LÓS

BRA

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.

ELEMENTOS

DE

ALGEBRA

POR

D. JUAN ARGULLÓS Y SEDANO

CATEDRÁTICO NUMERARIO DE MATEMÁTICAS
EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE SEGUNDA ENSEÑANZA DE JEREZ DE LA FRONTERA.

Juan Argullós y Sedano

JERÉZ.
IMPRENTA DE «EL GUADALETE,» Á CARGO DE J. PAREJA,
CALLE COMPÁS, NÚMERO 2.
1895.

ELEMENTOS DE ÁLGEBRA.

LIBRO PRIMERO.

CÁLCULO ALGEBRAICO.

CAPÍTULO I.

Nociones fundamentales.

ARTÍCULO 1.°

Ventajas de la representación literal de las cantidades.

1. En el Álgebra se considera la cantidad de una manera general y por consiguiente con completa independencia del número y de la especie á que se refiere. La representación general de la cantidad reclama el uso de símbolos que no sean las cifras conocidas en la numeración. Los signos que se ha convenido emplear con aquel fin son las letras del alfabeto. Aun cuando también se usaban éstas en la Aritmética, con objeto de representar los números de un modo por lo general más breve y que en ocasiones facilitara los razonamientos, nunca se prescindía de que expresaran una colección de unidades

iguales de valor determinado; de modo que las propiedades demostradas en la teoría de los números enteros había que volver á hacer patente su evidencia en el caso de que fueran fraccionarios ó inconmensurables. Por ejemplo, cuando (ARITMÉTICA 21) una vez demostrado que *«El producto de varios factores enteros es independiente del orden de colocación de éstos»* había necesidad de hacer ver (ARITM.ª 92) que la misma proposición era cierta cuando los factores eran todos quebrados ó unos enteros y otros quebrados, así como también (ARITM.ª 187, corolario 2.º) cuando el producto indicado constara de factores inconmensurables. En el Álgebra no sucede lo mismo: en ella se prescinde por completo de la forma del número, y por tanto de las veces que contiene á la unidad de medida, de modo que los razonamientos pertinentes á toda cuestión algebraica siempre se apoyan en propiedades generales y comunes á todas las cantidades é independientemente del símbolo con que éstas se hallen representadas: según esto, fácilmente se comprende que así como en Aritmética pudiera haberse prescindido de la escritura simbólica, no sería posible hacer lo mismo en el Álgebra, en donde la precitada escritura es de todo punto indispensable.

Por otra parte, en la Aritmética se efectúan los cálculos con números cuyo valor es conocido; así es que los resultados obtenidos en los ejemplos y problemas que á ella conciernen, no manifiestan señal alguna de las operaciones que para determinarlos había habido necesidad de efectuar. No así en el Álgebra, donde por lo mismo que con las letras no pueden ejecutarse en realidad operaciones sino meramente indicar éstas, queda marcada con tal motivo en el resultado final, la manera de proceder con los datos para encontrar el valor de la incógnita.

El cuadro que determina las operaciones que deben efectuarse con las cantidades conocidas, con el fin de averiguar el valor de la desconocida, recibe el nombre de FÓRMULA.

Un ejemplo de esta clase de expresiones literales se tiene en la regla de aligación directa (ARITM.ª 181), cuando para la determinación del precio medio de una mezcla se ve que $P=\frac{np+n'p'+n''p''+\ldots}{n+n'+n''+\ldots}$, lo cual manifiesta que el procedimiento para hallar el valor de la incógnita en todos los problemas de esta misma índole, consiste en calcular los valores de las cantidades mezcladas, sumar éstos y dividir la suma que resulte por el número que exprese la totalidad de las unidades que componen la mezcla: el cociente obtenido será el valor del precio medio que se deseaba encontrar.

Para la resolución de las cuestiones correspondientes á las reglas de interés, descuento, compañía, etc., se dedujeron también las respectivas fórmulas (ARITM.ª 173, 175, 176 y 205), fáciles, como la anterior, de traducir al lenguaje vulgar.

2. En el Álgebra, además de considerar en la cantidad la cualidad de ser numerable, aunque prescindiendo siempre, según se tiene dicho, de la unidad á que se refiere; hay que atender también á su sentido ó diversa manera de ser. Así, cuando dos fuerzas ejercen su acción en un mismo punto y en igual dirección, si se quisiera determinar el efecto que ambas producen, habría que tener en cuenta no sólo la intensidad de cada una de ellas, sino también el sentido en que obran, supuesto que de ambas circunstancias dependería el valor del esfuerzo, mediante el cual se pondría en movimiento el punto de aplicación de aquéllas. Del mismo modo pudiera decirse que, el agua vertida en un recipiente y la que sale de éste

por un orificio practicado en una de sus paredes, influyen, produciendo efectos contrarios, en la cantidad de líquido que el mencionado recipiente contiene.

. Una vez adquirido el conocimiento de lo que se entiende por cantidad algebraica, así como de la misión que desempeñan las fórmulas en la resolución de todo problema particular que se halle comprendido en el general de que se trate, puede decirse ya que *el objeto del Álgebra es averiguar la fórmula ó fórmulas necesarias para la resolución de un problema, sin prescindir de las diferentes afecciones que poseen las cantidades que en aquella ó aquellas expresiones intervienen.*

ARTÍCULO 2.°

Consideraciones acerca de las cantidades positivas y negativas.

3. Cuando las cantidades que intervienen en la resolución de un problema admiten acepciones opuestas, reciben el nombre de *positivas* aquellas que propenden á la consecución del fin que, según el enunciado de la cuestión, se desea conseguir; mientras que aquellas que se oponen á que aquel fin se realice, se distinguen de las anteriores con el nombre de *negativas*.

Según esto, si se quisiera averiguar el tiempo que necesita un sujeto para reunir un capital determinado de antemano, suponiendo que se conocen los ingresos y gastos con que anualmente cuenta; es evidente que como los ingresos contribuyen á la formación del mencionado capital, representarán en este caso las cantidades positivas; al paso que las negativas deberán referirse á los gastos, en atención á que éstos se oponen á la consecución del fin propuesto.

Como quiera que el efecto producido en una cuestión por las cantidades que tienen el mismo modo de ser, está determinado por la suma de todas ellas, al paso que el de dos cantidades de sentidos opuestos por el resultado que se obtiene al restar de la que tiene mayor valor absoluto el de la menor, se explica que por medio del signo de la adición y del de la sustracción, conocidos en Aritmética, se haya convenido en distinguir las dos afecciones opuestas que pueden tener algunas cantidades, anteponiendo el primero de aquéllos á las positivas y el segundo á las negativas. De aquí que al signo $+$ se llame también signo positivo y al — signo negativo.

4. La influencia que, como se ha visto en los ejemplos que se acaban de citar, ejercen en los resultados las diversas acepciones de las cantidades que en su deducción intervienen, trae consigo la necesidad de operar con éstas sin prescindir de que posean ó no una misma manera de existir; mas como quiera que los diferentes modos de ser de una cantidad tienen un significado de distinta índole que el de su expresión numérica, de aquí que se haya necesitado admitir ciertos convenios que permitan, con unidad y fijeza de criterio, someter al cálculo las mencionadas cantidades, sin incurrir en las contradicciones que procediendo de otro modo pudieran sobrevenir en la interpretación de los diferentes resultados.

5. En la Aritmética se veía que una cantidad era mayor que otra cuando la primera era igual á la segunda aumentada en una cierta cantidad. Haciendo extensiva esta consideración al caso en que las dos cantidades se hallen afectadas de signos iguales ó contrarios, se dirá

que *la* MENOR *de dos cantidades es aquella á la cual hay que agregar una cantidad positiva para obtener la otra, ó sea la llamada* MAYOR.

Siendo evidente, por otra parte, que dentro de una misma cuestión los efectos de dos cantidades del mismo valor absoluto pero de signos contrarios, se destruyen; se tendrán, como consecuencia de estos convenios, las siguientes proposiciones:

1.ª *Toda cantidad negativa es menor que cero;* supuesto que agregando á aquélla una cantidad positiva de un valor absoluto igual al que ella misma posee, el resultado es cero.

Obsérvese que el cero á que se acaba de hacer referencia, no es el de la numeración, sino que representa el origen ó punto de partida desde el cual se empiezan á contar tanto las cantidades positivas como las negativas; en cuya atención este cero, que señala la separación que existe entre unas y otras, recibe el nombre de *cero* límite (*).

2.ª *Toda cantidad negativa es menor que cualquiera otra que sea positiva.* En atención á que aquélla es menor que cero y éste á su vez menor que toda cantidad positiva.

3.ª *De dos cantidades negativas, es menor la que posea mayor valor absoluto.* Se trata de hacer ver que siendo $a+b$ mayor que b, se verificará que $-(a+b)<-b)$. En efecto, agregando á $-(a+b)$, ó sea á $-a-b$, la cantidad positiva a, queda como resultado $-b$ (**).

(*) Por ejemplo, el cero de un termómetro no indica la falta completa de calor, sino un punto fijo y convencional del expresado instrumento de medida, á partir del cual se aprecian las temperaturas superiores é inferiores á la que señala el expresado punto.

(**) Sin establecer convenio alguno, no se explicaría la pri-

ARTÍCULO 3.º

Definiciones referentes á las expresiones algebraicas.

6. Expresión algebraica es la expresión literal en que no sólo se tienen en cuenta los valores representados por las letras de que se compone, sino también la manera de existir de las cantidades á que se refieren.

Valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta después de sustituir en ella los valores particulares de las letras y de efectuar las operaciones que estén indicadas.

Ejemplo: Si en la expresión algebraica $4a^3-2ab^2$ se hace $a=3$ y $b=5$ se tendrá:

$$4\times3^3-2\times3\times5^2=108-150=-42.$$

Una expresión algebraica se dice que es racional cuando no contiene ningún factor literal que se halle afectado del signo radical; en el caso contrario se la conoce con el calificativo de irracional ó radical.

Cuando una expresión algebraica además de ser racional no contiene ningún denominador literal, se dice que es entera. Tal es la expresión $3ab+{}^{2}4a^2b-{}^{3}5abc^4$.

En el caso de que una expresión racional contenga algún denominador literal, se la conoce con la denominación de fraccionaria.

De aquí se infiere que la expresión algebraica sólo es entera ó fraccionaria por su forma y no por el valor nu-

---

mera proposición, supuesto que es inconcebible la existencia de una magnitud que sea inferior á la falta completa de cantidad ó sea al *cero absoluto*. Pudiera decirse lo mismo de la segunda, pues si se considera como positiva la cantidad que representa los créditos, á favor de una persona, y como negativa la que hace referencia á sus deudas, no por eso puede afirmarse que éstas hayan de ser menores que aquéllos. Finalmente, por contener $-(a+b)$ á $-a$ más de una vez, se verificará, que, $-(a+b)>-a$; lo cual se halla en contradicción con lo que manifiesta la tercera consecuencia.

mérico que representa, pues una expresión algebraica entera puede equivaler no sólo á un número fraccionario, sino también á otro que sea inconmensurable; al paso que cuando es fraccionaria pudiera representar una cantidad numérica entera, como sucede con la expresión $\frac{a^2b^3}{3c}$ que, aun cuando fraccionaria en la forma, equivale al número entero 9 siempre que $a=2$, $b=3$ y $c=4$.

7. Se llama TÉRMINO de una expresión literal, á cada parte de ésta que se había separado de las demás por el signo positivo ó el negativo. El signo de un término es el que se halla escrito delante de éste. Si el primer término de una expresión literal careciese de signo, se supondrá siempre que el signo que le corresponde es el positivo.

COEFICIENTE de un término, es el factor cuyo valor numérico se encuentra determinado. Se ha convenido que el coeficiente se escriba delante de los factores literales que contenga el término, y si éste careciese de coeficiente explícito, se consideraría que su valor era la unidad. Así, en el término $5a^2b$ el coeficiente es 5, y en ab^5c^2 el coeficiente se supone que es igual á 1, en atención á que este último término equivale á $1 \times ab^5c^2$.

8. El GRADO, con respecto á todas sus letras de un término entero, se halla determinado por el número de sus factores literales. Por lo tanto, el grado de un término está dado por la suma de los exponentes de todos los factores literales que contiene, considerando que vale la unidad el de aquellas letras que no tuviesen exponente explícito. Así, el último término citado es del 8.º grado y el del penúltimo de 3.º

El GRADO DE UN TÉRMINO entero con respecto á una de sus letras, lo señala el valor del exponente de dicha letra.

Ejemplo: $9a^4b^3c^2$ es de 4.º grado con respecto á la letra a.

TÉRMINOS SEMEJANTES son aquellos que poseen las mismas letras afectadas respectivamente de iguales exponentes. Así, $3a^4b^2c$, $-8a^4b^2c$, $+a^4b^2c$.

Se ha convenido en colocar los factores literales de cada término por orden alfabético, con el fin de distinguir con más facilidad aquellos que sean semejantes.

9. Se llama MONOMIO la expresión que consta de un solo término; BINOMIO cuando está compuesta de dos; TRINOMIO la que contiene tres; CUATRINOMIO si consta de cuatro, y finalmente, si la expresión algebraica está formada de más de cuatro términos se llama POLINOMIO. Así, $3a^2b^4c-a^7b^3d$ será un binomio; $4a^5b^2c-2a^7b^3+8b^9c^2$ un trinomio; $6a^2b^3+8a^5bd-4a^7b^2c+a^9c^2$ un cuatrinomio, y finalmente $5a^8b^2+a^6b^4-2a^5b^5+a^3b^7-8a^2b^8+11b^{10}$ es un polinomio de seis términos.

Se dice que está un POLINOMIO ORDENADO con respecto á una letra, cuando sus términos se hallan colocados de tal modo que los exponentes de la citada letra, que se llama *ordenatriz*, van del mayor al menor ó al contrario. El polinomio que se acaba de citar se halla ordenado con respecto de las potencias descendentes de la letra a y las ascendentes de la b.

El GRADO DE UN POLINOMIO entero y racional, con respecto á una de sus letras, está determinado por el mayor exponente que dicha letra posee en la expresión literal que se considera. Así, el último polinomio es del 8.º grado con respecto de a, y del 10.º respecto de b.

Un polinomio entero se llama *homogéneo* cuando todos sus términos son del mismo grado, y en tal caso este grado común se dice que es también el del polinomio. El polinomio á que se refieren los anteriores ejemplos es homogéneo y del grado 10.º

CAPÍTULO II.

Operaciones fundamentales.

GENERALIDADES.

10. La consideración de que las cantidades algebraicas representan relaciones numéricas, induce á que éstas sean también sometidas á las mismas operaciones que se efectúan con los números, y si bien es cierto que en Aritmética las definiciones de la *suma, resta, multiplicación, división, elevación á potencias* y *extracción de raíces* tenían carácter general, al tratar ahora de hacer aplicación de ellas al Álgebra es necesario acomodarlas á la doble significación ó sentido que en esta parte de las Matemáticas puede tener la cantidad.

Por otra parte, ya se tiene dicho (1) que con las letras no pueden realmente ejecutarse operaciones sino meras indicaciones de éstas; de aquí se infiere que al tratar de que se efectúen aquéllas, hay necesidad de limitarse á transformar la expresión algebraica que forman los términos de la respectiva operación en otra más sencilla ó que, en su defecto, convenga más al objeto especial del cálculo de que se trata.

Sin embargo, á pesar de estas diferencias, se emplean en Álgebra los mismos signos que en Aritmética para indicar operaciones de igual nombre, así como también idénticas palabras para distinguir tanto los correspondientes resultados como los términos con que éstos se obtienen.

Ante la necesidad, pues, de dar mayor amplitud al concepto que se tiene adquirido acerca de las diversas operaciones que se efectúan con los números, y atendiendo á las diversas maneras de proceder á fin de deducir los respectivos resultados, se hace indispensable examinar nuevamente y con la debida separación cada una de aquéllas.

ARTÍCULO 1.°

Adición.

11. El objeto de la ADICIÓN en Álgebra es reunir varias expresiones algebraicas en una sola. De aquí se infiere que el valor numérico que corresponde al resultado de esta operación tiene que ser igual á la suma de los valores numéricos de los sumandos, y en su consecuencia se verificará que *aun cuando se llegue á invertir el orden de colocación de los sumandos, la suma de éstos permanecerá inalterable,* supuesto que los términos positivos, cualquiera que sea el lugar que ocupen, siempre contribuyen con su valor numérico á aumentar el de la suma, así como el de los negativos á disminuir el valor de ésta.

12. Apoyándose en estas consideraciones, puede deducirse que para efectuar la suma algebraica de varios polinomios, *se deberá formar un solo polinomio con todos los términos de los sumandos, escribiendo éstos unos á continuación de otros con los mismos signos que tuvieren.*

En efecto, si se deseara sumar los polinomios $a+b-c$ y $m-n-p+q$, en los cuales se representa, para mayor sencillez, cada término por una letra, se tendría

$$(a+b-c)+(m-n-p+q)=a+b-c+(m-n-p+q),$$

en atención á que suprimiendo el paréntesis del primer polinomio, no por eso ha podido experimentar alteración alguna el valor numérico de la suma propuesta; pero también por lo dicho (11) se tiene

$$a+b-c+(m-n-p+q)=(m-n-p+q)+a+b-c;$$

mas como quiera que por la anterior consideración se ve que

$$(m-n-p+q)+a+b-c=m-n-p+q+a+b-c,$$

resultará demostrado que

$$(a+b-c)+(m-n-p+q)=a+b-c+m-n-p+q.$$

Lo dicho para dos polinomios puede hacerse extensivo sirviéndose de idénticos razonamientos, al caso en que sea mayor el número de aquéllos.

13. Si la suma obtenida contuviese términos semejantes, entonces ésta podría y debería simplificarse, para lo cual se reducirían los expresados términos á uno solo.

Esta transformación se apoya en que siendo semejantes los términos que se consideran, es evidente que el valor de cada uno de éstos quedará expresado por sólo su coeficiente, desde el momento en que se tome por unidad su parte literal; y en esta atención resultará que cuando los términos semejantes tengan el mismo signo, *se antepondrá á la parte literal, que es común á todos ellos, un coeficiente igual á la suma de todos los de sus términos y con igual signo.*

Así: $3a^2b^2+6a^2b^2+7a^2b^2=16a^2b^2,$

$$-8a^3bc^2-4a^3bc^2-a^3bc^2-5a^3bc^2=-18a^3bc^2.$$

Como consecuencia de lo que se acaba de decir, cuando los términos semejantes que hubieren de reducirse á uno solo no tuvieran el mismo signo, *se sumarían separadamente los afectados de igual signo y se determinaría la* *diferencia de las dos sumas, y al resultado se le antepondría el signo de la de mayor valor absoluto.*

Ejemplo: $5a^4b^3c+8a^4b^3c-19a^4b^3c+2a^4b^3c-7a^4b^3c=$
$$=15a^4b^3c-26a^4b^3c=-11a^4b^3c.$$

Pudiera también haberse hecho la reducción, comparando los dos primeros términos, después el resultado de esta comparación con el tercero, y continuando de este modo hasta haber considerado á todos ellos. Así, en el ejemplo anterior, pudiera haberse dicho:

$$5a^4b^3c+8a^4b^3c=13a^4b^3c;\ 13a^4b^3c-19a^4b^3c=-6a^4b^3c;$$
$$-6a^4b^3c-6a^4b^3c+2a^4b^3c=-4a^4b^3c;\ -4a^4b^3c-7a^4b^3c=$$
$$=-11a^4b^3c.$$

Véase cómo se podría efectuar la siguiente suma indicada:

$$(5a^3bc-8a^3c^2+2ab^3)+(4a^3bc-7ab^3)$$
$$+(a^3bc-2a^3c^2+6ab^3+9a^7)+(3a^3c^2-5ab^3-9a^7+3b^2):$$

en vista de que en este ejemplo aparecen en los sumandos diferentes términos semejantes, convendrá, para obtener la suma con más facilidad, colocar los expresados términos de modo que se correspondan en columna, á fin de evitar equivocaciones en la reducción de los términos semejantes.

En la práctica se disponen los sumandos del siguiente modo:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 5a^3bc & -8a^3c^2 & +2ab^3 & & \\
 & 4a^3bc & & -7ab^3 & & \\
 & a^3bc & -2a^3c^2 & +6ab^3 & +9a^7 & \\
 & & +3a^3c^2 & -5ab^3 & -9a^7 & +3b^2 \\
\hline
\text{Suma...} & 10a^3bc & -7a^3c^2 & -4ab^3 & & +3b^2
\end{array}$$

Se comprende, después de lo dicho, que la adición algebraica no supone, como la aritmética, la idea de aumento cuando en los polinomios que han de sumarse existen términos afectados de signos contrarios; tan es así, que se concibe la posibilidad de que tuvieran tal valor numérico cada uno de éstos, que hasta pudiera suceder que la suma algebraica de todos ellos equivaliese á cero.

ARTÍCULO 2.º

Sustracción.

14. Esta es una operación inversa de la anterior, supuesto que en ella *se conoce la suma algebraica de dos expresiones literales y una de éstas y se trata de determinar la otra.* De ésta definición se deduce que cuando se consiga averiguar el resto ó sea la expresión desconocida, debe verificarse que ésta, sumada algebraicamente con la que hace las veces de sumando conocido, tiene que reproducir la suma dada, ó sea el minuendo.

Por lo tanto, cuando se trate de restar de una expresión literal otra, *se escribe la primera y á continuación la segunda con signos contrarios á los que en ella tenían todos sus términos.*

Se quiere demostrar que

$$(a+b-c)-(m-n-p+q)=a+b-c-m+n+p-q \text{.....} \quad (1).$$

En efecto, si se suma algebraicamente el segundo miembro de esta igualdad con el polinomio que hace las veces de sustraendo, se tendrá:

$$a+b-c-m+n+p-q+m-n-p+q;$$

simplificando esta expresión, se ve que es igual á $a+b-c$, ó sea al minuendo.

Ejemplo: Restar del polinomio

$$7a^4b^3c+8a^3bc-5a^2b^2-2ab^6 \text{ el } 3a^4bc^3-a^7b^2+6a^2b^2;$$

se dispondría la operación del siguiente modo:

$$\begin{array}{lrrrr}
 & 7a^4b^3c+8a^3bc & -\;5a^2b^2 & -2ab^6 & \\
 & -3a^4b^3c\qquad\quad & -\;6a^2b^2 & & +a^7b^2 \\
\hline
\text{Diferencia reducida.} & 4a^4b^3c+8a^3bc & -11a^2b^2 & -2ab^6 & +a^7b^2
\end{array}$$

Comparando el segundo miembro de la igualdad (1) con el primero, se deduce que *para cambiar los signos á varios términos de un polinomio, sin que el valor numérico de éste varíe, se escribirán dichos términos con signos contrarios á los que tenían dentro de un paréntesis, y se antepondrá á éste el signo negativo.*

15. Si ahora se supone una diferencia indicada en la que el minuendo sea cero y el sustraendo una expresión literal cualquiera, se tendrá que

$$0-(-a+b-c+d)=a-b+c-d,$$

lo cual manifiesta que *todo polinomio encerrado dentro de un paréntesis y afectado del signo — equivale al mismo polinomio sin paréntesis y cuyos términos tienen signos contrarios.*

Esta operación comprende la adición y la sustracción aritméticas, en el caso general de que estuviesen afectados de signos diferentes los términos de la sustracción; de modo, que lejos de ser siempre el resto menor que el minuendo, pudiera acontecer lo contrario y aun verificarse, que el valor numérico de aquél fuera la suma de los del minuendo y sustraendo, lo cual sucedería cuando tuviesen igual signo los términos del minuendo y todos los del sustraendo contrario al que poseyeran los anteriores.

ARTÍCULO 3.°

Multiplicación.

16. La MULTIPLICACIÓN de dos expresiones algebraicas tiene por objeto hallar una tercera cuyo valor numérico

sea en *magnitud* y *signo* respecto del valor numérico de una de las dos expresiones que se multiplican, lo que el valor numérico de la otra es en *magnitud* y *signo* respecto de la *unidad positiva*.

De esta definición se deduce, que cuando uno de los dos factores tenga el signo $+$, el producto deberá tener igual signo que el otro factor, así como cuando un factor posea el signo $-$, el producto estará afectado de diferente signo que el otro.

De aquí resulta que *siempre que dos factores posean el mismo signo, el producto será positivo, y cuando lo tengan diferente, el resultado de la operación será negativo*. También se desprende de la consideración anterior, que, *cuando varíe el signo de uno de los dos factores de un producto, el de éste variará también*.

Aun cuando la multiplicación de signos carece realmente de sentido, las conclusiones que acaban de deducirse, hacen que en la práctica la llamada *regla de los signos* se exponga diciendo:

$$+\cdot+=+,\ +\cdot-=-,\ -\cdot+=-,\ -\cdot-=+$$

Para explicar con la debida claridad la multiplicación de las expresiones algebraicas, conviene distinguir tres casos: 1.º, Multiplicación de dos monomios. 2.º, Multiplicación de un polinomio por un monomio. 3.º, Multiplicación de dos polinomios.

17. Primer caso. Se sabe que un monomio es un producto de varios factores; luego aplicando á estas expresiones algebraicas los principios que en Aritmética se referían tanto á la multiplicación de dos productos indicados, como á las transformaciones que sin alterar su valor puede experimentar un producto, y á la multiplicación de dos potencias de una misma base, las cuales son consecuencias del teorema fundamental (Aritm.ª 21) cuya generalidad está puesta de manifiesto (Aritm.ª 187, corolario 2.º), se tendrá que el producto de multiplicar $3a^4b^2cd$ por $-5a^3c^4$, será igual á

$$-3.a^4.b^2.c.d.5.a^3.c^4=-3.5.a^4.a^3.b^2.c.c^4.d=-15a^7b^2c^5d;$$

de donde se deduce que *para multiplicar dos monomios, se comenzará por determinar el signo del producto, ateniéndose á lo dicho en la regla de los signos, se multiplican luego los coeficientes, y á la derecha del producto que resulte se escribirán las letras, poniendo á cada una de éstas un exponente igual á la suma de los que tengan las mismas letras en los factores, y en cuanto á las letras desiguales, deberán aparecer en el producto de igual modo que en el factor monomio en donde se hallen.*

Ejemplo: $-7a^2b^3c^5\times-8a^6bd^3=56a^8b^4c^5d^3$.

18. Segundo caso. Si se tratara de multiplicar el polinomio $a-b-c+d+e-f+g$ por m, se podría deducir el producto considerando descompuesto al multiplicando en dos partes: la una representada por la letra A, que se supone formada por todos los términos positivos, y la otra B por la suma de los negativos; así se tendría que

$$(a-b-c+d+e-f+g)m=(A-B)m;$$

pero según lo dicho (Aritm.ª 20) este último miembro es igual á

$$\begin{aligned}Am-Bm&=(a+d+e+g)m-(b+c+f)m=\\&=am+dm+em+gm-(bm+cm+fm)=\\&=am+dm+em+gm-bm-cm-fm,\end{aligned}$$

de donde se desprende que

$$(a-b-c+d+e-f+g)m=am-bm-cm+dm+em-fm+gm;$$

de esta igualdad se deduce, por lo dicho (16), que

$$(a-b-c+d+e-f+g)\times-m=$$
$$=-am+bm+cm-dm-em+fm-gm.$$

Lo cual manifiesta que *para multiplicar un polinomio por un monomio, se multiplica cada término del multiplicando por el multiplicador, teniendo en cuenta la regla de los signos, y se suman algebraicamente los productos parciales.*

Ejemplo:

$$(6a^3-8a^2b^2c-ab^3c^2+5b^4c^3)7ab^2=$$
$$=42a^4b^2-56a^3b^4c-7a^2b^5c^2+35ab^6c^3\ldots\ldots \; (1)$$

Como quiera que el orden de colocación de los factores no altera el valor del producto, pudiera decirse también que *para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica cada término del multiplicador por el multiplicando, dando á cada producto parcial el signo que le corresponda y sumando algebraicamente todos ellos.* Así, al efectuar la multiplicación indicada $7ab^2(6a^2-8a^2b^2c-ab^3c^2+5b^4c^3)$, daría el mismo resultado.

La igualdad (1) dice que cuando los términos de un polinomio posean uno ó varios factores comunes, se pueden *separar* éstos sin más que colocarlos fuera de un paréntesis y dentro de él la suma algebraica de los demás factores. La idea de *sacar* factores comunes suele en la práctica también expresarse colocando éstos á la derecha de una raya vertical y á la izquierda se escriben unos debajo de otros, con sus respectivos signos, los factores no separados de cada término. Así, el primer miembro del ejemplo anterior podría escribirse también de la manera siguiente:

$$\begin{array}{r|l} 6a^3 & 7ab^2 \\ -8a^2b^2c & \\ -\;ab^3c^2 & \\ +5b^4c^3 & \end{array}$$

19. Tercer caso. Si se quisiera determinar el producto de $a-b-c+d$ por $e+f-g$; obsérvese que como el valor numérico del multiplicando ha de estar afectado del signo positivo ó del negativo, de aquí que si su valor numérico fuera m, aquél debería representarse por $\pm m$; según esto, se tendría que

$$(a-b-c+d)\,(e+f-g)=\pm m(e+f-g)=$$
$$=\pm m\times e\pm m\times f\pm m\times -g=(a-b-c+d)e+(a-b-c+d)f$$
$$+(a-b-c+d)\times -g.$$

De donde se deduce que *para multiplicar un polinomio por otro, se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, y se suman algebraicamente los productos parciales que resultan.*

Con el fin de facilitar la reducción de los términos que, en los productos parciales, pudieran aparecer semejantes, conviene ordenar con respecto á una letra los polinomios que se hayan de multiplicar.

Ejemplo 1.º

$$(3a^4-5a^3b-8a^2b^2+7ab^3-2b^4)\,(2a^2-7ab+9b^2).$$

DISPOSICIÓN PRÁCTICA DE LA OPERACIÓN.

	$3a^4$	$-\ 5a^3b$	$-\ 8a^2b^2$	$+\ 7a\,b^3$	$-\ 2\ \ b^4$		
	$2a^2$	$-\ 7a\,b$	$+\ 9\ \ b^2$				
Producto del multiplicando por $2a^2$	$6a^6$	$-10a^5b$	$-16a^4b^2$	$+14a^3b^3$	$-\ 4a^2b^4$		
» $-7ab$....		$-21a^5b$	$+35a^4b^2$	$+56a^3b^3$	$-\ 49a^2b^4$	$+14ab^5$	
» $9b^2$..................			$27a^4b^2$	$-45a^3b^3$	$-\ 72a^2b^4$	$+63ab^5$	$-18b^6$
Producto total reducido......	$6a^6$	$-31a^5b$	$+46a^4b^2$	$+25a^3b^3$	$-125a^2b^4$	$+77ab^5$	$-18b^6$

20. En donde se ve que *si se multiplican dos polinomios ordenados con respecto á una letra, el primer término del producto total, ordenado también con respecto á la misma letra, proviene, sin reducción, del producto de los dos prime-*

ros términos de los factores propuestos, y el último término de aquel producto procede asimismo, sin reducción, de multiplicar los dos últimos términos de aquellos factores.

En efecto, el producto de los dos primeros términos de los factores ha de contener á la letra ordenatriz a con un exponente mayor que el que posea la misma letra en el de otros dos términos cualesquiera de los factores, de donde se sigue que aquél no podrá reducirse con ningún otro y en su consecuencia deberá ocupar el lugar destinado al primer término del producto total. Análogamente: el producto de los dos últimos términos de los factores es en el que la letra ordenatriz a posee menor exponente que en todos los demás, y por lo tanto no podrá reducirse con ningún otro, y en su consecuencia, ocupará el último lugar del producto total, que, como se ha dicho, está ordenado con respecto á la misma letra.

Ejemplo 2.º
$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ \quad\; - ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

Ejemplo 3.º
$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ \quad\; - ab - b^2 \\ \hline a^2 \qquad\quad - b^2 \end{array}$$

21. El ejemplo segundo pone de manifiesto que *el cuadrado de la diferencia de dos cantidades, es igual á la suma de los cuadrados de las mismas, menos el doble de su producto;* al paso que el ejemplo tercero dice que *el producto de la suma de dos cantidades por su diferencia, es igual al cuadrado de la que hace veces de minuendo, menos el cuadrado de la que ocupa el lugar del sustraendo.*

En el caso de que varios términos de uno ó de los dos polinomios que se tratan de multiplicar, tuvieran la letra ordenatriz con igual exponente, se considerarán como si fuesen uno solo, sacando como factor común dicha potencia, y el polinomio formado por la parte contenida dentro del paréntesis se supondrá que hace las veces de coeficiente de aquel término; seguidamente se procederá á efectuar la multiplicación propuesta, sin alterar en nada la regla que se acaba de exponer, obteniendo aparte, si necesario fuese, el producto de aquellos coeficientes que, como ya se ha dicho, fueran polinomios.

ARTÍCULO 4.°

División.

22. En la DIVISIÓN se conoce el producto de dos factores algebraicos y uno de éstos, y se quiere hallar el otro factor.

De esta definición y de la regla de los signos expuesta (16), se desprende que cuando el dividendo sea positivo, el cociente tendrá el mismo signo que el divisor, y que cuando el dividendo sea negativo el cociente poseerá signo contrario que el del divisor. Luego: *el cociente de dos cantidades de igual signo es positivo, así como el de dos cantidades de diferente signo será negativo.*

Según esto, la *regla de los signos* en la división, será:

$$+:+=+,\ +:-=-,\ -:+=-,\ -:-=+$$

La división de dos expresiones enteras se dice que es EXACTA, cuando el cociente es otra expresión entera, y en el caso contrario la división será INEXACTA.

No es de extrañar que, siendo esta operación inversa de la anterior, al tratar de explicarla convenga distinguir los mismos tres casos que se consideraban en la multiplicación.

23. PRIMER CASO. *Dividir un monomio por otro.*

Para deducir el valor del cociente en este caso, *se co-*

menzará por determinar el signo de cociente con sujeción á la regla que se acaba de exponer; luego se dividirá el coeficiente del dividendo por el del divisor; se restarán los exponentes de las letras iguales del divisor de los correspondientes del dividendo, y las letras desiguales que aparezcan, sólo en el dividendo, se deberán escribir en el cociente con el mismo exponente que posean en aquél.

Así: $24a^7b^2cd^3 : -8a^5d^3 = -3a^2b^2c$; supuesto que $-3a^2b^2c \times -8a^5d^3 = 24a^7bc^2d^3$.

De donde se deduce que la división de dos monomios será exacta, cuando se verifique que los exponentes de las letras del divisor no sean mayores que los que poseen las mismas letras en el dividendo, y la división será inexacta si no aconteciera esta circunstancia.

Así: $24a^7b^2cd^3 : 10a^5b^3d^3f^2 = \frac{24a^7b^2cd^3}{10a^5b^3d^3f^2} = \frac{12a^2c}{5bf^2}$, que es el resultado de haber dividido al dividendo y al divisor por $2a^5b^2d^3$, ó sea por el producto de las menores potencias de los factores comunes que contienen ambos términos de la operación.

24. Segundo caso. *División de un polinomio por un monomio.*

Para determinar el cociente en este caso, *se dividirá cada término del polinomio por el monomio y se sumarán algebraicamente los cocientes parciales que resulten.*

Sea el dividendo $a-b+c$ y el divisor d; se trata de hacer ver que $(a-b+c):d = \frac{a}{d} - \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$.

Este segundo miembro es igual al cociente de la división indicada en el primero, supuesto que multiplicado por el divisor reproduce al dividendo.

Ejemplo 1.º $(42a^4b^2 - 56a^3b^4c - 7a^2b^5c^2 + 35ab^6c^3) : 7ab^2 = 6a^3 - 8a^2b^2c - ab^3c^2 + 5b^4c^3$.

Ejemplo 2.°

$$(10a^4b^3+5a^3b^4c-7a^2b^5c^2):15a^3b^7=\frac{2a}{3b^4}+\frac{c}{3b^3}-\frac{7c^2}{15ab^2}.$$

En donde se ve que la división de un polinomio por un monomio será exacta si lo es la de cada uno de los términos de aquél por el divisor, y no lo será en el caso contrario.

25. Tercer caso. *División de dos polinomios.*

Se ha visto en la multiplicación de polinomios, que el producto se compone de la suma de los productos parciales del multiplicando por cada término del multiplicador, así como también se sabe que el dividendo es el producto del divisor por el cociente. Según esto, si pudiera separarse del dividendo cada uno de los productos parciales del divisor por cada término del cociente, cualquier término de estos productos parciales dividido por el correspondiente del divisor, daría como resultado un término del cociente que se busca: ahora bien, como que se sabe (20) que el término del producto en que la letra ordenatriz tiene mayor exponente, proviene del producto de los dos términos del multiplicando y multiplicador en que dicha letra se encuentra con mayor exponente, resultará que ordenados el dividendo y divisor con respecto á una letra, el primer término del dividendo será igual al primer término del divisor por el primero del cociente: luego para tener el primer término del cociente, se dividirá el primero del dividendo por el primero del divisor. Una vez conocido ese término del cociente, si del dividendo se resta el producto del divisor por el mencionado término del cociente, el resto que se obtenga será igual al producto del divisor por el polinomio compuesto del segundo, tercero, cuarto, etc. términos del cociente, y repitiendo el razonamiento anterior, se verá que el primer término del resto es igual al primero del divisor por el segundo del cociente: de modo que este segundo término se determinará, dividiendo el primero del resto por el primero del divisor: discurriendo del mismo modo podrían obtenerse los demás términos del cociente. Luego, según esto, *para dividir un polinomio por otro, conviene ordenarlos con relación á una letra y comenzar la operación por dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor, y así se tendrá el primero del cociente; para encontrar el segundo y los siguientes, se multiplicará el divisor por el término del cociente que acaba de encontrarse, se halla la diferencia que existe entre este producto y el resto anterior, y el cociente del primer término del nuevo resto por el primero del divisor será el siguiente término del cociente.*

Ejemplo 1.º

DISPOSICIÓN PRÁCTICA DE LA OPERACIÓN.

$$
\begin{array}{ll|l}
 & 6a^6-31a^5b+46a^4b^2+25a^3b^3-125a^2b^4+77ab^5-18b^6 & 3a^4-5a^3b-8a^2b^2+7ab^3-2 \\
\cline{3-3}
(1) & -6a^6+10a^5b+16a^4b^2-14a^3b^3+\ 4a^2b^4 & 2a^2-7ab+9b^2 \\
\cline{2-2}
(2) & -21a^5b+62a^4b^2+11a^3b^3-121a^2b^4+77ab^5-18b^6 & \\
(3) & +21a^5b-35a^4b^2-56a^3b^3+\ 49a^2b^4-14ab^5 & \\
\cline{2-2}
(4) & 27a^4b^2-45a^3b^3-\ 72a^2b^4+63ab^5-18b^6 & \\
(5) & 27a^4b^2+45a^3b^3+\ 72a^2b^4-63ab^5+18b^6 & \\
\cline{2-2}
\text{Residuo.............} & 0 &
\end{array}
$$

(1) (3) y (5) son los productos respectivos del divisor por los términos $2a^2$, $—7ab$ y $—9b^2$ del cociente, después de cambiados de signo.

(2) y (4) primero y segundo resto reducidos que respectivamente pasan á hacer las veces de segundo y de tercer dividendo parcial.

En la práctica se omite la escritura del término que proviene de multiplicar el primero del divisor por cada uno de los del cociente, supuesto que su producto es igual al primer término del correspondiente dividendo, y á que al efectuar la sustracción se destruyen ambos. Asimismo se suelen también omitir todos aquellos términos de cada resto que no sean indispensables en el correspondiente dividendo parcial.

26. La división de dos polinomios será inexacta: 1.º, cuando ordenados con respecto á una de sus letras el primero y el último término del dividendo no sean divisibles respectivamente por el primero y último del divisor. 2.º, cuando el primer término de cada resto tampoco sea divisible por el primero del divisor. 3.º, cuando en el divisor exista alguna letra que no se halle en el dividendo ó de encontrarse también en éste sea con un exponente inferior al más pequeño que posee la misma letra en el divisor. Supuesto que en ninguno de estos casos puede existir un polinomio entero que multiplicado por el divisor reproduzca al dividendo.

Las divisiones cuando son inexactas pueden continuarse hasta obtener en el cociente el número de términos que se deseen; pero, suponiendo que el dividendo y el divisor se encuentren ordenados con respecto á las potencias descendentes de una misma letra, se prosigue la división solamente hasta llegar á un dividendo parcial de menor grado que el divisor, y, cuando esto sucede, el cociente completo se forma de la suma algebraica de los términos obtenidos, más del cociente indicado del último resto por el divisor.

Ejemplo:

$$(6a^5-22a^4+43a^3-28a^2-38a+12):(2a^3-4a^2+7a+6)$$

$$
\begin{array}{l|l}
6a^5-22a^4+43a^3-28a^2-38a+12 & 2a^3-4a^2+7a+6 \\
\quad +12a^4-21a^3-18a^2 & \overline{3a^2-5a+1+\dfrac{-7a^2-15a+6}{2a^3-4a^2+7a+6}} \\
\quad \overline{-10a^4+22a^3-46a^2} & \\
\qquad\quad -20a^3+35a^2+30a & \\
\qquad\qquad \overline{2a^3-11a^2-\ 8a} & \\
\qquad\qquad\quad +\ 4a^2-\ 7a-6 & \\
\qquad\qquad\quad \overline{-\ 7a^2-15a+6} &
\end{array}
$$

27. Este ejemplo prueba que las condiciones citadas (**26**) no son indispensables para que la división sea inexacta, supuesto que hay ocasiones en las que sin verificarse ninguna de aquéllas, se obtiene, sin embargo, un residuo diferente de cero.

Se pudiera efectuar la división de los polinomios sin ordenarlos, pero entonces sería preciso tener cuidado de ir escogiendo en cada dividendo el término en que la letra ordenatriz tuviese mayor exponente, á fin de dividirle por el del divisor en que también la letra ordenatriz poseyera á su vez el exponente más crecido.

Si la letra ordenatriz apareciese en varios términos afectada del mismo exponente, se ordenarán los polinomios que se trata de dividir, reduciendo á un solo término todos aquellos en que la mencionada letra posea el mismo exponente, y se procederá á obtener, siguiendo la regla general, el cociente que resulte de dividir el coeficiente del primer término de cada dividendo parcial, por el del primer término del divisor; para lo cual se deberán efectuar aparte las divisiones que fueren necesarias.

La división de un monomio por un polinomio tendrá que ser siempre inexacta, supuesto que aquel término nunca puede ser igual al producto que resulte de multiplicar el polinomio divisor por ninguna cantidad algebraica entera.

Se hace patente la divisibilidad de un polinomio entero por el binomio $x-a$, teniendo en cuenta el siguiente teorema.

28. *Un polinomio entero con respecto á la letra* X, *que se reduce á cero sustituyendo en vez de* X *un valor* A, *será divisible por* X—A.

En efecto, si se representa $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+.....+kx+L$ el polinomio propuesto, por Q el cociente de la división y por R el residuo, se tendrá $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+.....+kx+L=$

$=Q(x-a)+R$; si en esta igualdad se sustituye en vez de x el valor a, resultará

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+.....+Ka+L=Q(a-a)+R=R;$$

mas como por la hipótesis el primer miembro equivale á cero, su igual, ó sea el residuo R, equivaldrá también á cero.

De esta proposición se deduce que x^m-a^m es divisible por $x-a$, supuesto que en este caso el residuo de la división sería igual á $a^m-a^m=0$.

ARTÍCULO 5.°

Elevación á potencias.

29. La definición dada (Aritm.ª 39) sólo puede aplicarse á los casos en que el exponente de la potencia que se considere sea un número entero y positivo; de aquí la necesidad de exponer una definición general que permita deducir el valor de la mencionada potencia, cualquiera que sea el valor y signo de su exponente.

Con tal fin, se dice que *la elevación á potencias tiene por objeto determinar el resultado que se obtiene de considerar la base como factor, de la manera que la unidad positiva adoptada interviene como sumando en la formación del exponente.*

Con el fin de fijar el alcance de esta definición y de examinar las conclusiones que de ella se deducen, conviene proponer algunos ejemplos:

Si se tratara de elevar b á la potencia 5.ª, en la cual se ve que el exponente es entero y positivo, único caso que hasta aquí se ha considerado, resultaría que al aplicar la definición que antecede, como quiera que el exponente 5 es la reunión de cinco unidades, b^5 deberá ser igual al producto que se obtenga al considerar á b cinco veces como factor. De donde se deduce que cuando el exponente de la potencia sea un número entero y positivo, es indiferente apoyarse en una ú otra definición, para deducir el verdadero valor de aquélla.

Si ahora se propusiera la potencia $b^{4/5}$, cuyo exponente es fraccionario, obsérvese que éste se halla formado por la reunión de 4 unidades fraccionarias, de las cuales 5 componen la unidad principal: luego se verificará, según la definición general citada, que el valor de $b^{4/5}$ estará determinado por el producto de 4 factores tales que el que resulta de multiplicar de 5 de ellos deberá ser igual á la base.

Llamando pues x á uno de estos factores, se tendrá que $b^{4/5}=x\times x\times x\times x$, así como también que $x.x.x.x.x=b$.

30. Si se quisiera investigar la significación que tiene la potencia b^{-5}, en la que, como se ve, el exponente es entero y negativo, tendríase que comparar la unidad positiva con el exponente -5, y, por lo tanto, habría que considerar á éste como el resultado de restar de la mencionada unidad la reunión de seis unidades; operación contraria á la de la suma que se efectuaba cuando el exponente era entero y positivo; luego el valor de b^{-5} se determinará practicando también la operación contraria á la de la multiplicación, de que se hacía uso cuando el exponente era positivo, ó sea dividiendo la base por su sexta potencia, y, en esta atención, se tendría

$$b^{-5}=b:b^{6}=1:b^{5}.$$

Esta última conclusión dice que *toda cantidad con exponente negativo es igual al cociente que resulta de dividir la unidad por aquella cantidad con el exponente hecho positivo.*

31. Como caso particular del que se acaba de men-

cionar, pudiera considerarse aquel en que el exponente de la potencia fuera igual á cero, pues obsérvese entonces que éste puede suponerse como si proviniera de restar de $+1$ el mismo número $+1$; y por lo tanto el valor de la potencia b^0 se obtendrá dividiendo la base b por ella misma una sola vez; con tal motivo resultará que

$$b^0 = b : b = 1.$$

Lo que manifiesta que *toda cantidad con exponente cero es igual á la unidad positiva.*

Al exponer la elevación á potencias de una expresión algebraica, conviene, para mayor claridad, distinguir dos casos, según sea que se trate de efectuar aquella operación con un monomio ó con un polinomio.

32. Primer caso. Cuando se quiere elevar un monomio á una potencia, hay que fijarse tanto en los signos como en los exponentes que afectan á las letras que aquél posee.

Las potencias de un monomio son positivas cuando el exponente es par; y tienen el mismo signo que el monomio cuando aquéllas son de grado impar.

En efecto, si la potencia es de grado par, representará el producto de un número par de factores, que serán todos positivos ó todos negativos; en el primer supuesto se tendrá, según la regla de los signos dada en la multiplicación, un resultado positivo, y en el segundo, como que habrá un número par de factores negativos y por cada dos de éstos el producto es positivo, se obtendrá también un resultado positivo. Si la potencia fuera de grado impar, constaría de un número impar de factores; si éstos son positivos, evidentemente su producto también tendría que serlo; pero si aquéllos fueran negativos, obsérvese que, si se prescinde de uno de ellos, el producto de los restantes será positivo, supuesto que lo compone un número par de factores negativos, y por consiguiente para obtener el producto final se tendría que multiplicar dos factores de signo contrario, que, como se sabe (16), darían un resultado negativo.

33. *Para elevar la potencia de una letra á otra potencia, se multiplica el exponente que tuviere la letra por el que corresponde á la potencia.*

En efecto, $(b^e)^n = b^e \times b^e \times b^e \times \ldots\ldots = b^{e+e+e+\ldots\ldots} = b^{en}$, de donde se deduce que $(b^e)^n = b^{en}$, que era lo que se deseaba demostrar.

Ejemplo: $(b^3)^5 = b^{15}$.

34. *La potencia de un producto indicado equivale al producto de las potencias del mismo grado de sus factores.*

Se trata de hacer ver que $(abcd)^e = a^e b^e c^e d^e$.

En efecto;

$$(abcd)^e = abcd \times abcd \times abcd \times \ldots\ldots = abcdabcdabcd\ldots\ldots =$$
$$= aaa\ldots\ldots \times bbb\ldots\ldots \times ccc\ldots\ldots \times ddd\ldots\ldots = a^e b^e c^e d^e.$$

Ahora bien, como que un monomio no es sino el producto indicado de varios factores, resulta que cuando se desee elevar aquél á una potencia cualquiera, *deberá elevarse á dicha potencia su coeficiente numérico y multiplicar los exponentes de sus diferentes letras por el de la potencia, y al resultado se le antepondrá el signo que le corresponda.*

Ejemplos:

$$(2ab^3c^2)^4 = 16a^4b^{12}c^8, \quad (-7a^2bc^5)^3 = -343a^6b^3c^{15}.$$

35. Segundo caso. Cuando se trate de formar la potencia de un polinomio (*), bastará hallar el producto

---

(*) Mientras que no se diga lo contrario, los exponentes se suponen enteros y positivos.

de tantos factores iguales al polinomio, como unidades tuviere su exponente.

Mas en vista de lo trabajoso que sería practicar este procedimiento, conviene fijarse, en que siendo $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, si se quisiera elevar al cuadrado un polinomio expresado por

$$m+n+p+q,$$

tendríase, $(m+n+p+q)^2=m^2+2m(n+p+q)+(n+p+q)^2$; pero como $(n+p+q)^2=n^2+2n(p+q)+(p+q)^2$ y siendo así que

$$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2;$$

reemplazando en la segunda igualdad la expresión equivalente á $(p+q)^2$ se verificará, $(n+p+q)^2=n^2+2n(p+q)+p^2+2pq+q^2$; sustituyendo este resultado en la primera equivalencia acontecería que

$$(m+n+p+q)^2=m^2+2m(n+p+q)+n^2+2n(p+q)+p^2+2pq+q^2=$$
$$=m^2+n^2+p^2+q^2+2(mn+mp+mq+np+nq+pq);$$

traduciendo esta expresión del lenguaje algebraico al vulgar, manifiesta que *el cuadrado de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de sus diferentes términos, más el duplo de cada uno de los expresados términos por cada uno de los que le siguen.*

La elevación de un polinomio á la tercera potencia se obtendrá considerándole también como si fuera un binomio, y teniendo presente que $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, se procedería análogamente á como se hizo en el caso anterior, y se vería que

$$(m+n+p+q)^3=\left\{\begin{array}{l} =m^3+n^3+p^3+q^3+ \\ +3m^2(n+p+q)+3n^2(m+p+q)+3p^2(m+n+q) \\ \qquad +3q^2(m+n+p)+ \\ +6(mnp+mnq+mpq+npq). \end{array}\right.$$

Lo que manifiesta, que *el cubo de un polinomio es igual á la suma de los cuadrados de sus términos, más el triplo del cuadrado de cada término por cada uno de los restantes, más el séxtuplo de los productos ternarios diferentes que con los expresados términos se pueden formar.*

Mediante consideraciones análogas á las que se acaban de exponer, pudiera deducirse también la regla para elevar un polinomio á la potencia 4.ª, 5.ª, etc.

ARTÍCULO 6.º

Extracción de raíces.

36. *Se llama raíz de una cantidad algebraica positiva ó negativa, otra cantidad literal, que elevada á la potencia cuyo exponente es igual al índice de la raíz, reproduce la cantidad propuesta.*

37. Se ha visto (29) que $b^{4/5}=x.x.x.x$, en donde se verifica que $x.x.x.x.x=b$, y por lo tanto $x=\sqrt[5]{b}$; luego la primera igualdad manifiesta que

$$b^{4/5}=\left(\sqrt[5]{b}.\sqrt[5]{b}.\sqrt[5]{b}.\sqrt[5]{b}\right)^4=\left(\sqrt[5]{b}\right)^4$$

es decir, que *toda cantidad con exponente fraccionario, es igual á una raíz de la misma cantidad, cuyo índice es el denominador del quebrado, elevada á una potencia, cuyo exponente es el numerador.*

Al exponer la extracción de raíces de una expresión algebraica conviene, para mayor claridad, distinguir dos casos: 1.º Extracción de raíces de un monomio. 2.º Extracción de raíces de un polinomio.

38. Primer caso. Para determinar la expresión equivalente á la raíz de un monomio, hay que tener en cuenta el signo del resultado y los exponentes que afectan á las letras que en éste aparecen.

La raíz de grado par de un monomio positivo, puede ser positiva ó negativa.

Supuesto que, bien sea que la raíz tenga el signo positivo ó el negativo, siempre acontecerá que al elevarla á una potencia de grado par, el resultado deberá poseer el signo positivo (32); luego, en tal caso, la expresada raíz se hallará afectada del signo de ambigüedad $\pm$; así, por ejemplo, $\sqrt[4]{a^{12}}=\pm a^3$.

La raíz de grado par de un monomio negativo, es imaginaria. En atención á que no puede existir cantidad alguna positiva, ni tampoco negativa, que elevada á una potencia de grado par, dé un resultado negativo. Así, $\sqrt[6]{-a^{18}}$ es una cantidad ó RAÍZ IMAGINARIA, supuesto que el valor absoluto del resultado es a^3, y esta cantidad no puede estar afectada en el presente caso del signo positivo ni del negativo.

Con tal motivo, á las cantidades ó raíces que no son imaginarias, se denominan CANTIDADES REALES.

La raíz de grado impar de un monomio tiene el mismo signo que éste. Puesto que se sabe (32) que cuando el exponente de la potencia es impar, los signos de la potencia y de la raíz son iguales. Así, $\sqrt[5]{a^{10}}=a^2$, $\sqrt[5]{-a^{10}}=-a^2$.

39. *La raíz de un producto indicado, es igual al producto de las raíces del mismo grado de cada uno de los factores.*

Se desea probar que $\sqrt[m]{abcd}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\sqrt[m]{d}$..... (1)

En efecto, por lo dicho (36), se tiene que

$$\left(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\sqrt[m]{d}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\left(\sqrt[m]{c}\right)^m\left(\sqrt[m]{d}\right)^m=abcd.$$

La igualdad (1) manifiesta que *para multiplicar cantidades radicales del mismo índice, se multiplican las cantidades subradicales, y del producto que resulta se extrae la raíz de igual grado que el que afecta á las cantidades propuestas.*

40. COROLARIO.—*La raíz de una cantidad afectada de un exponente cuyo valor sea múltiplo del que posee el índice*

de la raíz, equivale á la expresada cantidad con un exponente igual al cociente que resulta de dividir el que tiene la potencia propuesta por el mencionado índice.

En efecto, según se acaba de ver $\sqrt[m]{b^{mn}}=\left(\sqrt[m]{b}\right)^{mn}$, y por lo manifestado (37) se tiene $\left(\sqrt[m]{b}\right)^{mn}=b^{\frac{mn}{m}}=b^n$

En vista de lo que antecede, *para extraer la raíz de un monomio, se determina el valor de la raíz de su coeficiente numérico, divídese el exponente de cada letra por el índice de la raíz y al resultado se antepone el signo que le corresponda.*

Ejemplo: $\sqrt[3]{-64a^3b^6c^{18}}=-4ab^2c^6$.

41. De aquí se sigue, que un monomio no tendrá raíz exacta cuando no la posea su coeficiente ó cuando los exponentes de las letras no sean divisibles por el índice de la raíz. Si se verifica alguna de estas dos circunstancias ó ambas á la vez, suele convenir transformar la expresión propuesta en el producto de dos monomios, uno que tenga raíz exacta y el otro nó, para lo cual se extraerá la raíz del que la tuviera exacta y en cuanto á la del otro se deja indicada.

Ejemplo: $\sqrt[3]{54a^6b^2c^4d^3}=\sqrt[3]{27a^6c^3d^3}\times\sqrt[3]{2b^2c}=3a^2cd\sqrt[3]{2bc}$

En vista de que para sacar un factor fuera de un radical hay necesidad de extraer su raíz, se infiere que cuando aparezca un factor fuera del signo radical y se desee colocarle debajo de éste, habrá necesidad de elevarle á la potencia que indique el índice de la raíz.

Así: $3a^2b\sqrt{5ab^3c}=\sqrt{9a^4b^2}\times\sqrt{5ab^3c}=\sqrt{45a^5b^5c}$.

Segundo caso. La deducción de la raíz cuadrada de un polinomio es una consecuencia de lo dicho (35), supuesto que si se tiene el polinomio $A+B+C+D+\ldots\ldots$ ordenado con respecto á las potencias descendentes de una letra y se representa con $m+n+p+q$ su raiz cuadrada, que también supónese ordenada con relación á la misma letra, sucederá que

$$A+B+C+D+.....=(m+n+p+q+.....)^2=$$
$$=m^2+2m(n+p+q+.....)+(n+p+q+.....)^2..... \quad (1).$$

Pero según lo que queda manifestado (20), se tendrá $A=m^2$, de donde $m=\sqrt{A}$. Para hallar el valor de n, obsérvese que al restar m^2 del primero y último miembro de la igualdad (1) resulta que

$$B+C+D+.....=2m(n+p+q+.....)+(n+p+q+.....)^2$$

en donde se ve que B será igual á $2mn$, supuesto que en uno y otro término, la letra ordenatriz deberá tener mayor exponente que en todos los demás, y por consiguiente $n=\frac{B}{2m}$.

El tercer término p se hallará considerando al polinomio

$$m+n+p+q+.....$$

como binomio, cuya primera parte fuera $m+n$ y la segunda los demás términos de que aquél consta, y acontecerá que

$$A+B+C+D+.....=$$
$$=(m+n)^2+2(m+n)\ (p+q+.....)+(p+q+.....)^2$$

Restando de ambos miembros de esta igualdad, $(m+n)^2$, se verificará que

$$A+B+C+D+.....+-(m+n)^2=$$
$$=2(m+n)\ (p+q+.....)+(p+q+.....)^2.$$

Ordenando el primer miembro de esta equivalencia con respecto á las potencias descendentes de la misma letra ordenatriz, y representando la diferencia indicada en el primer miembro por el polinomio $A'+B'+C'+D'+.....$, el cual se supone que también se halla ordenado con respecto á las potencias descendentes de la misma letra ordenatriz, sucederá

$$A'+B'+C'+D'+.....=2(m+n)\ (p+q+.....)+(p+q+.....)^2$$

de donde se deduce que $A'=2mp$, y en su consecuencia $p=\frac{A'}{2m}$.

Siguiendo un procedimiento análogo al que se acaba de practicar, se vendría en conocimiento de los demás términos de la raiz.

Según esto, *para hallar la raíz cuadrada de un polinomio entero, se ordenará éste con respecto á una letra, se determinará luego la raíz cuadrada del primer término obteniendo así el primero de la raíz; su cuadrado se restará del polinomio propuesto y se dividirá el segundo término de éste por el duplo del primer término de la raíz, y el cociente obtenido será el segundo término de ésta; los siguientes se determinarán restando del polinomio propuesto el cuadrado de la raíz hallada y dividiendo el primer término del resto por el doble del primero de la raíz.*

Si al extraer la raiz cuadrada entera se llega á obtener un residuo igual á cero, entonces el polinomio propuesto será cuadrado perfecto.

Después de lo dicho, se deduce que un polinomio ordenado con respecto á una letra, no podrá tener raiz cuadrada entera exacta: 1.° Cuando su primero y último término no sean cuadrados perfectos. 2.° Si el segundo término del mencionado polinomio no es divisible por el duplo del primer término de la raiz. 3.° En tanto que el primer término de un resto no sea divisible por el duplo del primer término de la expresada raiz. 4.° Cuando al llegar á un término de la raiz, en que la letra ordenatriz tenga un exponente igual á la mitad del que posee la misma letra en el último del polinomio propuesto, no sea aquel término igual al que resulte de extraer la raiz cuadrada del último término del mencionado polinomio.

42. También se infiere que ningún binomio puede tener raíz cuadrada exacta, supuesto que ésta no puede ser un monomio, en atención á que una potencia cualquiera de un monomio es otro monomio: tampoco puede ser un binomio, ni menos un trinomio, porque una potencia de un binomio tiene á lo menos tres términos.

Sin más que tener presente la expresión á que equivale el cubo de un binomio (35), y seguir un orden de consideraciones análogas á las expuestas en la investigación de la raíz cuadrada de los polinomios, pudiera deducirse, para la extracción de la raiz cúbica, la siguiente regla: *se ordena el polinomio propuesto res-*

pecto á una de sus letras, extráigase la raíz cúbica de su primer término y se tendrá el primero de la raíz; se divide el segundo término del polinomio por el triplo del cuadrado del primer término de la raíz y se encontrará el segundo término de ésta. Para hallar cada uno de los términos que quedan por determinar, se resta del polinomio dado el cubo de la suma de los que se han encontrado, dividiendo el primer término de la diferencia por el mismo divisor.

Sirviéndose de consideraciones de igual indole que las que se acaban de exponer, pudiera también deducirse el procedimiento para extraer de un polinomio su raíz cuarta, quinta, etc.

CAPÍTULO III.

Fracciones algebraicas.

GENERALIDADES.

43. Una FRACCIÓN ALGEBRAICA es el cociente indicado de una cantidad numérica ó literal por otra literal. Esta división no efectuada, se expresa del mismo modo que en Aritmética, cuando aquella operación se significaba por medio de un quebrado ordinario, ó sea sirviéndose de una raya horizontal encima de la cual se escribe el dividendo, que, como allí, se llama *numerador*, y debajo el divisor, á quien se le aplica también el nombre de *denominador*. El numerador y denominador constituyen los *términos de la fracción*.

Así se vió (26) que la división indicada

$$(6-7a^2-15a):(2a^3-4a^2+7a+6)$$

se escribía $\frac{6-7a^2-15a}{2a^3-4a^2+7a+6}$, sin más que empleando la escritura usada en Aritmética para expresar idéntica operación.

Se dice que es MIXTA una expresión literal cuando se compone de un monomio entero y de otro fraccionario reunidos algebraicamente.

Al expresar con la debida propiedad las fracciones algebraicas, se sobrentiende que, de efectuarse la división de su numerador por el denominador respectivo, no resultaría cociente entero exacto; con tal motivo siempre se supone que en ellas no se trata de ejecutar la operación indicada; de aquí la necesidad de someterlas al cálculo sin alterar la forma fraccionaria que poseen.

Las reglas que se siguen tanto para transformar las fracciones algebraicas como para operar con ellas son idénticas á sus respectivas aplicadas á los quebrados ordinarios, debiendo tener siempre en cuenta la diferencia que existe en la ejecución del cálculo de las expresiones algebraicas (Capítulo II), el cual tiene que acomodarse á la índole de las cantidades que en el mismo intervienen.

Representando los quebrados numéricos un conjunto de partes iguales de la unidad y habiendo deducido en tal concepto las reglas correspondientes á la transformación y cálculo de aquéllos, hay ahora necesidad de poner nuevamente de manifiesto, que las precitadas reglas son también aplicables al caso en que se trate de operar con fracciones algebraicas, supuesto que representando éstas una división indicada, adquieren con tal motivo una significación más amplia y general que la de las ordinarias, por cuanto que en aquéllas sus dos términos pueden representar cantidades inconmensurables, así como poseer afecciones contrarias; circunstancias que es inadmisible puedan verificarse en los quebrados comunes, dada la noción que de ellos se tiene adquirida (Aritm.ª 2).

ARTÍCULO 1.º

Transformación de fracciones.

44. *Para transformar una expresión mixta en fracción, se suma algebraicamente el numerador de ésta con el producto de la parte entera por el denominador, y al resultado se le pone el mismo denominador.*

En efecto: $a \pm \frac{b}{d} = \frac{ad}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$.

Si se multiplican ó dividen los dos términos de una fracción *algebraica por una misma cantidad, el valor de la fracción permanece inalterable.*

Sea la fracción $\frac{a}{b}$ y m la cantidad por la cual se desea multiplicar los dos términos. Siendo así que en toda división el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente, resultará que $\frac{a}{b}\times b=a$, de donde $\frac{a}{b}\times bm=am$, y por consiguiente $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$; cuya igualdad demuestra las dos partes que abraza la proposición que se acaba de enunciar.

Según esto, cuando se quiera simplificar una expresión algebraica, se dividirán sus dos términos por los factores que haya comunes en el numerador y en el denominador.

Véase en el núm. 23 un ejemplo de simplificación de fracciones algebraicas, en el cual se puede observar que se han dividido los dos términos de que consta por el M. C. D. algebraico.

Para reducir fracciones literales á un común denominador, basta multiplicar los dos términos de cada una por el factor que falta á su respectivo denominador para componer M. C. M. *de todos los denominadores.*

Se determina el M. C. M. de los denominadores análogamente á como se hacía en la Aritmética, ó sea formando el producto de las mayores potencias de los factores diferentes, tanto numéricos como literales, que tuvieren aquéllos.

Así, en los quebrados $\frac{5m}{18a^3b^2c}$, $\frac{7n}{20a^7b^4c^3}$, $\frac{4p}{6a^8b^4c^2}$, siendo el M. C. M. de los denominadores $360a^8b^4c^3$, quedarían transformadas las mencionadas fracciones en $\frac{100a^5b^2c^2m}{360a^8b^4c^3}$, $\frac{126an}{360a^8b^4c^3}$, $\frac{240cp}{360a^8b^4c^3}$.

En la simplificación de fracciones y en la reducción de éstas á un común denominador, se ha supuesto que los términos de aquéllas son precisamente monomios, en vista de que las teorías del M. C. D. y del M. C. M. de polinomios no son suficientemente sencillas, ni poseen el interés práctico necesario para que tengan cabida en estos elementos.

ARTÍCULO 2.°

Reglas operativas.

45. Suma y sustracción.—Según lo dicho (24), se tiene $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a-b+c}{d}$, así como también $\frac{m}{d}-\frac{n}{d}=\frac{m-n}{d}$.

Esto manifiesta que *para sumar ó restar fracciones de igual denominador, se suman ó restan algebraicamente los numeradores, y al resultado se le pone por denominador el mismo que poseen las fracciones propuestas.*

Cuando los quebrados algebraicos tuvieren denominadores diferentes, se reducen á un común denominador, y entonces el caso queda reducido al anterior.

Multiplicación y división.—*Para multiplicar dos fracciones se divide el producto de los numeradores por el de los denominadores.*

En efecto, $\frac{a}{b}\times b=a$, y $\frac{c}{d}\times d=c$; multiplicando ordenadamente ambas igualdades, se tendrá que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times bd=ac$; de donde resulta que $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

Para multiplicar una expresión entera por otra fraccionaria, ó una expresión fraccionaria por otra entera, se multiplica ésta por el numerador y el producto se divide por el denominador.

En efecto, siendo evidente que $a\times c=ac$, al dividir ambos miembros de esta identidad por b, resulta que $\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}$ y también $a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}$.

Para dividir dos fracciones algebraicas, se multiplicaría la que hace las veces de dividendo por la del divisor invertida.

Esta regla y las que corresponden á los demás casos de la división de fracciones, se demostrarían siguiendo el mismo procedimiento que en Aritmética (95).

Potencias y raíces.—*Para elevar una fracción algebraica á una potencia, se elevarían su numerador y denominador á la po-*

tencia que se desee y se dividiría el primer resultado por el segundo.

Esta regla se haria patente siguiendo el mismo razonamiento empleado en Aritmética (99).

46. *Para extraer la raíz de un grado cualquiera de una fracción literal, se obtendrán las raíces del mismo grado de numerador y denominador, y se dividirá la primera por la segunda.*

En efecto: $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$, igualdad cierta, supuesto que al elevar el segundo miembro á la potencia del grado m reproduce la cantidad subradical.

Corolario.—*Esta igualdad dice que para dividir dos cantidades radicales que posean igual índice, se dividirán las cantidades subradicales, y el cociente que resulte se colocará debajo de un radical del mismo grado.*

Nota.—*Para efectuar las operaciones con expresiones mixtas, se pueden transformar éstas previamente en fracciones ó considerarlas como polinomios.*

ARTÍCULO 3.º

Formas simbólicas.

47. Se suelen presentar en ciertos casos las fracciones $\frac{a}{0}$, $\frac{a}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y algunas otras cuya significación no es evidente é interesa conocer, si se han de interpretar debidamente los resultados obtenidos por medio del cálculo.

Si en la fracción $\frac{a}{0}$ representara el cero la carencia de toda cantidad, no tendría sentido la mencionada expresión, supuesto que nada significaría la relación entre una cantidad determinada y la nada absoluta; mas si se tiene en cuenta que el cero puede considerarse en tal caso como uno de los elementos constitutivos de la cantidad, dotado por lo tanto de su misma naturaleza y propiedades (*), podría interpretarse la antedicha expresión atendiendo á que si en una división indicada, en que el dividendo permanece invariable, el valor del cociente será tanto más crecido cuando más pequeño es el divisor; de aquí se infiere que cuando éste sea lo más pequeño posible, el cociente llegará á valer más que cualquier cantidad asignable, la cual se ha convenido en expresar por medio del signo ∞ que se lee el *infinito*.

Así, por ejemplo, si en la fracción $\frac{a}{b}$, en la cual se prescinde de los signos que pudieran afectar á sus dos términos, se supone que permanece invariable su numerador a, y se asignan á su denominador sucesivamente los valores $\frac{b}{10}$, $\frac{b}{100}$, $\frac{b}{1000}$, etc., entonces los de la fracción propuesta pasarán á ser respectivamente 10, 100, 1000, etc. veces mayores que el de $\frac{a}{b}$; de donde se infiere que cuando el denominador de ésta sea menor que cualquier cantidad por pequeña que sea, adquirirá la fracción un valor mayor que cualquier cantidad finita.

(*) Así, por ejemplo, el punto matemático, aun cuando se dice que es igual á cero, no por eso significa la carencia completa de extensión; pues si así aconteciese, nunca podría considerarse la línea como compuesta de un conjunto de puntos. Asimismo, al comparar la masa de un cuerpo con cero, se da á entender que este último representa un elemento del cuerpo, llámese éste átomo ó molécula, que, por más que no haya sido posible aislar, es indudable que tiene existencia real.

Así como acaba de hacerse patente que $\frac{a}{0}=\infty$, pudiera demostrarse, siguiendo un orden análogo de consideraciones, que si se asignan al denominador de una fracción valores que vayan creciendo indefinidamente, en la sucesión de éstos la citada fracción irá cada vez aproximándose á cero, y en su consecuencia resultaría $\frac{a}{\infty}=0$.

48. De cualquiera de estas dos igualdades se deduce que $0\times\infty=a$, y en su consecuencia ya se puede decir que *para que el producto de dos factores sea igual á cero, no basta que lo sea uno de ellos, sino que se requiere además que el otro tome un valor finito.*

49. En la expresión $\frac{0}{0}$ los dos ceros significan la relación entre dos cantidades infinitamente pequeñas, y atendiendo á la definición de lo que se entiende por cociente de dos cantidades, el de $\frac{0}{0}$ será según esto una cantidad finita cualquiera, y por lo tanto $\frac{0}{0}$ representará la indeterminación de la cantidad.

Obsérvese que la expresión $\frac{0}{0}$ también puede provenir de una fracción cuyos dos términos poseyeran un factor común, el cual se redujese á cero por una suposición cualquiera. En tal caso se conseguiría hallar su verdadero valor suprimiendo previamente dicho factor común antes de hacer la hipótesis que convierta en cero la fracción propuesta.

Por ejemplo, si se tiene la fracción $\frac{2x^3-3x^2-9x-44}{7x^3-8x^2-112x+128}$ y en ella se reemplaza en lugar de x el número 4, se reduce á $\frac{0}{0}$. Sin embargo, no es este el valor verdadero de aquella fracción, pues si se tiene en cuenta que puesta en la forma $\frac{(2x^2+5x+11)(x-4)}{(7x^2+20x-32)(x-4)}$, al suprimir el factor común que existe en sus dos términos, se reduce á $\frac{2x^2+5x+11}{7x^2+20x-32}$, y al sustituir en ésta el valor 4 en lugar de x, resulta para el de la fracción propuesta el quebrado $\frac{63}{160}$.

La expresión $\frac{\infty}{\infty}$ es también símbolo de indeterminación, pues si se sustituye en ella en vez del infinito la fracción $\frac{a}{0}$, que le representa, se tendría $\frac{\infty}{\infty}=\frac{a}{0}:\frac{a}{0}=\frac{0}{0}$.

En general, los símbolos cero é infinito aparecen también en algunas otras formas fraccionarias, pero en todo caso siempre se puede determinar su significación, sin más que reemplazando en vez del ∞ el quebrado $\frac{a}{0}$, donde a representa, según se tiene dicho, una cantidad finita cualquiera.

LIBRO SEGUNDO.

ECUACIONES DE PRIMERO Y DE SEGUNDO GRADO.

CAPÍTULO I.

Nociones preliminares.

ARTÍCULO 1.°

Definiciones.

50. Aquellas igualdades en que aparecen una ó varias cantidades desconocidas se llaman ECUACIONES. Las cantidades incógnitas que entran en una ecuación, se suelen representar por lo general con las últimas letras del alfabeto, al paso que las primeras de éste se emplean en lugar de las cantidades conocidas.

Toda igualdad cuyos miembros permanecen de igual valor numérico, cualquiera que sea el que se asigne á las letras que contiene, recibe el nombre de IDENTIDAD. Así la igualdad $(a-b+c)m=am-bm+cm$ será una identidad, supuesto que sus miembros sólo se diferencian en la forma.

Las ecuaciones sólo pueden convertirse en identidades asignando determinados valores á las letras que contienen.

Los valores de la incógnita reciben el nombre de *raíces*.

Solución de una ecuación es el valor de la incógnita ó el grupo de valores de las incógnitas que *satisfacen* ó *ve-*

rifican la ecuación, ó sea que la transforman en una identidad.

Una incógnita se halla *despejada* cuando se encuentra sola en un miembro y no aparece en el otro.

Sistema de ecuaciones es la reunión de dos ó más ecuaciones que deben verificarse con los mismos valores de las incógnitas.

Ecuaciones EQUIVALENTES son las que tienen las mismas soluciones.

Dícese que una ecuación *no se altera* cuando ha sido transformada en otra que le sea equivalente.

Si la ecuación que se considera no contiene más letras que las correspondientes á las incógnitas, se la denomina *numérica*.

Así, $4x—5y=9$ es una ecuación numérica con dos incógnitas.

Se llama *ecuación literal* aquella ecuación que además de la letra ó letras que representan incógnitas, contiene alguna ó algunas otras cuyo valor se supone conocido. Un ejemplo de ecuación literal se tiene en $ax—by=c$.

Las ecuaciones se dividen también en GRADOS.

Determina el grado de una ecuación, el número que corresponde á la mayor suma de los exponentes de las incógnitas, en cada uno de sus términos, no apareciendo éstas en ningún denominador, ni encontrándose afectadas del signo radical.

En los dos ejemplos que acaban de citarse, las ecuaciones son de primer grado.

ARTÍCULO 2.°

Transformaciones de una ecuación.

51. Como toda ecuación no es sino una igualdad condicional, se desprende que, si con sus miembros se efectúa la misma operación, los resultados obtenidos deberán continuar siendo iguales entre sí; mas como quiera que no porque se verifique tal circunstancia sea evidente que, á consecuencia de tal modificación de forma, pudieran tener los mismos valores la incógnita ó incógnitas en ambas ecuaciones, hay necesidad de poner de manifiesto los casos en que con la antedicha operación no se ha hecho sino transformar la ecuación propuesta en otra equivalente.

Desde luego es indudable que *una ecuación no se alterará, aun cuando á sus dos miembros se les agregue ó quite una misma cantidad conocida ó desconocida.*

52. COROLARIO 1.°—*Una ecuación no se altera aun cuando se pase un término de un miembro á otro, siempre que se le cambie de signo;* pues esto supone que se ha añadido ó quitado de ambos miembros una misma cantidad.

Por ejemplo, si se tiene la ecuación de 2.° grado $ax^2-b=cx+d$ y se agrega á los dos miembros la cantidad b y se les quita cx, se tendrá $ax^2-cx=b+d$.

Asimismo *podrían colocarse todos los términos en un solo miembro de la ecuación, sin más que cambiar el signo de los términos que se* TRASPONEN, ó sea de aquellos que varían de miembro. Según esto, la ecuación anterior pudiera escribirse en la forma $ax^2-cx-(b+d)=0$, conocida con el nombre de *reducción á cero.*

COROLARIO 2.°—*Una ecuación puede simplificarse supri-*

miendo todos aquellos términos que, siendo de igual valor y hallándose afectados del mismo signo, aparecen en ambos miembros.

También es evidente que *una ecuación no se altera multiplicando ó dividiendo sus dos miembros por una misma cantidad conocida.*

COROLARIO 1.º—*Una ecuación no se altera, aun cuando se cambien los signos de todos sus términos;* en atención á que este resultado puede suponerse que proviene de haber multiplicado aquéllos por —1.

COROLARIO 2.º—*En tanto que todos los términos de una ecuación posean un factor común conocido, podrá simplificarse sin más que dividir sus dos miembros por el expresado factor.*

53. *Cuando dependan de la incógnita alguno ó algunos de los denominadores de la ecuación propuesta, ésta tampoco se alterará, aun cuando se multipliquen sus dos miembros por la potencia de la incógnita del grado preciso, para que desaparezca de los mencionados denominadores.*

Efectivamente, si en la ecuación $\frac{a}{bx^m+c}=B$, se supone que el primer miembro contiene sólo el término en cuyo denominador la incógnita aparece con mayor exponente que en todos los demás, y el segundo contiene los términos restantes, se tendrá, que al multiplicar sus dos miembros por bx^m+c resultará $\frac{a}{bx^m+c}\times(bx^m+c)=B\times(bx^m+c)$, en donde se ve que todas las soluciones de la ecuación propuesta, tienen que satisfacer á la transformada, y esta última es fácil demostrar que no admite ninguna raiz diferente de las de aquélla. En efecto, si se supusiera que en la ecuación $\frac{a}{bx^m+c}\times(bx^m+c)=B\times(bx^m+c)$, existia una raiz r diferente de las de la ecuación propuesta, al sustituir su valor en la expresión bx^m+c, se tendría como resultado un número finito, ó el infinito ó cero. Pero bx^m+c no puede suponerse que, después de efectuada la anterior sustitución, sea igual á un número finito n, pues si tal sucediera, tendríase $\frac{a}{br^m+c}\times n=B\times n$ y por lo tanto, se verificaría que $\frac{a}{br^m+c}=B$; igualdad absurda por no ser r raíz de la ecuación propuesta.

Tampoco puede ser $br^m+c=\infty$, pues entonces resulta que la transformada $a=B\times(bx^m+c)$ se convierte en $a=B\times\infty$, igualdad imposible, supuesto que si tal sucediera, debería ser B igual á cero (48), y esto no puede acontecer, en atención á que r es á la vez raíz de la propuesta, pues se tendría $\frac{a}{\infty}=0$. Finalmente, no puede ocurrir que br^m+c sea igual á cero, pues en tal caso la ecuación transformada se convertiría en $a=B\times 0$ y es inadmisible que en esta igualdad B sea el infinito, pues entonces acaecería que r sería también raíz de la ecuación propuesta, en vista de verificarse en ella $\frac{a}{0}=\infty$.

Luego teniendo la transformada las mismas raíces que la propuesta y ninguna diferente de las de ésta, ambas ecuaciones serán equivalentes. Se acaba de suponer que los signos que afectan á las cantidades que han intervenido en esta demostración son positivos; pero se comprende con facilidad que, siguiendo el mismo orden de consideraciones, pudiera también hacerse patente la certeza de la proposición, aun cuando cambiasen alguno ó algunos de aquéllos.

54. De estas últimas proposiciones se deduce, que podrán hacerse desaparecer los denominadores de una ecuación sin que ésta se altere, siempre que éstos sean numéricos, y también cuando, con ciertas restricciones (53), dependieran de la incógnita, pues en tales casos bastaría *reducir todos los términos de la ecuación á un común denominador y después suprimir éste,* lo que equivaldría á multiplicar los dos miembros de la ecuación propuesta por el denominador suprimido. Esta transformación es conocida con el nombre de *quitar los denominadores.*

Ejemplo: Sea la ecuación

$$\frac{2x}{7}-\frac{4-3x}{8}+11x=\frac{2}{5x}-\frac{x}{3}+20:$$

Según lo dicho (ARITM.ª 82), se infiere que para reducir sus términos á un mismo denominador, *habrá que determinar el* M. C. M. *de todos los denominadores, el cual sería* $7.8.5.3.x=840x$, *y multiplicar el numerador de cada término fraccionario por el cociente que resulta de dividir el antedicho* M. C. M. *por el respectivo denominador y los términos enteros por el precitado* M. C. M. Procediendo de este modo se tendría:

$$\frac{2.8.5.3.x^2}{7.8.5.3\,x}-\frac{(4-3x)\times 7.5.3.x}{7.8.5.3.x}+\frac{11.7.8.5.3.x}{7.8.5.3.x}=$$
$$=\frac{2.7.8.3}{5.7.8.3.x}-\frac{7.8.5.x^2}{3.7.8.5.x}+\frac{20.7.8.5.3.x}{7.8.5.3.x}$$

Suprimiendo ahora todos los denominadores, resulta:

$$2.8.5.3.x^2-(4-3x)\times 7.5.3.x+11.7.8.5.3.x=$$
$$=2.7.8.3-7.8.5.x^2+20.7.8.5.3.x\,;$$

lo que manifiesta que cuando, como en el presente ejemplo sucede, los denominadores son primos entre sí dos á dos, la regla anterior queda reducida á *multiplicar el numerador de cada término fraccionario por el producto de los denominadores de los demás, y los términos enteros por el producto de todos los denominadores.*

En ninguna de las transformaciones que se han efectuado, ha variado el grado de la ecuación; si al deducir la transformada hubiera alteración en él, esto pondría de manifiesto que se había introducido en alguna de las dos ecuaciones una nueva relación entre la incógnita ó incógnitas y las cantidades conocidas, y por lo tanto ya no podría ser el mismo el número de raíces de ambas ecuaciones.

Por ejemplo, en el caso general de que se multipliquen ambos miembros de una ecuación por una cantidad desconocida, y cuando aquéllos se elevan á una potencia del mismo grado, la ecuación que en cada una de estas transformaciones se obtiene, posee mayor número de soluciones que la propuesta respectiva, por más que las de esta última deberán ser comunes á ambas. Inversamente pudiera decirse, que si los dos miembros de una ecuación se dividen por una cantidad que contenga á la incógnita ó se extrae de aquéllas una raíz del mismo grado, se obtendrá para la transformada una ecuación de grado inferior y de menor número de soluciones que la propuesta.

CAPÍTULO II.

Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

ARTÍCULO 1.º

Resolución de ecuaciones.

55. Antes de que se proceda á resolver una ecuación, se *prepara* ésta; con tal fin comiénzase por quitar los denominadores, se efectúan las operaciones que estén indicadas, en el caso de que la incógnita se encuentre dentro de un paréntesis, y se hacen las simplificaciones que son consiguientes, en el supuesto de que haya algún término igual ó factor común, en ambos miembros. Después se efectúa la *trasposición* de los términos con objeto de que pasen á un miembro todos aquellos que son dependientes de la incógnita, y al otro los que sean conocidos; luego se hace la *reducción* de los términos semejantes á uno solo, y finalmente se multiplican ambos miembros de la ecuación que se obtenga por -1, en el caso de que fuera negativo el término en que aparezca la incógnita.

Ejemplo 1.º Preparar la ecuación numérica:

$$x+\frac{3}{2}x-1600+\frac{15}{8}x=19400-\frac{105}{48}x.$$

Quitando los denominadores (54), resulta:

$$48x+72x-76800+90x=931200-105x.$$

Al efectuar la trasposición de términos, se tendrá:

$$48x+72x+90x+105x=931200+76800.$$

Procediendo ahora á hacer la reducción de términos, se deducirá que $315x=1008000$.

Ejemplo 2.º Preparar la ecuación literal:

$$\frac{a}{bx}+c=\frac{fx-g}{x}+\frac{d}{e}.$$

Si se quitan los denominadores, se obtendrá:

$$ae+bcex=be(fx-g)+bdx.$$

Efectuando la multiplicación que está indicada, resultará: $ae+bcex=befx-beg+bdx$.

Trasponiendo términos: $bcex-befx-bdx=-ae-beg$.

Al multiplicar ambos miembros por -1, se tendrá que $befx-bcex+bdx=ae+beg$.

Reduciendo cada miembro á un solo término:

$$(ef-ce+d)bx=(a+bg)e.$$

56. De modo que, según se acaba de ver en uno y otro ejemplo, toda ecuación de primer grado con una incógnita, después de preparada para su resolución, ó sea cuando queda *reducida* á su forma más simple, consta de dos términos: uno con la incógnita elevada á la primera potencia, y el otro independiente de la incógnita y por lo tanto conocido. Según esto, la ecuación reducida de primer grado con una incógnita presenta la siguiente forma general: $Ax=B$.

En la mayoría de los casos, para llegar á conseguir la reducida de una ecuación, no hay necesidad de efectuar todas las transformaciones que se han mencionado (**55**), puesto que, según se ha visto en los ejemplos que anteceden, alguna ó algunas de ellas pudieran ser innecesarias, dada la forma de la ecuación propuesta. Tampoco es de rigor que se practiquen las expresadas transformaciones, precisamente en el orden que se han mencionado, por más que siempre será conveniente atenerse á él, pues de lo contrario pudiera acontecer que, al preparar una ecuación, hubiera necesidad de que se ejecutasen dos ó más veces transformaciones de la misma índole.

57. Dividiendo los dos miembros de la ecuación reducida $Ax=B$ por el coeficiente A de la incógnita, aparecerá ésta *despejada*, ó sea la transformada $x=\frac{B}{A}$, y por lo tanto resuelta la ecuación que se propuso.

De aquí se deduce que *en toda ecuación de primer grado con una incógnita, ésta no tiene sino un solo valor*, supuesto que al ser la propuesta equivalente á la reducida $Ax=B$, ésta no puede quedar satisfecha, sino reemplazando en ella $\frac{B}{A}$ en vez de x, atendiendo á que es la única expresión que multiplicada por A da un producto igual á B.

Se desprende también de lo dicho, que para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, *se prepara aquélla, y luego, en la reducida que se obtenga, se divide el miembro conocido por el factor que multiplica á la mencionada incógnita*.

Como pudiera ocurrir que en el curso de las operaciones practicadas hasta despejar la incógnita, se hubiera incurrido en alguna equivocación; para asegurarse de ello, se sustituirá en la ecuación propuesta en vez de la incógnita, el valor hallado para la misma, y si se transforma en una identidad, será señal de que la ecuación está bien resuelta; mas si esto no sucede, se tendrá la prueba de que se ha cometido algún error en las operaciones efectuadas y por lo tanto habrá necesidad de resolverla nuevamente.

Así, en la ecuación $x+\frac{3}{2}x-1600-\frac{15}{8}x=19400-\frac{105}{48}x$ correspondiente al ejemplo 1.º, se tenía para reducida $315x=100800$, de donde $x=\frac{100800}{315}=3200$.

Si ahora se desea comprobar este valor, se sustituiría en lugar de x en la ecuación propuesta y se tendría

$$3200-\frac{3}{2}\times3200-1600+\frac{15}{8}\times3200=19400-\frac{105}{48}\times3200,$$

en donde efectuando las multiplicaciones y divisiones que están indicadas y reduciendo términos, aparecería la identidad $12400=12400$; luego el valor hallado para x es el verdadero, en vista de que verifica la ecuación propuesta.

ARTÍCULO 2.º

Resolución de problemas.

I.

GENERALIDADES.

58. En la resolución de todo problema algebraico hay que tener muy en cuenta las relaciones que ligan á las cantidades desconocidas con los datos: si en el enunciado de la cuestión se expresaran de un modo taxativo las mencionadas relaciones, y todas ellas pudieran representarse en el lenguaje simbólico de un modo exacto y preciso, no sería entonces difícil traducir aquéllas en ecuaciones, ó sea lo que se llama *plantear el problema.* Mas como quiera que tan fiel representación no es posible conseguir en algunas ocasiones, dada la notación de que se dispone, de aquí que las ecuaciones deducidas del planteamiento de un problema expresen solamente las condiciones algebraicas á que han de satisfacer las cantidades desconocidas. Así se explica que al resolver la ecuación á que ha dado lugar el planteamiento de un problema, el valor hallado para la incógnita verifique á aquélla en todas ocasiones, pero no por eso puede asegurarse que satisfaga á la totalidad de las condiciones que explícita ó implícitamente se determinan en el enunciado de la cuestión propuesta, las cuales podrán ó no quedar satisfechas con el valor hallado.

59. No siempre es fácil plantear un problema, si se atiende á que en unos casos no aparecen de un modo taxativo en el enunciado de aquél ciertas relaciones que existen entre las incógnitas y los datos, las cuales pudiera suceder que hasta fueran ignoradas por quien trata de resolver la cuestión; en otras ocasiones acontece que la cantidad desconocida no se relaciona directamente con las conocidas, sino por el intermedio de otras auxiliares; y, finalmente, la diversa índole de los problemas que pudieran proponerse, y la mayor ó menor complicación que existe en el enunciado de éstos, son circunstancias que impiden poder dictar reglas fijas para el planteamiento de todo problema; lo único que ocurre sobre este particular es que para conseguir este fin, *deberá comenzarse por examinar las relaciones que median entre las incógnitas y los datos; una vez hecho esto, se representarán las primeras con las últimas letras del alfabeto y se ejecutarán con ellas y las cantidades conocidas las mismas operaciones que se efectuarían con unas y otras, si se tratase de comprobar las incóg-*

nitas en el caso de que éstas fueran conocidas. De este modo se obtendrán diferentes expresiones algebraicas, que igualadas de conformidad con el enunciado de la cuestión, darán por resultado la ecuación ó ecuaciones que se buscan.

60. Una vez planteado el problema, hay que *resolver* la ecuación ó ecuaciones resultantes, para lo cual ya se ha visto que, cuando se trata de una ecuación de primer grado con una incógnita, existen reglas seguras y precisas para deducir su correspondiente solución.

Determinados que sean el valor ó valores de la incógnita ó incógnitas, se *comprobarán* éstos, viendo si efectivamente satisfacen á las condiciones que se exijen en el enunciado de la cuestión.

Finalmente, se *discutirá* el problema examinando la naturaleza y signos de los valores que pueden poseer la incógnita ó incógnitas, según sean los que tengan las cantidades que en aquél se suponen conocidas.

Los problemas se dividen en *determinados, indeterminados* é *imposibles,* según que la ecuación ó sistema de ecuaciones que resulta sea determinado, indeterminado ó imposible: en el primer caso cada incógnita no tiene sino un solo valor, en el segundo cada incógnita posee diferentes valores, y en el tercero, el valor ó conjunto de valores que verifican á una ecuación ó á un sistema de éstas no satisface á las condiciones del problema. Esto último proviene, de que al plantear un problema, la ecuación ó sistema de ecuaciones resultantes, expresan únicamente la relación ó relaciones numéricas que existen entre las cantidades que intervienen en la cuestión, al paso que estas mismas cantidades pueden, según se ha dicho, tener que satisfacer además á otras condiciones de su enunciado, las cuales no es posible expresar por medio de la notación algebraica.

II.

PROBLEMAS QUE SE RESUELVEN POR MEDIO DE UNA ECUACIÓN.

61. PROBLEMA 1.º—*Hallar dos números cuya suma valga 17 y la diferencia 5.*

Este problema tiene dos incógnitas; mas como quiera que, dada la sencillez de las relaciones que las ligan, conocida una de aquéllas la otra se determina con facilidad, se puede plantear el problema sirviéndose solamente de una incógnita.

Sea x el número menor, el mayor estará expresado por $x+5$; y por lo tanto la suma de ambos valdrá 17, ó sea $x+x+5=17$; resolviendo esta ecuación, se obtiene $x=6$, y por consiguiente el número mayor será $6+5=11$.

Cuando los datos de un problema tienen, como el que se acaba de resolver, valores concretos, hay necesidad de plantearlo nuevamente, si se propone otro problema de la misma índole aunque con diferentes datos, por cuyo motivo es preferible resolver los problemas de una manera general, ó sea suponiendo que no se halla determinado el valor particular de los diferentes datos; en tal caso al deducir el valor de la incógnita, por medio de éstos, se obtienen fórmulas generales, en las cuales no hay más que sustituir en cada caso particular, los valores de los datos para la investigación del correspondiente de la incógnita.

Por ejemplo: si en el problema anterior se designa la suma de los dos números conocidos por S y la diferencia por d y continúa representándose con x el menor número de los dos desconocidos, se tendrá que el mayor estará expresado por $x+d$, y por lo tanto $x+x+d=S$, de donde $x=\frac{S}{d}-\frac{d}{2}$ y $x+d=\frac{S}{2}-\frac{d}{2}+d=\frac{S}{2}+\frac{d}{2}$.

62. Lo cual manifiesta en lenguaje vulgar, que *cuando se conocen la suma y la diferencia de dos números, el mayor, ó sea el que hace las veces de minuendo, es igual á la mitad de la suma, más la mitad de la diferencia, así como el menor equivale á la mitad de la suma, menos la mitad de la diferencia.*

El mismo resultado se hubiera obtenido representando y el número mayor, pues el menor sería entonces $y-d$ y la ecuación resultante $y+(y-d)=S$, de donde $y=\frac{S+d}{2}$, y por consiguiente el número menor $y-d=\frac{S+d}{2}-d=\frac{S-d}{2}$.

Haciendo aplicación de estas fórmulas al caso en que los datos estén expresados por los números 17 y 5, se tendrían idénticos valores á los que se encontraron anteriormente.

Si se quisiera hallar la condición á que deben satisfacer los mencionados datos, para que el problema fuera posible con números positivos, debería verificarse que $\frac{S}{2}+\frac{d}{2}>0$ y $\frac{S}{2}-\frac{d}{2}>0$; de la primera desigualdad se deduce $S>-d$, y de la segunda $S>d$; lo cual indica que en ningún caso S puede ser negativo y que su valor debe ser mayor que el de la diferencia.

Problema 2.º—*Deseando un individuo distribuir el dinero que tenía entre varios pobres, observó que si entregaba á cada uno de éstos 28 rs. vn. le sobraban 7, y si daba á cada uno de los pobres 31 rs. le faltaban 48. Se quiere averiguar cuántos eran los pobres y cuál la cantidad de dinero destinada á ser repartida entre ellos.*

Si se conociera una de estas dos incógnitas, sería entonces fácil determinar la otra. Representando x el número de pobres, se tendría, $28x+7=31x-48$; de esta ecuación se obtiene $x=18\ ^1/_3$.

Lo cual dice que el problema es imposible, supuesto que por ser el valor de x un número fraccionario, carece de sentido en el presente problema.

Si éste se hubiera enunciado diciendo: *un individuo que trata* *de comprar cierta cantidad de tela, observa que, costándole el metro 28 rs. vn., le sobraban 7, y si compraba de otra tela que valía á razón de 31 rs. el metro, le faltaban 48.*

Este problema y el anterior, al plantearlos, dan lugar á la misma ecuación y por consiguiente á idéntico valor para la incógnita; sin embargo, dicho valor no satisface al primer problema y sí al segundo: la diferencia consiste en que la naturaleza de la cantidad buscada en el primero, es tal, que no permite la división de la unidad en partes, mientras que sí en el segundo.

Si ahora se quisieren averiguar las condiciones, que deben tener los datos, para que el penúltimo problema fuera posible, se plantearía éste en general. Así, llamando A la cantidad que en la primera distribución corresponde á cada pobre, B lo que le sobra, A' lo que se entrega á cada uno de éstos en el segundo reparto, y B' la cantidad que falta para completar éste, se tendrá la ecuación $Ax+B=A'x-B'$, de donde se deduce que $x=\frac{B+B'}{A'-A}$.

Como que x en este problema no es admisible que pueda tener signo negativo, deberá verificarse $A'-A>0$, y como además el expresado valor debe ser entero, es necesario que $B+B'$ sea múltiplo de $A'-A$, á cuya condición se ve que no satisfacen los valores asignados á los datos.

Según esto, si se quisiera que el valor de x satisficiese á ambos problemas, bastaría con hacer B igual á 6 en vez del valor 7 que antes tenía; y así resultaría, $x=18$.

Si se hubiera elegido por incógnita la cantidad total y que se trata de distribuir, el número de pobres estaría expresado por $\frac{y-B}{A}=\frac{y+B'}{A'}$, de donde $y=\frac{AB'+A'B}{A'-A}$.

Esto manifiesta, que la elección de la incógnita influye en la mayor ó menor sencillez de los cálculos necesarios para determinar el valor de aquélla; así, cuando se supone que ésta representaba el número de pobres, la ecuación resultante no tenía denominadores, y era también entera la expresión que determinaba la totalidad de la limosna que se había de distribuir; mientras sucede todo lo contrario cuando la incógnita es la precitada limosna.

Si el problema se enunciara diciendo: *una compañía mercantil emprendió un negocio: en la liquidación resultó que si á cada socio* *se repartía un dividendo de 28 onzas de oro, sobraban 6 de éstas, y en el caso de que los dividendos fueran de 31 onzas, faltaban 48: se desea averiguar si ganó ó perdió la compañía en la expresada operación comercial, cuál fué la pérdida ó la ganancia y el número de socios.*

Llamando x al número de socios, y suponiendo que cada uno de ellos tuvo que desembolsar dinero, la ecuación sería $28x-6=31x+48$, de donde $x=-18$. Pero si se admite que cada socio percibió cierta cantidad, al plantear el problema, se tendría $28x+6=31x-48$, de donde $x=18$.

En el primer caso se ha tomado por unidad un socio que desembolsa dinero, y el resultado es de signo contrario al de esta unidad, lo cual manifiesta que, en el asunto á que se hace referencia, hubo ganancias en la compañía. Al considerar el segundo caso, se ve que en él la unidad supone un socio que recibe dinero y resulta $x=18$, ó sea un número afectado del mismo signo que la unidad, lo cual viene á confirmar las ganancias en la operación mercantil de que se trata. De modo que, sea cualquiera la unidad adoptada, las soluciones en el problema no sólo dan á conocer el número de socios y la suma que se busca, sino también si ésta fué en concepto de pérdida ó de ganancia.

Si en el enunciado de este último problema se supusiera que había pérdidas, el problema sería imposible, no porque, según se ha visto, el valor obtenido para x fuera negativo, sino atendiendo á que se exije de antemano la condición de que el valor de la incógnita tiene que ser positivo.

PROBLEMA 3.º—*Un individuo distribuyó las avellanas que poseía entre cuatro niños: al primero le entregó la mitad de aquéllas menos 5; al segundo la cuarta parte menos 3; al tercero la sexta parte; y finalmente, al cuarto las 8 avellanas que le quedaban. ¿Qué número de avellanas poseía el mencionado individuo al hacer el reparto?*

Llamando x al total de las avellanas distribuidas entre los cuatro niños, se tendría que el número de avellanas que tomó el primero de ellos, estaría expresado por $\frac{x}{2}-5$; las que recibió el segundo por $\frac{x}{4}-3$, las del tercero por $\frac{x}{6}$; así la ecuación sería, $\frac{x}{2}-5+\frac{x}{4}-3+\frac{x}{6}+8=x$: de donde resulta $x=0$;

esto manifiesta que el problema es im posible, lo cual fácilmente se explica, si se tiene en cuenta que el primer miembro es siempre mayor que el segundo.

Si la índole de la cuestión que se trata de resolver, admitiera acepciones opuestas para la incógnita, entonces la solución cero señalaría el límite que separa los valores positivos y negativos de la precitada incógnita.

Si se modificara el enunciado de este último problema diciendo: *un individuo distribuyó las avellanas que tenía entre cuatro niños: al primero le entregó la mitad, al segundo la tercera parte, al tercero la sexta y al cuarto le dió las 8 avellanas que todavía quedaban en su poder. ¿Cuál es el número de avellanas que distribuyó?*

Representando este número por x se tendría, $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}+8=x$, de donde $x=\frac{48}{0}=\infty$, lo cual dice que esta ecuación es también imposible, en vista de no existir ningún valor finito que le satisfaga; y se comprende lo dicho, pues al examinar la citada ecuación, se pone de manifiesto en ella que 8 debería ser igual á cero.

Finalmente, si se dijera: *un individuo distribuyó las avellanas que llevaba entre cuatro jóvenes: al primero le entregó la mitad menos 5, al segundo la tercera parte menos 3, al tercero la sexta parte menos 2, y al cuarto le regaló las 10 avellanas que le sobraban. ¿Cuál será el total de las avellanas repartidas?*

Llamando x el número de éstas, deberá verificarse $\frac{x}{2}-5+\frac{x}{3}-3+\frac{x}{6}-2+10=x$, de donde se obtiene $x=\frac{0}{0}$; lo cual prueba que el problema es indeterminado, supuesto que cualquier valor asignado á x le satisface. Esto tiene fácil explicación, en el presente caso, si se observa que la ecuación obtenida es una equivalencia.

63. Problema 4.º—*Dos máquinas locomotoras parten á la vez, con movimiento uniforme* (*), *de Jerez y de Puerto*

(*) Se dice que el movimiento de un móvil es uniforme, *cuando en tiempos iguales, por muy pequeños que éstos se consideren, recorre trayectos iguales.* En el movimiento uniforme se entiende por velocidad, *el camino recorrido por el móvil en la unidad de tiempo.*

Real en dirección á Sevilla: la que sale de la primera de estas poblaciones, marcha con una velocidad de 400 metros por minuto, y la que procede de la segunda, recorre en igual tiempo 700 metros. Se sabe además que la porción de vía férrea comprendida entre Jerez y Puerto Real tiene una longitud de 24 kilómetros, y desea averiguarse á qué distancia de la primera ciudad se encontrarán las mencionadas locomotoras.

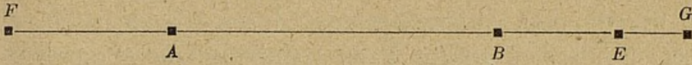
Representando por x esta última distancia, $24+x$ expresará la que media entre Puerto Real y el punto de encuentro de ambas máquinas. Como que en el movimiento uniforme se verifica que las velocidades son directamente proporcionales á las distancias recorridas, se tendrá $\frac{400}{700}=\frac{x}{24+x}$, de donde $x=32$.

Luego según esto, la locomotora que partió de Puerto Real, alcanzó á la que salió de Jerez á los 32 kilómetros de distancia de esta ciudad, ó sea en la estación de Lebrija.

Generalizando este problema, ó sea representando las cantidades que intervienen en su resolución por medio de letras, y discutiendo la fórmula obtenida para valor de la incógnita, se tiene la ventaja de que, sin salirse de la cuestión propuesta, se pueden examinar nuevamente, á manera de resumen, las variadas interpretaciones á que se prestan los diferentes valores que, según se ha visto en los ejemplos anteriores, pudieran corresponder á la incógnita.

Dos móviles parten en línea recta y al mismo tiempo de los puntos A *y* B, *distantes entre sí* d *metros, con las velocidades respectivas* v *y* v′: *averiguar si se encuentran y en qué punto.*

Representando, como en el caso anterior, por x la distancia que media entre el punto de partida B y el de encuentro, se tendrá que $d+x$ entonces expresa el trayecto



comprendido entre este último punto y el A. Si por otra parte se comienza por suponer á los dos móviles caminando en dirección de F á G, resultaría que, por análogas consideraciones á las expuestas en el problema numérico anterior, $\frac{x}{d+x}=\frac{v'}{v}$, de donde $x=\frac{v'd}{v-v'}$.

En esta fórmula pueden hacerse en primer término una de las tres suposiciones que siguen:

1.ª $v>v'$, 2.ª $v=v'$, 3.ª $v<v'$.

En el primer caso el valor de x es positivo, supuesto que lo son el dividendo y el divisor de la división indicada, y además el expresado valor satisface al problema, en atención á que ambos móviles deberán encontrarse á la derecha del punto B, lo cual es, por otra parte, natural, en vista de que la velocidad del móvil, al partir del punto A, excede á la poseída por el que sale al mismo tiempo del B.

En el supuesto de que $v=v'$, el valor obtenido para x es infinito, y por lo tanto los móviles nunca llegarán á encontrarse, lo cual se explica fijándose en que los dos móviles parten á la vez de los puntos A y B, caminan en un mismo sentido y con idéntica velocidad durante el trayecto representado por la recta $F\ G$.

Si, además de suponer $v=v'$, se tuviese $d=0$, entonces acontecería que $x=\frac{0}{0}$; esto dice que el valor de x es en tal caso indeterminado, y se comprende fácilmente que así sea al considerar que los dos móviles caminan unidos en todos los puntos del trayecto.

Finalmente, en el tercer caso, ó sea cuando $v<v'$, el valor de x será negativo; esto manifiesta que el punto de encuentro se hallará no á la derecha del punto B como en los casos anteriores, sino en sentido opuesto ó sea á la izquierda de B. Por lo tanto, para que el problema fuese posible, en la hipótesis de que los móviles partan de los puntos A y B, se requiere que la dirección del movimiento de aquéllos fuera de derecha á izquierda.

Si cuando v es mayor ó menor que v', aconteciera que $d=0$, entonces $x=\frac{0}{v-v'}=0$: por tanto el punto de encuentro estaría dado por el mismo punto de partida, que sería común á ambos móviles.

64. De las conclusiones obtenidas en los problemas que anteceden, se tiene: 1.º Que si la incógnita posee un valor fraccionario ó negativo, el cual se halla en contraposición con la naturaleza de la cantidad, cuyo valor se trata de averiguar ó con alguna condición dada implícitamente en el enunciado; en tal caso el problema es imposible. 2.º Que aun cuando muchas veces las cantidades cuyos valores se quieren determinar, no pueden ser expresadas por números fraccionarios ó expresiones negativas, no por eso debe deducirse que el problema es imposible, hasta haber determinado con exactitud lo que representa la unidad, pues acontece en ocasiones que una solución al parecer imposible, es de fácil interpretación. 3.º Que cuando un problema no esté resuelto por la solución hallada, no debe deducirse que la ecuación sea absurda, sino que lo es el enunciado; así, aquellos problemas en los cuales se pida una magnitud

determinada y den por resultado una solución igual á ∞, son absurdos ó imposibles, mas no la ecuación que da lugar á dicho valor ∞ (*). 4.º Que las ecuaciones ó las fórmulas de todo problema general en donde intervienen cantidades susceptibles de poseer sentidos contrarios, son aplicables á todo problema que se distinga del propuesto, por la diferente manera de existir de los antedichos elementos literales, sin más que cambiar de signo en aquellas fórmulas, á las cantidades que mudan de acepción (**).

Teniendo presentes las conclusiones expuestas, podrán interpretarse debidamente los resultados que se obtengan en la resolución de los problemas, y rectificar los enunciados que adolezcan de algún defecto.

(*) Por ejemplo, en el problema anterior se tenía, $\frac{x}{d+x}=\frac{v'}{v}$, y allí se vió que x era infinito cuando $v=v'$. Obsérvese que la ecuación anterior se transforma en $\frac{x}{d+x}=1$; ecuación absurda en el supuesto de que x hubiera de poseer un valor finito y determinado; mas como quiera que el expresado valor es precisamente en este caso igual á infinito, ya no puede decirse, si se ha de hablar con la debida propiedad, que la ecuación mencionada sea absurda; lo verdaderamente imposible es que dos móviles, que parten de puntos diferentes, caminando en el mismo sentido, en idéntica dirección y con igual velocidad, puedan llegar á encontrarse.

(**) Este último enunciado, que la experiencia ha hecho ver como cierto, se conoce con el nombre de *principio de Descartes.*

CAPÍTULO III.

Ecuaciones de primer grado con más de una incógnita.

ARTÍCULO 1.º

Eliminación de una incógnita entre dos ecuaciones.

65. *Eliminar* una incógnita entre dos ecuaciones, es deducir de éstas, por medio de transformaciones, que no alteren los valores de las demás incógnitas, otra ecuación que no contenga á la incógnita que se desea hacer desaparecer.

Para conseguir este objeto, existen diversos procedimientos, entre los cuales están más en uso los llamados *métodos de sustitución* y *de reducción*. Cualquiera que sea la manera de efectuar las transformaciones que con tal motivo proceden, se supondrá, para mayor sencillez, que las ecuaciones á las cuales se han de aplicar, están ya preparadas (55), y por lo tanto, tendrán la forma $ax+by+cz+.....=K$, en la cual el término conocido y los coeficientes representan números enteros.

El MÉTODO DE SUSTITUCIÓN consiste en despejar la incógnita que se desea eliminar, en una cualquiera de las ecuaciones propuestas, y sustituir el valor obtenido en la otra ecuación.

Ejemplo: Eliminar la incógnita y en las ecuaciones

$$4x+7y=47,$$
$$5x-2y=5;$$

despejando y en la primera ecuación, se tendrá $y=\frac{47-4x}{7}$; sustituyendo este valor en la segunda, resultará,

$$5x-2\times\frac{47-4x}{7}=5;$$

en donde se ve que ya no aparece la incógnita y.

66. Este método suele modificarse, despejando en ambas ecuaciones la incógnita que se desea eliminar y sustituyendo uno de estos valores por la expresada incógnita en el otro. Así, en el ejemplo anterior se tendrá: $y=\frac{47-4x}{7}$, $y=\frac{5-5x}{2}$; de donde resulta

$$\frac{47-4x}{7}=\frac{5-5x}{2}.$$

Cuando se elimina una incógnita en la forma que acaba de efectuarse, ó sea, *despejando aquélla en ambas ecuaciones é igualando los valores obtenidos, se dice que se ha seguido el* MÉTODO DE IGUALACIÓN.

67. MÉTODO DE REDUCCIÓN (*).—Si en las ecuaciones propuestas, fueran iguales los coeficientes de una misma incógnita, la ecuación final resultante de sumarlas ó restarlas, según que estos coeficientes tuvieran signos contrarios ó un mismo signo, no contendría ya á la incógnita que se deseaba eliminar. Así al sumar ordenadamente las ecuaciones

$$\begin{array}{rl} & 13x+8y=23 \\ & 4x-8y=11 \\ \hline \text{Se tendrá.....} & 17x \quad\quad =34 \end{array}$$

(*) Este procedimiento es conocido además con la denominación de *método de adición* ó *sustracción* y también con el de *método de coeficientes idénticos*.

De aquí se desprende que si los coeficientes de la incógnita que se desea eliminar no son iguales, siempre podrá hacerse que lo fueran, multiplicando cada una de las ecuaciones propuestas (*), por el coeficiente que en la otra ecuación tiene la incógnita que se quiere eliminar.

Si, por ejemplo, se quisiera hacer aplicación del procedimiento que acaba de exponerse, á la eliminación de la incógnita x en las ecuaciones anteriores

$$4x+7y=47$$
$$5x-2y=5,$$

habría que multiplicar la primera por 5 y la segunda por 4, y resultarían con tal motivo las ecuaciones

$$20x+35y=235$$
$$20x-8y=20,$$

las cuales al restarlas ordenadamente, darían por resultado $43y=215$, en la que ya no aparece la incógnita x.

Cuando los coeficientes de la incógnita que se trata de eliminar, no sean primos entre sí, bastaría multiplicar cada una de las dos ecuaciones por el factor, que le falta al respectivo coeficiente de la antedicha incógnita para componer el múltiplo más simple de los precitados coeficientes, y después se proseguiría la operación en la forma del primer caso.

Según esto, si se desea eliminar la incógnita x en las dos ecuaciones

$$12x+5y-3z=20$$
$$18x-2y+11z=31,$$

(*) Cuando se dice que se multiplica una ecuación por cierto número, deberá entenderse que lo multiplicado realmente por éste son los dos miembros de aquélla.

se tendrá que, siendo 36 el M. C. M. de los coeficientes 12 y 18, se deberá multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2, y por lo tanto

$$36x+15y-9z=60$$
$$36x-4y+22z=62:$$

restando ahora ordenadamente de la segunda ecuación la primera, se obtendrá $31z-19y=2$, que ya no contiene á la incógnita x.

68. Al comparar los dos métodos de que se acaba de hacer uso, resulta que, en general, es más cómodo servirse del de reducción cuando las ecuaciones están preparadas, atendiendo á que la ecuación obtenida también tiene que aparecer en esta misma forma: sin embargo, si la incógnita, que se desea eliminar, posee por coeficiente la unidad ó el sistema propuesto no está preparado, pudiera convenir que se le diera la preferencia al método de sustitución.

Obsérvese también que las transformaciones á que han sido sometidas las ecuaciones dadas, al practicar los métodos de eliminación expuestos, se han limitado en unos casos á reemplazar por una cantidad el valor de otra igual, y en otros á multiplicar los dos miembros por un número conocido (52); luego los valores de las incógnitas no han podido experimentar alteración alguna.

ARTÍCULO 2.°

Resolución de un sistema compuesto de dos ó más ecuaciones con igual número de incógnitas.

69. Para mayor sencillez en la explicación, convendría distinguir dos casos, según que sean dos las ecuaciones ó se consideren mayor número de éstas.

Tratándose de resolver dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, se elimina una de ellas, y como consecuencia de esta transformación resultará una ecuación con una sola incógnita, y ya se dijo (57) la manera de obtener su valor.

Así, por ejemplo, si las ecuaciones propuestas fueran

$$4x+7y=47$$
$$5x-2y=5,$$

eliminando la x en ambas ecuaciones por el método de reducción, se tendrá, según se ha visto (67), $43y=215$, de donde $y=5$.

Si ahora se quisiera determinar el valor de x, podría esto conseguirse, bien sea eliminando la y en las ecuaciones propuestas, con cuyo motivo resultará una ecuación sin más incógnita que la x, de la cual se deducirá $x=3$; ó bien podría emplearse otro procedimiento más expedito, que consiste en sustituir el valor conocido de y en cualquiera de las dos ecuaciones dadas, y entonces resultaría una ecuación con la incógnita x.

Por lo tanto, si en el ejemplo que antecede, se sustituyera en la ecuación $5x-2y=5$ en lugar de y su valor 5, se tendría, $5x-10=5$, de donde $x=\frac{15}{5}=3$.

70. Las fórmulas que se deducen al resolver dos ecuaciones literales con dos incógnitas, permiten desde luego determinar los valores de éstas, cuando las ecuaciones propuestas sean numéricas.

Así, en el sistema

$$\begin{aligned} a\,x+b\,y&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}$$

aplicando el método de sustitución para eliminar la incógnita x en ambas ecuaciones, se tendría de la primera de éstas, $x=\frac{c-by}{a}$, cuyo valor, sustituido en la segunda, daría por resultado, $a'\times\frac{c-by}{a}+b'y=c'$; efectuando las transformaciones que proceden para su resolución (55), se obtendría, $(ab'-ba')y=ac'-ca'$, de donde $y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$.

Siguiendo el método llamado de reducción, para eliminar la incógnita y en las ecuaciones propuestas, habría que multiplicar la primera por b' y la segunda por b, para después restar ordenadamente ambos resultados. Así se tendría, $(ab'-ba')x=cb'-bc'$, de donde $x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$, valores que, sustituidos en las ecuaciones que fueron dadas, las satisfacen.

Si se quisieran resolver por medio de estas dos fórmulas las ecuaciones numéricas que antes se propusieron, bastaría sustituir en aquéllas en vez de cada letra su valor particular. Así, ahora, se tendría que $a=4$, $b=7$, $c=47$, $a'=5$, $b'=-2$, $c'=5$, de donde resultaría

$$x=\frac{47\times-2-7\times5}{4\times-2-7\times5}=3,\quad y=\frac{4\times5-47\times5}{4\times-2-7\times5}=5.$$

71. Si ahora se deseara resolver un sistema de n ecua-

ciones con n incógnitas, *se comenzaría por eliminar una incógnita en la primera ecuación y cada una de las demás, y así resultaría otro sistema equivalente al anterior compuesto de* n—1 *ecuaciones con* n—1 *incógnitas; después de esto, se pasaría á eliminar, en este último sistema, otra cantidad desconocida, obteniéndose con tal motivo* n—2 *ecuaciones con* n—2 *incógnitas; continuando en tal forma se llegaría á tener la ecuación final con una sola incógnita, cuyo valor ya se sabe cómo se determina. Una vez conocido éste, se sustituiría en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema anterior, que sólo deberá contener dos incógnitas, y resolviéndola se tendrá el valor de otra; los valores hallados de estas dos cantidades desconocidas se sustituyen en una cualquiera de las tres ecuaciones del sistema anterior que contiene tres incógnitas, y entonces ya podría decirse cuánto vale otra, y así se continuaría del mismo modo hasta que se consiguiera averiguar los valores de todas ellas.*

Ejemplo: Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2y+z&=89 \\ 7x+2z&=209 \\ 3x+5y&=161 \ldots\ldots \text{(a)} \end{aligned}$$

Eliminando la z entre la primera y segunda de estas ecuaciones por el método de sustitución, para lo cual se despeja z en la primera y se reemplaza su valor en la segunda, se tendrá, $7x+178-4y=209$; de donde se deduce, $7x-4y=31$..... (b).

Si se elimina la y entre esta última ecuación y la tercera por el método de reducción, resultará:

$$\begin{array}{l} 35x-20y=155 \\ 12x+20y=644 \\ \hline 47x \qquad\quad =799, \end{array}$$

de donde se deduce que $x=17$; si ahora se sustituyera este valor en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema anterior (a) y (b), por ejemplo, en la (b), se tendría, que $119-4y=31$, y por lo tanto, $y=22$. Finalmente, si se reemplaza el valor hallado para y en la primera ecuación del sistema propuesto, resultará $44+z=89$, de donde $z=45$ (*).

También pudiera resolverse un sistema de ecuaciones, que contenga igual número de incógnitas, determinando directamente el valor de cada una de éstas; pues así como se ha venido en conocimiento de la primera incógnita, pudiera haberse procedido del mismo modo para determinar el valor de cada una de las demás; pero obsérvese que, obrando de esta manera, habría que emplear más trabajo con motivo del mayor número de operaciones que entonces sería necesario efectuar.

72. Si cada una de las ecuaciones propuestas no contuviese, como en el último ejemplo, á todas las incógnitas del sistema, convendría eliminar en tal caso la incógnita que entrase en menor número de aquéllas; cuando esto no suceda se elegirá, para mayor sencillez en la eliminación, aquella incógnita que tuviese menores coeficientes, ó si se empleara el método de reducción, deberá darse la preferencia á la incógnita, cuyo coeficiente tenga el mayor número posible de factores comunes con los coeficientes de la misma incógnita en las demás ecuaciones. Finalmente, la observación y la práctica en los ejercicios de esta índole, indicarán en cada caso particu-

(*) Podrían también haberse resuelto tres ecuaciones literales con tres incógnitas, y así se hubieran obtenido las fórmulas correspondientes á cada una de ellas. Haciendo aplicación de estas fórmulas al sistema numérico propuesto, se hallaría igualmente el valor de cada incógnita; pero en la práctica es más cómodo resolver el expresado sistema directamente.

lar las transformaciones que con más facilidad conducen á la resolución de las ecuaciones propuestas.

Cualquiera que sea el método de eliminación de que se haga uso, siempre la ecuación final resultante será de primer grado y no contendrá más que una sola incógnita; por lo tanto, según se sabe (57), ésta no tendrá sino un solo valor. Lo cual manifiesta que *en un sistema de ecuaciones de primer grado* DISTINTAS *y* COMPATIBLES, *que contenga tantas ecuaciones como incógnitas, cada una de éstas no tiene sino un solo valor.*

73. *Ecuaciones distintas* son aquellas, en que se verifica que ninguna de las que componen el sistema puede deducirse de las demás, por medio de una operación que no las altere. Según esto, son distintas las ecuaciones de los diferentes sistemas de que se ha hecho mención en los ejemplos anteriores; en cambio

$$3x+4y=15$$
$$9x+12y=45$$

son la una *consecuencia* de la otra, supuesto que, si se multiplican ambos miembros de la primera por 3, resulta la segunda. Así, este sistema, en vez de contar con dos ecuaciones, realmente tiene una sola.

74. Se dice que varias ecuaciones son *contradictorias* ó *incompatibles,* cuando el conjunto de ellas forman un sistema, que no puede quedar satisfecho para ningún valor finito y determinado, que se asigne á sus incógnitas.

Por ejemplo,

$$3x+4y=15$$
$$9x+12y=29:$$

en donde se ve desde luego que existe una condición absurda.

ARTÍCULO 3.°

Resolución de un sistema en que el número de ecuaciones no es igual al de incógnitas.

75. De no ser igual el número de ecuaciones al de incógnitas, claro es que el de aquéllas será menor ó mayor que el de éstas. El primero de estos casos conviene subdividirlo en otros dos, según que sea una la ecuación propuesta ó varias las ecuaciones del sistema dado.

Para resolver una ecuación con varias incógnitas, se deberán suponer conocidos los valores de todas ellas menos el de una, con cuyo motivo la cuestión queda reducida á resolver una ecuación de primer grado con una sola incógnita (56).

Según esto, sea la ecuación $3x+4y-5z=6$; si en ella se dieran los valores arbitrarios 8 y 7 respectivamente á z é y, tendríase $x=\frac{6-4\times7+5\times8}{3}=6$..... (h).

Para conocer otra solución de la ecuación propuesta, se asignarían en ella los valores arbitrarios 10 y 9 respectivamente á z é y, y resultaría $x=\frac{20}{3}$. Si se continúa dando valores cualesquiera á dos de las incógnitas, se tendrán otros nuevos para la tercera; esto manifiesta que el número de soluciones no tiene fin, y por consiguiente la ecuación será indeterminada.

Pudiera suceder que se procediera á la resolución de un sistema compuesto de tantas ecuaciones como incógnitas, sin haberse dado cuenta de que una ó varias de las citadas ecuaciones eran consecuencia de alguna ó algunas de las ecuaciones restantes; entonces acontecería que al determinar los valores de las incógnitas se pondría en evidencia que el sistema propuesto era indeterminado. Así, por ejemplo,

$$3x+4y=15$$
$$9x+12y=45,$$

efectuando en estas ecuaciones la eliminación de la incógnita x por el método de sustitución, se tendría $x=\frac{15-4y}{3}$, y por lo tanto $9\times\frac{15-4y}{3}+12y=45$: de donde se deduce $135-36y+36y=135$, lo cual manifiesta $y=\frac{0}{0}$, y por consiguiente el sistema propuesto resulta indeterminado; lo que pudo haberse conocido de antemano, atendiendo á que en él sólo se tiene en realidad una sola ecuación con varias incógnitas, supuesto que multiplicando los dos miembros de la primera por 3, resulta la segunda ecuación.

A las incógnitas á quienes se les asignan valores arbitrarios denomínanse *variables independientes,* y, aquellas cuyos valores dependen de los asignados á las antedichas variables, se dice que son *funciones* de éstas. Así, en el ejemplo (h) z é y son las variables independientes y x es función de ambas.

76. De lo dicho se desprende, que para resolver un sistema compuesto de mayor número de incógnitas que de ecuaciones, habrá que comenzar por dar valores arbitrarios á tantas incógnitas como excede el número formado por la totalidad de éstas al de las ecuaciones que se hayan propuesto, con cuyo motivo la cuestión aparece entonces reducida á resolver un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas (71).

Ejemplo: Sean las tres ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$2x+3y-4z=3$$
$$2x+2n-9z=-7$$
$$z+2n-3x=-7.$$

Considerando á la incógnita y como variable independiente y dándole el valor 1, quedará el sistema propuesto reducido á

$$2x-42=0$$
$$2x+2n-9z=-7$$
$$z+2n-3x=-7,$$

en donde ya no existen sino tres ecuaciones con tres incógnitas. Resuelto este sistema, se tendría $z=1$, $x=2$, $n=-1$. Dando á y un valor diferente de 1, sería fácil deducir, siguiendo un procedimiento análogo, los valores correspondientes de las tres incógnitas restantes, los cuales compondrían otra nueva solución del sistema propuesto y así se podrían encontrar tantas cuantas soluciones se desearan.

77. En el segundo caso, ó sea cuando se trate de un sistema de m ecuaciones de primer grado con $m-n$ incógnitas, se resuelve primeramente el sistema formado de $m-n$ ecuaciones con igual número de incógnitas, y las soluciones halladas lo serán del propuesto, siempre que satisfagan á las n ecuaciones sobrantes, las cuales se denominan *ecuaciones excedentes*. Mas como esta última circunstancia no acontecerá en la gran mayoría de los ejemplos que pudieran citarse, se infiere que todo sistema con más ecuaciones que incógnitas será en general absurdo.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}&18x-7y-5z=11\\&66y-10x+15z=1620\\&14z+8y+3x=320\\&6x-y-z=19\\&19x+22y-8z=63.\end{aligned}$$

Al resolver el sistema formado por las tres primeras ecuaciones con igual número de incógnitas, se tiene $x=12$, $y=25$ y $z=6$, cuyos valores, por no satisfacer á las dos últimas ecuaciones, que son las excedentes, manifiestan que el sistema propuesto es imposible.

Cuando los coeficientes de las incógnitas son literales en las ecuaciones excedentes, reciben éstas el nombre de *ecuaciones de condición,* sin duda, por expresar las condiciones á que deben satisfacer los valores de aquéllos, con el fin de hacer posible el sistema propuesto. Claro está, que si el número de coeficientes indeterminados es igual al de ecuaciones de condición, al resolver éstas, considerando á los mencionados coeficientes como si fueran incógnitas, acontecerá que todas las ecuaciones propuestas serán compatibles, siempre que se asigne á los coeficientes indeterminados los valores que se hayan deducido de las precitadas ecuaciones de condición.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}&18x-7y-5z=11\\&66y-10x+15z=1620\\&14z+8y+3z=320\\&ax-y-z=19\\&bx+22y-8z=63.\end{aligned}$$

Pudieran hacerse compatibles las ecuaciones que constituyen este sistema, resolviendo las tres primeras, y una vez sustituidos los valores de x, z é y en las dos ecuaciones de condición, y efectuadas las reducciones procedentes, resultarian tranformadas éstas en

$$\begin{aligned}&12a=50\\&12b=-439,\end{aligned}$$

de modo que las ecuaciones

$$18x-7y-5z=11$$
$$66y-10x+15z=1620$$
$$14z+8y+3z=320$$
$$\frac{50}{12}x-y-z=19$$
$$22y-\frac{439}{12}x-8z=63,$$

serían compatibles, y el sistema que forman la totalidad de ellas se verificaría para $x=12$, $y=25$ y $z=6$.

Es evidente, que si el número de coeficientes literales fuera mayor que el de ecuaciones de condición, éstas podrían quedar satisfechas de un número infinito de maneras.

ARTÍCULO 4.°

Resolución de problemas.

78. Cuando en la investigación de las relaciones que median entre las incógnitas y los datos de una cuestión, asignado que sea el valor de una de aquéllas, se viene fácilmente en conocimiento de las demás, entonces se puede dispensar la formación de tantas ecuaciones como incógnitas contenga el problema, así como la determinación directa de cada una de éstas.

Así, el problema (61) podría resolverse también por medio de dos ecuaciones con dos incógnitas, supuesto que, si se llama x al número mayor é y al menor, se tiene

$$\begin{matrix} x+y=S \\ x-y=D \end{matrix} \quad \text{de donde se deduce} \quad \begin{matrix} x=\dfrac{S+D}{2} \\ y=\dfrac{S-D}{2} \end{matrix}$$

Análogamente si en el problema de los correos (63) se llama y á la distancia que media entre el punto de partida A y el punto de encuentro E, se tendrán las ecuaciones

$$\frac{x}{y}=\frac{v'}{v} \quad \text{de donde} \quad x=\frac{v'd}{v-v'}$$
$$y-x=d \qquad\qquad y=\frac{vd}{v-v'}.$$

Mas cuando las relaciones que ligan á las incógnitas, no sean tan sencillas como en los ejemplos á que se acaba de hacer referencia, entonces procede que el problema se plantee, sirviéndose de tantas ecuaciones como cantidades desconocidas aparezcan de su enunciado.

PROBLEMA.—*En un almacén existen una barra de hierro y otra de cobre, y se sabe que las* $\frac{2}{5}$ *de la primera pesan 96 kg. menos que los* $\frac{3}{4}$ *de la segunda, y los* $\frac{5}{8}$ *de ésta pesan lo mismo que los* $\frac{4}{9}$ *de la segunda. Se desea saber cuál será el peso de cada una de estas dos barras.*

Representando con las letras x é y los pesos respectivos de las barras de hierro y de cobre, se tendrían las ecuaciones

$$\frac{3}{4}y-\frac{2}{5}x=96$$
$$\frac{5}{8}y=\frac{4}{9}x;$$

de donde se obtiene x=720 kg., y=512 kg.

PROBLEMA.—*Cuatro sujetos han comprado azúcar, té, manteca y café á los mismos precios cada artículo. El primero compró 7 kg. de azúcar, 3 de té, 4 de manteca y 5 de café, que importaron 110 ptas. y 50 cénts. El segundo tomó 2 de azúcar, 1 de té, 11 de manteca y 9 de café, y su cuenta ascendía á 93 ptas. y 50 cénts. El tercero llevó 3 de azúcar, 5 de té, 10 de manteca y 6 de café, y tuvo que pagar con tal motivo 183 ptas. Finalmente, el cuarto sujeto adquirió 9 kg. de azúcar, 8 de té, 8 de manteca y 9 de café, teniendo que abonar en tal concepto 263 ptas. y 50 cénts. ¿Cuál es el valor del kilogramo de cada especie?*

Representando con x, y, z y n, los precios respectivos del azúcar, té, manteca y café, se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 7x+3y+\ 4z+5n&=110{,}50\\ 2x+\ y+11z+9n&=\ 93{,}50\\ 3x+5y+10z+6n&=183\\ 9x+8y+\ 8z+9n&=263{,}50, \end{aligned}$$

que resueltas, quedan satisfechas con los valores referidos á la peseta $x=1$, $y=25$, $z=4$, $n=2{,}5$.

Si se propusiera resolver una cuestión en que se conocieran el número de unidades de cada una de las especies mezcladas, y á la vez el precio medio, sería fácil resolver entonces este nuevo problema correspondiente á la regla de aligación, sin más que apoyarse en la igualdad (Aritm.ª 181), que como se vió, servia de fundamento para la resolución de los dos casos que á aquélla pertenecen.

En la citada igualdad se tiene una ecuación de primer grado con las incógnitas p, p', p''....., y por lo tanto, los problemas de esta índole tendrán un número infinito de soluciones.

Al hacer aplicación de lo que se acaba de decir al caso particular (Aritm.ª 185), en que se trata de *hacer la mezcla de 6, 2, 6, 4 y 10 hectolitros de diferentes clases de trigo, y determinar entonces cuáles habían de ser sus respectivos precios, á fin de que el del hectolitro de la mezcla fuese de 24 pesetas;* se tendría una ecuación con cinco incógnitas, en donde despejando una cualquiera de ellas, resultaría

$$p^{\text{IV}}=\frac{P(n+n'+n''+n'''+n^{\text{IV}})-(np+n'p'+n''p''+n'''p''')}{n^{\text{IV}}},$$

si ahora se efectuaran las sustituciones que corresponden al ejemplo particular propuesto, se vería que

$$p^{\text{IV}}=\frac{24(6+2+6+4+10)-(6p+2p'+6p''+4p''')}{10},$$

por tanto, asignando valores arbitrarios á las variables independientes, pudiera obtenerse el número de soluciones deseadas; de modo que si para fijar las ideas se supone que p, p', p'' y p''' valieran respectivamente 17, 20, 21 y 26, resultaría $p^{\text{IV}}=30$ pesetas.

Lo cual pone de manifiesto un nuevo procedimiento para comprobar los problemas de la regla de aligación.

PROBLEMA.—*Un sujeto se obligó á conducir una partida de loza, en la que había vasijas de tres distintos tamaños, con la condición de que abonaría por cada una que rompiera tanto como le valía su conducción. En el primer viaje llevó 2 vasijas grandes, 4 medianas y 3 pequeñas; rompió las pequeñas y recibió 0,14 pesetas. En el segundo transportó 3 grandes, 5 medianas y 2 pequeñas, rompió las medianas y recibió 0,01 de peseta. En el tercer viaje llevó 4 grandes, 2 medianas y 5 pequeñas; rompió las grandes y no tuvo que percibir ni abonar nada. En el cuarto que condujo 7 grandes, 8 medianas y 4 pequeñas, solamente llegaron enteras las grandes y percibió 0,11. Finalmente, en el quinto viaje transportó 5 vasijas grandes, 6 medianas y 9 pequeñas, y únicamente llegaron sin romperse las medianas, con cuyo motivo se le entregaron 0,08 de peseta. Se desea averiguar cuánto se le pagaba por la conducción de cada vasija de los tres tamaños.*

Representando por x, y, z, lo que respectivamente valía la conducción de cada vasija grande, mediana y chica, se tienen las ecuaciones

$$\begin{aligned}
&2x+4y-3z=0{,}14\\
&3x-5y+2z=0{,}01\\
&2y-4x+5z=0\\
&7x-8y-4z=0{,}11\\
&6y-5x-9z=0{,}08,
\end{aligned}$$

que corresponden á las cinco liquidaciones efectuadas, y resueltas las tres primeras que poseen igual número de incógnitas, se encuentra $x=0{,}04$, $y=0{,}03$, $z=0{,}02$.

Al sustituir estos valores en las dos ecuaciones excedentes, resulta que no las satisfacen, y por lo tanto, el problema es absurdo, dadas las condiciones que se determinan en su enunciado.

CAPÍTULO IV.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

ARTÍCULO 1.º

Resolución de la ecuación de segundo grado en sus diferentes formas.

79. Una ecuación de segundo grado se llama *completa,* cuando contiene un término en que el exponente de la incógnita es 2, otro en que el exponente de la incógnita es 1, y finalmente un tercer término conocido. Así, la forma general de la ecuación completa de segundo grado, después de preparada, es $ax^2+bx+c=0$, en donde efectuando la transposición y multiplicando ambos miembros de la ecuación, que resulta, por $4a$ se tiene

$$4ax^2+4abx-4ac;$$

y agregando á ambos miembros b^2, con el fin de transformar el primero de éstos en trinomio, que tenga raíz cuadrada exacta, se tendrá $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$; y como quiera que el primer miembro de esta ecuación es igual al cuadrado del binomio $2ax+b$, al extraer la raíz cuadrada de los dos miembros, se obtiene

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac} \text{ (*)},$$

(*) Al extraer la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$, se tendrá en realidad, $\pm(2ax+b)=\pm\sqrt{b^2-4ac}$, de donde, $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$, y $-(2ax+b)=\pm\sqrt{b^2-4ac}$; mas como quiera que multiplicando ambos miembros de esta última ecuación por -1, se reproduce la anterior, es inútil que se escriba el signo de ambigüedad en el primer miembro de la antepenúltima ecuación.

y por lo tanto la ecuación propuesta ha quedado transformada en otra de primer grado, que ya se sabe cómo se resuelve.

Despejando en ella x, se tiene $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$..... (1)

en donde aparece x con dos valores que sólo se diferencian en el signo que antecede al radical, los cuales una vez separados serían

$$x = \frac{-6 + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x = \frac{-6 - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

80. Traduciendo al lenguaje vulgar la fórmula (1) se tendrá la siguiente regla: *En una ecuación de segundo grado de la forma* $ax^2 + bx + c = 0$, *la incógnita es igual al coeficiente del segundo término cambiado de signo, más ó menos la raíz cuadrada de la diferencia que existe entre el cuadrado de dicho coeficiente y el cuádruplo del producto de los coeficientes de los términos extremos* (*), *dividiendo todo el resultado obtenido por el duplo del coeficiente del primer término.*

Conviene á veces transformar la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en otra equivalente, con el fin de que el coeficiente del término en x^2 sea la unidad, lo cual se consigue sin más que dividir los dos miembros de aquélla por el expresado coeficiente, y es fácil comprender que la ecuación resultante tendría entonces la forma $x^2 + mx + n = 0$.

Las soluciones de esta ecuación podrían obtenerse haciendo en la fórmula (1) $a=1$, $b=m$ y $c=n$ y resultaría por lo tanto,

---

(*) El término conocido c, puede considerarse como coeficiente del término en x^0.

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2-4n}{4}}=$$
$$=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2-n}\ldots\ldots (2).$$

81. Esto pone de manifiesto que en la ecuación de la forma $x^2+mx+n=0$ *el valor de la incógnita equivale á la mitad del coeficiente del segundo término mudado de signo, más ó menos la raíz cuadrada de la diferencia que existe entre el cuadrado de la mencionada mitad y el tercer término.*

Ejemplo: Resolver la ecuación $7x^2-13x-110=0$; sustituyendo en la fórmula (1) el número 7 por a, en lugar de b, -13, y -110 por c, se tendrá

$$x=\frac{13\pm\sqrt{13^2+4.7.110}}{14}=\frac{13\pm57}{14}\begin{cases} x=+5 \\ x=-3\frac{1}{7}. \end{cases}$$

Si para resolver la misma ecuación quisiera hacerse uso de la fórmula (2), se transformaría aquélla en

$$x^2-\frac{13}{7}x-\frac{110}{7}=0;$$

en tal caso pudieran efectuarse las correspondientes sustituciones, y resultaría

$$x=\frac{13}{14}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{14}\right)^2+\frac{110}{7}}=\frac{13\pm57}{14}.$$

Para comprobar estos dos valores de la incógnita, no habría sino ver si verificaban la ecuación propuesta.

82. No todas las ecuaciones de segundo grado poseen las tres clases de términos que se ha visto tiene la ecuación completa, sino que frecuentemente carecen ó del término en x ó del término independiente de la incógnita; en cualquiera de estos dos casos se aplica á la ecuación de segundo grado, que se proponga, el calificativo de *incompleta.*

Para resolver la ecuación $ax^2+c=0$, bastará considerarla como un caso particular de la completa, en la cual el coeficiente b de ésta es igual á 0 en la ecuación incompleta propuesta, y en este supuesto se tendría, aplicando la fórmula (1):

$$x=\frac{0\pm\sqrt{0-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\ldots\ldots (3)$$

Se podría también resolver la ecuación $ax^2+bx=0$ por medio de la misma fórmula (1), sustituyendo en ella 0 en lugar de c, y así se tendría:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b\pm b}{2a}\ldots\ldots (4)\ \ldots\ldots \begin{cases} x'=\dfrac{0}{2a}=0 \\ x''=-\dfrac{b}{a}\ (*). \end{cases}$$

Ejemplo: Resolver la ecuación $4x^2-25=0$.

Efectuando las correspondientes sustituciones en la fórmula (3) será

$$x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}\ldots\ldots \begin{cases} x'=\ \ 2{,}5 \\ x''=-2{,}5, \end{cases}$$

valores que verifican la ecuación propuesta.

Ejemplo: Resolver la ecuación $4x^2-25x=0$.

Reemplazando 4 en lugar de a, en la fórmula (4) y -25 en vez de b, resultará $x'=0$ y $x''=\frac{25}{4}$.

(*) Como pudiera haber alguna duda acerca de si la fórmula general que corresponde á las raíces de la ecuación completa de segundo grado, comprende ó no las soluciones que se refieren á las ecuaciones incompletas, convendrá á los alumnos ejercitarse en deducir directamente estas mismas soluciones.

Según se ha visto, para determinar los valores de la incógnita, en cualquiera de las formas de la ecuación de segundo grado que se considere, siempre ha habido necesidad de extraer una raíz; y en esta atención sin duda, ha tomado origen el que aquellos valores se denominen también *raíces de la ecuación.*

ARTÍCULO 2.°

Propiedades de las raíces y su discusión.

83. *El primer miembro de una ecuación de la forma*

$$x^2+mx+n=0,$$

es igual al producto de dos factores binomios de primer grado, cuyos primeros términos son x, *y los segundos están formados por cada una de las raíces de aquélla con signo contrario.*

En efecto, siendo x' una de las raíces de la mencionada ecuación, el primer miembro de ésta tiene que ser divisible por $x-x'$ (28). Efectuando la división se obtiene por cociente exacto, $x+(x'+m)=x-(-x'-m)$, y por lo tanto,

$$x^2+mx+n=(x-x')\,(x-(-x'-m)).$$

De esta igualdad se deducen las siguientes proposiciones:

1.ª *Si la ecuación de la forma* x^2+mx+n *tiene una raíz igual á* x', *poseerá también otra equivalente á* $-x'-m$.

2.ª *La ecuación de segundo grado de la misma forma, no puede tener sino dos raíces;* en atención á que el producto del segundo miembro en la última igualdad, no puede reducirse á cero, sino siendo cero alguno de los dos factores, ó sea cuando $x=x'$ ó $x=-x'-m'$.

3.ª *La suma de las mencionadas raíces, equivale al coeficiente del segundo término con signo contrario,* en vista de que $x'+(-x'-m)=-m$.

4.ª *El producto de las precitadas raíces es igual al tercer término,* en atención á que $x'(-x'-m)=-x'^2-mx'=n$.

84. En la discusión de las raíces de la ecuación $ax^2+bx+c=0$, que, como se dijo (79), son $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, procede considerar tres casos principales, según que la expresión subradical b^2-4ac sea positiva, cero ó negativa, y en todos ellos los tres coeficientes, que se supone, representan cantidades reales.

En el primer caso, si b^2-4ac fuera cuadrado perfecto, su raíz cuadrada sería exacta, y entonces las dos soluciones serían racionales y conmensurables: si por el contrario el valor de aquel binomio no fuera cuadrado perfecto, las dos raíces serían irracionales ó inconmensurables, pero siempre representarían cantidades reales.

Si se quisiera deducir el signo de cada una de las mencionadas raíces, pudiera conseguirse sin más que conocer los que afectan á los diversos coeficientes. En efecto, la ecuación general á que se hace referencia puede presentarse en una de estas cuatro formas:

1.ª..... $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 3.ª..... $x^2+\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$

2.ª..... $x^2-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 4.ª..... $x^2-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}=0$.

Obsérvese que el coeficiente a siempre puede suponerse positivo, pues si no lo fuera, bastaría cambiar los signos á todos los términos de la ecuación propuesta.

En las dos primeras ecuaciones, dos raíces tienen igual signo, supuesto que su producto equivale á $+\frac{c}{a}$; pero en la primera, ambas raíces tienen que ser negativas, en atención á que su suma tiene por valor $-\frac{b}{a}$, y en la segunda las dos son positivas, porque su suma es $+\frac{b}{a}$. Las dos últimas ecuaciones tienen sus raíces de signo contrario, en vista de que su producto es $-\frac{c}{a}$; pero en la tercera, su raíz negativa es de mayor valor absoluto, porque tienen por suma $-\frac{b}{a}$; en cambio, en la cuarta, su raíz negativa es la de menor valor absoluto en atención á que la suma de ambas vale $+\frac{b}{a}$ (*).

En el segundo caso, ó sea cuando b^2-4ac es igual á cero, los dos valores de x se reducen á $x=-\frac{b}{2a}$; lo que manifiesta, que en este caso las dos raíces de la ecuación son iguales en magnitud y en signo: negativas si b es positivo, y positivas si b es negativo.

Finalmente, en el caso de que el valor de b^2-4ac sea negativo, se tendría que extraer la raíz cuadrada de una cantidad negativa, y por lo tanto las dos raíces serían imaginarias (38).

ARTÍCULO 3.°

Resolución de problemas.

85. Los valores de la incógnita en los problemas que se resuelven por medio de ecuaciones de segundo grado, se distinguen, por más de un concepto, de los obtenidos en la resolución de los problemas determinados de primer grado; pues mientras que en éstos, según se vió, cada incógnita no tenía sino un solo valor, en aquéllos existe duplicidad de valores para la cantidad desconocida. Por otra parte, si bien es cierto que en los problemas de segundo grado las raíces pueden ser conmensurables, en cuyo caso poseen la misma significación y alcance que tenían los valores de las incógnitas en los resueltos por medio de ecuaciones de primer grado, hay casos en que

---

(*) Cuando dos términos consecutivos de una ecuación tienen un mismo signo, se dice que existe una *permanencia*, y hay una *variación* cuando están afectados de signo contrario.

Como que se ve coincide el número de permanencias con el de raíces negativas y el de variaciones con el de positivas, esta consideración permite determinar desde luego los signos de las raíces de la ecuación dada, fijándose únicamente en los que afectan á los diferentes términos de ésta.

se obtienen para aquéllos, soluciones de diversa índole; así sucede cuando las citadas raíces son inconmensurables ó imaginarias.

Las soluciones inconmensurables manifiestan que el problema es absurdo, cuando por el enunciado de éste, se ve que la incógnita expresa una cosa indivisible ó precisamente conmensurable; en los demás casos los valores inconmensurables son verdaderas soluciones aproximadas de la cuestión propuesta.

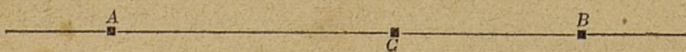
Las raíces imaginarias dicen que el problema á que se refieren no tiene solución numérica que satisfaga á las condiciones expresadas en el enunciado de aquél, por más que, según se dijo (58), siempre verificarán la ecuación deducida como consecuencia del planteo.

Obsérvese que si una de las dos raíces es imaginaria, la otra no podrá ser cantidad real, en atención á que, según se tiene visto (79), el radical es el mismo para los dos valores de la incógnita. Sin embargo, puede suceder que de las raíces halladas, solamente una de ellas posea todas las propiedades exigidas en el enunciado del problema.

PROBLEMA 1.°—*Dado el producto y la suma de dos cantidades, hallar una de ellas.* Representando la suma por s y una de las cantidades por x, la otra tendrá por expresión $s-x$, y siendo conocido su producto p, se tendrá la ecuación $x(s-x)=p$, ó, $x^2-sx+p=0$, de donde $x=\frac{s}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2}{4}-p}$.

PROBLEMA 2.°—*Hallar sobre una recta que une dos puntos,* A *y* B, *otro punto* C *igualmente iluminado por dos luces colocadas en los anteriores, que se hallan distantes entre sí* d *metros.*

Sean i^2 é i'^2 las intensidades de las dos luces y x la distancia desconocida $A\ C$, la que media entre B y C estará expresada por $d-x$.



Los que hayan estudiado óptica, saben que *cuando dos luces iluminan igualmente un punto, sus intensidades son directamente proporcionales á los cuadrados de sus respectivas distancias á dicho punto;* luego, según esto, deberá verificarse, $\frac{i^2}{x^2}=\frac{i'^2}{(d-x)^2}$.

Extrayendo la raíz cuadrada de ambos miembros, lo cual no alterará las soluciones de la ecuación, siempre que en uno de los miembros se dejen indicados los dos valores de su raíz, resultará, $\frac{i}{x}=\pm\frac{i'}{d-x}$, de donde $x=d\times\frac{i}{i\pm i'}$.

Al discutir este resultado, comiéncese por observar que en él tiene x dos valores distintos, lo cual manifiesta que en la recta $A\ B$ existen dos puntos igualmente iluminados por ambas luces, cuya posición depende de los valores asignados á i é i'.

Si se supone que $i>i'$, el primer valor de x será igual á $d\times\frac{i}{i+i'}$, lo cual indica que el punto buscado se encuentra entre A y B, y más próximo á éste que al anterior; pues siendo $i<i+i'$, el valor de x tiene que ser más pequeño que d, por ser propia la fracción $\frac{i}{i+i'}$, y como $i+i'<2i$, de aquí que $x>\frac{d}{2}$.

El segundo valor de $x=d\times\frac{i}{i-i'}$, dice que el punto que se trata de encontrar está á la derecha de B, pues siendo $i>i-i'$, la fracción $\frac{i}{i-i'}$ es impropia, y por lo tanto $x>d$.

Si $i=i'$, el primer valor de x se reduce á $\frac{d}{2}$, lo que prueba que el punto buscado se halla á la mitad de $A\ B$, y el segundo se convierte en $d\times\frac{i}{0}=\infty$; esto manifiesta que el otro punto se halla á una distancia infinita, y por lo tanto, no existe otra solución sino la que corresponde al primer valor.

Finalmente, en el caso de que $i<i'$, el valor primero indicará que el punto que se desea encontrar, se halla entre A y B, pero más próximo de A que de B, pues como que $i+i'>2i$, se tendrá $x<\frac{d}{2}$.

El segundo valor se hace negativo; lo cual indica que el punto buscado está á la izquierda de A, *Dos focos luminosos separados á una distancia de 39 metros, poseyendo el primero una intensidad de 16 Cárcel (*) y el segundo de 6,25 lámparas del mismo sistema. ¿Cuál será el punto que se halle igualmente iluminado por ambos focos?*

Reemplazando, en la anterior fórmula, en vez de cada letra su valor particular, se obtendrían las dos soluciones

$$x=39\times\frac{4}{4\pm2,5}\begin{cases} x'=24 \text{ metros} \\ x''=104 \text{ metros.} \end{cases}$$

Si el punto igualmente iluminado hubiera de hallarse precisamente entre los dos focos, se tendría sólo una solución en cada uno de los tres casos, en vista de que entonces habría que prescindir de las segundas soluciones por ser *extrañas* al problema.

(*) En fotometría se hace uso de la lámpara Cárcel como una de las unidades adoptadas para medir la intensidad de luz.

LIBRO TERCERO.

PROGRESIONES Y LOGARITMOS.

CAPÍTULO I.

Progresiones.

86. Se llama PROGRESIÓN una continuación de números tales que cada uno se forma del inmediato anterior, por medio de una ley general.

Los diferentes números que componen la progresión se denominan *términos* de ésta. Al resultado constante que se obtiene de la comparación de cada dos términos consecutivos se llama *razón*.

Las progresiones se dividen en *crecientes* y *decrecientes:* en las primeras los valores de los términos van aumentando de izquierda á derecha, al paso que en las segundas se verifica lo contrario; y, por lo tanto, toda progresión creciente será decreciente invirtiendo los términos, de modo que el último de la primera pase á ocupar el lugar que corresponde al primero de la segunda, y el primer término de aquélla ocupe el último de ésta.

Aun cuando toda progresión es por su naturaleza indefinida en ambos sentidos, es lo más corriente en la práctica que se la considere limitada, en cuyo caso el primero y el último término reciben el nombre de *extremos,* y los comprendidos entre uno y otro *medios* de la progresión.

INTERPOLAR varios términos entre dos números dados, es formar una progresión que tenga por extremos los dos números mencionados y tantos medios como términos de aquélla se haya convenido en deducir.

Estos últimos términos se denominan *medios diferenciales* cuando forman parte de una *progresión aritmética,* y se dice que son *medios proporcionales* cuando pertenecen á una progresión geométrica.

ARTÍCULO 1.°

Progresiones aritméticas.

87. La progresión se llama ARITMÉTICA, cuando cada uno de sus términos se forma añadiendo al inmediato anterior una cantidad constante denominada *razón* ó *diferencia.*

Según esto, para formar una progresión aritmética, se escogerá una cantidad a, y á ésta y á las sumas sucesivas que van resultando, se les agrega la diferencia constante d: los términos de la progresión en este caso serán $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots\ldots a+nd$ y la progresión se indica en la siguiente forma: $\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.\, a+3d \,.\, \ldots\ldots \,.\, a+nd$, que se lee: *como a es $a+d$ es $a+2d$ es* etc.

Cuando d es positiva, la progresión es creciente, y si fuere negativa será decreciente.

Así, $\div 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, \ldots\ldots$ es una progresión creciente cuya diferencia es 2, y si se escriben estos mismos términos en sentido contrario se tendrá: $\div 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \ldots\ldots$ una progresión decreciente cuya razón ó diferencia será -2.

Por medio del siguiente teorema se determina la expresión del término general.

Un término cualquiera de una progresión aritmética es *igual al primero, más tantas veces la diferencia como términos hay antes de él.*

Sea la progresión $\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, e \,.\, ... \,.\, p \,.\, q \,.\, r \,.\, u$, en que a y u son los extremos y d la razón, se tendrá, $b=a+d$, $c=b+d$, $e=c+d$ ..... $q=p+d$, $r=q+d$, $u=r+d$; sumando ordenadamente estas igualdades y simplificando, resulta: $u=a+d+d+d+d+$.....; en esta igualdad d se halla repetida tantas veces como igualdades existen, ó sea tantas como términos hay en la progresión menos uno: llamando n al número de términos que posee la progresión, la igualdad que antecede se convierte en $u=a+(n-1)d$..... (1), que era lo que se deseaba demostrar.

Despejando a de la igualdad (1), se deduce que $a=u-(n-1)d$..... (2), lo cual manifiesta que *un término cualquiera es igual al último, menos tantas veces la diferencia como términos le siguen.*

Si se quisiera hallar el duodécimo término de la progresión $\div 3 \,.\, 5 \,.$ ......, no habría sino apoyarse en la fórmula (1) y se tendría $u=3+11\times2=25$.

Si ahora se tratara de encontrar el término colocado once lugares antes del último de la progresión $\div$ ..... $.\, 23 \,.\, 25$, se harían las debidas sustituciones en la fórmula (2), y así se tendría $a=25-11\times2=3$.

88. Para interpolar un cierto número de términos entre dos números dados, habrá que averiguar el valor de la diferencia de la correspondiente progresión, y una vez conocida, se sumará esta razón con el primer término y se tendrá el segundo, agregando á éste la misma razón se tendrá el tercero, y así sucesivamente se formarán los demás.

Sean p y q los términos entre los cuales se desea interpolar otros en número de n; como quiera que p ha de ser el primer término de la progresión y q el último, y la totalidad de los términos de ésta ha de ser $n+2$, se tendrá $q=p+(n+1)d$, de donde se deduce que $d=\frac{q-p}{n+1}$..... (3).

Luego para interpolar varios términos entre dos números conocidos, es indispensable hallar el valor de la diferencia, el cual se obtiene *restando del número que ha de hacer las veces de último término, el que ha de ocupar el lugar del primero, y este exceso obtenido se divide por el número de términos que se han de interpolar, más uno.*

Así, para interpolar entre los números 3 y 25 diez medios diferenciales, se tendría, según la fórmula (3), que d sería igual á $\frac{25-3}{10+1}=2$.

Fácilmente se comprende que, si se llegasen á interpolar suficiente número de términos diferenciales entre otros dos que fueran conocidos, siempre se podría conseguir que la razón obtenida sea tan pequeña como se desee, y por lo tanto puede considerarse que en tal caso el crecimiento de los términos de la progresión se efectúa por grados insensibles.

De la fórmula (3) se deduce también, que si entre cada dos términos de una misma progresión aritmética se interpola el mismo número de medios diferenciales, las progresiones parciales que resulten formarán una sola progresión, supuesto que todos tienen la misma diferencia, y en tal consideración cada una de aquéllas concluye por el término con que la otra empieza.

89. Antes de deducir la expresión de la suma de todos los términos de una progresión, conviene demostrar el teorema siguiente:

En toda progresión aritmética la suma de dos términos equidistantes de los extremos, es igual á la suma de éstos.

Sea la progresión $\div a\,.\,b\,.\,c\,.\,e\ldots\ldots p\,.\,q\,.\,r\,.\,u$. Como quiera que e y p son dos términos equidistantes de los extremos, éstos tendrán por expresión, según las fórmulas (1) y (2), $e=a+nd$, $p=u-nd$, en el supuesto de que n sea el número de términos anteriores al e y posteriores al p: sumando ordenadamente las dos últimas igualdades, resulta $e+p=a+u$.

Luego, si se llama S á la suma de todos los términos de la progresión, se tendrá

$$S=a+b+c+e+\ldots\ldots+p+q+r+u:$$

colocando los términos del segundo miembro de esta igualdad en sentido contrario, se obtiene

$$S=u+r+q+p+\ldots\ldots e+c+b+a;$$

y sumando ordenadamente las dos equivalencias que se acaban de escribir, resulta

$$2S=(a+u)+(b+r)+(c+q)+(e+p)+\ldots\ldots$$
$$+(e+p)+(c+q)+(b+r)+(a+u):$$

como los términos comprendidos dentro de cada paréntesis se hallan equidistantes de los extremos, la suma de cada dos de ellos será igual á $a+u$; luego

$$2S=(a+u)+(a+u)+(a+u)+(a+u)+\ldots\ldots$$

en cuyo segundo miembro $a+u$ estará repetido tantas veces como términos existen en la progresión: siendo n el número de éstos, la última igualdad se transformará en $2S=(a+u)n$, de donde $S=\frac{a+u}{2}\times n\ldots\ldots$ (4), cuya fórmula dice que *la suma de todos los términos de una progresión por diferencia, es igual á la semi-suma de los extremos multiplicada por el número total de aquéllos.*

Hallar la suma de todos los términos de una progresión *por diferencia, en la cual el primer término sea 3, la diferencia ó razón 2 y el número de términos 12.*

Determinado el último término, según se vió (87), y haciendo uso en el presente ejemplo de la expresión (4), se tendrá $S=\frac{3+25}{2}\times 12=168.$

En vista de que las fórmulas (1) y (4) contienen cinco cantidades literales distintas, fácil será, conocidas que sean tres de ellas, deducir los valores de las dos restantes, en atención á que se tendría un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que ya se sabe (69) cómo se resuelve.

ARTÍCULO 2.°

Progresiones geométricas.

90. Una progresión se dice que es *geométrica* cuando cada uno de sus términos es igual al que le precede, multiplicado por una cantidad constante denominada *razón.* Para formar los términos de una progresión geométrica, se considera una cantidad a, como término de la progresión, se multiplica éste por la razón r y se tiene el siguiente; multiplicando este segundo término por la razón, se determina el tercero y de este modo se continúan deduciendo los valores de los demás términos.

Estas progresiones se leen lo mismo que las aritméticas y se escriben del siguiente modo: $\div\div a:ar:ar^2:ar^3:\,.....\,:ar^n$.

Si la magnitud de r es mayor que 1 la progresión será creciente, y si menor que 1 será decreciente.

Así, $\div\div 3:6:12:24:48:\,.....$ es una progresión geométrica creciente, cuya razón es 2, y si se escriben estos mismos términos proporcionales (*) en sentido contrario, ó sea, $\div\div 48:24:12:6:3:$ ..... se tendrá una progresión decreciente cuya razón es $\frac{1}{2}$.

De la definición que se acaba de exponer, se deduce la manera de hallar el valor de un término cualquiera: sea la progresión $\div\div a:b:c:d:$ ..... $:p:q:t:u$, y r su razón; se tendrán las igualdades $b=ar$; $c=br$; $d=cr$; ..... $q=pr$; $t=qr$; $u=tr$: multiplicándolas ordenadamente y simplificando el resultado, se obtiene $u=arrrr$; igualdad en la que r se halla repetida tantas veces como términos menos uno hay en la progresión: llamando n al número de términos, la igualdad anterior se reduce á $u=ar^{n-1}$..... (1).

Como es evidente que se hubiera obtenido el mismo resultado deteniéndose en un término cualquiera de la progresión, se deduce que éste equivale *al primero multiplicado por una potencia de la razón, cuyo exponente es igual al número de términos que le anteceden.*

Si se quisiera hallar el duodécimo término de la progresión $\div\div 3:6:$ ..... no habría sino apoyarse en la expresión general (1) y resultaría, $u=3\times 2^{11}=2048$.

91. La interpolación de un número determinado de términos entre dos números conocidos, queda reducida, según se ha visto en las progresiones aritméticas, á encontrar el valor correspondiente de la razón. De modo, que, si fueran p y q los dos términos entre los cuales se desea interpolar otros en número de n, teniendo en cuenta que p es el primer término y q el último de la progresión, resultaría, $q=pr^{n+1}$; de donde, $r=\sqrt[n+1]{\frac{q}{p}}$.

(*) Se llaman así, en atención á que cada tres términos consecutivos forman una proporción continua, en la cual el segundo es medio proporcional entre los otros dos.

Según esto, el valor de la razón se obtiene *dividiendo el último término de la progresión por el primero, y del cociente que resulta se extrae la raíz, cuyo índice es igual al número de términos que se desea interpolar, más uno.*

De aquí se deduce, que si entre cada dos términos consecutivos de una progresión geométrica, se interpola el mismo número de medios proporcionales, el conjunto de progresiones parciales que resultan formarán una sola progresión.

92. La suma de los términos de una progresión geométrica, se determinará mediante la consideración que sigue:

Teniendo en $\div\div a:b:c:d:\ldots\ldots:p:q:t:u$ una progresión; si se llama S á la suma de todos sus términos, n al número de éstos y r á la razón, resultará: $S=a+b+c+d+\ldots\ldots+$ $+p+q+t+u$; multiplicando los dos miembros de esta igualdad por r, se obtiene: $rS=ar+br+cr+dr+\ldots\ldots+$ $+pr+qr+tr+ur$; pero como se verifica que $ar=b$, $br=c$, $cr=d$, etc., podrá escribirse también $rS=b+c+d+\ldots\ldots+$ $+p+q+t+u+ur$; restando de esta igualdad la primera, se tendrá que $rS-S=ur-a$; de donde $S=\frac{ur-a}{r-1}\ldots\ldots$ (2).

Según esto, la suma de todos los términos de una progresión geométrica, es igual *al último, multiplicado por la razón, disminuido este producto en el primero, y dividiendo el resultado por la diferencia que existe entre la expresada razón y la unidad.*

Ejemplo: *Hallar la suma de los doce términos de una progresión geométrica, en la que el primero es 3 y la razón vale 2.*

Se determinaría el último término, que, según se vió (**90**), era igual á 2048, y por lo tanto, $S=2048\times2-3=4093$.

Las relaciones (1) y (2) contienen cinco cantidades distintas, luego el conocimiento de tres de ellas dará lugar á problemas análogos á los que podían resolverse en las progresiones aritméticas. Sin embargo, conviene observar que, cuando no se conozca n, no es fácil determinar su valor con los conocimientos que hasta el presente se tienen expuestos, ni tampoco se podrá hallar r en el caso de que n sea mayor que 3.

Obsérvese además, que al comparar las fórmulas (1) y (2) obtenidas en las progresiones aritméticas con las que corresponden á las mismas cuestiones en las geométricas, se ve que hubieran podido formarse de las primeras las segundas, sin más que cambiar las sumas de aquéllas en producto, las restas en divisiones, las multiplicaciones en potencias y las divisiones en raíces. Así, por ejemplo, si se quisiera escribir la fórmula que en las progresiones geométricas corresponde á la deducida para determinar la suma de los términos de una progresión aritmética (89), se tendría entonces $P=\sqrt{(au)^n}$; lo cual manifiesta, que *el producto de todos los términos de una progresión geométrica, equivale á la raíz cuadrada del producto de los extremos, elevado á la potencia indicada por el número total de aquéllos;* regla que pudiera deducirse con facilidad directamente.

CAPÍTULO II.

Logaritmos.

ARTÍCULO 1.º

Propiedades generales.

93. Al comparar las progresiones aritméticas con las geométricas, han podido reconocerse las relaciones de analogía que existen entre unas y otras, en todo cuanto se refiere en ellas á la formación de los diversos términos de que constan y á la manera de intervenir los distintos elementos, que componen las fórmulas que se han deducido. La observación de esta marcada correspondencia entre las antedichas progresiones, ha sido sin duda la causa de la invención de los llamados LOGARITMOS, según se hace patente en el estudio de esta teoría.

Se llaman logaritmos los términos de una progresión aritmética que se corresponden con los de otra por cociente, de tal modo que el término 0 que aparece en la primera ocupa igual lugar que el 1 que forma parte de la segunda. Así:

$$\left.\begin{array}{l} -\infty \,.\,\ldots\,.\, -nd \,.\,\ldots\,.\, -2d \,.\, -d \,.\, 0 \,.\, d \,.\, 2d \,.\,\ldots\,.\, nd \,.\,\ldots\,.\, \infty \\ \dfrac{1}{r^{\infty}} : \ldots : \dfrac{1}{r^{n}} : \ldots : \dfrac{1}{q^{2}} : \dfrac{1}{r} : 1 : r : r^{2} : \ldots : r^{n} : \ldots : r^{\infty} \end{array}\right\} (1)$$

representan dos progresiones cuyos términos, á la vez que reúnen las condiciones de la definición que antecede, se supone crecen y decrecen indefinidamente y en el mismo sentido en una y otra. Así se tendrá que el logaritmo de 1, será 0; el de r, d; el de r^2, $2d$, etc.

La palabra logaritmo se ha convenido en expresarla con las tres letras *log*, que se anteponen al número á que hacen referencia. Según esto, se diría $log\ r^n = nd$.

94. Dos progresiones formadas en las condiciones expuestas, constituyen lo que se conoce con el nombre de *sistema de logaritmos* (*).

Pudiendo formarse estas progresiones de modo que sus respectivos términos se diferencien entre sí, en cantidades tan pequeñas como se desee, resulta de aquí que todos los números pueden entrar á formar parte de las mencionadas progresiones, lo cual manifiesta que en un mismo sistema de logaritmos todo número tiene su correspondiente logaritmo y recíprocamente.

Comparando nuevamente las antedichas progresiones (1), se deduce además, en vista de que todos los términos de la progresión por cociente son siempre positivos, que *los números negativos no tienen logaritmo.* Así como también, que *los números mayores que la unidad tienen logaritmos positivos y los menores que aquélla los tendrán negativos. Á mayor número corresponderá mayor logaritmo y recíprocamente.*

95. Se entiende por BASE de un sistema de logaritmos, el número que tiene por logaritmo la unidad (**).

Según esto, si ahora se quisiera que apareciese la base

(*) Como quiera que á cada alteración en los valores de r y de d se tendrán dos nuevas progresiones, de aquí que sea infinito el número de sistemas de logaritmos que se pueden considerar, y por lo tanto, un mismo número puede tener infinitos logaritmos, así como un logaritmo puede pertenecer á infinitos números.

(**) Sería fácil hallar el valor de la base, en el sistema de logaritmos propuesto (1), fijándose en que $nd = \log r^n$, mas como que en este caso $nd = 1$, se tendrá $n = \frac{1}{d}$, valor que sustituido en la igualdad primera, da por resultado $1 = \log r^{\frac{1}{d}}$, de donde $b = \sqrt[d]{r}$.

de un sistema en las progresiones de que se compone, éstas tendrían entonces la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} -\infty \ldots\ldots -n \ldots\ldots -3 \,.\, -2 \,.\, -1 \,.\, 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots n \ldots\ldots \infty \\ \frac{1}{b^\infty} : \ldots : \frac{1}{b^n} : \ldots : \frac{1}{b^3} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{b} : 1 : b : b^2 : b^3 : \ldots : b^n : \ldots : b^\infty \end{array}\right\} (2)$$

Al examinar el sistema expresado en la forma que antecede, se deduce otra manera de considerar los logaritmos, supuesto que, según se ve, éstos son *los exponentes de las potencias á que hay que elevar un número invariable, positivo y diferente de uno, llamado base, para que resulten los correspondientes números del sistema* (*).

Según esto, si se designa por N un número cualquiera, por b la base del sistema y por x el logaritmo de N, se tendrá, $N=b^x$, á cuya igualdad se llama *ecuación logarítmica.*

96. Apoyándose en la definición que antecede, se puede demostrar que en todo sistema de logaritmos, éstos poseen las siguientes propiedades:

1.ª *El logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de los factores.*

En efecto, siendo x, x' y x'' los logaritmos respectivos de los números n, n' y n'', se tendrá: $n=b^x$, $n'=b^{x'}$ y

---

(*) Para demostrar que esta definición es general y por consiguiente aplicable á los diversos términos de un sistema cualquiera, considérese en el sistema de logaritmos propuesto (1), un número cualquiera r^n y su correspondiente logaritmo nd, y se tendrá evidentemente, $r=\left(\sqrt[d]{r}\right)^d$; si ahora se elevan ambos miembros de esta identidad á la potencia n, aparecerá, $r^n=\left(\sqrt[d]{r}\right)^{nd}$; pero como que $b=\sqrt[d]{r}$, resultará, $r^n=b^{nd}$; en donde se ve que el logaritmo de r^n, ó de su igual b^{nd}, equivale á nd.

Los números á que equivalen las diferentes potencias de la base, reciben el nombre de *antilogaritmos.*

$n''=b^{x''}$; multiplicando ordenadamente estas ecuaciones, resultará: $n\,n'n''=b^{x+x'+x''}$, y por lo tanto,

$$\log n\,n'n''=x+x'+x''=\log n+\log n'+\log n''.$$

2.ª *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

En efecto, sea n el dividendo, n' el divisor, y x y x' sus respectivos logaritmos. Dividiendo ordenadamente las ecuaciones $n=b^x$ y $n'=b^{x'}$, resultará, $\frac{n}{n'}=b^{x-x'}$, de donde: $\log\frac{n}{n'}=x-x'=\log n-\log n'$.

3.ª *El logaritmo de la potencia de un número es igual al logaritmo de éste multiplicado por el exponente.*

Sea n el número que se quiere elevar á la potencia m, y x el logaritmo de aquél, se tendrá $n=b^x$; elevando ambos miembros de esta ecuación á la potencia m, resultará $n^m=b^{mx}$, y por lo tanto, se verificará que

$$\log n^m=mx=m\times\log n.$$

4.ª *El logaritmo de una raíz cualquiera de un número, es igual al logaritmo de éste dividido por el índice.*

Si se extrae la raíz del grado m en ambos miembros de la ecuación $n=b^x$, se tendrá $\sqrt[m]{n}=\sqrt[m]{b^x}=b^{\frac{x}{m}}$, y por tanto, $\log\sqrt[m]{n}=\frac{x}{m}=\frac{\log n}{m}$.

ARTÍCULO 2.º

Propiedades particulares de los logaritmos ordinarios.

97. El sistema de logaritmos que más habitualmente se usa en los cálculos, es aquel cuya base es 10, ó sea la misma que posee nuestro sistema de numeración. En tal caso el sistema de logaritmos se llama *vulgar, ordinario, decimal* ó *tabular* (*), con el fin de diferenciarlo del denominado *hiperbólico, natural* ó *neperiano* (**).

Según lo dicho (95), las progresiones que sirven de fundamento al sistema vulgar serán las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \div -\infty \ldots\ldots -n \ldots\ldots -3\,.-2.-1.0.\,1\,.\,2\,.\,3 \ldots\ldots n \ldots\ldots \infty \\ \because \frac{1}{10^{\infty}} : \ldots : \frac{1}{10^{n}} : \ldots : 0{,}001 : 0{,}01 : 0{,}1 : 1 : 10 : 10^{2} : 10^{3} : \ldots : 10^{n} : \ldots : 10^{\infty} \end{array}\right\} (g)$$

Del examen comparativo de ambas progresiones se desprende, que los únicos números cuyos logaritmos son enteros, se hallan formados por las potencias de 10 con exponentes también enteros, y por lo tanto los logaritmos de los números que no reúnen esta circunstancia, se compondrán de dos partes, la una entera, llamada *característica*, y la otra decimal, denominada *mantisa*. Así, el logaritmo de todo número comprendido entre 10^3 y 10^4, será mayor que 3 y menor que 4; y por consiguiente tendrá tres unidades de característica y la parte decimal ó mantisa que le corresponda.

Todo número conmensurable que no fuere igual á una potencia de la base, cuyo exponente sea entero positivo ó negativo, tiene por logaritmo un número inconmensurable.

Si se tiene un número n, que puede ser entero ó fraccionario, pero no una potencia de 10, cuyo exponente sea entero, y se representa con la letra x su logaritmo, que, como se ha visto, no puede ser igual á un número entero, habrá que hacer patente que tampoco el mencionado logaritmo puede ser un número frac-

(*) Estos logaritmos fueron calculados por primera vez por Briggs.

(**) Se llamó así, por haberlo considerado primeramente Neper que fué el inventor de los logaritmos.

cionario, y por lo tanto tendrá que ser inconmensurable.

En efecto, si n representara un número entero, se tendría que en la ecuación $10^x=n$, no podría x ser un quebrado irreducible tal como $\frac{s}{t}$, pues si esto sucediese, resultaría $10^{\frac{s}{t}}=n$, ó $2^s \times 5^s = n^t$; igualdad absurda, en atención á que descompuesto n en sus factores primos contiene únicamente á los factores 2 y 5 afectados del mismo exponente entero, y por lo tanto n tendría que ser igual á una potencia de 10, lo cual es contrario á la hipótesis.

Tampoco n puede ser un quebrado irreducible, pues si esto aconteciera, la igualdad $10^{\frac{p}{q}}=n$ ó $10^p=n^q$ sería absurda, supuesto que el primer miembro representaría á un número entero y el segundo un quebrado irreducible.

98. *La característica del logaritmo de un número mayor que 1, tiene tantas unidades, como cifras menos una posee la parte entera del número que se considera.*

Si se considera un número cuya parte entera tenga n cifras, se hallará comprendido entre 10^{n-1} y 10^n, y por lo tanto su logaritmo será mayor que $n-1$ y menor n; luego la característica del logaritmo que corresponde al número propuesto, tendrá $n-1$ unidades.

Así, por ejemplo, en las progresiones fundamentales del sistema de logaritmos ordinario, se ve que al logaritmo de 10^3, que es un número entero de 4 cifras, corresponden 3 unidades á su característica.

99. *Si un número se multiplica ó divide por una potencia de 10, la característica de su logaritmo aumentará ó disminuirá en tantas unidades como tenga el exponente de 10; pero la mantisa no experimentará alteración alguna.*

En efecto, representando por n un número cualquiera y por m el exponente de la potencia de 10 que se considere, se tendrán las siguientes igualdades:

$$\log(n \times 10^m) = \log n + \log 10^m = \log n + m$$
$$\log(n : 10^m) = \log n - \log 10^m = \log n - m.$$

Cuyas conclusiones hacen patente lo que se deseaba demostrar, supuesto que el aumento ó disminución que experimenta log n en m unidades enteras, afecta únicamente á la característica.

RECÍPROCAMENTE: *Si dos logaritmos se diferencian en* u *unidades, el número correspondiente al mayor es igual al que corresponde al menor multiplicado por* 10^u.

En efecto, siendo los dos logaritmos conocidos l y $l+u$, serán 10^l y 10^{l+u} sus respectivos números, y como que $10^{l+u} = 10^l \times 10^u$, se tendrá demostrado lo que se deseaba.

100. *La característica de un número decimal menor que 1, tiene tantas unidades negativas como ceros más uno existan entre la coma y la primera cifra significativa.*

Sea F una fracción decimal y n el número de ceros que contiene entre la coma y la primera cifra significativa. Multiplicando F por la unidad seguida de $n+1$ ceros, ó sea por 10^{n+1}, se tendrá otro número decimal cuya primera cifra de la izquierda ocupará el lugar que corresponde á las unidades enteras, en atención á que para obtener el expresado producto, habrá necesidad de correr la coma de izquierda á derecha $n+1$ lugares. Ahora bien, el logaritmo del producto tendrá cero por característica (98), luego el de la fracción decimal F será el resultado de quitar $n+1$ unidades de esta característica cero, y por lo tanto la que corresponderá á la fracción F será $-(n+1)$.

Así, por ejemplo, en las progresiones mencionadas (97), se ve que al logaritmo de la fracción 0,001, que tiene dos ceros entre la coma y la primera cifra significativa, corresponde una característica igual á —3 unidades enteras.

Por lo tanto, la característica positiva de un logaritmo ordinario indica el lugar que ocupa, á la izquierda de las unidades sencillas, la primera cifra significativa del número propuesto, al paso que la característica negativa expresará el que ocupa, á la derecha de las unidades sencillas, la primera cifra significativa del número que se considera.

ARTÍCULO 3.°

Uso de las Tablas.

101. En la elevación á potencias se conocía la base y el exponente que afectaba á ésta y se trataba de averiguar el valor de la potencia; en la extracción de raíces se daban la potencia de una cantidad y su exponente, llamado entonces índice, y se quería hallar el valor de la base, que, en la expresada teoría, recibía el nombre de raíz; por lo tanto, según esto, sólo resta ahora que se considere el problema cuyos datos son la potencia y la base de donde proviene, y deducir de ellos el valor del exponente, el cual, según lo dicho (95), será el logaritmo de la mencionada potencia.

Para resolver este problema en los diferentes casos que pueden ocurrir, hay necesidad de servirse de las TABLAS DE LOGARITMOS, las cuales se componen de *un conjunto de cuadros, en los que se encuentran los logaritmos de los números enteros, comprendidos entre cero y un límite arbitrario que se fija.*

La disposición de las tablas de esta índole y el mayor número entero cuyo logaritmo contienen, varían según sea el autor que las haya construido; mas como quiera que á todas ellas precede una explicación detallada, acerca de la manera de usarlas, sería inútil detenerse aquí con tales repeticiones, y por lo tanto, sólo se insistirá en resolver los dos siguientes problemas:

1.° Dado un número, que no se halla en las tablas, averiguar su logaritmo.

2.° Dado un logaritmo, que no se encuentra en las tablas, determinar el correspondiente número.

I.

102. Si se quisiera encontrar el logaritmo del número 6789256, que excede al que marca el límite de los contenidos en la tabla de que se haga uso (*), se tendría que la característica del expresado logaritmo sería 6, en virtud de lo ya dicho (**98**), y la mantisa se sabe (**99**) es la misma que la del logaritmo del número 6789,256; mas como 6789,256 se encuentra comprendido entre los números consecutivos 6789 y 6790, resultará entre sus respectivos logaritmos, comprendido el del 6789,256. Así se tendrá,

$$\begin{aligned}\log 6790 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 3{,}831870\\ \log 6789{,}256 \ldots\ldots &= 3{,}831806+x\\ \log 6789 \ldots\ldots\ldots\ldots &= 3{,}831806.\end{aligned}$$

Admitiendo ahora que *las diferencias de los números son directamente proporcionales á las diferencias entre sus respectivos logaritmos,* proporcionalidad que, aun cuando

---

(*) En los ejemplos de esta teoría, que se proponen en el presente Tratado, han sido empleadas las Tablas de Logaritmos publicadas por el catedrático D. Eusebio Sánchez Ramos.

no es rigurosamente exacta, el error con ella ocasionado, es insignificante cuando se aplica á números consecutivos mayores que 1000, resultaría:

$$6790—6789:6789{,}256—6789$$
$$::\log 6790—\log 6789:\log 6789{,}256—\log 6789;$$

ó bien, $1:0{,}256::0{,}000064:x=0{,}000016$; y por lo tanto,

$$\log 6789{,}256=3{,}831806+0{,}000016=3{,}831822:$$

como que el número propuesto es un entero con siete cifras, contendrá 6 unidades la característica de su logaritmo, de modo, que $\log 6789256=6{,}831822$.

La diferencia *tabular*, ó sea la que existe entre dos logaritmos consecutivos de las tablas, se expresa habitualmente con sólo las cifras significativas que representan unidades del último orden decimal, á que se refieren los mencionados logaritmos. Según esto, en la diferencia tabular del ejemplo anterior, se escribiría sólo 64, y por lo tanto, la que existe entre el logaritmo que corresponde al número próximo menor y el que se busca, sería 16.

Según esto, para hallar el logaritmo de un número entero, que no se encuentre en las tablas, *se separarán de la derecha de éste solamente las cifras que sean precisas, para que el número restante, que queda á la izquierda esté en aquéllas* (*); *se multiplicará la diferencia tabular*

(*) Teniendo en cuenta que *la diferencia que existe entre los logaritmos de dos números consecutivos, disminuye á medida que sean mayores los números que se consideren.* Supuesto que llamando n y $n+1$ á los expresados números, se tendrán las siguientes igualdades:

$$\log (n+1)—\log n=\log \left(\frac{n+1}{n}\right)=\log \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

en donde se ve que está demostrada la proposición que se acaba de enunciar.

por la parte decimal que en el número propuesto se habrá separado, el producto que resulte añádase al logaritmo del número menor, y se pone á la mantisa obtenida por medio de esta suma la correspondiente característica.

103. En el caso de que el número propuesto fuera decimal, se determinaría su característica con sujeción á las proposiciones demostradas (98, 99 y 100) y luego se hallaría su mantisa del mismo modo que si el número dado fuera entero.

Ejemplo 1.º Hallar el logaritmo de 67,89256.

Según se ha visto, log 6789256=6,831822
y por lo tanto, log 67,89256=1,831822.

Ejemplo 2.º Determinar el logaritmo de 0,03456.

Se tendría, log 3456=3,538574
de donde, log 0,03456=$\overline{2}$,538574.

Obsérvese que en este último logaritmo la característica es negativa y la mantisa positiva. Á los logaritmos así compuestos, se ha convenido en representarlos de modo que el signo menos se halle precisamente encima de la característica.

104. *El logaritmo de un quebrado ordinario, es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.*

En efecto, como quiera que todo quebrado ordinario es un cociente indicado, se tendrá, según se dijo (96,2.ª), que $\log \frac{4}{5} = \log 4 - \log 5 = 0{,}602060 - 0{,}698970$, de aquí resulta que $\log \frac{4}{5} = -0{,}096910$.

En donde también se hace patente que el logaritmo de un quebrado propio es siempre negativo.

Los logaritmos negativos pueden transformarse en otros equivalentes de característica negativa y mantisa positiva, sirviéndose del complemento á cero.

105. Llámase *complemento á cero* de un logaritmo (*), á otro logaritmo que sumado con el propuesto da por resultado cero.

De esta definición se desprende, que el complemento á cero de un logaritmo es este mismo logaritmo pero afectado de signo contrario. Así, el complemento á cero del logaritmo 4, que, como se ve, carece de mantisa, será igual á —4.

Sin embargo, de seguir este procedimiento cuando el logaritmo propuesto se componga de característica y de mantisa, el resultado obtenido no tendría forma á propósito para cálculos ulteriores, y en esta atención, conviene transformarlo en otro equivalente de característica negativa y mantisa positiva, para lo cual si, por ejemplo, se tuviera el logaritmo negativo —2,096910, se determinaría su complemento á cero, sin más que efectuar la sustracción agregando 3 unidades al minuendo cero, ó sea una más de las que posee el sustraendo, y para que aquél no se altere, habría que quitarle las mismas 3 unidades; así:

$$\begin{array}{r} -3+3{,}000000 \\ -2{,}096910 \\ \hline -3+0{,}903090=\bar{3}{,}903090. \end{array}$$

Cuyo resultado manifiesta, que para convertir un logaritmo negativo en otro equivalente de característica negativa y mantisa positiva, *se añade una unidad negativa á su característica y se determinará el complemento aritmético*

(*) Este complemento recibe el nombre de *cologaritmo* y también el de *complemento logarítmico*.

de su mantisa considerada como positiva (Aritm.ª 188).

Del mismo modo que por medio del complemento aritmético se transformaban las sustracciones en adiciones, se podrá convertir en suma la diferencia de dos logaritmos, sin más que añadir al minuendo el complemento á cero del sustraendo.

Así, por ejemplo, cuando del logaritmo 3,873907 se quiera restar de 2,589241, no habría sino agregar á éste el complemento á cero de aquél, ó sea, $\overline{4},126093$; y se tendría como resultado, $\overline{2},715334$, igual al que se hubiera obtenido al restar directamente los logaritmos propuestos.

II.

106. Si se tratara de determinar el número correspondiente á un logaritmo, que no estuviera contenido en las tablas, se comenzaría por buscar en ellas las dos mantisas entre las cuales se halle comprendida la del logaritmo propuesto, procurando siempre que las antedichas mantisas se refieran á los números enteros de mayor número de cifras, que las citadas tablas contienen. Si, por ejemplo, el logaritmo fuera 2,456789, obsérvese que su mantisa se halla comprendida entre 456776 y 456791, que respectivamente corresponden á los números 28627 y 28628; de modo que

$$\begin{aligned} \log 28628 \ldots\ldots &= \ldots\ldots 4{,}456791 \\ \log 28627+x &= \ldots\ldots 4{,}456789 \\ \log 28627 \ldots\ldots &= \ldots\ldots 4{,}456776. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la proporcionalidad mencionada (102), se tendrá:

$$28628-28627:(28627+x)-28627::0{,}000015:0{,}000013.$$

Esta proporción en la práctica se escribe en términos más sencillos, diciendo: $1:x::15:13$, de donde $x=0,866$; por lo tanto, el logaritmo de 28627,866, sería 4,456789; luego según esto, al logaritmo 2,456789 corresponderá el número 286,27866.

De modo, que para deducir el número que corresponde á un logaritmo dado, cuya mantisa no se encuentra en las tablas, *se buscarán en éstas los dos números consecutivos de mayor número de cifras, cuyos respectivos logaritmos comprendan entre sus mantisas á la propuesta, y se dividirá el exceso de la mantisa dada, sobre la próxima menor que se halla contenida en aquéllas, por la diferencia tabular escrita enfrente de esta última; el cociente que se obtenga, expresado en forma de fracción decimal, se agregará á la derecha del número menor, y en este resultado se colocará la coma, de manera que la parte entera tenga tantas cifras más una, como unidades posea la característica del logaritmo propuesto.*

107. Si ahora se quisiera hallar el número correspondiente á un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva, se procedería, para la determinación del expresado número, del mismo modo que en el caso anterior, ó sea como si la característica fuera positiva, y anteponiendo al número obtenido en este supuesto tantos ceros (incluyendo al cero enteros) como unidades negativas tuviere la característica.

Sea, por ejemplo, el logaritmo $\bar{3},456789$, cuya mantisa se ha visto que corresponde á 28627,86; se tendrá, según lo dicho (100), que $\bar{3}456789=\log 0,002862786$.

Si el logaritmo propuesto fuera negativo, no habría sino transformarlo en otro de característica negativa y mantisa positiva (105), con cuyo motivo este caso quedaba reducido al anterior.

También pudiera haberse hallado el número que corresponde al expresado logaritmo negativo, sin más que suponer á éste como si todo él fuere positivo; con tal modificación se determinaría su número correspondiente, el cual debería considerársele como denominador de una fracción, cuyo numerador fuera la unidad.

En efecto: sea el logaritmo —4,024239 que, considerado como positivo, corresponde al número 10574; teniendo en cuenta lo dicho (96, 2.ª), se explica que

$$-4{,}024239=0-4{,}024239=\log 1-\log 10574=\frac{1}{10574}.$$

CAPÍTULO III.

Aplicaciones de los logaritmos.

ARTÍCULO 1.°

Manera de efectuar operaciones con los logaritmos.

108. El uso de los logaritmos en el cálculo, suministra un valioso elemento, que, según lo dicho (96), permite efectuar de un modo tan rápido como sencillo las operaciones numéricas: así, el producto de varios factores se obtiene por medio de una suma; la determinación del cociente de dos números queda reducida á una sustracción; la elevación á potencia se consigue sirviéndose de una sencilla multiplicación; y finalmente, la extracción de raíces no sólo se facilita con la intervención de los logaritmos, sino que, en la mayoría de los casos, es el único medio practicable para obtener el resultado.

A fin de proceder con la debida seguridad en todo cálculo donde haya de servirse de los logaritmos, conviene exponer primeramente la manera de efectuar con ellos las operaciones ordinarias.

Para sumar varios logaritmos, *se practica la operación como si fuesen decimales, y si alguna ó algunas de sus características tuvieran el signo negativo, se efectuaría la suma sin contar con éstas, y después se determinaría la diferencia que existiera entre la característica hallada y la que provenga de la suma de las negativas, cuidando, como es natural, que* *el resultado posea el mismo signo que tuviera la de mayor valor absoluto.*

Ejemplo:

$$3,476782+\overline{1},594235+\overline{4},864236+5,141297=5,076550.$$

Para restar un logaritmo de otro, *se suma el que hace las veces de minuendo con el complemento á cero del sustraendo, según se practicó* (105) *esta operación. También pudiera haberse obtenido el mismo resultado efectuando directamente la sustracción.*

109. Para multiplicar un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva por un número entero, *se multiplicarían por éste primeramente la mantisa y luego la característica, sumando algebraicamente los dos resultados.*

Ejemplo:

$$\overline{3},569841\times4=(-3+0,569841)\times4=$$
$$=-12+2,279364=\overline{10},279364.$$

Si ahora se quisiera dividir un logaritmo de característica negativa y mantisa positiva por un número entero, *se añaden á los valores absolutos de la mantisa y de la característica el número de unidades precisas, para que esta última sea un múltiplo del divisor, y se efectúa separadamente la división de cada una de estas dos partes por el mencionado divisor entero.*

Ejemplo:

$$\overline{5},842356:7=(\overline{7}+2,842356):7=\overline{1},406050.$$

110. Si se quisieran multiplicar varios factores, *se sumarían sus logaritmos y se determinaría el número correspondiente á esta suma,* el cual, según se dijo (96, 1.ª), sería el producto buscado.

Ejemplo: Se desea hallar el valor del producto de $13\times29\times67$: se tendrá,

$$\log(13\times29\times67)=\log 13+\log 29+\log 67=4{,}402416;$$

luego el número 25259 que corresponde á este logaritmo, será el producto buscado.

Para obtener el cociente de dos números, restaríase del logaritmo del dividendo el del divisor, y se hallaría el número correspondiente á esta diferencia.

Ejemplo: Si se deseara determinar el valor de $295780:1286$, tendríase:

$$\log(295780:1286)=\log 295780-\log 1286=2{,}361728;$$

y como quiera que este logaritmo corresponde al número 230, éste será el cociente buscado (*).

111. Cuando se desee elevar un número á una potencia, *se multiplicará el exponente de ésta por el logaritmo del número, procediendo á determinar entonces el número que corresponde al producto obtenido* (96, 3.ª).

Ejemplo: Determinar el valor de $(16{,}7)^5$.

$\text{Log}\,(16{,}7)^5=5\times\log 16{,}7=6{,}113580$, á cuyo logaritmo corresponde el número 1298919,85607, que será el valor de la potencia buscada.

Se puede extraer la raíz de cualquier grado de un número, sin más que dividir el logaritmo de éste por el índice de la raíz, y buscar el número corrrespondiente al cociente que resulte.

(*) Pudiera hallarse también el cociente de dos números *sin más que agregar al logaritmo del minuendo el cologaritmo del sustraendo y determinar luego el antilogaritmo de la suma* (105). Así, haciendo referencia al ejemplo anterior, se tendría:

$$\begin{array}{rr} \log\ 295780\ldots\ldots & 5{,}470969 \\ \text{comp. log}\ \ 1286\ldots\ldots & \bar{4}{,}890759 \\ \hline & 2{,}361728=\log 230 \end{array}$$

Ejemplo: $\sqrt[5]{1298919{,}85607}$.

Se tiene que,

$$\log \sqrt[5]{1298919{,}85607}=\frac{\log 1298919{,}85607}{5}=1{,}222716,$$

al cual corresponde el número 16,7, ó sea el valor de la raíz que se deseaba encontrar.

ARTÍCULO 2.°

Regla de interés compuesto.

112. Se llama INTERÉS COMPUESTO á la ganancia producida por un capital, impuesto con la condición de que los intereses devengados á la terminación de cada unidad de tiempo, se vayan acumulando al expresado capital, con el fin de que á su vez produzcan también interés.

Para determinar la relación que liga al capital *primitivo* c, al *compuesto* ó *acumulado* C, al tiempo t que dura la imposición, y finalmente, á R en representación del *tanto por uno,* ó sea, del beneficio obtenido por cada unidad de dinero en la unidad de tiempo, hay necesidad de considerar que el capital c producirá cR al cabo de un año, y por lo tanto á la terminación del primero, el capital c se habrá convertido en $c+cR=c(1+R)$; llamando á este resultado c', el cual, después de transcurrido otro año, se transformará á su vez, según acaba de manifestarse, en $c'(1+R)$; poniendo ahora en lugar de c' su valor $c(1+R)$, resulta $c(1+R)\,(1+R)=c(1+R)^2$; lo que dice, que el capital c al cabo del segundo año, se habrá convertido en $c(1+R)^2$; del mismo modo al cabo del tercer año resulta $c(1+R)^3$, y por lo tanto, á los t años, $c(1+R)^t$; de donde se deduce la igualdad $C=c(1+R)^t$..... (1).

Despejando sucesivamente en esta igualdad las cantidades c, R y t, se tendrá:

$$c=\frac{C}{(1+R)^t}\ldots(2);\ 1+R=\sqrt[t]{\frac{C}{c}}\ldots(3);\ t=\frac{\log C-\log c}{\log(1+R)}\ldots(4).$$

Como se ve, puede por medio de estas fórmulas determinarse una cualquiera de las cuatro cantidades que intervienen en ella, siempre que sean conocidas las otras tres.

PROBLEMA 1.º—*Un individuo impuso 17000 pesetas al 6 p. $^0/_0$; ¿en qué se convertirá ese capital prestado á interés compuesto al cabo de 7 años?*

Siendo 6 el tanto por ciento, el beneficio de una unidad de dinero al cabo de un año será 0,06. Como quiera que en este caso la incógnita es C, habrá que emplear la fórmula (1) correspondiente, en la que haciendo las debidas sustituciones, se tendrá $C=17000\times(1{,}06)^7$; de donde se deduce,

$\log C=\log 17000+7\times\log(1{,}06)=25561$ ptas. y 71 cénts; por lo tanto, el importe del interés compuesto devengado durante los 7 años, ascenderá á 25561,71—17000, ó sean 8561,71 pesetas.

PROBLEMA 2.º—*Un sujeto que tiene un hijo de 12 años y desea redimirlo del servicio de las armas, ¿qué cantidad debe imponer al 5 p. $^0/_0$, para reunir las 1500 pesetas que necesitará dentro de 8 años?*

Haciendo uso de la fórmula (2) que determina el valor de c, se tendrá $c=\frac{1500}{(1{,}05)^8}$; de donde,

$$\log c=\log 1500-8\log 1{,}05=3{,}006579;$$

y por lo tanto, $c=1015{,}24$ pesetas.

Problema 3.º—*Jerez de la Frontera, que hace medio siglo tenía 33104 habitantes, cuenta en la actualidad con 63132; se desea averiguar cuál debió ser, durante el tiempo transcurrido, el aumento anual de población por cada 1000 almas.*

De la fórmula (3) aplicable á la resolución de este problema, se obtendrá

$$\log(1+R)=\frac{\log 63132-\log 33104}{50}=$$
$$=0{,}0056081=\log 1{,}012,$$

de donde $R=0{,}012$; lo que manifiesta que el aumento en el vecindario de la expresada ciudad durante los últimos 50 años, ha sido en cada uno de éstos de 12 habitantes por cada 1000.

Problema 4.º—*¿En cuánto tiempo se triplicará un capital cualquiera, prestado al 6 p. $^0/_0$ de interés compuesto?*

En el presente caso, $C=3c$; y por lo tanto, de la correspondiente fórmula (4), se tendrá, $3=(1+0{,}06)^t$ (*); despejando aquí la incógnita t, resultará,

$$t=\frac{\log 3}{\log(1{,}06)}=18 \text{ años y } 22 \text{ días.}$$

Obsérvese, que aun cuando se adoptara por unidad de tiempo el mes ó el día, podrían emplearse idénticos razonamientos para deducir la correspondiente fórmula, que sería la misma, sin otra diferencia que R representaría entonces el interés de la unidad de dinero al cabo del mes ó del día; y por tanto, si se atiende á que toda fracción de año puede expresarse en aquellas unidades de tiempo, habrá que convenir en que la fórmula obte-

---

(*) Esta es una *ecuación exponencial*, llamada así porque la incógnita aparece en ella por exponente.

nida (1) es general, y por consiguiente aplicable también al caso en que t represente un número fraccionario.

113. En el comercio sólo se acostumbra usar de la expresada fórmula, en el caso de que t exprese un número exacto de años; así es que cuando el tiempo fijado contenga además algunos días, se principiará por deducir sirviéndose de la precitada expresión general, la transformación experimentada por c al cabo de t años y después se pasa á investigar la cantidad que este capital acumulado produce impuesto á interés simple, durante el número de días que se designe.

Así el capital acumulado durante t años será $C'=c(1+r)^t$ y la transformación de éste, impuesto á interés simple durante d días, se determinará por la fórmula (2) de la regla (Aritm.ª 173), sin más que sustituir en vez de c el capital C', en lugar de t su igual $\frac{d}{360}$ y finalmente, reemplazando r por su equivalente 100 R, y así se tendría

$$i=\frac{C'\times\frac{d}{360}\times 100R}{100}=c(1+R)^t\ R\times\frac{d}{360}.$$

Luego el capital c al cabo de t años y d días se convertirá en

$$C=c(1+R)^t+c(1+R)^t\ R\times\frac{d}{360}=c(1+R)^t\left(1+R\times\frac{d}{360}\right)$$

Nótese que si en esta última fórmula se hiciera $d=0$, resultaría $C=c(1+R)^t$, lo cual fácilmente se explica que suceda.

ARTÍCULO 3.º

Anualidades y rentas vitalicias.

114. Se entiende por ANUALIDAD, la cantidad constante que se entrega anualmente, bien con el fin de extinguir una deuda ó bien para formar un capital, durante un cierto número de años. En el primer caso, la entrega de la anualidad se efectúa á la terminación de cada año, y

en el segundo se hace al principio de cada uno de ellos.

PRIMER CASO. *Anualidades de amortización.*

Sea a la anualidad, R el tanto por uno anual y t el número de años en que se ha de extinguir la deuda: satisfaciendo la primera anualidad al cabo del primer año, ésta producirá intereses durante los $t-1$ años restantes, y al fin de los t años se habrá transformado en $a(1+R)^{t-1}$; la segunda anualidad se convertirá en $a(1+R)^{t-2}$, la tercera en $a(1+R)^{t-3}$, y así sucesivamente pudiera decirse de las demás hasta la última, que, satisfecha al fin de los t años, no habrá producido interés alguno y valdrá solamente a. De modo que el valor de todas estas anualidades, al fin de los t años, será:

$$a(1+R)^{t-1}+a(1+R)^{t-2}+a(1+R)^{t-3}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+a(1+R)+a=\frac{a(1+R)^{t}-a}{R}.$$

Pero si el valor de la deuda se representa por c, se habrá convertido ésta al cabo de t años, en $c(1+R)^{t}$, luego se verificará la igualdad $c(1+R)^{t}=\dfrac{a((1+R)^{t}-1)}{R}$ ..... (1), en la cual aparecen ligadas las cantidades a, c, R y t.

Despejando a en la ecuación (1), se obtiene:

$$a=\frac{cR(1+R)^{t}}{(1+R)^{t}-1}\ \ldots\ldots\ (2).$$

PROBLEMA 1.º—*Una Diputación provincial ha contraído un empréstito de 2000000 de pesetas al 7 p. $^{0}/_{0}$, y se desea averiguar qué cantidad anual debe presuponer, para amortizar el expresado capital y sus intereses al cabo de 15 años.*

Sustituyendo en la fórmula (2) en vez de cada letra su correspondiente valor particular, se tendrá:

$$a=\frac{2000000\times 0{,}07(1{,}07)^{15}}{(1{,}07)^{15}-1}=219586 \text{ ptas. y } 15 \text{ cénts.}$$

PROBLEMA 2.º—*Un sujeto gasta en tabaco desde la edad de 14 años, 20 céntimos de peseta por día. ¿Qué cantidad podría haber reunido á los 60 años, si hubiera impuesto en cada uno, al 6 p. $^0/_0$, las 73 pesetas que anualmente desembolsa para fumar?*

Representando por C la expresada cantidad desconocida, cuyo valor equivale al segundo miembro de la igualdad (1), se tendrá la ecuación $C=\frac{a((1+R)^t-1)}{R}$, donde sustituyendo en vez de cada letra su valor particular en este ejemplo, y efectuando después las operaciones que se hallan indicadas, resultará

$$C=\frac{73((1+0,06)^{46}-1)}{0,06}=16535 \text{ pesetas y } 38 \text{ céntimos.}$$

PROBLEMA 3.º—*¿En cuánto tiempo puede amortizarse una deuda de 1200 pesetas, siendo 4 el tanto por ciento y 200 las que anualmente se entregan?*

Despejando $(1+R)^t$ en la igualdad (1), se tendrá $(1+R)^t=\frac{a}{a-cR}$, de donde $t=\frac{\log a-\log (a-cR)}{\log (1+R)}$.....(3): sustituyendo en esta fórmula en lugar de cada letra su valor en el presente caso, al efectuar las operaciones que están indicadas, se obtiene

$$t=\frac{\log\ 200-\log\ (200-1200\times 0,04)}{\log\ 1,04}=7 \text{ años próxima-}$$

mente.

Es evidente que, si se quisiera comprobar uno cualquiera de estos resultados, no habría sino volver á resolverlo, en el supuesto de que uno de los datos pasaba á considerarse como cantidad desconocida, y si no existiese equivocación alguna, habría identidad entre la solución obtenida y el dato correspondiente del problema que se trataba de comprobar.

Así, por ejemplo, para tener el convencimiento de que el valor hallado últimamente para la incógnita t, era el verdadero, se resolvería el siguiente

PROBLEMA 4.º—*¿A qué capital corresponde una anualidad de 200 pesetas durante 7 años y al 4 p. % de interés?*

De la fórmula general (1) se tendría $c=\frac{a(1+R)^t-1}{R(1+R)^t}$,

de donde $c=\frac{200((1+0,04)^7-1)}{0,04(1+0,04)^7}=1200$ pesetas:

lo que manifiesta que no ha habido equivocación al resolver el problema 3.º

SEGUNDO CASO. *Anualidades de imposición.*

En este caso, la primera anualidad produce interés durante los t años y se convierte en $a(1+R)^t$, la segunda en $a(1+r)^{t-1}$, y así de las demás hasta la última, que produciendo interés sólo durante un año, se transforma en $a(1+R)$: luego el capital que resulta, será:

$$C=a(1+R)^t+a(1+R)^{t-1}+a(1+R)^{t-2}+\ldots\ldots a(1+R)$$

ó $C=a(1+R)\,[(1+R)^{t-1}+(1+R)^{t-2}+\ldots\ldots+(1+R)+1]=$

$$=\frac{a(1+R)\,[(1+R)^t-1]}{R}\ \ldots\ldots\ (h).$$

PROBLEMA.—*Un sujeto impone al 4 p. % una cantidad anual, con el fin de reunir al cabo de 20 años 32000 duros. ¿Cuál será el valor de la anualidad?*

Despejando a en la fórmula anterior, se obtiene

$$a=\frac{CR}{(1+R)\,[(1+R)^t-1]}$$

y por lo tanto, se tendrá: $a=\frac{32000\times0,04}{1,04(1,04)^{20}-1}=1033$ duros y 3 pesetas próximamente.

Este problema pudiera comprobarse por medio de la fórmula (h), en el supuesto de que la única incógnita fuera C, ó bien admitiendo que la cantidad desconocida estuviera representada por t, en cuyo caso habría necesidad de despejar ésta en la ecuación (h), la cual, una vez preparada, se convertiría en

$$a(1+R)(1+R)^t = CR + a(1+R),$$

y por lo tanto, $t = \dfrac{\log[CR + a(1+R)] - \log a}{\log(1+R)} - 1.$

La cantidad R no se puede determinar directamente en el actual caso, en atención á que, para conseguirlo, habría que resolver ecuaciones de un grado superior al segundo.

115. Rentas vitalicias.—Se denominan de este modo aquellas anualidades que percibe una persona durante su vida, con el fin de que á su fallecimiento quede extinguido el capital que entregó y los intereses devengados.

Fácilmente se comprende, que estas anualidades se determinan por la fórmula (2) de las anualidades de amortización, en la cual C representa el capital impuesto, a la anualidad, R el tanto por uno anual y t el tiempo probable de vida del imponente.

La *vida probable* de una persona es el tiempo que ha de transcurrir para que mueran la mitad de los individuos de su misma edad, que existen en el país á que se haga referencia. La estadística de cada nación suministra los datos para formar una tabla de vida probable, y claro es que estas tablas inspirarán tanta más confianza cuanto más numerosos, recientes y exactos sean los datos estadísticos, que se hayan allegado para formarlas.

Á falta de tabla á propósito, puede hacerse uso de la siguiente fórmula empírica: v=58—0,8e (*), en la cual v representa la vida probable y e la edad del individuo expresada en años.

PROBLEMA 1.°—*Un individuo de 55 años disfruta de 5000 pesetas de sueldo anual. ¿Qué capital representa éste, considerado como renta vitalicia, en el supuesto de que sea el 6 p.°/₀ el interés para esta capitalización?*

Al despejar c en la fórmula (1) de las anualidades de amortización y sustituir en ella los valores de los datos, teniendo en cuenta que $v=14$, resultará $c=\frac{5000\,((1{,}06)^{14}-1)}{0{,}06\times(1{,}06)^{14}}$, de donde se deduce que c=46474 pesetas y 90 céntimos.

PROBLEMA 2.°—*¿Qué renta vitalicia corresponde á un sujeto de 55 años de edad, que entrega un capital de 46474 pesetas y 90 céntimos al 6 p.°/₀ anual?*

Sirviéndose de la fórmula (2) que corresponde al presente problema, se tendría $a=\frac{46474{,}90\times0{,}06\times(1{,}06)^{14}}{(1{,}06)^{14}-1}$ y por lo tanto a=5000 pesetas.

Obsérvese que la solución de uno cualquiera de estos dos últimos problemas, viene á comprobar la del otro.

(*) Esta regla, debida al catedrático Sr. Gascó, arroja resultados que se aproximan mucho á los contenidos en las buenas tablas cuando el individuo que se considera tiene una edad comprendida entre 5 y 65 años.

APÉNDICE.

Coordinaciones y combinaciones.

116. Llámanse *coordinaciones* de varios objetos, los diferentes grupos que pueden formarse con ellos, tomándolos de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc., de manera que un mismo objeto no entre dos veces en una misma agrupación.

El modo de formar las coordinaciones se desprende de la anterior definición. Así, para disponer con *m* letras las coordinaciones binarias, ó sea las agrupaciones compuestas de dos letras, se coloca á la derecha de cada grupo todas las demás una á una. Por ejemplo, las coordinaciones binarias de las letras *a, b, c, d, e, f,* serán:

ab	*ac*	*ad*	*ae*	*af*
ba	*bc*	*bd*	*be*	*bf*
ca	*cb*	*cd*	*ce*	*cf*
da	*db*	*dc*	*de*	*df*
ea	*eb*	*ec*	*ed*	*ef*
fa	*fb*	*fc*	*fd*	*fe*

Para formar las ternarias, se colocan una á una á la derecha de cada coordinación binaria todas las demás letras, que no aparecen en ella. En general pudiera decirse que las coordinaciones de un cierto orden se forman, conocidas las del inmediato anterior, añadiendo á la derecha de cada una de las anteriores las diferentes letras que no entran en ella.

El número de coordinaciones que pueden disponerse con m letras, se deduce del modo de formarlas; y como para obtener las binarias se añade á cada letra todas las demás una á una, ó sea las $m-1$ restantes; con tal motivo cada letra habrá de producir $m-1$ coordinaciones binarias, y por lo tanto las m letras darán $m(m-1)$.

117. Conocido que sea el número de coordinaciones de un orden cualquiera que se forman con m letras, se podrá deducir el número de las del orden siguiente. Sea para ello C el número de coordinaciones de m letras del orden n; al arreglar las del siguiente, hay que añadir una á una á cada coordinación del anterior todas las letras que no entran en ella; luego el número de éstas será $m-n$; de donde se desprende que á cada coordinación de las ya formadas se le pueden agregar $m-n$ letras, y por lo tanto cada una de aquéllas producirá $m-n$ coordinaciones del orden $n+1$; y en su consecuencia, las C coordinaciones del orden n darán $C(m-n)$ del orden siguiente. Sustituyendo en esta expresión en vez de C su valor y haciendo sucesivamente $n=2$, $n=3$, $n=4$, etc., se tendrá el número de coordinaciones ternarias, cuaternarias, etc., de m letras:

$$\begin{array}{c}\text{Número}\\ \text{de}\\ \text{coordinaciones}\end{array}\left\{\begin{array}{ll}\text{binarias}\ldots\ldots & m(m-1)\\ \text{ternarias}\ldots. & m(m-1)(m-2)\\ \text{cuaternarias} & m(m-1)(m-2)(m-3)\\ \text{del orden } n. & m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-(n-1))\ldots(q)\end{array}\right.$$

La expresión general (q) manifiesta el número de coordinaciones de un orden cualquiera.

Ejemplo: *¿Cuántas coordinaciones pueden formarse con 9 letras tomadas 5 á 5?*

Haciendo las debidas sustituciones en la expresión (q) se tiene:

$$9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)=9.8.7.6.5=15120.$$

118. Llámanse *permutaciones* las diferentes coordinaciones que pueden formarse con varios objetos, en el caso particular de que entren todos en cada una de ellas. Luego de aquí se infiere, que para formar las permutaciones de m letras, se dispondrán las coordinaciones binarias, ternarias, cuaternarias, ..., las del orden $m-1$ y finalmente las del orden m, que serán las permutaciones. Así, para hallar el número de permutaciones de m letras, se hará $n=m$ en la expresión general (q) y se tendrá:

$$P=m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-(m-2))(m-(m-1))=$$
$$=m(m-1)(m-2)\ .....\ 3.2.1.$$

Ejemplo: *¿Cuántas permutaciones pueden formarse con 9 letras?*

Sustituyendo en vez de m su igual 9 en la expresión anterior, resultaría que $P=2.3.4.5.6.7.8.9=362880$.

119. Se llaman *combinaciones* las coordinaciones que se diferencian por lo menos en uno de los objetos que componen cada agrupación.

Según esto, como con cada combinación ó *producto diferente* de n objetos ó cifras distintas pueden formarse $2.3.4.....n$ permutaciones, número igual al de coordinaciones del orden n, que se pudieran disponer con n objetos, de aquí resulta que las C combinaciones de m objetos agrupados n á n, producirán $C\times2.3.4.....n$; número precisamente idéntico á la totalidad de las coordinaciones que pueden formarse con m letras tomadas n á n, y por lo tanto, se tendrá la igualdad,

$$C\times2.3.4.....n=m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-(n-1));$$

de donde

$$C=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3).....(m-(n-1))}{2.3.4.....n} \;..... \text{(s)}.$$

Ejemplo: *Determinar el número de productos diferentes que se pueden formar con 9 cifras distintas tomadas 5 á 5.*

Sustituyendo en la fórmula (s) en lugar de m su igual 9, y en vez de n el número 5, se obtiene:

$$C=\frac{9.8.7.6.5}{2.3.4.5}=126.$$

Obsérvese que el *cociente resultante para valor de* C, *está siempre expresado por un número entero, cualquiera que sea el orden de las combinaciones que se consideren.*

En efecto, al considerar combinaciones binarias, el numerador de C constaría del producto de dos enteros consecutivos, en donde uno de éstos necesariamente sería divisible por 2, y en su consecuencia, por el denominador de la fracción que representa C. El numerador de este quebrado en las combinaciones ternarias, es el producto de tres factores consecutivos, entre los cuales uno de ellos tendrá que ser divisible por 2 y otro por 3; luego el mencionado numerador será divisible por el producto de 2×3, que es precisamente el valor de su respectivo denominador.

Este mismo razonamiento puede hacerse también extensivo á las combinaciones de un orden cualquiera.

El número de combinaciones de m letras ú objetos diversos, de un orden cualquiera, se deduce en función del número de combinaciones correspondientes al orden inmediato anterior, de la manera siguiente:

$$C=\frac{m(m-1)\,(m-2).....(m-(n-2))\,(m-(n-1))}{2.3.4.....(n-1)n}=$$

$$=\frac{m(m-1)\,(m-2).....(m(n-2))}{2.3.4.....(n-1)}\times\frac{(m-(n-1))}{n}.$$

120. *El número de combinaciones del orden* n, *que se pueden formar con* m *letras, es el mismo que el del orden* m—n.

En efecto, sean las m letras $abcd.....rspq$: si se considera este grupo como un producto de todas las letras y se divide por una combinación del orden n, resultará por cociente un grupo de $m-n$, ó sea una combinación del orden $m-n$; haciendo lo mismo con las diferentes combinaciones del orden n, los cocientes que resulten serán grupos de $m-n$ letras. Cada uno de éstos se diferencia de los demás en una letra, supuesto que la agrupación de que se compone cada divisor, se distingue de los otros en una letra, de aquí resulta que estas diferentes agrupaciones formadas no serán sino combinaciones de $m-n$ letras. Como también se verifica que á cada combinación del orden $m-n$, considerada como divisor, corresponde un cociente de n letras, queda por lo tanto demostrado el teorema.

121. Para formar las combinaciones de un cierto orden, obsérvese que, en el supuesto de que las m letras se hallen colocadas por orden alfabético, al tener dispuestas las combinaciones de un orden cualquiera, deduciríanse las del siguiente, añadiendo á cada una de las anteriores las letras que siguen á la última de cada combinación: en efecto, si para hacerlo ver, se supone que una de las combinaciones del orden anterior sea acf y el total de las letras $abcdefgh$, añadiendo á la combinación citada una letra de las que anteceden á f, por ejemplo b, resultaría el grupo $acfb$, y como quiera que se tendrá de antemano

la combinación *abc*, á la cual se han debido añadir todas las letras que siguen á la *c*, es claro que se le habrá agregado la *f* y se tendrá ya formada la combinación *abcf*, idéntica á la anterior *acfb*.

Binomio de Newton.

122. Si se tiene un conjunto de factores binomios, tales que el primer término de cada uno sea igual en todos ellos y diferente el segundo, ó sea de la forma $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)$ ....., y se determina la expresión de su producto, se obtendrá:

$$(x+a)\,(x+b)=x^2\begin{array}{r|l} +a & x+ab; \\ +b & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3\begin{array}{r|r|l} +a & x^2+ab & x+abc; \\ +b & +ac & \\ +c & +bc & \end{array}$$

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{r|r|r|l} +a & x^3+ab & x^2+abc & x+abcd. \\ +b & +ac & +abd & \\ +c & +ad & +acd & \\ +d & +bc & +bcd & \\ & +bd & & \\ & +cd & & \end{array}$$

En estos resultados puede observarse: 1.º *Que el número de términos del producto es uno más que el de los factores.* 2.º *El primer término es una potencia de* x *igual al número de factores, y el exponente de* x *va disminuyendo sucesivamente en una unidad en los términos siguientes, hasta que llega á reducirse á cero en el último.* 3.º *El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo la suma de los segundos términos de los binomios, el del tercero la suma de los productos binarios de los mismos, el del cuarto la suma* *de sus productos ternarios, y así sucesivamente se diría de los demás: finalmente, el último término es el producto de los segundos términos de los factores.*

123. Para hacer patente que esta ley es general, se demostrará que siendo cierta para n factores binomios, también lo será cuando el número de éstos sea $n+1$.

En efecto, por la hipótesis se tiene:

$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c).....(x+h)=$$
$$=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+.....+P;$$

en donde

$$\begin{array}{l} A=a+b+c+d+.....+h \\ B=ab+ac+ad+.....ah..... \\ C=abc+abd+.....abh..... \\ .... \\ .... \\ .... \\ P=abc.....h: \end{array}$$

efectuando la multiplicación del segundo miembro de la primera igualdad por el factor $x+i$, se tendría:

$$\begin{array}{l|l|l|l} \multicolumn{4}{l}{x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+C^{n-3}+.............................P} \\ \multicolumn{4}{l}{x+i} \\ \hline x^{n+1}+A & x^n+\ B & x^{n-1}+\ C & x^{n-2}+.....+Pi. \\ \quad\ +\ i & \quad +Ai & \quad +Bi & \end{array}$$

Este producto se compone de un término más que el anterior, el exponente de x en el primero es igual al número de factores binomios, y va disminuyendo sucesivamente en una unidad en los diferentes términos hasta reducirse á cero al final. El coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo $A+i$, que representa la suma de los segundos términos de los binomios; el del tercero $B+Ai$ es la reunión de los productos binarios de dichos segundos términos: en efecto, B expresa el conjunto de las combinaciones binarias de las n primeras letras $a, b, c, d, \ldots, h$ y Ai es la reunión de los productos de cada una de esas letras por i; ahora bien, como para formar las combinaciones binarias, se añaden á cada letra todas las que le siguen, en B no hay más combinaciones que las resultantes de agregar á cada letra todas las que le siguen hasta h: luego para tener las combinaciones de $n+1$ letras, falta añadir á las anteriores las que resulten de agregar á cada letra la última i ó sea el producto Ai; por lo tanto, $B+Ai$ significa la suma de las combinaciones binarias de los $n+1$, segundos términos de los binomios. Del mismo modo se verá que $C+Bi$ representa la suma de las combinaciones ternarias de dichos segundos términos, pues en C no existen más que las combinaciones ternarias, obtenidas al añadir á cada combinación binaria todas las letras que siguen á la última de cada combinación hasta h: luego para tener las de $n+1$ letras faltan todas las que puedan formarse, agregando á cada combinación binaria la última letra i, lo cual daría por resultado Bi combinaciones ternarias. Finalmente, el último término Pi es el producto de todos los segundos términos de los binomios.

Se ve pues, que la ley enunciada, al suponer que sea cierta para un número n de factores, lo es también cuando el número de éstos es uno más, ó sea $n+1$. Ahora bien, como se sabe que es cierta cuando el producto se compone de dos factores, lo será cuando conste de tres, y siéndolo en este caso, también se verificará cuando se componga de cuatro: siguiendo el razonamiento se verá es aplicable á cualquiera que fuere el número de factores del producto.

Así, admitiendo que el número de factores binomios sea m, se tendrá:

$$(x+a)(x+b)(x+c)...(x+i)=$$

$$\begin{array}{r|r|r|l}
=x^m+a & x^{m-1}+ab & x^{m-2}+abc & x^{m-3}+...+abcd...i \\
+b & +ac & abd & \\
+c & +ai & abe & \\
+d & +... & +.... & \\
+... & +... & +.... & \\
+... & +... & +.... & \\
+i & +hi & +ghi &
\end{array}$$

haciendo $a=b=c=d=.....=g=h=i$, resulta que

$$\begin{array}{r|r|r|l}
(x+a)^m=x^m+a & x^{m-1}+a^2 & x^{m-2}+a^3 & x^{m-3}+...+a^m. \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+a & +a^2 & +a^3 & \\
+... & +... & +... &
\end{array}$$

124. En este segundo miembro la letra a se halla repetida como sumando tantas veces como factores existen, es decir m veces: luego $+a+a+a.....=ma$: a^2 se halla repetido tantas veces como combinaciones binarias se pueden formar con los segundos términos de los binomios, cuyo número se sabe (119) que es $\frac{m(m-1)}{1.2}$; por lo tanto el coeficiente $a^2+a^2+a^2.....$ será igual á $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$: de la misma manera se deduce que $a^3+a^3+a^3+.....$ equivale á $\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.2.3}a^3$, etc.; luego,

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+$$

$$+\frac{m(m-1)\ (m-2)}{1.2.3}a^3x^m+.....+a^m..... \text{(r)},$$

fórmula debida á Newton, la cual proporciona el medio de formar una potencia cualquiera de un binomio, sin necesidad de conocer de antemano las de un grado inferior.

El segundo miembro de la fórmula (r) dice:

1.º *El número de términos del desarrollo excede en una unidad al de unidades del exponente de la potencia.* 2.º *El exponente de* x *va disminuyendo sucesivamente en una unidad en los términos siguientes, siendo* m *el primero y* cero *el último.* 3.º *La suma de los exponentes de* x *y* a *en cada término es* m, *de modo que el polinomio así formado es homogéneo.* 4.º *El coeficiente del primer término es* uno, *el del segundo* m, *el del tercero el número de combinaciones binarias de* m *letras, el del cuarto el número de combinaciones ternarias, y en general, el coeficiente de un término cualquiera es el número de combinaciones formadas con* m *letras, de modo que el orden de aquéllas sea igual al número de términos existentes delante del que se considera.* 5.º *El exponente de* a *en un término cualquiera es igual al número de términos que le anteceden.*

De donde se deduce, que siempre podrá formarse un término cualquiera del desarrollo, conocido el lugar que en éste ocupa. Así el término del lugar $n+1$ tendrá por coeficiente el número de combinaciones del orden n, que pueden formarse con m letras, es decir,

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3).....(m-(n-1))}{1.2.3.4.....n};$$

el exponente de a es igual al número de términos que tiene delante, que es n, y el de x es $m-n$; puesto que entre los exponentes de x y a han de sumar m. Llamando pues T á dicho *término general,* se tendrá:

$$T=\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,.....\,(m-(n-1))}{1.2.3.....n}a^n x^{m-n}.$$

Haciendo en esta expresión $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., resultarán todos los términos del desarrollo, desde el segundo en adelante.

Se puede y conviene obtener en ocasiones la potencia de un binomio, sin necesidad de fórmula, ó sea prescindiendo del término general; pues se observa que *el coeficiente de un término cualquiera se forma, multiplicando el del anterior por el exponente de* x *en este término, y dividiendo el producto por el exponente de* a, *aumentado en una unidad:* por ejemplo, el término

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5}a^5x^{m-5}$$

se forma, multiplicando el coeficiente del anterior

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$$

por el exponente $m-4$ de x en este término y dividiendo su producto por 5, que es el exponente de a aumentado en una unidad, y como quiera que el de a aumenta y el de x disminuye también en una unidad, al pasar al término siguiente, se tendrá conocido un término cualquiera, sabiendo cuál es el que le antecede.

Ejemplo: Desarrollar la potencia $(x+a)^5$.

Aplicando la fórmula del binomio (r) á la determinación de este desarrollo, ó deduciendo separadamente, por medio de la regla que se acaba de exponer, el valor de cada término se tendría en uno y otro caso que

$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+\frac{5\times4}{2}a^2x^3+\frac{20\times3}{2\times3}a^3x^2+\frac{60\times2}{6\times4}a^4x+$$
$$+\frac{120}{24\times5}a^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5.$$

Al aplicar la fórmula de Newton á la formación de una potencia cualquiera de un binomio, se observa que los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son idénticos, lo cual se explica en atención á que el coeficiente de un término del desarrollo, correspondiente á la potencia m de un binomio, es el número de combinaciones que pueden formarse con m letras del orden indicado, por el número de términos que hay delante. Ahora bien, si se consideran dos de éstos equidistantes de los extremos, para lo cual es necesario que el uno tenga delante de sí tantos términos como el otro tiene detrás, y sea este número n, el coeficiente del primero es el número de combinaciones de m letras del orden n: respecto de aquel que tiene detrás n términos, podría averiguarse el valor de su coeficiente, sabiendo el número preciso de los que tiene delante; mas si se observa que en el desarrollo hay $m+1$ términos, como que al que tiene n detrás, le anteceden la totalidad de ellos menos los que le siguen, menos el mismo, ó sea $m+1-n-1=m-n$; por lo tanto, habiendo delante del expresado término $m-n$, su coeficiente será igual al número de combinaciones de m letras del orden $m-n$; luego según lo dicho (120), los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen que ser iguales.

De aquí se desprende que en el desarrollo de una potencia cualquiera de un binomio, basta formar la mitad ó la mitad más uno de los términos que haya de poseer aquél, supuesto que los coeficientes de los demás han de ser idénticos á los de los anteriores.

Si el segundo término a del binomio fuere negativo, reemplazando $-a$ en vez de a en la fórmula, se tendría entonces:

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3x^{m-3}+\ldots\pm a^m\ldots\ (2),$$

en donde se ve que los términos van siendo alternativamente positivos y negativos, verificándose que el último estará afectado del signo positivo cuando m sea un número par y del signo negativo cuando m fuere impar,

Si en las dos últimas igualdades (1) y (2) se hace $x=1$, se obtiene:

$$(1+a)^m=1+ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\ldots+a^m$$

$$(1-a)^m=1-ma+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3+\ldots\pm a^m$$

lo cual facilita la formación de una potencia de un binomio cualquiera; pues suponiendo que se tuviera el binomio $x+h$, su potencia $(x+h)^m$ puede escribirse en la siguiente forma:

$$\left(x\left(1+\frac{h}{x}\right)\right)^m=x^m\left(1+\frac{h}{x}\right)^m=x^m(1+a)^m;$$

en donde a representa la fracción $\frac{h}{x}$.

Potencias y raíces enteras de los polinomios.

125. Teniendo en cuenta lo dicho (35), todo polinomio puede considerarse como si fuera un binomio, cuya primera parte sea uno de los términos de aquél y la segunda esté compuesta de todos los restantes, de manera que la determinación de una potencia cualquiera del binomio así dispuesto, se habrá hecho depender de la de otro polinomio que tenga un término menos; descomponiendo éste á su vez en otras dos partes, tales que la primera sea uno de sus términos y la segunda el conjunto de los demás, la cuestión habrá también quedado reducida á formar la potencia de un polinomio, que tendrá un término menos que el anterior, ó sea dos términos menos que el propuesto;

continuando así, se llegaría al fin á un binomio cuyas potencias del grado que se quiera, se saben deducir directamente; una vez conseguido esto, no habría sino efectuar las sustituciones debidas en las potencias de los polinomios, que tuvieren un término más que aquél, y se continuarían estas sustituciones hasta tanto que se viniera en conocimiento de la expresión, que corresponde á la potencia pedida del polinomio propuesto.

El procedimiento explicado es el mismo puesto en práctica en la pág. 35 cuando se trataba de obtener las potencias 2.ª, 3.ª, etc., de un polinomio; la única diferencia que existe, es que allí se deducían las potencias de un binomio, tomando á éste tantas veces por factor como unidades tenía el grado de la potencia, mientras que aquí se determinan desde luego las de un grado cualquiera m, sirviéndose del desarrollo que proporciona el binomio de Newton, lo cual permite que ahora pueda hallarse, sin dificultad alguna, la expresión general de la potencia m de un polinomio.

En cuanto se acaba de decir, únicamente se consideran potencias *enteras,* ó sea aquéllas cuyo exponente es un número entero y positivo (**35**, nota).

126. La fórmula del binomio permite también deducir el procedimiento que debe seguirse, para extraer la raíz de cualquier grado de un polinomio; con tal fin, conviene demostrar, que *si de un polinomio, ordenado con relación á una letra, se resta la potencia* m *de la suma de los* n *primeros términos de su raíz* m, *el primer término del resto será igual á* m *veces la potencia* m—1 *del primer término de la raíz, multiplicada por el que ocupa el lugar* n+1.

Siendo A la suma de los n primeros términos de la raíz, y B la de los demás, la raíz estará representada por $A+B$ y el polinomio propuesto por $(A+B)^m$, que, como se sabe (**124**), es igual á $A^m+mBA^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}B^2A^{m-2}+\ldots\ldots+B^m$; restando A^m de ambos miembros, resulta:

$$(A+B)^m-A^m=mBA^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}B^2A^{m-2}+\ldots\ldots+B^m.$$

Los términos de este resto son productos de los polinomios A y B, y como los términos de A tienen mayor exponente que los de

B, entre los términos del producto mBA^{m-1} se encontrará el que tenga mayor exponente, que será el primero del expresado producto, evidentemente igual á m veces el primero de B multiplicado por el primero de A^{m-1}; luego el primer término del resto es igual á m veces el producto de la potencia $m-1$ del primero de A, que es el primero de la raíz, por el primero de B, que es el que ocupa el lugar $n+1$ de dicha raíz.

Una vez demostrada esta proposición, si se tratara ahora de extraer la raíz del grado m de un polinomio P, que se supone ordenado con relación á una letra, se tendrá que el primer término de este polinomio deberá ser igual á la potencia m del primer término de la raíz (20): luego para tener el primer término de éste, no hay más que extraer la raíz m del primer término de P. Para deducir el segundo, se aplicará el teorema que se acaba de demostrar, según el cuál, si se resta de P la potencia m del primer término de la raíz, el primero del resto será igual á m veces el producto de la potencia $m-1$ del primero de la raíz, por el término que ocupa el lugar $n+1$, que en este caso será el segundo: por lo tanto, para tener el segundo término de la raíz, se dividirá el primero del resto por m veces la potencia $m-1$ del primero de la raíz. Aplicando el mismo principio para la determinación del tercer término, se tendrá, que restando del polinomio propuesto la potencia m de la suma de los dos primeros términos de la raíz, el primero del resto será igual á m veces la potencia $m-1$ del primero de la raíz, multiplicado por el tercero: luego el tercero se hallará, dividiendo el primero del resto por m veces la potencia $m-1$ del primero de la raíz. Del mismo modo podrían determinarse uno á uno todos los demás términos.

De lo expuesto se deduce, que para extraer la raíz m de un polinomio, *ordénese éste con relación á una letra, se extrae la raíz* m *de su primer término y se tendrá el primero de la raíz. Para determinar desde el segundo en adelante un término cualquiera, réstese del polinomio propuesto la potencia* m *de la suma de todos los términos hallados en dicha raíz, y el primero del resto se divide por* m *veces la potencia* m—1 *del primero de aquélla, y el cociente obtenido será el término siguiente de la raíz.*

127. Según esto, no será exacta la raíz del grado m de un polinomio, ordenado con respecto á una letra, si no la tuvieren sus términos primero y último, ni tampoco cuando se verifique

que el primer término de alguno de los restos no es divisible por m veces la potencia del grado $m-1$ del primer término de la raiz.

Aplicando la regla expuesta al caso en que $m=2$, se volvería á deducir el procedimiento (41) para extraer la raiz cuadrada de un polinomio; así como suponiendo $m=3$, se hallaría la regla (42) para obtener su raiz cúbica.

Cálculo de las expresiones radicales reales.

128. Cuando las cantidades radicales son numéricas, además de lo trabajoso que es, en la mayoría de los casos, la extracción de raíces, en no pocas ocasiones acontece, que los resultados sólo se obtienen con cierta aproximación, y por lo tanto, al tener que ejecutar operaciones con números que se hallan desprovistos de la debida exactitud, irán en aumento los errores cometidos, á medida que vaya creciendo el número de aquéllas. Por otra parte, según se ha visto (**41, 42** y **127**), no siempre es posible averiguar, cuáles son las raíces de determinadas expresiones algebraicas. Estas dificultades se evitan, haciendo que las antedichas raíces indicadas, intervengan directamente como elementos de cálculo, y por lo tanto, conservando en éste el signo que les es propio, pues así se consigue también que en el resultado final se tengan radicales relativamente sencillos cuyo valor pueda apreciarse con más facilidad y exactitud que el hallado, en el supuesto de haberse convertido desde luego las cantidades propuestas en otras, exentas de radical alguno.

La conveniencia de simplificar las expresiones radicales y la necesidad de considerar á éstas como elementos de cálculo, exijen de consuno que se tenga conocimiento de las diversas transformaciones de que aquellas expresiones son susceptibles, las cuales se fundan en el siguiente teorema.

129. *Un radical no se altera, aun cuando se multipliquen por un mismo número el índice y los exponentes de la cantidad subradical, ó se dividan por un divisor común.*

Se trata de hacer patente la igualdad $\sqrt[m]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{pn}}$.

En efecto, se sabe (37) que $\sqrt[m]{a^p}=a^{\frac{p}{m}}=a^{\frac{pn}{mn}}=\sqrt[mn]{a^{pn}}$; al comparar el segundo miembro con el primero, se hace ver que es cierta la primera parte de esta proposición, y si se compara el primero con el último, queda demostrada la segunda.

Este teorema permite simplificar un radical, cuando el índice y los exponentes de los factores subradicales tienen divisores comunes, lo que se conseguirá dividiéndolos por su M. C. D.

Ejemplo: $\sqrt[15]{8a^3b^6}=\sqrt[5]{2ab^2}$.

130. El mismo teorema facilita el medio de transformar radicales de diferente índice en otros de uno mismo, para lo cual *se hallará el* M. C. M. *de todos los índices siendo éste el índice común, y luego se multiplicarán los exponentes de los factores subradicales por el cociente que resulte de dividir el índice común por el del respectivo radical* (*).

Ejemplo: Reducir á un índice común las expresiones

$$\sqrt[6]{a^5c},\ \sqrt[3]{2ab^4},\ \sqrt{4bc^3}.$$

Como que el M. C. M. de los índices de estos radi-

(*) Conviene fijarse en la analogía que tiene esta manera de transformar las expresiones radicales, con la reducción de los quebrados á un común denominador.

cales es 6, se transformarán respectivamente estas cantidades en $\sqrt[6]{a^5c}$, $\sqrt[6]{4a^2b^8}$, $\sqrt[6]{64b^3c^9}$.

131. Se llaman *radicales semejantes* aquellas expresiones que, después de simplificadas y reducidas á su forma más sencilla, tienen igual índice y poseen además la misma parte subradical.

Ejemplo: $\sqrt[5]{4ab^2}$, $2c\sqrt[5]{4ab^2}$, $-3b\sqrt[5]{4ab^2}$: los productos $2c$ y $3b$ se denominan *coeficientes.*

Hay ocasiones en que cantidades que no parecen al pronto semejantes, pueden ser transformadas en otras que realmente lo sean, y esto se consigue sin más que simplificando las expresiones propuestas y extrayendo la raíz de aquellos factores, que la tengan exacta (41).

Ejemplo:

$$\sqrt[10]{16a^2b^4},\ \sqrt[5]{128\,ab^2c^5},\ -\sqrt[5]{972ab^7}.$$

$$\sqrt[10]{16a^2b^4}=\sqrt[5]{4ab^2}.$$

$$\sqrt[5]{128\,ab^2c^5}=\sqrt[5]{32.4ab^2c^5}=2c\sqrt[5]{4ab^2}.$$

$$-\sqrt[5]{972\,ab^7}=-\sqrt[5]{243.4ab^5b^2}=-3b\sqrt[5]{4ab^2}.$$

132. Las reglas operativas aplicadas á las cantidades radicales son las mismas, que las puestas en práctica con las expresiones literales racionales, supuesto que los razonamientos de que se hizo uso, al deducir estas reglas tienen la suficiente generalidad para hacerlas extensivas al presente caso.

Para mayor sencillez en los ejemplos, se supondrá que son monomias las expresiones subradicales que se consideran.

La suma y la resta de las cantidades radicales deberán efectuarse, según se acaba de decir, del mismo modo que si fueran expresiones algebraicas racionales, para lo cual se consideraría á cada radical como si fuese un monomio y se procedería á reducir los términos que hubiere semejantes.

Ejemplo 1.º

$$\left(5a\sqrt[4]{a^3b}+8\sqrt[3]{6a^2b}\right)+\left(3a\sqrt[7]{b^5c^3}-8\sqrt{ab}+2b\sqrt[6]{9a^5c}\right)+$$
$$+\left(7ab\sqrt[4]{a^3b}-4a^3\sqrt{ab}+c\sqrt[6]{9a^5c}\right)=5a\sqrt[4]{a^3b}+8\sqrt[3]{6a^2b}+$$
$$+3a\sqrt[7]{b^5c^3}-8\sqrt{ab}+2b\sqrt[6]{9a^5c}+7ab\sqrt[4]{a^3b}-4a^3\sqrt{ab}+c\sqrt[6]{9a^5c}=$$
$$=(5+7b)a\sqrt[4]{a^3b}+8\sqrt[3]{6a^2b}+3a\sqrt[7]{b^5c^3}-(8+4a^3)\sqrt{ab}+$$
$$+(2b+c)\sqrt[6]{9a^5c}.$$

Ejemplo 2.º

$$\left(3a\sqrt[7]{b^5c^3}-8\sqrt{ab}+2b\sqrt[6]{9a^5c}\right)-\left(7ab\sqrt[4]{a^3b}-4a^3\sqrt{ab}+c\sqrt[6]{9a^5c}\right)=$$
$$=3a\sqrt[7]{b^5c^3}-8\sqrt{ab}+2b\sqrt[6]{9a^5c}-7ab\sqrt[4]{a^3b}+4a^3\sqrt{ab}-c\sqrt[6]{9a^5c}=$$
$$=3a\sqrt[7]{b^5c^3}+(4a^3-8)\sqrt{ab}+(2b-c)\sqrt[6]{9a^5c}-7ab\sqrt[4]{a^3b}.$$

133. Se vió (39 y 46) la manera de multiplicar y dividir cantidades radicales, que tenían el mismo índice; de modo que, según esto, en el caso de que los tuvieren diferentes, bastaría reducirlas á un común índice, y luego proceder con los radicales que resultasen, de la manera que entonces se dijo.

Ejemplo 1.º

$$\sqrt{5ab}\times7\sqrt[3]{a^2bc^2}\times11\,c\sqrt[6]{a^5b^2c}=$$
$$=\sqrt[6]{5^3a^3b^3}\times7\sqrt[6]{a^4b^2c^4}\times11c\sqrt[6]{a^5b^2c}=77c\sqrt[6]{125a^{12}b^7c^5}.$$

Ejemplo 2.º

$$8c\sqrt[12]{a^{11}b^7c}:2\sqrt[4]{a^2b}=8c\sqrt[12]{a^{11}b^7c}:2\sqrt[12]{a^6b^3}=4c\sqrt[12]{a^5b^4c}.$$

Para elevar una cantidad radical á una potencia, *se multiplican los exponentes de la cantidad subradical por el exponente de la potencia, ó, cuando sea posible, se divide el índice del radical por el exponente de la potencia.*

En efecto, si se quisiera elevar $\sqrt[m]{a^n}$ á la potencia del grado p, se tendría, según lo dicho (39), que

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^p=\sqrt[m]{a^n}\times\sqrt[m]{a^n}\times\sqrt[m]{a^n}.....=\sqrt[m]{(a^n)^p}=\sqrt[m]{a^{np}}.$$

Si ahora se supone que m fuera múltiplo de p y por lo tanto $m=pq$, resultaría que

$$\sqrt[m]{a^{np}}=\sqrt[pq]{a^{np}}=\sqrt[q]{a^n}\text{; luego }\left(\sqrt[pq]{a^n}\right)^p=\sqrt[q]{a^n}.$$

Donde se ve que este segundo procedimiento es preferible al primero, en atención á que da desde luego por resultado un radical de menor índice.

Ejemplo 1.º $\left(\sqrt[7]{3a^5}\right)^4=\sqrt[7]{(3a^5)^4}=\sqrt[7]{81a^{20}}=a^2\sqrt[7]{81a^6}.$

Ejemplo 2.º. $\left(\sqrt[8]{3a^5}\right)^4=\sqrt{3a^5}.$

Para extraer una raíz de una cantidad radical, *se multiplica el índice del radical por el de la raíz que se quiere extraer, ó cuando sea posible, se dividen los exponentes de la cantidad subradical por el índice de la raíz.*

Se trata de demostrar que $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}}=\sqrt[mn]{a^p}$..... (1).

En efecto, esta igualdad es cierta, supuesto que

$$\left(\sqrt[mn]{a^p}\right)^n=\sqrt[mn]{a^{pn}}=\sqrt[m]{a^p},$$

en donde se ve que el segundo miembro de la igualdad (1), al elevarlo á la potencia n, reproduce la expresión que se halla debajo del radical del grado n en su primer miembro (36).

Si fuera $p=nq$, la igualdad (1) podría escribirse

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{nq}}}=\sqrt[mn]{a^{nq}}=\sqrt[m]{a^q}.$$

Ejemplo 1.º $\sqrt[3]{\sqrt{3a^5bc}}=\sqrt[6]{3a^5bc}.$

Ejemplo 2.º $\sqrt[3]{\sqrt[4]{8a^3b^6}\sqrt[4]{2ab^2}}.$

De la regla que se acaba de exponer se desprende: 1.º Que en una serie de raíces sucesivas, el cambio de orden de estas raíces no altera el resultado. 2.º Que cuando el índice de un radical no sea un número primo, podrá descomponerse en factores y hallar sucesivamente las raíces cuyos índices sean éstos. Lo cual manifiesta que sin necesidad de recurrir á los logaritmos, puede determinarse el valor de las raíces cuyos índices sean potencias de 2, de 3 ó se compongan de un producto de ambos factores.

Nota.—En estos elementos se supone, que cada radical no tiene sino su *valor aritmético*, ó sea el que resulta de extraer la raíz del valor absoluto de la cantidad subradical (*).

(*) Se ha visto (38) que las raíces de segundo grado tienen dos valores, y en Algebra superior también se demuestra, que todo radical, algebraicamente considerado, tiene tantos valores como unidades posea el índice de su raíz.

Exponentes negativos y fraccionarios.

134. Las reglas operativas que se han dado (CAPÍTULO II), cuando los exponentes de las cantidades que intervenían en el cálculo eran enteros y positivos, son aplicables también al caso en que los exponentes sean negativos ó fraccionarios, según se puede demostrar.

EXPONENTES NEGATIVOS.—Se ha visto (30) que toda cantidad con exponente negativo, es igual al cociente que resulta de dividir la unidad por aquella cantidad con exponente hecho positivo; de donde se deduce, que transformando toda cantidad con exponente negativo en su equivalente, que contenga esa misma cantidad con el exponente positivo, se podrá efectuar la operación propuesta, y comprobar si el resultado obtenido se halla ó no conforme con la respectiva regla, que de antemano se conoce.

Las de la suma y resta se comprende que serán las mismas ya conocidas (CAPÍTULO II), y fácilmente se explica que así sea, por cuanto estas operaciones no exigen modificación alguna en los exponentes de las cantidades literales, que en ellas intervienen.

En la multiplicación se tiene

$$b^{-m} \times b^{-n} = \frac{1}{b^m} \times \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^{m+n}} = b^{-m-n},$$

idéntico resultado al que se hubiera obtenido, sumando algebraicamente los exponentes de los dos factores propuestos, que, como se ve, no son sino potencias de una misma base.

Del mismo modo se demostraría, que $b^m \times b^{-n} = b^{m-n}$, y que $b^{-m} \times b^n = b^{n-m}$.

Si se tratara de dividir $b^{-m} : b^{-n}$, se tendría análogamente

$$b^{-m} : b^{-n} = \frac{1}{b^m} : \frac{1}{b^n} = \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} = b^{-m-(-n)},$$

en donde se ve, que el exponente de la base en el resultado, es una potencia de ésta, cuyo grado se obtiene restando algebraicamente el exponente del divisor del que posee el dividendo.

De la misma manera se deduciría, que $b^{-m} : b^n = b^{-m-n}$, y $b^m : b^{-n} = b^{m+n}$.

En la elevación á potencias, resulta

$$(b^{-n})^m=\left(\frac{1}{b^n}\right)^m=\frac{1}{b^{mn}}=b^{-mn},$$

del mismo modo

$$(b^{-n})^{-m}=\left(\frac{1}{b^n}\right)^{-m}=\frac{1}{\left(\frac{1}{b^n}\right)^m}=\frac{1}{\frac{1}{b^{nm}}}=b^{mn}.$$

Luego también aquí tiene aplicación la regla dada (33).

En la extracción de raíces, aparece

$$\sqrt[m]{b^{-n}}=\sqrt[m]{\frac{1}{b^n}}=\frac{1}{\sqrt[m]{b^n}}=\frac{1}{b^{\frac{n}{m}}}=b^{-\frac{n}{m}}$$

resultado que se halla conforme con la regla conocida (37).

135. Exponentes fraccionarios.—Toda cantidad con exponente fraccionario se sabe (37), equivale á una raíz de la expresada cantidad, en la que el índice es igual al denominador del quebrado, la cual deberá hallarse elevada á una potencia, cuyo exponente es el respectivo numerador; de aquí se infiere, que transformando las cantidades que tengan exponentes fraccionarios en radicales, y efectuando con éstos la operación que se desee, se verá en el resultado su conformidad con la respectiva regla ya practicada.

Desde luego puede asegurarse que las de la adición y sustracción son las mismas ya expuestas (Capítulo II), lo cual se comprende suceda, atendiendo á que estas operaciones no requieren alteración en los exponentes de las cantidades literales, que se hayan de sumar ó restar.

En la multiplicación se tendría,

$$b^{\frac{m}{n}}\times b^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{b^m}\times\sqrt[q]{b^p}=\sqrt[nq]{b^{mq+np}}=b^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

por transformaciones análogas se deduciría, que $b^{\frac{m}{n}}\times b^p=b^{\frac{m}{n}+p}$ y $b^m\times b^{\frac{p}{q}}=b^{m+\frac{p}{q}}$.

Estos resultados manifiestan, que para efectuar la multiplicación de dos potencias de una misma base, en las cuales uno ó los dos exponentes son fraccionarios, se formará una potencia de la citada base, cuyo exponente será la suma de los que corresponden á aquellas potencias.

En la división resultaría,

$$b^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{b^m}:\sqrt[q]{b^p}=\sqrt[nq]{b^{mq-np}}=b^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};$$

siguiendo el mismo procedimiento, se hallaría que $b^m:b^{\frac{p}{q}}=b^{m-\frac{p}{q}}$ y $b^{\frac{m}{n}}:b^p=b^{\frac{m}{n}-p}$.

Estas conclusiones dicen, que para dividir dos potencias de una misma base, cuando uno ó los dos exponentes sean fraccionarios, se formará una potencia de dicha base, cuyo exponente estará dado por la diferencia que existe entre los exponentes del dividendo y divisor.

En la elevación á potencias, se vería,

$$\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{b^m}\right)^p}=\sqrt[nq]{b^{mp}}=b^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}};$$

del mismo modo se probaría que $\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^p=b^{\frac{m}{n}\times p}$ y que $(b^m)^{\frac{p}{q}}=b^{m\times\frac{p}{q}}$.

En donde se ve que no se ha hecho sino aplicar la regla dada (33).

En la extracción de raíces, resulta:

$$\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[pn]{a^m}=a^{\frac{m}{n}:p}.$$

Esto también se halla conforme con la respectiva regla (37).

Como resumen de las conclusiones que se acaban de deducir, queda hecho patente que *las reglas operativas aplicables á las cantidades afectadas de exponentes negativos ó fraccionarios, son exactamente las mismas que las que se tienen dadas para el caso de que los exponentes fueran enteros y positivos.*

Ligera idea acerca de las expresiones imaginarias.

136. Se vió (38) que estas cantidades no representan ningún valor numérico y que, dentro del Algebra elemental, no son sus-

ceptibles de admitir interpretación alguna; en esta atención, cuando al resolver un problema algebraico, se obtenga para valor de la incógnita una raíz imaginaria, se considerará éste inadmisible y por lo tanto absurda la cuestión propuesta. Mas como quiera que los antedichos resultados son en realidad expresiones algebraicas ó numéricas, de aquí que se las considere también como elementos de cálculo, habiéndose convenido en hacer á ellas extensivas las mismas reglas operativas, que se tienen expuestas al tratar de las cantidades reales.

Antes de proceder al cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado, que son las únicas de que aquí se va á tratar, conviene que sean transformadas con sujeción al siguiente teorema:

137. *Todo monomio imaginario de segundo grado es igual á la raíz cuadrada aritmética de la cantidad subradical, multiplicada por* $\sqrt{-1}$.

En efecto: $\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2\times -1}=a\sqrt{-1}$.

En la suma y en la resta se facilita la reducción de términos que pueden suponerse semejantes, desde luego que se considere en ellos á $\sqrt{-1}$ como factor común.

Así: $\sqrt{-A}\pm\sqrt{-B}=(\sqrt{A}\pm\sqrt{B})\sqrt{-1}$.

138. En las operaciones restantes conviene estar familiarizado con la determinación de las potencias de $\sqrt{-1}$, las cuales se observa que están repetidas de cuatro en cuatro:

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1};\ (\sqrt{-1})^2=-1;\ (\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})=-\sqrt{-1};$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2=+1.$$

Según esto, si ahora se deseara hallar una potencia cualquiera de $\sqrt{1}$, se dividiría el exponente de la potencia por 4, y el residuo de la división manifestará cuál de las cuatro primeras potencias es el resultado que se busca.

En efecto:

$$(\sqrt{-1})^{4m}=((\sqrt{-1})^4)^m=1$$
$$(\sqrt{-1})^{4m+1}=(\sqrt{-1})^{4m}\times\sqrt{-1}=\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{4m+2}=(\sqrt{-1})^{4m}\times(\sqrt{-1})^2=-1$$
$$(\sqrt{-1})^{4+3}=(\sqrt{-1})^{4m}\times)\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}.$$

Ejemplo: $(2a^3\sqrt{-1})^9=512a^{27}\sqrt{-1}$.

Cuando se tiene *un binomio de la forma* $a\pm b\sqrt{-1}$, *compuesto de una cantidad* a *real y de otra* $b\sqrt{-1}$ *imaginaria, siempre representará una expresión imaginaria,* pues si $a\pm b\sqrt{-1}$ fuera igual á una cantidad real c, se tendría restando de ambas a que $\pm b\sqrt{-1}=c-a$; y por lo tanto, una cantidad imaginaria equivaldría á otra real, lo que desde luego es inadmisible.

Las expresiones imaginarias de la forma $a+b\sqrt{-1}$ y $a-b\sqrt{-1}$ que, como se ve, únicamente se diferencian en el signo que antecede al radical, se dice que son *conjugadas.*

Aun cuando parezca absurdo, obsérvese que la suma y el producto de dos cantidades imaginarias, conjugadas es una cantidad real; lo cual se explica suceda, atendiendo á que en la adición se destruyen los dos únicos términos afectados del factor $\sqrt{-1}$, y en la multiplicación hay necesidad además de elevar al cuadrado este factor, que da por resultado la cantidad real -1 (*).

Ecuaciones bicuadradas.

139. La ECUACIÓN BICUADRADA es de cuarto grado y tiene la forma $x^4+bx^2+c=0$.

Si en ésta se hace $x^2=y$, resultará $x^4=y^2$, y por lo tanto la ecuación bicuadrada se habrá transformado en $ay^2+by+c=0$, ó sea en una completa de 2.º grado, cuyas raíces estarán dadas por $y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, de donde se deduce que $x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, lo cual mani-

(*) Estas contradicciones y otras análogas que se suelen presentar en el cálculo algebraico de las expresiones imaginarias, son una consecuencia de haber hecho extensivas á símbolos, que en realidad no representan valor alguno, las reglas que se tienen deducidas, en el supuesto de que eran reales las cantidades con que se operaba.

fiesta que la incógnita de la ecuación propuesta tiene cuatro valores iguales dos á dos pero de signo contrario.

Ecuaciones de 2.º grado con más de una incógnita.

140. Una ecuación completa de segundo grado con dos incógnitas, tiene la forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$; si se quisiera resolver esta ecuación, no habría sino despejar una de las dos incógnitas en función de la otra, para lo cual, suponiendo á ésta como conocida, se podría transformar la ecuación propuesta en

$$ax^2+(by+d)x+(cy^2+ey+f)=0;$$

resolviendo esta ecuación completa de segundo grado, se tendría,

$$x=\frac{-(by+d)\pm\sqrt{(by+d)^2-4a(cy^2+ey+f)}}{2a};$$

dando ahora valores arbitrarios á y en este segundo miembro, se deducirán los correspondientes de x, lo cual manifiesta que el número de soluciones sería ilimitado.

Cuando se trata de resolver un sistema de ecuaciones de segundo grado con más de una incógnita, lo más frecuente es que, al efectuar la procedente eliminación, resulten ecuaciones de un grado superior al segundo, en cuyo caso, la investigación de sus raíces se hallaría fuera del dominio del Álgebra elemental.

FIN.

ÍNDICE.

ERRATAS.

Pág.	Lín.	Dice	Debe decir
35	30	cuadrados	cubos
38	21	$3a^2cd\sqrt[3]{2bc}$	$3a^2cd\sqrt[3]{2b^2c}$
38	27	$\sqrt[5]{ab^3c}$	$\sqrt{5ab^3c}$
44	24	$360a^8b^4c^3$	$180a^8b^4c^3$
44	25	$\frac{100\,a^5b^2c^2m}{360a^8b^4c^3}$	$\frac{50\,a^5b^2c^2m}{180a^8b^4c^3}$
44	25	$\frac{126an}{360a^8b^4c^3}$	$\frac{63an}{180a^8b^4c^3}$
44	25	$\frac{240cp}{360a^8b^4c^3}$	$\frac{120cp}{180\,a^8b^4c^3}$
54	9	es	sería
60	3	$-\frac{15}{8}x$	$+\frac{15}{8}x$
67	3	mayor	menor
89	14	$4ax^2+4abx-4ac;$	$4a^2x^2+4abx=-4ac;$
90	8	$x=\frac{-6+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
90	8	$x=\frac{-6-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
108	16	$\frac{1}{q^2}$	$\frac{1}{r^2}$
128	17	(4)	(1)