

8-10-1908 - pag 8 - 29

222

F. - 2 - 11

Programa

- de

Geometría y trigonometría



AL/F. 2-11

PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA

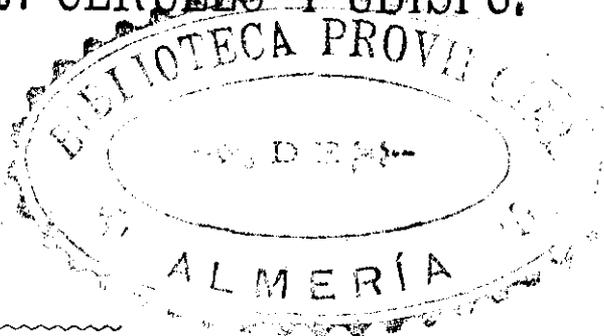
ACOMODADO

A LOS

ELEMENTOS DE MATEMÁTICAS

POR

D. S. MORENO REY Y D. J. CERUELO Y OBISPO.



Precio.—Cincuenta céntimos.

MADRID.

IMPRESA DE LA VIUDA É H. DE GÓMEZ FUENTENEbro,

Bordadores, 10.

1888.

Es propiedad.

---

---

# GEOMETRÍA.

---

## 1.

Espacio.—Extensión. — Punto. — Extensiones semejantes, equivalentes, iguales y congruentes.—Dimensiones.—Clases de extensión.—Línea: sus especies.—Línea recta; línea vertical.—Consecuencias de la definición de línea recta.—Línea curva.—Líneas compuestas.

## 2.

Superficie: sus especies.—Superficies regladas, plana, desarrollables y alabeadas.—Superficies curvas.—Cuerpo.—Cantidades geométricas.—Figura geométrica.—Geometría; su división.—Medios de demostración peculiares de la Geometría.—Problemas geométricos: sus especies y procedimientos de resolución de los gráficos.

## 3.

Trazado de una recta.—Medida común de dos rectas; máxima medida común de dos rectas y su investigación.—Rectas conmensurables é inconmensurables: su expresión.—Razón de dos rectas.—Medida de una recta: modo de obtenerla.—Nonius y su teoría.—Valor numérico de una recta.

#### 4.

Rectas concurrentes.—Angulo ; lados, vértice y designación de un ángulo.—Generación de un ángulo ; comparación de dos ángulos ; bisectriz de un ángulo.—Clasificación de los ángulos, uno á uno, en llanos, cóncavos y convexos.—Angulos opuestos por el vértice : su igualdad.—Angulos adyacentes.—Angulo recto —Angulos oblicuos ; agudo y obtuso.—Complemento y suplemento de un ángulo.—Suma de dos ángulos adyacentes.—Posición de dos ángulos suplementarios que tengan un lado común.—Angulos consecutivos ; su suma.

#### 5.

Recta perpendicular á otra ; línea horizontal.—Recta oblicua á otra.—Perpendiculares que, por un punto dado en un plano, se pueden trazar á una recta, dada en él ; trazado de una recta perpendicular á otra, por medio de la escuadra.—Relación de magnitud entre la perpendicular y las oblicuas á una recta, por un punto exterior á ella.—Distancia de un punto á una recta.—Propiedad de los puntos de la perpendicular á una recta, en su punto medio.—Propiedad de todo punto de la bisectriz de un ángulo.

#### 6.

Rectas paralelas.—Paralelismo de dos rectas perpendiculares á una tercera.—Postulado de EUCLIDES y deducciones inmediatas de esta proposición.—Angulos que forman dos rectas con una secante común á ambas.—Paralelismo de dos rectas deducido de la consideración de estos ángulos.

#### 7.

Igualdad de las partes de paralelas comprendidas entre paralelas. Distancia entre dos rectas paralelas.—División de una recta en partes iguales, por la división de otra.—Relación de magnitud entre dos ángulos de lados respectivamente paralelos ó de lados respectivamente perpendiculares.—Trazado de paralelas, por medio de la escuadra.

## 8.

Rectas proporcionales ; indicación de su proporcionalidad. — Recta cuarta y media proporcional á otras. Recta dividida en media y extrema razón. — Proporcionalidad entre los segmentos de los lados de un ángulo, cortados por rectas paralelas. — Proporcionalidad entre estas rectas y sus distancias al vértice del ángulo. — Proporcionalidad que resulta de cortar dos rectas paralelas, por tres ó más rectas concurrentes en un punto.

## 9.

Circunferencia ; radio. — Deducciones de estas definiciones. — Trazado de una circunferencia. — Determinación de una circunferencia por tres puntos. — Arco. Cuerda y diámetro ; arcos que determinan. — Relación entre dos arcos de una misma circunferencia y sus cuerdas. — Propiedades de todo diámetro perpendicular á una cuerda. Cuadrante. — Relación entre dos cuerdas de una misma circunferencia y sus distancias al centro.

## 10.

Ángulo central : arco correspondiente á un ángulo. — Comparación aritmética entre dos ángulos y sus arcos correspondientes, descritos con el mismo radio. — Arco correspondiente á un ángulo recto. — Máxima medida común de dos arcos del mismo radio : su investigación. — Medida de un arco. — Proporcionalidad entre dos ángulos y sus arcos correspondientes, descritos con el mismo radio ; deducciones.

Medida de un ángulo ; unidad de medida de ángulos. — Medida de un ángulo central. — Igualdad de medida de todos los arcos correspondientes á un ángulo dado. — Medidas circulares y angulares ; división sexagesimal y centesimal de la circunferencia. — Amplitud de un arco y de un ángulo ; medio de obtenerla ; semicírculo graduado ; transportador ; nonius circular.

## 11.

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia, en un mismo plano.—Recta secante á una circunferencia; segmento externo.—Recta tangente á una circunferencia.—Recta exterior á una circunferencia.—Distancia desde el centro de una circunferencia á una recta, en cada una de estas posiciones.—Perpendicularidad de una tangente á una circunferencia y el radio correspondiente al punto de contacto.—Corolario.

## 12.

Rectas paralelas, en el plano de una circunferencia: sus posiciones respecto á ésta.—Igualdad de los arcos de circunferencia comprendidos entre rectas paralelas.—Rectas concurrentes, en el plano de una circunferencia: sus posiciones respecto á ésta.—Ángulo inscrito, semi-inscrito, interior y exterior, á una circunferencia.—Medida de un ángulo inscrito; igualdad de los inscritos en un mismo arco.—Medida de un ángulo semi-inscrito.

## 13.

Arco capaz de un ángulo dado.—Medida de un ángulo interior á una circunferencia.—Medida de un ángulo exterior.

## 14.

Proporcionalidad entre dos secantes á una circunferencia y sus segmentos externos; entre una tangente y una secante y el segmento externo de ésta.—Proporcionalidad entre los segmentos de dos cuerdas concurrentes en el interior de una circunferencia; entre la distancia desde un punto de una circunferencia al diámetro, y los segmentos de éste.

## 15.

Posiciones relativas de dos circunferencias en un mismo plano.—Situación del punto ó puntos comunes á dos circunferencias.—Magnitud de la distancia de los centros, en función de los radios en cada una de las posiciones relativas de dos circunferencias.

## 16.

Operaciones con rectas. Sumar dos ó más rectas; hallar la diferencia de dos rectas; hallar una recta múltipla de otra; dividir, *por tanteo*, una recta en partes iguales.—Hallar, por una perpendicular, el punto medio de una recta.—Dividir una recta en 2<sup>n</sup> partes iguales.—Trazar una circunferencia sobre una recta, dada como diámetro.—Hallar el punto medio de un arco.—Trazar la perpendicular á una recta por un punto dado, en ella.—Trazar la perpendicular á una recta por un punto dado, fuera de ella.—Trazar la perpendicular á una recta en uno de sus extremos.—Trazar la circunferencia que pase por tres puntos dados, que no estén en línea recta.—Hallar el centro de una circunferencia ó de un arco.—Trazar un arco igual á otro dado.

## 17.

Operaciones con arcos del mismo radio. Sumar dos ó más arcos; hallar la diferencia de dos arcos; hallar un arco múltiplo de otro; dividir, *por tanteo*, un arco ó una circunferencia en partes iguales.—Trazar un ángulo igual á otro dado.—Operaciones con ángulos.—Trazar la bisectriz de un ángulo.—Dividir un ángulo en 2<sup>n</sup> partes iguales.—Trazar, por un punto dado, la paralela á una recta dada.

## 18.

Dividir una recta en  $n$  partes iguales, por medio de la división de otra.—Dividir una recta en partes proporcionales á otras dadas ó á números dados.—Hallar la cuarta proporcional á tres rectas dadas.—Hallar la media proporcional á dos rectas dadas.—Dividir una recta en media y extrema razón.

## 19.

Trazar, sobre una recta dada, un arco capaz de un ángulo dado.—Trazar la recta tangente á una circunferencia, en un punto dado de ésta.—Trazar la tangente á una circunferencia, por un punto dado, fuera de ella.—Trazar una recta tangente común á dos circunferencias dadas; discusión de este problema.

## 20.

Polígono; sus elementos.—Diagonal, contorno, perímetro.—Polígonos convexos y cóncavos.—Polígono regular é irregular, equilátero y equiángulo.—Clasificación de los polígonos por el número de sus ángulos.—Polígonos iguales y semejantes; vértices, lados y diagonales homólogos.—Condiciones necesarias para la igualdad y para la semejanza de dos polígonos.

## 21.

Triángulo: sus elementos y disposición de éstos.—Base, altura.—Relación de magnitud entre un lado de un triángulo y los otros dos.—Clasificación de los triángulos, por sus lados.—Propiedades de la altura de un triángulo isósceles.—Relación de magnitud entre los lados de un triángulo y sus ángulos opuestos. Corolarios.—Propiedad de las perpendiculares trazadas á los lados de un triángulo en sus puntos medios y de las bisectrices de sus ángulos.—Suma de los ángulos de un triángulo. Corolarios.—Clasificación de los triángulos, por sus ángulos.

## 22.

Condiciones suficientes para la igualdad de dos triángulos.—Casos generales de igualdad de triángulos y particulares de la de dos triángulos isósceles, dos equiláteros y dos rectángulos.—Igualdad de dos triángulos rectángulos que tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto.

## 23.

Semejanza de un triángulo cualquiera y el que resulta de trazar una paralela á uno de sus lados.—Condiciones suficientes para la semejanza de dos triángulos.—Casos generales de semejanza de triángulos y particulares de la de dos triángulos de lados respectivamente paralelos ó perpendiculares, de dos isósceles y de dos rectángulos.—Semejanza de dos triángulos rectángulos que tienen proporcionales la hipotenusa y un cateto.

## 24.

Proyección de un punto sobre una recta y de una recta sobre otra.—Proporcionalidades que resultan de trazar, desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo, una perpendicular á la hipotenusa.—Teorema de PITAGORAS.—Expresión general de la hipotenusa, en función de los catetos, y de uno de éstos, en función del otro y la hipotenusa.—Valor del cuadrado de uno de los lados de un triángulo oblicuángulo, en función de los cuadrados de los otros dos y de la proyección de uno de éstos sobre el otro.—Expresión general de estas relaciones y deducciones que de ellas se desprenden.

## 25.

Descomposición de un polígono en triángulos.—Suma de los ángulos de un polígono; valor de cada uno de ellos en el equiángulo.—Igualdad y semejanza de dos polígonos cualesquiera.—Puntos y rectas homólogos, en dos polígonos semejantes.—Proporcionalidad entre dos rectas homólogas de dos polígonos semejantes.—Razón de los perímetros de dos polígonos semejantes.

## 26.

Cuadriláteros: sus elementos y disposición de éstos. Diagonales.—Suma de los ángulos de un cuadrilátero.—Clasificación de los cuadriláteros.—Trapezoide.—Trapezio; bases y altura; base media: su valor en función de las bases.—Paralelógramo; base y altura.—Clasificación de los paralelógramos.—Paralelógramos oblicuángulares. Romboide. Rombo.—Paralelógramos rectangulares. Rectángulo. Cuadrado.—Propiedades de los lados, ángulos y diagonales de todo paralelógramo.—Cualidades de las diagonales de los paralelógramos oblicuángulares y de los rectangulares.—Condiciones suficientes para la igualdad y para la semejanza de dos cuadriláteros, en general, y, en particular, de dos trapezios, dos romboides, dos rombos, dos rectángulos y dos cuadrados.

## 27.

Propiedad de las bisectrices de los ángulos y de las perpendiculares en los puntos medios de los lados de un polígono regular.—Centro, apotema, radio y ángulo en el centro, de un polígono regular.—Condición suficiente para la igualdad y semejanza de dos polígonos regulares.—Razón de los perímetros de dos polígonos regulares semejantes.

## 28.

Medida de una superficie; unidades superficiales.—Razón de dos rectángulos de una dimensión común y de dos rectángulos cualesquiera.—Área de un triángulo, de un trapecio, de un paralelogramo y de un polígono regular.—Obtención del área de un polígono irregular.

## 29.

Razón de las áreas de dos triángulos cualesquiera; de dos triángulos de la misma base ó de la misma altura; de dos triángulos semejantes; de dos polígonos semejantes cualesquiera y de dos polígonos regulares del mismo número de lados.—Teorema de PITÁGORAS: su aplicación á los polígonos semejantes contruidos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

## 30.

Figuras circulares.—Círculo. Corona ó anillo. Sector. Trapecio: sus bases. Segmento y faja.—Polígono inscrito y circunscrito á un círculo.—Condición necesaria y suficiente para que un polígono sea inscribible ó circunscribible á un círculo.—Regularidad de los polígonos que resultan de dividir una circunferencia en partes iguales y trazar las cuerdas de los arcos resultantes ó las tangentes á éstos en sus extremos ó en sus puntos medios.—Límite de la diferencia entre el radio y la apotema de un polígono regular.

### 31.

Valor, en función del radio, del lado del cuadrado, del exágono regular y del triángulo equilátero, inscritos en un círculo.—Valores numéricos de estos lados, cuando el radio es la unidad.—Apotema del cuadrado, del exágono regular y del triángulo, equilátero, inscritos, en función del radio.—Lado de un polígono regular inscrito, en función del radio y del lado del polígono regular inscrito de un número de lados, mitad de los de aquél.—Lado de un polígono regular circunscrito, en función del radio y del lado del polígono regular inscrito del mismo número de lados.

### 32.

Rectificar una circunferencia ó un arco.—Variación de los perímetros de los polígonos regulares inscritos y de los circunscritos, á medida que se duplica el número de sus lados.—Límite de la diferencia entre los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, á un mismo círculo.—La circunferencia como límite de los polígonos inscritos y circunscritos en un círculo.—Razón de dos circunferencias; invariabilidad de esta razón: su indicación convencional.—Procedimiento elemental para hallar el valor numérico de  $\pi$ .—Expresiones numéricas, más usadas, de este valor.—Rectificación numérica de una circunferencia.—Expresión de su longitud y de la de un arco. Reglas que de ellas se deducen.—Rectificación gráfica de una circunferencia.

### 33.

Límite de la diferencia entre las áreas de dos polígonos regulares semejantes, uno inscrito y otro circunscrito, á un mismo círculo.—El círculo como límite de los polígonos inscritos y circunscritos en él.—Área del círculo y del sector.—Obtención del área de una corona, un trapecio, un segmento y una faja circulares.

### 34.

Razón de las áreas de dos círculos y de dos sectores circulares.—Aplicación del teorema de PITÁGORAS á círculos construidos sobre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo.

### 35.

Construir un triángulo, dados un lado y dos ángulos. Aplicación de esta construcción á la de un triángulo isósceles y á la de un rectángulo.—Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo comprendido. Aplicación de esta construcción á la de un triángulo isósceles y á la de un rectángulo.—Construir un triángulo, dados sus tres lados. Aplicación de esta construcción á la de un triángulo isósceles y á la de un equilátero.

### 36.

Construir un triángulo, dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.—Discusión de este problema. Aplicación de esta construcción á la de un triángulo rectángulo.—Construir un romboide, dados dos lados y el ángulo comprendido. Aplicación de esta construcción á la de un rombo, á la de un rectángulo y á la de un cuadrado.—Construir un polígono igual á otro dado.

### 37.

Construir un triángulo semejante á otro, sobre una línea dada como lado homólogo de uno de los del propuesto.—Construir un polígono semejante á otro, sobre una recta dada como lado homólogo de uno de los del propuesto.—Construir un polígono semejante á otro y cuyo perímetro esté con el del primero en la razón de dos líneas ó dos números  $m$  y  $n$ .

### 38.

Hallar el área de un triángulo, en función de sus lados.—Construir un polígono semejante á otro y cuya área esté con la del propuesto en la razón de dos líneas ó dos números  $m$  y  $n$ .—Construir un polígono semejante á otros dos, semejantes entre sí, y equivalente á la suma ó á la diferencia de estos.

### 39.

Inscribir ó circunscribir á un círculo dado un polígono regular de  $n$  lados. Aplicación de esta construcción á inscribir ó circunscribir á un círculo, un cuadrado, un exágono regular y un triángulo equilátero. — Construir un polígono regular de  $n$  lados, dado uno de ellos.—Construcción, cuando el polígono pedido, sea un exágono regular.—Construir un círculo cuya área esté con la de otro dado en la razón de dos líneas ó dos números  $m$  y  $n$ . — Construir un círculo equivalente á la suma ó á la diferencia de otros dos.

### 40.

Transformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos. Aplicación de esta construcción á la transformación de un polígono en un triángulo equivalente. — Dividir un polígono en partes equivalentes, por medio de rectas concurrentes en un punto dado de su contorno. — Cuadrar una figura. Cuadratura de una figura. — Hallar la cuadratura de una figura; deducción del procedimiento general y aplicación de éste á la cuadratura de un triángulo, un trapecio, un paralelógramo y un polígono regular, y á la aproximada, de un círculo y de un sector circular.

## 41.

Diversas posiciones de líneas y planos en el espacio y representación de cada una de ellas.—Recta perpendicular á un plano.—Recta oblicua.—Condición suficiente para que una recta sea perpendicular á un plano.—Situación de todas las perpendiculares á una recta en el espacio, por un punto de ella; número de perpendiculares que, en el espacio, se pueden trazar, por un punto, á una recta dada.

## 42.

Perpendiculares que, por un punto dado, se pueden trazar á un plano dado.—Trazado de una recta perpendicular á un plano, por medio de la doble escuadra.—Planos perpendiculares que, por un punto dado, se pueden trazar á una recta.—Trazado de un plano perpendicular á una recta dada, por medio de la doble escuadra.—Plano horizontal; línea horizontal.—Obtención de la horizontalidad de un plano. Niveles.—Relación de magnitud entre la perpendicular y las oblicuas á un plano por un punto exterior á él.—Número de oblicuas iguales que se pueden trazar desde un punto á un plano, y figura que, en éste, determinan los piés de dichas oblicuas.—Distancia de un punto á un plano.

## 43.

Teorema de las tres perpendiculares.—Paralelismo de dos rectas perpendiculares á un plano.—Paralelismo, en el espacio, de dos rectas paralelas á una tercera.—Proyección de un punto y de una recta sobre un plano.—Angulo de una recta y un plano.

## 44.

Recta paralela á un plano.—Paralelismo de un plano y una recta paralela á otra situada en él. Corolarios.—Igualdad de las partes de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos. Distancia entre una recta y un plano, paralelos.—Existencia de una perpendicular común á dos rectas que se cruzan.—Distancia entre dos rectas que se cruzan.

## 45.

Planos paralelos. — Paralelismo de dos planos perpendiculares á una recta. — Paralelismo de las intersecciones de dos planos paralelos, con un tercer plano. — Perpendicularidad de una recta y un plano paralelo á otro, al que aquélla sea perpendicular. — Paralelismo de dos planos paralelos á un tercero. — Igualdad de las partes de rectas paralelas comprendidas entre planos paralelos. — Distancia entre dos planos paralelos. — Relación de magnitud entre dos ángulos de lados paralelos y paralelismo de sus planos. — Proporcionalidad entre los segmentos de dos rectas cortadas por tres planos paralelos.

## 46.

Planos secantes. — Ángulo diedro; caras, arista y designación de un diedro. — Generación de un diedro: comparación de dos diedros. — Plano bisector de un diedro. — Clasificación de los diedros, uno á uno, en llanos, cóncavos y convexos. — Diedros opuestos por la arista: su igualdad. — Diedros adyacentes. — Diedro recto. — Diedros oblicuos: agudo y obtuso. — Complemento y suplemento de un diedro. — Suma de dos diedros adyacentes. — Posición de dos diedros suplementarios que tienen una cara común. — Diedros consecutivos: su suma. — Ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro. — Proporcionalidad entre dos diedros y sus ángulos rectilíneos correspondientes. — Medida de un diedro. — Ángulos que forman dos planos con otro secante á ámbos: paralelismo de dos planos, deducido de la consideración de estos ángulos.

## 47.

Planos perpendiculares entre sí. Planos oblicuos. — Perpendicularidad de un plano y una recta trazada en otro perpendicular al primero, siendo dicha recta perpendicular á la intersección de ámbos. — Perpendicularidad de dos planos, de los que uno pasa por una perpendicular al otro. Corolario. — Posición, con relación á un plano, de la intersección de otros dos, perpendiculares á él. Corolarios. — Suplementariedad de un diedro y el ángulo formado por dos rectas concurrentes, perpendiculares á sus caras. — Inclinación de un plano respecto á otro.

## 48.

Planos concurrentes.—Ángulo poliedro: sus elementos.—Vértice y aristas de un ángulo poliedro: designación de un ángulo poliedro.—Ángulo poliedro cóncavo y convexo.—Triedro.—Triedros suplementarios.—Relación de magnitud entre un ángulo plano de un triedro y los otros dos. Límite superior de la suma de los ángulos planos de un ángulo poliedro.—Coexistencia de dos triedros recíprocamente suplementarios.—Límites, superior é inferior, de la suma de los diedros de un triedro.—Clasificación de los triedros por sus diedros.

## 49.

Condiciones suficientes para la igualdad de dos triedros.—Casos generales de igualdad de triedros.—Relación de magnitud entre los diedros de un triedro y sus ángulos planos opuestos.

## 50.

Superficies nó planas: su generación.—Superficies nó planas de que se ocupa la Geometría elemental.—Posiciones relativas de dos superficies curvas ó de una plana y otra curva.—Superficie cónica; vértice, generatriz, hojas de la superficie cónica.—Superficie cónica de revolución; eje; ángulo cónico.—Secciones de una superficie cónica por planos perpendiculares al eje. Generación curvilínea de la superficie cónica de revolución.—Secciones de una superficie cónica por un plano que pase por el vértice y una cuerda de una sección plana perpendicular á él.—Plano tangente á una superficie cónica: su determinación.—Desarrollo de una superficie cónica de revolución.

## 51.

Superficie cilíndrica; generatriz.—Superficie cilíndrica de revolución; eje.—Secciones de una superficie cilíndrica por planos perpendiculares al eje. Generación curvilínea de una superficie cilíndrica de revolución.—Secciones de una superficie cilíndrica por un plano paralelo al eje y que pase por una cuerda de una sección plana perpendicular á él.—Plano tangente á una superficie cilíndrica.—Desarrollo de una superficie cilíndrica de revolución.

## 52.

Superficie esférica.—Centro, radio y diámetro de una superficie esférica. Consecuencias de estas definiciones. — Determinación de una superficie esférica por cuatro puntos que no están en un plano.—Secciones planas de una superficie esférica: relación entre el radio de la superficie esférica, el de la sección y la distancia de ésta al centro de aquélla. Corolarios.—Circunferencias máximas y menores.—Polos de un círculo: su equidistancia á todos los puntos de la circunferencia de que son polos. — Distancia esférica; distancia rectilínea.—Radio esférico; distancia polar. — Plano tangente á una superficie esférica: su determinación. — Ángulo esférico; lados, vértice y designación de un ángulo esférico. — Medida de un ángulo esférico.

## 53.

Poliedro: sus elementos.—Caras; aristas; ángulos poliedros y ángulos planos. Plano y recta diagonal. —Área de un poliedro. —Poliedro convexo y cóncavo; regular é irregular. —Clasificación de los poliedros por el número de sus caras. — Poliedros iguales y semejantes. —Vértices, aristas y diagonales homólogos. — Condiciones necesarias para la igualdad y para la semejanza de dos poliedros.

## 54.

Tetraedro: base, aristas, vértice y altura.—Designación de un tetraedro. — Propiedades que se manifiestan al cortar un tetraedro por un plano paralelo á la base.—Proporcionalidad entre las bases de dos tetraedros de igual altura y las secciones paralelas á ellas y equidistantes de los respectivos vértices. Caso en que estas secciones son equivalentes.

## 55.

Condiciones suficientes para la igualdad de dos tetraedros.—Casos generales de igualdad de tetraedros.

## 56.

Semejanza de un tetraedro cualquiera y el que resulta de cortarle por un plano paralelo á una de sus caras.—Condiciones suficientes para la semejanza de dos tetraedros.—Casos generales de semejanza de tetraedros.

## 57.

Descomposición de un poliedro en tetraedros. Tetraedros interiores y exteriores.—Igualdad y semejanza de poliedros. — Puntos y líneas homólogas en dos poliedros semejantes. — Proporcionalidad entre dos rectas homólogas, en dos poliedros semejantes.— Razón de las áreas de dos poliedros semejantes.

## 58.

Pirámide: base, caras laterales, vértice, aristas y altura.—Tronco de pirámide; bases; pirámide deficiente. — Clasificación de las pirámides. — Pirámide regular. — Propiedades que se manifiestan al cortar una pirámide por un plano paralelo á la base.—Proporcionalidad entre las bases de dos pirámides de igual altura y las secciones paralelas á ellas y equidistantes de los respectivos vértices. Caso en que estas secciones son equivalentes.—Igualdad y semejanza de dos pirámides.—Area de una pirámide regular. — Area de un tronco de pirámide regular.

## 59.

Prisma: bases, caras laterales, aristas y altura.—Tronco de prisma. — Clasificación de los prismas. — Paralelepípedos: sus especies. Romboedro. Cubo.—Prisma regular.—Prisma recto y oblicuo. — Dimensiones de un paralelepípedo rectangular recto.—Sección recta de un prisma. — Igualdad de las caras opuestas de un paralelepípedo.—Igualdad y semejanza de dos prismas.—Area de un prisma recto.—Area de un prisma oblicuo.

## 60.

Número de poliedros regulares convexos.—Punto equidistante de los vértices y de las caras de un poliedro regular.—Centro, apotema y radio de un poliedro regular.—Área de un poliedro regular.

## 61.

Medida de un cuerpo; unidades volumétricas.—Razón de dos paralelepípedos rectangulares rectos que tienen dos dimensiones comunes, una dimensión común ó ninguna dimensión común.—Volúmen de un paralelepípedo rectangular recto y de un cubo.—Equivalencia de dos paralelepípedos de igual altura y bases equivalentes.—Volúmen de un paralelepípedo cualquiera.—Volúmen de un prisma.

## 62.

Equivalencia de dos tetraedros de la misma altura y bases equivalentes.—Volúmen de un tetraedro.—Volúmen de una pirámide cualquiera.—Volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas.—Volúmen de un poliedro regular.—Obtención del volúmen de un poliedro cualquiera.

## 63.

Razón de los volúmenes de dos tetraedros semejantes: de dos poliedros semejantes: de dos pirámides ó de dos prismas.

## 64.

Cuerpos redondos.—Cuerpos de revolución; su generación.—Meridianos y paralelos.

Cono: vértice, base y altura.—Cono de revolución: su generación. Eje ó altura, base, lado.—Tronco de cono ó cono truncado de revolución; bases; cono deficiente.—Conos de revolución iguales y semejantes.—Paralelos de un cono de revolución.—Área del cono de revolución.—Área del tronco de cono de revolución.

### 65.

Cilindro: bases y altura.—Cilindro de revolución; su generación. Eje ó altura, bases, lado.—Area del cilindro de revolución.

### 66.

Esfera. Centro, radio, diámetro: su generación.—Paralelos de una esfera.—Area de la superficie engendrada por la base de un triángulo isósceles que gira alrededor de un eje trazado en su plano y que pasa por su vértice.—Area de la superficie engendrada por el contorno de un semipolígono regular que gira alrededor del radio de uno de sus extremos.—Area de una esfera.

### 67.

Zona esférica.—Huso esférico.—Polígono esférico; poliedro correspondiente á un polígono esférico.—Triángulo esférico; triedro correspondiente á un triángulo esférico.—Triángulos esféricos simétricos.—Propiedades de los triángulos esféricos.—Igualdad de dos triángulos esféricos.—Equivalencia de dos triángulos esféricos simétricos.—Línea más corta que se puede trazar de un punto á otro en una superficie esférica.—Area de una zona, de un huso y de un triángulo esférico.

### 68.

El cono, como límite de una pirámide.—Volúmen de un cono de revolución.—Volúmen del tronco de cono de revolución.—El cilindro, como límite de un prisma.—Volúmen de un cilindro de revolución.

### 69.

Volúmen del cuerpo engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje trazado en su plano y que pasa por su vértice.—Volúmen del cuerpo engendrado por un semipolígono regular que gira alrededor del radio de uno de los extremos de su contorno.—Volúmen de la esfera, sector, segmento esférico, y de la cuña y pirámide esféricas.

### 70.

Razón de los volúmenes de dos conos semejantes, de dos cilindros semejantes y de dos esferas.

# TRIGONOMETRÍA.

---

## 71.

Deficiencia de las construcciones geométricas para la determinación exacta de los elementos de una figura poligonal.—Aplicación del Algebra á la Geometría. Trigonometría: su fin general y particular: su división en plana y esférica.—Líneas trigonométricas: su definición.—Convenios hechos para fijar la posición y signo de las líneas trigonométricas.

## 72.

Líneas trigonométricas correspondientes á un arco dado: signos, variaciones de magnitud y límite de cada una de ellas. — Arcos correspondientes á una línea trigonométrica dada. — Líneas trigonométricas de un arco negativo, en función de las del mismo arco positivo. — Líneas trigonométricas de dos arcos complementarios. — Líneas trigonométricas de dos arcos suplementarios. — Expresión de las líneas trigonométricas de un arco cualquiera, en función de las de otro positivo y menor que un cuadrante.

## 73.

Funciones circulares; su división en fundamentales y derivadas. — Funciones circulares fundamentales: su obtención y generalidad. Su forma cuando el radio es la unidad. — Aplicaciones más inmediatas de las funciones circulares fundamentales. •

## 74.

Funciones circulares derivadas.—Obtención de las que dan el seno y coseno de la suma y de la diferencia de dos arcos, en función del seno y coseno de dichos arcos: su generalidad: sus aplicaciones á la obtención del seno y coseno de un arco, en función del seno y coseno del arco mitad, y á la del seno y coseno de un arco, en función del coseno del arco duplo.

## 75.

Valor numérico de una línea trigonométrica.—Obtención de los valores numéricos de las líneas trigonométricas de los arcos de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  y  $60^\circ$ . — Inconvenientes de la aplicación de teorías elementales á la determinación de los valores numéricos de las líneas trigonométricas de todos los arcos.—Tablas trigonométricas naturales. — Aplicación á ellas, de los logaritmos.—Tablas trigonométricas artificiales.

## 76.

Necesidad de la preparación de las funciones circulares para el cálculo logarítmico.—Transformación, en productos, de la suma ó diferencia de dos senos ó de dos cosenos.—Razón de la suma y de la diferencia de los senos de dos arcos.

## 77.

Procedimiento en la resolución de triángulos rectilíneos. Obtención de fórmulas trigonométricas.

Expresión trigonométrica de un cateto de un triángulo rectángulo, en función de la hipotenusa y los ángulos agudos, ó en función de estos y del otro cateto.—Analogías que se obtienen de estas expresiones.

## 78.

Casos de resolución de triángulos rectángulos.—Elección de las analogías convenientes para cada uno de ellos.

## 79.

Proporcionalidad de los lados de un triángulo y de los senos de sus ángulos opuestos. —Razón de la suma y de la diferencia de dos lados de un triángulo.— Expresión del cuadrado de uno de los lados de un triángulo oblicuángulo, en función de los otros dos y del coseno del ángulo opuesto al primero.—Analogías que se obtienen de estas expresiones.

## 80.

Casos de resolución de triángulos oblicuángulos. —Elección de las analogías convenientes para cada uno de ellos.

