plano horizontal y que su proyeccion sobre este plano es paralela á la recta SS.

Las principales operaciones necesarias, segun hemos dicho en números 8 y 29 son: determinar las líneas de separacion y construir la interseccion de los prismas ó cilindros de sombra correspondientes con las superficies exteriores.

Líneas de separacion.—Se traza la de cada figura aisladamente prescindiendo de toda otra que haya á su alrededor; así, en el cono C, despues de tirar la $C^h\bar{c}$ paralela á SS, tomaremos á partir de C^h una longitud igual á siete veces el radio C^hm de la base (35 y 36); desde $\bar{c}$ trazaremos las tangentes $\bar{C}m$, $\bar{C}n$ á dicha base y las generatrices de separacion son C^hm , C^hn (38);

En el cilindro DD, determinada la nueva proyeccion D^v sobre un plano vertical paralelo á SS, los puntos de

contacto a^v, b^v de las tangentes al círculo D^v inclinadas 45° con $L T$, darán las generatrices de separacion sobre el cilindro, la $b^h b^h$ invisible y la $a^h a^h$ visible (42);

En la esfera E , su nueva proyeccion E^v sobre el mismo plano vertical $L T$ proporciona por sus tangentes inclinadas 45° respecto la línea de tierra los ejes de la elipse de separacion $\alpha \beta \alpha \beta$ (48).

Sombras arrojadas.—*Cono.* Los planos de sombra que pasan por las generatrices $C^h m$ y $C^h n$ encuentran al plano horizontal en las trazas $\bar{C}m$ y $\bar{C}n$ y al cilindro D y esfera E segun elipses, y para buscarlas de una manera breve, puede referirse el primer plano de sombra al nuevo plano vertical segun $L' T'$ perpendicular á $\bar{C}m$, la traza del mismo nombre de este plano se tiene tomando x y igual á siete veces xz ; construyendo en él, las nuevas proyecciones D^v, E^v del cilindro y esfera dados, se tienen los diámetros conjugados de la elipse *dede* proyecciones de la que causa este plano en el cilindro D , y la $\pi\pi\pi\pi$ del círculo producido es la esfera E . Otro plano vertical $L'' T''$ perpendicular al plano de sombra de la generatriz $C^h n$ dará igualmente las elipses *fgfg* y $\lambda\lambda\lambda\lambda$, y con ellas determinadas la sombra que el cono arroja sobre el cilindro, esfera y plano horizontal.

Cilindro.—El plano de sombra que pasa por su arista de separacion $a a$, referido al sistema $L T$, tiene por trazas $\bar{a}a, a^v \bar{a}^v$, su interseccion con la esfera es la elipse *pppp*.

Esfera.—Arroja sombra sobre el plano horizontal segun la elipse $\bar{r} \bar{r} \bar{r} \bar{r}$ (49). En resumen, la sombra propia *del cono* está determinada por las generatrices $c^h m$, y $c^h n$, y la arrojada sobre el cilindro, limitadas por los arcos de elipse *dede* y *fgfg*, sobre la esfera siguiendo el contorno $\pi\pi\pi\pi$, y $\lambda\lambda\lambda\lambda$ y sobre el plano horizontal en $\bar{m}m, \bar{m}c\bar{n}$, y $\bar{n}n$: en el cilindro la generatriz $a a$ limita el contorno de

sombra propia y la arrojada sobre la esfera está definida por la elipse $pppp$ y sobre el plano horizontal por la $\bar{a}\bar{a}$; y en *la esfera*, la sombra propia se extiende hasta el arco $abab$, así como la arrojada es la superficie elíptica $rrrr$.

La repetición de ejemplos es el medio más propio para vencer las dificultades que al principio puedan presentarse, así como para estudiar los diferentes efectos producidos cuando se cambia la forma, el grandor ó la posición de las figuras, ó bien la dirección de la luz.

CAPÍTULO SEGUNDO.

Dibujo de los cuerpos.

§. I.

DEFINICIONES.

53. Se llama dibujo en general el arte que enseña á representar sobre una superficie dada, la figura ó imágen de cualquiera de los objetos que ofrece la naturaleza ó elabora la industria.

Segun el objeto de cuya representacion se trate, se divide en diferentes clases que se designan con nombres particulares, á saber: natural, topográfico, de adorno, industrial etc.

El dibujo industrial, que es al que vamos á referirnos exclusivamente, es el que sirve para representar los distintos objetos que entran en las construcciones mecánicas, arquitectónicas y á toda otra cualquiera que esta sea.

Un objeto puede necesitarse tenerlo representado tal como se le observa desde un punto fijo, llamado punto de vista, en cuyo caso el dibujo se llama *perspectivo*, ó puede desearse representado de modo que en nada se alteren sus formas y proporciones y en este caso se llama dibujo *de proyecciones*. Ambos toman sus medios de ejecucion á la geometría elemental y de aquí que se conozcan tambien con el nombre de *dibujo geométrico*. Los dos, pueden obtenerse por medio del dibujo *lineal* ó *lavado*.

§. II.

DIBUJO LINEAL.

54. Cuando se representa un cuerpo de modo que su superficie esté unicamente indicada por líneas rectas ó curvas, se tiene lo que se llama el *dibujo lineal* de este cuerpo. Esta clase de dibujo es el medio más sencillo, breve y fácil de representar un objeto, puesto que no hay más que repasar con tinta las líneas que se habrán trazado exactamente con lapiz segun las reglas de la Geometría Descriptiva.

55. Ordinariamente en los dibujos lineales no se consideran más que las sombras propias del objeto representado; á fin de dar á este dibujo toda la claridad posible y al mismo tiempo hacerle más agradable y que mejor indique las diferentes partes salientes y entrantes del objeto representado, se ha convenido en dibujar:

1.º Con *trazos finos* todas las *líneas visibles é iluminadas*.

2.º Con *trazos más gruesos*, las *aristas ó intersecciones* que pertenecen á *caras ó superficies en sombra* y las aristas que constituyen la *línea de separacion de luz y sombra*.

Estos trazos gruesos, para producir el efecto del claro-oscuro, *solo deben emplearse en las superficies terminadas en aristas vivas y que formen ángulo saliente*; de modo que *las aristas de ángulos entrantes se dibujarán con líneas finas aunque estén en sombra*.

56. Las reglas dadas en el Capítulo anterior determinan en un dibujo cuáles deben ser las partes iluminadas y cuáles las oscuras: segun ellas, la pirámide de la figura 17 tiene las caras $c-1-4$ y $c-3-4$ iluminadas y las $c-1-2$ y $c-2-3$ oscuras; se delinearán pues con trazo fino la $c-4$ y con línea gruesa la $c-2$ y tambien las $c-1$ y $c-3$ que forman la línea de separacion. En el cono de la figura 22, la curva de la base se dibuja gruesa porque parte de ella, la $1-2-3$, es línea de separacion y el resto, interseccion de superficies en sombra; por el contrario, en la figura 23^{bis}, la circunferencia que representa la base inferior del tronco de cono, se dibuja precisamente con *línea fina* á pesar de estar parte de ella en sombra, porque corresponde á arista entrante.

57. Cuando los cuerpos están terminados por superficies curvas, como sus proyecciones están limitadas por líneas que no son aristas vivas puesto que indican unicamente sus contornos aparentes, no deben, aún estando en sombra, representarse por trazos gruesos como los que indican las superficies planas: sin embargo, para hacer notar en el dibujo que ellas pertenecen á partes del cuerpo en sombra, se ha convenido en dibujarlas *algo más gruesas* que las líneas iluminadas. Finalmente, como las superficies curvas no tienen en toda su extension el mismo grado de oscuridad, se dibujan las líneas de ellas con un *grueso variable* que indique la variacion de luz en su superficie; así en la figura 22 se ve que la línea $c^v z^v$ no es tan gruesa como la $2^v z^v$ y que las $1-2-3$ de las figuras 23 y 23^{bis} degeneran progresivamente en línea fina.

Por medio de estos convenios el dibujo habla mejor á los ojos y hace distinguir facilmente los relieves de los huecos así como tambien las porciones limitadas por superficies planas de las formadas por superficies curvas.

§. III.

DIBUJO LAVADO.

58. Para conseguir que un dibujo lineal sea más inteligible, y que la representacion de un cuerpo se aproxime, cuanto pueda ser, á la verdadera, es decir para que las partes que lo componen ofrezcan un aspecto más conforme á la realidad, se da á la figura, por medio del *lavado*, una cierta coloracion por la cual las formas y las posiciones relativas de cada parte están representadas más clara y distintamente. El objeto, pues, del lavado, no es solamente herosear el dibujo sino hacerlo más fácilmente comprensible. A este fin, despues de determinadas las sombras propias y arrojadas como hemos explicado en el capítulo anterior, deben repartirse con el lavado las tintas en la degradacion conveniente segun la naturaleza y la posicion de las superficies de los cuerpos respecto á la direccion de la luz.

59. Para aclarar las ideas, necesario es que expongamos las causas que producen las diferencias de la luz y de la sombra sobre las superficies.

El color que ofrece á nuestra vista un objeto iluminado depende, entre otras causas, de la intensidad de la luz que le envía el cuerpo luminoso y de la reflexion que él produce y hace llegar hasta el observador. Segun un principio de Física, *la intensidad de la luz emitida por un punto luminoso varia en razon inversa del cuadrado de las distancias*. Estando en los dibujos geométricos, los objetos iluminados por el sol, la distan-

cia entre éste y aquéllos es inmensa comparada con las dimensiones de los objetos iluminados y con las distancias que los separan entre sí; puede, pues, considerarse igual para todos y por consiguiente, suponer no existe diferencia en la intensidad de la luz que llega á los diversos elementos del objeto que se considera. En cuanto á los elementos en sombra, haciendo abstraccion de todo lo que puede hacer reflejar la luz, deben tener todos una intensidad igual y representarse con *negro puro*: esta afirmacion puede parecer exagerada porque no estamos habituados á ver los cuerpos sombreados de esta manera, pero es porque otros cuerpos, reflejando luz, la envían de tal manera que producen claridad allí donde los rayos directos del sol no pueden llegar; por esto no tenemos ocasion de ver nunca una sombra completa.

60. Consideremos ahora la segunda causa, es decir, la luz que el objeto iluminado envía al observador. Es evidente que para que sea visible un punto cualquiera de una superficie, no es suficiente que esté iluminado, es necesario además que pueda reflejar la luz recibida hácia el observador (2-2.^a) (1).

Para la mejor inteligencia, dividiremos las superficies en dos clases relativamente á la manera que reciben y reflejan la luz, á saber, *superficies pulimentadas* y *superficies mates*.

61. **Superficies pulimentadas—puntos brillantes.**— Cuando un rayo de luz *im* (fig. 35) encuentra una superficie plana y pulimentada, este es reflejado por la misma superficie en una direccion *mr* tal, que siendo *mb* la normal á la misma superficie, forma el ángulo *imb* igual al *bmr*, ó lo que es lo mismo, el ángulo *imp* igual al *rmq*, y ambos ángulos se hallan en el mismo plano normal á

(1) Es evidente que un objeto iluminado colocado á espaldas del observador no podrá ser visto por él.

la superficie sobre que se refleja el rayo luminoso. El ángulo imp se llama ángulo de *incidencia* y el rmq de *reflexion* (1).

62. Supongamos ahora (fig. 36) una superficie plana P perfectamente pulimentada, un espejo por ejemplo; sea L la posicion de un punto luminoso y o la del observador; es evidente que como cada punto de la superficie P recibe y refleja solo un rayo, no encontrando los $m'r'$, $m''r''$,..... en su direccion al observador, no producen sensacion alguna (3-2.^a), miéntras que el mo que proviene de la reflexion del Lm, causa el mismo efecto que si el punto luminoso estuviera situado en m; de donde resulta que vista desde el punto o la superficie del plano, aparecerá oscura toda ella á escepcion del punto m que le envía el rayo mo , que será así visible para el observador y le parecerá *brillante*.

63. Si el foco luminoso fuera el sol serían paralelos sus rayos incidentes sm, sm, sm (fig. 37), los cuales se reflejarían segun direcciones mo, mo, mo ,..... tambien paralelas (61) y concurrirían todos en un punto sobre esta direccion á una distancia infinita (Geometría elemental); de modo que si allí estuviera situado el observador, recibiría todos los rayos reflejados mo, mo, mo y resultaría ser para él, todo el plano P *brillante*. Cualquiera otro plano P' paralelo al P aparecerá al mismo tiempo brillante tambien para el observador, porque sus rayos incidentes sm', sm', sm' ,..... siendo paralelos á los sm, sm, sm ,.... se reflejarán segun direcciones $m'o, m'o, m'o$,..... (61) paralelas á las mo, mo, mo ,..... é incidirán sobre el observador supuesto en el infinito, del mismo modo que los mo, mo, mo ,..... del plano P.

64. Sabido esto, veamos cómo podemos determinar

(1) En Física se verá la demostracion experimental de estas leyes.

los puntos brillantes sobre una superficie cualquiera AB (fig. 38), dadas que sean la direccion ss de la luz y la del rayo visual oo y siendo las distancias infinitas, que es como se consideran iluminados y vistos los objetos que se representan por medio del dibujo geométrico.

Conforme á lo expuesto, bastará para fijarlos proceder del siguiente modo:

1.º Desde un punto cualquiera m del espacio, se trazan las paralelas sm y mo á las direcciones del rayo de luz ss y del rayo visual oo .

2.º Se construirá la bisectriz mb del ángulo smo .

El plano P perpendicular á la direccion de la bisectriz mb y todos los paralelos á él, se verán brillantes por el observador colocado á la distancia ya dicha (63).

3.º Se determinarán finalmente todos los planos tangentes P' , P'' , P''' á la superficie AB y perpendiculares á la direccion mb : los puntos m' , m'' , m''' de tangencia serán *los puntos brillantes de la superficie*.

Consecuencia.—A todo plano P perpendicular á la bisectriz de las direcciones ss y oo se llama *plano brillante auxiliar*.

Apliquemos la construccion anterior á las superficies que hemos considerado en las sombras.

65. Cono.—Siempre que un plano tangente al cono sea paralelo al plano *brillante auxiliar*, la generatriz de contacto será línea brillante (64).

Tratemos, pues, de investigar si existe línea brillante sobre la proyeccion vertical del cono de la figura 39.

La direccion de la luz tiene por proyecciones $s^h m^h$, $s^v m^v$ y la del rayo visual, que es perpendicular al plano vertical, serán $o^h m^h$ perpendicular á LT y el punto $o^v m^v$. Rebatiendo el plano de las dos rectas sm y mo al rededor de la om hasta colocarlo paralelo al plano horizontal, el ángulo smo se colocará en $s'mo$; y trazando en esta

posicion la bisectriz $m'b'$ y deshaciendo luego el rebatimiento, vendrá ésta á colocarse en mb .

Falta únicamente averiguar, si entre los distintos planos tangentes al cono, hay alguno que sea perpendicular á esta bisectriz mb (64). Su traza horizontal H^v debe ser perpendicular á la proyeccion horizontal m^hb^h (Geometría Descriptiva), además la proyeccion c^vd^v de la vertical cd del plano P debe formar un ángulo recto con la proyeccion vertical m^vb^v ó su paralela $c^v\bar{b}$ de la bisectriz; como en la figura este ángulo $d^vc^v\bar{b}$ es obtuso, diremos que no hay línea brillante sobre la proyeccion vertical del cono considerado.

66. Cilindro.—En la proyeccion vertical del cilindro de la figura 39 la generatriz nn es una línea brillante, porque el plano P tangente segun esta generatriz es paralelo al brillante auxiliar (64). En efecto, su traza horizontal H^p es perpendicular á m^hb^h y la recta c^vd^v (1) paralela á la traza vertical, forma un ángulo recto con $c^v\bar{b}$ paralela á m^vb^v .

67. Esfera.—Propongámonos construir el punto brillante sobre la proyeccion vertical de la esfera representada en la figura 40.

Como los planos tangentes á la esfera son perpendiculares á los ródios respectivos que van al punto de contacto, elegiremos el centro de la esfera para trazar desde él las paralelas as y zo á la direccion de la luz y rayo visual respectivamente. Rebatiendo el ángulo szo sobre el plano horizontal que pasa por el centro de la esfera obtendremos el $s'zo$, y construyendo en él la bisectriz ab' y el punto m^h, m^v en que esta recta corta á la esfera y vuelto todo á la primitiva posicion, el punto m' irá á m y su proyeccion m^v será el punto buscado, porque es evidente que el plano tangente en m es perpendicular á

(1) Proyeccion de la vertical del plano P.

la bisectriz ab y por consiguiente el punto m^v es brillante (64).

68. Reparticion de las tintas en las superficies pulimentadas.—Si todas las superficies fueran perfectamente pulimentadas, la teoría de las sombras sería inútil, porque para el observador no habría visibles más que los puntos ó líneas brillantes contruidos como se ha indicado precedentemente (64); los demás elementos de ella, no siendo perpendiculares á la direccion de la bisectriz no pueden enviar al observador ningun rayo luminoso (64), por tanto estos elementos, aunque estén iluminados, le parecerán igualmente oscuros que los que están en sombra (¹).

Consecuencia.—En todo cuerpo pulimentado se representará con un color muy vivo y trasparente el punto ó línea brillante, y el resto de su superficie con una tinta oscura (²).

CUERPOS MATES.

69. La mayor parte de los objetos que se presentan á nuestra vista, como las piedras, las maderas etc., son cuerpos *mates*, y áun de estos los mejor labrados son de un pulimento muy imperfecto, es decir, que el aspecto exterior, sin dejar de ofrecer la apariencia de una superficie continua, está siempre salpicada de una multitud de asperezas y cavidades, muchas veces imperceptibles y más comparadas con las dimensiones del cuerpo, pero siempre muy considerables relativamente á las moléculas

(¹) Puede notarse este efecto, observando un globo de metal bruñido expuesto á los rayos solares: se verá que una muy pequeña porcion de su superficie refleja rayos luminosos y que el resto del globo parece estar en sombra, á menos que no refleje las imágenes de objetos iluminados que le rodeen.

(²) Ejemplo de esta representacion ofrecen los dibujos lavados de objetos bruñidos ya de metal ó de madera barnizada.

luminosas que son extremadamente ténues. Puede pues suponerse que cada elemento superficial de estos cuerpos está formada de una infinidad de pequeñas facetas inclinadas en todas direcciones (fig. 41), y consiguiente á esta diversidad de inclinaciones, debe necesariamente haber en cada elemento algunas facetas perpendiculares á la direccion de la bisectriz, de suerte que los rayos que lleguen á ellas serán reflejados en direccion del observador (64), y de aquí que todos los elementos visibles de la superficie parezcan iluminados cualquiera que sea la direccion del rayo visual, aunque no con tanta intensidad como los puntos brillantes, porque éstos envían luz reflejada de algunas facetas y en las superficies pulimentadas va al observador toda la luz que incide sobre el elemento brillante.

70. Puntos brillantes.—No cabe juzgar por esto que el observador vea la superficie de un cuerpo mate igualmente iluminada en toda su extension; esta superficie, como hemos dicho, presenta un aspecto sensiblemente continuo, así que las facetas culminantes de las asperezas que la irizan constituyen un lugar geométrico tal como ABC (fig. 41). En el punto B supuesto que sea el brillante (64), concurrirán dos causas que contribuirán por distinta manera á enviar luz al observador; es la una, que todas las facetas exteriores situadas en el plano tangente que ha determinado el punto brillante B, se manifiestan como elementos de superficie brillante, y su número es siempre muy grande porque el plano tangente no tiene sólo un punto matemático comun con la superficie envolvente ABC; así como la otra es debida á que las facetas de las cavidades contiguas á B, é irregularmente distribuidas, pueden por su posicion especial enviar al observador, como hemos dicho, la luz que ellas reciban (69); verdad es que esta segunda causa es comun á todos los elementos de la parte visible de la superficie,

pero la primera, que es muy preponderante, es particular al punto B únicamente: por consiguiente este punto ofrecerá una claridad mucho mayor que los demás de la superficie, por cuya razon se llama tambien *punto brillante*.

El efecto que causa al observador el punto brillante de una superficie mate, es tanto mayor cuanto más pulimentada esté; en efecto, el pulimento, resultando del frotamiento que destruye la parte más saliente de los elementos superficiales, produce en cada uno de ellos (fig. 42) una faceta principal dirigida en el sentido general de la superficie, y disminuye por consiguiente los intervalos cóncavos y por tanto el número de facetas inclinadas en todas direcciones. Se concibe, pues, que el número de rayos enviados por las facetas de las cavidades será muy pequeño en comparacion de los enviados por las facetas que han resultado del pulimento; los cuales, si tienen la posicion del punto brillante, producirán tanta mayor sensacion cuanto más pulimentada sea, al par que el resto de ella se verá cada vez más oscura (68).

71. Reparticion de la luz sobre las superficies mates.

—Se observa que en todo cuerpo mate hay partes que aparecen más iluminadas que otras, y como la situacion y extension de estas partes es muy importante determinarlas en un dibujo, veamos cómo sabremos distinguir en una superficie los elementos de ella que tienen posiciones más adecuadas para enviar la luz que reciben al observador. Se comprende que las partes más claras estén en general en las inmediaciones de los puntos brillantes, pero sin concluir por esto, que la luz debe estar distribuida alrededor de estos puntos de una manera simétrica.

El grado de claridad con que un elemento de superficie se presenta al observador depende de dos causas: 1.^a de la cantidad de luz que por cualquier motivo recibe este elemento superficial, y 2.^a de la porcion mayor ó

menor que de la luz recibida envía este elemento al observador.

72. Cantidad de luz que recibe un elemento de superficie iluminada.—Ya hemos dicho en n.º 59 que los rayos de luz al encontrar la superficie del cuerpo que iluminan tienen todos la misma intensidad, de modo que la iluminarán más ó menos segun que reciben más ó menos rayos sus distintos elementos.

Supongamos que AB (fig. 43) sea el lado de un cuadrado ⁽¹⁾ colocado de perfil y perpendicular á la direccion de la luz; todos los rayos que iluminan este cuadrado constituyen un prisma recto cuya base es el cuadrado AB . Si hacemos girar este cuadrado alrededor del lado proyectado en A hasta la posicion AB_1 , los rayos de luz que iluminan esta nueva posicion forman tambien otro prisma cuya seccion recta es Ab_1 . La relacion entre las dos secciones citadas, ó entre los lados AB y Ab_1 toda vez que ellas tienen comun el lado proyectado en A , dará la que existe entre el número de rayos de luz que iluminan las caras AB y AB_1 . En el triángulo AB_1b_1 es $Ab_1 = AB \text{ sen } \alpha_1$ ó igual á $AB \text{ sen } \alpha_1$. Para la situacion AB_2 sería igualmente $Ab_2 = AB \times \text{sen } \alpha_2$ de donde $Ab_1 : Ab_2 :: \text{sen } \alpha_1 : \text{sen } \alpha_2$ luego, *la cantidad de luz recibida por un elemento superficial, es directamente proporcional al seno del ángulo que él forma con el rayo luminoso.*

Consecuencia.—Los elementos de una superficie perpendiculares al radio de luz serán los más iluminados y aquellos cuyo plano tangente sea paralelo á su direccion ⁽²⁾ no recibirán la accion de los rayos luminosos.

Finalmente: entre las causas que más contribuyen á

⁽¹⁾ Un elemento de superficie.

⁽²⁾ Estos elementos hemos visto que constituyen siempre la línea de separacion de luz y sombra en un cuerpo.

disminuir la cantidad de luz en las partes de una superficie que presentan mayor inclinacion con respecto á la direccion de aquélla, debe contarse las sombras que sobre las cavidades de la superficie arrojan sus asperezas; y este efecto es tanto mayor cuanto menor sea el ángulo que la direccion de la luz forma con el elemento que se considera ⁽¹⁾.

73. Claridad aparente de los cuerpos.—Resta estudiar la marcha de los rayos luminosos desde los cuerpos iluminados hasta el observador. Cuestion es esta difícil de apreciar de una manera satisfactoria por las muchas circunstancias que la modifican, algunas imposibles de valuacion rigurosa toda vez que dependen principalmente de la constitucion física de la superficie de los cuerpos y de las modificaciones que experimenta la luz al encontrarse con estas superficies mates, sobre las que aún no se tienen todos los conocimientos necesarios.

Fundando pues la explicacion sobre hipótesis, los resultados serán unicamente probables, y solo podrán admitirse hasta ser reemplazados por los deducidos de teorías basadas en principios ciertos.

Sabemos que en un cuerpo mate, los elementos de su superficie presentan una multitud de facetas desigualmente inclinadas que hace reflejen la luz que llega á ellas diseminándola en todas direcciones (69), por cuya razon aparecen estas partes más debilmente iluminadas que los puntos brillantes.

74. Vamos ahora á determinar entre los elementos de una superficie mate los que, siendo igualmente iluminados, están más favorablemente colocados para reflejar mayor cantidad de luz en una direccion dada.

⁽¹⁾ Puede observarse esta disminucion de luz producida por las sombras de las asperezas, inclinando una hoja de papel de grano grueso bien extendida hasta que próximamente quede paralela á la direccion de la luz, y se verá que su superficie se oscurece gradualmente.

Consideremos un elemento cuadrado proyectado segun el lado AB (fig. 44.). Sus irregularidades a, b, c, d , etc., reflejando los rayos que reciben en distintas direcciones (69), obran cada una de ellas á manera de cuerpos luminosos: al observador no podrán llegar más que los rayos en una direccion, que será la correspondiente á la situacion que ocupe.

Deslindando entre todos los rayos reflejados por las distintas facetas de este elemento los que resulten dirigidos en un mismo sentido, se forman vários prismas de base comun AB y cuyas secciones rectas, son mn, m^1n^1, m^2n^2 , etc., respectivamente. Las magnitudes de estas secciones rectas indican claramente la mayor ó menor reunion de rayos. La intensidad de la luz enviada al observador por el elemento AB, puede pues valuarse en cada caso por la magnitud de la seccion recta del prisma correspondiente á la situacion de aquél. Estas secciones rectas, teniendo por expresion formular AB $\text{sen } \alpha$ dan (72) $mn : m^1n^1 :: \text{sen } \alpha : \text{sen } \alpha^1$ lo que permite deducir que; *la intensidad de la luz, que refleja cada elemento de superficie mate en una direccion determinada, está en razon inversa del seno del ángulo que forma su plano tangente con la direccion del rayo visual* ⁽¹⁾.

Observaciones.—1.^a La cantidad de la luz enviada por una superficie mate al observador será tanto menor cuanto más se acerque éste á la direccion $o-o$ de la normal á ella.

2.^a La consecuencia á que ántes hemos llegado, deja de verificarse cuando el ángulo indicado es proximalmente nulo, que será cuando el observador contemple el elemento AB segun la direccion o_3-o_3 , porque las aspere-

(1) Prácticamente puede comprobarse esta propiedad, observando una superficie plana fija, un tablero por ejemplo; se notará cuanto más sirgada se la mire que está más iluminada y más brillante su superficie.

zas $a, b, c, d, \dots$ del elemento mate, quedan cubiertas unas por otras al observador é interceptan por tanto las anteriores una porcion de rayos luminosos que en la direccion o_3-o_3 reflejarían las posteriores.

75. Reasumiendo las dos propiedades citadas deducimos, que los elementos mejor expuestos para que el observador pueda verlos más iluminados, son aquellos cuyos planos tangentes forman ángulos rectos con la direccion de la luz y al mismo tiempo el menor posible con la direccion de la visual (¹).

En las superficies consideradas en Geometría Descriptiva puede muy fácilmente estudiarse la variacion de inclinacion de los planos tangentes á distintos puntos de ella respecto á las dos direcciones ántes citadas del rayo de luz y de la visual segun la posicion que se considere.

Si la superficie es desarrollable, como el plano tangente en un punto lo es á lo largo de la generatriz que pasa por este punto, las distintas intensidades de luz aparecerán segun generatrices, cuya consecuencia se aplica en particular á los conos y cilindros.

76. Reflexion atmosférica. — Por último, la atmósfera que la luz atraviesa ántes de llegar á nosotros no es de una trasparencia perfecta, sus moléculas retienen algunos rayos que los reflejan, como lo hacen los cuerpos opacos, diseminándolos en todos sentidos, los cuales originan la *luz atmosférica* ó *reflejo atmosférico* (²) cuya intensidad es bastante considerable para permitir ver muy distintamente los cuerpos sobre los cuales no llegan los rayos directos.

(¹) No se olvide que estamos considerando elementos que no comprendan el lugar del punto brillante.

(²) Si el aire no existiera, no sufriría reflejo la luz que proviene del sol, y el cielo parecería de un negro absoluto sobre el que los astros se destacarían como puntos brillantes.

77. Rayo atmosférico principal.—La experiencia hace ver que para cada inclinacion del rayo de luz directo, existe siempre una direccion segun la cual el reflejo atmosférico correspondiente tiene mayor intensidad que en toda otra, á esta direccion especial se llama *rayo atmosférico principal*.

Consideremos primero un cuerpo opaco completamente aislado tal como la esfera de la figura 15; se observa que si los rayos de luz tienen la direccion SA, los reflejos atmosféricos ejercen su máximo efecto paralelamente á la direccion RB *precisamente opuesta* á SA.

Si como sucede generalmente las figuras que observamos están próximas al plano horizontal ó colocadas en él, tal sucede al cilindro de la figura 45, la direccion del *rayo atmosférico principal*, siempre situado en el mismo plano vertical que contiene el rayo de luz directo, forma con el horizontal un ángulo de 32 grados proximately cuando el rayo de luz incidente sigue la direccion de la diagonal del cubo (9) ⁽¹⁾; y si se elije un rayo incidente que forme 45° con el horizontal (34) el *rayo atmosférico principal* forma tambien 45° proximately con este plano horizontal.

Lo expuesto últimamente permite mirar al cuerpo observado como iluminado, de una parte por los rayos luminosos paralelos al rayo incidente y de la otra por los rayos de una luz mucho más débil paralelos á la direccion del atmosférico principal, de suerte que la region situada en la sombra relativamente á la luz directa, ofrecerá igualmente degradacion de tintas y tendrá sus puntos brillantes como la iluminada.

78. Reparticion de las tintas en los cuerpos mates.
—Preciso será por lo dicho, en todo dibujo lavado acla-

(1) En este caso el rayo de luz directa forma con el plano horizontal un ángulo de 35°-15'-50".

rar notablemente la tinta oscura en los sitios próximos á los puntos ó líneas brillantes correspondientes al rayo atmosférico principal (64) y no emplear tintas demasiado oscuras sobre la restante parte en sombra, por la luz que envían sobre ella los reflejos atmosféricos cuyo efecto aunque débil se hace más sensible en las partes elevadas de la sombra propia y en las más separadas del cuerpo en la arrojada.

79. Reasumiendo y aplicando en el cilindro recto de la figura 45 cuanto hemos dicho en este capítulo se ve fácilmente, respecto á la mayor ó menor cantidad de luz que reciben sus distintos elementos:

1.º La generatriz aa es la más iluminada porque el plano tangente correspondiente forma el mayor ángulo posible con la direccion de la luz (72-cons.ª).

2.º La luz disminuye gradual y simétricamente de aa á bb y de aa á cc porque los planos tangentes en generatrices igualmente separadas de la aa están igualmente inclinados á la luz. Esta pérdida de luz aumentará tambien con simetría por las sombras que arrojan los puntos culminantes de las asperezas de la superficie sobre ella misma (72).

3.º Las generatrices bb y cc serán las más oscuras (72), y determinan en la superficie lateral la línea de separacion de luz y sombra (42).

4.º La generatriz dd en sombra, es la ménos oscura, porque el plano tangente correspondiente á ella es el que forma mayor ángulo con la direccion del rayo atmosférico principal (77).

5.º La claridad originada por la reflexion atmosférica disminuye progresiva y tambien simétricamente á derecha é izquierda de la generatriz dd , si bien mucho más debilmente que la degradacion indicada á partir de la aa .

6.º La parte inferior de las generatrices aa y contiguas están algo más iluminadas que las correspondientes

superiores por la influencia que sobre ellas ejercen los reflejos de los rayos directos que chocan en el plano horizontal.

7.° Los extremos superiores de las generatrices *dd* y contiguas están un poco menos sombreadas que las respectivas inferiores por los reflejos atmosféricos que son más en la parte superior (76).

8.° Finalmente, la sombra arrojada sobre el plano horizontal es más oscura cerca del cilindro y va aclarándose progresivamente aunque poco á medida que se separa de él, porque sus puntos M, N... están expuestos á los reflejos de una masa de aire tanto más grande cuanto mayor sea su distancia al cuerpo (76) (1).

El observador que contemple el cilindro notará en la proyeccion vertical.

1.° Que no tiene arista brillante (64 y 66).

2.° Que la luz se reparte segun generatrices (75).

3.° La generatriz *mm* es por su posicion la que peores condiciones tiene para enviar su luz al observador (74-obs.ⁿ-1.^a),

4.° Las generatrices simétricas con respecto á la *mm*, emiten relativamente más luz y esta capacidad aumenta con su distancia á aquélla (74).

5.° Las generatrices *pp* y *qq* del contorno aparente, aparecerán oscuras con relacion á la luz que los ilumina (74-obs.ⁿ 2.^a).

Teniendo en cuenta la distinta cantidad de luz que cada una tiene, se podrá deducir fácilmente cómo se tendrán que distribuir las tintas para conseguir el efecto más exacto, debiendo tener presente, que la degradacion de tonos puede conseguirse empleando tintas desvane-

(1) No tomamos en consideracion las modificaciones que pueden originar los reflejos del plano vertical para no hacer más larga esta clasificacion.

cidas por medio del agua clara ó por capas cortadas, sobrepuestas las unas á las otras ⁽¹⁾.

80. No debe olvidarse, como repetidamente se ha manifestado, para el mejor acierto en los distintos ejemplos que puedan ofrecerse, que las diferentes intensidades de luz y sombra en un cuerpo, no dependen solamente de la forma de su superficie sino tambien del mayor ó menor pulimento de ella y más aún de su naturaleza física; se comprende que la luz no debe producir los mismos efectos sobre un objeto de piedra que sobre los de metal ú otra sustancia: únicamente la comparacion razonada de los efectos de luz sobre los cuerpos, podrá indicar el mejor modo de representarlos con la posible exactitud.

(1) Las tintas desvanecidas no suelen emplearse sino para las figuras cuyas superficies son continuamente variables. Las capas cortadas es el procedimiento hoy preferido por tener una aplicacion muy apropiado para los dibujos de construcciones, máquinas, etc.

ÍNDICE.

Págs.

PRELIMINARES.—Efectos de luz y sombra—1; Definiciones y principios de Física—2; Partes que comprende la determinacion de las sombras—3.	3
CAPÍTULO I.—De las sombras y su construccion gráfica.	
§. I.— Teoría de sombras: Definiciones: sombra—4; Línea de separacion de luz y sombra, sombra arrojada—5 al 7; Direccion de la luz adoptada en la construccion de las sombras—8 y 9.	5
§. II.— Punto: Rayo de sombra y sombra arrojada—11.	8
§. III.— Líneas: Línea recta; Plano de sombra, sombra arrojada cualquiera que sea la posicion relativa de la recta—12 al 17; Consecuencias—18 y 19.	10
§. IV.— Superficies: Areas planas: Poligono; Sombra propia y arrojada cualquiera que sea su forma y la direccion del plano que la contiene, sombra de un punto sobre un área plana—20 al 22; Círculo, área elíptica 23 al 27.	13
§. V.— Cuerpos: Poliedros; Sombra propia y sombra arrojada—28 al 30; Simplificaciones en caso de ser aquellos pirámides ó prismas—31 al 34; Consecuencias—35 y 36.	19
Cuerpos redondos: —Cono, cilindro y esfera; sombras propias y arrojadas sobre superficies exteriores y tambien sobre las concavidades de ellas por sus bordes; sombra arrojada por un punto ó línea sobre las superficies de los tres cuerpos citados, ejemplo—37 al 52.	26
CAPÍTULO II.—Dibujo de los cuerpos.	
§. I.—Definiciones—53.	45
§. II.— Dibujo lineal, claro-oscuro 54 al 57.	46
§. III.— Dibujo lavado, sus ventajas sobre el lineal—58 y 59; Superficies pulimentadas, puntos brillantes—60 al 64; Aplicacion al cono, cilindro y esfera—65 al 67; Reparticion de las tintas en tales superficies—68.	48
Cuerpos mates, manera de considerar su superficie—69; Puntos brillantes—70; La luz que un elemento mate recibe es directamente proporcional al seno del ángulo que él forma con el rayo luminoso—71 y 72; Claridad aparente de un cuerpo, dificultad de apreciarla rigurosamente—73; Entre elementos mates igualmente iluminados, su claridad aparente es inversamente proporcional al seno del ángulo que forman ellos con la direccion de la visual—74; Consecuencias—75; Reflexion atmosférica—76; Rayo atmosférico principal—77; Reparticion de las tintas en los cuerpos mates—78; Resúmen de los efectos de luz y sombra; cilindro circular recto—79 y 80.	53

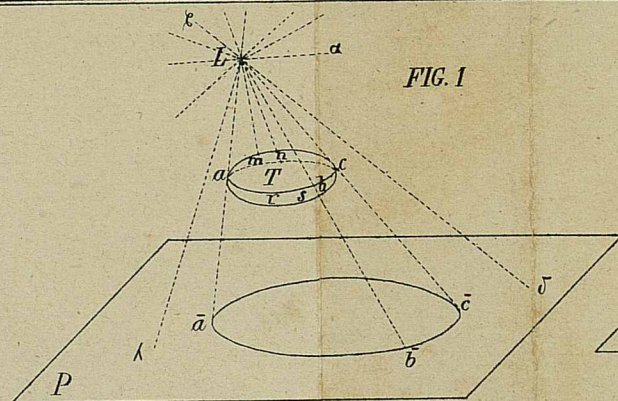


FIG. 1

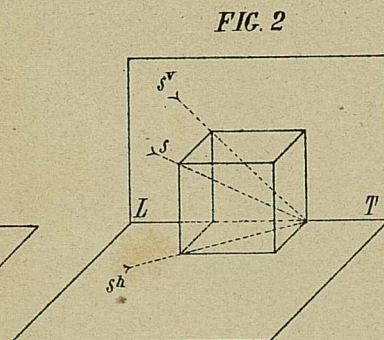


FIG. 2

FIG. 2 bis.

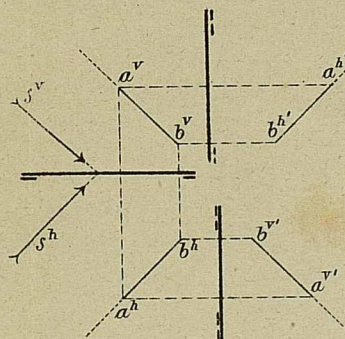


FIG. 3

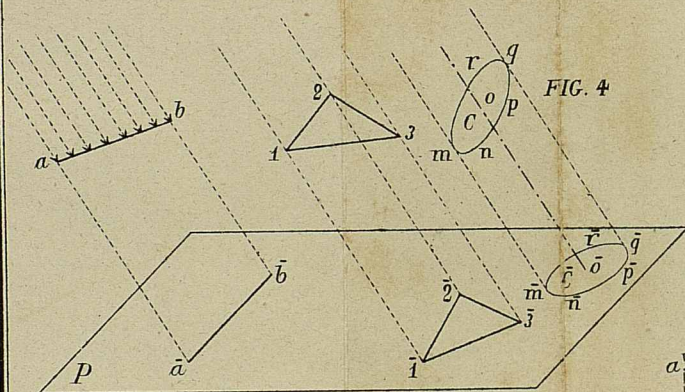
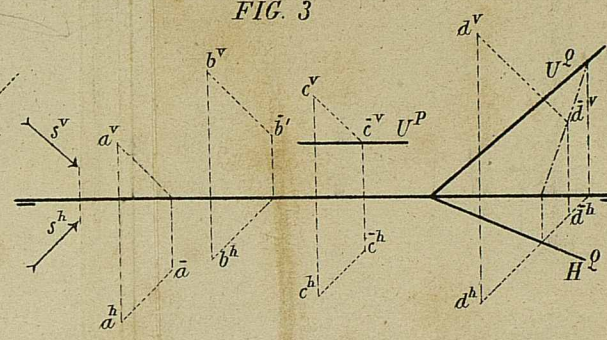


FIG. 4

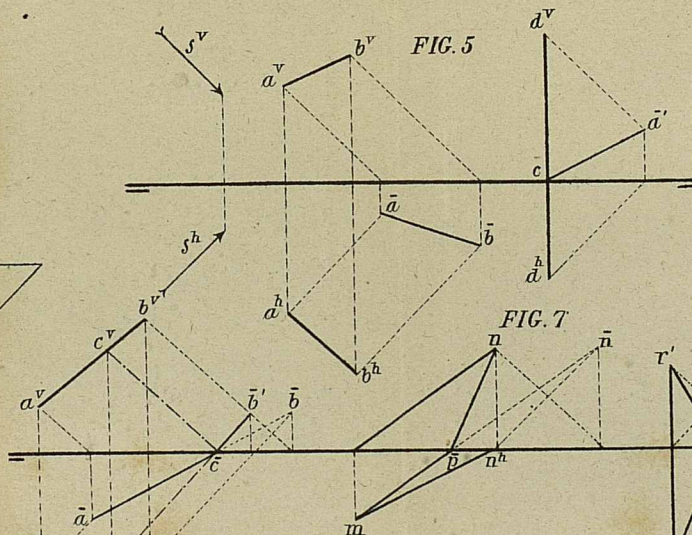


FIG. 5

FIG. 7

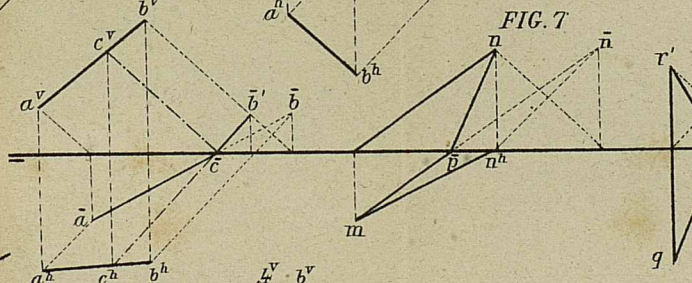


FIG. 6

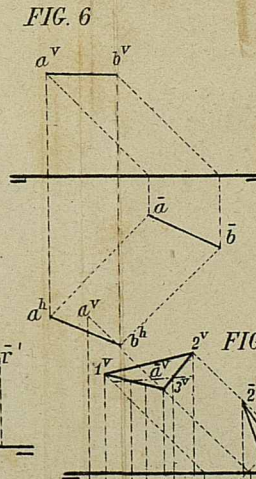


FIG. 8

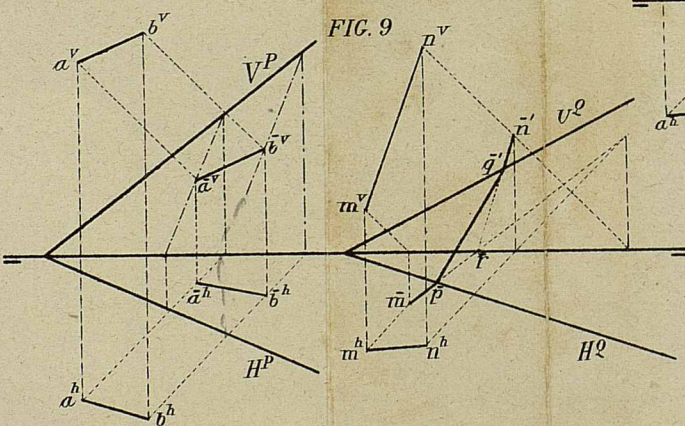
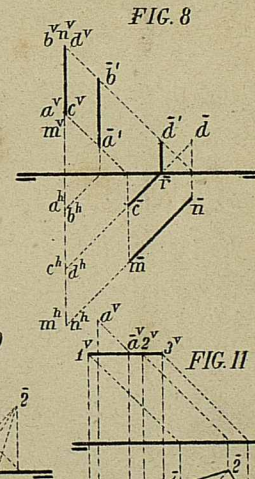


FIG. 9

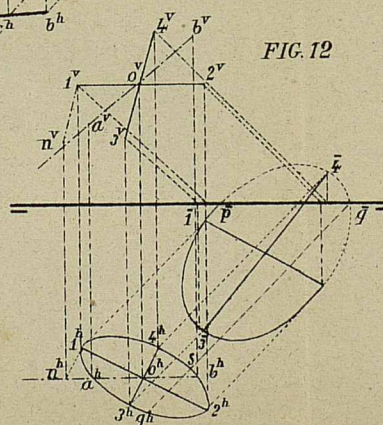


FIG. 12

FIG. 14

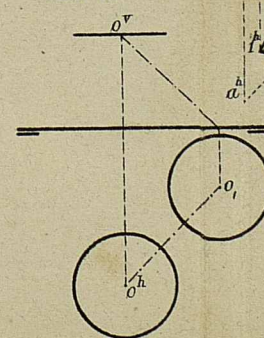


FIG. 10

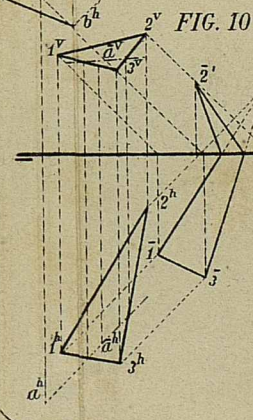


FIG. 11

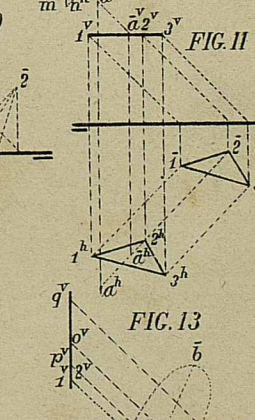
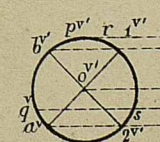
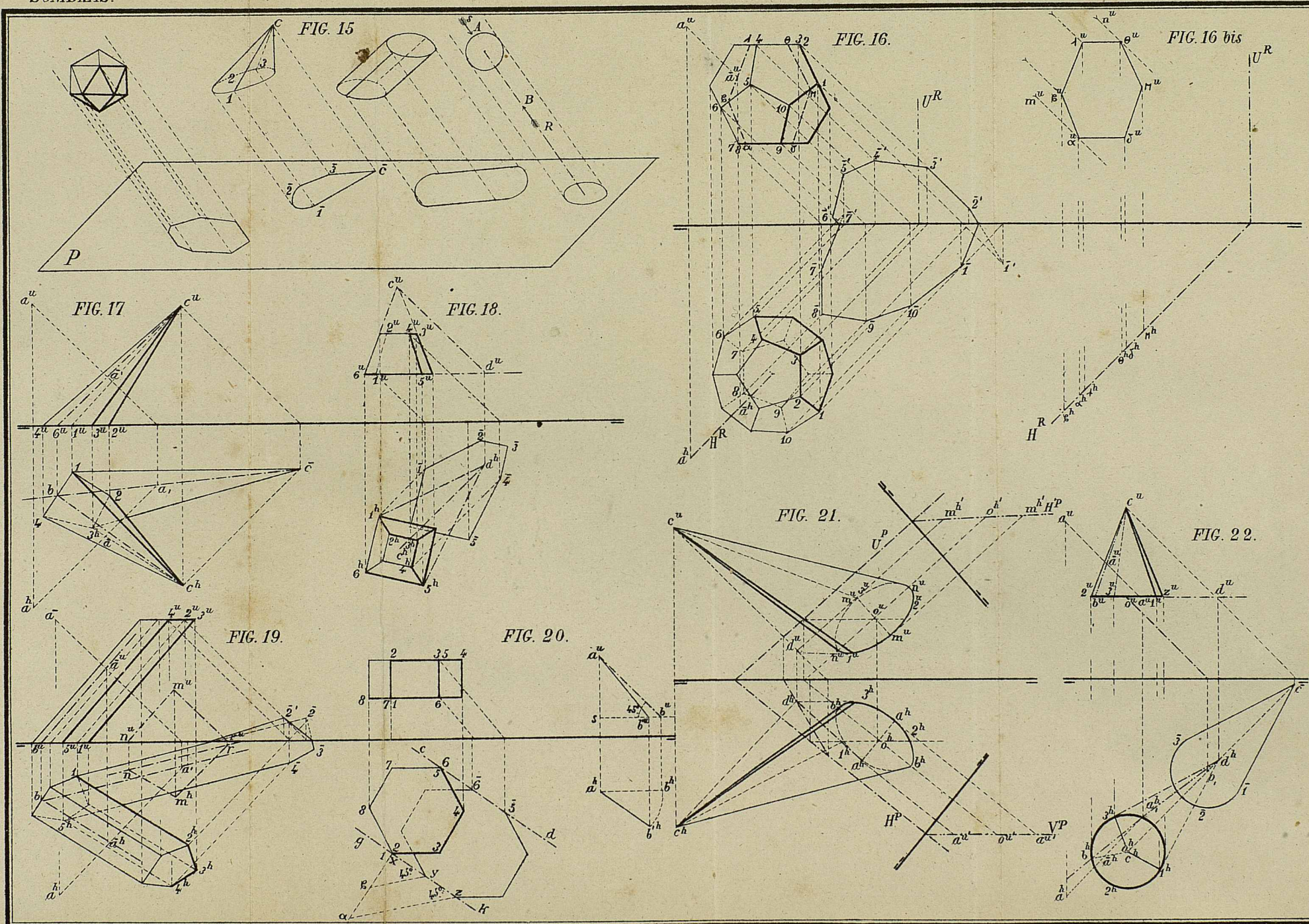


FIG. 13





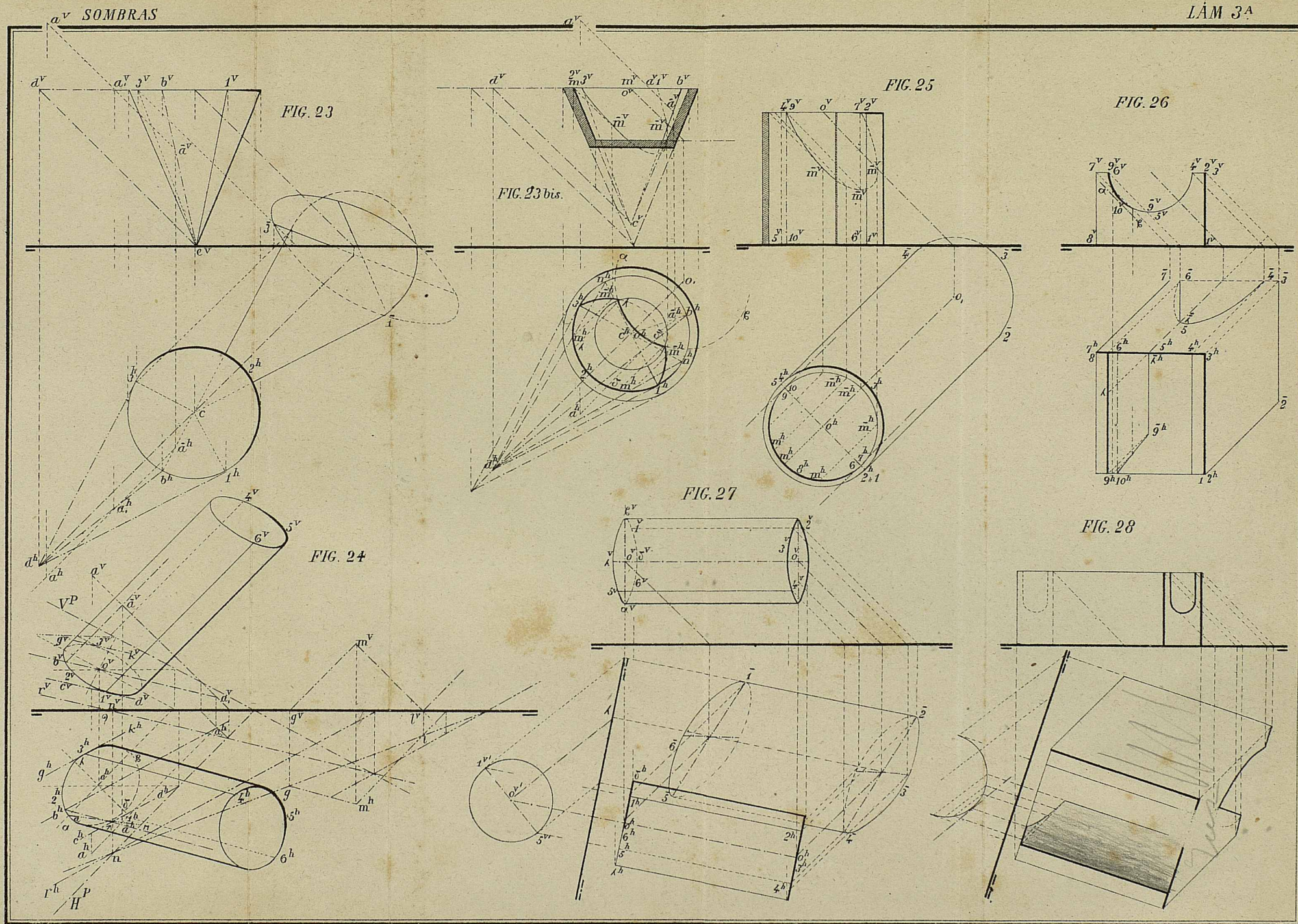


FIG. 29

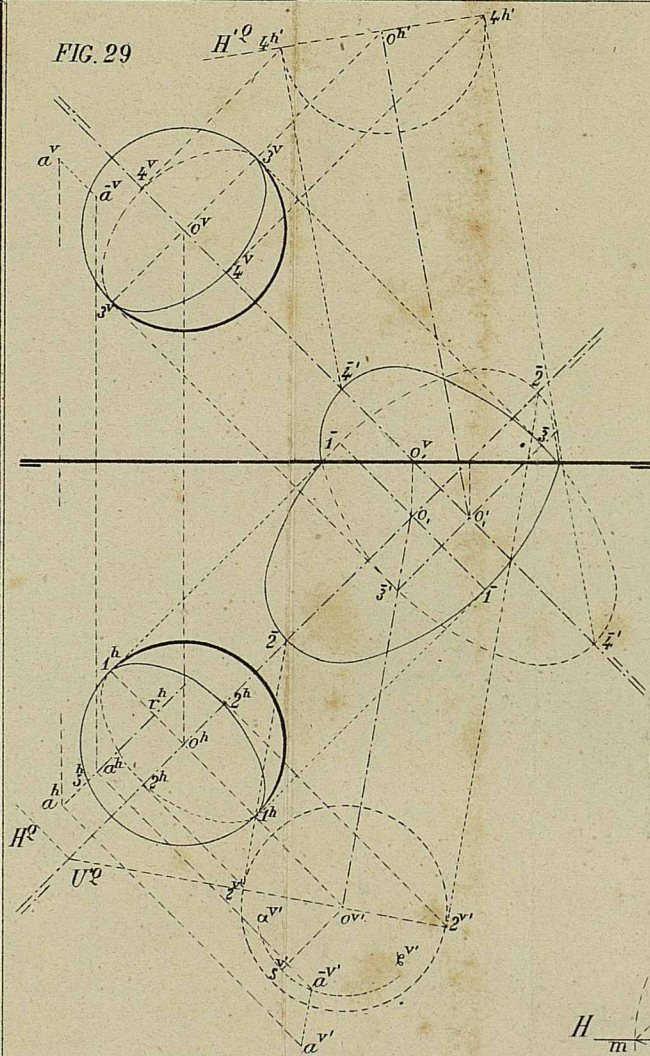


FIG. 30

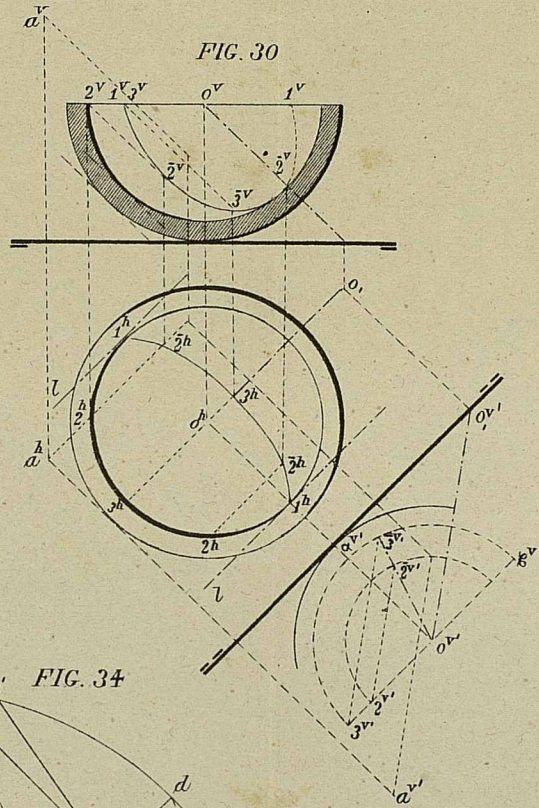


FIG. 32

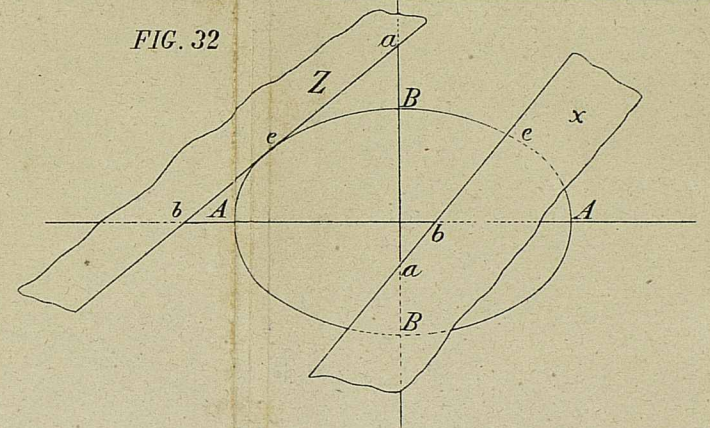


FIG. 31

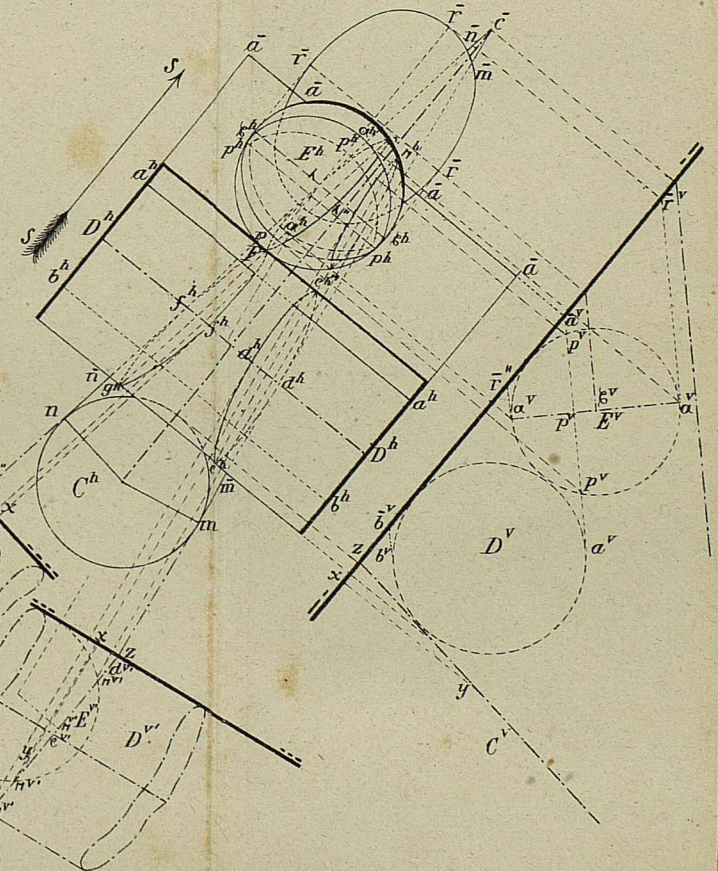


FIG. 34

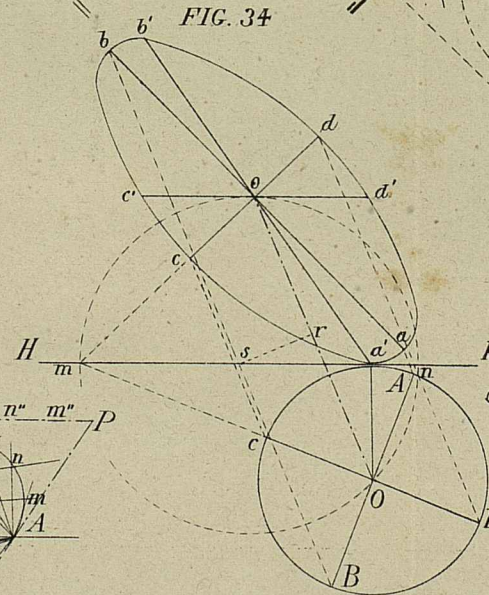
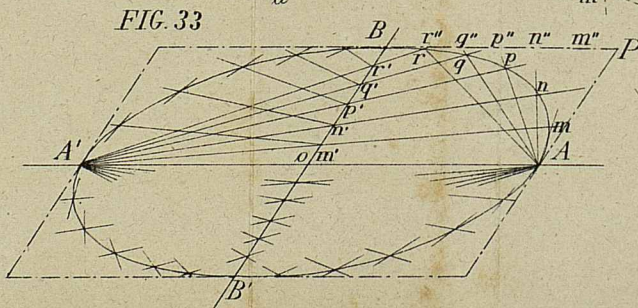


FIG. 33



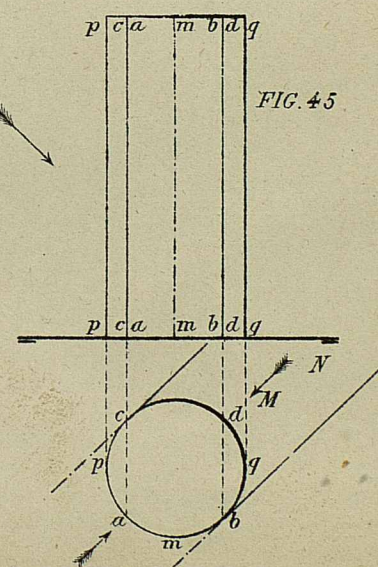
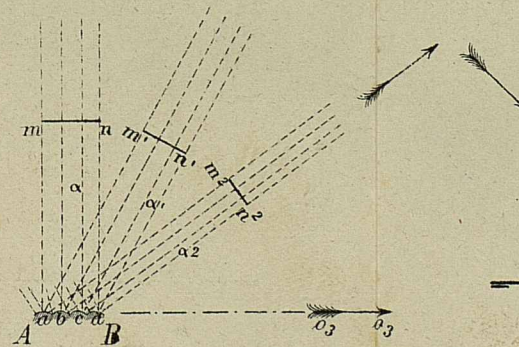
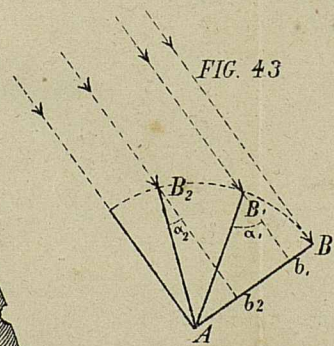
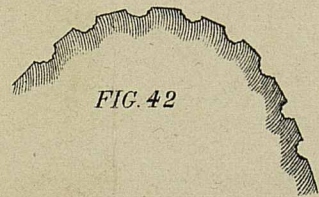
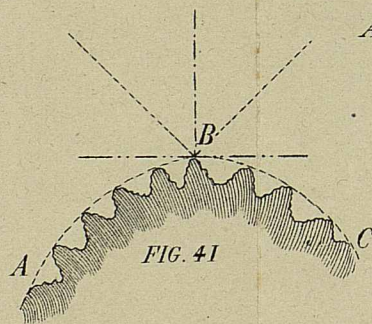
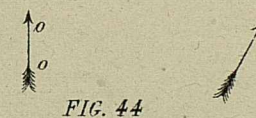
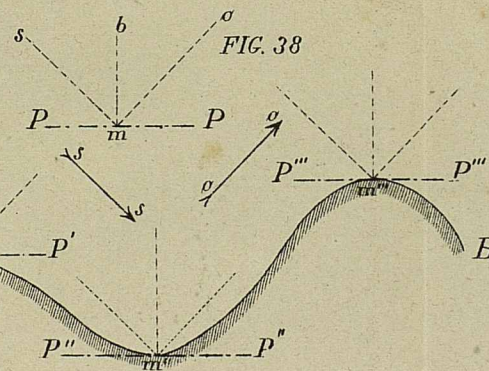
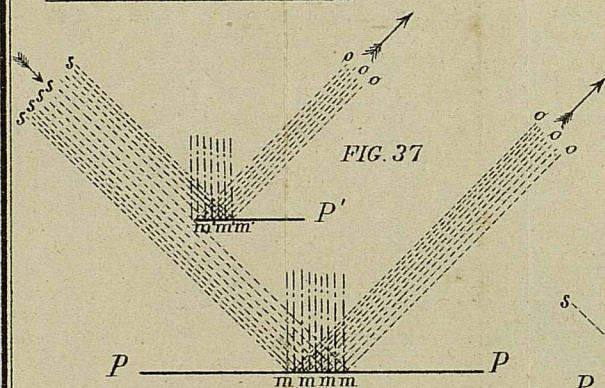
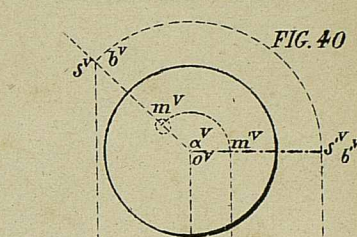
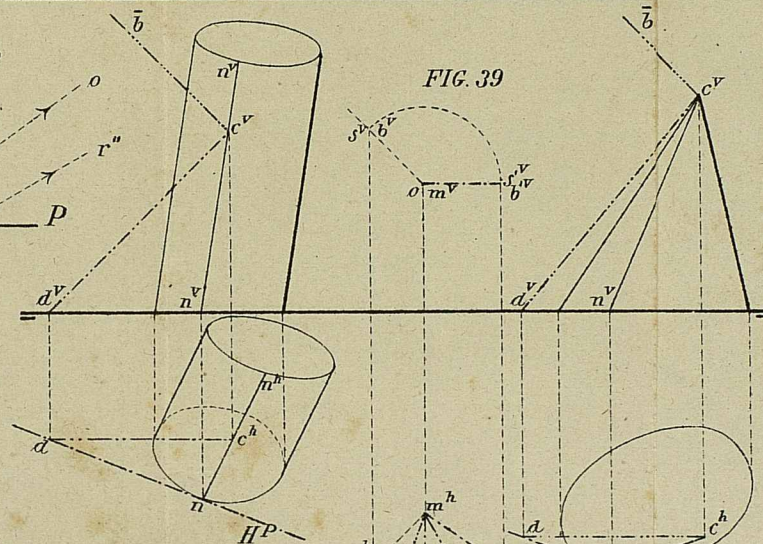
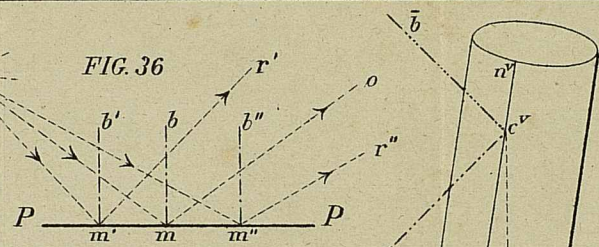
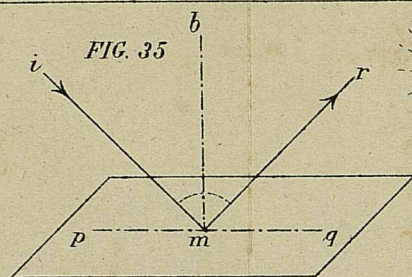


Fig: 35 a la 45

Fins