ELEMENTOS
DE
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

POR

EL LICENCIADO Y CATEDRÁTICO NUMERARIO
DE ESTA ASIGNATURA
EN EL INSTITUTO PROVINCIAL DE SEVILLA

Rodrigo R. SANJURJO

NUEVA EDICION, CORREGIDA Y AUMENTADA

SEVILLA
Imp. de GIRONÉS, ORDUÑA Y CASTRO, Lagar 3.
1880

Sr. D. Francisco García Portillo,

Doctor en Ciencias, Licenciado en Jurisprudencia, Académico numerario de la de Buenas Letras de Sevilla, Catedrático de Matemáticas del Instituto provincial de la misma, etc.

Querido amigo y maestro: Habiendo estrechado los lazos del compañerismo los que habia entre el profesor y el discípulo, creo un deber, muy grato para mí de cumplir, el dedicarle este trabajo, al efectuar el cual he tenido muy presentes sus advertencias y experimentados consejos. Dígnese V. aceptarlo con la misma buena voluntad con que se lo dedica su discípulo y compañero

El Autor.

ÍNDICE

DE LOS CAPÍTULOS CONTENIDOS EN ESTA OBRA

PÁGS.

ARITMÉTICA

ÁLGEBRA

INTRODUCCION

I. *Se llaman Ciencias Matemáticas, ó Matemática en general, á aquel grupo de conocimientos que se ocupa del estudio de las leyes y propiedades de la cantidad.*

II. *Cantidad se define por algunos, como toda porcion limitada del tiempo ó del espacio.*

Y en efecto; siendo el tiempo y el espacio *infinitos* y *divisibles*, ninguna cantidad que se considere está fuera de estos conceptos: por su cualidad de *infinitos*, el hombre no puede abarcar el entero conocimiento del tiempo y el espacio absolutos; por esto las cantidades que considera son esencialmente limitadas, es decir, partes de uno ó de otro.

Tambien se ha definido la cantidad diciendo que es *todo lo susceptible de aumento y disminucion.*

Pero si bien esta es una de las cualidades inherentes de la cantidad, no están en ella comprendidas todas las que constituyen el concepto definido y establecen sus diferencias características; así es que los afectos del ánimo son susceptibles de aumento y disminucion, y evidentemente no son cantidades sometidas á las leyes de la Matemática.

Por último, y eludiendo ámbas definiciones, *otras escuelas dicen que la idea de cantidad es simple y conocida de los hombres y por ella distinguen lo singular de lo plural, lo uno de lo múltiplo,* cuya explicacion es rechazada por los que no admiten más que conocimientos adquiridos.

III. Cualquiera que sea la definicion que se considere más admisible, y suponiendo que lo sea la primera, el conocimiento completo de cualquier cantidad, lo adquieren los hombres por medio de una *comparacion* que establecen entre la que tratan de conocer, y otra tambien limitada y fija, que les es conocida.

Expliquemos esto con ejemplos.

Si trato de conocer qué cantidad están distantes dos puntos del espacio, procedo del siguiente modo: tomo una longitud cualquiera conocida y conveniente, á la cual llamo *vara, metro, etc.*, y veo cuántas veces está contenida en la distancia que trato de apreciar.

Tambien, si quisiera determinar la cantidad de trigo de un granero, tomaria una capacidad arbitraria y fija y veria las veces que la cantidad de trigo del granero la contenia.

IV. Analizando estos ejemplos, y cualesquiera otros que se pusieran, se tiene que, para formar idea completa de una cantidad, se necesita:

1.º *Que sea limitada y contenga exactamente á algunas de las partes en que se puede considerar dividida.*

2.º *Que se fije la parte de la cantidad que ha de servir de término de comparacion.*

3.º *Que se averigüe cuántas veces contiene, á esta parte, la cantidad que se trata de conocer.*

V. *Se llama unidad, aquella parte de la cantidad escogida convenientemente en cada caso, como término de comparacion.*

VI. La comparacion que se ha explicado se llama tambien *medida* de las cantidades.

VII. La cantidad como espacio tiene ciertas cualidades de forma y posicion, distintas de las de divisible y comparable, pero, en tan íntima union y estrechas relaciones unas con otras, que del conocimiento de las últimas se viene al de las primeras, y de aquí el que entren en el dominio de la Matemática. Tiene, pues, esta ciencia muchas partes ó ramas que, si bien en sus primeros pasos parecen separadas, á medida que se elevan en sus teorías, se unen en un solo y general conocimiento de la cantidad. De aquí el llamarse Matemáticas, si se consideran las ramas que para ordenar su estudio se tratan sucesivamente; y Matemática si se consideran sintéticamente y como grupo de conocimientos sujeto á los mismos principios y leyes.

VIII. Las ramas elementales de las Matemáticas se nombran: *Aritmética*, *Álgebra* y *Geometría*.

La Aritmética comprende el tratado de las cantidades, representadas por símbolos de valor fijo; y se llama *Álgebra* si su *representacion es por otros símbolos que no tienen desde luego un valor designado: Geometría es la parte que estudia las propiedades de forma y extension de los espacios limitados.*

IX. Las Matemáticas se llaman tambien *Ciencias exactas*, cuyo nombre han merecido por la evidencia é inmutabilidad de los principios en que se apoyan y la demostracion rigurosa de los que de ellos se derivan.

X. Para más claridad en su exposicion se dan distintos nombres á las verdades que contiene: éstos son los de *axioma*, *postulado*, *teorema*, *lema*, *escolio*, *corolario* y *problema*.

XI. Se llaman *axiomas* aquellas verdades cuyo enunciado basta para convencernos de su evidencia, sin que razonamiento alguno haga más clara su percepcion; así no tienen ni necesitan de demostracion.

XII. Se llama *postulado* una verdad casi tan evidente como el axioma, necesaria para el fundamento de algun teorema, la cual se admite sin demostracion, porque las dadas hasta ahora causan ménos convencimiento que su simple enunciado.

XIII. *Teorema* es una verdad que admite y necesita de demostracion. Consta, pues, de dos partes, á saber: *enunciado* y *demostracion*.

El enunciado es la manera de expresar la verdad de que se trata y consta de dos partes: *hipótesis* y *conclusion*.

Se llama *hipótesis* ó *suposicion de un teorema*, á aquellas condiciones del mismo que se dan como ciertas; y se llama *tésis* ó *conclusion* la consecuencia de la hipótesis, y la cual forma el objeto de la demostracion. *Demostracion* es un raciocinio que evidencia la verdad de la conclusion ó tésis.

Teorema recíproco de otro es aquel cuyo enunciado tiene por hipótesis la tésis del primero y por tésis su hipótesis. No todos los recíprocos son ciertos, por lo que necesitan de demostracion.

XIV. *Lema* es un teorema que sirve para facilitar la demostracion de otro.

XV. *Corolario* es una verdad que se deriva inmediatamente de un teorema, ó por un razonamiento muy sencillo.

XVI. *Escolio* es una observacion ó llamada á la atencion del lector sobre ciertas propiedades que deben tenerse presentes, principalmente para la resolucion de problemas.

XVII. *Problema* es una proposicion por la que se pide obtener un resultado, mediante condiciones conocidas á las cuales ha de satisfacer.

Consta, pues, de un procedimiento para obtener el resultado pedido, que se llama *resolucion;* de un resultado que se llama *solucion,* y de una demostracion de la exactitud de ésta.

En todo problema las condiciones dadas se llaman *datos* y el resultado que se busca *incógnita.*

ARITMÉTICA

PRELIMINARES

1. *Aritmética es la ciencia de los números; se propone, por tanto, resolver de un modo breve y sencillo todas las cuestiones referentes á su representacion y composicion y descomposicion.*

2. *Número es el resultado de comparar la cantidad con la unidad.*

3. Los números pueden ser *enteros, fraccionarios* é *inconmensurables.*

4. En efecto, la unidad absoluta é indivisible, segun la Metafísica, principio y orígen de todos los números, no está en el conocimiento de los hombres.

5. La *unidad aritmética*, que *es una porcion conocida de las cantidades,* y cuya cualidad esencial es la de *divisible,* y por tanto la de *comparable* con otra de su especie, da, al medir, orígen á varios resultados.

1.º Si la cantidad que se mide contiene exactamente á la unidad escogida resulta el número *entero.*

2.º Si la cantidad que se mide no contiene exactamente á la unidad escogida, pero sí á alguna de las partes en que se puede considerar dividida, da orígen á los números *fraccionarios.*

3.º Si la cantidad que se mide no contiene exactamente á la unidad ni á las partes en que se considera dividida, de modo que no tiene expresion exacta en entero ni en fraccionario, se llama *inconmensurable.*

En resúmen:

6. Número *entero* es el que consta de unidades exactas; *fraccionario* el que se compone de partes de la unidad, é *inconmensurable* el que no puede expresarse por entero ó fraccionario.

7. Hay tambien *inconmensurabilidad* entre un número y ciertas partes de la unidad, cuando por medio de esas partes no puede expresarse exactamente ese número.

8. Por tanto la unidad que se emplea para expresar la cantidad por medio de números, produce resultados muy diversos. Así una misma cantidad puede tener expresion entera ó fraccionaria y hasta ser inconmensurable, segun la unidad que se tome para medirla. Esto lo confirma cualquier ejemplo, pues una distancia no tendrá la misma expresion si se mide con el *metro* que con la *legua*, y pudiera suceder que contuviese al *metro* várias veces exactamente, en cuyo caso la representacion numérica de la distancia sería un número entero; pero que medida con la *legua* no la contuviese sino á alguna parte de ella, y entónces su expresion sería una reunion de partes de la *legua* ó sea *una fraccion de ésta.* Por último, puede concebirse que no contuviese al *metro* ó á la *legua* ni á ninguna de sus partes exactamente, y en este caso su expresion numérica no podria hacerse sin error por número entero ó fraccionario, y entónces se dice que la *distancia,* y el *metro,* ó la *legua,* son inconmensurables; lo que significa tanto como que no tienen *medida* ó *unidad comun.*

9. Para facilitar el estudio de los números, la Aritmética los considera en *abstracto,* ó sea sin asignarles especie determinada; y se llaman *concretos* cuando en algun ejemplo ó problema determina su especie.

10. En los números concretos se llaman *homogéneos* los que pertenecen á la misma especie, y *heterogéneos* los que son de distinta; así 4 kilógramos y 6 kilógramos son números concretos homogéneos, y 4 kilógramos y 8 metros son heterogéneos.

CAPÍTULO I

Representacion de los números enteros, ó numeracion.

11. *Numeracion de enteros es la manera breve y sencilla de expresar estos números.*

12. La generacion de los números enteros es por agregacion sucesiva de unidades, de modo que si á una unidad le agregamos otra, ya se forma un número entero; si á éste se agrega otra, resulta un tercero, y así sucesivamente; se concibe, pues, que la *serie de los números enteros es ilimitada,* toda vez que por grande que sea un número siempre puede considerarse que hay otro siguiente, formado por la agregacion á éste de una unidad.

13. La numeracion, por tanto, no ha podido consistir en nombrar todos los números posibles, sino en dar reglas para hacerlo con pocas palabras, sujetas á un sistema que ayude á la memoria, respecto de números suficientemente grandes para satisfacer las necesidades de la práctica.

14. De dos maneras pueden expresarse los números, á saber: de palabra ó por escrito; así la numeracion es *verbal* ó *escrita.*

§ I. Numeracion verbal

15. La numeracion verbal acostumbrada es la llamada decimal, porque en este sistema *siempre que se reunen diez unidades de un órden se considera que forman una nueva unidad que se llama del órden superior inmediato* y cuenta en todos los órdenes con unos mismos nombres, añadiéndoles el del órden en que se está. Así el cuadro de esta numeracion es:

16. CUADRO DE LA NUMERACION VERBAL.

PRIMER ÓRDEN.—*Unidades simples.*

Uno.	*Cuatro.*	*Siete.*
Dos.	*Cinco.*	*Ocho.*
Tres.	*Seis.*	*Nueve.*

SEGUNDO ÓRDEN.—*Decenas.*

	Nombre usual.
Una decena	diez.
Dos »	veinte.
Tres »	treinta.
Cuatro »	cuarenta.
Cinco »	cincuenta.
Seis »	sesenta.
Siete »	setenta.
Ocho »	ochenta.
Nueve »	noventa.

TERCER ÓRDEN.—*De las centenas.*

Una centena.	ciento.
Dos »	doscientos.
Tres »	trescientos.
Cuatro »	cuatrocientos.
» »	»
Nueve »	novecientos.

CUARTO ÓRDEN.—*De los millares.*

Un millar	mil.
Dos »	dos mil.
Tres »	tres mil.
» »	»
Nueve »	nueve mil.

Quinto órden.—*De las decenas de millar.*

Una decena de millar.	diez mil.
Dos » » »	veinte mil.
Tres » » »	treinta mil.
» » » »	»
Nueve » » »	noventa mil.

Sexto órden.—*De las centenas de millar.*

Una centena de millar.	cien mil.
Dos » » »	doscientos mil.
Tres » » »	trescientos mil.
» » » »	»
Nueve » » »	novecientos mil.

Sétimo órden.—*Unidades de millon.*

Un millon.	El mismo.
Dos »	»
Tres »	»
» »	»
Nueve »	»

17. Este cuadro indica que con la admision de los órdenes no hay que emplear más nombres que los de *uno, dos*.... etc., hasta *nueve* y el de los *órdenes* de que se trate.

18. ¿Y cómo se llenan los intérvalos de una *decena* á *otra*, de una *centena* á *otra*, de un *millar* á *otro*, etc.?

Para ello se ha seguido en la expresion el método natural de la formacion de los números. Así de una decena á otra se forman los números por la agregacion sucesiva de unidades; pues segun esto, se nombran primero las decenas y despues las unidades, que se consideren agregadas: así para decir *una decena y siete unidades* se expresan juntos ámbos nombres, y se dice *diez y siete*. Lo mismo se ejecuta en todos los intérvalos, pues debe observarse que cuando se llega á las *decenas ya se* *sabe el nombre de todos los números intermedios de un grupo de decenas á otro; cuando se llega á las centenas se saben los de una á otra, y así sucesivamente.*

19. Como los primeros números tienen mucho uso en el comercio de los hombres, y el lenguaje tiende siempre á ser lo más breve posible, á esta numeracion sistemática se le han introducido alteraciones de nombres que el uso ha consagrado. Así se dice *once, doce, trece, catorce, quince,* en vez de *diez y uno, diez y dos,* etc., y lo mismo respecto de otras variaciones que van señaladas en el cuadro anterior.

20. Siguiendo los principios expuestos, el *órden octavo* se llama de las *decenas de millon;* el *noveno,* de las *centenas de millon;* el *décimo,* de los *millares de millon;* el *undécimo,* de las *decenas de millar de millon,* y el *duodécimo,* de las *centenas de millar de millon.*

21. Si hubiera necesidad de más nombres se forman otros seis *órdenes* con las palabras del primero, y se llaman todos de los *billones:* los *seis siguientes* son de los *trillones,* etc.

22. Nunca hay necesidad de nombrar números tan grandes; pero si existiera, con una sola palabra nueva para cada grupo de seis órdenes, y esto junto con los nombres ya conocidos de cada órden, y los de los nueve números primeros, bastaria para satisfacer á la expresion de cualquier cantidad.

23. *Los números se enuncian empezando por los órdenes superiores* y el nombre del *grupo de seis órdenes* no se dice sino al final de los seis y *los de cada órden no se dicen sino de tres en tres.*

24. Sirva de ejemplo lo siguiente. Para enunciar un número compuesto de *nueve centenas* de millar de millon, *tres* decenas de millar de millon, *un* millar de millon, *cinco* centenas de millon, *seis* decenas de millon, *siete* millones, *ocho* centenas de millar, *cuatro* decenas de millar, *cinco* millares, *dos* centenas, *seis* decenas y *cuatro* unidades, se expresaria brevemente en virtud de no decir el nombre comun al grupo de *seis órdenes* sino una *vez al final* de ese grupo, y el de cada *tres*

órdenes reunidos, tambien al final. Así se diria: Novecientos treinta y un (mil) quinientos sesenta y siete (MILLONES) ochocientas cuarenta y cinco (mil) doscientas sesenta y cuatro (UNIDADES).

§ II. NUMERACION ESCRITA

25. Fácilmente se habrá notado en la numeracion verbal que con las nueve palabras desde *uno* á *nueve* hay bastante para expresar lo que puede haber en el sistema decimal, en cada uno de sus órdenes, y que basta añadirles á estos nombres el del órden que se quiere expresar.

En la *numeracion escrita, ó sea en el sistema para expresar con signos á los números,* se concibe fácilmente que si á cada una de *estas nueve palabras se le asigna un símbolo que la represente*, sólo falta el hallar la manera de que estos mismos símbolos puedan indicar el órden que deben representar.

26. Estos signos, que traducen las palabras desde *uno* á *nueve* y que tambien se llaman *números dígitos, cifras, notas* ó *guarismos* son los siguientes, tomados del árabe: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

En cuanto á la manera de que una misma nota ó guarismo represente órdenes distintos, el medio más sencillo de conseguirlo ha sido, el de escribir los números poniendo los guarismos unos al lado de los otros, en línea horizontal y con arreglo al principio siguiente.

27. *Toda cifra puesta á la izquierda de otra representa unidades del órden superior inmediato.* Con esto cada órden tiene su lugar determinado en la escritura, pues una sola cifra serán *unidades simples;* si á su izquierda se escribe otra nota ésta será del órden de las *decenas;* si á la izquierda de las decenas se pone otra, ésta será del de las *centenas,* y así sucesivamente.

28. Como quiera que el órden representado por un guarismo depende del lugar que ocupa respecto al de las unidades

simples, ha habido necesidad de inventar *una cifra sin valor por sí misma* llamada *cero* (cuya figura es 0), *que sirve para ocupar aquellos lugares en la escritura que no tienen unidades asignadas.*

29. En *resúmen las cifras del sistema decimal son diez:* nueve *significativas* y una *insignificativa.* Estas cifras tienen en los números escritos *dos valores:* uno *absoluto,* segun su figura, y otro *relativo* ó de *órden,* segun el lugar que ocupan.

30. Los *números se escriben* á medida que se expresan, de izquierda á derecha, ó sea empezando por las cifras que representan los órdenes superiores; ocupando con ceros los lugares que se omiten en la expresion hablada.

31. El principio que da valor relativo á las cifras puede tambien enunciarse: *Todo guarismo puesto á la derecha de otro representa unidades del órden inferior inmediato.* Con lo cual la nota puesta á la derecha de las unidades simples representaria unidades diez veces inferiores á ésta, y lo mismo las siguientes que se colocaran, dando lugar á continuar la numeracion en los órdenes de diez en diez veces inferiores á la unidad simple, como se estudiará en su lugar respectivo.

La numeracion completa en todo sistema abraza tanto los órdenes *ascendentes* respecto del de las unidades simples, como el de los *descendentes* por intérvalos iguales á la base.

32. Este sistema de expresion de los números, ya hablado, ya escrito, se llama *decimal* por la razon indicada de ir sus órdenes de *diez* en *diez:* y el número *diez* se dice que es su *base.* No es difícil concebir que pudiera haberse escogido otro número cualquiera de unidades por base: así como *dos* ó *doce,* etc., sin que por ello sufriesen alteracion los principios en que se funda su parte sistemática: sólo habria aumento ó disminucion de cifras y de palabras de modo que lo que fija un sistema cualquiera de numeracion, es su base, ó sea el *número constante de unidades de cada órden necesario para componer una del superior inmediato.*

CAPÍTULO II

Operaciones con los números enteros.

§ I. Preliminares

33. Se llaman *operaciones con los números, las diversas maneras de combinarlos entre sí, componiéndolos y descomponiéndolos.*

34. *Las operaciones son, pues, de dos clases: de composicion y de descomposicion.*

Se dice que son *operaciones que componen, aquellas que con los números que les sirven de elementos para operar, y con las condiciones de su definicion, se proponen hallar un resultado que no está en ninguno de los elementos de la operacion, sino que se produce con la concurrencia íntegra de todos ellos.*

Se llaman operaciones de *descomposicion, aquellas en que el resultado que se pide se encuentra incluido en alguno de los números dados para operar, de modo que para encontrarlo hay que hacer una especie de separacion ó análisis de los elementos dados.*

35. Son operaciones que componen, la *suma* y la *multiplicacion;* y que descomponen, la *resta* y *division,* que tambien se llaman *inversas respectivas de las primeras.*

36. Estas cuatro operaciones se llaman tambien *fundamentales* porque, en efecto, en el vasto campo de esta ciencia, sea con números ó con símbolos literales que los representen, desde las más sencillas teorías á las más complicadas, no se ejecutan más operaciones que las cuatro ántes dichas.

37. Hay otros dos modos de operar con los números, que son los llamados *elevacion á potencia* y *extraccion de raíces,* que algunos señalan como otras dos operaciones, respectivamente de *composicion* y *descomposicion;* pero en realidad no son más que casos especiales de la multiplicacion y division.

Por último, hay escuelas que hasta añaden una sétima operacion llamada *logaritmacion,* ó *determinacion del logaritmo* *de los números;* pero realmente no es más que un conjunto de las cuatro operaciones fundamentales para lograr un resultado definido.

38. La Aritmética, al exponer las cuatro operaciones fundamentales, obedece á los siguientes principios:

1.º *Que el resultado que se obtenga sea exactamente el definido como fin de la operacion.*

2.º *Que el procedimiento empleado sea el más brève y sencillo posible.*

Segun esto la norma que guia y justifica los métodos para operar, es la definicion de la operacion. Todo resultado que se ajuste á ella es el pedido; todo método que lo consiga es bueno: será preferible el más breve y sencillo.

39. En cada una de estas cuatro operaciones fundamentales tienen los elementos dados para operar nombres propios y peculiares, y signos para indicarlas.

§ II. Suma ó adicion

40. *Suma ó adicion es aquella operacion que se propone hallar el resultado de reunir varios números en uno solo.*

Compone, por consiguiente, esta operacion, pues vale tanto como decir que, *dadas las partes de un total, las junta para recomponer el todo.* No está, pues, el resultado incluido en ninguno de los elementos, ni se forma separando á alguno en partes determinadas.

41. Los nombres dados á sus elementos son: el de *sumandos* á los números que se han de reunir; *suma* ó *total* al resultado que se busca. Tiene esta operacion un signo para indicarla en la escritura, que es el llamado *más* (+), que se escribe entre los sumandos. Así 45+326+12 se lee cuarenta y cinco *más* trescientos veintiseis *más* doce, y quiere decir que se busca un número que tenga tantas unidades como provengan de la reunion de las de los tres dados.

42. El método que más pronto ocurre para obtener el resultado que se propone esta operacion, es el de reunir con un

sumando *una* á *una* todas las unidades de otro; á la suma de éstos, *una* á *una*, las de un tercero, y así sucesivamente.

Es cierto que así se conseguiria el resultado pedido; pero tambien lo es, que el procedimiento es muy largo y hasta impracticable para números algo considerables.

43. Aunque en la esencia se conserva este método primitivo se ha simplificado observando que los números escritos sólo pueden constar de nueve guarismos, cada uno en su órden respectivo, y que si se pudieran reunir primero todos los que representan las unidades simples, despues todos los que representan las decenas, etc., y, por fin, que la suma de los guarismos de las unidades se reuniera á la de los que representan las decenas, ésta á la de las centenas y así hasta la de los órdenes más altos de los sumandos, evidentemente se habria conseguido el mismo resultado que reuniendo unidad á unidad, toda vez que la suma así efectuada, constaba de todas las *unidades*, todas las *decenas, centenas*, etc., de los sumandos.

Esto simplifica la operacion, porque se reduce á aprender de memoria la suma de un número dígito con otro dígito, y de aquí con otro cualquiera: con esto se saben reunir los guarismos del mismo órden; y en cuanto á reunir la suma de las de un órden con la del siguiente se hace de este modo: se empieza por el órden inferior, ó sea el de las unidades simples, y como quiera que la misma numeracion indica al contar cuántas decenas hay en un número cualquiera, se reservan mentalmente de la suma de los guarismos de las unidades simples, las decenas que resulten; se escriben las unidades de esta suma, y las decenas reservadas se suman con los guarismos de las decenas. Lo mismo se efectúa con todos los demás órdenes que produzcan decenas de su órden, que son unidades para el siguiente superior; y con esto se obtiene la suma cifra á cifra.

Es claro que esto supone el saber sumar números dígitos entre sí, lo cual hay que aprender de memoria ó por medio de la práctica ó en tablas al efecto, y tambien el hacer mentalmente la suma de un dígito con cualquier número, lo cual enseña la práctica. Y, por último, que se empieza la suma por los guarismos de órden inferior, para reunir al siguiente las unidades que resulten de su órden; pues si se empezara por los de órden superior, al sumar despues cada uno de los inferiores ocurriria en general tener que corregir todas las cifras ya puestas, por las reservas que habria que reunirles; y esto se evita empezando por los guarismos de las unidades simples.

44. La mejor disposicion para este procedimiento es el de escribir los sumandos *unos debajo de los otros*, de modo que *se correspondan los guarismos del mismo órden*, y trazar *por debajo del último una raya*, pues así la vista los percibe fácilmente y sin confusion y se separan los sumandos del resultado ó suma. Así para sumar 3526 con 438, con 9570 y con 635 se dispondria:

$$\begin{array}{r} 3526 \\ 438 \\ 9570 \\ 635 \\ \hline 14169 \end{array}$$

El resúmen de este método es la regla siguiente:

45. *Para sumar números enteros escríbanse los sumandos en columna vertical de modo que se correspondan los guarismos del mismo órden; debajo del último trácese una raya para separarlos del resultado; súmense los guarismos de la primera columna de la derecha y escríbanse las unidades que resulten, reservando las decenas para sumarlas con los guarismos de la siguiente, y continúese así hasta sumar los de todas las columnas.*

46. Es evidente que la colocacion en columnas verticales no es esencial; pero es la mejor disposicion para no confundir los guarismos, y siempre se adopta cuando se va á efectuar la operacion con números algo considerables.

47. Si los sumandos fuesen muy numerosos, tambien hay confusion áun colocados en columna, y es dado á equivocaciones; por lo que se *distribuyen los sumandos en grupos, y despues de hechas las sumas de cada grupo se reunen todas en un total.*

Todas estas disposiciones se fundan en un principio casi axiomático, á saber:

48. Teorema. *El órden de los sumandos no altera el valor de la suma.* Y en efecto, la suma es el resultado de reunir todas las unidades de los sumandos en un solo número. Así,

pues, cualquiera que sea el lugar de los sumandos el método expuesto de reunir por órdenes cumple con el fin de la operacion, y claro es que la manera de colocarlos no influye en la suma.

49. *Llámanse operaciones indicadas, aquellas en que por medio de los signos peculiares de cada una, están señaladas y sin verificar.*

50. *Una suma indicada* será, por tanto, una serie de números unidos por el signo +.

51. Si los sumandos de una suma variasen de valor, la suma podria sufrir ciertas alteraciones que basta enunciarlas para convencerse de su certeza.

1.º *Si uno ó varios sumandos se aumentan en cierto número de unidades la nueva suma vendrá aumentada en el total de unidades añadidas al, ó á los sumandos.*

En efecto, si sumar es reunir todas las unidades, el nuevo resultado debe contener las que habia y las nuevamente añadidas.

2.º *Si uno ó varios sumandos se disminuyen en cierto número de unidades, la nueva suma vendrá disminuida en el total de unidades quitadas al, ó á los sumandos.*

En efecto, los primitivos sumandos pueden considerarse como los nuevos aumentados en lo que se les quita; luego la primitiva suma debia tener tantas unidades más respecto de la nueva, como el total de las quitadas á los sumandos. Esto es lo mismo que decir que la nueva suma tiene tantas unidades ménos, como se han quitado de los sumandos.

3.º *Si unos sumandos se disminuyen en cierto número de unidades y otros se aumentan en las mismas, la suma no se altera.*

En efecto, el total primitivo disminuye en ciertas unidades por lo que se quita á los sumandos, y aumenta en las mismas unidades por lo que se les añade, y es evidente que si un número aumenta y disminuye en las mismas unidades no altera de valor.

52. *Se llama prueba de una operacion otra que se hace para conocer si la primera está bien hecha.*

Desde luégo ocurre que la prueba de una operacion, siendo á su vez otra operacion, puede estar equivocada la prueba, y la operacion bien hecha, ó compensarse la equivocacion de la prueba y la de la operacion, apareciendo las dos bien hechas y realmente estando equivocadas ámbas.

La prueba, pues, no ofrece en sus indicaciones más que un grado de *probabilidad,* fundada ésta, en la dificultad de que ocurra el segundo caso mencionado.

53. Las pruebas de las operaciones son tanto más aceptables cuanto más breves y sencillas son, y cuando consisten en una operacion de distinta índole que aquella que se trata de probar.

54. Como la suma es la primera operacion con los números, no se puede en órden lógico recurrir á otra para su prueba. Así que consiste *en volver á sumar las columnas en sentido inverso al efectuado, y se debe de obtener un total idéntico al primero* (48) (*).

55. *La relacion de igualdad entre dos cantidades se indica por medio del signo = que se pone entre ellas y se lee* igual á: así; como $4+5$ dan de suma 9, esto se escribe $4+5=9$.

56. Se llaman *miembros* de una igualdad *las cantidades escritas á derecha é izquierda del signo igual; primer miembro* es el que está á la *izquierda* y *segundo* el que está á la *derecha.*

57. AXIOMA. *Si dos cantidades son iguales y aumentan ó disminuyen en el mismo número de unidades, continúan siendo iguales.*

De modo, que si bien los miembros pueden sufrir alteracion, la igualdad subsiste. Hay, pues, que distinguir en las igualdades, lo que se refiere á los miembros, de lo que es rela-

(*) El número (48) puesto entre paréntesis, y lo mismo los que se vean en todo lo que seguirá, quiere decir que se recurra al párrafo que lleva ese número para recordar la verdad ya demostrada que conviene tener presente. Sin evacuar estas citas no puede hacerse bien el estudio de esta Ciencia; así es que los alumnos deben de volver á repasar cada párrafo que se vea indicado ó llamado de este modo.

tivo al equilibrio (digámoslo así) que el signo IGUAL expresa entre ellos. Así, teniendo $4+5=9$, si á los dos *miembros* sumo 3, claro es que éstos varian, toda vez que vienen aumentados en 3 unidades; pero la igualdad subsistirá, y se tendrá, por tanto, $4+5+3=9+3$.

Por tanto, *decir que una igualdad no varía, sólo quiere indicar que si los dos miembros sufren alteracion, ésta es idéntica en ámbos y continúan siendo iguales.*

§ III. SUSTRACCION Ó RESTA

58. La sustraccion es la segunda de las operaciones fundamentales y primera de descomposicion: tiene por fin, *dado un número llamado minuendo y otro sustraendo, hallar un tercero llamado resto, que sumado con el sustraendo dé el minuendo.*

59. Analizando esta operacion con respecto á los números enteros, es claro que si *sustraendo* y *resto* componen por suma el *minuendo*, en éste se hallan reunidos los dos, y por tanto si puedo separar ó quitar del *minuendo* el *sustraendo*, encontraré el *resto*. Así, pues, entre números enteros el *resto* indica *lo que le falta al sustraendo para igualar al minuendo;* ó en otros términos, *la diferencia entre los dos números dados.* De aquí el llamar al resto de dos enteros la *diferencia* ó *exceso* del *minuendo* sobre el *sustraendo.*

60. Tambien dice el análisis hecho, que la *manera de hallar el resto* es *quitar del minuendo todas las unidades del sustraendo;* y como hacerlo *una* á *una* sería muy largo, y por otra parte es evidente que si se quitan del *minuendo* sucesivamente todos los órdenes del *sustraendo*, es decir, todas sus unidades simples, sus decenas, centenas, etc., lo que resta de él será la diferencia, se ha seguido este procedimiento. Advirtiendo que estando los órdenes representados por guarismos, habrá que quitar de cada guarismo del minuendo su correspondiente en el sustraendo. Pero puede ocurrir que fuese el minuendo

menor que uno de los guarismos correspondientes en el sustraendo, y en este caso para hacer posible el quitarlo del de su órden se añade mentalmente una unidad del órden inmediato, que vale allí diez, y ya se podrá restar; teniendo presente al restar el guarismo siguiente que se ha tomado esta unidad en el minuendo. Esto supone: primero, que *se saben de memoria las restas ó diferencias entre un número dígito y otro cualquiera tambien dígito, aunque se le añadan diez unidades*; segundo, que *la distinta agrupacion que se da á las unidades del minuendo al tomar una de un órden para añadírsela á alguno de los inferiores no altera el resto;* y tercero, que *las restas sucesivas de cada órden se van reuniendo en su órden respectivo.* Todo esto se efectúa fácilmente: lo primero *por medio de la práctica ó de tablas* que contienen las diferencias entre los números mencionados; lo segundo observando que si bien al restar un órden del minuendo se le añaden diez unidades para poder restar, tambien se le quita una al órden superior inmediato, con lo cual el minuendo no se altera (51-3.º). Por último, la agrupacion de todos los restos en su lugar respectivo se verifica fácilmente, pues estos restos son guarismos que van en su órden, empezando por el de las unidades simples.

61. De lo dicho se infiere la siguiente regla. *Para restar dos números enteros escríbase el minuendo y debajo el sustraendo de modo que se correspondan los guarismos del mismo órden; trácese por debajo una raya para separarlos del resto; hállese la diferencia de cada guarismo del sustraendo con su correspondiente en el minuendo, empezando por las unidades simples, y escríbanse los restos en su lugar respectivo. Si alguna cifra del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, añádansele diez unidades y verifíquese la resta, teniendo cuidado de considerar la siguiente disminuida en una unidad.*

62. Esta operacion se indica por medio de un signo llamado *ménos*, que es una rayita horizontal (—) que se coloca delante del sustraendo: así, 15—7 se lee quince *ménos* siete y representa una *diferencia indicada.*

63. *Las alteraciones que sufre el resto de dos números enteros por la adicion de unidades al minuendo ó sustraendo ó á los dos* son las siguientes:

Supongamos que *al minuendo se le añaden ó quitan cierto* *número de unidades, dejando el mismo el sustraendo.* Se tendrá que el nuevo minuendo es la suma del sustraendo primitivo y del nuevo resto; pero si una suma aumenta ó disminuye de unidades, preciso es que (51-1.º y 2.º) uno de los sumandos haya aumentado ó disminuido en el mismo número; y como el sustraendo no ha variado, necesariamente *el resto tiene que ser el que aumente ó disminuya en el mismo número que el minuendo.* Luego

1.º *Si al minuendo se le añaden ó quitan cierto número de unidades, dejando el mismo el sustraendo, el resto vendrá aumentado ó disminuido en el mismo número.*

Supongamos ahora que dejando sin alteracion el minuendo, al sustraendo se le añaden ó quitan unidades. En este caso la suma (minuendo) no varía; uno de los sumandos (el sustraendo) *aumenta;* luego si la suma ha quedado inalterable, preciso es (51-3.º) que el otro sumando (el resto) disminuya en la misma cantidad, de lo contrario la suma vendria aumentada y no sería la misma. Si se supone que el sustraendo haya *disminuido* para que la *suma* no altere, es necesario que el otro sumando, el resto (51-3.º), *aumente en la misma cantidad.* En resúmen:

2.º *Si el sustraendo aumenta ó disminuye de unidades dejando sin alteracion al minuendo, el resto disminuye ó aumenta en el mismo número.*

Expresando estas consecuencias reunidas puede decirse: *Que el resto sufre idénticas alteraciones que el minuendo y las contrarias que el sustraendo, cuando éstos varian por la adicion ó sustraccion de cierto número de unidades.*

3.º *Si al minuendo y al sustraendo se les suma ó resta el mismo número el resto no varía.* Esta es una consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores, toda vez que el resto sufre en ámbos casos un aumento y disminucion de un mismo número de unidades.

64. La prueba de la operacion de restar se hace por medio de la *suma del resto con el sustraendo, la cual ha de producir el minuendo.*

65. En la prueba de la suma se dijo que por la resta podria probarse si una suma está ó nó bien hecha, y en efecto: *si verificada una suma se vuelven á sumar todos los sumandos, excepto uno, el nuevo total debe ser igual al primitivo, ménos el sumando exceptuado.* La razon es evidente, pues si á la nueva

suma se agregase el sumando exceptuado, deberia dar la primitiva (48), luego la nueva es la *diferencia* entre la primitiva y el sumando exceptuado.

66. Escolio. La operacion de restar puede formularse de diversos modos, como otras tantas cuestiones que por ella sola se resuelven así.

¿Qué número sumado con 30 da 45? ¿Qué número se debe restar á 45 para obtener 30?

Dada la suma 45 de dos sumandos, de los que uno es 30, hallar el otro. Éstas serian otras tantas maneras de formular la misma cuestion que se resuelve por la resta de estos dos números.

En general *siempre que dados dos números se pide un tercero que sumado con uno de ellos produzca al otro, la operacion de restar es la que resuelve la cuestion,* y el enunciado de esta última fijará la significacion del resto respecto de los números dados.

§ IV. Multiplicacion

67. *Multiplicacion es la tercera de las operaciones fundamentales y segunda de composicion, y es la que tiene por objeto, dados dos números, hallar un tercero que sea respecto de uno cualquiera de los dados lo que el otro es respecto de la unidad.*

68. *El número que se busca se llama producto.*

Los dos números dados reciben los nombres de *multiplicando* y *multiplicador*, ó el de *factores del producto*.

Se llama *multiplicando* al que se compara con el producto, y *multiplicador* al que se compara con la unidad.

Esta eleccion es arbitraria, segun se expresa en la definicion.

69. El signo para indicar esta operacion entre dos números es un aspa ($\times$) ó un punto (.) puesto entre los factores y que se lee *multiplicado por*. Tambien se suele usar de paréntesis dentro de los cuales se encierra á uno de los factores ó á cada uno de ellos cuando éstos son *sumas* ó *diferencias indicadas*.

70. Aplicando la definicion al caso de dos números enteros, por ejemplo á 6×5, lo que se busca es *un tercer número que sea respecto de* 6 *lo que* 5 *es respecto de la unidad entera.* Segun esto, cómo 5 se compone de $1+1+1+1+1$ el producto por definicion debe de componerse de $6+6+6+6+6$. Por tanto, tratándose de enteros puede decirse que multiplicar es *hallar el resultado de repetir un número por sumando tantas veces, como unidades tiene otro.*

71. Si se observa que repitiendo un número *dos, tres* ó *cuatro veces* por sumando, el resultado es evidentemente *dos, tres* ó *cuatro veces* mayor que el número que se repite, se puede tambien decir que multiplicar un número *por otro entero* es *hallar un tercero que sea tantas veces mayor que el primero, como unidades tiene el segundo.*

72. Estos conceptos ó explicaciones de la definicion general de esta operacion, *cuando se trata de enteros,* sirven para justificar los procedimientos para efectuarla entre éstos.

73. Desde luégo se concibe, que si multiplicar es el resultado de sumar el multiplicando consigo mismo tantas veces como uuidades tiene el multiplicador, con el procedimiento de la suma basta para hallar el producto, sin necesidad de inventar otro nuevo.

Pero tambien es fácil de conocer que sería impracticable por lo largo. En efecto, habria que escribir el multiplicando tantas veces como unidades tuviera el multiplicador, y despues efectuar la suma; y ámbas cosas serian imposibles de realizar en la generalidad de los casos, áun tratándose de multiplicadores poco considerables.

74. Ha sido, pues, preciso investigar un medio breve y sencillo de realizar esta operacion, y éste ha sido el siguiente.

Tres casos hay que analizar en las multiplicaciones de dos enteros, que son: primero, *dos dígitos;* segundo, *compuesto de várias cifras, por un dígito;* y tercero, *dos compuestos de várias cifras.*

75. Primer caso. *Para multiplicar dos números dígitos,* como *sus productos* de dos en dos son en número limitado, *se ponen en tablas que los contienen todos,* las cuales son fáciles de aprender de memoria.

TABLA DE MULTIPLICAR.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Disposicion. Para formar esta tabla, llamada *Pitagórica*, se escriben en una misma línea horizontal los nueve números dígitos, y agregando á cada uno de ellos otro igual á él, se obtiene una segunda línea de números, que son los anteriores tomados *dos veces por sumando* ó multiplicados por dos. Si á cada uno de los productos de esta segunda línea se agrega el número que está encima de él en la primera, resultará la suma de estos mismos números tomados *tres veces como sumandos*, ó sean sus productos *por tres*, que se escriben en una tercera línea; y siguiendo así se van obteniendo las diversas líneas que indican los productos por cuatro, cinco, seis, etc.

Uso. Una vez conocida la manera de formar esta tabla, para hacer uso de ella no habrá más sino tomar en la primera columna vertical de la izquierda el número que sea el *multiplicando*, y seguir por el renglon horizontal que está á su derecha hasta llegar al producto que está debajo del número que sea el *multiplicador* en el renglon de arriba. Así para hallar el producto de 7 por 8, se seguirá con la vista el sétimo renglon horizontal y la octava columna vertical, y en su coincidencia se encuentra el número 56, que es el producto. Si fuera el de 4 por 6, se mirará el número que está en la coincidencia del cuarto renglon horizontal con la sexta columna vertical, que es 24.

76. SEGUNDO CASO. *Un número de várias cifras por un dígito*. Sea, por ejemplo, 4526×5. Segun las consideraciones expuestas, el objeto de esta operacion es hacer al 4526 cinco veces mayor. Si, pues, se observa: primero, que *si á cada una de las partes de cualquier número se hace cinco veces mayor y se reunen los resultados, el número que se obtiene es evidentemente cinco veces mayor que el propuesto;* segundo, que *las par-*

tes del 4526 son sus diferentes órdenes y éstos se hallan expresados por números dígitos; y tercero, que *por la multiplicacion de dígitos podemos hacer á cada cifra de los diferentes órdenes cinco veces mayor en su órden relativo,* fácilmente ocurre que multiplicando por 5 cada cifra del número 4526, y reuniendo en un solo número los resultados, se consigue el objeto de la operacion propuesta.

La manera de reunir los resultados de la multiplicacion de cada cifra del 4526 por 5 pudiera hacerse escribiendo aparte cada producto en su *valor relativo,* unos debajo de otros y sumando despues; así podria decirse: 5 por 4 millares son 20 millares ó 20000 unidades; 5 por 5 centenas son 25 centenas ó 2500 unidades, etc.; y sumando despues 20000 con 2500, etc., se tendria indudablemente el producto: este modo de reunir no se usa, por ser más breve otro que en nada complica el procedimiento, y es el ir haciendo la reunion de los productos al mismo tiempo que se van efectuando, para lo cual *se empieza la multiplicacion por la cifra de las unidades simples del multiplicando y despues las siguientes; pero no escribiendo de cada producto parcial más que las unidades, reservando las decenas para agregarlas en su valor absoluto al producto de la cifra siguiente.* Esta reserva es mental, es decir, que se conservan en la memoria las decenas que resulten de un órden para agregarlas al producto siguiente. Con esto se ahorra el escribir tantos productos parciales como cifras tiene el multiplicando y hacer despues la suma. En el ejemplo propuesto diríamos, por tanto: 4526×5; 5×6 son 30, ó sea *cero* unidades y 3 decenas; escribiendo el *cero* unidades y reservando las 3 decenas para agregarlas al producto de 5×2 decenas, que es la cifra siguiente: este producto es 10 decenas, y 3 de la reserva 13 decenas, ó sea *una* centena y 3 decenas: escribo las 3 decenas al lado del *cero* y reservo la *una* centena para el producto de 5×5 centenas, el cual da 25 y 1 son 26: escribo el 6 y reservo el 2, que son millares, para el producto de 5×4, que son 20 millares, y 2 son 22: como no hay más cifras lo escribo íntegro al lado de las 6 centenas, 3 decenas y *cero* unidades, y con esto el producto será 22630. Así se ejecuta la operacion *de reunir al mismo tiempo que la de multiplicar.* La recopilacion de este procedimiento es la regla siguiente.

77. *Para multiplicar un número compuesto de várias cifras por otro de una sola, escríbase el multiplicando y debajo el mul-*

4

tiplicador; tírese una raya bajo la cual se pone el producto; multiplíquese la cifra del multiplicador por cada una de las del multiplicando, empezando por la de las unidades simples, y escríbanse las unidades de cada producto, reservando las decenas para añadirlas al producto del órden siguiente.

78. TERCER CASO. *Multiplicar dos números compuestos de várias cifras.*

Sea, por ejemplo, multiplicar 7983 por 452. Segun lo expuesto, el fin de esta operacion se habrá conseguido si hacemos al número 7983 las 452 veces mayor que indica el multiplicador, y es evidente que esto se obtendria si lo hiciésemos primero 2 veces mayor, despues 50 veces mayor y despues 400 veces mayor, y por último se reuniesen estos tres resultados en un total.

Queda, pues, la cuestion propuesta reducida á investigar cómo se ha de proceder para multiplicar brevemente al número 7983 por 400 y por 50; pues por 2, como número dígito que es, ya se sabe por el caso anterior. La nueva cuestion, por tanto, que surge es la de multiplicar un número 7983 por una cifra significativa seguida de ceros: 400 ó 50.

79. Para resolverla propongámonos primero *multiplicar un número cualquiera por* 10, 100 *ó* 1000, *ó en general por la unidad seguida de ceros.*

Sea 7983×10, como el objeto es hacer 10 veces mayor al 7983, ó, lo que es lo mismo, á cada una de sus cifras en su valor *relativo*, siendo décuplo el sistema en que está escrito ese número, basta para conseguirlo recordar el principio en que se funda este sistema, que es *que toda cifra puesta á la izquierda de otra representa unidades diez veces mayores que la anterior*, y por tanto que si las 3 unidades se han de convertir en decenas, las 8 decenas en centenas, las 9 centenas en millares y los 7 millares simples en decenas de millar, etc., habrá que escribir las mismas cifras corriéndolas un lugar hácia la izquierda, para lo cual *basta ponerle un cero á la derecha*.

Luego para multiplicar un número por 10 *basta escribir un cero á su derecha.*

80. Un análisis análogo nos daria á conocer que *para multiplicar un entero por* 100 *ó por* 1000 *bastaria escribir dos ó tres ceros á la derecha.*

En general, que para *multiplicar un número entero por la unidad seguida de ceros, basta escribir á su derecha tantos ceros como acompañan á la unidad.*

81. Sabido esto, si el multiplicador es una cifra significativa (diferente de la unidad) seguida de ceros; por ejemplo, 400 y el multiplicando un entero; por ejemplo, 7983, es claro que siendo el objeto hacer á 7983, 400 veces mayor, esto se conseguiria evidentemente escribiendo 400 veces al 7983 como sumando y reuniéndolos en un total. Pero como el órden de estos sumandos no altera la suma, que en nuestro ejemplo es el producto, si considero á estos 400 sumandos formando grupos de á 4, habrá con esto 100 grupos iguales que reunir y cada uno será de 7983 repetido 4 veces. En resúmen, que la operacion de repetir 400 veces á 7983 se convierte en estas dos: 1.ª *Multiplicar á* 7983 *por* 4. 2.ª *Multiplicar el resultado así obtenido por* 100. Ámbas operaciones se saben ya ejecutar, pues la una es multiplicar *un entero por un dígito,* y la otra por la *unidad seguida de ceros,* y ámbas son breves luégo.

82. *Para multiplicar un número entero por una cifra significativa distinta de la unidad, y seguida de ceros, se multiplica por dicha cifra y á la derecha del resultado se ponen tantos ceros como acompañen á la cifra.*

83. Ya con estos antecedentes es fácil ejecutar la multiplicacion de dos enteros cualesquiera compuestos de várias cifras: en efecto, volviendo al ejemplo propuesto de 7983×452, cuya operacion queda ejecutada descomponiéndola en tres multiplicaciones parciales, á saber: primero por 2, despues por 50 y por último por 400, y reuniendo, se tiene que 7983×2 da 15966; y 7983×50 da 399150; y, por último, 7983×400

da 3193200, y sumando estos tres productos se halla 3608316.

84. La manera de disponer esta operacion, para más claridad, es la de escribir el multiplicando y debajo el multiplicador; despues se tira una raya bajo la cual se van escribiendo los productos parciales del multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, pero con una modificacion en la escritura, y es que como los productos parciales se han de sumar, no se les ponen los ceros que debian tener á su derecha, y para que se correspondan las cifras del mismo órden despues de esta supresion, basta con escribir cada producto parcial adelantándolo un lugar hácia la izquierda respecto del anterior, es decir, que la cifra de las unidades de cada uno venga debajo de la de las decenas del *inmediato* anterior.

Así, pues, la operacion del ejemplo propuesto se dispone:

```
    7983 Multiplicando.
     452 Multiplicador.
 -------
   15966 )
  39915  }Productos parciales.
 31932   )
 -------
 3608316 Producto total.
```

El resúmen de este procedimiento es la regla siguiente.

85. *Para multiplicar dos enteros compuestos de várias cifras escríbase el multiplicando y debajo el multiplicador y trácese una raya por bajo de éste.*

Multiplíquese todo el multiplicando por cada una de las cifras del multiplicador, escribiendo los productos parciáles que se obtengan por cada una debajo los unos de los otros, pero adelantándolos un lugar hácia la izquierda respecto del anterior inmediato. Verifíquese la suma de todos los productos parciales, y ésta será el total.

86. OBSERVACIONES. *Si en el multiplicador hubiera ceros intermedios de las cifras significativas, como los productos parciales del multiplicando por estos ceros serian filas de ceros, no se escriben y se saltan hasta la primer cifra signifi-*

cativa que se encuentre, teniendo cuidado de escribir este producto parcial adelantando hácia la izquierda un lugar más, que ceros intermedios se hayan saltado. Así 9756×2003 se dispondrá:

$$\begin{array}{r} 9756 \\ 2003 \\ \hline 29268 \\ 19512 \\ \hline 19541268 \end{array}$$

87. Ocurre con frecuencia en los cálculos aritméticos, que conviene operar con elementos que á su vez son operaciones indicadas. Tal sería, por ejemplo, *multiplicar la suma indicada* 3+4+5 por un número cualquiera, ó *una diferencia* 13—5 por un número, ó una *suma por otra suma indicada*, etc., ó un *producto indicado* por un *número* ó por otro *producto* ú otras várias operaciones con elementos de esta naturaleza, cuyos casos principales se van á analizar.

88. Ante todo se recordará que para expresar la multiplicacion de una suma ó diferencia indicada por un número ó por otra suma ó diferencia tambien indicada, se encierra dentro de un paréntesis al factor compuesto, es decir, al que expresa la suma ó diferencia: con esto se evita la confusion que el aspa ó punto traeria, puesto que no sabríamos si la multiplicacion indicada por estos signos afectaba al último sumando de los propuestos ó á toda la suma. Así, si escribo 3+5+4×2 entenderíamos que sólo habria de multiplicarse el sumando 4 por el factor 2; pero (3+5+4) 2 quiere decir, y no hay confusion, que toda la suma 3+5+4 ha de multiplicarse por 2. Del mismo modo (4+5) (7+3) quiere decir que toda la suma 4+5 se ha de multiplicar por toda la suma 7+3; de modo que el *paréntesis es generalmente un signo de multiplicacion y cada paréntesis es un factor.*

89. Los productos indicados *en los que cada factor es un número,* se escriben poniéndolos todos á continuacion, con el aspa ó punto intermedio. Así 30.5.6.7 es un producto indicado de cuatro factores, y quiere decir que 30 se ha de multiplicar por 5, su producto por 6 y el producto de los tres por 7. De

modo, que efectuado sería $30.5.6.7=6300$. Esto supuesto.

90. *Para multiplicar una suma indicada por un número se multiplica cada uno de los sumandos y se suman los productos parciales.* Sea, por ejemplo, $(13+4+5)\,2$. Segun la definicion de multiplicar por un entero, el objeto de la operacion propuesta es *hacer á la suma dos veces mayor*, y se concibe que si cada una de sus partes se hace dos veces mayor y se reunen los resultados, el total será toda la suma hecha dos veces mayor: luego $(13+4+5)\,2=13.2+4.2+5.2$.

91. Supongamos ahora *una suma por otra, ámbas indicadas* y sea $(4+5)\,(3+2)$. Es claro que pidiéndose ahora que la suma $(4+5)$ se repita $3+2$ veces se consigue repitiéndola primero 3 veces, despues 2 veces, y sumando los resultados; de modo que se descompone la operacion de esta manera: $(4+5)\,(3+2)=(4+5)\,3+(4+5)\,2$ y se está en el caso anterior; el producto sería $4.3+5.3+4.2+5.2$. Es decir, que *para multiplicar dos sumas indicadas se multiplica la que hace de multiplicando sucesivamente por cada uno de los sumandos del multiplicador y la reunion de todos los productos será el total.*

92. *Para multiplicar una diferencia indicada por un número se multiplica minuendo y sustraendo y se restan los productos parciales.* Sea $(13-5)\,4$; como $13-5=8$, y por tanto $13=8+5$; multiplicando ámbos miembros por 4, dirá $13\times4=(8+5)\,4=8.4+5.4$; si de ámbos miembros se resta 5×4 y en lugar de 8 se pone su igual $13-5$ dirá: $13.4-5.4=(13-5)\,4$.

93. *Para sacar un factor comun de varios números se encierran en un paréntesis y fuera se pone el factor.* Así $4.7+4.7+4.7=(4+4+4)\,7$; $5.3+8.3-7.3=(5+8-7)\,3$.

94. *El órden de los factores no altera el valor del producto.* Considerando primero que sean dos factores 3×2, si se descompone el 3 en sus unidades y se repiten dos veces, *la reunion de todas ellas* será el producto: el cuadro que se tendrá será:

$$\begin{array}{l|l} 1+1+1 & 3+3=3\times2 \\ 1+1+1 & \\ \hline 2+2+2=2\times3 & \end{array}$$

Sumando por columnas horizontales da $3+3$ ó sea 3×2, y por verticales $2+2+2$ ó sea 2×3; y como estas sumas son iguales, es claro que $3\times 2=2\times 3$.

95. Demostrando el teorema con dos factores para extenderlo al caso de muchos, basta hacer ver que *en un producto de varios factores uno cualquiera de ellos puede cambiar de lugar con el siguiente sin alterar el producto*. Los casos que se pueden considerar son tres: primero, que los factores sean los dos primeros; segundo, que sean los dos últimos; y tercero, que sean dos intermedios.

PRIMER CASO. Sea el producto $5.7.3.4$ en el que van á cambiar de lugar los dos primeros. Se ha demostrado que $5.7=7.5$. Si á estos productos iguales se les multiplica por el mismo número 3.4 los resultados son iguales. Luego $5.7.3.4=7.5.3.4$.

SEGUNDO CASO. Sean ahora los dos últimos factores del producto, $5.7.3.4$, los que han de cambiar de lugar. Se tiene que $5.7.3.4=5.7.3+5.7.3+5.7.3.+5.7.3$, y si se saca de todos estos sumandos del segundo miembro á 3 de factor comun será $(5.7+5.7+5.7+5.7)\,3$, pero 5.7 repetido cuatro veces por sumando es lo mismo que 5.7×4: luego se tiene la serie de igualdades $5.7.3.4=5.7.3+5.7.3+5.7.3+5.7.3=(5.7+5.7+5.7+5.7)\,3=5.7.4.3$. Comparando el primer miembro y el último nos prueban que los dos últimos factores 3 y 4 del producto propuesto, han cambiado de lugar sin alterar su valor.

TERCER CASO. Sean ahora dos intermedios, y el producto $5.7.4.3.8$, dejando de considerar los dos últimos factores 3.8, se tiene demostrado que $5.7.4=5.4.7$ segun el caso anterior. Si los dos miembros de esta igualdad se multiplican por 3.8 los resultados son iguales: luego $5.7.4.3.8=5.4.7.3.8$.

Con lo cual queda probado que el cambio de órden de dos factores intermedios tampoco altera el producto.

Probado que se pueden invertir dos factores consecutivos cualesquiera sin alterar el producto, todos los cambios de lugar de los factores quedan justificados; porque si del producto $4.7.3.8$ se quiere pasar á $8.4.7.3$ por inversiones sucesivas de los factores de dos en dos, se diria 4.7.3.8; invirtiendo 3 y 8, será igual á 4.7.8.3; invirtiendo 7 y 8, será 4.8.7.3, é invirtiendo 4 y 8, será 8.4.7.3, que es el pedido, y al cual se ha llegado por la inversion sucesiva de sólo dos factores; luego estos productos son iguales.

96. *Para multiplicar un producto indicado por un número, basta multiplicar uno cualquiera de sus factores.* En efecto, sea un producto 5.3.7; si se multiplica por 2 uno cualquiera de sus factores, por ejemplo el 5, dirá 5.2.3.7, y como el órden de los factores no altera el producto, será igual á 5.3.7.2, en el cual está de manifiesto que todo ha quedado multiplicado por 2.

97. *Para multiplicar entre sí dos productos indicados se reunen en un solo producto todos los factores.*

En efecto, sea 3.5.7 el producto indicado, que se va á multiplicar por 9.8, que es otro producto indicado. Si se efectúa este segundo se tiene 9.8=72, y por tanto la operacion propuesta queda reducida á multiplicar á 3.5.7 por 72, lo cual se efectúa poniendo 3.5.7.72, y como lo mismo es 72 que 9.8, sustituyendo estos factores será 3.5.7.9.8.

Lo mismo se dirá del producto de tres ó más *productos indicados, cuya operacion se indicaria por un solo producto en el que estuviesen los factores de que constasen todos ellos.*

98. Con esto se justifica una abreviacion de la multiplicacion de enteros cuando uno ó ámbos factores terminan en ceros. Y es: *se suprimen los ceros y se verifica la operacion con la parte significativa, y al producto se le agregan tantos ceros como tienen uno ó los dos factores.*

En efecto, sea 3400×520: se tiene 3400=34.100 y 520=52.10; luego 3400.520=34.100.52.10=34.52.100.10. Es decir, que hay que multiplicar 34 por 52, que es la parte significativa de los factores, y el resultado por 1000, ó sea añadirle tres ceros.

99. *El número de cifras del producto de dos números es igual á tantas como tienen ámbos ó una ménos.*

Sea un número de tres cifras por otro de cuatro: el caso en que darán más cifras al producto es cuando sean lo mayor posible: por ejemplo 999×9999 y como este producto es menor que 999×10000 que tiene 7 cifras. En el caso más favorable no podrá tener el de dos números de cuatro y tres cifras, más de siete.

El caso en que darán ménos es cuando sean lo menor posible, ó sea 100×1000, y áun en éste dan 6 cifras. Como este ejemplo se prueba en todos.

100. *La prueba de la multiplicacion se hace invirtiendo los factores, y repitiendo la operacion, y se debe obtener el mismo resultado* (94).

101. *Si el multiplicador tiene muchas cifras se facilita la operacion formando una tabla auxiliar de los productos del multiplicando por los nueve guarismos del sistema:* con esto en cada multiplicacion, por uno de los guarismos del multiplicador, no hay más que consultar la tabla y escribir el producto en su lugar correspondiente.

102. Potencias de los números enteros. *Se llama potencia de un número el resultado de multiplicarlo por sí mismo várias veces.* El número que se eleva se llama *base*, y el que indica las veces que se toma de factor *exponente*.

La operacion se indica escribiendo la base, y á su derecha, un poco más alto, el exponente. Si la cantidad que se eleva fuese una suma ó diferencia indicada, se encierra dentro de un paréntesis, y fuera se pone el exponente. Así $(3+4)^2$ ó $(2+6)^3$ indican respectivamente que la suma $(3+4)$ se ha de repetir dos veces de factor y la $(2+6)$ tres veces.

Cuando el exponente es 2 ó 3 se leen *cuadrado y cubo*. Así 7^3 y 8^2 se leerán *siete elevado al cubo y ocho al cuadrado*.

103. Es fácil de notar que el *número de multiplicaciones que hay que efectuar para hallar la potencia de un número, son tantas, como unidades tiene el exponente, ménos una;* pues para una sola multiplicacion se necesitan dos factores, con lo cual siempre hay una ménos de éstas que de aquéllos.

104. *Para elevar un producto indicado á una potencia se eleva cada uno de sus factores.* En efecto; de la definicion de potencias se deduce que $(5.7.8)^3 = 5.7.8 \times 5.7.8 \times 5.7.8$, y como

el órden de los factores no altera el producto, esto es igual á $5.5.5.7.7.7.8.8.8=5^3 7^3 8^3$.

105. El cuadrado de la suma de dos números se compone *del cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.*

En efecto; sea la suma de dos números $(4+5)$, cuyo cuadrado se trata de averiguar: se tendrá $(4+5)^2=(4+5)(4+5)=(4+5)4+(4+5)5=4^2+4.5+4.5+5^2=4^2+2.4.5+5^2$.

En general $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

106. El cubo de la suma de dos números se compone *del cubo del primero, más triplo del cuadrado del primero por el segundo, más triplo del primero por el cuadrado del segundo, más cubo del segundo.*

En efecto; $(4+5)^3=(4+5)^2(4+5)=(4^2+2.4.5+5^2)4+(4^2+2.4.5+5^2)5=4^3+2.4^2.5+4.5^2+4^2.5+2.4.5^2+5^3=4^3+3.4^2.5+3.4.5^2+5^3$.

En general $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

§ V. Division de enteros

107. La division es la segunda de las operaciones de descomposicion de los números; y su objeto es, *dados dos números de los cuales uno se considera como producto del otro por un tercero desconocido, investigar este tercero.*

108. Los nombres dados á los elementos de esta operacion son los siguientes: *dividendo* al número dado como producto, y *divisor* al factor conocido: al desconocido se llama *cociente.*

109. El signo para indicar esta operacion es, dos puntos puestos entre el dividendo y el divisor; así $88:8$ quiere decir ochenta y ocho dividido por ocho.

110. Desde luégo se ve, por multitud de ejemplos, que no siempre es posible hallar en número entero el cociente de dos cualesquiera dados; así, siendo 26 el dividendo y 7 el divisor, como 3×7 es 21 y 4×7 es 28, el cociente no es 3 por pequeño, ni 4 por grande. En tales casos, á estos números 3

ó 4 se les llama *cocientes inexactos*, y lo son *en ménos de una unidad*. Si se escoge al más pequeño, 3, se dice que es inexacto por *defecto*, y si al mayor, 4, inexacto por *exceso*.

111. En ámbos casos se llama *resíduo de una division de enteros á la diferencia entre el dividendo y el producto del divisor por el cociente.*

112. Se concibe sin dificultad que segun se tome el cociente inexacto, por *defecto* ó por *exceso*, así el *resíduo* indica cosas distintas, á saber: en el ejemplo propuesto de dividir 26 por 7, si tomo como cociente el número 3, el resíduo es 26—3.7 ó sea 5; este número 5, resíduo de una division por *defecto*, significa *las unidades que sobran al dividendo para ser igual al producto del divisor por el cociente.* Es decir, que 26=3.7+5.

Si se hubiera tomado por cociente al inexacto por *exceso* 4, entónces el resíduo sería 4.7—26, ó sea 2; este número 2 significa en este caso *las unidades que faltan al dividendo para ser igual al producto del divisor por el cociente.* Es decir, que 26=4.7—2.

Es evidente que la suma de los dos resíduos (por defecto y por exceso) ha de ser igual al divisor.

Comprendido esto, propongámonos investigar el método para hallar el cociente de dos números cualesquiera.

113. Es claro que por el procedimiento de la suma y resta, y áun de la multiplicacion, podria investigarse el cociente de dos números.

En efecto; sumando el divisor consigo mismo una vez, y despues otra, y así sucesivamente hasta encontrar el dividendo, ó un número que difiera de él en ménos del divisor, se tendria que *tantas veces como hubiera sumado el divisor consigo mismo, de otras tantas unidades constaria el cociente.*

114. Tambien *por las restas del divisor, hechas al dividendo y restos sucesivos, se llegaria á determinar el cociente de dos números.* Así lo manifiestan estos ejemplos: 348:92. Efectuando la division por suma, diria: 92+92=184; 184+92=276; 276+92=368; y como 368 es mayor que el dividendo 348, tendria que el cociente está entre 3 y 4, pues al sumar á 92 tres veces da 276, y al sumarlo cuatro da 368. Por resta, diria: 348—92=256, 256—92=164 y 164—92=72; de lo que deduzco (pues al llegar á 72 no puedo restar, y ya he ejecutado 3 restas), que el cociente por defecto es 3 y el resíduo 72.

115. Desde luégo se concibe que esta manera de encon-

trar el cociente investigándolo *unidad á unidad* es impracticable por lo larga cuando se trata de cocientes algo considerables.

116. Por medio de la multiplicacion tambien puede llegarse á fijar el cociente de dos números, *empleando una serie de ensayos y probaturas de números que, multiplicados por el divisor, den el dividendo.* Así, 252:36 diria: ensayando el 6, tengo 36×6=216, que es menor que el dividendo; ensayo ahora el 8, y como 36×8=288, es mayor que 252, ensayo el 7 y tengo 36×7=252, de donde deduzco que 7 es el cociente exacto.

117. Desde luégo se nota lo imperfecto que sería este procedimiento y la serie de ensayos á que nos conduciria el investigar el cociente *de una vez todas sus unidades.*

118. Preciso ha sido buscar un medio de ejecutar esta operacion de dividir, inventando un procedimiento distinto del de sumar, restar y multiplicar: de aquí el que constituya una nueva operacion. Este procedimiento consiste en investigar el cociente *cifra á cifra.*

119. Para ello se parte de esta observacion: siendo el dividendo el producto del divisor por el cociente, en él están acumulados y confundidos todos los productos parciales de las diferentes cifras del cociente incógnito por el divisor, más las unidades del resíduo si lo hubiere, y suponiéndolo inexacto por defecto. Tengo, pues, por ejemplo, que al dividir 8046 por 9 puedo considerar que en 8046 *están los productos de las cifras que busco, multiplicadas cada una en su órden por el divisor* 9; y, por tanto, que el producto de la cifra más alta del cociente, multiplicada por 9, está contenido en las unidades más altas del dividendo: éstas son 80 *centenas.* (No puedo decir 8 *millares*, porque 8 no contiene á 9×1); y ahora digo que si por un medio cualquiera puedo averiguar *el mayor número de veces que esta parte del dividendo contiene al divisor, este número será la primera cifra del cociente;* es decir, que si puedo asegurar que 80 lo más que contiene á 9 es 8 veces, el número 8 es la primera cifra del cociente buscado. En efecto, el número 8 de *centenas* para el cociente no es cifra *grande,* puesto que su producto por 9 doy por supuesto está contenido en las 80 *centenas* del dividendo. Tampoco la cifra 8 de *centenas* para el cociente puede ser *pequeña*, puesto que este recelo lo produce el que *las centenas* que sobran de 80, despues de restarle las 8 veces que contiene á 9, reunidas con las *decenas* y *unidades* de lo restante del dividendo, pudieran ser bastantes á que debiéramos au-

mentar esta cifra 8 que hemos puesto, por lo ménos en una unidad; pero no tiene lugar este recelo, toda vez que habiendo puesto en el cociente el *mayor número de veces* que las 80 *centenas* contienen á 9, lo *más que podrian sobrar serian* 8 *centenas* (pues si sobrara una más estaria contenido el 9 una vez más en 80 y no sería 8 el *mayor número de veces*, y hemos supuesto *que se pone el mayor*), y la parte restante del dividendo, que son las *decenas y unidades*, no pueden componer nunca esa *centena* que falta (pues lo más que podrian ser es 9 decenas y 9 unidades) para que se debiera aumentar la cifra 8. En resúmen; si lo que sobra de las *centenas* del dividendo, lo más es tanto como *unidades tiene el divisor, ménos una*, y lo que sigue del dividendo no puede componer esa UNA, claro es que en *el cociente se ha puesto una nota que no es pequeña*: *luego si no es grande ni pequeña, es la verdadera*.

Si ahora se resta de las 80 centenas el producto de las 8 centenas del cociente por el divisor 9, ó sean 8 centenas por 9, igual 72 centenas, quedarán 846 unidades de todo el dividendo propuesto, en cuyas 846 unidades están acumulados los productos de las otras cifras del cociente por el divisor: si repito para las decenas del cociente el mismo análisis, diria que, siendo 84 las decenas del dividendo y siendo 9 el mayor número de veces que contienen al divisor 9, la cifra de las decenas del cociente es 9: si se resta de las 84 decenas el producto 9×9 del cociente y divisor, quedarán de todo el dividendo 36 unidades, en las cuales está el producto de la tercera cifra del cociente por el divisor; y siendo 4 el número exacto de veces que estas 36 unidades contienen á 9, esta cifra 4 es la de las unidades del cociente. Así, pues, este cociente estará compuesto de 8 centenas, 9 decenas y 4 unidades, ó sea 894.

120. Se ve, pues, que el procedimiento para encontrar el cociente cifra á cifra es el siguiente. *Tómense de la izquierda del dividendo tantas cifras como tiene el divisor, ó una más si, consideradas como unidades simples, no contienen á dicho divisor; véase el mayor número de veces que esta parte contiene al divisor, y ésta será la primera cifra buscada; multiplíquese esta cifra por el divisor y réstese el producto del dividendo parcial; bájese á la derecha del resto la cifra siguiente y se tendrá el segundo dividendo parcial. Y así se continúa hasta que no haya más cifras en el dividendo que considerar.*

Si alguno de los dividendos parciales fuese menor que el divisor, se pone cero en el cociente y se continúa la operacion.

121. La manera de disponer los cálculos es la siguiente: se escribe el dividendo y á su derecha el divisor, separados por un corchete, y debajo de éste se coloca el cociente, así:

Dividendo 8046	9 Divisor.
84	894 Cociente.
36	
Resíduo 0	

122. La clave del procedimiento para buscar el cociente de dos números, cifra á cifra, estriba en poder hallar con seguridad, cada vez que se considera un dividendo parcial (de cualquier órden que sea), *el mayor número de veces que contiene al divisor.*

En efecto; á dos condiciones sujeto cada guarismo que pongo en el cociente: *una á que su producto por el divisor esté contenido en el dividendo parcial.* En virtud de esta condicion no es *grande.* La otra condicion es que ese guarismo indique *el mayor número de veces que el dividendo parcial contiene al divisor.* En virtud de esto la diferencia entre el dividendo parcial y el producto de dicho guarismo por el divisor ha de ser menor que el divisor, por lo ménos en una unidad del órden de que se trata, y áun en este caso esa unidad que hace falta para que el dividendo parcial contuviese una vez más al divisor no la puede formar la parte del número dado, inferior al órden del dividendo parcial de que se trata, y por tanto el guarismo ó nota que con esta segunda condicion se pone no es *pequeño.*

123. Luego toda la dificultad consiste en ese *medio para saber con seguridad cuál es el mayor número de veces que cada dividendo parcial contiene al divisor.* Ese medio es el siguiente:

1.º *Si el divisor es un número dígito, la tabla de multiplicar va indicando en cada division parcial la cifra del cociente.* De ella nos hemos valido en el ejemplo de dividir 8046 por 9.

2.º *Si el divisor está compuesto de várias cifras, se recurre á formar una tabla auxiliar de esta operacion,* en la cual se ponen los *múltiplos del divisor por los nueve números dígitos,* y se consulta en cada division parcial. Esta tabla se forma de la manera siguiente:

Sea 8765432109:4576. Se dispondrá el cálculo:

Tabla auxiliar.

4576×1=	4576
» ×2=	9152
» ×3=	13728
» ×4=	18304
» ×5=	22880
» ×6=	27456
» ×7=	32032
» ×8=	36608
» ×9=	41184

Dividendo	Divisor
8765432109	4576
4576	1915522
41894	
41184	
7103	
4576	
25272	
22880	
23921	
22880	
10410	
9152	
12589	
9152	
Resíduo 3437	

Explicacion. La tabla auxiliar de los múltiplos del divisor la he formado del modo siguiente. Escribo el divisor 4576: debajo la suma de este número consigo mismo; así he obtenido su producto por 2, que es 9152: debajo la suma de este producto y el mismo número 4576, y éste es su producto por 3. Debajo la suma de su producto por 3, y otra vez el mismo número, y se ha obtenido su producto por 4; y así sucesivamente hasta el de 9.

Hecho esto, siendo el primer dividendo parcial 8765, para saber el mayor número de veces que contiene al divisor 4576, consulto la tabla auxiliar y veo que siendo 9152 el producto de este divisor por 2, el dividendo parcial 8765 lo más que lo contiene es 1 vez: este 1 es la primera cifra del cociente. Para obtener la segunda resto el producto de la cifra primera 1 por el divisor; la tabla da este producto, y uniendo al resto 4189 la cifra siguiente 4, resulta el segando dividendo parcial 41894. Consultada la tabla, veo que el mayor múltiplo del divisor contenido en él es 41184, de donde deduzco que la segunda cifra es 9, y así sucesivamente.

124. Está, pues, dado el medio seguro de averiguar en

cada division parcial la verdadera cifra del cociente. Sin embargo, *la tabla auxiliar no se emplea en la generalidad de los casos, por ser larga su formacion* y haber otro medio más breve (si bien no tan seguro) de hallar la cifra conveniente. Este medio es el llamado de TANTEO, y consiste en ver *cuántas veces la primera cifra de cada dividendo parcial* (ó dos primeras si tiene una más que el divisor) *contiene á la primera del divisor*. Esto, que se averigua por el conocimiento que tenemos de la tabla de multiplicar, ofrece una cifra que, si no es la verdadera, difiere generalmente en muy poco de ella, y la razon es la siguiente: la cifra más alta de cada dividendo parcial proviene del producto de la respectiva del cociente por la más alta del divisor, agregando á este producto las reservas de aquel órden que provienen de la multiplicacion de las otras cifras del divisor por todas las del cociente. Así, tratando de buscar el cociente de 14835:43 sin formar la tabla auxiliar, se diria para la primera cifra: 148 entre 43, por la tabla de multiplicar no puedo saber cuál es el *mayor número de veces* que 148 contiene á 43; pero observando que en las dos primeras cifras del dividendo parcial (que dicen 14) está el producto de la primera cifra del divisor (que es 4) multiplicada por la que busco, digo 14 entre 4 y entónces por la tabla sé que es 3. Claro es que esto no es más que *un tanteo ó medio de hallar la cifra buscada por aproximacion*, pues en 14 no sólo está el producto por 4 (primera cifra del divisor) de la cifra deseada, sino tambien las reservas de ese órden que han provenido de la multiplicacion de las otras del divisor, que siguen á la primera, por todas las del cociente y que no tomo en consideracion al hacer el tanteo; y que estas reservas pueden ser tantas, que influyan para que estas dos primeras cifras del dividendo contengan al divisor una vez más de lo que debe indicar la primera cifra del cociente, se ve en infinidad de ejemplos: tal sería si en lugar de ser el ejemplo propuesto fuera 17535:44, en que el tanteo daria: 175 entre 44, ó bien 17 entre 4, corresponde 4 para el cociente, y esto no es exacto, porque la verdadera cifra es 3, puesto que 4×44 da $176 > 175$, y esto sucede por la acumulacion que hay en los 17 millares del dividendo de las reservas de los productos de las demás cifras del cociente por todo el divisor.

Todavía es mayor el error que nos da el tanteo en ciertos ejemplos que pueden presentarse, como en 80035:149, que en la primera division se diria 800 entre 149 ó bien 8 entre 1 á 8. Y esta cifra es tan inexacta cuanto que la verdadera es 5.

125. Para evitar en muchos casos estos errores del tanteo, ó hacer que las cifras que proporciona difieran en pocas unidades de la verdadera, se recurre á *considerar aumentada en una unidad la primera cifra del divisor cuando la que le sigue es* 5 *ó mayor que* 5, pues en estos casos los errores serian mayores y más frecuentes si no se hiciera esto. Así al efectuar 96843:199 si en el tanteo de la primera cifra se dijera 968 entre 199, ó bien 9 entre 1, se tendria por cociente probable 9, lo cual no es exacto, porque el verdadero es 4; y con esto la regla del tanteo daria una cifra que difiere en 5 unidades de la verdadera, lo cual originaria muchas operaciones para irla rebajando hasta encontrar la verdadera, con lo cual el tanteo sería más complicado que la formacion de la tabla auxiliar; pero si observo que el divisor 199, á causa de ser muy grandes las cifras que siguen á la primera, está más cerca de 2 centenas que de la 1 que he considerado para el tanteo, diré 968 entre 199, ó bien 9 entre 2 (obtengo como cifra probable 4, que justamente es la verdadera).

126. En resúmen, por *el tanteo se consigue hallar con brevedad para el cociente una cifra que probablemente es la verdadera, y si no lo es, difiere de la verdadera en pocas unidades*. Se supone que al hacer el tanteo se toma siempre el mayor número de veces que el divisor está contenido.

127. ¿Y qué medio existe para rectificar en cada division parcial la cifra que como probable coloco en el cociente? Es el siguiente: multiplicar esta cifra por el divisor y restar el producto del dividendo parcial; si se puede restar no es grande, y como pequeña no puede ser, es la verdadera. Digo que pequeña no puede ser, pues como tomo el *mayor número de veces* que la primera ó dos primeras cifras del dividendo contienen al divisor, y en esta primera ó dos primeras cifras están acumuladas generalmente las unidades de las reservas de los productos de las otras cifras del cociente por el divisor, claro es que no puede dar el tanteo como cifra probable una que sea pequeña. Sin embargo, á *veces suele tomarse como cifra probable no la mayor que da el tanteo, sino una menor*, porque el calculador considera que rebajándola pondria la verdadera y puede acontecer con esto que ponga una cifra pequeña. Tambien tiene un medio muy sencillo de conocerlo y es que si su *producto por el divisor restado del dividendo parcial deja un resto mayor que el divisor* la cifra hallada es pequeña. Como, por otra parte, para

continuar la operacion es preciso restar de cada dividendo parcial el producto de cada cifra del cociente por el divisor, la prueba de las cifras probables y el procedimiento de la operacion se hacen al mismo tiempo.

128. *La prueba de la division consiste en multiplicar todo el cociente por el divisor, lo cual debe reproducir el dividendo si la division es exacta.*

129. *Si es inexacta y por defecto á este producto se agrega el resíduo, y si por exceso se resta, debiendo obtenerse como resultado el dividendo.*

130. Analizada esta operacion en todas sus partes, vamos á estudiar qué alteracion *sufre el cociente de dos números dados cuando ámbos ó uno solo se multiplican ó dividen por un tercero.*

131. Ante todo notaré que si tengo una igualdad en la que un miembro es un producto de dos factores, es decir, $A=B.C$ me puede representar el resultado de una division exacta, en la que A es el dividendo, B el divisor y C el cociente, ó bien C el divisor y B el cociente, pues esta consideracion es arbitraria.

132. Esto supuesto, si los dos miembros de esta igualdad los multiplico ó divido por un mismo número N, la igualdad subsistirá y tendré

$$A.N=B.C.N \ (1.^{o}) \ \text{y} \ A:N=B.C:N \ (2.^{o})$$

La primera igualdad dice que si tomo $A.N$ como dividendo y B como divisor, el cociente es $C.N$. Ó traduciendo y comparando este resultado con el de la anterior igualdad resulta. Que en las divisiones exactas

1.º *Si el dividendo se multiplica por un número, el cociente queda multiplicado por el mismo número.*

La segunda igualdad tomando B como divisor el cociente es $C:N$ y dice

2.º *Si el dividendo se divide por un número el cociente queda dividido por el mismo número.*

Si en la igualdad $A=B.C$ multiplico y divido por un mismo número N el segundo miembro, la igualdad subsistirá; luego tendré $A = B.C.N{:}N$ (3.º), en la cual si tomo á $B.N$ por divisor, el cociente es $C{:}N$; luego

3.º *Si el divisor se multiplica por un número el cociente queda dividido por el mismo número.*

Ahora, si tomo á $B{:}N$ por divisor entónces el cociente será $C.N$; luego

4.º *Si se divide el divisor por un número, el cociente queda multiplicado por el mismo número.*

Por último, si en las igualdades (1.º) y (2.º) tomo por divisor respectivamente $B.N$ y $B{:}N$ el cociente es C; luego

5.º *Si se multiplican ó dividen el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía.*

133. Todas estas propiedades son en las divisiones exactas. ¿Y en las inexactas? De éstas puede afirmarse lo siguiente:

Sea A el dividendo, B el divisor, C el cociente y R el resto: tendremos $A = B.C + R$.

Si ámbos miembros los multiplicamos ó dividimos por un mismo número, N, tendremos

$$A.N = B.C.N + R.N \text{ y } A{:}N = B.C{:}N + R{:}N.$$

En ámbos casos, tomando á $B.N$ ó $B{:}N$ como divisor, el cociente es C y el resto $R.N$ ó $R{:}N$.

En efecto; como $R < B$, pues R es el resto y B el divisor de una division, es claro que $R.N < B.N$ y $R{:}N < B{:}N$; luego estos son los resíduos; luego

6.º *Si el dividendo y el divisor de una division inexacta se multiplican ó dividen por un mismo número, el cociente entero no varía, pero el resíduo queda multiplicado ó dividido por el mismo número.*

134. El procedimiento de la division admite ciertas abreviaciones en algunos casos:

1.º Cuando el divisor es un número dígito, como sin tabla auxiliar ni tanteos, y sólo por la tabla de multiplicar, se hallan las verdaderas cifras del cociente, no hay necesidad de ir escribiendo los restos de las divisiones parciales para unirles la cifra siguiente del dividendo, sino que se hace mentalmente del modo que sigue. Sea 34705:5. Digo: 34 entre 5 á 6, y sobran 4, que con el 7 son 47; ahora 47 entre 5 á 9, y sobran 2, que con el 0 son 20; 20 entre 5 á 4, y sobra 0, que con el 5 son 5; y, por último, 5 entre 5 á 1; luego el cociente es 6941.

2.º *Para hallar el cociente de un número entero que termina en ceros, dividido por 10, 100, 1000, etc., ó en general por la unidad seguida de ceros, basta suprimir de su derecha tantos ceros como acompañan á la unidad.* Así 34000:1000=34. En efecto; tales cocientes, multiplicados por el divisor, reproducirán el dividendo (80).

3.º *Para dividir un número entero cualquiera, por la unidad seguida de ceros, se separan de la derecha del dividendo tantas cifras como ceros acompañan á la unidad. La parte que está á la izquierda es el cociente y la de la derecha el resíduo.* Así 347632:1000 da 347 de cociente y 632 de resíduo: en efecto; 347632=347000+632, el primer sumando da de cociente, segun lo anterior, 347, y el segundo es el resíduo, pues teniendo tantas cifras como ceros acompañan á la unidad, será menor que el divisor.

4.º *Si el dividendo y el divisor terminan en ceros se suprimen igual número de ellos á la derecha de ámbos, y se halla el cociente de los números resultantes.* El cociente es el mismo que el de los números propuestos, y sólo el resto ha quedado dividido por la unidad seguida de tantos ceros como se han suprimido.

En efecto; suprimir cierto número de ceros en dividendo y divisor es, segun se ha visto, dividirlos por la unidad seguida de igual número de ceros; y segun el principio demostrado (133-6.º), el cociente no varía, pero el resto queda dividido por dicho número.

135. *Para dividir un producto indicado por un número, basta dividir uno cualquiera de sus factores.* Es decir, que 5.8.7:4 da de cociente 5.2.7.

En efecto; si este cociente se multiplica por el divisor 4, y se elige para efectuar la multiplicacion (96) al factor que se dividió, se reproducirá el dividendo.

136. *Para dividir un producto indicado por otro producto indicado se divide el dividendo sucesivamente por cada uno de los factores del divisor*. Así 8.7.9:2.7.3 dará de cociente 4.1.3. Tal producto es el verdadero cociente, porque multiplicado por el divisor (97) dará el dividendo propuesto.

137. *Para dividir una suma indicada por un número, se divide cada uno de los sumandos y se suman los cocientes parciales*. Estas divisiones se indican encerrando la suma indicada dentro de un paréntesis. Así para dividir la suma 18+12+60 por el número 6, se escribirá (18+12+60):6 y el cociente es 3+2+10. En efecto; si este cociente se multiplica por el divisor (90) precisamente reproduce el dividendo.

138. *Para dividir una diferencia indicada por un número, se dividen el minuendo y el sustraendo y se restan los cocientes parciales*. Tambien se indica esta operacion encerrando la diferencia indicada dentro de un paréntesis. Así para dividir 27—18 por el número 9 se escribirá (27—18):9; y efectuando segun la regla, se tendrá por cociente 3—2. En efecto; es evidente que si este cociente se multiplica (92) por el divisor, se obtendrá el dividendo.

139. *Para hallar el cociente de una serie de números en suma ó diferencia indicadas, por un tercero, se divide cada uno de ellos por el divisor y se suman los cocientes de los sumandos y se les restan los de los sustraendos*. Así el cociente de (8+4—6+10—2):2 es 4+2—3+5—1. En efecto; es evidente que si este cociente se multiplica (90 y 92) por el divisor se obtendrá el dividendo.

Ejercicios prácticos:

1.º ¿Por qué se empieza la division por las unidades más altas del dividendo y nó por las inferiores?

2.º ¿Qué alteracion puede sufrir el cociente de dos números enteros si al dividendo ó al divisor ó á ámbos se les suma una unidad?

3.º ¿Qué alteraciones se deben hacer en dos números dados para que su cociente aumente ó disminuya en una unidad?

4.° ¿Qué número es el que multiplicado por 14 aumenta en 3783 unidades? Respuesta: 291.

5.° ¿Qué número es el que multiplicado por 48 y 25, y dividiendo su producto por 104, da de cociente el triplo de 1850? Respuesta: 481.

CAPÍTULO III

De algunas propiedades de los números enteros.

140. *Un número entero se dice* MÚLTIPLO *de otro cuando lo contiene exactamente.*

141. *Un número entero que divide á otro exactamente se llama* FACTOR DIVISOR Ó SUBMÚLTIPLO *del primero.*

La notacion $m.7$ ó $m.3$, quiere decir múltiplo de 7 ó de 3.

142. *Todo divisor de varios sumandos lo es de la suma.*

Sean los sumandos A, B, C, y suponiendo que todos son múltiplos de un tercero, F, y que el primero lo contenga n veces, el segundo p veces y el tercero q, se tendrán las igualdades $A=nF$; $B=pF$; $C=qF$. Sumándolas ordenadamente y sacando en el segundo miembro de factor comun F, se tendrá $A+B+C=(n+p+q)F$. Cuya igualdad hace ver que la suma $A+B+C$ contiene al factor F un número exacto de veces.

COROLARIOS. *Todo divisor de un número lo es: primero de sus múltiplos; segundo de sus potencias.* En efecto: 1.° Un múltiplo de un número no es más que la suma de este número consigo mismo várias veces; luego el factor de tal número divide á todo los sumandos y por tanto á la suma. 2.° Demostrado que el divisor de un número lo es de sus múltiplos, lo está respecto á sus potencias, que no son más que ciertos múltiplos de los números.

143. *Todo divisor de dos números lo es de su diferencia.*

Sean dos números A y B; F un divisor de ámbos; m y n las veces que está repetido en A y B respectivamente: se tiene $A=$

mF; $B=nF$. Restando ordenadamente y sacando F de factor comun se tendrá $A-B=(m-n)$ F. Cuya igualdad demuestra que la diferencia $A-B$ es un múltiplo de F.

Caractéres de divisibilidad por algunos números enteros.

144. Un número es *par ó impar, segun sea ó nó divisible por* 2.

145. *Todo número que termina en cero ó cifra par es divisible por 2.* En efecto; todos los que terminan en ceros son múltiplos de diez (53) y á su vez de 2, pues $10=2.5$. Los que terminan en cifra *par* se pueden descomponer en dos sumandos; por ejemplo: $74=70+4$; uno sus decenas, que son divisibles por 2, por terminar en cero, y el otro la cifra de sus unidades, que es par. Luego la reunion de estos sumandos, que es el número dado, tambien es divisible (142) por 2.

146. *Todo número que termina en cero ó* 5 *es divisible por* 5. (La demostracion análoga á la anterior.)

147. *Un número es divisible por* 9 *ó por* 3 *si lo es la suma de sus cifras.* En efecto; una unidad, decena, centena, etc., ó en general una unidad de un órden cualquiera, es un múltiplo de 3 ó de 9 más uno. (Para probar esto, basta dividir 1, 10, 100, 1000, etc., por 3 ó por 9, y se tendrá de resto 1.) Luego dos, tres, cuatro.... nueve unidades, de un órden cualquiera, son múltiplos de 3 ó 9 más uno, dos, tres, cuatro.... nueve unidades simples.

Esto supuesto, sea un número cualquiera, 6582, que descompuesto en sus colecciones de unidades se tendrá respecto de 3:

$6000=m.3+6$ y tambien respecto de 9 $6000=m.9+6$

$500=m.3+5$ $\quad 500=m.9+5$

$80=m.3+8$ $\quad 80=m.9+8$

$2=m.3+2$ sumando ordenadamente $2=\quad 2$

$6582=m.3+(6+5+8+2)$ $\quad 6582=m.9+(6+5+8+2)$

Cuyos resultados dicen, que el segundo sumando en que se pueden descomponer los números, ó sea de la suma de sus cifras, depende que sean ó nó múltiplos respectivamente de 3 ó de 9.

148. *Un número es divisible por* 11, *si la diferencia entre la suma de las cifras de lugar impar y las de lugar par, es cero, once ó múltiplo de* 11.

En efecto; toda unidad de órden impar es un múltiplo de 11 *más uno* (lo cual se prueba dividiendo 1, 100, 10000, etc., por 11, y siempre dan de resto 1); luego dos, tres, cuatro, etc. unidades de órden impar, son múltiplos de 11 más dos, tres ó cuatro unidades simples.

Por otra parte, toda unidad de órden par es un múltiplo de 11 *ménos uno* (pues si se divide 10, 100, 100000, etc., por 11, dan de resto 10); luego dos, tres, cuatro unidades de órden par son múltiplos de 11 ménos dos, tres, cuatro unidades simples.

Segun esto, sea un número cualquiera, 4859; descomponiéndolo en sus colecciones de unidades se tendrá, segun lo anterior:

$$\begin{aligned} 4000 &= m.11-4 \\ 800 &= m.11+8 \\ 50 &= m.11-5 \\ 9 &= \quad\;\; 9 \end{aligned}$$

Sumando ordenadamente $4859=m.11+(8+9)-(4+5)$.

Lo cual dice que de la diferencia de las cifras de lugar impar, ménos las de lugar par, depende que el número propuesto se componga de partes divisibles por 11, y por tanto que él lo sea.

149. MÁXIMO COMUN DIVISOR DE VARIOS NÚMEROS *es el mayor que los divide exactamente.*

Las tres letras *m. c. d.* se leerán máximo comun divisor.

150. *Todo factor comun de dividendo y divisor de una division inexacta divide al resto, y recíprocamente todo factor del resto y divisor divide al dividendo.* En efecto; sea el dividendo 56, el divisor 21; el cociente es 2 y el resto 14: se tiene $14=56-2\times21$. Todo factor de 56 y 21 lo es de 21×2, por ser un múltiplo de 21, y por tanto de 14, que es la diferencia (91) de 56 y 2×21. Recíprocamente como $56=2.21+14$ todo fac-

tor de 21 y 14 lo es de 2.21 por ser un múltiplo de 21, y por tanto de la suma (90) de 2.21 y 14, que es 56.

Idéntica propiedad existe para los resíduos por exceso. Su demostracion puede servir de ejercicio, por ser análoga á la anterior.

Corolario. *El m. c. d. de dividendo y divisor de una division inexacta, es el mismo que el del divisor y resto.* En efecto; sean A y B dos números y R el resto de su division. Sea M el m. c. d. de A y B; sea M' el m. c. d. de B y R. Por ser M un factor de A y B lo es de B y R; pero como M' es el mayor de los factores entre B y R, es claro que M no puede ser mayor que M'. Recíprocamente, por ser M' factor de B y R, lo es de A y B, y como M es el mayor de los factores entre A y B, tampoco M' puede ser mayor que M. Si, pues, M no es mayor que M', ni M' mayor que M, precisamente $M=M'$.

151. *Para hallar el m. c. d. de dos números, se divide el mayor por el menor; si dan cociente exacto, el menor será el m.c.d.; si no lo dan, se continúa dividiendo cada divisor por el resto hasta obtener cociente exacto, en cuyo caso el último divisor será el buscado.*

En efecto; sean los números cuyo m. c. d. se busca 840 y 288; este m. c. d. no puede ser mayor que 288, puesto que ha de dividirlo, pero sí puede ser igual á 288, si éste divide á 840. Ensayando la division, se ve que no es exacta y deja de resto 264; pero como el m. c. d. de los números propuestos es el mismo que el del menor, y el resto de su division, queda la cuestion reducida á investigar el de 288 y 264, para lo cual se volverá á ensayar la division del mayor por el menor, y así sucesivamente. La operacion se dispone:

Cocientes	2	1	11
840	288	264	24 m.c.d.
Resíduos 264	24	0	

152. La propiedad fundamental del método de las divisio-

nes sucesivas para la investigacion del m. c. d. de dos números es la demostrada (150), y como ésta se verifica lo mismo para un *cociente por exceso*, ó sea para un *resto* por *defecto*, de aquí una simplificacion en el método, que es la siguiente. Tanto más sencilla será la investigacion, cuanto ménos divisiones haya que efectuar, y es claro que miéntras más pequeños sean los restos que sirven despues de divisores, más pronto se llegará al último que da cociente exacto, que es el m. c. d. *Segun esto, si en las divisiones sucesivas se obtiene un resto mayor que la mitad del divisor, se fuerza la unidad en el cociente, y el nuevo resto, por defecto, será menor que la mitad del divisor.*

Así al investigar el m. c. d. entre 458 y 126, la primera division da 3 de cociente y 80 de resto; y como $80 > \frac{1}{2}$ de 126 se fuerza la unidad y se pone 4 de cociente, y el nuevo resto, por defecto, es 46; con esto la segunda division será de 126:46, la cual da 34 de resto; se fuerza la unidad y el resto será 12; se divide 46 por 12 y el resto es 10, y forzando la unidad será 2; se divide 12 por 2, y como da cociente exacto, 2 es el m. c. d. Con esto se ahorran algunas divisiones, pues sin forzar la unidad se habria tenido que ejecutar siete divisiones.

153. *Todo factor de dos números lo es de su m. c. d.* En efecto; el número que divida á los dos propuestos divide al resto de su division, y como este resto pasa á ser divisor en la segunda division, tambien el número de que se trata divide al dividendo y divisor de esta segunda division, y por tanto al resto, y así sucesivamente hasta el último resto, que es el m. c. d.

De esto se deduce, que si se reconoce desde luégo algun factor comun en los números dados para investigar su m. c. d., se puede suprimir en todos ellos y tenerlo despues en cuenta para multiplicar el m. c. d. de los números resultantes por este factor ó factores, que se suprimieron en los dados. Así, pues, si se dan los números 18000 y 1400 para hallar su m. c. d. desde luégo se reconoce que tienen el factor comun 100; se les suprime y quedan 180 y 14; éstos tienen el factor 2, se suprime y quedan 90 y 7. Se halla el m. c. d. de éstos, que es 1, y el de los propuestos será $1 \times 2 \times 100 = 200$.

154. *Si dos números se multiplican ó dividen por un tercero*

su m. c. d. queda multiplicado ó dividido por el mismo número.

En efecto; el m. c. d. es el último resto de várias divisiones sucesivas en las que, á partir del primer dividendo y divisor, todos se han multiplicado ó dividido por un número, y se sabe que los restos van sufriendo la misma alteracion (133-6.º)

155. *Para hallar el m. c. d. de varios números se busca el de dos de ellos, despues entre el m. c. d. hallado y el tercer número, y así sucesivamente hasta el último número; éste último m. c. d. será el pedido.*

En efecto; sean tres números, A, B y C, cuyo m. c. d. se busca, y sea éste M. Como el número M divide á los propuestos, tambien dividirá al m. c. d. de A y B, que se llamará M', y por consiguiente al m. c. d. de M' y C, que se llamará M''. Luego el m. c. d. M que se busca no es mayor que M'', puesto que lo divide exactamente. Ahora bien; como M'' divide á C y M', por ser su m. c. d., y por tanto á A y B (múltiplos de M') dividirá tambien á M, m. c. d. de A, B y C; luego M'' no es mayor que M. Por tanto, precisamente $M=M''$. La investigacion de M'' es la que prescribe la regla.

Ejemplo. Sean los números 30, 45 y 70, cuyo m. c. d. se busca: el de 30 y 45 es 15, y el de 15 y 70 es 5; luego 5 es el de los tres números dados.

Fácilmente se extiende el razonamiento anterior al caso de más de tres números. En la práctica se busca el primer m. c. d. entre los dos números más pequeños de los propuestos, porque los cálculos son más sencillos.

156. *Los cocientes de dividir varios números por su m. c. d. no tienen más factor comun que la unidad.* Sean A, B, C tres números y M su m. c. d.; a, b y c los cocientes respectivos; por M se tiene $A=aM$, $B=bM$, $C=cM$. Si los números a, b, c tuvieran un factor comun, $d>1$, se tendria llamando a', b', c' sus cocientes por él, que $a=a'd$, $b=b'd$, $c=c'd$; y sustituyendo, sería $A=a'dM$, $B=b'dM$, $C=c'dM$; lo cual no puede admitirse, puesto que manifestaria que A, B y C tenian un divisor comun, dM, que es mayor que M, contra el supuesto de que M es el m. c. d.

§ II. Números primos.—Descomposicion en factores primos. Mínimo comun múltiplo.

157. Números primos. *Se llama número primo el que no es divisible más que por sí mismo y la unidad*; así 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, etc., son números primos.

Dos ó más números se llaman primos entre sí cuando no tienen más factor comun que la unidad; así 8 *y* 9 *son primos entre sí.*

Se llaman primos dos á dos, varios números propuestos cuando cada uno es primo con todos los demás.

158. *Para formar una tabla de números primos, desde el* 1 *hasta cierto límite, se escriben los números impares comprendidos y se tachan el cuadrado de* 3 *y los que se cuenten de tres en tres; el cuadrado del siguiente, que es* 5, *y los que vayan de cinco en cinco, y así sucesivamente hasta que el cuadrado de uno de los subsiguientes no tachados sea mayor que el límite propuesto. A los numeros no tachados se agrega el* 2.

Con este procedimiento se excluyen todos los múltiplos de 2, puesto que no se escriben los pares: despues los múltiplos de 3, toda vez que excediendo cada impar al anterior en 2 unidades, los que se cuenten de 3 en 3 se exceden en 6, y si el primero tachado es un múltiplo de 3, como efectivamente lo es el 3^2, todos los que siguen de 3 en 3 tambien lo son. Análoga justificacion se haria para con todos los que se tachan.

Este método se llama *Criba de Eratóstenes*.

159. *Un número dado es primo si, dividido por los primos menores que él, se llega á obtener un cociente inexacto menor que el divisor*. En efecto; si ensayada la division de un número por los primos 2, 3, etc., menores que él, se llega á un cociente inexacto menor que el divisor, se tiene seguridad de que no podrá obtenerse ya cociente exacto, pues de lo contrario el número sería divisible por este cociente (75-3.º) que es menor que el divisor, lo cual se ha visto que no se verifica: así 37 dividido por los primos 2, 3, 5, 7, no da cociente exacto, pero

al dividirlo por 7 da de cociente inexacto 5; y ya no puede obtenerse cociente exacto, pues habia de ser menor que 5 y dividir á 37, lo cual no se verifica.

160. *Dos números enteros consecutivos son primos entre sí.* Pues todo factor comun que tuviesen habia de dividir á su diferencia (91), que es 1; luego no pueden tener más factor comun que 1.

161. *Los números primos son ilimitados.* En efecto; *sean* 1, 2, 3...*n los de una tabla;* si se multiplican darán un producto que se llamará P, y si se le añade una unidad se tiene $P+1$. Ahora, si $P+1$ es un número primo, queda demostrado que n no es el mayor primo que existe; y si $P+1$ no es primo, el factor que lo divide no puede ser ninguno de los de P (160), y como en P están todos los factores primos, desde 1 hasta n, claro es que el factor primo que divida á $P+1$ será mayor que n. Queda demostrado que n no es el mayor primo.

Como lo mismo se puede demostrar con cualquier primo que limite una tabla, por grande que sea, es claro que son ilimitados.

162. *Si un número primo no es divisor de otro, los dos son primos;* pues no teniendo un número primo más factores que él mismo y la unidad, si él mismo no divide al otro número, no puede haber entre ámbos más factor comun que la unidad.

COROLARIO. *Dos números primos son primos entre sí, pues sólo pueden tener de factor comun á la unidad.*

163. *Si un número divide á un producto de dos factores, y es primo con uno de ellos, precisamente divide al otro factor.*

Sea AB el producto y P un factor de él; supuesto que A y P son primos, su m. c. d. es 1; si ámbos números se multiplican por B, se tendrá AB y BP, cuyo m. c. d. será B (154). Como el número P divide á AB por hipótesis, y á PB por ser uno de los factores, precisamente divide (153) á su m. c. d. que es B.

164. *Si un número* PRIMO *divide á un producto de varios factores, divide necesariamente á uno de ellos.* Sea el producto $a. b. c.$, y p un número *primo* que lo divida. Considerando al

producto como si estuviera compuesto de dos factores, el uno a y el otro bc, se tendrá que si p divide á a, el teorema está demostrado, y si no será primo con a (162) y por tanto dividirá (163) al otro factor bc. En este caso, si divide á b, el teorema está demostrado; si no, será primo con él y precisamente dividirá á c. Lo mismo se diria en el caso de más de tres factores.

COROLARIOS. 1.º *Si un número primo divide á una potencia, divide á la base.* En efecto; una potencia es un producto en el que todos los factores son iguales á la base.

2.º *Si dos números son primos entre sí, sus potencias tambien lo son.* En efecto; las potencias no pueden tener más factores comunes que los de sus bases, y se supone que éstas son números primos.

165. *Si un número es divisible por varios primos, dos á dos, lo es por el producto de ellos.*

En efecto; sea A un número divisible por a, b, c, primos dos á dos. Dividiendo A por a y llamando p al cociente exacto, se tiene $A=a.p$; ahora b divide por hipótesis á A, luego dividirá á su igual el producto $a.p$, pero b es primo con a (tambien por hipótesis); luego (163) dividirá á p; llamando q al cociente exacto de p dividido por b se tendrá $p=b.q$, y sustituyendo este valor de p, será $A=a.b.q$; como tambien c divide á A, dividirá al producto $a.b.q$, y siendo primo con a y b precisamente divide á q; llamando r al cociente de q dividido por c será $q=c.r$, y sustituyendo $A=a.b.c.r$, cuya igualdad manifiesta que A es divisible por el producto $a.b.c$ y da de cociente exacto r.

166. *Descomponer un número en sus factores primos es trasformarlo en un producto de factores primos.*

Para descomponer un número en sus factores primos se dividen el número y los cocientes sucesivos por los factores primos que tengan, hasta llegar á un cociente 1, y el producto de los divisores será el número dado. La razon es evidente, pues en la primera division se ponen de manifiesto un factor primo y un cociente, que, descompuesto á su vez, da otro factor primo y otro cociente, y sustituido en la primera descomposicion se tienen dos factores primos y el segundo cociente, y así sucesivamente. La operacion se dispone del modo que sigue. Sea el número 360:

EXPLICACION. — Se escribe el número, y á su derecha se traza una raya vertical; á la derecha de esta raya se van escribiendo los divisores, y á la izquierda los cocientes sucesivos. En el ejemplo $360=2^3.3^2.5$.

$$\begin{array}{r|l} 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

La serie de sustituciones que pone de manifiesto la igualdad de 360 al producto de los divisores primos es la siguiente: en la primera division se tiene $360=2.180$; pero como en la segunda division, $180=2.90$, sustituyendo en la anterior este valor de 180, se tiene $360=2.2.90$; en la tercera division $90=2.45$, y sustituyendo esta descomposicion de 90, se tiene $360=2.2.2.45$; en la cuarta division $45=3.15$; luego $360=2.2.2.3.15$; por último, en la quinta division $15=3.5$; luego $360=2.2.2.3.3.5$, ó sea $=2^3.3^2.5$.

167. *Un mismo número no puede descomponerse en dos sistemas de factores primos diferentes.* En efecto; si un número N descompuesto una vez diese $N=2.3^2.5$, y otra vez $N=2.3.7$, se tendria $2.3^2.5=2.3.7$. El segundo miembro es divisible por el número *primo* 7; el primero debe serlo tambien; pero como 7 es primo, tiene que dividir á alguno de los factores del primer miembro (164), que siendo á su vez primos y diferentes de 7, no son divisibles por él (162). Luego 7 no divide al primer miembro, y, por tanto, la igualdad establecida es absurda; por consiguiente, es imposible que N admita dos descomposiciones diferentes en factores primos.

Aunque todos los factores primos fuesen los mismos, la descomposicion sería diferente si los exponentes no fuesen idénticos. Así no se puede tener $N=2^3.5^2.7$ y esta otra $N=2^4.5.7$; pues si esto fuera posible, se tendria $2^3.5^2.7=2^4.5.7$; de donde dividiendo ámbos miembros por 2^3 seria $5^2.7=2.5.7$, y se está en el caso anterior, pues el segundo miembro es divisible por el factor primo 2 y el primero no lo es.

168. La descomposicion en factores primos ofrece el medio de resolver estas dos cuestiones: primera, *hallar todos los divisores simples y compuestos de un número;* segunda, *hallar el mínimo comun múltiplo de varios números.*

169. PARA HALLAR TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO *se descompone el número en sus factores primos; hecho esto se escriben en una línea la unidad y todas las potencias del primer factor primo; despues se multiplican el segundo factor y todas sus potencias sucesivas por los números escritos, y así sucesivamente.* En efecto; de este modo se forman números, cuyos factores primos están entre los del propuesto, y, por tanto, serán divisores de éste. Además, se forman todas las agrupaciones posibles con sus factores primos.

EJEMPLO. Hallar los divisores de 360. Como $360=2^3.3^2.5$, se dispondrá:

1	2	4	8	Unidad y potencias del primer factor 2.
3	6	12	24	Producto de la línea anterior por 3 y por $3^2=9$.
9	18	36	72	
5	10	20	40	Producto de los números anteriores por 5.
15	30	60	120	
45	90	180	360	

170. *Se llama mínimo comun múltiplo de varios números el menor número que es* DIVISIBLE *por todos los propuestos.* Las tres letras *m. c. m.* se leen mínimo comun múltiplo.

171. *Para hallar el m. c. m. de varios números se descomponen en sus factores primos y se forma el producto de las mayores potencias de los diferentes factores primos de que se componen.*

EJEMPLO. El mínimo comun múltiplo de 6, 8, 9 y 15 será $2^3.3^2.5$, teniendo en cuenta que ($6=2.3$; $8=2^3$; $9=3^2$; $15=3.5$). En efecto; el número así formado será múltiplo de los dados, porque contiene todos sus factores primos, y cualquier factor que se le suprimiera le haria perder esta cualidad respecto de alguno de los propuestos.

NOTA 1.ª Cuando entre los números dados los hay que son factores de los otros, no se tienen en cuenta éstos que dividen á otros de los dados, porque sus factores primos están entre los de éstos. Así, pedido el m. c. m. de los números 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24 y 30, no se considerarian el 4, 5, 6, 8, 10, 12 y 15, por ser factores de los siguientes 18, 20, 24 y 30. Descomponiendo éstos en sus factores primos, y reuniendo las mayores potencias de los diferentes, se tendria $2^3.3^2.5=360$, que es el m. c. m. de todos los propuestos.

172. Conocido ya que todo número ó es primo ó un producto de factores primos, y sabiendo que todo factor de varios números lo es de su *m. c. d.*, es claro que todos los factores *primos* comunes á varios números entran en su *m. c. d.* y que ningun factor primo que no sea comun puede entrar á constituirlo, pues debia dividir á los números dados, que son múltiplos de su *m. c. d.* Luego se puede afirmar que el *m. c. d.* de varios números *no es otra cosa que el producto de todos los factores primos comunes á ellos.* Este nuevo conocimiento de la composicion del *m. c. d.* ofrece el medio de investigarlo por la descomposicion de los números dados en sus factores primos. Así para hallar el *m. c. d. de vários números se descomponen en sus factores primos, y se multiplican todos los comunes elevados á la menor potencia que tengan en alguno de los dados,* pues las menores potencias son las comunes. Así, dados los números 37800, 360, 80, 1575 y 240 para hallar su m. c. d., se tiene $37800=2^3.5^2.3^3.7$; $360=2^3.5.3^2$ y $1575=3^2.5^2.7$: los factores comunes son 3^2 y 5, y el m. c.d. $3^2.5=45$.

173. De esta descomposicion se infiere tambien que en la investigacion del m. c. d. por divisiones sucesivas se *puede suprimir en el dividendo, ó divisor, todo factor primo que se reconozca que no es comun,* pues este factor no ha de entrar en el *m. c. d.* y con esto se simplifica la operacion. Así, las simplificaciones que se deben tener presentes para la investigacion del *m. c. d.* por divisiones, son: primera, *suprimir los factores que á primera vista se reconozcan como comunes á los números con los cuales se opera;* segunda, *suprimir algun factor primo de uno de ellos no comun con el otro;* y, tercera, *hacer que todos los restos sean menores que la mitad del divisor:* teniéndolas presentes para el ejemplo siguiente, de investigar el *m. c. d.* entre 600600 y 148580, desde luego suprimo en ámbos el *factor comun* 10 y quedan 60060 y 14858; suprimo el 2, *que es comun,* y quedan 30030 y 7429. Antes de dividir suprimo en el primero los factores *primos* 5 y 2, no *co-*

munes al segundo, y quedan 7429 y 3003: suprimo en el segundo el factor primo 3, *no comun* al primero, y quedan 7429 y 1001; los divido:

	7	4...5	211
7429	1001	211	1
422	157 54	0	

Como el primer resto 422 tiene el factor 2, *no comun* á 1001, lo suprimo y tomo como divisor 211; el resto por exceso es $157 > \frac{1}{2}211$; lo tomo por defecto, y es 54; reconozco en éste el factor 2, *no comun* con 211, y lo suprimo; queda 9: tambien tiene el factor 3, no comun, y lo suprimo; queda 3: lo suprimo tambien por no comun, y queda 1: el cociente de 211 por 1 ha de ser exacto, luego 1 es el m. c. d. que obtengo: si ahora lo multiplico por los factores *comunes suprimidos*, que son 10 y 2, se tiene $1.10.2=20$, que es el m. c. d. de los propuestos, hallados en tres divisiones.

174. Es evidente tambien que si el m. c. d. es el producto de todos los factores primos comunes de varios números, cuando éstos sean dos, el cociente de dividir uno de ellos por el m. c. d. de ámbos, será el producto de los factores primos del que se divide, *no comunes* con el otro número. Así en los números 3080 y 728, cuyo m. c. d. es 56, en éste se hallan todos los factores *primos comunes* á los dos; luego si divido 3080 por 56, el cociente 55 es el producto de todos los factores primos de 3080 *no comunes* con 728. ¿Y qué propiedades tendria el número que resultase de multiplicar este cociente 55 por el otro número dado 728? El producto 55×728 contendria: primero, todos los factores comunes á los dados, toda vez que en 728 está el *m. c. d.* de los dos, que es el producto de los comunes; segundo, todos los factores de 728 *no comunes* con 3080. que están en el otro factor que con el máximo componen á 728; y tercero, todos los factores primos de 3080, que no son comunes con 728, los cuales se hallan en 55. En resúmen: el producto 55×728 contiene *todos los factores primos, comunes y no comunes, de los dos dados;* es decir, que los contiene á todos, y los *comunes* no están repetidos, pues sólo entran una vez en el m. c. d.; luego tal producto es un múltiplo de los números dados, y el menor posi-

ble. Es decir: es el *mínimo comun múltiplo* de 3080 y 728. Luego *para hallar el m. c. m. de dos números se halla su m. c. d., se divide uno de ellos, y el cociente se multiplica por el otro.*

175. Si se tratase de tres ó más números, el procedimiento sería, por ejemplo, para tres, A, B, C, hallar el m. c. m. de A y B: sea éste $M.B$. Ahora se halla el m. c. d. entre $M.B$ y C; se divide C por este m. c. d., y el cociente M' se multiplica por MB; el producto MBM' es el m. c. m. de los tres números. La justificacion de esto puede servir de ejercicio.

CAPÍTULO IV

Fracciones ó quebrados.

§ I. Introduccion

176. Se dijo que para expresar la cantidad por números era preciso escoger una parte de ella como unidad y ver cuántas veces la contenia. La expresion de estas veces era el número, el cual era entero si la contenia exactamente. Pero ¿cómo expresar una cantidad que no contiene exactamente á la unidad elegida? Ó en otros términos: siendo la medida de las cantidades una operacion de dividir, ¿cómo expresar el cociente de dos cantidades, cuando el dividendo no contiene exactamente al divisor?

177. La solucion de estas cuestiones tambien se indicó, pues siendo la unidad una cantidad, y por tanto divisible, se dijo que en estos casos se consideraba á la unidad dividida á su vez en partes iguales, y que si alguna de estas infinitas partes en que puede dividirse, estaba contenida exactamente en la cantidad que se mide, ya podria expresarse ésta por números; pero que estos números no eran enteros respecto de la unidad primitiva, sino que expresaban ciertas partes de ella.

Aclaremos esto con un ejemplo: trato de medir la distancia entre dos puntos y veo que no contiene exactamente á la unidad escogida, ya porque desde el último punto en que se colocó la medida, sobra un poco de distancia *menor* que aquélla, ya sea porque desde luego toda la distancia que trato de medir es *menor* que la medida que empleo. Así es que la cuestion se presenta si, por ejemplo, con el metro trato de medir, ó lo tomo como unidad para expresar una distancia *menor* que el metro. No pudiendo ser la expresion de tal distancia ni *uno* ni *dos*, etc., metros enteros, y conviniendo expresarla por metros, considero á éste dividido, por ejemplo, en diez partes iguales, ó ciento, ó mil, etc., en las que sean suficientes para que una de ellas esté exactamente contenida en la distancia que trato de expresar por *metros*. Supongamos que esta parte fuera una de las *diez* en que primero se dividió y que la distancia contuviera á esta parte siete veces exactamente. ¿Cómo expresar esto por medio de números? Claro es que si esta parte del metro fuese la unidad misma en que se quiere expresar la distancia, la expresion será el número entero, 7 de estas unidades; pero si queremos referir la distancia al metro entónces sería 7 partes del metro dividido en 10.

Se ve, pues, que la expresion fraccionaria de la cantidad en los casos concretos, es puramente relativa á la unidad que se emplea, y originada por la division de una cantidad por otra mayor que ella. Siendo imprescindible en los cálculos de los abstractos, tener que dividir un número menor por otro mayor, ha sido preciso inventar una expresion que indicase estos cocientes, que no son números enteros, y esta ha sido la de escribir el dividendo y debajo al divisor separados por una raya; así el cociente de 5 dividido por 7 se escribe $\frac{5}{7}$ y se lee cinco sétimos. En abstracto esto quiere decir cinco partes de la unidad dividida en siete, y en los casos concretos, $\frac{5}{7}$ de libra, que la unidad empleada es la sétima parte de la libra y que la cantidad contiene á esta unidad cinco veces.

178. Tales cocientes se llaman números *quebrados* ó fraccionarios.

179. Considérense, pues, en abstracto ó en concreto, se llama número fraccionario *el que expresa una parte ó la reunion de várias partes iguales de la unidad.*

180. Los fraccionarios se escriben por medio de dos números enteros separados por una raya. El que hace de divi-

dendo se llama *numerador* y el que sirve de divisor *denominador;* el segundo dice las partes en que se considera dividida la unidad, y, por tanto, *denomina la unidad empleada; da la especie;* el numerador expresa *cuántas de estas partes se toman; numera, cuenta* las unidades denominadas que tiene el quebrado. Estos números aisladamente se llaman *términos del quebrado*. Su lectura es: primero el numerador y despues el denominador, añadiéndole á éste la terminacion de los ordinales si no pasa de diez, y si pasa la de *avos:* así $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, se leen tres quintos, cuatro sétimos; y $\frac{7}{31}$, $\frac{293}{7209}$, se leen siete treinta y un *avos*, doscientos noventa y tres, siete mil doscientos nueve *avos*.

181. La perfecta identidad de conceptos en los quebrados, ya se consideren como *cocientes indicados, ya como números que expresan partes de la unidad*, hace que se puedan justificar los métodos de su cálculo bajo dos aspectos.

Las consideraciones que deben tenerse presentes para la comparacion de magnitud de dos quebrados son las siguientes:

182. *Si dos quebrados tienen igual denominador es mayor el que tiene mayor numerador*. La razon es evidente: $\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$, porque siendo $\frac{1}{7}$ la unidad de ámbos, el primero tiene 5 de éstas y el segundo 3.

183. *Si dos quebrados tienen igual numerador es mayor el que tiene menor denominador*. Tambien es la razon clara, puesto que $\frac{3}{5} > \frac{3}{7}$, porque constando ámbos de las mismas 3 unidades, las del primero son mayores que las del segundo, toda vez que las quintas partes de la unidad son mayores que las sétimas partes, pues miéntras en ménos partes se divide la unidad mayores son estas partes.

184. *Un quebrado cuyo numerador es igual á su denominador vale una unidad entera*. Así $\frac{7}{7} = 1$; y en efecto, si la unidad se divide en siete partes y se reunen las siete, claro es que se forma la unidad.

185. De aquí que *una unidad reducida á fraccion está re-*

presentada por un quebrado cuyo numerador es igual á su denominador. Así $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, etc., son expresiones de una unidad.

Dada la especie (ó, lo que es lo mismo, el denominador) de una fraccion, *para reducir una unidad á quebrado de la misma, basta dividir el denominador dado, por sí mismo.*

Estas formas de la unidad son artificios para los cálculos, pues más sencillo es decir 1, que no, por ejemplo, $\frac{344}{344}$.

186. *Tales quebrados se llaman impropios y tambien aquellos en que el numerador es mayor qne el denominador;* por ejemplo, $\frac{46}{5}$, $\frac{37}{9}$.

187. En oposicion este nombre al de *propios,* dado á los *en que el numerador es menor que el denominador.*

188. El nombre de impropios se les da porque tales formas son artificiales y maneras de expresar una ó muchas unidades enteras solas, ó con fraccionarias. Tales *fracciones impropias contienen enteros* y el hallarlos se llama *sacarle los enteros que contiene.*

Sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{39}{9}$; como cada $\frac{9}{9}$ es una unidad entera, la fraccion propuesta tendrá tantas unidades enteras como $\frac{9}{9}$ contenga: el numerador numera, cuenta 39 de estas partes, luego aquí la cuestion es hallar cuántas veces 39 contiene á 9. Como 39 y 9 son enteros, este problema lo resuelve la division; y como 39 contiene á 9 cuatro veces y sobran 3, se dice que el quebrado $\frac{39}{9}$ equivale á 4 enteros y $\frac{3}{9}$, lo cual se escribe $4\frac{3}{9}$; sobreentendiéndose el signo $+$ entre el entero y el quebrado.

189. *Tales números compuestos se llaman mixtos, porque constan de entero y fraccion.*

Si la division fuese exacta, por ejemplo en $\frac{48}{6}$, la cual da de cociente 8, se dice $\frac{48}{6}=8$, y esto es una manera de escribir el número 8 por medio de una operacion indicada.

190. Recíprocamente si se diera un mixto, por ejemplo $4\frac{3}{9}$, y se quisiera poner bajo la forma de quebrado (á lo cual se llama *incorporacion de mixtos)*, la operacion sería la inversa, pues se diria: para incorporar ó sumar las unidades del entero con las del quebrado, preciso es que sean homogéneas, ó sea que se refieran las enteras al $\frac{1}{9}$ unidad del quebrado; y se tiene, pues, que como cada unidad del 4 vale $\frac{9}{9}$, las cuatro tendrán $\frac{36}{9}$: sumadas ahora con $\frac{3}{9}$ dan $\frac{39}{9}$: las operaciones hechas para incorporar han sido: *multiplicar el entero por el denominador, añadir al producto el numerador de la fraccion y ponerle á la suma el mismo denominador.*

Las fracciones pueden compararse muy fácilmente con la unidad, puesto que siendo ésta equivalente á una fraccion de idéntico numerador y denominador, es fácil averiguar si tienen más ó ménos partes de las denominadas que ésta. Así á $\frac{3}{5}$ es claro que le faltan $\frac{2}{5}$ para valer $\frac{5}{5}$, ó 1; y $\frac{37}{21}$ tienen $\frac{16}{21}$ más que la unidad: y en todos los casos lo que le falta ó le sobra á una fraccion para valer una unidad *es una fraccion cuyo numerador es la diferencia entre los dos términos de la propuesta, y cuyo denominador es el de la propuesta.*

191. Veamos qué alteracion sufre una fraccion operando con sus términos y otros números enteros.

1.º Sea una fraccion propia, tal como $\frac{3}{7}$; si á sus dos términos se les suma un mismo número, 2, la nueva fraccion dirá $\frac{5}{9}$ ¿Cuál es mayor? Á la primera le faltan $\frac{4}{7}$ para valer 1 unidad, y á la segunda $\frac{4}{9}$; y como $\frac{4}{7}>\frac{4}{9}$, quiere decir que *la fraccion propia ha aumentado por la adicion de un mismo número entero á sus dos términos.*

2.º Sea ahora la impropia $\frac{7}{5}$; si á los dos términos se le agregan dos unidades enteras dirá $\frac{9}{7}$. Á la primera le sobran $\frac{2}{5}$ para valer 1 entero y á la segunda $\frac{2}{7}$; y como $\frac{2}{5}>\frac{2}{7}$, quiere decir que la primera es mayor; es decir, que *si á los dos términos* *de una fraccion impropia se les agrega un mismo número entero, la fraccion resultante es menor que la propuesta.*

Claro es que si á *los dos términos de una fraccion propia se les resta un mismo número entero, la fraccion resultante es menor que la propuesta; y si fuese impropia, sería mayor*. Así de $\frac{9}{11}$ restándole 4 á los dos términos resulta $\frac{5}{7}<\frac{9}{11}$, pues á la primera le faltan $\frac{2}{7}$ y á la segunda $\frac{2}{11}$ para valer 1 unidad; luego á la primera le falta más. Si fuera impropia, por ejemplo, $\frac{9}{4}$, restándole 2 diria $\frac{7}{2}$: como á la primera le sobran $\frac{5}{4}$ y á la segunda $\frac{5}{2}$, quiere decir que $\frac{7}{2}>\frac{9}{4}$.

192. El empleo de la via factorial con los términos de un quebrado produce los siguientes efectos:

1.º Sea una fraccion $\frac{4}{5}$ cuyo numerador se multiplica por 2, 3, etc.; se tiene empleando el 3 la nueva fraccion $\frac{12}{5}$; comparada con la primitiva, se ve que el numerador cuenta, expresa 3 veces más unidades de la misma especie (de $\frac{1}{5}$) que el primitivo; *luego si el numerador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.*

2.º Si hubiera sido el denominador el multiplicado, por ejemplo, que de $\frac{4}{5}$ se hubiera pasado á $\frac{4}{5.3}$, ó sea $\frac{4}{15}$, se tendria que constando ámbas fracciones del mismo número 4 de unidades, la especie del primero $\left(\frac{1}{5}\right)$ es tres veces mayor que la del segundo $\left(\frac{1}{15}\right)$; luego $\frac{4}{15}$ es tres veces menor que $\frac{4}{5}$. Luego *si el denominador de un quebrado se multiplica por un número entero, el quebrado queda dividido por el mismo número.*

193. Esto nos ofrece el medio *para multiplicar ó dividir un quebrado por un entero; y es para lo primero multiplicar el numerador por el entero, y el denominador para lo segundo.*

194. *Tambien se deduce que si los dos términos de una fraccion se multiplican por un mismo número la fraccion no altera de valor*. En efecto, si ámbos términos de cualquier fraccion

se multiplican por 2, 3 ó 4, etc., se hace 2, 3 ó 4 veces mayor y 2, 3 ó 4, etc., veces menor, y *un número que se hace ciertas veces mayor, y el mismo número de veces menor, no altera.*

195. *De aquí se infiere que hay infinitas fracciones equivalentes unas á otras, á saber: todas las que proceden de la multiplicacion de los dos términos de una cualquiera por la serie natural de los números,* es decir, que su forma es distinta, pues sus numeradores y denominadores son diferentes; pero todas valen lo mismo. Tales serian $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{12}{18}=\frac{20}{30}$, etc.

196. Esta equivalencia permite una trasformacion de gran utilidad en los quebrados, á saber: *la reduccion de varios á un comun denominador.*

Sean, por ejemplo, las fracciones propuestas $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{9}$, las que se quieren *trasformar en otras equivalentes del mismo denominador*. Es claro que si el problema es posible, el denominador comun ha de constar de los mismos factores primos, puesto que es un solo número; y tambien que si se ha de obtener por la multiplicacion de los dos términos de cada fraccion por un mismo número, este denominador comun ha de ser un *múltiplo de todos los denominadores.* Si, pues, ha de ser un múltiplo de ellos, el más sencillo es el llamado *mínimo comun múltiplo.* Luego si se busca (171) el de los denominadores dados, 3, 6, 5 y 9, que es el número 90, ya sólo falta averiguar por cuál número deben de multiplicarse los dos términos de cada fraccion; pero si el nuevo denominador ha de ser 90, *claro es que el factor que falte á cada denominador para componer el número* 90 es el propio para la reduccion apetecida: así en la primera fraccion de las dadas se multiplicarán sus dos términos por 30, que es el factor que falta á 3 para dar 90, y se tendria $\frac{60}{90}$; la segunda por 15, y diria $\frac{75}{90}$; la tercera por 18, y sería $\frac{72}{90}$; la cuarta por 10, y daria $\frac{70}{90}$.

197. *Luego para reducir várias fracciones á un comun denominador se halla el mínimo comun múltiplo de sus denominadores y se multiplican los dos términos de cada fraccion por*

los factores que le faltan á su denominador para componer el mínimo comun múltiplo.

Debe de observarse en la práctica:

1.° Que los factores que faltan á cada denominador para componer el mínimo comun múltiplo se hallan fácilmente, ya por la simple inspeccion de los primos que componen á éste, y á los denominadores, y que se han puesto de manifiesto al investigarlo, ya por la division del mínimo por cada denominador.

2.° Que basta multiplicar el numerador por este factor que falta y poner por denominador del producto al mínimo múltiplo, toda vez que la multiplicacion del denominador por ese factor ha de producirlo seguramente.

3.° Que si todos los denominadores de las fracciones dadas fuesen números primos dos á dos, *su mínimo múltiplo* es el producto de todos ellos, y por tanto á cada denominador lo que le falta para componer este número, es el producto de todos los demás: en este caso la *reduccion consiste en multiplicar los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de los demás*. Tal sucederia en la reduccion de $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, que darian $\frac{18}{30}$, $\frac{20}{30}$, $\frac{15}{30}$.

Este medio suele emplearse áun cuando los denominadores no sean primos, para ahorrarse investigar el mínimo múltiplo; pero entónces los resultados vienen complicados con factores comunes, lo cual debe evitarse en los cálculos, pues siempre se deben procurar los resultados más simples.

La reduccion de quebrados á comun denominador es la trasformacion más importante de ellos, tanto porque pone de manifiesto la magnitud respectiva entre dos ó más fracciones, como, principalmente, porque los hace homogéneos. En efecto; siendo el denominador de los quebrados el que determina la *unidad* á que están referidos, si es comun, todos se refieren á la misma unidad, y ya se sabe (8) que ésta es la condicion de homogeneidad en la expresion de las cantidades.

198. Veamos ahora la division de los términos de un quebrado por un entero, á qué alteraciones da lugar.

Supóngase que el *numerador de una fraccion se divide* por 2, 3 ó 4, etc., *dejando el mismo denominador*, y sea, por ejemplo, la fraccion $\frac{6}{11}$, cuyo numerador se divide por 2; la resultante será $\frac{3}{11}$; comparada con $\frac{6}{11}$, como son de la misma especie (igual denominador) y la propuesta $\frac{6}{11}$ consta de dos veces más partes que la resultante $\frac{3}{11}$, es evidente que ha quedado dividida por 2.

199. *Luego si el numerador de una fraccion se divide por un número entero, la fraccion queda dividida por el mismo número.*

Inversamente, si propuesta la fraccion $\frac{5}{12}$ se divide un denominador por 3, resultará $\frac{5}{4}$, que es tres veces mayor que $\frac{5}{12}$, pues consta de las mismas partes, pero tres veces mayores; luego *si el denominador de una fraccion se divide por un número entero, el quebrado queda multiplicado por el mismo número.*

200. En resúmen: de dos maneras puede multiplicarse una fraccion; por un entero, y es, primero, *multiplicando su numerador;* segundo, *dividiendo su denominador por el entero.*

El primer medio siempre es aplicable; el segundo es preferible por dar resultados más sencillos; mas para esto es necesario que el denominador sea múltiplo ó divisible por el entero. Así $\frac{5}{12}\times 3$ se puede verificar: $\frac{5\times 3}{12}$ ó $\frac{5}{12:3}=\frac{5}{4}$. Aquí por ser 12 divisible por 3 se debe emplear el segundo medio; pero si se tuviese $\frac{7}{11}\times 4$, como 11 no es múltiplo de 4, la forma más sencilla para el resultado se obtiene por el primer medio. Así se diria: $\frac{7\times 4}{11}$.

201. Tambien de dos maneras puede dividirse una fraccion por un entero, y son: primera, *dividiendo su numerador;* segunda, *multiplicando su denominador por el entero.* La segunda manera es siempre aplicable; la primera es preferible cuando el numerador es múltiplo del entero; así $\frac{4}{9}:2$; como 4 es múltiplo de 2 se tendria $\frac{4:2}{9}$ ó sea $\frac{2}{9}$. Si el ejemplo fuera $\frac{5}{9}:2$, como 5 no es divisible por 2 el resultado se hallaria poniendo $\frac{5}{9\times 2}$ ó sea $\frac{5}{12}$.

202. Para regla de memoria puede servir en todas estas alteraciones de los quebrados, empleando la via factorial con

sus términos, la siguiente: un quebrado *sufre las mismas alteraciones que su numerador y las contrarias que su denominador* cuando se multiplica ó divide alguno de sus términos por un entero.

203. *Supóngase ahora que los dos términos de una fraccion se dividen por un entero:* claro es que la fraccion no varía pues si, por ejemplo, los dos términos se dividen por 3, queda dividida por 3, por haber dividido al numerador; y multiplicada por 3, por haber dividido al denominador; y un número que se multiplica y divide por un tercero no altera de valor.

Así, pues, son fracciones equivalentes $\frac{60}{90}$ y $\frac{6}{9}$ y $\frac{2}{3}$.

204. Esto origina lo que se llama *simplificacion de fracciones, que es la reduccion de las fracciones á su más simple expresion*, ó sea á una que ya no se puede simplificar: *tales fracciones se llaman irreducibles.*

205. Las fracciones irreducibles tienen sus términos primos entre sí; pues si tuvieran algun factor comun diferente de 1, suprimiéndolo se tendria otra equivalente y más sencilla.

206. *Simplificar, pues, una fraccion es hallar la irreducible que le es equivalente.* Claro es que para ello *bastará suprimir todos los factores comunes á su numerador y denominador*, y para lograrlo desde luego *bastará investigar el máximo comun divisor de ámbos términos y dividirlos por él.*

Así la irreducible equivalente á $\frac{1650}{2550}$ es $\frac{11}{17}$, y á $\frac{1188}{1650}=\frac{18}{25}$.

207. *Toda fraccion equivalente á una irreducible tiene sus términos equimúltiplos de los de ésta.* Sea, por ejemplo, la fraccion irreducible $\frac{3}{5}=\frac{a}{b}$; si se multiplican las dos por b dirá $\frac{3b}{5}=a$, y siendo a, un entero, es preciso que 5 divida al producto $3b$; pero es primo con 3, luego dividirá á b; es decir, que $b=5\times m$, siendo m un entero cualquiera; si se sustituye este valor en la igualdad anterior se tiene $\frac{3.5.m}{5}=a$; simplificando $3m=a$; luego $\frac{3}{5}=\frac{a}{b}=\frac{3.m}{5.m}$.

COROLARIO. *Dos fracciones irreducibles iguales son idénticas.* Sean $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ dos fracciones, ámbas irreducibles é iguales; segun el teorema anterior se debe de tener $c=a.m$ y $d=b.m$; si m es diferente de 1, los números c y d tendrian un factor comun, m, lo cual no es posible, segun el supuesto de que $\frac{c}{d}$ es irreducible, ó, lo que es lo mismo, que c y d son primos; luego para estar conforme con la hipótesis, $m=1$; y por tanto $c=a$ y $d=b$, es decir que ámbas irreducibles iguales, son idénticas.

§ II. Operaciones con los quebrados.—Suma de fracciones.

208. La suma ó reunion en un solo número de las unidades de varios, exige para verificarla que estas unidades sean homogéneas. Así que en la suma de fracciones hay que distinguir dos casos: primero, *que las fracciones sumandos tengan el mismo denominador;* y segundo, *que no lo tengan*. Esto equivale á decir que sean homogéneas ó no lo sean.

1.° Si tienen el mismo denominador, como los numeradores expresan las unidades de que constan, *bastará sumar los numeradores y poner al resultado el denominador comun*, que es el que indica la especie de las unidades reunidas. Así:

$$\frac{3}{11}+\frac{2}{11}+\frac{4}{11}=\frac{3+2+4}{11}=\frac{9}{11}.$$

2.° *Si no tienen el mismo denominador se reducen á comun denominador, y se está en el caso anterior*. Así:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}\text{ dan }1\frac{47}{84}.$$

209. *Para sumar números mixtos entre sí, ó con quebrados, se incorporan los mixtos, y se está en el caso anterior. Tambien pueden dejarse en la forma en que estén, y sumar primero los quebrados y despues los enteros, reuniendo ámbas sumas.*

Se reunen primero los quebrados, por si de su reunion resultase algun entero, añadirlo á la suma de éstos. Así:

$$3\frac{2}{5}+\frac{4}{7}+5\frac{5}{8}\text{ dan }9\frac{167}{280}.$$

210. *La suma de un entero, ó muchos, con un quebrado ó varios, ya se sabe hacer, puesto que es la incorporacion de un mixto.*

§ III. Sustraccion de fracciones.

211. Tambien la operacion de quitar de un número las unidades de otro exige homogeneidad en ámbos. Así dos casos se distinguen en la resta de fracciones: primero, que tengan el mismo denominador; segundo, que no lo tengan.

1.° *Si tienen el mismo denominador se restan los numeradores* (que son los que expresan las unidades de que constan) *y al resto se le pone por denominador, el comun á minuendo y sustraendo* (pues así se expresa la especie de las unidades con que se opera).

2.° *Si no tienen el mismo denominador se reducen á un comun denominador y se está en el caso anterior.* Así:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5};\ \frac{2}{3}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}.$$

212. *Para restar números mixtos se reducen á quebrados y se restan como éstos, ó se dejan como están y se restan primero los quebrados y despues los enteros. Si el quebrado minuendo fuese* MENOR *que el sustraendo, se toma una unidad del entero del minuendo, que vale tantas partes como indique el denominador* (185), *y se incorpora al quebrado.*

EJEMPLOS. (1.°) $3\frac{4}{5}-2\frac{3}{8}=3\frac{32}{40}-2\frac{15}{40}=1\frac{17}{40}.$

(2.°) $4\frac{3}{8}-2\frac{4}{5}=4\frac{15}{40}-2\frac{32}{40}=3\frac{55}{40}-2\frac{32}{40}=1\frac{23}{40}.$

En el segundo ejemplo se ha agregado al quebrado $\frac{15}{40}$ del minuendo una unidad del entero, que reducida á su especie vale $\frac{40}{40}$, con lo cual se puede efectuar la resta de las fracciones.

213. *Para restar una fraccion de un entero, se reducen una ó más unidades del entero á fraccion, cuyo denominador sea el del sustraendo.* Así: $4-\frac{3}{5}=3\frac{5}{5}-\frac{3}{5}=3\frac{2}{5}.$

§ IV. Multiplicacion de fracciones y elevacion á potencias: productos indicados.

214. *La definicion de esta operacion cuando el multiplicador es una fraccion propia, tiene una significacion diferente de cuando es un entero.* Así se vió que multiplicar un número por 2, 3 ó 4, etc., era hallar un resultado ó producto 2, 3 ó 4 veces mayor que el *multiplicando.*

¿Qué se pretende al multiplicar un número cualquiera por $\frac{2}{3}$ ó $\frac{3}{5}$, etc.?

Segun la definicion general, el fin de esta operacion es *hallar un número que sea, ó tenga, la misma relacion con el multiplicando, que el multiplicador tiene con la unidad.* Segun esto, si el multiplicador fuese, por ejemplo, $\frac{2}{3}$, para interpretar la operacion preciso es analizar primero qué relacion tiene, ó qué es $\frac{2}{3}$ de la unidad, para saber qué ha de ser el producto respecto del multiplicando. $\frac{2}{3}$ es la unidad dividida en tres partes y tomadas dos; luego la *multiplicacion de cualquier número por $\frac{2}{3}$ quiere decir que se busca un tercero que sea las dos terceras partes del multiplicando.* Es decir, que se trata de dividir al multiplicando en tres partes iguales y tomar dos de estas partes; se ve, pues, que multiplicar un número por una fraccion es tanto como tomar ciertas partes de éste indicadas por el multiplicador: hay, pues, que despojar á la multiplicacion por fracciones de la idea de que el producto *es mayor* que el multiplicando: eso es para el caso de ser entero. Tambien debe notarse que la operacion que satisface á la cuestion de tomar ciertas partes de un número, es la multiplicacion por el quebrado que indique estas partes: así la traduccion analítica de esta cuestion. *Tomar los cinco sétimos de ocho; es verificar* $8\times\frac{5}{7}$; y si fuese *los nueve once avos de tres octavos,* se tendria que verificar $\frac{3}{8}\times\frac{9}{11}$.

215. Analizado el fin de esta operacion, para un multiplicador fraccionario, veamos los casos que pueden ocurrir.

1.º *Multiplicar un entero por una fraccion.* Sea $8\times\frac{5}{7}$. Si el fin es hallar las $\frac{5}{7}$ partes de 8, claro es que si conociera una sétima parte, repitiéndola cinco veces se tendrian las que se buscan. Ahora un sétimo de ocho: es evidente $\frac{8}{7}$, luego cinco veces esto, es $\frac{8}{7}\times 5$, ó sea $\frac{8.5}{7}$, es decir, que $8\times\frac{5}{7}=\frac{8.5}{7}$.

Regla. *Para multiplicar un entero por una fraccion se multiplica por el numerador y se parte el producto por el denominador.*

216. 2.º *Multiplicar dos fracciones entre sí.* Por ejemplo, $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$: el fin de la operacion quedará realizado por un número que sea los cuatro quintos de dos tercios: si se pudiera determinar $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3}$ fácilmente se hallarian los $\frac{4}{5}$ buscados repitiendo cuatro veces el $\frac{1}{5}$.

Ahora bien: $\frac{1}{5}$ de $\frac{2}{3}$, es decir, la quinta parte de $\frac{2}{3}$, se obtiene dividiendo $\frac{2}{3}$ por 5, ó sea $\frac{2}{3\times5}$. Este resultado se repite 4 veces, multiplicándolo por 4, y se tendrá $\frac{2}{3.5}\times 4$, ó sea $\frac{2.4}{3.5}$. Este quebrado expresa los $\frac{4}{5}$ de $\frac{2}{3}$, que era lo que se pedia. Observando la formacion de este resultado con respecto á los factores, se deduce que *para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y denominadores entre sí, y se parte el primer producto por el segundo.*

217. 3.º Multiplicar números mixtos entre sí ó por enteros ó fraccionarios.

(*a*) *Para multiplicar dos mixtos se incorporan los enteros á las fracciones y queda el caso reducido al anterior.* Así:

$$2\frac{3}{5}\times 3\frac{4}{7}=\frac{13}{5}\times\frac{25}{7}=\frac{65}{7}=9\frac{2}{7}.$$

(*b*) *Para multiplicar un mixto por un entero, ó se incorpora el mixto, y se está en el caso de quebrado por entero, ó se multiplica el entero por las dos partes del mixto, sumando despues los productos.* Sea $2\frac{3}{5}\times 4=\frac{13}{5}\times 4$. Tambien $2\frac{3}{5}\times 4=\left(2+\frac{3}{5}\right)4=2.4+\frac{3}{5}.4=10\frac{2}{5}$.

(c) *Para multiplicar un mixto por un quebrado se incorpora el mixto, y se está en el caso de dos quebrados.* Así:

$$4\frac{2}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{30}{7}\times\frac{3}{5}.$$

218. COROLARIO 1.º *El producto de várias fracciones entre sí se obtiene formando una sola, cuyo numerador es el producto de todos los numeradores, y el denominador el producto de todos los denominadores.* En efecto; $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{11}$ tiene por objeto hallar los siete once avos, de los cinco sétimos, de los cuatro quintos, de dos tercios. Ahora los cuatro quintos de dos tercios se expresan por $\frac{2.4}{3.5}$; los $\frac{5}{7}$ de este número es la fraccion $\frac{2.4.5}{3.5.7}$; y, por último, los $\frac{7}{11}$ de esto es $\frac{2.4.5.7}{3.5.7.11}$, conforme con el enunciado.

NOTA. 1.º *Si entre los factores de un producto indicado de fraccionarios los hubiese enteros, es evidente que al efectuar siempre se puede hacer que figurasen los enteros en el numerador de la fraccion producto.*

2.º *Para multiplicar una suma indicada de fraccionarios, ó enteros, y fraccionarios, por un entero ó fraccionario, se multiplica cada uno de los sumandos por el multiplicador, y se suman los productos parciales.*

3.º *Para multiplicar una diferencia indicada por una fraccion, se multiplican el minuendo y sustraendo, y se resta del primer producto el segundo.*

4.º *El producto de una suma indicada de fraccionarios, ó de enteros y fraccionarios, por un entero ó fraccionario, se obtiene multiplicando la primera suma por cada uno de los sumandos de la segunda y reuniendo todos los productos parciales.*

La justificacion de estas reglas, que es bien sencilla y está fundada en los procedimientos anteriormente demostrados, puede servir de ejercicio á los alumnos.

EJEMPLOS. Del 2.º Sea la suma $\left(2+\frac{3}{5}+\frac{7}{8}\right)\frac{2}{3}$ se tendrá$=\frac{14}{3}+\frac{6}{15}+\frac{14}{24}$.

3.º $\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{8}\right)\frac{5}{9}=$ para ello por un método análogo al del caso (92), se veria $\frac{4}{7}-\frac{3}{8}=\frac{11}{56}$ ó $\frac{4}{7}+\frac{11}{56}=\frac{3}{8}$, de donde $\left(\frac{4}{7}+\frac{11}{56}\right)\frac{5}{9}$ $=\frac{3}{8}.\frac{5}{9}$ ó sea $\frac{4.5}{7.9}+\frac{11.5}{56.9}=\frac{3.5}{8.9}$, de donde $\frac{4.5}{7.9}-\frac{3.5}{8.9}=\frac{11}{56}.\frac{5}{9}=$ $\left(\frac{4}{7}-\frac{3}{8}\right)\frac{5}{9}$.

4.º $2\frac{3}{5}\times4\frac{2}{7}$; esto es lo mismo que $\left(2+\frac{3}{5}\right)\left(4+\frac{2}{7}\right)=\left(2+\frac{3}{5}\right)4$ $+\left(2+\frac{3}{5}\right)\frac{2}{7}=8+\frac{3.4}{5}+\frac{2.2}{7}+\frac{3.2}{5.7}$.

219. Teorema. *El órden de los factores, de un producto de fracciones entre sí, ó con enteros, no altera el producto.*

En efecto; cualquiera que sea el órden en que se coloquen los factores, irán los mismos factores al numerador, y al denominador, de las fracciones productos resultantes; luego todas ellas tendrán el mismo valor, puesto que sus términos son de igual valor. Así: $\frac{3}{5}.\frac{2}{7}.4.\frac{7}{11}$ da $\frac{3.2.4.7}{5.7.11}$, y en otro órden, $\frac{7}{11}.4.\frac{3}{5}.\frac{2}{7}$, da $\frac{7.4.3.2}{11.5.7}$; resultado equivalente al anterior, pues los numeradores tienen los mismos factores y tambien los denominadores.

220. Corolario. *La potencia de una fraccion se obtiene elevando sus dos términos.* En efecto; $\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{3}{5}.\frac{3}{5}=\frac{3.3}{5.5}=\frac{3^2}{5^2}$.

221. Observacion. *La potencia de una fraccion irreducible es otra fraccion irreducible.* En efecto; si la fraccion que se eleva se supone irreducible, precisamente tiene sus términos *primos entre sí*; y como las potencias de dos números primos, son tambien números primos entre sí, la fraccion resultante tambien tiene sus términos primos, ó es irreducible.

§ V. Division de fraccionarios

222. En la division de fraccionarios tambien debe señalarse su distinta significacion respecto de la de enteros. El cociente de tales números no expresa cuántas veces contiene el dividendo al divisor como en aquéllos; lo que se pretende al dividir quebrados es encontrar un factor que, *multiplicado por el que se da como divisor, reproduzca al dividendo pro-*

puesto. Hay, pues, que despojar á la division por fraccionario de la idea de que esté contenido el divisor en el dividendo, y de que dé un resultado menor que él: esas son propiedades peculiares de los enteros. Esto supuesto, sea:

223. *Dividir un entero por una fraccion;* por ejemplo, $4:\frac{3}{5}$. El cociente buscado ha de ser un número que, multiplicado por $\frac{3}{5}$, dé 4. En otros términos: los $\frac{3}{5}$ del cociente valen 4; si se pudiera hallar $\frac{1}{5}$ de este cociente, estaria resuelta la cuestion, pues todo el cociente constará de cinco veces esta quinta parte, y se hallaria repitiéndola cinco veces.

Ahora bien; si $\frac{3}{5}$ del cociente valen 4, claro es que $\frac{1}{5}$ valdrá 3 veces ménos, ó sea $\frac{4}{3}$; ya tenemos aquí $\frac{1}{5}$ del cociente que se busca; luego todo el cociente será cinco veces esto, es decir, $\frac{4}{3}\times 5=\frac{4.5}{3}$, ó sea $4\times\frac{5}{3}$.

Regla. *Para dividir un entero por una fraccion se multiplica el entero por el divisor invertido.*

224. *Dividir dos fracciones;* por ejemplo, $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}$. El cociente buscado ha de ser tal, que multiplicado por $\frac{3}{5}$ ha de dar $\frac{4}{7}$; en otros términos: los $\frac{3}{5}$ del cociente valen $\frac{4}{7}$; luego $\frac{1}{5}$ del cociente valdrá tres veces ménos, ó bien $\frac{4}{7}$: 3, ó sea $\frac{4}{7.3}$. Ahora bien; si $\frac{1}{5}$ del cociente que se busca tiene por expresion $\frac{4}{7.3}$ claro es que todo el cociente constará de cinco veces su quinta parte, ó bien $\frac{4}{7.3}\times 5$, ó sea $\frac{4.5}{7.3}$, ó, lo que es lo mismo, $\frac{4}{7}\times\frac{5}{3}$.

Regla. *Para dividir dos fracciones se multiplica la que hace de dividendo por la del divisor invertida.*

Nota. *Si los dos términos de la fraccion dividendo fuesen múltiplos de los del divisor, el cociente se encuentra dividiéndolos término á término; y, en efecto,* $\frac{4}{9}:\frac{2}{3}$; segun la regla se tendrá $\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4.3}{9.2}=\frac{4:2}{9:3}=\frac{2}{3}$.

225. *Para dividir números mixtos se incorporan, y queda el caso reducido al de dos fracciones.*

NOTA. *Si sólo el divisor fuese el mixto, incorporándolo se estaria en alguno de los casos ya explicados.*

EJEMPLOS. 1.º $2\frac{4}{5} : 3\frac{2}{7} = \frac{14}{5} : \frac{23}{7} = \frac{14.7}{5.23}$.

2.º $4 : 3\frac{2}{5} = 4 : \frac{17}{5} = 4 \times \frac{5}{17}$.

EJERCICIOS. Dense los enunciados y la justificacion del procedimiento para los casos siguientes:

1.º *Dividir una suma indicada de fraccionarios entre sí ó con enteros por un fraccionario mixto.*

2.º *Dividir una diferencia indicada por un fraccionario.*

3.º *Dividir un producto indicado de enteros ó fraccionarios, ó de unos y otros, por un entero, fraccionario ó mixto.*

CAPÍTULO V

Fracciones decimales.

226. Los principios generales de la numeracion permiten escribir sin denominador *aquellas fracciones en que éste sea una potencia de la base.* En efecto; del principio que toda cifra escrita á la derecha de otra representa unidades del órden inferior inmediato, se deduce que la cifra que se escriba á la derecha de las unidades simples de un número, representará *décimas;* la que se escriba á la derecha de las *décimas*, será *centésimas*, y en general partes de la unidad dividida por 10, 100, 1000, etc.

227. *Estas fracciones, que tienen por denominador una potencia de diez, ó sea que su denominador es la unidad seguida de ceros, son las que se llaman decimales.*

228. Las fracciones decimales, segun esto, pueden escribirse sin denominador de manifiesto, porque marcando cuál sea la cifra de las unidades de una cantidad, se pueden expre-

sar las partes decimales de ella por cifras escritas á su derecha; de modo que la *primera* será las *décimas*, la *segunda* las *centésimas*, la *tercera* las *milésimas*, la *cuarta* las *diezmilésimas*, la *quinta* las *cienmilésimas*, la *sexta* las *millonésimas* y así sucesivamente.

229. *El signo con el cual se marca la cifra de las unidades es una coma que se pone á su derecha.*

230. *Para escribir una fraccion decimal se escribe la parte entera, y si no la hay un cero; despues se pone la coma y se escriben los decimales como si fuesen enteros; teniendo cuidado de que la última cifra ocupe el lugar que su denominador exige. Si las cifras del número decimal que se escribe no son suficientes para ocupar todos los lugares, se ocupan con ceros despues de la coma los que falten.*

231. Su lectura se hace como la de los enteros, dándole al final *la denominacion de su última cifra.*

Así, para escribir 2 enteros y 7 centésimas se pondrá 2,07; y 347 millonésimas se pondrá 0,000347. De modo que los números 2,07 y $\frac{207}{100}$ y 0,000347 y $\frac{347}{1000000}$ son iguales.

Tambien *puede leerse juntamente la parte entera y la decimal, prescindiendo de la coma, con sólo dar la denominacion de la última cifra, pues todas siguen una misma ley.* Así, 2,43 se puede leer doscientas cuarenta y tres centésimas.

232. *Las fracciones decimales bajo la forma entera no alteran de valor escribiendo ceros á su derecha.* Sea la fraccion 3,6; si se escribe un cero á su derecha dirá 3,60, que si bien tiene diez veces más unidades, pero son diez veces menores; luego no se ha alterado. Análogo razonamiento se haria, cualquiera que fuese el número de ceros que se agregase.

Tambien puede decirse: la fraccion 3,6 es equivalente á 3,60, porque puesta la primera bajo la forma ordinaria da $\frac{36}{10}$ y la segunda $\frac{360}{100}$, las cuales evidentemente son equivalentes (194).

233. *Para reducir fracciones decimales á comun denominador se iguala con ceros á la derecha el número de sus cifras.*

234. *Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros, se corre la coma á la derecha tantos lugares como ceros tenga el multiplicador.* En efecto; este movimiento de la coma hace adelantar las cifras uno, dos, tres., etc., lugares á la izquierda, ó, lo que es lo mismo, que cada cifra representa unidades 10, 100, 1000 veces mayores; luego todo queda hecho 10, 100 ó 1000 veces mayor. Así: $3{,}4776 \times 100 = 347{,}76$; $8{,}24 \times 1000 = 8240$.

235. *Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros se corre la coma tantos lugares á la izquierda como ceros tenga el divisor.* La igualdad, $3{,}4776 \times 100 = 347{,}76$, prueba que $347{,}76 : 100 = 3{,}4776$, porque *se llama cociente todo factor que, multiplicado por el divisor, da el dividendo.*

236. *Para sumar fracciones decimales se escriben los sumandos unos debajo de otros, de modo que se correspondan las cifras del mismo órden, para lo cual basta colocar las comas en columna; se suman como los enteros, y en el resultado se pone la coma en su lugar correspondiente.* Así, para sumar 3,478 con 72,00764, con 43,1203, con 560,032, se escribirán:

	3,478
	72,00764
	43,1203
	560,032
Suma. . . .	678,63794

237. *Para restar fracciones decimales se escribe el minuendo y debajo el sustraendo, de modo que se correspondan las cifras del mismo órden; se restan como los enteros, poniendo despues en el resíduo la coma en el lugar que le corresponda.* Así, para restar de 42,0764 la fraccion 17,4578, se pondrá:

42,0764
17,4578
24,6186

Si alguna de las dos fracciones decimales que se van á restar tuviese ménos cifras decimales que la otra, para efectuar la operacion se completa con ceros, lo cual se sabe que no la altera. Así, para restar de 4,02 la fraccion 2,7645, se escribirá 4,0200—2,7645. Si hubiese sido restar de 7 la fraccion 3,496 se escribiria 7,000—5,496=1,504.

En la multiplicacion de decimales, además del caso examinado (234) pueden ocurrir:

238. MULTIPLICAR UN DECIMAL POR UN ENTERO. *Para ello se prescinde de la coma y se efectúa la operacion como si fuesen ámbos enteros, y en el producto se separan tantas cifras decimales como tiene el factor decimal.*

En efecto; sea 15×3,5; al prescindir de la coma y verificar su producto, se hace al factor 3,5, y por tanto al producto, diez veces mayor; luego para que sea el verdadero, debe hacerse este producto diez veces menor, ó separar como decimal una cifra de su derecha. Así se tiene 15×3,5=52,5.

239. MULTIPLICAR DOS DECIMALES. *Se prescinde de las comas y se halla el producto como si fuesen enteros, y de su derecha se separan tantas cifras decimales como tienen ámbos factores.* En efecto; al suprimir la coma en ámbos factores se han multiplicado por la unidad seguida de tantos ceros como tiene cada uno, y por tanto el producto tambien ha quedado multiplicado por la unidad, seguida de tantos ceros como tienen ámbos factores. Luego para que sea el verdadero, es preciso dividirlo por la unidad seguida de los mismos ceros, ó sea separar de su derecha tantas cifras como tienen ámbos factores. Así: 3,5×1,5; efectuando el producto, prescindiendo de las comas, da 525, pero como cada factor se ha hecho 10 veces mayor, el producto es 10×10=100 veces mayor que el verdadero; luego habrá que dividirlo por 100 y será 5,25 segun la regla.

NOTA. La operacion se dispone como para los enteros. Así: 34,176×2,48 se pone:

```
 34,176
  2, 48
-------
 273408
136704
68352
-------
84,75648
```

240. Potencias de los decimales. De la regla de multiplicacion de los decimales se desprende que *para elevar un decimal á una potencia se eleva como si fuese entero, y del resultado se separan tantas cifras decimales, como unidades tenga el producto del exponente de la potencia, por el número de cifras decimales de la base.*

En efecto; como para elevar un número á potencia hay que multiplicar entre sí tantos factores iguales á este número como unidades tiene el exponente, al efectuar la primera multiplicacion, el producto tendrá doble número de cifras decimales que la fraccion propuesta, y estará elevada al *cuadrado;* si este producto se vuelve á multiplicar por la misma fraccion propuesta, su producto tendrá *tres veces el número de cifras decimales* que la fraccion propuesta, y será ésta elevada al cubo. Y así sucesivamente. Así: $(1,2)^4=1,2\times1,2\times1,2\times1,2=2,0736$.

241. *El cuadrado y el cubo de un decimal tienen respectivamente el duplo y el triplo de cifras decimales de la base.* Así:

$$(1,2)^2=1,44 \text{ y } (1,2)^3=1,728.$$

242. Division de decimales. Además del caso examinado (235) se consideran dos, que son:

243. Dividir un decimal por un entero. *Para ello se prescinde de la coma y se dividen como enteros, separando en el cociente tantas cifras decimales como tiene el dividendo.* Así:

$$34,767 : 9=3,863 \text{ y } 4,4804 : 46=0,974.$$

En efecto; por prescindir de la coma en el dividendo se le multiplica, y por tanto al cociente, por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga; luego el verdadero cociente se tendrá separando en el obtenido el mismo número de cifras decimales que tiene el dividendo.

244. PARA DIVIDIR UN ENTERO POR UN DECIMAL Ó UN DECIMAL POR OTRO. *Se corre la coma en dividendo y divisor, hasta que este último sea entero, y queda el caso reducido al anterior.* Así: 346 : 7,94 es lo mismo que 34600 : 794, y 36 : 3,475 = 36000 : 3475. En efecto; si el dividendo y divisor se multiplican por un mismo número, el cociente no varía; luego al correr la coma los mismos lugares á la derecha, el de los números propuestos no se altera.

Para ejecutar la operacion se dispone como para los enteros.

245. NOTA. Si bien el cociente de dos números no varía, multiplicándolos ó dividiéndolos por un mismo número, el resto queda multiplicado ó dividido por el mismo número; lo que debe tenerse en cuenta en la division de decimales, cuando de apreciar el órden del resto se trata.

Así al dividir 0,0366 por 0,7 se dispondrá segun la regla 0,366 : 7; lo que da 0,052 de cociente, y de resto 0,002; pero si bien el cociente no ha variado por haber corrido la coma un lugar á la derecha en dividendo y divisor, el resto 0,002 ha quedado multiplicado por 10; luego el verdadero resto es 0,002 : 10, ó sea 0,0002.

246. REDUCCION DE FRACCIONES ORDINARIAS Á DECIMALES Y VICEVERSA. Para reducir una fraccion ordinaria á decimal, *se divide el numerador seguido de ceros por el denominador, y se separan del cociente tantas cifras decimales como ceros se hayan considerado añadidos al numerador.*

En efecto; sea una fraccion ordinaria, $\frac{13}{80}$, la que se quiere trasformar en otra equivalente decimal; se tiene que $\frac{13}{80} = \frac{\frac{13}{80} \times 1000\ldots}{1000\ldots.}$, toda vez que si un número se multiplica y divide por la unidad seguida de los mismos ceros no altera. Si se ejecutan las operaciones indicadas, se tendrá que la fraccion $\dfrac{\dfrac{13}{80}\times 10000....}{10000...}=\dfrac{\dfrac{130000...}{80}}{10000}=\dfrac{1625}{10000}=0{,}1625$. Es decir, que se ha dividido el numerador 13 seguido de ceros, por el denominador 80, y en el cociente 1625 se han separado cuatro cifras decimales, que son tantas como ceros se han añadido á 13.

247. Las fracciones decimales resultantes de la aplicacion de la regla anterior á las fracciones ordinarias, pueden ser de dos clases: primero, EXACTAS, *si el cociente que se encuentra es exacto;* segundo, PERIÓDICAS, *si el cociente es inexacto.*

Así, por ejemplo, al aplicar la regla á la fraccion $\frac{5}{9}$, se tiene que dividir 50000.... por 9, y como desde la primera division parcial se repite el mismo resto 5, el cociente será siempre el mismo. Así dará 0,555....

Lo mismo ocurriria con $\frac{7}{15}$, que, reducida, produce la fraccion 0,4666....

En ámbas la division nunca será exacta, por más ceros que se consideren añadidos al numerador; y á partir de cierta cifra se repiten indefinidamente. Estas fracciones decimales se llaman *inexactas*, y á causa de la repeticion de sus cifras se dicen *periódicas*.

248. *Se llama período la cifra ó cifras que se repiten.* Así, en las anteriores, el período es 5 en la primera; y 6 en la segunda.

249. Las fracciones periódicas pueden ser *puras* ó *mixtas*, segun que *el período empiece ó nó en las décimas*. Así, 0,555.... es pura, y 0,466.... es mixta, porque tiene la cifra irregular 4.

250. Las fracciones decimales periódicas son representaciones *inexactas* de las que les dan orígen; *pero el error que se comete puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea*. Así, es cierto que la fraccion decimal 0,555.... nunca es exactamente igual á $\frac{5}{9}$, cualquiera que sea el nú-

mero de períodos que se considere; pero al considerar 3 cifras el error es menor que 0,001, porque $\frac{5}{9}$ está entre 0,555 y 0,556; si se toman 4, es decir, 0,5555, el error es menor que 0,0001, porque 0,5556 es mayor que $\frac{5}{9}$, y así sucesivamente; luego *las fracciones periódicas son susceptibles de acercarse todo cuanto se quiera á su generatriz, pudiendo llegar á ser la diferencia menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.* Por eso se llama á la *generatriz* el LÍMITE de los diferentes valores de la periódica, que todos tienden á ser igual á ella, acercándose cada vez más, pero sin poder nunca representarla exactamente á causa de la infinidad de los períodos.

251. REDUCCION DE FRACCIONES DECIMALES Á ORDINARIAS. *La fraccion ordinaria que origina una fraccion decimal, se llama su generatriz.*

Reducir una fraccion decimal á ordinaria, es hallar su generatriz correspondiente.

252. LA GENERATRIZ *de una fraccion decimal de un número limitado de cifras, tiene por numerador el número que resulta de suprimir la coma, y por denominador la unidad seguida de tantos ceros como notas decimales haya.* En efecto; esto no es más que poner de manifiesto el denominador implícito. Así

$$0{,}25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}.$$

253. *La generatriz de una fraccion decimal periódica pura tiene por numerador el período, y por denominador tantos* 9, *como cifras tiene el período.*

Sea la fraccion decimal periódica pura 0,131313.... y F su fraccion ordinaria generatriz, hácia la cual se acerca á medida que se consideran mayor número de períodos. De modo que F=*límite* de 0,131313... y llevando la coma á la derecha del primer período será 100 F=*límite* de 13,131313.... Si se restan ámbas igualdades ordenadamente, la diferencia de los primeros miembros es $99F$, y la de los segundos tiene por *límite* 13, pues el resto de la parte decimal consiste en el último período que se considere, y éste cada vez representa unidades decimales de órden más inferior, y por tanto, el límite de la diferencia de la parte decimal es cero. De 99 $F=13$ se deduce dividiendo ámbos miembros por 99, que $F=\frac{13}{99}$.

254. *La fraccion generatriz de una decimal periódica mixta, tiene por numerador la diferencia de los números que resultan de llevar la coma á derecha é izquierda del primer período, y por denominador un número compuesto de tantos 9 como cifras tiene el período, seguido de tantos ceros como cifras tiene la parte nó periódica.*

Sea la fraccion 0,41313.... y sea F su generatriz; se tiene $F=$*límite* 0,41313.... Si se lleva la coma á derecha é izquierda del primer período, resulta 1000 $F=$*límite* 413,1313.... y 10 F *límite*$=4,1313...$; restando ordenadamente darán 990 F $=413-4$, de donde $F=\frac{413-4}{990}$.

255. Nota. *El numerador de la generatriz de una fraccion decimal periódica mixta, no puede terminar en cero.*

En efecto; examinando el numerador de esta generatriz se ve que para terminar en cero es menester que la última cifra de la parte no periódica, y la de la periódica, sean iguales; lo cual es imposible, porque entónces el período comenzaria un lugar ántes.

Sin necesidad de reducir una fraccion ordinaria á decimal, se puede determinar desde luego qué clase de fraccion ha de producir por los caractéres siguientes:

256. *Para que una fraccion ordinaria sea exactamente reducible á decimal, se necesita y basta que, despues de suprimidos todos los factores comunes á sus dos términos, el denominador no contenga otros factores primos que 2 ó 5.*

En efecto; como para reducirla á decimal se multiplica el numerador por la unidad seguida de ceros, ó sea una potencia de 10, se introducen en el numerador todos los factores 2 y 5 (pues $10=2.5$) que sean necesarios para que su division por el denominador sea exacta, toda vez que éste no tiene otros factores primos que el 2 ó el 5.

Así, la fraccion ordinaria $\frac{13}{80}$, como su denominador $80 = 2^4.5$ es exactamente reducible á decimal y da 0,1625.

257. *Para que una fraccion ordinaria dé una decimal periódica pura, se necesita y basta que entre los factores primos de su denominador no existan el 2 ni el 5.*

En efecto; exacta no puede ser, porque contiene otros factores diferentes de 2 ó 5, los cuales no se introducen en el numerador al ponerle los ceros, y por tanto la division no puede ser exacta. No siendo exacta precisamente, será periódica, y periódica pura. En efecto; segun la regla de las generatrices de las periódicas mixtas, su denominador termina en ceros, pero nó su numerador; luego no pueden simplificarse de tal manera que desaparezcan á la vez todos los factores 2 y 5 que contiene el denominador. Alguno de ellos tiene que persistir en el de la generatriz, y como la propuesta no tiene ni el 2 ni el 5, no puede producir una periódica mixta. Se ha visto que la fraccion que produce no es exacta ni periódica mixta; luego precisamente es periódica pura.

Así, la fraccion $\frac{5}{9}$, como su denominador es $9 = 3^2$, da la periódica pura 0,555.

258. *Para que una fraccion ordinaria produzca una decimal periódica mixta, se necesita y basta que su denominador contenga, además de otros factores, al 2 ó al 5.*

En efecto; exacta no puede engendrar; tampoco producirá una periódica pura, pues el denominador de la generatriz de las de esta clase sólo se compone de cifras 9, y por tanto no tiene ningun factor 2 ni 5. Cuyo requisito hace que las que los tienen no pueden producir fracciones periódicas puras. No siendo exacta ni periódica pura, precisamente será periódica mixta.

259. Nota. *El número de cifras irregulares de una fraccion decimal periódica mixta es igual al mayor de los exponentes que el 2 ó el 5 lleve en el denominador de su generatriz.*

En efecto; el numerador de la generatriz de una fraccion periódica mixta no puede terminar en cero, y, por el contrario, el denominador termina en tantos ceros como tiene la parte nó periódica. Esto dice, que por mucho que se simplifique su generatriz, no pueden desaparecer á la vez los factores 2 y 5; uno de ellos persistirá, por tanto, con todo su exponente, que es igual al número de cifras de la parte nó periódica.

Así, la fraccion $\frac{7}{15}$, cuyo denominador es $15=3.5$, da una decimal periódica mixta porque tiene el factor 5 además del 3, y sólo tiene una cifra irregular porque el exponente de 5 es 1: la que produce es 0,4666.

CAPÍTULO VI

Raíz cuadrada de los números enteros, y fraccionarios.

260. *Se llama raíz cuadrada exacta de un número otro cuyo cuadrado reproduce al propuesto.*

Segun esto, los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, son las raíces cuadradas *exactas* de 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100, respectivamente.

261. Los números que tienen raíz cuadrada exacta se llaman *cuadrados perfectos.*

262. El signo para indicar la extraccion de la raíz cuadrada es el $\sqrt{\ }$, que se llama *radical.* El número al cual se extrae la raíz se escribe debajo y se llama *sub-radical* ó *radicando.* Así: $\sqrt{81}$ se lee *raíz cuadrada de* 81.

263. *Si un número entero no tiene raíz cuadrada exacta en números enteros, tampoco la tiene en fraccionarios.* En efecto; sea un número tal como 46, cuya raíz está entre 6 y 7. Si se supone que la exacta pudiera ser 6 más una fraccion, incorporando 6 con la fraccion simplificada, y elevándola al cuadrado, deberia reproducir el número 46. Pero esto es imposible, porque las potencias de una fraccion irreducible son tambien fracciones irreducibles (221).

264. Las raíces exactas de los números que no son cuadrados perfectos no pueden, por tanto, expresarse ni por números enteros ni fraccionarios; sólo se hace aproximadamente. Tales raíces se llaman *inconmensurables*.

265. Se llama *raíz entera* de un número la exacta del mayor cuadrado contenido en él. *Resíduo* es la diferencia entre el cuadrado de la raíz entera y el número propuesto.

266. Para extraer la raíz cuadrada exacta ó entera de los números menores que 100, basta aprender de memoria los cuadrados de los diez primeros números.

267. Si los números son mayores que 100, hay que tener presente la composicion del cuadrado de la suma de dos números (114), á saber: que $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, de donde se deriva:

1.º *La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es igual al duplò del menor, más una unidad.* En efecto; como $(N+1)^2=N^2+2N+1$, si de ámbos miembros se resta N^2, se tiene $(N+1)^2-N^2=2N+1$.

2.º *El resíduo de la raíz cuadrada de un número, es menor que el duplo de la raíz entera, más una unidad.* Pues si la raíz entera de un número fuese, por ejemplo, 19, y el resíduo igual ó mayor que $2.19+1$, el número propuesto sería el cuadrado de 20 y nó de 19, toda vez que contiene á $19^2+2.19+1$, que es igual á $(19+1)^2$, ó sea 20^2. Luego la raíz no sería 19, sino 20, contra el supuesto.

3.º *La raíz cuadrada de un número tiene la mitad de cifras que el propuesto, si las de éste son pares, y una más si son impares.* En efecto; los números que están entre 100 y 10000 tienen tres ó cuatro cifras y su raiz está entre 10 y 100; es decir, tiene dos cifras. Los que están entre 10000 y 1000000 tienen cinco ó seis cifras y su raíz está entre 100 y 1000; es decir, tiene tres cifras, etc.

268. Esto supuesto, sea un número comprendido entre 100 y 1000, tal como 4225, cuya raíz cuadrada se busca; ésta se compondrá de decenas, que se llamarán A, y de unidades, que se designarán por B, y por tanto la raíz por $(A+B)$, cuyo cuadrado $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ reproducirá á 4225, si la raíz es exacta, ó estará contenido en él si no lo es. La primera parte de este cuadrado es A^2, ó sea el cuadrado de decenas, que evi-

dentemente es un número de centenas (pues $10^2=100$) que estarán en las 42 del propuesto; en las que tambien están las que provengan de las otras partes del cuadrado y del resto si lo hay; luego si se extrae la raíz cuadrada del mayor cuadrado contenido en las 42 centenas, la cifra que se obtiene no es *menor* que la verdadera cifra de las decenas de la raíz cuadrada del número propuesto.

Tampoco será mayor, porque estando el cuadrado de la cifra 6 así determinada, conteniendo en las centenas del número propuesto 4225, éste tiene su raíz cuadrada entre seis y siete decenas, y por tanto la cifra 6 no es grande para las decenas de su raíz.

Determinada la cifra de las decenas de la raíz cuadrada, para hallar las de las unidades se observa que si del número propuesto 4225 se resta el cuadrado de 6 decenas, ó sean 36 centenas, ó 3600 unidades, el resto 625 se compondrá con las otras partes del cuadrado, y del resíduo si lo hubiese. Como el producto $2AB$ (duplo de decenas por unidades) es un número de decenas, estará en las 62 decenas del resto; además, como uno de los factores es conocido (á saber, $2A$, y en el ejemplo 2.6), el otro factor B (ó sean las unidades de la raíz) no será mayor que el cociente de $62:2\times 6$; pues en las 62 decenas están las que provengan del cuadrado de unidades, más las del resto. Luego *dividiendo las decenas del resto por el duplo de las decenas de la raíz se tiene seguridad de no poner una cifra menor que la verdadera de las unidades de la raíz.*

Pero sí se puede poner una que sea mayor, á causa de que las decenas que se acumulan del cuadrado de unidades, más las del resto, pueden contener una ó más veces al que sirve de divisor, lo cual fácilmente se puede verificar (por ejemplo, con el número $861=19^2$). Para comprobar la que se obtiene por el tanteo, se escribe junto al divisor, y así, modificado, se multiplica por la misma cifra; de este modo se forma *el cuadrado de unidades y duplo de decenas por unidades,* cuyo producto, si se puede restar de todo el que ha servido de dividendo, asegura que la cifra puesta no es grande: si no se pudiese restar, se rebajaria en una unidad, volviéndola á comprobar. En el ejemplo, 62 entre 12 da de cociente 5, que puesto junto á 12 hacen 125, y multiplicado por 5 da 625, igual al que sirvió de dividendo; el resto es cero, y la raíz, por tanto, 65 exactamente.

La disposicion práctica de esta operacion es como la de dividir. Así en la del número que ha servido de ejemplo se dispondrá:

42'25	65
36	
62'5	12'5
625	5
0	625

269. Si se tratase de un número cuya raíz tuviera tres cifras, es fácil de ampliar á este caso el mismo procedimiento. Sea, por ejemplo, hallar la raíz cuadrada de 522576. Como sus centenas son 5225, su raíz no se puede determinar *à priori* cómo cuando son ménos de 100, sino que hay que aplicar á su vez á estas centenas el procedimiento explicado. Así, se operaria como si se tratase sólo de hallar la raíz cuadrada de 5225, que tiene cuatro cifras, y cuya raíz se sabe determinar; y una vez obtenida, las unidades de la raíz del número dado se hallan dividiendo las decenas del resto por el duplo de toda la raíz hallada. La operacion se dispondrá:

$\sqrt{}$	52'25'76	722 Raíz entera.
	49	
	32'5	14'2
	284	2
	417'6	144'2
	2884	
Resíduo..	1292	

772
772
1544
5404
5404
595984

49
5
54

Análogas consideraciones extienden el procedimiento á todos los enteros, cualquiera que sea el número de las cifras que haya de tener su raíz.

270. Regla. *Para extraer la raíz cuadrada de un número mayor que 100, se divide en secciones de dos en dos cifras, empezando por la derecha; se extrae la raíz de la primera seccion de la izquierda y se tendrá la primera cifra de la raíz; se eleva esta cifra al cuadrado y se resta de la primera seccion; á la derecha del resto se baja la seccion siguiente y se dividen las decenas del número que resulta, por el duplo de la primera cifra de la raíz; el cociente será la segunda; para comprobarla se escribe junto al divisor y se multiplica, así modificado, por la misma cifra; el producto se resta de todo el que ha servido de dividendo; á la derecha del resto se baja la seccion siguiente, y así se continúa hasta que no haya más secciones que bajar.*

271. El error cometido siguiendo esta regla, en la raíz cuadrada de los números que no son cuadrados perfectos, no llega á *una unidad por defecto*. Porque si á la raíz entera obtenida se le aumenta una unidad, su cuadrado es mayor que el número dado; lugo la raíz exacta se encuentra entre dos enteros consecutivos, de los que el menor es el obtenido.

272. *Raíz cuadrada de las fracciones*. Se distinguen dos casos: primero, *que ámbos términos de la fraccion sean cuadrados perfectos;* segundo, *que alguno de ellos no lo sea*.

273. *En el primer caso se extrae la raíz cuadrada de sus dos términos y se divide la del numerador por la del denominador*. En efecto; si la fraccion así obtenida se eleva al cuadrado, evidentemente reproduce la propuesta. Así:

$$\sqrt{\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\frac{5}{6}.$$

274. En el segundo caso en que uno, ó los dos términos no son cuadrados perfectos, la raíz obtenida, extrayéndola de ámbos, no es exacta; pero es fácil determinar un límite al error que se comete, siempre que el denominador sea un cuadrado perfecto. Pues el error cometido al tomar como raíz de

tales fracciones *la entera del numerador dividida por la exacta del denominador, es menor que la unidad partida por la raíz del denominador*. En efecto; sea la fraccion $\frac{18}{49}$, cuyo denominador es cuadrado perfecto; como la raíz exacta del numerador está entre 4 y 5, la del quebrado estará entre $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{7}$; luego difiere de cualquiera de éstas en ménos de $\frac{1}{7}$.

275. *Todo quebrado cuyo denominador no es cuadrado perfecto puede trasformarse en otro cuyo denominador lo sea*, pues si ámbos términos se multiplican por el denominador se consigue este resultado. Así: $\frac{3}{5}=\frac{3\times 5}{5^2}$. Luego la raíz de todo cuadrado puede extraerse con un error *menor que la unidad partida por su denominador*.

276. En algunos casos, por la descomposicion en factores primos del denominador, puede conseguirse el que éste sea cuadrado perfecto *multiplicando los dos términos por los factores primos que le falten al denominador para ser cuadrado perfecto*. Así, dada la fraccion $\frac{11}{50}$, como $50=2\times 5^2$, para que sea el denominador cuadrado perfecto bastará un factor 2, pues entónces todos sus factores tendrán exponente par, y se tendrá $\frac{11}{50}=\frac{11\times 2}{50\times 2}=\frac{22}{100}$, cuya raíz se puede ya extraer en ménos de $\frac{1}{\sqrt{100}}=\frac{1}{10}$, y sería 0,4 por defecto.

277. En las fracciones decimales se consigue que el denominador sea cuadrado perfecto haciendo *que el número de cifras decimales sea par, para lo cual basta agregar un cero cuando no lo sean y entónces la raíz tendrá la mitad de cifras decimales, pues la raíz* de su denominador implícito, que es la unidad seguida de un número par de ceros, es la unidad seguida de la mitad del número de ceros.

Así, para extraer la raíz de 0,424 se pondrá $\sqrt{0,4240}$, cuya raíz es la misma que la de $\sqrt{\frac{4240}{10000}}=\frac{\sqrt{4240}}{100}$, la cual es por defecto 0,65 en ménos de 0,01.

278. *Aproximacion de las raíces cuadradas inexactas de los números enteros.* Para extraer la raíz cuadrada de un número entero, que no es cuadrado perfecto, con un error menor que una parte cualquiera de la unidad, *se multiplica el número por el cuadrado del denominador de la aproximacion pedida; se extrae la raíz entera del producto, y ésta se divide por el mismo denominador.* En efecto; sea, por ejemplo, la raíz de 20 en ménos de $\frac{1}{3}$; para ello bastará poner á 20 bajo la forma de fraccion, cuyo denominador sea 3^2, pues conseguido esto, la raíz de tal fraccion será exacta en ménos de $\frac{1}{3}$. Pero poner á 20 bajo la forma apetecida es bien fácil, pues la igualdad $20=\frac{20\times 3^2}{3^2}$ manifiesta la manera de ejecutarlo, que es la enunciada en la regla. Así se tendrá que como la raíz cuadrada de $20\times 3^2=180$ es 13, la del quebrado será $\frac{13}{3}=4\frac{1}{3}$ en ménos de $\frac{1}{3}$.

279. El mismo método aplicado á una fraccion sirve para extraer su raíz cuadrada en ménos de una parte alícuota de la unidad. Así la raíz cuadrada de $\frac{5}{11}$ en ménos de $\frac{1}{3}$ se obtendrá observando que $\frac{5}{11}=\frac{\frac{5\times 3^2}{11}}{3^2}$, pero $\frac{5\times 3^2}{11}$ da 4; luego $\frac{5}{11}$ está entre $\frac{4}{3^2}$ y $\frac{5}{3^2}$; su raíz cuadrada será $\frac{2}{3}$ en ménos de $\frac{1}{3}$ por defecto.

280. *De la índole de las fracciones decimales se desprende que cuando la aproximacion que se pide es una parte decimal de la unidad, bastará añadir al número dos ceros por cada cifra decimal que se desee en la raíz.* En efecto; para hallar la raíz de 13 en ménos de 0,001, ó sea $\frac{1}{1000}$, segun lo enunciado, se extraeria la raíz de 13×1000^2, y obtenida, se dividiria por 1000,

conforme con la regla; pero multiplicar un número por 1000 es añadirle seis ceros, ó sea dos ceros por cada cifra decimal que se desea; y dividir la raíz por 1000 es separar de su derecha tres cifras decimales, conforme con lo enunciado en la regla. En el ejemplo propuesto se tiene $13\times1000^2=13000000$, cuya raíz cuadrada es 3605; luego la de 13 en ménos de 0,001 és 3,605.

EJERCICIOS. $\sqrt{57198969}=7563$ $\sqrt{61009}=247$ $\sqrt{1607448649}=40093$ $\sqrt{956484}=978$ $\sqrt{9,6}=3,09838\ldots$ $\sqrt{\frac{81}{256}}=\frac{9}{16}$ $\sqrt{11\frac{16}{23}}=3,41989\ldots$

CAPÍTULO VII

Raíz cúbica de los números enteros, y fraccionarios.

281. *Raíz cúbica exacta de un número es otro número cuyo cubo ó tercera potencia, reproduce al propuesto.*

Segun esto, los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, son las raíces cúbicas de 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 y 1000 respectivamente.

282. El signo para indicar esta operacion es el radical $\sqrt[3]{}$ poniendo en su abertura el índice 3.

283. *Los números que tienen raíz cúbica exacta se llaman cubos perfectos.*

284. *Si un número entero no tiene raíz cúbica exacta entera, tampoco la tiene fraccionaria.* En efecto; sea el número 70, por ejemplo: como el cubo de 4 es 64 y el de 5 es 125, la raíz de 70 está entre 4 y 5. Suponiendo que 4 y una fraccion fuese la exacta, esto sería absurdo, porque incorporando 4 á la fraccion, y hecha irreducible, su cubo debia dar 70, lo que es imposible, porque las potencias de las fracciones irreducibles son tambien fracciones irreducibles y nó números enteros.

285. Se llama raíz cúbica entera de un número que no es cubo perfecto *la raíz exacta del mayor cubo contenido en el número*. La raíz exacta de los que no son cubos perfectos es incomensurable.

286. *Se llama resíduo de la raíz cúbica la diferencia entre el cubo de la raíz entera y el número propuesto.*

Para extraer la raíz cúbica exacta ó entera de los números menores que 1000, basta aprender de memoria los cubos de los diez primeros números.

287. Para extraerla á los números mayores que 1000 conviene recordar las partes de que consta el cubo de la suma de dos números (106) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; de donde se deduce: primero, *que la diferencia de los cubos de dos números enteros consecutivos es igual al triplo del cuadrado del menor, más el triplo del menor, más una unidad*. En efecto; $(n+1)^3=n^3+3n^2+3n+1$); restando de los dos miembros n^3 se tiene $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$.

288. *El resto de la raíz cúbica de un número, lo mayor que puede ser es el triplo del cuadrado de la raíz, más el triplo de la raíz*, pues si tiene una unidad más, el número es el cubo de su raíz, más uno.

289. *La raíz cúbica de un número tiene tantas cifras como grupos de á tres forman las del propuesto, contando una más si sobran una ó dos cifras del propuesto*. En efecto; los números comprendidos entre 1000 y 1000000 tienen cinco ó seis cifras, y su raíz cúbica está entre 10 y 100, y por tanto tiene dos cifras. Análogamente en otros ejemplos.

290. Esto supuesto, sea el número cuya raíz cúbica se pide 262144. Ésta constará de dos cifras, ó sean decenas y unidades. Llamando las primeras a, y b las segundas, la raíz será $(a+b)$, y su cubo $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ reproducirá el número propuesto si es cubo perfecto, y si no lo es, estará contenido en él. La primer parte, a^3, ó sea el cubo de decenas, es un número exacto de millares (pues $10^3=1000$), que estará entre los 262 millares del número; y como en éstos 262 han de

estar tambien las que provengan de las otras partes del cubo, y del resto si lo hubiese, evidentemente la raíz cúbica entera de estos millares dará una cifra que no puede ser *menor* que la verdadera.

Tampoco será mayor, pues estando el cubo de la cifra 6 así determinada contenido en los millares del número propuesto, la raíz cúbica de éste es mayor que 6 decenas.

Se ha visto que evidentemente no será menor, luego *à fortiori* será la verdadera. Obtenida la cifra de las decenas, para hallar la de las unidades se observa que si del número propuesto se resta el cubo de decenas, quedarán de resto las otras partes del cubo, á saber, $(3a^2b+3ab^2+b^3)$, más el resíduo si lo hubiese. La primera de estas partes, $3a^2b$, es un número exacto de centenas, porque siendo a decenas, a^2 son centenas, que estarán en las centenas del resto. Si, pues, se dividen estas centenas por el factor $3a^2$, ó sea triplo del cuadrado de la primera cifra de la raíz, el cociente no será menor que las unidades, toda vez que en las centenas que sirven de dividendo están acumuladas las que provengan de las dos partes restantes del cubo, y las del resíduo. En el ejemplo se restará el cubo de 6, ó sea 216, de los 262 millares, cuyo resto, junto con las tres cifras siguientes, da 46144, y dividiendo sus 461 centenas por 3.6^2, el cociente 4 que se obtiene no será menor que las unidades de la raíz. Pero sí puede ser mayor, como fácilmente puede verse en muchos ejemplos, á causa de que las centenas provenientes del triplo de decenas por el cuadrado de unidades, más las del cubo de unidades, más las del resto, pueden componer un número mayor que el que se toma por divisor. Para comprobar la que se obtiene por la division, lo más breve es elevar la raíz hallada al cubo y ver si el resultado es ó nó mayor que el número propuesto; y si lo es, rebajar la última cifra y volverla á comprobar. En el ejemplo puesto, como 64 elevado al cubo da el número dado, la raíz es 64 exactamente.

Disposicion	262'144	64 Raíz.
	216	
	46144	108
	262144	
Resíduo	0	

291. Si el número de que se trata tuviese más de dos cifras en su raíz, por ejemplo, tres, quiere decir que para extraer la raíz de sus millares habrá que aplicar el procedimiento anterior y despues determinar la cifra de las unidades: análogamente en otro cualquier número, sean las que se quieran las cifras de su raíz.

292. Regla. *Para extraer la raíz cúbica de un número mayor que* 1000, *se divide en secciones de tres en tres cifras, empezando por la derecha; se extrae la raíz de la primera seccion de la izquierda; esta raíz se eleva al cubo y se resta de la primera seccion; á la derecha del resto se baja la primera cifra de la seccion siguiente y se divide el número que resulta por el triplo del cuadrado de la raíz hallada; la cifra que se obtenga de cociente se pone en la raíz y se eleva ésta al cubo, el cual se resta de las secciones con que se ha operado, y así se continúa hasta que no haya más secciones que considerar.*

293. El error cometido, siguiendo este método, en las raíces de los números que no son cubos perfectos, no llega á una unidad. La razon análoga á la expuesta (271).

294. Raíces cúbicas de las fracciones. *Se distinguen dos casos: primero, que los dos términos sean cubos perfectos; segundo, que alguno ó ámbos no lo sean.*

1.º *La raíz cúbica de una fraccion, cuyos dos términos son cubos perfectos, es igual á la del numerador dividida por la del denominador*. Así: $\sqrt[3]{\frac{216}{343}}=\frac{6}{7}$. Demostracion análoga á la del número (273).

2.º *Cuando alguno ó los dos términos del quebrado no son* *cubos perfectos, entónces el quebrado no tiene raíz exacta, y para determinarla, con un error menor que un límite conocido, basta que el denominador sea un cubo perfecto.*

295. *Si se divide la raíz cúbica entera del numerador, por la exacta del denominador, el error será menor que la unidad partida por la raíz del denominador.* Así: $\frac{3}{5}$ es la raíz cúbica de $\frac{29}{125}$ en ménos de $\frac{1}{5}$ de error. (Véase número 274.)

296. En las fracciones puede conseguirse que su denominador sea cubo perfecto, multiplicando sus dos términos por el cuadrado del denominador. Así: $\frac{3}{7}=\frac{3.7^2}{7^3}$. *Si son decimales, se hace su denominador cubo perfecto, cuidando de tomar un número de cifras decimales múltiplo de* 3.

297. Tambien puede en algunos casos obtenerse por denominador, un cubo perfecto más sencillo; descomponiendo el dado en sus factores primos y multiplicando los dos términos por los factores primos, que le faltan para que sus exponentes sean 3 ó múltiplos de 3.

Así la fraccion $\frac{7}{12}$, como $12=2^2.3$, le falta un factor 2 y 3^2 para que sea el denominador cubo perfecto, y se tendrá $\frac{7}{12}=\frac{7.2.3^2}{2^3.3^3}$, cuyo denominador es cubo perfecto, y más sencillo que si ámbos términos se hubiesen multiplicado por 12^2.

298. APROXIMACION DE LAS RAÍCES CÚBICAS INEXACTAS DE LOS NÚMEROS ENTEROS. *Para aproximar la raíz cúbica inexacta de los números enteros en ménos de una parte alícuota de la unidad, se multiplica el número por el cubo del denominador de la aproximacion, se extrae la raíz del producto y se divide por el mismo denominador.* Así: $\sqrt[3]{5}$ en ménos de $\frac{1}{3}$, se obtendrá observando, que $5=\frac{5\times3^3}{3^3}$, y será $\sqrt[3]{\frac{5\times3^3}{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{5\times3^3}}{3}$.

299. *Si la parte alícuota es decimal, por cada cifra decimal que se quiera en la raíz, se le añadirán al número tres ceros, se extrae la raíz cúbica del número que resulta y se le separan tantas cifras decimales, como grupos de tres ceros se hayan añadido.* En efecto; si se quiere extraer la raíz cúbica de 6 en ménos de 0,01, ó sea $\frac{1}{100}$, se tendrá que multiplicar 6 por 100^3 ó sea por 1000000, es decir, añadirle seis ceros, extraer la raíz cúbica del producto y dividir esta raíz por 100, ó sea separarle dos cifras decimales, conforme con la regla.

CAPÍTULO VIII

Proporciones

300. El cociente de dos números recibe tambien los nombres de *relacion* ó *razon*. Así la relacion de 8 á 4 es $\frac{8}{4}$, ó en otra forma: $8:4$ y es 2; la de 3 á 5 queda indicada, y es $\frac{3}{5}$.

301. *Se llama proporcion la igualdad de dos razones.* Así: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que tambien se escribe $a:b::c:d$, y se lee a es á b como c es á d, es una proporcion.

302. Se llaman EXTREMOS de una proporcion el *primero* y *cuarto* término, y MEDIOS el *segundo* y *tercero*. Tambien los *dividendos* de ámbas razones se llaman *antecedentes* y los *divisores consecuentes*.

303. Es evidente que dos proporciones que tengan una razon comun, las otras dos razones forman proporcion; pues de $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}=\frac{c}{d}$, se deduce inmediatamente, que $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$.

304. *En toda proporcion el producto de medios es igual al de extremos.* En efecto; sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; reduciendo estas fracciones

á comun denominador, dirán $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$, y como tienen el mismo denominador, para que sean iguales, precisamente $ad=bc$.

Recíprocamente, *si el producto de dos números es igual al de otros dos, se puede formar proporcion colocando los factores de un producto en los medios y los del otro en los extremos.* En efecto; si $ab=cd$, dividiendo ámbos miembros por el producto de un factor de un miembro y uno del otro, por ejemplo, bd, dirá $\frac{ad}{bd}=\frac{cd}{bd}$, y simplificando, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

305. De la proposicion directa se deduce: primero, *que un extremo de una proporcion es igual al producto de los medios dividido por el otro extremo.* En efecto; si $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, como $ax=bc$, se tiene que, $x=\frac{bc}{a}$; segundo, *un medio es igual al producto de los extremos partido por el otro medio;* pues de, $\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$ se tiene, $bx=ad$, de donde $x=\frac{ad}{b}$.

306. *Se llama proporcion continua la que tiene los medios iguales; éste se llama medio proporcional entre los extremos.* Así: $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ es contínua y b el medio proporcional entre a y c.

307. *Para hallar un medio proporcional entre dos números se extrae la raiz cuadrada á su producto.* En efecto; si a y b son los números dados, y x el medio proporcional que se busca, se debe tener $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$; de donde $x^2=ab$; luego $x=\sqrt{ab}$.

308. De la proposicion recíproca se deduce que *pueden permutarse los términos de una proporcion, sin que ésta deje de existir, con tal de que en todas las variaciones el producto de los extremos sea igual al de los medios.* Las formas que segun esto, se pueden dar á una proporcion entre cuatro números, son ocho; cada dos empiezan con un mismo número. Así: 1.ª $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$;

2.ª $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; 3.ª $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; 4.ª $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; 5.ª $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; 6.ª $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; 7.ª $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$; 8.ª $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$. En todas ellas los números a y d, b y c ocupan los medios ó los extremos, y por tanto si en una se verifica que $ad=bc$, lo mismo acontece en todas y tiene lugar el principio demostrado (304 Rec.co).

309. *En toda proporcion la suma ó diferencia de antecedente y consecuente de cada razon, dividida por su antecedente ó consecuente respectivo, da el mismo cociente.* Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ la proporcion: en ella se tiene $ad=bc$; sumando ahora, ó restando, el producto bd, ó ac, de los consecuentes ó antecedentes (segun con los que se quiera comparar), sea, por ejemplo, bd, dirán $ad\pm bd=bc\pm bd$; y sacando factores comunes, será $d(a\pm b)=b(c\pm d)$, de donde $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$. Cuando este principio se aplica á una proporcion, se dice que se compone por *suma* ó *diferencia*.

310. Corolario. *En toda serie de razones iguales, la suma de antecedentes es á la de consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.* Sean dos razones iguales, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: invirtiendo los medios será $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; segun lo anterior, $\frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$: invirtiendo los medios, $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$; cuya igualdad prueba la proposicion. Sean ahora tres ó más las razones iguales, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$ se tiene en las dos primeras $\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$, y por tanto $\frac{a+c}{b+d}=\frac{e}{f}$. Como esta igualdad consta de dos razones, y el principio es verdadero para dos, se tiene $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{e}{f}$. Fácilmente se extenderia el principio á cuantas razones iguales se considerasen.

311. *La suma de antecedente y consecuente de cada razon, dividida por su diferencia, da el mismo cociente en las dos razones.*

En efecto; $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, se tiene $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}$, y $\frac{a-b}{c-d}=\frac{b}{d}$; luego $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$; é invirtiendo los medios, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

312. *Si várias proporciones se multiplican ordenadamente los productos forman proporcion.* Sean dos, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$; de la primera $ad=bc$, de la segunda $eh=fg$; multiplicando estas igualdades, $adeh=bcfg$, ó sea $ae\times dh=bf\times cg$, de donde (304 Rep.^{ca}) $\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$. Fácilmente se extiende la demostracion á tres ó más proporciones.

313. Corolario. *Las potencias ó raíces del mismo grado de los términos de una proporcion forman proporcion.* Es evidente, segun lo anterior, que si, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se multiplica por sí misma dará $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$, y volviéndola á multiplicar será $\frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3}$, etc.

314. Como la proporcion primitiva $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se deduce de las siguientes $\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2}$, etc., por la extraccion de las raíces cuadrada ó cúbica, ó en general de un mismo grado de todos los términos de ésta, se *tiene que las raíces del mismo grado de los términos de una proporcion forman proporcion.*

315. Es evidente que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, tambien 1.º) $\frac{a.m}{b}=\frac{c.m}{d}$; 2.º) $\frac{a}{b.m}=\frac{c}{d.m}$; 3.º) $\frac{a.m}{b.m}=\frac{c}{d}$; 4.º) $\frac{a.m}{b.m}=\frac{c.m}{d.m}$. En efecto; la igualdad primera es el resultado de multiplicar los dos miembros de la propuesta por m; la segunda es el resultado de haberlos dividido por m; la igualdad, por tanto, subsiste; la 3.ª es el resultado de haber multiplicado los dos términos del primer miembro de la propuesta por m, y como es una

fraccion no se ha alterado de valor; y la cuarta proviene de la multiplicacion de todos los términos de la propuesta por m, y como son dos fracciones no se altera la igualdad Traducidas dicen: 1.º) *Se pueden multiplicar por un mismo número los antecedentes.* 2.º) *Los consecuentes.* 3.º) *Un antecedente y su consecuente.* 4.º) *Los cuatro términos de una proporcion sin que dejen los resultados de formar proporcion.*

De las proporciones primera, segunda, tercera y cuarta se deduce la propuesta. Primera, *dividiendo los antecedentes por un mismo número;* segunda, *dividiendo los consecuentes;* tercera, *un antecedente y un consecuente;* cuarta, *los cuatro términos por un mismo número.* Luego todas estas trasformaciones pueden hacerse con los términos de una proporcion sin que ésta deje de existir.

316. Estas propiedades ofrecen el medio de convertir en enteros, los términos de una proporcion cuando sean fraccionarios, ó de simplificarlos en su caso. En efecto; si la proporcion fuese $\frac{4}{5}:\frac{2}{3}::\frac{3}{4}:\frac{5}{8}$, multiplicando todos los términos por 120, mínimo comun múltiplo de los denominadores, se tendrá $96:80::90:75$.

CAPÍTULO IX

Aplicaciones.

§ I. Sistema métrico de pesas y medidas y teoría de complejos é incomplejos.—Resolucion de las cuestiones de interés simple, descuento, compañía, aligacion y conjunta.—Método de reduccion á la unidad.

317. *Se llama sistema métrico decimal de pesas y medidas, aquel cuya base es el* Metro *y cuya ley es que las diversas unidades sean décuplas unas de otras.*

318. Además de esta ley general, por la cual se llama decimal, se usa en este sistema de las palabras *Deca, Hecto, Kilo* y *Miria*, que respectivamente significan *diez, ciento, mil* y *diez mil*, para anteponerlas á la unidad principal de las medidas de

cada especie y formar el nombre del múltiplo: así como de las de *deci, centi, mili,* que respectivamente significan 0,1, 0,01, 0,001, que antepuestas tambien al nombre de la unidad de cada especie indican los submúltiplos de ella.

319. La unidad principal del sistema es su unidad de longitud, á la que se llama METRO.

METRO *es la longitud de la diezmillonésima parte del cuarto de meridiano terrestre.*

320. *La unidad de superficie es el* METRO CUADRADO. *Para las medidas agrarias se usa el* ÁREA, *ó sea un cuadrado cuyo lado son diez metros.*

321. *La unidad para áridos y líquidos es el* LITRO, *ó sea un decímetro cúbico.*

322. *La de peso es el* GRAMO, *ó sea el peso en el vacío de un centímetro cúbico de agua destilada á 4º sobre cero del centígrado.*

Para grandes pesos se usa del QUINTAL MÉTRICO *y* TONELADA MÉTRICA.

323. *Para los volúmenes, la unidad es el* METRO CÚBICO.

Para leña y madera se llama al metro cúbico STERIO.

324. El cuadro de este sistema es el siguiente:

MEDIDAS DE LONGITUD. Unidad principal, el METRO. Múltiplos: *Decámetro, Hectómetro, Kilómetro* y *Miriámetro,* ó sean 10 *metros,* 100 *metros,* 1000 *metros,* 10000 *metros.* Submúltiplos: *decímetro, centímetro, milímetro,* ó sean 0,1 *de metro,* 0,01 *de metro,* 0,001 *de metro.*

MEDIDAS DE SUPERFICIE. Unidad principal, el METRO CUADRADO. Múltiplos, los mismos que los longitudinales, pero cuadrados, y tambien los submúltiplos. Así, se usan el *Decámetro cuadrado, Hectómetro cuadrado,* etc., y tambien *decímetro cuadrado, centímetro cuadrado,* etc.

Para las superficies agrarias se toma como unidad principal un múltiplo del metro cuadrado, á saber, el DECÁMETRO CUADRADO, que se ha llamado ÁREA: el múltiplo más usual de esta unidad es la *Hectárea,* ó sean 100 *áreas,* y el submúltiplo la *centiárea,* ó sea 0,01 de *área.*

NOTA. Estas medidas de superficie, que son cuadradas, se suelen indicar en la escritura poniendo un exponente al nombre de la medida longitudinal. Así: *Metro*^{2} es *Metro cuadrado,* etc.

PESOS. Unidad principal, GRAMO. Múltiplos: *Decágramo, Hectógramo, Kilógramo* y *Miriágramo.* Submúltiplos: *decígramo, centígramo* y *milígramo.*

Para los grandes pesos se usa tambien del QUINTAL MÉTRICO, que tiene 100 *kilógramos*, y la TONELADA MÉTRICA, que tiene 1000 *kilógramos*.

MEDIDAS DE CAPACIDAD PARA ÁRIDOS Y LÍQUIDOS. Unidad principal, el LITRO. Múltiplos: *Decálitro*, *Hectólitro*, que son los más usados. Submúltiplos: *decílitro*, *centílitro*.

MEDIDAS PARA VOLÚMENES. Unidad principal, el METRO CÚBICO (que se indica, y todas las demás de volúmen, con el exponente 3), ó sea *Metro*^{3}. Múltiplos: *Decámetro*^{3}, *Hectómetro*^{3}, etc. Submúltiplos: *decímetro*^{3}, *centímetro*^{3}, *milímetro*^{3}.

Para leña y madera se suele dar al metro^3 *el nombre de* STERIO. Las necesidades de la práctica han hecho adoptar las nuevas unidades *quintal* y *tonelada métrica* y el *sterio*, lo mismo que sus múltiplos y submúltiplos.

§ II. APLICACIONES DEL CÁLCULO DE LOS NÚMEROS ENTEROS Y FRACCIONARIOS, Á ALGUNOS EJEMPLOS DE CONCRETOS.

325. *Definiciones*. En los números *concretos* se llaman *complejos si están referidos á diversas unidades de la misma especie*.

Así: 7 *kilógramos*, 6 *gramos*, 7 *decígramos*, son concretos referidos á distintas unidades, pues la del primero es el *kilógramo*, la del segundo el *gramo* y la del tercero el *decígramo*, pero todas de la misma especie de peso. *Incomplejo es un concreto referido á una sola unidad*, como 60 *hectómetros*, cuya unidad es el *hectómetro*.

326. Los *complejos* se reducen fácilmente á *incomplejos*, ó, lo que es lo mismo, *se refieren á la misma unidad, por multiplicacion ó division*.

En efecto; cualquier concreto que se quiera referir á unidad dos, tres.... diez veces *menor* que la en que está valuado, *bastará multiplicarlo por* 2, 3.... *ó* 10. Viceversa si es á unidad superior, dos, tres.... diez veces *mayor, habrá que dividirlo por* 2, 3.... *ó* 10.

Sea referir 12 kilómetros á metros, lo cual se enuncia vulgarmente *reducir kilómetros á metros*: el razonamiento es, que conteniendo cada unidad *kilómetro* mil veces á la nueva *metro*, las 12 unidades *kilómetros* contendrán 12 veces 1000 *metros*: la operacion de multiplicar es la que resuelve la cuestion de repetir al número 12 mil veces; daria, por tanto, 12 *kilómetros*=12000 *metros*. Si hubiera sido la cuestion inversa, ó sea *referir ó reducir 12000 metros á kilómetros*, como cada mil unidades *metros* componen un *kilómetro*, habrá tantos *un kilómetro* como veces 12000 *metros* contengan á 1000 *metros*. La operacion de dividir es la que resuelve la cuestion de encontrar las veces que un número entero contiene á otro.

327. Con los fraccionarios concretos la reduccion sería análoga. Así, sean $\frac{3}{5}$ *de vara los que se quieren referir á pulgadas;* la unidad *vara* consta de 36 *pulgadas*, luego cada unidad de los $\frac{3}{5}$ de *vara*, que es $\frac{1}{5}$, constará de $\frac{1}{5}$ de 36 *pulgadas;* pero tomar un $\frac{1}{5}$ de 36 se resuelve por la multiplicacion de ámbos números, luego será $\frac{36}{5}$, y las tres unidades serán $\frac{3\times 36}{5}$ *pulgadas. El inverso en incomplejo fraccionario se resuelve por division*. Así, referir $\frac{4}{9}$ de *pulgada* á *varas*, como una *pulgada* es $\frac{1}{36}$ de *vara*, $\frac{1}{9}$ de *pulgada* será $\frac{1}{9}$ de $\frac{1}{36}$ de *vara*, ó sea $\frac{1}{9.36}$; luego $\frac{4}{9}$ serán cuatro veces este valor, ó sea $\frac{4}{9.36}$: cuyo resultado procede de dividir $\frac{4}{9}$ por 36.

328. Estudiado esto, las *reducciones de los complejos á una sola unidad, de cualquiera clase que se componga su especie, se reducen á la repeticion de los cálculos indicados*. Así, 3 *kilómetros*, 7 *decámetros*, 5 *decímetros*, referidos á *decímetros*, dan: los 3

kilómetros=30000 *decímetros;* los 7 *decámetros*=700; y sumados con los 5 *decímetros*, se tienen 30705 *decímetros.*

Si hubiera sido referir 4 *metros*, 5 *decámetros*, á *kilómetros*, se tendria que los 4 *metros* dan 0,004 de *kilómetro*, y los 5 *decámetros*, 0,05 de *kilómetro:* sumando, serán 0,054 *de kilómetro.*

329. *Si los concretos fuesen de un sistema que no sea decimal*, y no se supiese, por tanto, referir de una vez cada unidad á la que se desea, *se iria reduciendo cada una á su inmediata superior ó inferior y sumando con los que hubiese de éste.*

Asi, 6 *arrobas*, 7 *libras* y 2 *onzas*, referirlas á *onzas*, se diria: referidas las 6 *arrobas* á *libras*, dan 6×25 *libras*, *más* 7 que hay, son $6 \times 25 + 7$ *libras;* refiriéndolas á *onzas*, dan $(6.25+7)16$ *onzas*, más 2 que hay en el complejo, son $(6.25+7)16+2$: ejecutados los cálculos dan 2512 *onzas.*

Si hubiera sido referirlas á *arrobas* se ejecutarian los siguientes cálculos: 2 *onzas* á *libras* dan $\frac{2}{16}$, ó sea $\frac{1}{8}$ *libra*, *más* 7, dan $\frac{57}{8}$ *libras;* reducidas á *arrobas*, dan $\frac{57}{8.25}$, más las 6 *arrobas* del complejo, dan $6\frac{57}{200}$.

330. *La suma y resta de concretos se efectúa fácilmente refiriéndolos á la misma unidad.* Estas dos operaciones exigen homogeneidad en sus elementos y el cálculo se reduce á sumar ó restar enteros ó fraccionarios.

De 7 *kilómetros* restar 8 *decámetros* y 6 *metros*. El cálculo es: $7000-86^{m}=6914^{m}$.

De 7 *quintales* y 3 *arrobas* restar 2 *quintales* y 6 *libras*. Se tiene $775^{\text{libras}}-206=569^{\text{libras}}$.

331. *Pudieran sumarse y restarse los complejos sin referirlos á la misma unidad, sumando ó restando las partes de ellos que sean homogéneas.* Esto obliga á reducciones parciales, que en algunos casos traerán ventaja y en otros nó. Y no es más que

aplicar parcialmente el principio general de que sólo pueden reunirse ó restarse los números homogéneos.

332. La multiplicacion de concretos resuelve esta cuestion: *dado el valor de una unidad hallar el de várias de la misma especie*. Por ejemplo: *si un metro cuesta* 60 *reales ¿cuánto costarán* 80? Evidentemente hay que repetir ochenta veces el valor de uno. Así será 80×60 *reales*.

333. *Si ámbos valores fueren complejos se reducen, el complejo de la unidad cuyo valor se da á incomplejo del género que se quiera, y el de las unidades que se buscan al de la unidad dada*. Sea, por ejemplo: *si un metro cuesta* 3 *duros,* 5 *reales y* 20 *maravedises ¿cuánto costarán* 3 *decámetros,* 6 *metros y* 7 *centímetros?* Se refiere esto á *metros*, que es la unidad cuyo valor se conoce, y da 36,07 *metros:* se refiere el precio á la especie en que se desea obtener, á *reales*, por ejemplo, y da $\frac{1115}{17}$ *reales*. Con estas reducciones la cuestion queda reducida á la siguiente: *si un metro cuesta* $\frac{1115}{17}$ *reales ¿cuánto costarán* 36,07 *metros?* El producto $\frac{1115.36{,}07}{17}$ *reales* resuelve la cuestion.

334. La division de concretos se emplea para resolver la cuestion siguiente: *dado el valor de muchas unidades hallar el de una de la misma especie*. Así, *valiendo* 30 *metros* 200 *reales ¿cuánto vale uno?* Como 200 es el producto de 30, por el valor buscado, se conoce el producto y un factor y se busca el otro factor: es evidente que la division del producto, por el factor conocido resuelve la cuestion. Así, $\frac{200}{30}$ es el valor de un *metro*.

335. Todos los casos se reducen á éste: *refiriendo el valor dado á un solo género y las unidades conocidas al género cuya unidad se busca*. Así, 15 *varas,* 1 *pié y* 2 *pulgadas* cuestan 6 *duros* y 3 *reales*. *¿Cuánto costará un pié?* Refiriendo el precio de todos á *reales*, dan 123 *reales*, y las unidades conocidas á *piés*, dan $\frac{227}{6}$ *piés:* la cuestion se reduce á la primera, ó sea: *si*

$\frac{227}{6}$ *piés valen* 123 *reales ¿cuánto cuesta un pié?* Aquí el producto es 123 *reales* y el factor conocido $\frac{227}{6}$; luego el otro factor es $123 : \frac{227}{6} = \frac{123 \times 6}{227}$.

336. En lo expuesto están comprendidos todos los problemas que con los concretos puedan proponerse, y que son resolubles por el empleo inmediato de alguna de las cuatro operaciones fundamentales. La clave de la resolucion de estas cuestiones está en las referencias de unas unidades á otras. Sirva de resúmen lo siguiente:

337. *Fíjese primero en cada cuestion la operacion fundamental que la resuelve. Si es la suma ó la resta, conviértanse en homogéneos los datos, refiriéndolos á la misma unidad. Si es la multiplicacion, refiéranse las unidades que se buscan á la conocida, y el valor de ésta, al género que se desee. Si es por division refiéranse el valor y las unidades conocidas, las primeras al género que se pide y las segundas al en que se desee su valor.*

338. Suele llamarse *valuacion de quebrados* á la resolucion del siguiente problema: *Convertir un incomplejo en complejo*, ó, lo que es lo mismo: *dado un concreto referido á una sola unidad, referirle á las distintas que contenga de su especie.*

Por ejemplo; 48526″ referirlo á las distintas unidades de tiempo que contenga: este problema ya se ha resuelto, pues se sabe referir á la unidad superior *minuto* dividiendo por 60; éstos á *horas* dividiendo por 60; éstas á *dias* dividiendo por 24; éstos á *años* dividiendo por 360, etc.

339. Pareceria más complicada la cuestion si el incomplejo dado fuese fraccionario. Por ejemplo; reducir á complejo $\frac{340}{421}$ de *duro*. El método es análogo, sólo que siendo quebrado propio el número propuesto, la referencia á otras unidades tiene que ser á las inferiores, si es que se desea que puedan aparecer números enteros en equivalencia á la fraccion; así,

en el ejemplo propuesto, el género *duro* se reduce á *reales* multiplicando por 20, ó sea $\frac{340\times 20}{421}$; ejecutada esta operacion da 16 *reales* $\frac{64}{421}$ de *real*: los $\frac{64}{421}$ se reducen á *maravedises* multiplicando por 34; así se ejecutará $\frac{64.34}{421}$ y se tiene 5 *maravedises* $\frac{71}{421}$ de *maravedí*; equivalen, pues, los $\frac{340}{421}$ de *duro* á 16 *reales* 5 *maravedises* y $\frac{71}{421}$ de *maravedí*. Queda, pues, averiguado que esta cuestion no es más que una de las anteriormente resueltas.

§ III. Ejemplos de algunas cuestiones que se resuelven por proporciones

340. *Preliminares*. Para que una cuestion sea resoluble por una proporcion se necesita y basta: primero, *que intervengan en ella cuatro números homogéneos de dos en dos*. Con esto el cociente de cada dos homogéneos es un número abstracto, y los dos cocientes pueden ser iguales y formar proporcion; segundo, *que los dos segundos homogéneos tengan dependencia proporcional de los dos primeros*. Esto quiere decir, que si uno de los datos conocidos se multiplica por 2, 3 ó 4, el que depende de él haya, por la naturaleza de la cuestion, que multiplicarlo ó dividirlo por 2, 3 ó 4. Estas condiciones son necesarias y suficientes.

341. Apliquémoslas á un caso general. Sean A y B dos homogéneas; a y b otras dos homogéneas, dependientes proporcionalmente de A y B, por ser A y B homogéneas: el cociente $\frac{A}{B}$ es un número abstracto, y lo mismo el de $\frac{a}{b}$ ó $\frac{b}{a}$. Para que haya proporcion es preciso que la cuestion sea tal, que

se tenga $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ ó $\frac{A}{B}=\frac{b}{a}$, y que lo mismo acontezca, cualquiera que sean las variaciones que por multiplicacion ó division sufran los dos homogéneos conocidos, que se designan con A y B, y se llaman *principales*.

¿Cómo conocer cuál de estos segundos cocientes es igual al primero? Para ello sirve la *dependencia proporcional*. En efecto; si la cuestion es tal, que multiplicando A por 2, 3 ó 4, su dependiente a hay que multiplicarla por los mismos números 2, 3 ó 4, es evidente que la proporcion ha de ser de la primera forma, pues ella es la que satisface á que si por decir $2.A$ tambien haya que poner $2.a$ la igualdad subsista, pues es evidente que de $\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ se deduce $\frac{2A}{B}=\frac{2a}{b}$.

Si, por el contrario, *multiplicando* á A por 2, 3 ó 4 la naturaleza de la cuestion indica que se debe dividir á la dependiente a por 2, 3 ó 4, es claro que la proporcion entre los cuatro números es de la segunda forma, pues ella es la que satisface á que poniendo $2A$ y $a{:}2$ la igualdad de cocientes subsista: en efecto; es evidente que de $\frac{A}{B}=\frac{b}{a}$ se deduce $\frac{2A}{B}=\frac{b}{a{:}2}$.

342. Si la dependencia proporcional entre dos homogéneos y sus dependientes es de la primera forma se llama *directa* y si de la segunda *inversa*. La regla ó traduccion de estas formas al lenguaje vulgar es la siguiente.

Si la proporcion entre cuatro términos es directa se establece: *cantidad primera es á su homogénea como la dependiente de la primera es á la dependiente de la segunda.*

Si es inversa se establece: *cantidad primera es á su homogénea como la dependiente de la segunda es á la dependiente de la primera.*

343. Es indiferente tomar como *primera* cualquiera de las cuatro cantidades que entran en la cuestion: regularmente

se toma una de las dos homogéneas conocidas ó principales.

344. Ejemplos. Los problemas que se resuelven por una sola proporcion han de tener como *datos tres cantidades conocidas* por medio de las cuales se determina la *cuarta*. Al método de su resolucion, fundado en los principios generales ántes dichos, se suele llamar Regla de tres simple.

1.º 20 *albañiles hacen en cierto tiempo* 50 *metros de tapia;* 38 *albañiles ¿cuántos metros harán en el mismo tiempo?* Si se llama x á los *metros* desconocidos, reconoceré que esta cuestion depende de proporciones por los siguientes razonamientos.

En primer lugar hay en ella *cuatro cantidades homogéneas, dos á dos,* que son 20 y 38 *albañiles* y 50 y x *metros*. En segundo lugar su dependencia es *proporcional* y *directa*, pues escogiendo á 20 como cantidad primera, la naturaleza de la cuestion dice que si 20 *albañiles* hacen 50 *metros* de pared, *doble* ó *triple* número de *albañiles* harán *doble* ó *triple* número de *metros* de pared en las mismas condiciones. Así la proporcion que traduce el problema es: $\frac{20}{38}=\frac{50}{x}$, de donde $x=\frac{50.38}{20}=95$ *metros.*

2.º 20 *albañiles hacen una obra en* 15 *dias; 30 ¿en cuántos la harian?* Sean x estos *dias:* reconozco por análogo razonamiento á las del ejemplo anterior, que la cuestion depende de una proporcion, y como á *doble* ó *triple* número de *obreros*, el tiempo tardado en hacer una misma obra, debe ser la *mitad* ó *tercera parte*, la dependencia ó razon es inversa: la proporcion se establecerá: $\frac{20}{30}=\frac{x}{15}$, de donde $x=\frac{20.15}{30}=10$ *dias.*

345. Hay otras muchas cuestiones que se resuelven por estos principios, pero que necesitan establecer más de una relacion: su método de resolucion se llama por Regla de tres compuesta.

Se reconocen los problemas resolubles por *regla de tres compuesta en que hay una sola cantidad incógnita y la serie de datos son homogéneos de dos en dos y todos en dependencia proporcional con los dos en cuya especie está el desconocido.*

346. El planteo de estos problemas consiste en comparar cada dos datos homogéneos conocidos con los dos en que está el incógnito.

Por ejemplo: 20 *obreros, trabajando* 9 *horas al dia, hacen en* 8 *dias un foso de* 40 *metros de largo y* 4 *de ancho.* Se pregunta:

36 *obreros, trabajando 8 horas al dia, ¿cuántos dias tardarán en hacer un foso de* 60 *metros de largo y* 6 *de ancho?*

Estableciendo los datos en dos series, de modo que se correspondan los homogéneos, y llamando x á los dias incógnitos, se tendrá:

20 obreros	9 horas	40 metros largo	4 metros ancho	8 dias
36	8	60	6	x

Desde luégo se reconoce que esta es una cuestion resoluble por proporciones, porque consta de una serie de datos homogéneos dos á dos y en dependencia proporcional con el género del desconocido, como va á comprobarse: el planteo se verifica comparándolos dos á dos con éste y prescindiendo en cada comparacion de todos los demás. Así la primera proporcion sería entre los *obreros* y los *dias*, formulada del modo siguiente: *si* 20 *obreros tardan en hacer cierta obra* 8 *dias,* 36 *¿cuántos tardarán?* La razon es *inversa* y se pondrá llamando x' á los dias $20:36::x':8$. La segunda cuestion que se formula es entre las *horas* y los *dias*, advirtiendo que los *dias* que se toman para esta cuestion como conocidos, son los x' deducidos de la anterior proporcion, pues formulada esta nueva cuestion se diria: *si trabajando* 36 *obreros* 9 *horas tardan* x' *dias, trabajando* (*los mismos* 36) 8 *horas ¿cuánto tardarán?* Los datos, por tanto, son: 9 *horas*, x' *dias*; 8 *horas* y x'' *dias*; su razon es inversa y se tendrá $9:8::x'':x'$.

La tercera cuestion parcial es entre las longitudes de los fosos 40^m y 60^m y los x'' y x''' *dias* respectivos; su razon es directa y la proporcion es: $60:40::x''':x''$. (Se ha tomado como primera al dato 60 de la segunda serie para que la segunda razon de la proporcion sea $x''':x''$ y nó $x'':x'''$, á fin de que todas las incógnitas auxiliares vayan cayendo en el antecedente y consecuente de la segunda razon.)

La cuarta y última proporcion llamando X á su incógnita tiene por datos los anchos 4^m y 6^m de los fosos y los x''' y x que tardan los 36 *hombres*, su razon es *directa;* será, por tanto, $4:6::X:x'''$. Se ha designado por X á la incógnita de esta última proporcion porque es la del problema, pues ya se han tomado en consideracion todos los datos. Para hallar el valor de X en todas estas proporciones se dispone el planteo:

$$\begin{aligned} 20:36&::x':8\\ 9:8&::x'':x'\\ 60:40&::x''':x''\\ 4:6&::X:x''' \end{aligned}$$

De donde, multiplicando ordenadamente y suprimiendo en las segundas razones los factores comunes de antecedentes y consecuentes, x', x'' y x''', se tiene $20.9.60.4:36.8.40.6::x:8$.

347. *Conocido esto se abrevia y simplifica el procedimiento, prescindiendo de poner las incógnitas auxiliares y comparando desde luégo cada dos datos con los dos de la especie en que está la incógnita y escribiendo sólo una vez la razon de éstos.* Así, sea la cuestion:

30 *obreros, trabajando* 5 *horas al dia, tardan* 20 *dias en hacer un canal de* 18 *varas de largo,* 6 *de ancho,* 7 *de profundidad, en un terreno de* 5 *de dureza y con una actividad representada por* 12. *Se pregunta:* 47 *obreros, trabajando* 6 *horas al dia, ¿cuántos dias tardarán* (x) *en hacer un canal de* 15 *varas de largo,* 7 *de ancho,* 9 *de profundidad, en un terreno de dureza* 11 *y con* 9 *de actividad?*

Se escriben los datos en dos líneas.

Obreros.	Horas de trabajo.	Varas largo.	Varas ancho.	Profundidad.	Dureza.	Actividad.	Dias.
30	5	18	6	7	5	12	20
47	6	15	7	9	11	9	x

Y se plantea comparando cada dos datos con los 20 y x *dias*; teniendo cuidado de empezar cada proporcion por la conocida conveniente, para que la segunda razon sea en todas la misma. Así la primera comparacion sería entre los *obreros* y los *dias:* su razon es inversa, y se tendria, empezando por 47, que $47:30::20:x$. La segunda, comparando las *horas* de trabajo con los *dias:* tambien su razon es inversa, y dirá $6:5::20:x$. La tercera, entre las *varas* de largo del canal y los *dias*: su razon es directa, y para que la segunda razon sea $20:x$ se empezará por el dato de la primera serie, ó sea por 18, y dirá $18:15::20:x$, y así sucesivamente. La disposicion del cálculo es poner todas las primeras razones á la izquierda de una raya vertical, y en columna y á la derecha la razon entre los dos datos en cuya especie está la incógnita. Así se escribe:

$$\left.\begin{array}{r} 47:30 \\ 6:\cancel{5} \\ 18:15 \\ 6:\cancel{7} \\ \cancel{7}:\cancel{9} \\ \cancel{5}:11 \\ \cancel{9}:12 \end{array}\right\} 20:x.$$

Y ántes de pasar al resultado de multiplicar ordenadamente las razones de la izquierda, se suprimen en ellas los factores comunes de antecedente y consecuente: así se suprimirán los factores 5, 7 y 9, y se tendrá (claro es que esto no es más que una abreviacion y se suponen las incógnitas auxiliares para su demostracion) que $47.6.18.6:30.15.11.12::20:x$; de donde $x=39^{\text{dias}}\ 10',\ 12''\ \frac{36''}{47}$.

348. Regla de interés. *Llámase interés lo que produce un capital prestado con la condicion de que cada cien unidades produzcan al año una cierta cantidad, que se llama tanto por ciento.*

En las cuestiones de *interés simple* (que son aquellas en que los intereses no se acumulan al capital) se consideran dos casos: primero, si el capital ha sido *prestado por un año;* segundo, si el tiempo es *diferente de un año.* Si el capital ha sido prestado por un año, la resolucion depende de una regla de tres simple, pues hay que considerar solamente los siguientes datos: 100 unidades producen r de rédito en un año, y se pregunta c capital qué interés y producirá, tambien en un año. 100 y c son homogéneas, y r é y, intereses respectivos, tambien lo son, y dependen en proporcion directa de las primeras; pues á *doble* ó *triple* capital *doble* ó *triple* rédito ó interés. Luego la proporcion será $100:c::r:y$.

Esta proporcion resuelve las tres sencillas cuestiones que pueden proponerse, tomando como incógnita cualquiera de las tres cantidades c, r ó y.

Ejemplos, 1.º *¿Cuánto producirán en un año* 1500 *reales, al* 6 *por* 100 *al año*? $y=90$.

2.º *¿Á cuánto han estado prestados* 20000 *reales para que en un año hayan producido* 428 *reales de interés*? $r=2{,}14$.

3.º *¿Qué capital produce* 3520 *reales en un año, prestado al* 5 por 100? $=70400$.

349. Si el tiempo es diferente de un año, entónces la cuestion depende de una regla de interés compuesta. El *año* para las cuestiones de interés, cuando hay que tener en cuenta el tiempo, se considera compuesto de 360 dias y el mes de 30.

¿Cuánto producirá en el tiempo t, un capital c, al r por ciento al año? Séa y este interés, y entónces los datos son 100,

que producen r en un año; c, que produce y en t tiempo: aplicando el método de la regla de tres compuesta, y llamando i el interés del capital c, en un año, se tiene que $100:c::r:i$; pero los intereses i en un año é y en t meses, de un mismo capital c, son directamente proporcionales al tiempo porque se han prestado; luego los datos de esta proporcion serán: si en 12 producen i, en t meses ¿cuánto producirán? Llamando y este interés se tiene $12:t::i:y$.

Multiplicando ordenadamente las proporciones obtenidas y suprimiendo el factor i comun en la segunda razon, será $1200:c\times t::r:y$.

En esta proporcion hay cuatro cosas que considerar, que son: *capital*, *tiempo*, *rédito*, *interés* (c, t, r, y); dadas tres de ellas se podrá determinar la cuarta.

350. Si el *tiempo* t viniese expresado por dias que fuesen meses exactos, entónces para hacer uso de las fórmulas es necesario reducir los factores 1, *año*, y t, *tiempo*, á meses: tambien podria hacerse uso del dato t, *tiempo*, expresado por dias, poniendo $1^{\text{año}}=360$.

1.º *¿Qué interés producen en* 120 *dias* 2000 *reales, al* 6 *por* 100 *al año?* $y=40$.

2.º *¿Á cuánto por ciento han estado prestados* 30000 *reales para que en* 60 *dias hayan producido* 500 *reales?* $r=10$.

3.º *¿Cuánto tiempo ha estado prestado el capital* 25000 *reales para que al* 5 *por* 100 *al año haya producido* 270 *reales?* $t=2$ *meses*, 17 *dias* y una fraccion.

4.º *¿Qué capital produce* 1500 *reales en* 180 *dias, al* 5 *por* 100 *al año?* $c=60000$.

351. Regla de compañía. Repartimientos proporcionales. *Dividir un número en partes proporcionales á tres dados es descomponerlo en sumandos, tales que sus cocientes respectivos por estos números sean iguales.*

Así, para dividir el *número* 240 *en partes proporcionales á* 2, 3 y 5, representando estas partes por x, y, z, se debe tener que $x:2::y:3::z:5$; de donde $x+y+z:2+3+5::x:2::y:3::z:5$ y como $x+y+z=240$, se tendrá $x=2\times\frac{240}{10}=48$, $y=3\times\frac{240}{10}=72$, $z=5\times\frac{240}{10}=120$.

Luego para dividir un número en partes proporcionales á otros *dados, basta dividirlo por la suma de ellos y multiplicar el cociente por cada uno de los números dados.*

Esto supuesto, la REGLA DE COMPAÑÍA *es la que expone el método para dividir las ganancias ó pérdidas de una sociedad, proporcionalmente á los capitales de los socios ó al tiempo en que han estado en sociedad.*

Es claro que si los capitales son iguales, ó si todos estuvieron el mismo tiempo en la sociedad, las ganancias deben ser directamente proporcionales á los tiempos ó capitales respectivamente (miéntras nada se pacte en contrario).

Pero si los tiempos y los capitales fuesen diferentes, se deduce de los principios anteriores que las ganancias ó pérdidas deben ser proporcionales á los productos de los capitales por los tiempos.

En efecto; sea c un capital que ha estado el tiempo t en la sociedad y le corresponde g de ganancia. Sea c' otro capital que ha estado el tiempo t' y le corresponde g'. Sea g'' la ganancia de c en t' tiempo.

Es claro que las ganancias g y g'' de los dos capitales c y c', que han estado el mismo tiempo t, segun el primer principio darán $g:g''::c:c'$.

Tambien es evidente que las ganancias g' y g'' de un mismo capital c' en los dos tiempos t y t' darán $g'':g'::t:t'$, conforme con el segundo principio.

Multiplicando y suprimiendo en la primera razon el factor comun g'' se tendrá $g:g'::c\times t:c\times t'$.

Esto supuesto, en la regla de compañía se distinguen dos casos, *simple* y *compuesta*.

Simple es cuando los capitales ó tiempos son iguales, y compuesta en el caso contrario.

352. REGLA DE DESCUENTO. *Descontar un documento es lo mismo que dar anticipadamente su valor, mediante una rebaja que se hace de su importe.*

Los valores que más frecuentemente se descuentan en el comercio son las letras y pagarés á plazo fijo; en éstos, y en cualquier otro valor de análoga condicion, se considera que tienen dos valores, uno llamado *nominal*, que es el expresado en ellos mismos, y el cual no es efectivo hasta el cumplimiento de su plazo, y otro el *efectivo* en el momento, cuyo valor colectivo es tanto menor que el nominal cuanto más tiempo falta para su vencimiento.

Lo que se busca por la regla presente es el valor efectivo del momento de una letra ó pagaré, dado el valor nominal, N, el tiempo que falta para cumplir, t, y el tanto por ciento, r.

Esta cuestion se resuelve por una regla de interés, pero hay dos maneras de hacerlo: una es la comun, que consiste *en hallar el interés del valor nominal por el tiempo que falta hasta el vencimiento, restarlo de la letra, y se tiene el efectivo.* Á éste se llama descuento por fuera.

Ejemplo. *¿Cuál es el valor efectivo de una letra de* 100000 *reales, que vence dentro de* 90 *dias, siendo* 6 *por* 100 *el descuento*? Como el interés, en tres meses, de 100000 reales nominales al 6 por 100 es $y=1500$, el valor actual de la letra es $100000-1500=98500$.

Hay otro método de descontar más racional que el anterior, llamado descuento por dentro, y que consiste en *hallar el interés del valor efectivo actual de la letra, y ser éste el que se resta del valor nominal.*

Este método racional de descontar no es usado en el comercio.

353. Regla de aligacion. *Es la que tiene por objeto resolver los dos problemas siguientes:*

1.º *Conocidos los precios de cada unidad de cierta especie, y el número de estas unidades que se han mezclado, hallar el precio de la mezcla.*

2.º *Conocidos los precios de las unidades de ciertas especies, y el precio medio, hallar cuántas unidades de cada especie se han mezclado ó deben mezclarse.*

En el primer caso, para resolver la cuestion *no hay más que hallar el precio de toda la mezcla y dividir por el número de unidades que se han mezclado, y se obtendrá el precio de una unidad de la mezcla.* En efecto; si se han mezclado 10 *arrobas* de vino de 40 *reales* arroba, con 15 *arrobas* de vino de 75 *reales* arroba, el valor de las diez *arrobas* á 40 *reales* es 400 *reales*, y el de las 15 á 75 es 1125; el valor total de la mezcla es 1525 *reales;* luego las $10+15$ *arrobas*$=25$ *arrobas* de la mezcla valen 1525 *reales:* una valdrá la veinticinco ava parte, ó sea $1525:25=61$ *reales*.

Para resolver la segunda cuestion *supóngase que se quiere saber cuántas fanegas de trigo de á 40 reales y trigo de á 75 se deben mezclar para que resulte trigo de 60 reales:* llamando x las *fanegas* que se deben mezclar de á 40 é y las de á 60, se tendrá que en cada *fanega* de á 40, vendidas á 60, se ganan $(60-40)$ *reales;* luego en las x se ganan $x(60-40)$.

Análogamente, en cada *fanega* de 75 vendida á 60 se pierde $(75-60)$ *reales;* luego en las y se perderán $y\ (75-60)$.

Estas ganancias y pérdidas deberán ser iguales para que se pueda vender á 60 *reales* cada unidad de la mezcla; luego se establecerá que $x\ (60-40)=y\ (75-60)$: de donde $x:y::15:20$. Esta proporcion dice *que las unidades x é y, que se deben mezclar de cada especie, están en razon inversa de las diferencias de sus precios, al precio de la mezcla, ó precio medio.*

La igualdad $x\times 20=y\times 15$, puede satisfacerse con infinidad de pares valores para x é y; uno de ellos es, evidentemente, $x=15$ é $y=20$, pues de esta manera los dos miembros constan de idénticos factores, y por tanto son iguales.

Luego si se mezclan 15 *fanegas* de á 40 con 20 de á 75, se tendrán 35 *fanegas*, cuyo precio será de 60 *reales* cada una.

354. *Por consiguiente, cuando se da el precio medio, y se busca la proporcion en que se han de mezclar las especies, se resta el precio de cada especie del precio medio, y se ponen encontradas estas diferencias.*

Pudiera suceder que se quisiera que en la mezcla hubiese más de 35 *fanegas;* entónces no habria más que multiplicar los dos valores, 15 de x, y 20 de y, por un mismo número para obtener nuevas soluciones, pues esto no es más que repetir la primera mezcla várias veces.

Tambien puede suceder que se fije el número de unidades que ha de tener la mezcla, como en el siguiente problema:

¿Cuántos litros de agua á 30° con agua á 36° se deben de mezclar para obtener 18 litros de á 34°?

Sean x los litros de á 30° é y los de á 36°; estos litros están en razon inversa de las diferencias de sus grados á los grados de la mezcla; luego $x:y::2:4$; pero es condicion del problema que $x+y=18$ litros; luego componiendo la proporcion primera, será $x+y:x::2+4:2$; de donde $x=6$ litros, y por tanto $y=12$.

355. Regla conjunta *es la que tiene por objeto hallar la re-*

lacion entre dos unidades concretas distintas, conociendo la de estas unidades con otras cualesquiera intermedias y las de éstas entre sí.

Se llaman magnitudes equivalentes aquellas que tienen la misma relacion con alguna unidad concreta: así un *duro* equivale á veinte *reales*, pues ámbas magnitudes dan el mismo cociente referidos á *reales*; una *arroba* á veinticinco *libras*. Dos barriles de á doce litros equivalen á veinticuatro botellas de á *litro*, una *fanega* de trigo á tres y media *arrobas* de peso, etc.

Principio fundamental. *Si se multiplican ordenadamente várias equivalencias, tales que el primer miembro de cada una de ellas sea de la misma especie que el segundo de la anterior, los productos serán equivalentes, y el de los primeros miembros de la especie del primero, y el de los segundos de la especie del último.*

1.° Sean dos las equivalencias propuestas, tales como

$$10^a = 11^b$$
$$4^b = 5^c$$

Si se multiplican los dos miembros de la primera por el número abstracto 4, y los dos miembros de la segunda por el número abstracto 11, se tendrá:

$$40^a = 44^b$$
$$44^b = 55^c$$

de donde $40^a = 55^c$; luego cuando son dos las equivalencias, el principio está demostrado.

2.° Si las equivalencias son más de dos, como por ejemplo:

$$10^a = 11^b$$
$$4^b = 5^c$$
$$3^c = 23^d$$
$$7^d = 6^e$$

se tendria multiplicando las dos primeras, $4 \times 10^a = 11 \times 5^c$; sustituyendo este resultado en lugar de las dos primeras equivalencias propuestas:

$$4 \times 10^a = 11 \times 5^c$$
$$3^c = 23^d$$
$$7^d = 6^e$$

multiplicando las dos primeras de estas nuevas equivalencias, y poniendo la última debajo,

$$3 \times 4 \times 10^{a} = 11 \times 5 \times 23^{d}$$
$$7^{d} = 6^{e}$$

y en estas dos equivalencias se verifica que $7 \times 3 \times 4 \times 10^{a} = 11 \times 5 \times 23 \times 6^{e}$ queda demostrado el principio enunciado.

356. Segun esto, para hallar el valor ó relacion de ciertas unidades concretas, con otras conocidas, por medio de equivalencias, se debe tener cuidado de disponer las equivalencias de tal modo, que el primer miembro de cada una sea de la misma especie que el segundo de la anterior. Además, el primer miembro de la primera equivalencia, y el segundo de la última, deben ser de la especie de la incógnita. La razon de esto es que las magnitudes que ocupan estos lugares son las que determinan la especie de los productos de los primeros y segundos miembros de las equivalencias, y con esta disposicion se consigue que uno de los productos sea de la especie de la incógnita y el otro tambien.

EJEMPLO. *Suponiendo que una libra esterlina equivale á 25 francos, 5 franços á 19 reales, 10 reales á un escudo, ¿cuántos escudos tienen 293 libras esterlinas?* Tendremos

$$x^{\text{escudos}} = 293^{\text{lib. st.}}$$
$$1^{\text{lib. st.}} = 25^{\text{francos}}$$
$$5^{\text{francos}} = 19^{\text{reales}}$$
$$10^{\text{reales}} = 1^{\text{escudo}}$$

de donde $x \times 1 \times 5 \times 10^{\text{escudos}} = 293 \times 25 \times 19 \times 1^{\text{escudo}}$, ó sea $x \times 50^{\text{escudos}} = 139175^{\text{escudos}}$; dividiendo por el número abstracto 50 será

$$x^{\text{escudos}} = \frac{139175}{50} = 2783{,}5^{\text{escudos}}.$$

§ IV. MÉTODO DE RESOLUCION DE LAS CUESTIONES QUE DEPENDEN DE PROPORCIONES, CONOCIDO CON EL NOMBRE DE MÉTODO DE REDUCCION Á LA UNIDAD.

Lo primero que debe hacerse despues del enunciado de un problema, para resolverlo, es notar en la serie de valores conocidos (ó datos) cuál es la especie de la incógnita, y la esencia del *método de reduccion á la unidad consiste, en llegar á determinar el valor de una unidad, de cada una de las magnitudes, con la cual está relacionada la incógnita, y hecho esto se halla el de todas las unidades.*

EJEMPLOS. 1.º *Sabiendo que 20 obreros han hecho una obra en 12 dias, ¿cuántos dias tardarán 27 obreros en hacer la misma obra?* Si 20 *obreros* hacen la obra en 12 *dias, un obrero* tardará 20 veces más, es decir, 20×12; teniendo ya lo que tarda *un obrero*, fácilmente se averigua lo que tardarán 27; pues es claro que será 27 veces ménos dias que uno, ó sea $\frac{20 \times 12}{27}$: este es el valor de la incógnita.

2.º 52 *obreros trabajando* 9 *horas al dia, con una fuerza representada por* 343, *en un terreno cuya dureza está representada por* 8, *han abierto* 6 *canales de* 45^{m} *de largo,* 7 *de ancho y* 4 *de profundidad. Se pregunta qué número representaria la fuerza de* 57 *obreros para abrir* 4 *canales de* 18^{m} *de largo,* 4 *de ancho y* 3 *de profundidad, en un terreno cuya dureza fuera* 6 *y trabajando* 7 *horas por dia.*

SOLUCION. Si 52 *obreros* han empleado 343 de *fuerza* para hacer cierta obra, 1 empleará 52 veces más para la misma, ó sea 52×343; los 57 emplearán 57 veces ménos, ó sea $\frac{52 \times 343}{57}$. Esto es trabajando 9 *horas*; si trabajan 1 emplearán 9 veces más fuerza, ó sea $\frac{62.343 \times 9}{57}$; pero como trabajan 7 *horas* emplearán 7 veces menos, ó sea $\frac{52.343.9}{57.7}$. Con análogo razonamiento se verá que si la *dureza* fuese 1 emplearian 8 veces ménos, y como es 6, este factor irá al numerador, y siguiendo así, el resultado $x = \frac{343.52.9.6.4.18.4.3}{57.7.8.6.45.7.4}$.

Problemas para ejercicios.

1.º 10 hombres en un dia descargan de un buque 400 cajas de azúcar. Para descargar 840 ¿cuántos hombres se necesitarán?

2.º 800 hombres, trabajando 7 horas al dia, han necesitado 40 dias para hacer un terraplen de 120000 metros cúbicos. 920 hombres ¿cuántos dias necesitarán para hacer un terraplen de 417600 metros cúbicos, trabajando 5 horas diarias?

3.º Se quiere dividir 1824 reales entre tres personas, de manera que la relacion de la parte de la primera á la de la segunda sea $\frac{7}{9}$ y á la de la tercera $\frac{3}{4}$.

4.º 6 obreros, trabajando unidos, han hecho una obra en 4 dias. Las relaciones de las fuerzas de los cinco últimos respecto de la del primero están representadas por $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{9}$. ¿Cuánto tiempo tardaria cada uno de los obreros en ejecutar la misma obra?

5.º Uno ha prestado una suma por 8 años, al 8 por 100 al año; á los tres años el deudor le paga los intereses y le propone pagarle tambien el capital, con la mitad de los intereses que deberia percibir si el contrato continuara; aceptada por el que prestó, la proposicion, recibe 14400 reales. Se pregunta: ¿á cuánto por 100 prestó?

6.º Un comerciante se retira del comercio y divide su fortuna realizada en tres porciones. Con la primera compra una casa, que le da $4\frac{1}{2}$ por 100, y esta renta es la centésima parte de la fortuna que realizó. Pone la segunda en renta y le da el 9 por 100. Por último, de la tercera porcion de su fortuna, que importa tanto como las otras dos, saca 10000 reales, y el resto lo coloca en casa de un banquero, que le da 5400 reales, á razon de 6 por 100, y se pregunta: ¿Qué fortuna realizó el comerciante? ¿Cuál fué el precio de la casa? ¿Qué sumas puso en casa del banquero y en renta? Y, finalmente, ¿cuál es la renta total?

7.° Uno tiene un pagaré de 9681,57, que cumple á los 9 meses y 17 dias de su fecha, y quiere realizarlo. Se lo descuentan al 6 por 100. ¿Qué suma recibió? (Primero, descuento por fuera.) (Segundo, descuento por dentro.)

8.° Una letra de 11891,42, cuyo plazo era de 3 años y 5 meses, ha sido descontada por fuera y han dado por ella 900 reales. Se pregunta el tanto por ciento de descuento.

9.° Un barco lleva un cargamento valuado en 1500000 reales. Durante el viaje ha tenido una avería que le importa 2500 reales. Se pregunta cuánto tiene que pagar por su parte de averías un comerciante que aseguró por 50000 reales sus mercancías, y que se obligó á pagar á los aseguradores $7\frac{1}{2}$ por 100 del importe de las averías.

APÉNDICES

357. APLICACION DE LOS PRINCIPIOS DE LA NUMERACION DECIMAL Á UN SISTEMA DISTINTO, SIENDO ÉSTOS EL DE BASE 2 Ó 12 Ó EL BINARIO Y DUODECIMAL. CÓMO SE PUEDE PASAR DE UN SISTEMA Á OTRO Y VICE-VERSA. Los principios generales de la numeracion (á saber, de contar por órdenes, formados por potencias de la base, y de que las cifras representen los órdenes segun el lugar que ocupan) aplicados á otra base distinta de la decimal, darian diferentes sistemas de numeracion, pero de análoga extructura. Así, aplicado al sistema cuya base fuese 2, significaria que dos unidades de cada órden forman una del inmediato superior, y si la base fuese 12, cada vez que se reunieran 12 unidades de un órden se formaria una del superior inmediato; y lo mismo en los demás ejemplos que se propusiesen.

Estos sistemas, cuyas bases son 2 y 12, se llaman *binario* y *duodecimal* respectivamente.

En todo sistema de numeracion, si se emplean las mismas cifras que en el decimal, la base tiene por expresion escrita 10. En efecto; el 1 colocado en el segundo lugar indica una unidad de segundo órden, la cual es siempre la base.

Es evidente que en el sistema *binario* no puede haber más cifras que 1 y 0, puesto que cuando se reunen *dos* de un órden ya forman una del inmediato superior. Tambien es evidente que en el sistema *duodecimal* los números 10 y 11 no forman unidad de otro órden, por lo que se representarán respectivamente por una sola cifra, tal como $10=a$, $11=b$.

Dado un número en el sistema decimal, para escribirlo en otro sistema, basta dividirlo y los cocientes sucesivos por la nueva base. Los restos y el último cociente, segun su órden, serán las cifras del nuevo sistema.

Sean los números escritos en el sistema decimal, y que se quieren escribir en otro sistema:

1.º 13 en el sistema *binario*.

DISPOSICION.

$$\begin{array}{r|l}
13 & 2 \\ \cline{2-2}
1 & \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \end{array}
\end{array}$$

tiene por expresion 1101.

2.º 563 en el sistema *duodecimal*.

DISPOSICION.

$$\begin{array}{r|l}
563 & 12 \\ \cline{2-2}
11=b & \begin{array}{r|l} 46 & 12 \\ \cline{2-2} 10=a & 3 \end{array}
\end{array}$$

tiene por expresion $3ab$.

En efecto; en ámbos ejemplos al efectuar la primera division se han puesto de manifiesto las unidades de primer órden en el resto, y todas las de segundo en el cociente. Si, como sucede en los dos ejemplos, estas unidades de segundo órden son más que las de la base, se vuelve á dividir y se pondrán de manifiesto en el resto y cociente respectivos las unidades de segundo y todas las de tercero, y así sucesivamente.

Recíprocamente. *Dado un número escrito en cualquier sistema, escribirlo en el decimal.*

Para ello basta hallar la suma (en el sistema decimal) de la *cifra de sus unidades simples, más la cifra de segundo órden multiplicada por la base, más la de tercer órden por el cuadrado de la base, más la de cuarto órden por el cubo de la base, y así sucesivamente.*

En efecto; tal procedimiento es retroceder en el anteriormente empleado, porque es evidente que cada cifra de un órden indica las veces que una potencia de la base está repetida por sumando, y esta potencia es igual al lugar, ménos uno que ocupa la cifra. Así: 1101 escrito en el sistema *binario* tiene el decimal $1+0.2+1.2^2+1.2^3=13$. El número $3ab$ escrito en el sistema *duodecimal* tiene en el decimal por expresion $11+10.12+3.12^2=563$.

358. DE LOS LÍMITES DE CIERTAS CANTIDADES VARIABLES. *Se llama cantidad variable aquella que puede tomar distintos valores.*

Si una cantidad variable varía segun las condiciones siguientes:

1.ª *Que su variacion sea contínua;* es decir, que la diferencia entre dos valores sucesivos puede ser tan pequeña como se quiera.

2.ª *Que se acerquen los valores que toma á una cantidad constante.*

3.ª *Que su diferencia con este valor constante pueda hacerse menor que cualquier cantidad dada.* Entónces la variable se dice que tiene un LÍMITE, y la CONSTANTE *á que se acerca se llama el* LÍMITE *de la variable.*

La Aritmética presenta ejemplos de cantidades variables. Tales son las fracciones decimales periódicas, cuyos LÍMITES son las ordinarias *generatrices*. Pues, en efecto, se ha visto que la serie de valores de la fraccion periódica 0,5; 0,55; 0,555..., etc., se van aproximando sucesivamente á $\frac{5}{9}$, pudiendo la diferencia entre dos valores sucesivos y entre uno de ellos y $\frac{5}{9}$ ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Así, pues, $\frac{5}{9}$ es el límite de los valores variables que puede tomar la fraccion periódica 0,55... Lo mismo puede decirse de las raíces llamadas *inconmensurables*, que son los LÍMITES de las aproximaciones con que se pueden hallar.

Esto supuesto, *si dos cantidades variables son constantemente iguales en todos los estados de magnitud porque pasan, sus* LÍMITES *son iguales.*

En efecto; sean a y b dos variables que sucesivamente van siendo iguales en todos los estados de magnitud en que se las considere, y sean A y B sus límites. Si A no es igual B, llamando su diferencia d se tendrá $A=B+d$; es decir, que a tiene por límite, segun esta hipótesis, á $B+d$. Pero como a es igual á b en todos los estados de magnitud porque pasa, y b tiene por límite B, a puede llegar á diferenciarse de B en ménos de cualquier cantidad, y por tanto en ménos de d. Ahora bien; estas dos consecuencias, á saber, que a tiene por límite á $B+d$, y que se puede acercar á B en ménos de d, simultáneamente, es un absurdo; luego la hipótesis de que proviene una de ellas es falsa: la de que a es igual á b en todos los estados de magnitud no puede ser falsa, porque es la del teorema; luego la que es falsa es la de que A se diferencie de B. Por tanto, $A=B$.

ÁLGEBRA

CAPÍTULO I

Definicion.—Uso de símbolos.—Sus ventajas.—Distinto sentido de las cantidades.—Reglas de la escritura algébrica.

1. ÁLGEBRA *es la parte de las Matemáticas que estudia las leyes de la cantidad en general;* es decir, independientemente del número y clase de unidades que tenga.

2. Para ello es necesario expresar la cantidad de un modo genérico, y, por consiguiente, usar de otros símbolos diferentes de las cifras de la numeracion. Estos símbolos generales son las letras de los diferentes alfabetos. Para aumentar el número de símbolos disponibles se acentúan las letras y se les ponen índices. Así: $a' b'' c'''$ son letras acentuadas, que se leen *a* prima, *b* segunda y *c* tercera, y no quieren decir otra cosa sino que la letra acentuada es una cantidad distinta de la que se representa con la misma letra sin acento ó con uno diferente. Lo mismo significan los índices, que *son números escritos á la derecha y más bajos que la letra;* por ejemplo: A_1 b_2 que se leen *A sub* uno, *b sub* dos. Con esto se tiene disponible gran número de símbolos en el Álgebra.

3. Las ventajas que el uso de los símbolos proporciona, además de su generalidad, son: Primera. Se simplifica la escritura, toda vez que una letra puede representar cualquier número. Segunda. Se simplifica el cálculo, pues generalmente se reduce éste á indicar las operaciones, como se verá más adelante. Tercera. Por la simetría de la escritura algébrica se descubren leyes que los números ocultan á causa de la confusion de unas unidades con otras en los resultados de las operaciones. Cuarta. Se deducen *fórmulas* para la resolucion de problemas, ó sean *cuadros de las operaciones que se deben ejecutar con los datos de una cuestion, para resolverla.*

4. De la representacion en Álgebra del sentido de las cantidades. Para la completa representacion de ciertas cantidades no basta decir ó representar un número de unidades, sino que hay que añadir en qué sentido se verifica ese número respecto de un punto ú orígen determinado. Por ejemplo: si se habla de fechas, no basta decir un número de años para fijar un suceso, sino que se necesita decir si son *ántes* ó *despues* del punto que se tome de partida; si se habla de distancias en línea recta, no basta expresar tal ó cual número de metros, sino que es menester añadir si son á la *derecha* ó *izquierda* del orígen; para expresar la temperatura, no basta el número de grados, sino que es menester agregar si son *sobre* ó *bajo el orígen* de la escala del termómetro.

Estos y otros muchos ejemplos hacen conocer la necesidad de expresar en ciertas cuestiones cuál es el sentido de las cantidades que en ellas intervienen respecto de un punto de partida ú orígen fijo y convencional.

5. *El Álgebra expresa la contraposicion de sentido de dos cantidades por medio de los signos* $+$ *y* $-$, *que son los que traducen al lenguaje analítico las palabras sobre ó debajo, ántes ó despues, á derecha ó izquierda.*

6. Lo cual se formula en la siguiente regla: *Si dos cantidades entran en una cuestion contrapuestas respecto de un orígen fijo, en su expresion algebráica deben llevar signos contrarios.*

7. Las cantidades precedidas del signo + se llaman *positivas*, y del signo — *negativas*.

8. *La representacion numérica del orígen de todas las cantidades contrapuestas, es cero.* Evidentemente, en todos los casos, desde el punto de partida al mismo, no hay cantidad.

9. *El cero no debe llevar signo alguno de sentido.* En efecto; el cero representa el orígen, y éste, respecto del mismo, no está ni en uno ni en contrario sentido.

10. Como miéntras más unidades tiene un número negativo, más léjos está del orígen, en sentido inverso que los positivos, se expresa esto estableciendo que

1.º *Todo número negativo es menor que cero.*

2.º *De dos números negativos es menor el que tiene mayor valor absoluto.*

11. Se llama *expresion algébrica ó literal* aquella en que se emplean letras para representar á los números.

12. Si una letra está tomada una ó más veces como factor, se indica, como en los números, por medio del *exponente*. Así: a^3 es lo mismo que $a \times a \times a$.

13. El exponente 1 no se pone: así; a, b, son letras que tienen por exponente implícito la unidad.

14. El producto de dos ó más letras desiguales ó de letras con números se indica escribiéndolos juntos. Así, $3a^2b$ es un producto indicado entre 3, a^2 y b.

15. Se llaman *términos de una expresion algébrica* las partes que en ella están separadas por los signos + ó —. Así, $3a^2b+4ab^2-b^3$ es una expresion que tiene tres términos.

16. Se llama *monomia* la expresion que consta de un solo término; *binomia*, la que consta de dos; *trinomia*, de tres, y, en general, de más de tres, *polinomia*.

17. Se llama *entero* un término algébrico cuando no está indicada su division por un factor literal, y se llama *fraccionario* cuando está indicada la division.

18. Se llama *grado* de un término entero el número de sus

factores literales. Es claro que el *grado de un término se encuentra sumando los exponentes* de sus letras.

CAPÍTULO II

Operaciones algébricas.

§ I. Suma

19. Las operaciones con las cantidades literales tienen el mismo nombre que las de la Aritmética, pero varian en la generalidad de su objeto y en el procedimiento. La generalidad es mayor á causa de que, pudiendo representar los símbolos literales cualquier número, y en sentidos iguales ó contrarios, hay necesidad de comprender en las definiciones todos los casos posibles dentro del fin de la operacion. El procedimiento es distinto porque, no confundiéndose los elementos con que se opera, no se efectúa generalmente la operacion, quedando indicada del modo más simple que permitan las reglas de la escritura algébrica.

Son, por tanto, las operaciones en el Álgebra cuestiones puramente de forma, arregladas á las convenciones de la escritura, y al fin definido.

20. Suma. *Se llama suma algébrica de várias expresiones literales la reunion con su signo de todas ellas.* Las expresiones que se suman se llaman *sumandos.*

21. Esta operacion en Álgebra queda, por tanto, indicada, y sólo podrá en algunos casos simplificarse la expresion resultante.

22. Para ello se debe tener presente que la suma de varios sumandos iguales y del mismo signo, por ejemplo, $+a+a+a$ ó $-b-b-b$ se escribe $+3a$ ó $-3b$. Es decir, se pone una vez el sumando y delante un número precedido del signo comun

que indica las veces y el sentido en que está repetido. Este número se llama *coeficiente*.

23. Cualquier factor del producto indicado, que se llama monomio algébrico, puede considerarse como su coeficiente; y muchas veces se toma por coeficiente el producto de muchos factores del mismo término, cuando se trata de un monomio. Así, en el término $3a^2bc^3x$ el coeficiente puede ser 3, ó $3a^2$, ó $3a^2b$, ó $3a^2bc^3$, etc., segun se quieran combinar sus factores; en todos los casos indica lo mismo, es decir, que en general *coeficiente de una letra, ó de cierto número de ellas, es toda cantidad que las multiplica*. Así en $(m+3a+b^2)x$ se puede decir que todo el paréntesis es el coeficiente de x.

24. De aquí la reduccion á un solo término en las expresiones algébricas, de *aquellos que tienen la misma parte literal* (á los cuales se llaman *semejantes*). Pues si se consideran dos términos semejantes puede ocurrir que los signos sean iguales ó contrarios:

1.° Si los signos son iguales, se suman los coeficientes y se pone la suma delante de la parte literal, precedida del signo comun. Así: $+3a^2b+4a^2b=+7a^2b$; tambien $-3a^2b-4a^2b=-7a^2b$.

En efecto; cuando ámbos términos tienen el mismo sentido, ó sea el mismo signo, es claro que la suma debe llevar el signo comun, pues si se suman, por ejemplo, distancias á la derecha del orígen, el resultado será una cierta distancia á la derecha. Respecto de la reunion ó suma de los coeficientes, es evidente que así debe efectuarse, toda vez que éstos designan las veces que se repite por sumando la parte literal comun.

2.° Si tienen *signos contrarios* se restan los coeficientes y se pone el resultado de coeficiente á la parte literal, precedido del signo del mayor. Así: $4a^2b-2a^2b=+2a^2b$; y tambien $3a^2b-7a^2b=-4a^2b$.

En efecto; es evidente, que el que posee $+8$ y debe -5 posee $+3$; y tambien, que el que posee $+5$ y debe -8 posee

(—3), lo cual justifica que el resultado es del sentido del mayor, que es la regla de los coeficientes.

25. Por último, si los términos semejantes tienen el mismo coeficiente y signos contrarios, se destruyen y queda cero por resultado. Así: $+3a^2b-3a^2b=0$; porque tener $+6$ y deber -6 es tener cero.

26. La reduccion se efectúa siempre que es posible, pues por su medio se da á las expresiones literales la forma más sencilla.

27. Teniendo la regla justificada para el caso de dos monomios semejantes, es fácil extenderla al caso de que haya más de dos términos semejantes en los polinomios.

En efecto; considerando la expresion

$$7a^4b^3-8a^4b^3-7a^4b^3+2a^4b^3+6a^4b^3-9a^4b^3,$$

es evidente que reduciendo los positivos y negativos entre sí tomaria la forma $15a^4b^3-24a^4b^3$; y, por último, teniendo ya dos términos, reduciendo por la regla anterior sería $-9a^4b^3$.

EJERCICIOS

$$4a^3-5a^2b-7ab^2-2a^3-9b^3+4a^2b-4b^3-2ab^2+6a^3-10ab^2$$
$$+8ab^2+10b^3-8b^3+5ab^2-8a^2b-3a^3,$$

reducido da

$$5a^3-9a^2b-6ab^2-11b^3.$$

Reducir

$$7x-6y+5z-a+3-x-3y-a-8-3z+7a-1-x+y$$
$$+3z-2x+3y-a+1+x+8y-5z+a+a+9,$$

reducido es

$$4x+3y+6a+4.$$

Reducir

$$3x^m+7x^{m-1}+9x^{m-2}-12x^{m-3}+8x^{m-1}+2x^m+7x^{m-2}$$
$$-4x^{m-1}-7x^{m-3}+x^m+4x^{m-2}-9x^{m-3},$$

reducido es

$$6x^m+11x^{m-1}+20x^{m-2}-28x^{m-3}.$$

EJEMPLOS DE SUMAR

1.º

$$\begin{array}{l} 16a-5b+10c-9d \\ 18b+3a-7d-5c+3e \\ -2b-7a-3d+5e-9f \\ 2c+8d+7f-3b+11a \\ \hline \end{array}$$

Suma reducida.... $23a+8b+7c-11d+8e-2f.$

2.º

$$\begin{array}{l} 5a^4+3a^2b^2c-7ab^4 \\ +17ab^4-6a^4+2a^2b^2c \\ -8a^2b^2c+9a^4-10ab^4 \\ +3a^4+5a^2b^2c-7ab^4 \\ \hline \end{array}$$

Suma reducida.... $11a^4+2a^2b^2c-7ab^4$

3.º

$$\begin{array}{l} 7a^2b-3abc-8b^2c-9c^3+cd^2 \\ +8abc-5a^2b+3c^3-4b^2c+cd^2 \\ +4a^2b-8c^3+9b^2c-3d^3 \\ \hline \end{array}$$

Suma reducida.... $6a^2b+5abc-3b^2c-14c^3+2cd^2-3d^3.$

§ II. Resta algébrica

28. *Se llama resto de dos expresiones literales, otra expresion que, sumada algébricamente con el sustraendo, da el minuendo.*

Sea el minuendo $a-b$ y el sustraendo $c-d$; la operacion se indica escribiendo $a-b-(c-d)$. ¿Cómo lograr la expresion que añadiéndole $c-d$ produzca por las reducciones $a-b$? Es evidente que tal expresion debe de contener $a-b$, puesto que, eso ha de resultar despues de reducir; además, debe de contener tales términos, primero, que al añadirle $+c$ se anule con éste; y segundo, que al añadirle $-d$ tambien lo anule: con eso quedará, despues de reducir, sólo el minuendo. Ahora bien;

$+c$ lo anula $-c$; y $-d$ lo anula $+d$; luego el resto tiene $a-b$ y $-c$ y $+d$; luego será $a-b-c+d$.

Comparado este resto con la operacion indicada, $a-b-(c-d)$, se deduce que para expresar el resto algébrico de dos expresiones, *se escribe el minuendo y á continuacion el sustraendo con los signos cambiados.*

$$(3x-2a+6)-(2x-7a-3)=3x-2a+6-2x+7a+3$$
$$=x+5a+9.$$
$$(12a-b+9c-3d)-(7a-5b+9c-10d+12)$$
$$=5a+4b+7d-12.$$
$$(-14b+3a-27d+3c+5e)-(7a+3b-5c-8d-12e+7f)=$$
$$-4a-17b+8c-19d+17e-7f.$$
$$(5a^3-4a^2b-4ab^2+8b^3)-(2a^3-5a^2b-6ab^2+b^3)$$
$$=3a^3+a^2b+2ab^2+7b^3.$$
$$(15a^4-18a^3b+17a^2b^2+11ab^3-9b^4).-$$
$$(7a^4-13a^3b-19a^2b^2+2ab^3-10b^4)=8a^4-5a^3b+36a^2b^2$$
$$+9ab^3+b^4.$$

29. Muchas veces es conveniente en las expresiones algébricas, el cambiar de signo á muchos términos de un polinomio, y para ello se encierran dentro de un paréntesis, con los signos cambiados, anteponiendo al paréntesis el signo $(-)$. En efecto; los términos que están dentro del paréntesis están sometidos á un doble cambio de signo, lo cual no altera el primitivo.

Así, son expresiones idénticas de un mismo polinomio las siguientes: $x^4+8x^3-4x^2-3x+9$; ó de otro modo, $x^4+8x^3-(4x^2+3x-9)$, y tambien $x^4-(-8x^3+4x^2+3x-9)$; y, por último, $-(x^4-8x^3+4x^2+3x-9)$.

§ III. Multiplicacion algébrica.—Elevacion á potencia de los monomios

30. *Se llama multiplicacion algébrica, la operacion que tiene*

por objeto hallar una expresion que sea respecto de la que hace de multiplicando lo mismo que la que sirve de multiplicador es respecto de la unidad positiva.

31. Tres casos se consideran en la multiplicacion algébrica, á saber: primero, *que los dos factores sean monomios;* segundo, *que uno sea polinomio y el otro monomio;* tercero, *que los dos sean polinomios.*

32. 1.º MULTIPLICACION DE DOS MONOMIOS. Siendo los monomios productos indicados, para su multiplicacion se formará un producto que conste de todos los factores (Arit.ª 97); como el órden de éstos no lo altera, se pueden multiplicar los coeficientes y letras iguales entre sí, permaneciendo las desiguales como están en los monomios.

El producto de las letras iguales se expresa en Álgebra por la misma letra, poniéndole la suma de los exponentes. Así: $a^3 \times a^2 = a^5$; $a^m \times a^n = a^{m+n}$. En efecto; limitándose ahora á exponentes enteros y positivos, se tiene que en el primer caso, como $a^3 = a.a.a$ y $a^2 = a.a$, es evidente que $a^3.a^2 = a.a.a.a.a$, ó sea a^5, porque el exponente indica los factores que hay en el producto: lo mismo se demuestra con cualesquiera otros exponentes enteros y positivos; y, por tanto, en el producto de letras iguales siempre llevará ésta un exponente igual á la suma de los de sus factores.

33. En cuanto al signo del producto, como éste ha de ser respecto del multiplicando como el multiplicador respecto á la unidad positiva, es claro que si el multiplicador es positivo, es decir, tiene el mismo signo que la unidad positiva, el producto lleva el mismo signo que el multiplicando. Así que $+ \times +$ da $+$, y $- \times +$ da $-$. Si el multiplicador es negativo, ó sea tiene signo contrario á la unidad positiva, el producto llevará signo contrario al multiplicando; es decir, que $+ \times -$ da $-$, y $- \times -$ da $+$.

34. *Luego signos iguales dan para el producto* MÁS, *y signos desiguales* MÉNOS.

35. *En resúmen: para multiplicar dos monomios, se multi-*

plican los coeficientes, se suman los exponentes de las letras iguales, los desiguales entran en el producto como están en los factores, y se le antepone el signo + ó —, segun los factores lo tengan igual ó contrario. Ejemplos: $4a^2bc \times 3a^2b = 12a^4b^2c$; $3x^2z \times -xz^2 = -8x^3z^3$.

36. 2.º POLINOMIO POR MONOMIO. Este caso se reduce al primero, pues *multiplicando cada término del polinomio por el monomio, y reuniendo con su signo los productos parciales, se tendrá el pedido.* En efecto; ya lleven los términos del polinomio los signos + ó —, se ha visto (Arit.ª 90 y 92) que para efectuar el producto de una suma ó diferencia indicada por un factor basta multiplicar cada término de la suma ó diferencia, restando si son diferencias el producto del sustraendo. Para indicar la operacion se suele encerrar al polinomio en un paréntesis. Vice-versa; si todos los términos de un polinomio están multiplicados por un monomio, se dice que se saca éste de factor comun cuando se indica la operacion. Ejemplos: $(4a^3b - 2a^2b^2 - 3ab^3)2ab = 8a^4b^2 - 4a^3b^4 - 6a^2b^4$. Si en lugar de este segundo miembro se hubiese puesto el primero, se habria sacado $2ab$ de factor comun.

37. 3.º MULTIPLICACION DE POLINOMIOS. *Para multiplicar dos polinomios se multiplica todo el multiplicando por cada término del polinomio multiplicador y la suma algébrica de los resultados es el producto.* En efecto; cualquier valor que pueda tomar el multiplicando queda de este modo multiplicado por todo el multiplicador. (Arit.ª núm. 91.)

EJEMPLO. Multiplicando $4x^4 - 5ax^3 + 3a^2x^2 - 2a^4$
Multiplicador $3a^2x^3 - 5a^3x^2 - 3a^5$

Producto por $3a^2x^3$.	$12a^2x^7 - 15a^3x^6 + 9a^4x^5 - 6a^6x^3$
» » $-5a^3x^2$.	$-20a^3x^6 + 25a^4x^5 - 15a^5x^4 + 10a^7x^2$
» » $-3a^5$.	$-12a^5x^4 + 15a^6x^3 - 9a^7x^2 + 6a^9$
Prod.to total red.do	$12a^2x^7 - 35a^3x^6 + 34a^4x^5 - 27a^5x^4 + 9a^6x^3 + a^7x^2 + 6a^9$

38. *Los polinomios algébricos ántes de multiplicarlos se or-*

denan por las potencias ascendentes ó descendentes de una misma letra, que se llama ordenatriz *ó* principal.

39. *Se dice que un polinomio está ordenado con respecto á las potencias descendentes de una letra cuando los términos van dispuestos de modo, que el primero es aquel en que esta letra tiene mayor exponente, y sucesivamente los términos van colocados segun la magnitud de este exponente, hasta el último, que es aquel donde la letra lo tiene menor.*

40. *Se dice que un polinomio está ordenado por las potencias ascendentes de una letra cuando tiene una disposicion inversa á la explicada; de modo que el primer término es aquel en que la letra* ordenatriz *tiene menor exponente, y el último aquel en que lo tiene mayor.*

41. *Generalmente se escoge por letra ordenatriz aquella que está repetida en mayor número de términos: sin embargo, á veces se escoge otra cualquiera por letra principal.*

42. *Para multiplicar polinomios se ordenan por las potencias ascendentes ó descendentes de una misma letra.* Así:

$$(10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4+a^5-5a^4b-b^5)\,(3ab^2-3a^2b+a^3-b^3)$$

ordenándolos por las potencias descendentes de la letra a, serán:

$$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

Producto ordenado y reducido $\left\{a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6\right.$
$-8ab^7+b^8.$

En algunos casos la letra ordenatriz entra elevada al mismo exponente en varios términos, y entónces se saca esa letra de *factor comun,* y todo lo que multiplica se encierra dentro de un paréntesis, ó se escribe á la izquierda de una raya vertical.

Así, al ordenar con respecto á x, para multiplicar el polinomio, $3ab^2x-a^4+2a^2x^2-2b^4-b^3x-3b^2x^2$ por el polinomio $a^4-6ab^2x-2b^4+3a^2x^2+2b^2x^2-2b^2x$ se dispondrán:

$2a^2$ $-3b^2$	x^2+3ab^2 $-b^3$	$x-a^4$ $-2b^4$		
$3a^2$ $+2b^2$	x^2-6ab^2 $-2b^2$	$x+a^4$ $-2b^4$		
$6a^4$ $-5a^2b^2$ $-6b^4$	$x^4+9a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+6ab^4$ $-2b^5$	x^3-3a^6 $-2a^4b^2$ $-6a^2b^4$ $-4b^6$	x^2.......	
	$-12a^3b^2$ $-4a^2b^2$ $+18ab^4$ $+6b^4$	$x^3-18a^2b^4$ $+6ab^5$ $-6ab^4$ $+2b^5$	$x^2+6a^5b^2$ $+2a^4b^2$ $+12ab^6$ $+4b^6$	x
		$+2a^6$ $-3a^4b^2$ $-4a^2b^4$ $+6b^6$	$x^2+3a^5b^2$ $-a^4b^3$ $-6ab^6$ $+2b^7$	$x-a^8$ $+4b^8$
$6a^4$ $-5a^2b^2$ $-6b^4$	$x^4-21a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+24a^2b^4$ $+6b^4$ $-2b^5$	x^3-a^6 $-5a^4b^2$ $-10a^2b^4$ $+6ab^5$ $-6ab^4$ $-2b^6$	$x^2+9a^5b^2$ $+2a^4b^2$ $+4b^6$ $-a^4b^3$ $+6ab^6$ $+2b^7$	$x-a^8$ $+4b^8$

EJERCICIOS

1.º $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$.

2.º $(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$.

3.º $(a-b)(a-b)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

4.º $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

5.º $(x^2-3x-7)(x-2)=x^3-5x^2-x+14$.

6.º $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)=a^8-a^2$.

7.º $(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x)=20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3$.

8.º $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)=21a^7-43a^6b+150a^5b^2-110a^4b^3+104a^3b^4-32a^2b^5$.

9.º $(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)=a^8-8a^7b+28a^6b^2-56a^5b^3+70a^4b^4-56a^3b^5+28a^2b^6-8ab^7+b^8$.

10.° $[x^3+(a+1)x^2-(a^2+2a-3)x+(a^3-5a^2+8a-7)]$
$[x^2+(a-1)x+(a^2-3a+1)]=x^5+2ax^4+(a^2-5a+3)x^3$
$+(a^3-8a^2+11a-9)x^2-(5a^3-21a^2+26a-10)x+a^5$
$-8a^4+24a^3-36a^2+29a-7.$

El cuarto ejemplo (y debe tenerse muy presente) dice que el producto de una suma multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia de sus cuadrados.

43. *Si se multiplican dos polinomios ordenados, el primer término del producto proviene sin reduccion del producto de los dos primeros de los factores, y el último (tambien sin reduccion) de los dos últimos.* En efecto; ordenados, por ejemplo, dos polinomios por las potencias descendentes de una letra, el producto de sus dos primeros términos tendrá á la ordenatriz con un exponente mayor que el de otros dos términos cualesquiera; luego no puede reducirse con ningun otro término ni estar pospuesto. *Ocupará sin reduccion el primer lugar del producto.* Análogamente, en el producto de los dos últimos términos de los factores es en el que la letra ordenatriz, tiene menor exponente; luego ni puede reducirse con ningun otro, ni anteponerse. *Ocupará sin reduccion el último lugar del producto.*

44. Potencias de los monomios. *Para elevar un monomio á una potencia se eleva el coeficiente y se multiplican los exponentes de las letras por el de la potencia. En cuanto al signo, si la potencia es par, llevará el signo más, y si es impar el del monomio.* En efecto; como la potencia de un producto es el producto de las potencias de los factores, siendo los monomios productos indicados, habrá que elevar cada factor; por eso los coeficientes se elevan á la potencia indicada: en cuanto á las letras, como para multiplicar las iguales se suman los exponentes, es claro que para elevarlas á potencia habrá de repetirse el exponente tantas veces por sumando cuantas unidades tenga el de la potencia, ó, lo que es lo mismo, se multiplicará por éste. Respecto del signo, si la potencia es *par*, habrá un número *par* de factores que, aunque sean negativos, agrupándolos de

dos en dos su producto es positivo, y por tanto tambien lo es la potencia. Si es *impar*, entónces los factores, agrupados de dos en dos, dejan uno que no puede agruparse, y que si es negativo cambia el signo del producto de los demás, y de aquí que lleve la potencia *impar* el signo del monomio. Así: $(2a^2b^3)^4 = 16a^8b^{12}$; $(-2a^2b^3)^4 = 16a^8b^{12}$; $-(2a^2b^3)^5 = -32a^{10}b^{15}$.

§ IV. Division algébrica y fracciones monomias. Exponentes negativos

45. *La division algébrica tiene por objeto hallar una expresion llamada cociente que, multiplicada por la que sirve de divisor, reproduzca al dividendo.*

46. En la division algébrica se distinguen tres casos: primero, de *dos monomios;* segundo, de *polinomio por monomio;* y tercero, *de dos polinomios.*

47. Se habrá advertido que las operaciones llamadas inversas, ó de descomposicion, tienen un fin peculiar, que se explica, por ser el resultado pedido, uno de los elementos que por composicion, constituye con otro dado, el propuesto para descomponer.

48. Esta observacion general, y la de que el resultado de las operaciones algébricas, es toda expresion que se ajusta al enunciado y conforma con la escritura convenida, constituyen los medios de análisis para investigar las reducciones que en algunos casos pueden hacerse en la indicacion de las operaciones con las formas algébricas. Así, pues, las reglas para el cálculo algébrico son resúmenes breves de las reducciones que pueden hacerse en ciertos casos con los elementos de una operacion indicada, para obtener expresiones sencillas y las cuales cumplen con el fin definido.

49. Primer caso. En la division de monomios, lo que hay que tener presente es: primero, que *el cociente multiplicado por el divisor ha de producir el dividendo;* segundo, *las reglas de la multiplicacion de los monomios.* Así ¿qué signo llevará el cociente de dos monomios? Analizando los casos que pue-

den ocurrir, éstos son cuatro, como manifiesta el siguiente cuadro:

	Dividendo	Divisor	Cociente
1.º	+	+	+
2.º	+	−	−
3.º	−	+	−
4.º	−	−	+

En el primero y segundo, como el dividendo es positivo, el cociente ha de llevar un signo tal, que al efectuar la multiplicacion por el divisor dé un resultado positivo: ahora bien; segun las reglas de la multiplicacion, para que dos factores den producto positivo, preciso es que sus signos sean iguales; luego en el caso de dividendo positivo el cociente ha de tener el *mismo* signo que el divisor. Un análisis análogo indica que para un dividendo *negativo* el signo del cociente ha de ser contrario al del divisor: esto es lo que se ha escrito en el cuadro antecedente.

50. Si se examina con atencion se deduce esta regla, fácil de retener, que es: *Signos iguales en dividendo y divisor dan cociente positivo, y signos desiguales, negativo.*

51. Ocupémonos ahora de la parte literal y de los coeficientes. Sean los que se quieran los valores que pueda representar una letra, ellos no son más que números: un monomio es un producto indicado, y el cociente de dos productos indicados se puede hallar dividiendo cada uno de los factores del dividendo por el factor ó factores que se quieran del divisor; y reuniendo en un solo producto estos cocientes *individuales* (si se permite la frase) queda, pues, al arbitrio del calculador elegir del monomio divisor el factor que le acomode para ir dividiendo cada uno de los del dividendo, con tal que despues multiplique los cocientes entre sí. *Así puedo dividir el coeficiente del dividendo por el del divisor;* si son números (como generalmente suelen serlo los de los monomios), por las reglas de la division aritmética, y si son letras, por las que ahora diremos.

52. En cuanto á la parte literal no hay simplificacion posible si las letras que tiene el monomio dividendo son diferen-

tes de las que se encuentran en el divisor. En efecto; ¿qué reduccion cabe en dividir p por q, más que escribir $p:q$ ó $\frac{p}{q}$? El caso, pues, de reduccion, y que hay que estudiar, es el en que existan letras iguales en el dividendo y divisor. Y como cada factor del dividendo puede dividirse por el que nos acomode del divisor, pueden elegirse los iguales. Veamos qué reduccion cabe en esto, y sea, por ejemplo, a^5: a^3; es claro que la letra ha de tener en el cociente un exponente tal, que al multiplicarla por la que sirve de divisor reproduzca el del dividendo; pero multiplicar letras iguales en Algebra es *sumar* sus exponentes; luego la cuestion se reduce á esta otra: ¿Qué número sumado con el exponente 3 da 5? La Aritmética la resuelve por la operacion de restar, puesto que es la que tiene por objeto hallar el número que, sumado con otro dado, produce un tercero conocido. Por tanto, *el exponente de la letra en el cociente es la diferencia entre los dos exponentes del dividendo y divisor*. Así: $a^5:a^3=a^2$.

Claro es que *à posteriori* se verifica que $a^2\times a^3=a^5$.

53. Hemos analizado el caso para cuando el exponente de la letra en el dividendo es *mayor* que el que lleva en el divisor; ¿y cuando sea igual, por ejemplo, $a^5:a^5$? La aplicacion de la regla daria a^0. *¿Qué valor representa una cantidad elevada á cero?* Para interpretarlo, si se analiza la operacion cuyo resultado ha de manifestar, se ve que ésta es una division en la que el dividendo es igual al divisor, y cualquiera que sea el valor real que se les atribnya, el cociente de toda cantidad por sí misma es la unidad: así somos inducidos á asignar al símbolo a^0 *el valor* 1, *ó sea* $a^0=1$.

54. Por último, si el exponente de la letra en el dividendo fuese menor que el que tiene en el divisor, por ejemplo, $a^3:a^5$, la aplicacion de la regla llevaria al resultado a^{-2}, el cual algébricamente se conforma con la condicion de cociente, toda vez que $a^{-2}a^5$ (si se admite la extension á los exponentes negativos de la suma de exponentes para la multiplicacion de letras iguales) daria $a^{-2+5}=a^3$. Pero ¿qué significacion tiene una cantidad elevada á exponente negativo? Analizando la operacion de donde procede por la aplicacion de la regla de dividir, se ve que cualquiera que sea el valor de a, el dividendo a^3 tiene 3 factores a y el divisor a^5 consta de 5 factores a, y como, cualquiera que sea su valor, se ha visto en Aritmética que en dividendo y divisor se pueden suprimir los mismos

factores sin que la relacion ó cociente varíe, es claro que $a^3:a^5$; suprimiendo en ámbos $a\times a\times a$ ó a^3, queda el cociente $1:a^2$, equivalente al propuesto: esto nos induce á considerar á la expresion a^{-2} como una manera de escribir el cociente $1:a^2$, ó en otra forma $\frac{1}{a^2}$. *En resúmen, cuando el exponente de la letra en el dividendo es menor que el que lleva en el divisor, el cociente queda indicado, si bien puede simplificarse ya aplicando la regla y poniendo un exponente negativo, ya en forma de quebrado; de modo que toda letra con exponente negativo es un cociente indicado, de la unidad, por la misma letra con exponente positivo.*

55. *Para dividir un monomio por otro divídanse los coeficientes numéricos por las reglas de la Aritmética y réstense los exponentes de las letras del divisor de los de sus iguales en el dividendo; las de éste que no estén en aquél, entran tal como se encuentran, en el cociente; el signo será positivo ó negativo, segun que los del dividendo y divisor sean iguales ó contrarios.*

Se dice que un monomio es DIVISIBLE *por otro cuando, aplicando la regla anterior, se obtiene una tercera expresion con exponentes positivos (ó entera).*

56. *Para que un monomio sea divisible por otro se necesita y basta que lo sean sus coeficientes, y que en el dividendo se encuentren todas las letras de que consta el divisor y elevadas á una potencia por lo ménos igual.*

NOTA. *Si no se considera que es algébricamente fraccionario el término cuyo coeficiente numérico lo sea*, puede omitirse la condicion de los coeficientes.

Ejemplos de monomios divisibles algébricamente:

$30a^4b^5c:6a^3b^2=5ab^3c$; $14a^3b^3c^2:-7a^3b^3c^2=-2$

$-13a^2b^3c^2d^2:-21a^2c^2=+\frac{13}{21}b^3d^2$.

57. *Si los monomios no son divisibles algébricamente la division queda indicada, y al tratar de los fraccionarios se verá la manera de simplificar este cociente.*

58. SEGUNDO CASO. *Division de un polinomio por un monomio.*

Cualesquiera que sean los valores que tomen las letras que entren en los términos de un polinomio, éstos serán números, y el polinomio representará una serie de números que se han de sumar ó restar, y por la Aritmética se sabe que el cociente de estos números, en suma ó diferencia indicada, divididos por un tercero, se encuentra dividiendo cada uno de ellos por el divisor, y sumando ó restando los cocientes parciales, segun sean sus signos.

59. Conforme con esto, *para dividir un polinomio por un monomio se divide cada término del polinomio por el monomio y los cocientes parciales se ponen á continuacion unos de otros con el signo que les corresponda.*

60. *Un polinomio se dice que es divisible por un monomio si lo es cada uno de sus términos.*

Para indicar la division de un polinomio por un monomio se encierra al polinomio dentro de un paréntesis, y fuera se deja el monomio.

Ejemplos de polinomios divisibles:

1.º $(30a^5b^2c-9a^3b^2c+6a^2b^3c^3):3a^2b^2c=10a^3-3a+2bc^2$.

2.º $(15a^2b^2c+10a^2b^2c^2-5a^2b^2):5a^2b^2=-3c-2c^2+1$.

61. *Si el polinomio no es divisible por el monomio, su division queda indicada* por dos puntos, ó en forma de quebrado, el cual podrá simplificarse.

62. Nota. No se analiza el caso de la division *de un monomio por un polinomio* porque su division no puede efectuarse algébricamente; es decir, porque no puede encontrarse ningun *monomio* ni *polinomio* entero que, multiplicado por el divisor, dé el dividendo.

63. Tercer caso. *Dividir un polinomio por otro.*

Vamos á estudiar esta operacion para aquellos casos en que, dados dos polinomios enteros, se puede encontrar *una tercera expresion (monómica ó polinomia) tambien entera, que multiplicada por el divisor reproduzca al dividendo, ó que le falte para ello agregarle una, llamada resto, tambien entera, y que se investiga.*

En este supuesto, como el dividendo proviene de la multiplicacion del cociente por el divisor, la ley de los productos de los polinomios servirá para que induzcamos el cociente. Ordenados, ante todo, dividendo, divisor y cociente, por las potencias ascendentes ó descendentes de una misma letra, y llamando A, B, C.... los términos del primero; a, b, c.... los del segundo, y m, n, p.... los del tercero, y segun su órden de colocacion, se tendrá por definicion:

$A+B+C+....=(a+b+c+....)(m+n+p+....)$, y, segun la multiplicacion, precisamente A proviene sin reduccion de $a\times m$; luego $m=\frac{A}{a}$. Es decir, que ordenados dividendo y divisor, el *primer término del cociente es igual al primero del dividendo dividido por el primero del divisor*.

Para investigar cómo se encuentra el segundo, se tiene presente que en el *dividendo* $A+B+C+....$ están sumados y reducidos *todos los productos de los diferentes términos del cociente por todo el divisor*, y por tanto que si se le resta el producto del primer término m por todo el divisor, el resto, (lo suponemos ordenado) llamándole $A'+B'+C'+....$, estará formado *de la suma de los productos del divisor por todos los términos del cociente que siguen al primero;* es decir, que se tendrá

$$A'+B'+C'+....=(a+b+c+....)(n+p+....)$$

Volvemos en este caso á tener ordenados los factores y el producto, y por tanto á que sin reduccion, A' provenga de $a\times n$; luego n se encontrará dividiendo A' por a. Es decir, que *para encontrar el segundo término del cociente se multiplica el primero por todo el divisor, su producto se resta del dividendo y se divide el* PRIMER TÉRMINO DEL RESTO (*reducido y ordenado*) *por el* PRIMERO *del divisor*.

Un análisis análogo haria ver que el tercer término del cociente se obtiene restando del que hace de dividendo, para obtener el segundo, el producto de este término por todo el divisor, reduciendo y ordenando el resto y dividiendo su primer término, por el primero del divisor, y así hasta el último. Este procedimiento se formula en la siguiente regla.

64. *Para dividir dos polinomios se ordenan dividendo y divisor con respecto á las potencias ascendentes ó descendentes de una misma letra, y se divide el primer término del dividendo por el primero del divisor y se tendrá el primero del cociente:*

este término se multiplica por todo el divisor, su producto se resta del dividendo y se divide el primer término del resto ordenado por el primero del divisor y se tendrá el segundo del cociente; así se continúa hasta que el resíduo sea cero, ó que no sea posible la division en términos enteros del primer término del uno de los restos por el primero del divisor.

EJEMPLOS

$$\begin{array}{l|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ \cline{2-2} -a^2-ab & a+b \\ \cline{1-1} ab+b^2 & \\ -ab-b^2 & \\ \cline{1-1} \quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 8a^4b+6a^3b^2-7a^2b^3+3ab^4 & 4a^2b-3ab^2+b^3 \\ \cline{2-2} -8a^4b+6a^3b^2-2a^2b^3 & 2a^2+3ab \\ \cline{1-1} \quad 12a^3b^2-9a^2b^3+3ab^4 & \\ \quad -12a^3b^2+9a^2b^3-3ab^4 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

EJERCICIOS

1.º $(4x^3+4x^2-29x+21):(2x-3)=2x^2+5x-7$.

2.º $(72x^4-78x^3y-10x^2y^2+17xy^3+3y^4):(6x^2-4xy-y^2)=12x^2-5xy-3y^2$.

3.º $(5a^5b^3c^5-22a^4b^3c^6+5a^3b^3c^7+12a^2b^3c^8-7a^2b^2c^8+28ab^2c^9):(a^2bc^2-4abc^3)=5a^3b^2c^3-2a^2b^2c^4-3ab^2c^5-7bc^6$.

4.º $(12a^2+(26b-3bc+18d)a+9bx-15x^2):(6a-2b+3c)=2a+5b-7c+3d$.

5.º $[8y^5+(6a+6)y^4-(13a^2-7a+18)y^3+(14a^3-41a^2+24a-11)y^2+(10a^4-25a^3+31a^2+7a-5)y-(25a^5-25a^4+11a^3+18a^2-33a+10)]:[2y^3+(a+2)y^2-(a^2-3a+5)y+(5a^3-8a^2+9a-5)]=4y^2+(a-1)y-(5a^2+3a-2)$.

65. *Si un polinomio ordenado con respecto á las potencias de una letra tiene términos con todas las potencias de las letras, desde la m.*ésima *hasta la cero, se llama completo y del grado* m.

66. *Si un polinomio completo de la forma entera* $Ax^m+Bx^{m-1}+Dx^{m-2}\ldots+Tx+V$ *se divide por el binomio* $(x-a)$ *el resto es el mismo polinomio, poniendo* a *en vez de* x. En efecto; sea el cociente *entero* C y el resíduo R; se tiene $Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Tx+V=$

$C(x-a)+R$. Esta igualdad subsiste, cualquiera que sea el valor de x, pues un miembro es el resultado de las operaciones hechas en el otro; luego tambien subsistirá si se hace $x=a$. Pero entónces $a-a$ es cero, y C, que es entero respecto á x, multiplicado por cero, da cero. En cuanto á R, como el divisor es de primer grado respecto á x, el resíduo es independiente de x, y por tanto no sufre variacion al poner a en vez de x, y queda $R=Aa^m+Ba^{m-1}+Da^{m-2}...+Ta+V$.

Cor.º *Si un polinomio ordenado por* x *se reduce á cero, poniendo* a *en vez de* x, *es divisible por* x—a. En efecto; se acaba de ver que el resto de su division es el resultado de sustituir en el polinomio a en vez de x; si, pues, por esta sustitucion se reduce á cero, claro es que el resto es cero, y la division, por tanto, exacta. Así: $4x^3+5x^2-22x-87$ se reduce á cero poniendo 3 en vez de x; luego es divisible por $(x-3)$. Tambien la diferencia de dos potencias iguales de dos términos es divisible por la diferencia de sus primeras potencias; es decir, que (x^5-a^5) es divisible por $(x-a)$, pues evidentemente poniendo a en vez de x se reduce á cero.

§ V. Fracciones algébricas

67. *Se llaman fracciones algébricas las divisiones indicadas de las expresiones literales.*

68. Las expresiones algébricas fraccionarias provienen de los casos de division en que el dividendo no es igual al producto del divisor por una expresion entera; entónces el cociente queda indicado.

69. Los nombres de numerador y denominador dados en la Aritmética á las divisiones indicadas se conservan en el Álgebra para el mismo caso: así es, *que al dividendo de estas expresiones se le llama numerador, y al divisor denominador*, y se escriben separándolos con una raya horizontal.

70. *Se pueden multiplicar los dos términos de una fraccion*

algébrica por una expresion entera sin que se altere su valor. En efecto; sea $\frac{a}{b}$ una fraccion algébrica, y sea c el valor de su cociente, se tendrá $a=bc$; y si m es una expresion entera, $am=bcm$, ó dividiendo por bm será $\frac{am}{bm}=c=\frac{a}{b}$.

71. Para *reducir várias fracciones algébricas á un comun denominador se halla el mínimo comun múltiplo de sus denominadores, que servirá de denominador comun, y se multiplica cada numerador por los factores que faltan á su denominador para componer el mínimo múltiplo.*

72. *El mínimo comun múltiplo de varios monomios se consigue hallando el de sus coeficientes y poniéndole por parte literal todas las letras diferentes de los monomios, elevadas á su mayor exponente.* Es evidente que la expresion así determinada goza de la condicion de ser divisible por todos los monomios propuestos, y no hay ninguna más sencilla que goce de esta propiedad, pues la supresion de un solo factor literal de los que la forman haria que no fuera divisible por el monomio que tenía ese factor elevado á mayor exponente.

Así, el *m. c. m.* de los monomios $44a^3b^2c$, $48a^5bc^4$, $36a^4b^5c^3$, $18a^3b^2c^4$, será $1584a^5b^5c^4$.

73. *Si los monomios no tienen ningun factor comun, el* m. c. m. *es el producto de todos ellos:* así el *m. c. m.* de $13a^3b$, $14c^4d^3$, $17f^2g$, es $3094a^3bc^4d^3f^2g$.

74. Esto supuesto, sean las fracciones $\frac{3x^2}{4a^2bc^2}$, $\frac{5xy}{6ab^2c}$, $\frac{7y^2}{8abc^2}$, que se quieren reducir á un comun denominador.

El mínimo comun múltiplo de los denominadores es $24a^2b^2c^2$, y si cada numerador se multiplica por el cociente de dividir el mínimo múltiplo por cada denominador, se tendrán trasformadas las fracciones en estas otras:

$$\frac{3x^2\times 6b}{4a^2bc^2.6b},\quad \frac{5xy\times 4ac}{6ab^2.4ac},\quad \frac{7y^2\times 3ab}{8abc^2\times 3ab},$$

ó sea

$$\frac{18bx}{24a^2b^2c^2},\ \frac{20acxy}{24a^2b^2c^2},\ \frac{21aby^2}{24a^2b^2c^2}.$$

75. *Si los denominadores no tuviesen ningun factor comun se multiplican los dos términos de cada fraccion por el producto de los denominadores de las demás.* Así,

$$\frac{3a^2bx}{7cd^2},\ \frac{4a^3bx^2}{5hk},\ \frac{7bk}{4a^2c},$$

reducidas á comun denominador, dan:

$$\frac{60a^4bchkx}{140a^2c^2d^2hk},\ \frac{112a^5bc^2dx^2}{140a^2c^2d^2hk},\ \frac{245bcd^2hk^2}{140a^2c^2d^2hk}.$$

76. Del principio (70) se deriva tambien, que si se dividen los dos términos de una fraccion por un mismo factor, la fraccion no se altera; esto conduce á la simplificacion de las fracciones, que se consigue *suprimiendo en ámbos términos los factores comunes.*

EJEMPLOS

$$\frac{12a^3bc^3}{18a^4bc^2}=\frac{2c}{3a};\ \frac{187a^4b^5c^2x^3y}{255a^4b^6c^7x^4}.$$

77. *Para sumar várias fracciones de un mismo denominador se suman los numeradores y al resultado se le pone el denominador comun. Si no tienen el mismo denominador se reducen á un comun denominador, y queda el caso reducido al anterior. Lo mismo se efectúa para restarlas, cambiando de signo al sustraendo.* Así:

$$1+\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{a^2}{a^3-b^2};$$

$$\frac{b^2}{a^2-b^2}-1=\frac{b^2-a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{2b^2-a^2}{a^2-b^2};$$

$$\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a;\quad \frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b;$$

$$\frac{a}{b}+\frac{a-3b}{cd}+\frac{a^2-b^2-ab}{bcd}=\frac{acd-4b^2+a^2}{bcd}.$$

78. *El producto de las fracciones algébricas se halla multiplicando los numeradores y denominadores entre sí.*

Sea multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$; si $\frac{a}{b}=p$ y $\frac{c}{d}=q$, se tendrá $a=bp$, $c=dq$; luego $ac=bd.pq$, de donde $p.q=\frac{ac}{bd}$, y sustituyendo los valores de p y de q, será $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

79. *Para dividir fracciones se multiplica la fraccion dividendo por la divisor invertida.*

El cociente de $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ ha de ser tal, que multiplicado por $\frac{c}{d}$ ha de dar $\frac{a}{b}$, y esto indica que es $\frac{ad}{bc}$.

EJEMPLOS

$$\left(\frac{a+x}{a-x}+\frac{b-x}{b+x}\right)\left(\frac{a-x}{a+x}+\frac{b+x}{b-x}\right)=\frac{4(ab+x^2)^2}{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}.$$

$$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}=\frac{(ad+bc)fh}{(eh+fg)bd}.$$

$$\frac{\frac{a^3f^3}{b^2c^2}-\frac{a^4f}{bc}+a^2c}{\frac{a^2g}{bc^2d}-\frac{a^6c}{b^2g^2h}+\frac{a^2}{b}}=\frac{(af^3-a^2bcf+b^2c^3)dg^2h}{bg^3h-a^4c^3d+abcdg^2h}.$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{2a}+\frac{a-b}{2b}\right)}{\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$ efectuando los cálculos se hallará. . . . . $\frac{ab(a^2+b^2)}{2(a^2+ab+b^2)}$.

80. Potencias de los fraccionarios. *Para elevar una fraccion á una potencia basta elevar numerador y denominador á la misma potencia.* En efecto;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\ldots\ldots\times\frac{a}{b}=\frac{a\times a\times\ldots\ldots a}{b\times b\times\ldots\ldots b}=\frac{a^m}{b^m}.$$

EJEMPLOS

$$\left(-\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^2=\frac{9a^4b^6}{c^2d^4};\quad\left(\pm\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^3=\pm\frac{27a^6b^9}{c^3d^6}.$$

81. **Forma entera de las fracciones algébricas; exponentes negativos.** *Las fracciones algébricas pueden escribirse bajo la forma de expresiones enteras, cambiando de signo al exponente de los factores del denominador.*

82. En efecto; se sabe que *toda expresion ó factor con exponente negativo equivale á un quebrado, cuyo numerador es la unidad y cuyo denominador es la misma expresion ó factor con exponente positivo.*

83. De esta equivalencia se deduce que *puede pasar un factor del numerador al denominador, y viceversa, con solo variar de signo su exponente.* La equivalencia $\frac{1}{a^2}=a^{-2}$ justifica el paso del denominador al numerador; y la recíproca, la igualdad $a^2=\frac{1}{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{a^{-2}}$ la justifica.

84. Las expresiones algébricas de forma entera *con exponentes negativos* son, por tanto, *fracciones* que en esta nueva forma se pueden calcular por las reglas de las expresiones enteras. Un ejemplo bastará para hacer ver el método de justificacion de las demás operaciones. Sea $a^{-2}\times a^{-3}$; segun la regla de las expresiones enteras (32) su producto será a^{-3-2}. En efecto; $a^{-3}=\frac{1}{a^3}$ y $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, multiplicando ordenadamente, dirá $a^{-3}\times a^{-2}=\frac{1}{a^3}\times\frac{1}{a^2}=\frac{1}{a^{3+2}}=a^{-3-2}$.

Del mismo modo se justificaria cualquier otra operacion.

§ VI. Raíces de las expresiones algébricas monomias

85. *Se llama raíz, en general, de un grado cualquiera, de una expresion algébrica, otra que, elevada á la potencia que indica el índice, reproduce á la propuesta.*

86. *Para extraer la raíz de un grado cualquiera á un monomio se extrae la de su coeficiente y se dividen los exponentes de las letras por el índice; en cuanto al signo, si el índice es par llevará la raiz el doble signo* $\pm$, *y si es impar el mismo que el del monomio.* En efecto; del procedimiento para elevar un monomio á potencia se desprende que si la expresion obtenida segun la regla dada se eleva á la potencia que indica el índice de la raíz, se reproduce el monomio propuesto, toda vez que habrá que elevar el coeficiente del monomio raíz á una potencia igual á la raíz que se le extrajo, y que multiplicar los exponentes de sus letras por el mismo número por el cual se dividieron. En cuanto al doble signo de las raíces de grado par, la razon es evidente, pues el monomio raíz, ya tenga el signo $+$ ó el $-$, elevado á una potencia par, dará un resultado positivo. Así:

$$\sqrt{36a^4b^2c^6}=\pm 6a^2bc^3;\ \sqrt[3]{27a^3b^9c^6}=3ab^3c^2;\ \sqrt[3]{-343a^6b^3}=-7a^2b.$$

Nota.—Las condiciones necesarias y suficientes para que un monomio tenga raíz exacta de un grado se deducen de la regla dada. Segun ella, el coeficiente ha ser potencia perfecta del grado de la raíz, y los exponentes han de ser divisibles por el índice; además, si éste es par, la expresion ha de ser positiva.

87. Expresiones imaginarias. *Se llama expresiones imaginarias á las raíces de grado par de las cantidades negativas.* En efecto; sea, por ejemplo, $\sqrt{-4}$; como la raíz elevada al cuadrado ha de producir en magnitud y signo á la cantidad subradical, y como las potencias pares de los números positivos

y negativos son positivas, hay una imposibilidad de expresar $\sqrt{-4}$, porque no se sabe qué signo darle, y de aquí el llamar á tal raíz y sus análogas cantidades imaginarias.

Sin embargo, para simplificar los cálculos en que tales cantidades se presentan, se admite que $(\sqrt{-1})^2=-1$.

88. *Los radicales imaginarios de segundo grado pueden simplificarse extrayendo la raíz de la cantidad sub-radical, prescindiendo del signo y multiplicándola por* $\sqrt{-1}$. Así: $\sqrt{-4}=2\sqrt{-1}$, porque $(2\sqrt{-1})^2=4\times-1=-4$.

89. CÁLCULO DE LOS IRRACIONALES MONOMIOS. *Se llama cantidad irracional á las raíces de las expresiones que no la tienen exacta.*

90. *Un factor puede salir de un radical* (si su exponente es divisible por el índice) *dividiendo su exponente; y vice-versa, puede introducirse multiplicando su exponente por el índice.* Ámbas trasformaciones se fundan en que la raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores. Así: $\sqrt{12a^3bc^2}=\sqrt{3.4a.a^2.b.c^2}=2ac\sqrt{3ab}$.

91. *Un radical no se altera multiplicando su índice por un número y elevando la cantidad sub-radical al mismo número.* Es decir, que $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$. En efecto; $\left(\sqrt[m]{a}\right)^{m.n}=\left(\left(\sqrt[m]{a}\right)^m\right)^n=a^n$, y extrayendo la raíz mn.$^{\text{ésima}}$ de ámbos miembros, $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

92. *Para reducir varios radicales á índice comun se multiplica cada índice por todos los demás, y se eleva cada sub-radical á la potencia que indica el número por el cual se multiplica su índice.*

93. *Si los índices no son primos entre sí dará un resultado más sencillo el empleo del mínimo comun múltiplo de ellos como índice comun, elevando cada sub-radical al cociente de éste por su índice.*

Así: $\sqrt{2ab}$, $\sqrt[3]{3a^2b^2}$, reducidos á índice comun, dan $\sqrt[6]{8a^3b^3}$, $\sqrt[6]{9a^4b^4}$. Tambien $\sqrt[4]{a^2b^3}$, $\sqrt[6]{b^2c}$, $\sqrt[3]{ab}$, como 4, 6 y 3, su m. c. m., es 12, dan $\sqrt[12]{a^6b^9}$, $\sqrt[12]{b^4c^2}$, $\sqrt[12]{a^4b^4}$.

94. *Se llaman cantidades irracionales semejantes las que tienen la parte racional semejante y la irracional idéntica. Para reducir los semejantes se siguen las mismas reglas que en las racionales.*

95. La suma y resta de radicales se hace como el de las expresiones racionales, pues se sabe que éstas no son operaciones, sino indicaciones de lo que se ha de ejecutar: sólo cabe, en los llamados resultados, la simplificacion que ocurra por la reduccion de los términos semejantes.

96. *Para multiplicar radicales del mismo índice se multiplican los sub-radicales, afectando al producto del índice comun. Si no lo tienen se reducen á uno comun.*

Así: $\sqrt[m]{a}\,.\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{a.b}$. Tambien $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}\,.\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{a^n\,b^m}$.

97. *Para dividir radicales de índice comun se dividen los sub-radicales y se afecta el cociente del mismo índice; si no lo tienen se reducen á índice comun.*

Así: $\sqrt[m]{a}:\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$; $\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{\dfrac{a^n}{b^m}}$.

98. *Para elevar un radical á una potencia se eleva la cantidad sub-radical.*

En efecto; sea $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}....=\sqrt[m]{a^n}$.

99. *Para extraer una raíz de un radical se multiplica el índice de la raiz por el del radical.*

En efecto; $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$; pues $\left(\sqrt[mn]{a}\right)^n=\sqrt[m]{a}$.

La justificacion de las reglas dadas desde el número 92 al 99 se funda en la propiedad demostrada, número 91, y en la definicion de raíz; de donde se sigue que las igualdades establecidas son verdaderas.

100. EXPONENTES FRACCIONARIOS Ó DIFERENTE FORMA DE RADICALES. Puesto que para extraer la raíz de un factor debe dividirse su exponente por el índice, es claro que son expresiones equivalentes $\sqrt[m]{a^n}$ y $a^{\frac{n}{m}}$. Estos exponentes fraccionarios indican, por tanto, una extraccion de raíz, y la expresion será irracional, si m no es divisor de n.

101. Los irracionales, bajo esta forma, pueden calcularse por las reglas de las expresiones enteras. Sea, por ejemplo, $a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{q}}$; el producto será $a^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{nq+mp}{mq}}$.

En efecto; $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ y $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; multiplicando se tiene

$$a^{\frac{n}{m}} \times a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[mq]{a^{nq}} \cdot \sqrt[mq]{a^{mp}} = \sqrt[mq]{a^{nq+mp}} = a^{\frac{nq+mp}{mq}}.$$

El mismo método se emplearia para justificar las reglas de dividir, elevar á potencias y otra cualquiera.

EJERCICIOS

$2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+\sqrt{\frac{5}{3}}$, se hallará $\frac{30}{\sqrt{15}}$

$\sqrt{45c^3}-\sqrt{80c^3}+\sqrt{5a^2c}$ » $(a-c)\sqrt{5c}$

$\dfrac{\sqrt{1-x+\frac{1}{\sqrt{1+x}}}}{1+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ » $\sqrt{1+x}$

CAPÍTULO III

Ecuaciones de primer grado, con una ó várias incógnitas.

PRELIMINARES

102. *Las expresiones unidas por medio del signo igual toman los nombres de identidad, igualdad ó ecuacion.*

Llámase identidad si un miembro es la repeticion del otro. Así: $6=6$ $3+x=3+x$ son identidades. *Llámanse igualdad si un miembro es el resultado de las operaciones indicadas en el otro.* Así: $8+4-3=9$ $3x+2x-7+1=5x-b$ son igualdades. *Se llama ecuacion la igualdad establecida entre los datos é incógnitas de una cuestion, conforme con el enunciado de ésta.*

103. *Grado de una ecuacion es el mayor exponente de la incógnita; y si hay más de una, la suma de los exponentes en el término en que sea mayor.*

104. *Se dice que se ha despejado una incógnita cuando está sola en un miembro con el signo positivo y tiene por coeficiente y exponente la unidad, y en el otro no hay más que cantidades conocidas.* El valor que así se obtiene para la incógnita se llama *solucion ó raíz de la ecuacion.*

105. *Se dice que un número satisface una ecuacion cuando, puesto en lugar de la incógnita, hace idénticos ámbos miembros.*

106. *Las ecuaciones se llaman tambien algébricas ó numéricas, segun que los datos estén representados por letras* ó *por números.* Las letras x, y, z, v, etc., se suelen emplear para representar las incógnitas, y las primeras del alfabeto, a, b, c, etc., para los datos en las algébricas.

§ I. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA SOLA INCÓGNITA

107. *Las ecuaciones de primer grado que no sean identida-*

des no pueden tener más que una raíz, pues la forma de una incógnita de una ecuacion de primer grado ya despejada es $x = \frac{A}{B}$, en la que A y B son números, y el cociente de dos números no admite más que un valor; pero esta última forma de la ecuacion es una trasformada de la propuesta, luego ésta no puede ser satisfecha más que por un solo número. No se refiere este razonamiento en el caso de identidad, pues entónces, como se verá, los valores de A y B se convierten en cero y dejan de ser números.

108. *Se dice que una ecuacion no se altera por las cuatro operaciones iguales que con ámbos miembros se ejecuten si la nueva ecuacion tiene las mismas soluciones que la primitiva.* Consecuencia de esto es, que *si se suman ó restan cantidades iguales cualesquiera á los dos miembros de una ecuacion, ésta no se altera*, pues aunque los sumandos sean dependientes de la incógnita, su grado no se altera, y el mismo número que la satisfaga ántes la satisfará despues. *Tambien pueden multiplicarse ó dividirse por factores independientes de su incógnita*, porque esto se reduce á las operaciones antecedentes. Pero se alterará su grado, y por tanto el número de sus soluciones (como se verá), *si los factores son dependientes de la incógnita;* y, en su consecuencia, si se *elevan ámbos miembros á potencia ó se les extrae una raíz.*

109. En las ecuaciones de primer grado con una sola incógnita las trasformaciones que en general hay que hacer para despejar ésta, son: Primera, *quitar los denominadores;* segunda, *efectuar las multiplicaciones indicadas por los paréntesis;* tercera, *hacer la trasposicion;* cuarta, *hacer la reduccion*, y quinta, *despejar la incógnita.*

1.ª *Para quitar los denominadores se multiplica cada numerador por el producto de los denominadores de los demás quebrados, y los términos enteros por el producto de todos los denominadores.* En efecto; esto es reducir todos los términos á un comun denominador y suprimirlo, que significa tanto como multiplicar toda la ecuacion por un mismo número. Si los denominadores tienen factores comunes, se emplea con ventaja el mínimo comun múltiplo de ellos como denominador comun. (72).

Ejemplos. Ecuacion algébrica: $ax-\frac{c}{b}=\frac{d-x}{f}$. Quitando denominadores, $abfx-fc=b(d-x)$. Ecuacion numérica: $x+\frac{27(x-2)}{4}=9$. Quitando denominadores dará: $4x+27(x-2)=36$.

2.ª Efectuando las operaciones indicadas, se tiene respectivamente: $abfx-fc=bd-bx$, y en la numérica $4x+27x-54=36$.

3.ª *La trasposicion consiste en poner en un miembro los términos que tienen incógnita y en el otro los que no la tienen: para pasar un término de un miembro á otro, se suprime donde está y se pone en el otro con signo contrario.* En efecto; si en la ecuacion algébrica anterior se quiere pasar el término $-bx$ del segundo miembro al primero, bastará *sumar* $+bx$ á ámbos miembros, con lo cual desaparecerá del segundo y aparecerá en el primero con el signo $+$. El término $-fc$ se pasará al otro miembro, sumando á los dos $+fc$. Así las ecuaciones anteriores tomarán la forma $abfx+bx=bd+fc$ y $4x+27x=36+54$.

4.ª *La reduccion es la reunion en uno solo de los términos semejantes en las numéricas, y en las algébricas es sacar la incógnita de factor comun de los términos que multiplique.* Así dirán: $x(abf+b)=bd+fc$; $31x=90$.

5.ª *Para despejar la incógnita se divide el miembro conocido por el coeficiente de la incógnita:* de este modo le queda por coeficiente la unidad, y la ecuacion no se altera (108); además, se procura por una conveniente trasposicion que el signo de la incógnita sea positivo. En las ecuaciones del ejemplo se tendrá respectivamente: $x=\frac{bd+fc}{abf+b}$ y $x=\frac{90}{31}$.

6 4

EJEMPLOS NUMÉRICOS

$$13\frac{3}{4}-\frac{x}{2}=2x-8\frac{3}{4}\ldots. x=9.$$

$$2x+7+\frac{3}{2}x=6x-23\ldots. x=12.$$

$$\frac{37x}{6}+\frac{1}{2}-6\frac{1}{3}x=10x+19+\frac{3}{7}\ldots. x=13\frac{59}{253}.$$

$$\frac{3x}{5}-\frac{7x}{10}+\frac{3x}{4}-\frac{7x}{8}+15=0\ldots. x=66\frac{2}{3}.$$

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=7x-712+\frac{x}{5}\ldots. x=116\frac{148}{367}.$$

$$3{,}25x-5{,}007-x=0{,}2+0{,}34x\ldots. x=2{,}010426\ldots.$$

ALGÉBRICOS

$$\frac{ax}{b}+\frac{cx}{d}+\frac{ex}{f}=g+h\ldots. x=\frac{(h+g)bdf}{b(de+cf)+adf}.$$

$$\frac{5ab}{6}+\frac{4ac}{5}-\frac{2cx}{3}=\frac{3ac}{4}+2ab-6cx\ldots. x=\frac{(7ab-3c)a}{320c}.$$

$$\frac{a+3x}{4a}-\frac{7a-5x}{6b}+3-\frac{9x}{4}=\frac{x}{ab}+\frac{5x}{6b}\ldots. x=\frac{(39b-14a)a}{27ab-9b+12}$$

$$\frac{x-1}{7x^n}+\frac{3x^n+6x^{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+2}+x^n}{x+1}.$$

Esta ecuacion se reduce á una de primer grado dividiéndola toda por x^n y trasponiendo, con lo cual desaparecen los términos en x^2 y resulta $x=-\frac{11}{12}$.

$$\frac{9abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{(2a+b)bx^2}{a(a+b)}=3cx+\frac{6x}{a}\ldots. x=\frac{ab}{a-b}$$

$$\frac{6x}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}+\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}\ldots.$$

$$x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}.$$

110. *Se llama verificar una raíz poner su valor en la ecuacion y ver si la satisface.*

§ II. Resolucion de problemas

111. La resolucion de todo problema que depende de ecuaciones tiene tres partes: primera, *su planteo;* segunda, *su resolucion;* tercera, *su discusion.*

Se llama *planteo* la traduccion al lenguaje algébrico, ó sea la expresion escrita por medio de los símbolos literales y numéricos y de los signos de las operaciones del enunciado de un problema.

112. Para plantear los problemas no hay reglas generales y determinadas como para su resolucion. El atento estudio del enunciado; el indicar las incógnitas por las letras v, y, z, x, últimas del alfabeto, y efectuar con ellas todas las operaciones que en el enunciado se indican, estableciendo aquellas igualdades que se tendrian si su valor fuese conocido y se tratase de ver si satisfacian á las condiciones dadas, son otros tantos consejos que nada fijo encierran. La práctica es la que más enseña á plantear los problemas matemáticos.

Problemas. 1.º *Diofanto, matemático griego, pasó* $\frac{1}{6}$ *de su vida en la niñez;* $\frac{1}{12}$ *en la adolescencia; casado y sin hijos pasó* $\frac{1}{7}$ *de su vida y* 5 *años más; tuvo un hijo que vivió* $\frac{1}{2}$ *de la edad de su padre y al cual sobrevivió Diofanto* 4 *años. ¿Cuál fué la edad de Diofanto?* Si se llama x la incógnita, es claro que, segun las condiciones de la cuestion, se tiene $\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$, de donde $x=84$.

2.º *¿Qué número dividido sucesivamente por* a *y* b, *dan sus cocientes de diferencia* d? Sea x: se tiene $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=d$; de donde $x=\frac{abd}{b-a}$.

3.º *Repartir 2500 pesetas entre dos personas, de modo que la primera tenga 4 veces más que la segunda.*

Ecuacion planteada: si se llama x la parte menor se tiene $x+4x=2500$.

4.º *Queriendo dos personas comprar un caballo, ven que el uno sólo puede pagar la quinta parte de su precio, y el otro la sétima; y reuniendo las dos partes, les faltan todavía 276 pesetas para reunir el precio del caballo. ¿Cuánto era este precio?* Si se llama x, la ecuacion es $\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+276=x$.

5.º *Dividir 46 en dos partes tales, que la suma de los cocientes respectivos de ellas por 7 y por 3 sea igual á 10.* Si se llama x á una de las partes, la ecuacion será $\frac{x}{7}+\frac{46-x}{3}=10$.

6.º *Uno ha recorrido viajando, embarcado, á caballo y á pié, 3040 leguas. Por mar han sido tres veces y media las que recorrió á caballo, y á pié dos veces un tercio las que recorrió por mar. Se pregunta cuántas recorrió embarcado, cuántas á caballo y cuántas á pié.* Llamando x las que recorrió á caballo, la ecuacion es $x+3\frac{1}{2}.\,x+2\frac{1}{3}.\,3\frac{1}{2}x=3040$.

7.º *Dividir el número* a *en tres partes tales, que la primera sea á la segunda como* m *á* n, *y la segunda á la tercera como* p *á* q. Llamando x á la parte primera, se tiene $x+\frac{n}{m}.\,x+\frac{qn}{pm}.\,x=a$.

8.º *Un tonel que contiene 2500 litros de vino tiene tres grifos: el primero lo vacia en dos horas, el segundo en tres y el tercero en cuatro. Se pregunta en cuánto tiempo quedaria vacío si se abriesen los tres á un tiempo.*

Llamando x á las horas que tardaria, se tendrá $\frac{2500x}{2}+\frac{2500x}{3}+\frac{2500x}{4}=2500$ ó $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=1$.

9.º *Un estanque tiene tres caños y el primero lo llenaria en* $1\frac{1}{3}$ *horas; el segundo en* $3\frac{1}{3}$, *y el tercero en* 5. *Se pregunta en cuántas horas lo llenarian corriendo los tres á la par.* Sean x estas horas: se tendrá $\frac{3x}{4}+\frac{3x}{10}+\frac{x}{5}=1$.

10.º *Un estanque se llena por tres caños: el primero sólo tar-*

daria a *horas, el segundo* b *y el tercero* c. *Se pregunta en cuántas horas lo llenarian los tres.* Llamando x estas horas se tiene $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}+\frac{x}{c}=1$.

§ III. Ecuaciones de primer grado con várias incógnitas

113. Preliminares. Métodos de eliminacion. Cuando un problema contiene más de una incógnita, pueden ocurrir tres casos: primero, *que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas*; segundo, *que sea menor;* tercero, *que sea mayor.*

114. *En todos los casos, el número de ecuaciones que originan se llama* SISTEMA.

115. *Dos ó más ecuaciones de un sistema se llaman* COMPATIBLES *cuando pueden ser satisfechas por unos mismos valores para sus incógnitas, y se llaman* DISTINTAS *dos ecuaciones que no procedan la una de la otra; es decir, que ninguna operacion que se haga con los dos miembros de la una, dé por resultado la otra.*

116. *Cuando un problema da orígen á un número de ecuaciones compatibles y distintas, igual que de incógnitas, se llama* DETERMINADO.

Si el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas se dice INDETERMINADO, y si es mayor, MÁS QUE DETERMINADO; en todos estos casos, para resolver las ecuaciones hay que recurrir á la *eliminacion.*

117. *Eliminar una incógnita entre dos ecuaciones es* DEDUCIR *de ellas, sin alterar el valor de las demás incógnitas, otra ecuacion que no la contenga. Para ello se conocen, entre otros, los métodos de igualacion, sustitucion y reduccion.*

118. Para aplicar estos métodos se suponen quitados los denominadores en las ecuaciones, efectuadas las operaciones, hechas la trasposiciones y reducciones. Además, para despejar

una incógnita cualquiera se consideran las otras como si fuesen datos.

119. 1.° MÉTODO DE IGUALACION. *Consiste en despejar la incógnita que se quiere eliminar en ámbas ecuaciones é igualar sus valores.*

Sean las dos ecuaciones $ax+by=k$ (1.ª) y $a'x+b'y=k'$ (2.ª); despejando x en las dos, se tendrá, $x=\frac{k-by}{a}$, $x=\frac{k'-b'y}{a'}$; de donde si el sistema es compatible, como el valor de x ha de ser el mismo, se tendrá $\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'}$ (3), ecuacion en la que ha quedado eliminada la x.

120. Falta sólo hacer ver la compatibilidad de esta ecuacion resultante con las del sistema; ó, lo que es lo mismo, que el sistema dado, $ax+by=k$ (1.ª), $a'x+b'y=k'$ (2.ª) *tiene las mismas soluciones* que el formado con una de sus ecuaciones, y la resultante y recíprocamente, á lo cual se llama ser *equivalentes*.

En efecto; sea $x=\alpha$ $y=\beta$ el par de valores que satisfacen á la (1.ª) y (2.ª), tambien satisfarán $\alpha=\frac{k-b\beta}{a}$ y $\alpha=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, sus trasformadas, y es evidente que $\frac{k-b\beta}{a}=\frac{k'-b'\beta}{a'}$ (3), por ser iguales al mismo valor α; pero esta es la ecuacion (3), sustituyendo β por y; luego el sistema $ax+by=k$ (1) y $\frac{k-by}{a}=\frac{k'-b'y}{a'}$ se satisface por $x=\alpha$ é $y=\beta$. Recíprocamente, sea $x=\alpha$ é $y=\beta$ un par de valores que satisface al sistema (1) y (3), digo que tambien satisface al (1) y (2): en efecto; si en (1) se sustituyen estos valores se tiene $a\alpha+b\beta=k$, de donde $\frac{k-b\beta}{a}=\alpha$. Por otra parte, sustituyendo en (3) se tiene $\frac{k-b\beta}{a}=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, y como el primer miembro es igual á α, se tiene $\alpha=\frac{k'-b'\beta}{a'}$, de donde $a'\alpha+b'\beta=k'$, que es la ecuacion (2). Se ve, pues, que los valores $x=\alpha$ é $y=\beta$, que satisfacen á (1) y (3), tambien satisfacen á (1) y (2). Queda, pues, demostrado que ámbos sistemas son equivalentes.

121. 2.º MÉTODO DE SUSTITUCION. *Consiste en despejar la incógnita en una ecuacion y sustituir su valor en la otra.* Así, en la ecuacion (1) y (2), para eliminar la y por este método, se tiene en (1), $y=\frac{k-ax}{b}$.... (3), y sustituyendo en (2), $a'x+b'\frac{k-ax}{b}=k'$.... (4).

122. El sistema (1) y (2) se satisface por $x=\alpha$ é $y=\beta$; la ecuacion (3) tambien se satisfará, por ser una trasformada de la (1); con esto, hacer $x=\alpha$ es lo mismo que convertir á $\frac{k-ax}{b}$ en β; luego si en la ecuacion (4) se pone $x=\alpha$ se convierte en $a'\alpha+b'\beta=k'$, que es la (2), que se satisface, segun la hipótesis, por estos valores; luego $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfacen á (3) y (4). Recíprocamente, si $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfacen á (3) y (4) tambien lo hacen con (1) y (2). En efecto; satisfaciendo á (3), ó sea $\beta=\frac{k-a\alpha}{b}$, se tiene su trasformada $a\alpha+b\beta=k$, que es la (1) satisfecha por estos valores. Por otra parte, hacer $x=\alpha$ é $y=\beta$ en (3) convierte al valor $\frac{k-a\alpha}{b}$ en β y es lo mismo que hacer $x=\alpha$ y $\frac{k-a\alpha}{b}=\beta$ en (4), lo cual da $a'\alpha+b'\beta=k'$, que es la (2) satisfecha por $x=\alpha$ é $y=\beta$; luego ámbos sistemas son equivalentes.

123. 3.º MÉTODO DE REDUCCION, DE SUMA Y RESTA Ó DE COEFICIENTES IGUALES. *Consiste en igualar los coeficientes de la incógnita que se va á eliminar y sumar las ecuaciones si estos coeficientes tienen signos contrarios, y restarlas si tienen el mismo signo.*

124. *Para igualar los coeficientes de la incógnita basta multiplicar cada ecuacion por el coeficiente que tiene la incógnita en la otra.*

125. Si los coeficientes de la incógnita no son primos entre sí *se halla su mínimo comun múltiplo y cada ecuacion se multiplica por el cociente de dividir el mínimo por el coeficiente que en ella tiene la incógnita.* En las ecuaciones (1) y (2) para eli-

minar y se igualarán los coeficientes, para lo cual se multiplica la (1) por b' y la (2) por b, y resultará $ab'x+bb'y=kb'$ (3), $ba'x+bb'y=bk'$ (4). Restando (3) y (4) se tendrá $ab'x-ba'x=kb'-bk'$ (5).

126. Para hacer ver con más claridad la equivalencia del sistema (1) y (2) al (1) y (5) se observa que si se trasponen todos los términos al primer miembro, el segundo será cero, y con esto las ecuaciones (1) y (2) tendrán la forma de $A=0$, $A'=0$, en las que A y A' representan en general un polinomio que puede estar compuesto de términos con x y con y é independientes. La ecuacion (5) proviene de haber multiplicado la primera por b' y la segunda por b y haber restado; luego tiene la forma $Ab'-A'b=0$; se trata de demostrar la equivalencia de $\left.\begin{matrix}A=0\\A'=0\end{matrix}\right\}$ (1) y $\left.\begin{matrix}A=0\\Ab'-A'b=0\end{matrix}\right\}$ (2). Si $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfacen al sistema (1), es porque anulan á A y A'; luego $Ab'=0$ y $A'b=0$, y por tanto $Ab'-A'b=0$; es decir, que $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfacen al sistema (2). Recíprocamente, si $x=\alpha$ é $y=\beta$ satisfacen al sistema (2), como anula á A, no puede satisfacerse la otra ecuacion sin que $A'b$ sea cero, pues queda $-A'b=0$, y como b no es cero, por ser el coeficiente de y (y si fuera cero no tendria la ecuacion (1) dos incógnitas ni habria necesidad de eliminar), precisamente para que el sistema (2) se satisfaga por $x=\alpha$ é $y=\beta$ A' se anula; luego $A=0$ y $A'=0$, que es el sistema (1); luego son equivalentes.

127. Nota. De estos métodos, los más empleados en la práctica son el de *sustitucion*, cuando la incógnita tiene por coeficiente la unidad, pues entónces su valor es entero; y el de *reduccion* en los demás casos, por la sencillez de la ecuacion resultante.

128. *Resolucion de un sistema determinado.* Sabiendo eliminar una incógnita entre dos ecuaciones, es fácil resolver un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas. En efecto; si el sistema consta de p ecuaciones y p incógnitas, eliminando una entre la primera y todas las demás, se tendrá un nuevo sistema de $(p-1)$ ecuaciones con $(p-1)$ incógnitas, que, juntas con una de las de p, dan un sistema equivalente al propuesto; despues, eliminando otra incógnita entre las $(p-1)$ ecuaciones obtenidas, resultará un sistema de $(p-2)$ ecuacio-

nes con $(p-2)$ incógnitas, que junto con una de las de $(p-1)$ y con una de las de p, da un sistema equivalente al propuesto. Siguiendo así se llegará á formar un *sistema final*, que constará de p ecuaciones, tales, que la primera tiene p incógnitas, la segunda $(p-1)$, la tercera $(p-2)$, y así sucesivamente hasta la $p^{ésima}$, que tendrá $(p-(p-1))$ incógnitas, ó sea 1. Despejando esta incógnita en esta ecuacion, y sustituyendo su valor en la anterior, se hallará el de otra, y de sustitucion en sustitucion el de todas las demás.

La demostracion de la equivalencia del sistema formado con una de las p ecuaciones y las $(p-1)$, resultado de eliminar una incógnita entre ellas, puede servir de ejercicio; empezando por demostrarlo en un sistema algébrico de tres ecuaciones con tres incógnitas, y empleando el método de reduccion, pasando todos los términos al primer miembro.

129. Aplicando este método á las tres ecuaciones $x+2y+6z=47$.... (1.ª); $2x+2y+3z=32$.... (2.ª); $5x-6y+4z=15$.... (3.ª), se tendrá, despues de reducir (eliminando x entre la (1.ª) y las otras dos por sustitucion), el sistema $2y+9z=62$ (4), $8y+13z=110$ (5), que junto con la (1.ª), $x+2y+6z=47$, forma el equivalente al propuesto. Eliminando y por reduccion entre (4) y (5) se tiene $23z=138$.... (6), cuya ecuacion, junta con una de las dos (4) ó (5), y con la (1.ª), dan el sistema $x+2y+6z=47$.... (1), $2y+9z=62$.... (4), $23z=138$.... (6), equivalente al de las propuestas (1), (2) y (3). Para despejar estas incógnitas en este último sistema (1), (4) y (6), se tiene en (6) $z=\frac{138}{23}=6$; sustituyendo este valor de z en (4), será $2y+9.6=62$, de donde $y=4$; sustituyendo en (1) los valores de z é y, se tendrá $x+2.4+6.6=47$, de donde $x=3$.

De análoga manera se resolveria cualquier otro sistema determinado.

130. NOTAS SOBRE LA RESOLUCION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES CON IGUAL NÚMERO DE INCÓGNITAS Y EJERCICIOS.

1.ª Cuando los coeficientes de las incógnitas son números muy grandes, es más ventajoso resolver el sistema por el método de sustitucion.

EJEMPLO.—Sea el sistema

$1{,}2345x+1{,}3579y+8{,}642z-9{,}765744=0$.... (1.ª)
$7{,}447x+5{,}225y-6{,}336z-0{,}611327=0$.... (2.ª)

$1{,}5380x+4{,}4444y-5{,}6789z+1{,}20011=0$.... (3.ª).

Despejando z en la primera, se tiene

$$z=-\frac{1{,}2345x+1{,}3579y-9{,}765744}{8{,}642}\text{.... (4.ª)},$$

cuyo valor, sustituido en la 2.ª y 3.ª, da

$$72{,}17877x+53{,}75810y-67{,}15884=0,$$
$$20{,}30200x+46{,}11988y-45{,}08733=0.$$

Despejando y en la segunda de este sistema, se tiene

$$y=-\frac{20{,}302x-45{,}08733}{46{,}11988}\text{.... (5.ª)},$$

y sustituyendo este valor en la primera, $3328{,}877x-1091{,}397x+2423{,}809-3097{,}358=0$, de donde $x=\frac{673{,}549}{2237{,}480}=0{,}301030$.

Para hallar el valor de y se sustituye el valor de x en (5.ª) y da $y=0{,}28450980$.

Por último, para determinar el de z se sustituyen estos valores de x é y en (4.ª) y se tendrá $z=0{,}9542425$.

2.ª Si en el sistema de ecuaciones propuesto hay muchas incógnitas que no entran en todas las ecuaciones, debe empezarse por eliminar las que entren en menor número de ecuaciones; pues con eso se pasa al sistema siguiente, que no contiene alguna de esas incógnitas, con mucha mayor facilidad, toda vez que ya están dadas algunas ecuaciones de ese sistema, que son las ecuaciones del primitivo en que no entran estas incógnitas.

Ejemplo. Sea el sistema $7x+2z+3u=29$....(1.ª), $4y-2z+t=11$....(2.ª), $5y-3x-2u=8$....(3.ª), $4y-3u+2t=8$....(4.ª), $3z+8u=33$....(5.ª).

Como la x no entra más que en dos ecuaciones (1.ª) y (3.ª), eliminándola entre éstas se pasa desde luégo del sistema propuesto á otro formado con la (1.ª), y el resultado de la eliminacion de x entre (1.ª) y (3.ª) y las 2 restantes que da $35y+6z-5u=143$; $4y-2z+t=11$; $4y-3u=2t+9$; $3z+8u=33$.

Ahora, en el sistema que forman las que siguen á la (1.ª), como la t no entra más que en (3.ª) y (4.ª), se elimina y se tendrá $35y+6z-5u=143$; $4y-4z+3u=13$; $3z+8u=33$.

En este sistema de las tres últimas, eliminando la y entre las dos primeras, resulta el siguiente: $164z-125u=117$; $3z+8u=33$.

En las dos últimas, determinados el valor de z y u, sustituyendo en la anterior se tiene el de y; sustituyendo en la anterior se encuentra el de t; y, por último, sustituyendo en la primera el de x.

El valor de las incógnitas es el siguiente: $x=2$, $y=4$, $z=3$, $t=1$, $u=3$.

3.ª Algunas veces se proponen sistemas tales que, por la simetría con que entran las incógnitas en las ecuaciones, ó por ciertas relaciones especiales que entre ellas se expresan, dan lugar á métodos más expeditos que los explicados; pero ni de las condiciones para que esto suceda, ni del particular método de cada caso, puede darse una regla general, por lo que hay que limitarse á poner algunos ejemplos:

1.º Si el sistema fuese $x+y+z+t=a$.... (1), $y+z+t+v=b$.... (2), $z+t+v+x=c$.... (3), $t+v+x+y=d$.... (4), $v+x+y+z=e$.... (5).

Se ve que si se suman las 5 ecuaciones miembro á miembro, en el primero entra cada incógnita cuatro veces por sumando, y por tanto que si á la suma $(a+b+c+d+e)$ se llama s, la ecuacion suma se podrá escribir $4(x+y+z+t+v)=s$, de donde $x+y+z+t+v=\frac{s}{4}$. Determinada así la suma de las cinco incógnitas, como cada ecuacion da la suma de cuatro de ellas, es muy fácil hallar el valor de la quinta. Así la primera ecuacion da la suma de $(x+y+z+t)$ que es a; luego para la quinta incógnita se tiene $v=\frac{s}{4}-a$; análogamente, para las otras se tendrá $x=\frac{s}{4}-b$; $y=\frac{s}{4}-c$; $z=\frac{s}{4}-d$; $t=\frac{s}{4}-e$.

2.º Sea el sistema $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}$ (1.ª); $mx+ny+pz+qv=k$ (2).

Si se multiplican sucesivamente los términos de la primera relacion $\frac{x}{a}$ por m; los de la 2.ª por n; los de la 3.ª por p, y los de la 4.ª por q, se tendrá

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{mx}{ma}=\frac{ny}{nb}=\frac{pz}{pc}=\frac{qv}{qd},$$

ó sea (Arit.ª núm. 310.)

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{mx+ny+pz+qv}{ma+nb+pc+qd};$$

pero como el numerador de la última relacion es igual á k, se tendrá

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{v}{d}=\frac{k}{ma+nb+pc+qd};$$

de donde

$$x=\frac{ak}{ma+nb+pc+qd},\ y=\frac{bk}{ma+nb+pc+qd};$$

$$z=\frac{ck}{ma+nb+pc+qd},\ v=\frac{dk}{ma+nb+pc+qd}.$$

EJERCICIOS

1.° $\begin{cases} 18\,x-7\,y-5\,z=11 \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2}{3}x+2\,z=114 \\ 3\frac{1}{2}z+2\,y+\frac{3}{4}x=80 \end{cases}$ SOLUCIONES $\begin{cases} x=12 \\ y=25 \\ z=6 \end{cases}$

2.° $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=b \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=c \end{cases}$ SOLUCIONES $\begin{cases} x=\frac{2}{a+b-c} \\ y=\frac{2}{a+c-b} \\ z=\frac{2}{b+c-a} \end{cases}$

3.° $\begin{cases} 3x+6y-2z+9u=6 \\ 4y-5x+5z-6u=5 \\ 2z-3x+8y-3u=3 \\ 9u+10y+3z-4x=9 \end{cases}$ SOLUCIONES $\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=3 \\ u=\frac{1}{3} \end{cases}$

Si á la suma de las 6 incógnitas se llama s, se tendrá

4.° $\begin{cases} x+y+z+t+u=a \\ x+y+z+u+v=b \\ x+y+z+t+v=c \\ x+y+u+t+v=d \\ x+z+u+t+v=e \\ y+z+u+t+v=f \end{cases}$ SOLUCIONES $\begin{cases} x=\frac{s}{5}-f,\ u=\frac{s}{5}-c \\ y=\frac{s}{5}-e,\ t=\frac{s}{5}-b \\ z=\frac{s}{5}-d,\ v=\frac{s}{5}-a \end{cases}$

§ IV. Resolucion de problemas que tienen más de una incógnita

1.° *Buscar dos números tales, que su suma sea* 570 *y que la mitad, más la octava, más la duodécima parte del primero sea igual á la tercera, más la sexta, más la novena del segundo.* Las ecuaciones son, llamando x al primero é y al segundo, las siguientes: $x+y=570$; $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=\frac{y}{3}+\frac{y}{6}+\frac{y}{9}$; de donde $x=264$; $y=306$.

2.° *Dada la suma S de dos números, y su diferencia D, hallar estos números.* Sea x el mayor é y el menor. Las ecuaciones del problema son $x+y=S$; $x-y=D$; de donde $x=\frac{S+d}{2}$; $y=\frac{S-d}{2}$.

Nota.—Como este problema es de uso frecuente para abreviar los cálculos, conviene conservar en la memoria las fórmulas de x é y, cuya traduccion es: dada la suma y la diferencia de dos números, el mayor es igual á la mitad de la suma, más la mitad de la diferencia, y el menor á la mitad de la suma, ménos la mitad de la diferencia.

3.° *Un banquero toma prestados* 32000 *reales á cierto tanto por ciento para prestar* 92000 *á uno mayor y ganar en esta operacion* 3160 *reales; otro ha tomado prestados al mismo tanto que en la primera* 37000 *para prestar* 70000 *reales como ántes y gana esta segunda vez* 1835 *reales.* Se pregunta á qué tanto tomó prestado y á qué tanto prestó.

Planteo. Llamando x el tanto á que tomó é y al que prestó, las ecuaciones ya reducidas son:

$$\left.\begin{aligned}92y&=32x+316\\140y&=74x+367\end{aligned}\right\}\begin{aligned}x&=4\tfrac{1}{2}.\\y&=5.\end{aligned}$$

4.° *Por* 16 *pesetas y* 45 *céntimos se han comprado* 8 *kilos de cierta especie y* 19 *de otra; y por* 23 *pesetas y* 80 *céntimos se compran* 20 *kilos de la primera y* 16 *de la segunda.* ¿Á cómo sale el kilo de cada especie?

Planteo. Llamando x el precio del kilo de la primera é y el de la segunda, se tiene:

$$\left.\begin{aligned}8x+19y&=16,45\\20x+16y&=23,80\end{aligned}\right\}\begin{aligned}x&=0,75.\\y&=0,55.\end{aligned}$$

5.º *Un sugeto tiene dos caballos y dos monturas, que una vale 200 pesetas y la otra 8: si la mejor la pone al primer caballo y la peor al segundo pide por éste 32 pesetas ménos que por el primero; si cambia las monturas pide por el segundo* $3\frac{3}{4}$ *el precio del primero.* Se pregunta cuánto pedia por cada caballo.

Planteo. Llamando x el precio del primero é y el del segundo, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x+200=y+8+32 \\ 3\frac{3}{4}(x+8)=y+200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=120 \\ y=280 \end{array}\right\} \text{pesetas.}$$

6.º *Dos toneles tienen uno más que otro: se pasa del primero al segundo tanto como en él habia; despues del segundo al primero tanto como en él quedó; por último, otra vez del primero al segundo tanto como en éste habia quedado.* Despues de estas tres operaciones hay en cada tonel 16 hectólitros de vino y se pregunta cuántos hectólitros tenía el primero y cuántos el segundo ántes de hacer las operaciones.

Planteo. Llamando x é y á los hectólitros que contenian respectivamente los dos toneles, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-5y=16 \\ 6y-2x=16 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x=22 \\ y=10 \end{array}\right\} \text{hectólitros.}$$

7.º *Tres números son tales, que si del primero se restan 4 unidades y se añaden al segundo, la relacion del resto á la suma es* $\frac{1}{2}$; *y si del segundo se quitan 10 y se añaden al tercero, la relacion del resto á la suma es como 0,3. Por último, si al primero se quitan 5 y se añaden al tercero, el resto y la suma están en la relacion de* $\frac{3}{11}$. ¿Cuáles son estos números?

Planteo. Llamando x al primero, y al segundo y z al tercero, se tiene:

$$\frac{x-4}{y+4}=\frac{1}{2},\ \frac{y-10}{z+10}=0{,}3,\ \frac{x-5}{z+5}=\frac{3}{11} \left\{\begin{array}{l} x=20. \\ y=28. \\ z=50. \end{array}\right.$$

8.º *Un estanque tiene tres caños: el primero y segundo, corriendo á la vez, lo llenan en 70 minutos; el primero y tercero en 84, y el segundo y tercero en 140.* Se pregunta: primero, cuánto tardaria cada caño en llenar el estanque corriendo solo; segundo, cuánto tardarian los tres juntos.

PLANTEO. Llamando x, y, z el tiempo necesario para que cada caño llenara solo el estanque, se tiene por ecuacion:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{84},\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{140}:\ \begin{cases} x=105'. \\ y=210'. \\ z=420'. \end{cases}$$

§ V. SISTEMAS INDETERMINADO Y MÁS QUE DETERMINADO

131. *Se llama sistema indeterminado aquel que consta de mayor número de incógnitas que de ecuaciones.*

Considerando primero el caso de *una ecuacion con dos incógnitas*, es evidente que si se despeja una aparecerá la otra en el segundo miembro, y si este valor se sustituye en la ecuacion propuesta se convierte en una *identidad*, que se satisface por sí misma independientemente de los valores que tomen las dos incógnitas. Así, por ejemplo, si se tiene $3x+4y=43$ y se despeja una de ellas, se tendrá $y=\frac{43-3x}{4}$: sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, dará $3x+4\frac{43-3x}{4}=43$, ó sea quitado el denominador $4.3x+4.43-4.3x=4.43$, lo cual es una identidad que se satisface por cualquier valor de x. Si se hace $x=5$, la fórmula del valor de y dará $y=\frac{43-15}{4}=$ 7: si se diese á x otro valor, se tendria otro para y; de este modo se pueden obtener todos los que se quieran.

Si en lugar de ser una sola ecuacion con dos ó más incógnitas se tiene un sistema de m ecuaciones con $m+n$ incógnitas, considerando n de ellas como conocidas, los valores de las otras m se podrán deducir de las m ecuaciones propuestas, y estarán en funcion de las otras n incógnitas. Si estos valores se sustituyen en las m ecuaciones, las reducirán á *identidades;* es decir, que se satisfarán por cualesquiera valores que se atribuyan á las incógnitas y sólo por las reducciones y el juego de los signos. Por tanto, á todos los valores *ar-*

bitrarios dados á las n primeras incógnitas corresponderán valores para las otras m que satisfarán las ecuaciones; luego el sistema es indeterminado.

EJEMPLO. Sean las ecuaciones $3x+6y-4z+2v-2t=1$.... (1.ª) $5x+9y-z-3v+5t=33$....(2.ª) $x-5y+4z+5v-t=18$.... (3.ª) Considerando á x é y como conocidas, las tres ecuaciones darán para las otras tres incógnitas t, v, z, los siguientes valores:
$t=\frac{169-25x-32y}{16}$; $v=\frac{811-139x-112y}{112}$; $z=\frac{112y-51x-107}{56}$

(Estos valores se hallan: el de t, eliminando z por reduccion entre la (1.ª) y (3.ª) y entre la (2.ª) y (3.ª), y resultan las dos ecuaciones $4x+y+7v-3t=19$.... (4.ª); $21x+3y-7v+19t=150$.... (5.ª). Despues se elimina v entre la (4.ª) y (5.ª), y resulta $25x+32y+16t=169$; de donde, despejando á t, se tiene el valor puesto anteriormente. Para hallar el de v se sustituye este valor de t en la (4.ª), y para el de z se sustituye el de t y v en la (3.ª).

Si estos valores de t, v, z, que son funciones de x é y, se sustituyen en las tres ecuaciones propuestas, la reducen á identidades. Si á x é y se dan, por ejemplo, valores arbitrarios, $x=1$ é $y=2$, las fórmulas dan $z=3$; $v=4$; $t=5$.

NOTA. No en todos los casos, como para más sencillez se ha procurado en los ejemplos propuestos, dándole valores enteros y positivos á las incógnitas arbitrarias, resultan tambien enteros y positivos los de las otras. Pero si se pusiese por condicion, entónces podria suceder que el problema fuese imposible. El análisis de la cuestion y la determinacion de la serie de valores de las incógnitas y su enlace es objeto de una teoría especial que se llama *análisis indeterminado*, que sale de los límites de este resúmen.

132. SISTEMA MÁS QUE DETERMINADO. *Es aquel en que hay más ecuaciones distintas que incógnitas.* Si se tienen $m+n$ ecuaciones y sólo m incógnitas, como para determinar m incógnitas bastan m ecuaciones, las otras n excedentes han de satisfacerse por los valores deducidos en las m primeras, para que

el sistema sea *compatible;* por esto se llaman ECUACIONES DE CONDICION. Ahora bien; estas ecuaciones de condicion son explícitas si el sistema es numérico; como, por ejemplo, si se tiene $x+y=36$.... (1.ª); $x-y=18$ (2.ª); $xy=243$.... (3.ª); $\frac{x}{y}=3$.... (4.ª); pues las dos primeras dan (117-2.º), $x=27$ é $y=9$, cuyos valores, puestos en (3.ª) y (4.ª), las satisfacen, y explícitamente se ve que el sistema es compatible.

Pero si el sistema propuesto fuese algébrico, es decir, que las ecuaciones tuviesen coeficientes indeterminados, los valores deducidos para las incógnitas serán funciones de los coeficientes; y, sustituidos en las ecuaciones excedentes del sistema, resultarian várias ecuaciones entre los datos, que son las de condicion. Si se propusiera la cuestion en tal sistema de hallar qué valores de estos coeficientes indeterminados lo hacian compatible, entónces pueden suceder tres casos: Primero; si el número de coeficientes es igual al de ecuaciones de condicion, se tendrán las necesarias y suficientes para determinarlo. Segundo; si es mayor, quedarán algunos arbitrarios. Tercero; si es menor, á su vez se forma un sistema más que determinado y el propuesto en general es incompatible.

EJEMPLO DEL PRIMER CASO. Sea el sistema $2x+3y=a$.... (1.ª); $x-y=a-b$.... (2.ª); $5x+5y=a+b+2$.... (3.ª); $3x+y=b-1$.... (4.ª). Las dos primeras dan $x=\frac{4a-3b}{5}$, $y=\frac{2b-a}{5}$. Sustituidos en (3) y (4) dan las ecuaciones de condicion entre los datos $a-b=1$.... (5); $11a-12b=5$... (6). Resolviéndolas, dan $a=7$: $b=6$; cuyos valores, determinados para los coeficientes indeterminados a y b, son los únicos que hacen compatible el sistema propuesto.

EJEMPLO DEL SEGUNDO. Sea el sistema $x+y=s$.... (1.ª); $x-y=d$.... (2.ª)²; $xy=p$.... (3.ª); $\frac{x}{y}=c$.... (4.ª). Las dos primeras dan $x=\frac{s+d}{2}$; $y=\frac{s-d}{2}$. Sustituyendo en (3) y (4), se tiene

$s^2+d^2=4p....$ (5); $s+d=c$ $(s-d)$. Como no hay más que dos ecuaciones, y los coeficientes indeterminados son cuatro, s, d, p, c, eliminando s entre (5) y (6) se tiene $p(c-1),-cd^2=0$; despejando p y dando á c y d los valores arbitrarios $c=3$, $d=18$, se tiene $p=243$; de donde $s=36$. Estos valores de los coeficientes, á saber, dos arbitrarios y otros dos funciones de éstos, hacen compatible el sistema, y lo mismo otros muchos que pudieran deducirse, toda vez que hay dos arbitrarios.

Los ejemplos del tercer caso son fáciles de proponer.

§ VI. Operaciones con las desigualdades consideradas aislada y simultáneamente

133. *Se dice que un número* a *es mayor que otro* b, *cuando la diferencia* a—b *es positiva.*

Si un número es mayor que otro, se establece con los signos $>$, $<$, y se llama MIEMBROS *lo que está á la derecha é izquierda del signo;* siendo el primero el que está á la *izquierda* y segundo el que está á la *derecha.*

134. *Se dice que una trasformacion no altera una desigualdad cuando en la trasformada permanecen los dos miembros en el mismo sentido que en la primera.* Así, $8>3$, trasformada en $8+4>3+4$, se dice que no se ha alterado.

1.ª PROPIEDAD. *Una desigualdad no altera de sentido por que se le sume ó reste á los dos miembros un mismo número;* de modo, que de $a>b$, se deduce $a\pm m>b\pm m$.

En efecto; si $a>b$, $a-b>0$, ó lo que es lo mismo, $a-b\pm m\mp m>0$, ó sea $a\pm m-(b\pm m)>0$, para lo cual se necesita que el minuendo $a\pm m$ sea mayor que el sustraendo $b\pm m$; luego $a\pm m>b\pm m$.

De aquí se deduce que *un término puede pasar de un miembro á otro de una desigualdad sin alterarla, con solo cambiarle de signo.* Sea $a+c>b-d$; si se suma á ámbos miembros $+d$, será $a+c+d>b-d+d$ ó $a+c+d>b$.

2.ª PROPIEDAD. *Se pueden multiplicar ó dividir los dos miembros de una desigualdad por un mismo número positivo, sin que la desigualdad se altere; pero si el número por el cual se multiplica ó divide es negativo, es necesario cambiar el sentido de la desigualdad.*

En efecto; 1.° De $a>b$ se deduce $a-b>0$. Si $(a-b)$ se multiplica por un número positivo, su producto será positivo y se tendrá $(a-b)m>0$, ó sea $am-bm>0$, de donde $am>bm$.

2.° Si $a>b$ ó sea $a-b>0$, y se multiplica por un número negativo m, se tiene $(a-b)m<0$ ó sea $am-bm<0$, pues el producto es negativo. La última desigualdad exige que $am<bm$.

3.ª PROPIEDAD. *Si los dos miembros de una desigualdad son positivos, se pueden elevar á una misma potencia* (entera y positiva) *sin que la desigualdad se altere.*

En efecto; $a>b$, es evidente que el producto de m factores a será mayor que el de m factores b, luego $a^m>b^m$.

Si no son positivos los dos miembros, hay que distinguir varios casos, y son:

1.° *Cualquiera que sea el signo de los miembros de una desigualdad se pueden elevar á una misma potencia de grado* IMPAR *sin que la desigualdad altere de sentido.*

En efecto; como la potencia de grado impar conserva el signo del número que se eleva, el sentido de la desigualdad tambien se conserva. Así, de $5>-8$ se tiene $5.^3>(-8)^3$ y de $-5>-8$ se tiene $(-5)^3>(-8)^3$.

2.° *Si ámbos miembros son negativos y se elevan á una potencia par, la desigualdad cambia de sentido.*

3.° *Si uno solo de los miembros es negativo y se elevan á potencia de grado* PAR, *nada se puede decir del sentido del resultado.*

4.ª PROPIEDAD. *Si de los dos miembros de una desigualdad* (cualquiera que sean sus signos) *se extrae una raiz de grado impar, la desigualdad conserva su sentido.*

En efecto; las raíces de grado impar conservan el signo de los números á que se les extrae; pero *si la raíz es de grado par* se necesita, para que sean reales, que ámbos miembros sean positivos, y entónces, como cada raíz (si es cuadrada) tiene dos valores iguales y de siguos contrarios, *la desigualdad* conservará ó cambiará de sentido, segun se consideren los valores positivos ó negativos de las raíces.

135. DE LAS DESIGUALDADES SIMULTÁNEAS. *Si se suman miembro á miembro vários desigualdades que se verifican en un mismo sentido, los resultados conservan el mismo sentido de las desigualdades.*

En efecto; si $a>b$ y $c>d$, se tiene $a-b>0$, $c-d>0$; siendo estas diferencias positivas, si se suman se tendrá: $a-b+c-d>0$; de donde $a+c>b+d$.

Si las desigualdades se verifican en sentido contrario no se puede dar regla.

136. *Si se restan miembro á miembro dos desigualdades que se verifican en sentidos contrarios la nueva desigualdad que resulta tiene el sentido de la primera.*

En efecto; sean las desigualdades $a>b$, $c<d$; estas desigualdades equivalen á estas otras, $a>b$, $d>c$, y por lo tanto dan $a+d>b+c$, ó sea $a-c>b-d$.

137. Si las desigualdades se verifican en el mismo sentido no se puede dar regla.

138. *Si se multiplican ordenadamente dos desigualdades en el mismo sentido, y de términos positivos, la desigualdad resultante tiene el mismo sentido que las propuestas.* Pues si $a>b$, $c>d$, siendo b y c positivos, se tiene, multiplicando la primera por c y la segunda por b, $ac>bc$, $bc>bd$; de donde $ac>bd$.

139. *Si los cuatro términos fuesen negativos la desigualdad resultante tendria sentido contrario á las propuestas.* Puesto que si a y b son negativos, multiplicando, como en el caso anterior, resulta $ac<bc$, $bc<bd$; de donde $ac<bd$.

140. *Si las desigualdades no tienen todos sus términos del mismo signo, ó se verifican en sentidos contrarios, no se puede dar regla general.*

141. *Si se dividen miembro á miembro dos desigualdades en sentidos contrarios, y de términos positivos, la desigualdad resultante conserva el sentido de la que hace de dividendo.*

En efecto; si $a>b$, $c<d$, ó, lo que es lo mismo, $a>b$ y $d>c$, se tiene $ad>bc$. Dividiendo los dos miembros por cd, y suprimiendo factores comunes, resulta $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

142. *Si los cuatro términos fuesen negativos, la nueva desigualdad tendria el sentido de la que hace de divisor.*

En efecto; de la multiplicacion que se hizo en el caso anterior resultaria $ad<bc$.

Dividiendo por cd, y suprimiendo factores comunes, $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$; fuera de estos dos casos no se puede dar regla general.

CAPÍTULO IV

Discusion de las soluciones.

143. *Discutir las soluciones de una cuestion es interpretar el resultado analítico segun las condiciones del problema.*

Las ecuaciones de primer grado, cuando se va á despejar su incógnita, siempre se pueden poner en la forma $Ax=B$, en la que A y B son funciones de los datos numéricos ó literales; de donde $x=\frac{B}{A}$. Pueden hacerse várias hipótesis.

144. 1.ª Si A y B son del mismo signo, el valor de x es *positivo*, y será *entero ó fraccionario*, segun que A, sea ó nó múltiplo de B. En estos casos, *el valor de la incógnita responde generalmente á las condiciones de la cuestion propuesta;* es decir, que es su solucion. Se dice generalmente, porque pudieran proponerse cuestiones tales en las que un valor positivo entero ó fraccionario no podria ser la solucion de ella.

EJEMPLO DE UNA CUESTION EN QUE LA SOLUCION ENTERA Y POSITIVA Ó FRACCIONARIA INDICA IMPOSIBILIDAD. *Buscar un número de dos cifras tal, que si del cuádruplo de la cifra de sus unidades se resta el triplo de la de sus decenas dé de resto* 1, *y que si de dicho número se resta el mismo invertido dé de resto* 36.

Llamando x las decenas é y las unidades se tendrá por primera ecuacion $4y-3x=1$.

Por otra parte, evidentemente el número invertido es $10y+x$, y restándolo del mismo número, que es $10x+y$, debe dar 36; luego la segunda ecuacion es, $10x+y-10y-x=36$.

Resueltas, dan $x=17y=13$. Las soluciones 13 y 17, enteras y positivas, satisfacen evidentemente las ecuaciones, pero nó la cuestion, porque x é y no pueden ser mayores que 10, toda vez que representan números dígitos. Luego el problema es imposible en el sistema decimal.

Por ejemplo: *se trata de repartir cierto dinero entre unos pobres, y para dar á cada uno* 10 *reales faltan* 5 *reales, y si les dan* 8 *sobran* 6 *reales.* ¿Cuántos son los pobres?

Ecuacion.—Sea x el número de pobres, y es evidente que se tendrá por expresion analítica del problema $10x—5=8x+6$; de donde $x=5\frac{1}{2}$; cuyo resultado es absurdo.

145. *De modo, que cuando se obtenga como solucion de un problema un número fraccionario, se debe examinar si las magnitudes sobre que versa la cuestion son susceptibles de admitir este valor.*

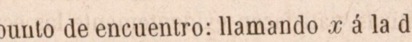
146. 2.ª Si A y B tienen signos contrarios, el valor de x *es negativo*. Para interpretar este valor hay que distinguir:

1.º *Si la naturaleza de la incógnita es tal que no admite modos de existencia contrarios el valor negativo indica imposibilidad en el problema.*

2.º *Si admitiendo modos de existencia contrarios el sentido de ella está marcado y se ha señalado con el signo* $+$, *la solucion negativa indica absurdo.* En este caso, cambiando en la ecuacion x en $—x$, la solucion será positiva y corresponderá á un problema análogo con las convenientes (6) variaciones en su enunciado.

3.º *Si admitiendo modos de existencia contrarios no está fijado el de la incógnita en el enunciado, la solucion negativa indica generalmente que se debe contar ésta en un sentido directamente opuesto al que se le ha asignado en el planteo de la cuestion.*

Ejemplo. *Dos móviles salen al mismo tiempo de los puntos* A *y* B *con las velocidades* v *y* v'. *Se pregunta á qué distancia del punto* A *se encontrarán, sabiendo además que entre* A *y* B *hay* d *metros y que los móviles marchan en el sentido* ABX.



Sea X el punto de encuentro: llamando x á la distancia AX, el primer móvil ha tardado en recorrerla $\frac{x}{v}$; el segundo móvil ha andado hasta el punto de encuentro BX, ó sea $x—d$, y ha tardado $\frac{x-d}{v'}$ tiempo; y como salieron á la vez, y X es el punto de encuentro, han estado andando el mismo tiempo, ó sea $\frac{x}{v}=\frac{x-d}{v'}$; de donde $x=\frac{vd}{v-v'}$.

Si $v<v'$ el resultado es negativo; pero como el sentido de la marcha de los móviles está marcado, no se puede traducir que el punto de encuentro esté á la izquierda de A y el resultado negativo indica imposibilidad en la cuestion.

Si en el problema se cambia x en $-x$, la ecuacion sería $\frac{-x}{v}=\frac{-x-d}{v'}$; de donde $x=\frac{vd}{v'-v}$, y en la hipótesis de $v<v'$ este resultado es positivo; pero ya la ecuacion de que proviene no traduce el problema tal como se propuso, sino que debe hacerse en su enunciado la variacion correspondiente á haber puesto $-x$ por x, la cual consiste en suponer el punto de encuentro X á la izquierda de A; es decir, que los móviles marchan en el sentido BA.

Si en el enunciado de la cuestion no se hubiese fijado el sentido de su incógnita, estableciendo que marchan en cierto sentido, sino que de un modo general se propusiera buscar *en qué punto de la línea* AB *se encontrarian dos móviles que saliesen al mismo tiempo de dichos puntos con velocidades distintas y la recorriesen en todos sentidos*, entónces el resultado negativo manifestaria que se ha supuesto mal que el punto de encuentro va á la derecha de A y que se debe establecer á la izquierda.

147. Si por las reducciones de los datos, funciones de los cuales son A y B, llegase á ser $A=0$ sin serlo B, se tendria $x=\frac{B}{0}$, cuya forma se ha llamado *infinito*, que se escribe ∞. El problema que tiene tal solucion es *absurdo*. En efecto; $0\times x=B$ es una cuestion que no puede satisfacerse por ningun valor finito de x, es decir, que no es posible en *magnitud;* otra cosa sería respecto á posicion. La razon de considerar á $\frac{B}{0}$

como infinito se funda en que un quebrado puede ser mayor que cualquier cantidad dada, con tal de que su denominador pueda disminuir suficientemente por division. En efecto; se sabe que un quebrado se multiplica por la division de su denominador por un entero y puede llegar á ser mayor que cualquier cantidad dada, con tal de que su denominador sea cada vez más pequeño, y cuando llega á cero el quebrado se considera mayor que cualquier cantidad asignable. (Arit.ª 200.)

Estas soluciones, que en general indican absurdo, pueden tener su traduccion en un problema: así en el de los móviles (136) si se supone que $v=v'$, el resultado es infinito; es decir, que los móviles no se encuentran, lo cual está conforme con las condiciones de la cuestion, porque si andan con igual velocidad en el mismo sentido, nunca pueden encontrarse.

148. 4.º Si B es cero sin serlo A se tiene $x=\frac{0}{A}$, cuyo valor es cero, y el problema es absurdo. En efecto; $Ax=0$ no puede ser satisfecha por otro valor para x que el cero. Es decir, que ninguna cantidad puede satisfacer la cuestion.

Las razones que llevan á considerar á $\frac{0}{A}$ como igual á cero son, que dividiendo por un entero el numerador de un quebrado, el quebrado disminuye y puede ser menor que cualquier cantidad dada; por lo cual, cuando *el numerador de un quebrado es* lo menor posible, *el quebrado es* tambien lo menor posible (Arit.ª 199) ó sea cero.

Tambien puede tener este resultado su traduccion en un problema: así, en el de los móviles, si el numerador es cero sin serlo v ni v', tiene que serlo d, y el valor es $\frac{0}{v-v'}$, que es 0: esto manifiesta que no hay distancia al punto de encuentro conforme con las condiciones físicas, porque si $d=0$, los móviles parten del mismo punto con velocidades distintas y sólo en el punto de partida se encuentran.

149. Si $A=0$ y $B=0$, *el valor de x es en general indetermi-*

nado; es decir, que cualquier número puede resolver la cuestion. En efecto; la ecuacion se convierte en $0 \times x = 0$, que puede ser satisfecha por cualquier número. Por eso el problema es indeterminado. Esto ocurre en todas las identidades.

Se dice en general, porque si por un valor dado á algunas de las cantidades que entren en la composicion de A y B ámbas se reducen á 0, pudiera provenir de que tuviesen un factor comun, en cuyo caso habria que suprimirlo en el quebrado $\frac{B}{A}$ ántes de dar ese valor, y dándoselo despues, el que tomase sería el verdadero. Ejemplo: sea $x = \frac{(a-1)}{3(a-1)(a+1)}$; haciendo $a=1$, se convierte en $\frac{0}{0}$; pero como manifiestamente sus dos términos tienen el factor comun $(a-1)$, suprimiéndolo será $x = \frac{1}{3(a+1)}$, y haciendo $a=1$ se tiene $x = \frac{1}{6}$.

Por último; en este caso tambien tiene su traduccion el resultado $\frac{0}{0}$, ó sea indeterminado, porque si en el problema que se viene discutiendo se supone $d=0$ y $v=v'$ el valor de x es $\frac{0}{0}$; pero suponer $d=0$ es lo mismo que decir que los móviles parten del mismo punto; y si $v=v'$ tienen la misma velocidad, por tanto siempre irán juntos; luego todos los puntos del camino son puntos de encuentro y cualquier distancia satisface la cuestion.

CAPÍTULO V

Ecuaciones de segundo grado con una sola incógnita.—Completas.—Incompletas.—Ecuaciones bicuadradas.

150. *Ecuaciones de segundo grado con una incógnita son*

aquellas en que la incógnita está elevada á la segunda potencia.

151. Las ecuaciones de segundo grado despues de quitar los denominadores, efectuar las operaciones indicadas, trasponer todos los términos al primer miembro y reducir, pueden ser *completas* ó *incompletas*.

152. *Se llama completa si tiene términos con la incógnita elevada al cuadrado, términos en que está elevada á la primera potencia y término independiente.* Entónces toma la forma de $ax^2+bx+c=0$ (1).

153. *Se llama incompleta si le falta el término conocido ó el de la primera potencia.* Las formas incompletas son, por tanto, $ax^2+bx=0$ (1.ª) y $ax^2+c=0$.... (2.ª).

154. La resolucion de estas formas no exige nuevos procedimientos á más de los dados. En efecto; la (1.ª), sacando x de factor comun, dirá $x(ax+b)=0$, ecuacion que evidentemente queda satisfecha haciendo $x=0$, ó $ax+b=0$; de donde $x=-\frac{b}{a}$.

155. En la (2.ª), pasando c al otro término y dividiendo por a se tiene $x^2=-\frac{c}{a}$, de donde extrayendo la raíz cuadrada de ámbos miembros, $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

156. Se ve, pues, que *las ecuaciones incompletas de segundo grado tienen dos raíces. Las de la primera forma siempre son reales y las de la segunda son iguales y de signo contrario, pudiendo ser imaginarias si* $-\frac{c}{a}$ es negativo.

157. La resolucion de la completa $ax^2+bx+c=0$ puede tener una simplificacion. Si b y c son múltiplos de a se parte por a toda la ecuacion, y haciendo, para más sencillez, $\frac{b}{a}=m$ y $\frac{c}{a}=n$, se tendrá, pasando n al otro miembro, la nueva forma $x^2+mx=-n$. Considerando á x^2+mx como los primeros términos del cuadrado de un binomio, mx es el duplo del pri-

mero por segundo, y como el primero es x, el duplo del segundo es m; luego este segundo es la mitad de m, ó sea $\frac{m}{2}$; agregando su cuadrado $\frac{m^2}{4}$ á los dos miembros, se tiene $x^2+mx+\frac{m^2}{4}=\frac{m^2}{4}-n$, y como el primero es el cuadrado del binomio $\left(x+\frac{m}{2}\right)$, se tendrá $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{m^2}{4}-n$. Extrayendo la raíz cuadrada y despejando x, será $x=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$. Cuya fórmula traducida dice que la incógnita de una ecuacion de segundo grado, que tiene por coeficiente de su primer término la unidad, *es igual á la mitad del coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, más ó ménos la raíz cuadrada del cuadrado de dicha mitad, ménos el tercer término.*

EJEMPLOS. 1.º $4x^2-12x+8=0$; dividiendo por 4 será $x^2-3x+2=0$; de donde $x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-2}$.

2.º $5x^2+7x-4=0$; dividiendo por 5 será $x^2+\frac{7}{5}x-\frac{4}{5}=0$: de donde $x=-\frac{7}{10}\pm\sqrt{\frac{49}{100}+\frac{4}{5}}$.

158. En general, si b y c no son múltiplos de a la division por a hace fraccionarios á los coeficientes, por lo que se da otra fórmula más general para la resolucion de la ecuacion $ax^2+bx+c=0$ (A), y es que si se pasa c al segundo miembro y se multiplica toda la ecuacion por $4a$ (con objeto de que el primer término sea al cuadrado de una cantidad racional) dirá $4a^2x^2+4abx=-4ac$. Si se observa que $4a^2x^2+4abx$ son los dos primeros términos del cuadrado del binomio $2ax+b$, pues $(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$, se tiene que si á los dos miembros de la ecuacion se agrega b^2, el primero será $4a^2x^2+4abx+b^2$ y el segundo b^2-4ac, y como el primero es lo mismo que el binomio ya dicho elevado al cuadrado, se tiene,

en fin, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$; de donde, extrayendo la raíz cuadrada de ámbos miembros, y despejando á x, se tiene
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, fórmula más general que la anterior, y que traducida dice que la incógnita de una ecuacion de segundo grado completa es igual *al coeficiente del segundo término tomado con signo contrario, más ó ménos la raíz cuadrada del cuadrado de dicho coeficiente, ménos el cuádruplo del producto de los coeficientes extremos, dividido todo por el duplo del coeficiente del primero.*

159. La primer fórmula, por tanto, se usará cuando el coeficiente del segundo término y el tercero sean divisibles por el del primero, y la segunda en los demás casos.

160. *Las raíces de una ecuacion de segundo grado son dos evidentemente, segun se tome el signo más ó ménos que precede al radical.*

Si se llaman x' y x'' estas raíces, una será $x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.... (2) y la otra $x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.... (3).

161. Discusion de las raíces. *Primer caso.* Si $b^2-4ac>0$, las raíces *son reales*, y como el valor del radical hay que sumarlo en una y restarlo en otra de $-b$, estas raíces *serán desiguales.*

Para averiguar su signo, desde luégo se puede suponer que a es positivo, pues si no lo fuese en algun ejemplo bastaria cambiar de signo toda la ecuacion. Suponiendo, pues, que $a>0$, claro es que el signo de los valores de x' y x'' depende del numerador. Ahora bien; si $c<0$, $-4ac$ es positivo, y el valor absoluto $\sqrt{b^2-4ac}>b$; luego si de $-b$ se suma y resta una cantidad mayor que b en valor absoluto dará un resultado *positivo* y otro *negativo.*

Si $c>0$, es decir, si el *tercer término* es *positivo*, $\sqrt{b^2-4ac}<b$, y por tanto el signo de $-b$ es el que tendrán las dos raíces, pues ya se le sume ó reste el radical, como su valor absoluto es menor que $-b$, predomina el signo de éste. Si, pues,

b es *positivo*, $-b$ será *negativo*, y las dos raíces son *negativas*; y si b es *negativo*, $-b$ es *positivo*, y las dos raíces son *positivas*.

162. *Segundo caso*. Si $b^2-4ac=0$, la fórmula (2) se convierte en $x=\frac{-b}{2a}$. Parece que en este caso no hay más que una raíz; pero si se observa que la ecuacion (1), sustituyendo en ella $b^2-4ac=0$, de donde $c=\frac{b}{4a}$ se convierte en $ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0$, y que esto es lo mismo que el cuadrado del binomio $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$, se tiene $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2=0$, ó sea $\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right).\left(x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)=0$, cuya ecuacion queda satisfecha por igualar cada paréntesis á cero, y dan los dos $x\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}=0$, de donde despejando $x=\frac{-b}{2a}$; por esto se dice que tiene dos raíces ó valores para x, *ámbos iguales*.

163. Se ha visto que la condicion $b^2-4ac=0$ trasforma la ecuacion en un cuadrado perfecto, y por eso se dice que la condicion necesaria y suficiente para que *un trimomio* de segundo *grado sea un cuadrado perfecto es que el cuadrado del coeficiente del segundo término sea igual al cuádruplo del producto de los coeficientes de los extremos*.

164. Por último; si $b^2-4ac<0$, la cantidad sub-radical es negativa, y siendo par el grado de éste, la expresion de las raíces es *imaginaria*. Estas raíces afectan una forma particular, pues constan de una parte *real*, que es $\frac{-b}{2a}$, y una *imaginaria*, que es $\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; si á la primera se llama α, la segunda puede tomar la forma de $\frac{\sqrt{4ac-b^2}\sqrt{-1}}{2a}$; la parte $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ es real, y llamando β su valor, será $\beta\sqrt{-1}$; luego la fórmula de las raíces imaginarias es $x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, en la que α y β son reales.

165. Veamos qué particularidad encierra la ecuacion (2)

para que haya dado los valores imaginarios en la hipótesis $b^2-4ac<0$, ó sea $4ac$ positivo y mayor que b^2.

Si es la ecuacion (A) se multiplica por $4a$ y despues se le añade y resta b^2; se tendrá la forma

$$4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0.$$

Observando que los tres primeros términos forman el cuadrado del binomio $2ax+b$, se podrá escribir

$$(2ax+b)^2+(4ac-b^2)=0.$$

Ahora bien; $(2ax+b)^2$ por ser un cuadrado es esencialmente *positivo*; el otro sumando, $4ac-b^2$, es tambien *positivo*, puesto que se parte de la hipótesis de ser $4ac>b^2$. Y como la suma de dos cantidades *positivas* nunca puede ser igual á cero, de ahí es que x no puede tomar ningun valor *real*, es decir, ningun valor positivo ni negativo que satisfaga la ecuacion.

166. *La suma de las raices de una ecuacion de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término dividido por el del primero y tomado con signo contrario.*

En efecto; si se suman las fórmulas (2) y (3) se tiene $x'+x''=-\frac{b}{a}$.

167. *El producto de las raíces es igual al tercer término dividido por el coeficiente del primero y tomado con su signo.*

En efecto; si se multiplican miembro á miembro los valores (2) y (3) se tiene $x'\times x''=\frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$, y observando que en el numerador hay dos factores, que uno es la suma de $-b$ y el radical $\sqrt{b^2-4ac}$, y el otro la diferencia, y que su producto es (42) la diferencia de los cuadrados, se tiene $x'\times x''=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$, ó sea $x'.x''=\frac{+4ac}{4a}=\frac{c}{a}$.

168. *Esto permite resolver inmediatamente el siguiente problema. Hallar dos números cuya suma sea* S *y su producto* P. Es evidente que tales números son las raíces de una ecuacion de segundo grado en la que el coeficiente del primer tér-

mino es la unidad, el del segundo es $-S$ y el tercero es $+P$; la ecuacion será $x^2-Sx+P=0$.

169. *Las ecuaciones de segundo grado pueden descomponerse en dos factores de primero.*

En efecto; sea $ax^2+bx+c=0$ y x' y x'' sus raíces; si se divide por a toda la ecuacion será $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$; si se observa que $x'+x''=-\frac{b}{a}$ y que $x'.x''=\frac{c}{a}$, sustituyendo será $x^2-(x'+x'')x+x'x''=0$, efectuando será $x^2-x'x-x''x+x'x''=0$; sacando en los dos primeros x de factor comun y $-x''$ en los dos segundos términos se tiene $x(x-x')-x''(x-x')=0$; de donde, sacando $(x-x')$ de factor comun, se tiene, en fin, $(x-x')(x-x'')=0$.

170. Luego un trinomio de segundo grado se puede trasformar en un producto de dos factores de primero, que se obtienen *haciendo que el coeficiente del primer término sea la unidad, é igualando el trinomio á cero, resolviendo la ecuacion y restando cada raíz de la incógnita x.*

Esto permite resolver el siguiente problema. *Formar una ecuacion de segundo grado cuyas raíces sean* α y β. Se tendrá $(x-\alpha)(x-\beta)=0$, ó sea $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$.

171. Ecuaciones bicuadradas. *Se llaman ecuaciones bicuadradas las que sólo tienen términos con la incógnita elevada á la cuarta y segunda potencias y términos conocidos.* Por ejemplo: $ax^4+bx^2+c=0 \ldots (1)$.

172. Las ecuaciones bicuadradas pueden resolverse por ecuaciones de segundo grado, pues si se hace $x^2=y \ldots (2)$ se tendrá $x^4=y^2$, y sustituyendo en la propuesta se tendrá $ay^2+by+c=0 \ldots (3)$. Resolviendo esta ecuacion, haciendo $\frac{b}{a}=m$ y $\frac{c}{a}=n$, se sabe que $y=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}$; sustituyendo este valor en (2) y resolviendo la ecuacion resultante se tendrá, por fin, $y=\pm\sqrt{-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}-n}}$.

173. Como se ve, las raíces son cuatro, iguales dos á dos

y de signo contrario. Para ser reales se necesita evidentemente que las de la ecuacion (3) sean tambien *reales* y *positivas*.

174. Aquí se ofrece un doble radical, que puede en algunos casos trasformarse en radicales sencillos, lo cual es ventajoso. Para averiguar qué valor han de tener dos números, A y B, para tal trasformacion, se establece en general que

$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, elevando al cuadrado se tiene

$A+\sqrt{B}=x+2\sqrt{xy}+y$; para que esto sea una igualdad, la parte irracional y la racional deben ser iguales; luego $A=x+y$.... (1), $\sqrt{B}=2\sqrt{xy}$. De esta última, elevando al cuadrado y partiendo despues por 4 resulta $\frac{B}{4}=xy$.... (2). Las ecuaciones (1) y (2) dicen que x é y son las raíces de una ecuacion de segundo grado, cuyo segundo término es $-A$ y el tercero $\frac{B}{4}$ (166 y 167); luego éste será $Z^2-AZ+\frac{B}{4}=0$; de donde

$$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}, \text{ é } y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}; \text{ por consiguiente,}$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Si A^2-B es un *cuadrado perfecto*, la trasformacion ofrece utilidad, pues llamándole C^2, y su raíz, por tanto, C, se tiene

$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}+\sqrt{\frac{A-C}{2}}$. Es decir, que se ha trasformado el doble radical *en suma ó resta de dos radicales sencillos*. Por tanto, al calcular las raíces de una ecuacion bicuadrada debe tenerse presente *si el cuadrado de la primera sub-radical, ménos la segunda, es ó nó cuadrado perfecto* para aplicarle la trasformacion.

EJERCICIOS. *Resolver las ecuaciones siguientes:*

1.ª $9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0.$

2.ª $\dfrac{18x^2}{5}+\dfrac{18078x}{65}+4728=0.$

3.ª $80x+\dfrac{3x^2}{4}+\dfrac{21x-27780}{12}=1859\dfrac{1}{2}-3x^2.$

4.ª $\dfrac{18+x}{6(3-x)}=\dfrac{20x+9}{19-8x}-\dfrac{13}{3-x}.$

5.ª $abx^2+\dfrac{3a^2x}{c}=\dfrac{ba^2+ab-2b^2}{c^2}-\dfrac{b^2x}{c}.$

6.ª $\dfrac{5a+10ab^2}{3a^2b^2-96^2}x^2+\left(\dfrac{5\sqrt{a+b}}{3b^3}+\dfrac{(2b^2+1)cd\sqrt{c}}{3-a^2}\right)x=\dfrac{cd}{ab}\sqrt{(a+b)c}.$

Problemas. 1.º *Buscar un número tal, que la tercera parte de su mitad valga* 864.

Planteo. $\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{3}=864.$

2.º *Buscar un número tal, que sumado con* 94 *y restado de* 94, *si se multiplica la suma por la diferencia dé* 8512.

Planteo. $(94+x)(94-x)=8512$; de donde $x=18$.

3.º *Si un cierto número lo multiplico por* $2\dfrac{1}{3}$ *y al producto le añado* 7 *unidades, y este producto lo multiplico por* 8 *veces el número y divido al todo por* 14 *y del cociente resto* 4 *veces el número, obtengo* 2552. ¿Cuál es el primitivo número?

Planteo. $\dfrac{\dfrac{7x+7}{3}}{14}8x-4x=2552$; de donde $x=42$.

4.º *Si el tercio de un número se multiplica por una cuarta parte y al producto se le añade el quíntuplo del número, el resultado tiene tantas unidades más que* 200 *como el número propuesto tiene ménos que* 280.

Planteo. $\dfrac{x^2}{12}+5x-200=280-x$ S.on $x=48$.

5.º *Preguntado uno por su edad responde: Mi madre cumplió* 20 *años cuando yo nací, y su edad, multiplicada por la mia, excede en* 2500 *años á la suma de las dos.*

Planteo. $x(x+20)=(2x+20)+2500$ S.on $x=42$.

6.º *Un comerciante tiene tres piezas de tela: la segunda y la tercera tienen 3 y 5 metros más que la primera; un metro de la primera vale tantas pesetas como metros tiene la pieza; un metro de la segunda vale 10 pesetas más y uno de la tercera 20 pesetas más que uno de la primera. Las tres piezas reunidas valen 9530 pesetas.* Se pregunta de cuántos metros constaba cada pieza.

PLANTEO. $x^2+(x+3)(x+10)+(x+5)(x+20)=9530.$

CAPÍTULO VI

Coordinaciones, permutaciones y combinaciones. Fórmulas del binomio de Newton.

§ I. COORDINACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

175. *Llámanse coordinaciones los diferentes grupos uno á uno, dos á dos, etc., que se pueden formar con varios objetos, de modo que uno éntre una sola vez en cada grupo; que todos los grupos consten del mismo número de ellos, y que dos grupos se diferencien al ménos en un objeto ó en el órden en que estén colocados.*

176. Si se dan várias letras para formar sus coordinaciones una á una, dos á dos (que se llaman binarias), tres á tres (ternarias), etc., se procederá con el órden siguiente. Sean, por ejemplo, las *binarias*, que se pueden formar con *a*, *b*, *c*, *d*, *e*....

Á la primera letra se unen todas las demás y se tendrá *ab*, *ac*, *ad*.... Á la segunda se le unen todas las demás y se tendrá *ca*, *cb*, *cd*.... y así sucesivamente con todas las letras.

Para formar las *ternarias* se añadirian á cada binaria las letras restantes; así á la binaria *ab* se le uniria *c*, *d*, *e*.... y daria *abc*, *abd*, *abe*, *abf*....

La segunda, *ac*, daria *acb*, *acd*, *ace*, *acf*....

Para las *cuaternarias*, á cada ternaria se le agregarian las letras restantes; así la ternaria *abc* daria *abcd*, *abce*, *abcf*.... y así sucesivamente.

177. CUESTION. *¿Con* m *letras cuántas presentaciones binarias, ternarias, cuaternarias, etc., se pueden formar?*

Para fijar las ideas, supongamos que son 8 letras las dadas; claro es que si se toman *una* á *una* dan 8 grupos. Para las *binarias* á cada letra se le juntan las 7 restantes; luego una letra con las demás da 7 binarias; las 8 letras darán 8×7, ó de otro modo, $8(8-1)$.

Para las *ternarias* á cada binaria se le agregan las letras restantes, y como eran 8, si se quitan 2 de la binaria quedan 6 letras para irlas agregando y producir las ternarias; luego cada binaria da 6 ternarias. Por tanto, todas las binarias, que son $8(8-1)$, darán su producto por 6, ó sea $8(8-1)(8-2)$, y así sucesivamente. Sea ahora el número m de letras: la fórmula de las 1 á 1 es m. Las binárias serán $m\,(m-1)$; las ternarias $m(m-1), (m-2)$; las cuaternarias $m(m-1), (m-2), (m-3)$. En general las de n á n serán $m(m-1), (m-2)....\{ m-(n-1) \}$. Es decir, que para averiguar el número de coordinaciones que se pueden formar con m letras, n á n, *se forma el producto de los restos sucesivos, que se obtienen quitando del número* m *la serie natural* 1, 2, 3, *etc., de los números enteros, hasta quitar tantas unidades como objetos* MÉNOS UNO *hayan de entrar en cada coordinacion.*

EJERCICIOS.—1.º Probar que con el método expuesto, para coordinar una á una y dos á dos, tres á tres, etc., m letras, los grupos obtenidos cumplen con las condiciones de la definicion.

2.º Probar que si la ley es verdadera para las coordinaciones $(n-1)a(n-1)$, tambien es verdadera para las de n á n, y deducir de aquí la generalidad de las fórmulas.

178. *Permutaciones se llama á todos los grupos que pueden formarse con* m *objetos de modo que en cada uno entren los* m *objetos, y que los grupos se diferencien sólo en el órden de colocacion de los objetos.* Tales son todos los diferentes modos de escribir un producto de varios factores, ó las diversas maneras en que se podrian colocar várias personas alrededor de una mesa, etc.

179. CUESTION. *Cuántas permutaciones se pueden formar*

con m *objetos*. Para fijar las ideas, sean éstos 2; es claro que dos cosas, *a* y *b*, no dan más que dos grupos en las condiciones definidas, á saber, *ab* y *ba*; luego 2 cosas dan 1.2 permutaciones.

El órden que se ha de observar para permutar, conociendo las de un objeto ménos (es decir, para obtener las de tres objetos conociendo las de dos), consiste en poner el nuevo objeto á la derecha de cada permutacion de las anteriores y hacerle recorrer todos los lugares hácia la izquierda hasta llegar al primero. Así con tres letras, *abc*, se diria: formadas *ab* y *ba*, colocada *c* á la derecha de las dos, y dará *abc* y *bac;* ahora hago recorrer á la *c* todos los lugares hasta ponerse á la izquierda y tendré con la 1.ª *acb*, *cab*, y con la 2.ª *bca*, *cba;* y como la letra *c* ha recorrido tres lugares en cada una, y habia dos grupos, los resultantes son 1.2.3.

Si fueran 4 á 4, la cuarta letra se pondria á la derecha de cada una de las de 3, ó sea, por ejemplo, en una *abc*, diria *abcd*, y esta letra *d* se hace recorrer todos los lugares hasta ponerse á la izquierda de *a*; y con esto, como recorre cuatro lugares, cada permutacion de 3 da 4 de 4; luego todas (como son 1.2.3) darán 1.2.3.4.

180. Sea ahora n letras: si á la derecha de las de $(n-1)$ se coloca la letra restante y se le hace recorrer los n lugares que hay hasta ponerse á la izquierda cada una de $(n-1)$ dará n de n, y si las de $(n-1)$ son segun la ley vista, la serie 1.2.3.... $(n-1)$ las de n serán 1.2.3.4....n.

Ejercicios. 1.º Probar que con el método expuesto para permutar se obtienen grupos con las condiciones definidas.

2.º Probar que si la ley es verdadera para las de $(n-1)$ á $(n-1)$ es verdadera para las siguientes n á n, ó sea que es general.

181. *La ley, pues, del número de permutaciones de varios objetos es que hay tantos como indica el producto de la serie natural de los números enteros, desde uno hasta el número de objetos que entran en cada permutacion.*

182. Combinaciones. *Llámanse combinaciones todos los grupos, uno á uno, dos á dos, etc., que se pueden formar con varios objetos, pero de modo que un objeto no éntre más que una vez en cada grupo y que dos grupos se diferencien á lo ménos en un objeto.*

183. Propongámonos hallar la fórmula de las combinaciones de m objetos tomados n á n. Para fijar las ideas sean las de 8 objetos tomados 3 á 3. Supongamos que se han formado estas combinaciones y sea su número C_3. Una vez halladas, si quisiera obtener las *coordinaciones* 3 á 3 de estos 8 objetos bastaria que en cada combinacion hiciera las permutaciones posibles, pues si una permutacion *abc* se dijese que no se habia formado como estas tres letras habia de haber formado una combinacion, aunque fuera ésta *acb*, como se han permutado en todos los órdenes posibles, seguramente se ha formado *abc*, y como tiene cada una 3 letras estas permutaciones serian las de 3 á 3; luego el número de combinaciones C_3 repetido las veces que cada una se puede permutar, ó sea P_3, da el número A_3 de coordinaciones; ó de otro modo, $C_3P_3=A_3$; de donde $C_3=\frac{A_3}{P_3}$.

Como análogo razonamiento puede hacerse con cualquier número de objetos, esto dice que *el número de combinaciones de varios objetos es igual al cociente de sus coordinaciones divididas por sus permutaciones.*

Así las de n á n de m objetos es, $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))}{1.2.3.4\ldots\ldots n}$.

184. Observaciones. Si se tienen 8 objetos y se combinan 3 á 3, cada vez que se tomen 3 de ellos quedarán 5, y como cada vez que se varía un objeto de los 3 que se toman para formar una combinacion se varía un objeto de los 5 que quedan, claro es que el número de combinaciones de 8 objetos 3 á 3 es el mismo que el de estos 8 objetos tomados $(8-3)$ á $(8-3)$.

En general las de m objetos n á n son las mismas que las de estos mismos objetos tomados $(m-n)$ á $(m-n)$.

Problemas. 1.º P. *¿Cuántos extractos, ámbos, ternos, cuaternas y grupos de cinco números diferentes se pueden formar con los* 90 *primeros números enteros?* R. 90 *extractos*, 4005 *ámbos*, 117480 *ternos*, 2555190 *cuaternas*, 43949268 *grupos de* 5.

2.º P. *Permutadas las* 7 *letras* a, b, c, d, e, f, g, *¿cuántos grupos empezarán con la letra* a *ú otra cualquiera?* R. 720.

3.º P. *¿Cuántas permutaciones empezarán por* ab, *cuántas por* abc, *cuántas por* abcd? R. 120 *por* ab, 24 *por* abc, 6 por abcd.

4.° P. *¿De cuántas maneras podrian sentarse alrededor de una mesa 8 personas?* R. 40320.

185. *Se llama probabilidad matemática simple el cociente de los casos favorables, dividido por los desfavorables.*

5.° P. *Jugando 12 números en una lotería de 90 de los que se sacan cinco á la suerte ¿cuál es la probabilidad de sacar un ambo, terno ó cuaterna?* R. $\frac{2}{15}$ *extracto,* $\frac{22}{1335}$ *ambo,* $\frac{1}{354}$ *terno.*

La suma de las probabilidades de todos los casos posibles es igual á 1 y constituye la certeza.

6.° P. *¿Cuántos billetes de cinco números sería necesario jugar para tener la certidumbre de acertar un ambo ó terno?* R. 43949268.

7.° P. *En un globo hay 13 bolas con un número cada una; ¿qué probabilidad hay de sacar seis números determinados?* R. $\frac{1}{1716}$.

§ II. Fórmula del binomio de Newton.

186. Se sabe que $(x+a)^1=x+a$; $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$; $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$; y si se eleva á la cuarta potencia se tiene $(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

De la atenta consideracion de estos desarrollos se deduce: Primero. Que las potencias de los binomios de la forma propuesta son polinomios completos en x y a, y homogéneos. Segundo. Que el exponente de x en el primer término es igual á la potencia, y va disminuyendo de 1 en 1, hasta llegar á cero, é inversamente el de a. Tercero. En cuanto á los coeficientes, el del primer término es la unidad, el del segundo igual á la potencia, y de los demás sólo se observa que los equidistantes de los extremos son iguales.

Las dos observaciones primera y segunda permiten escribir desde luégo la parte algébrica del desarrollo de una potencia ó de un binomio de la forma $(x+a)$; pero en cuanto á la ley de los coeficientes no se descubre *à priori*, y es porque estos coeficientes proceden de las reducciones que se han hecho de los términos semejantes en los productos. Para descubrirla, imagínese que se han multiplicado varios factores binomios, cuyo segundo término sea desigual, como, por ejemplo: $(x+a)$, $(x+b,)$, $(x+c)$, y se tendrá, ordenando con respecto á x, el producto, que será $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$. Si los factores fuesen cuatro, á saber, $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)$ se tiene el producto $x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^3+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$. Es decir, *que el coeficiente del primer término es la unidad, el del segundo las combinaciones* 1 *á* 1 *de los segundos términos de los binomios, el del tercero las combinaciones binarias, el del cuarto las ternarias, etc., y el último el producto de todos los factores.*

187. Así, un producto de m factores $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\ldots.$ $(x+l)=x^m+(a+b+c+\ldots.l)x^{m-1}+(ab+ac+ad+\ldots.)x^{m-2}+(abc+abd+\ldots.)x^{m-3}+\ldots.a.b.c\times\ldots.\times l$. Si en esta igualdad se hace $a=b=c=d=\ldots.l$, se tendrá que el primer miembro se convierte en $(x+a)\,(x+a)\ldots.\,(x+a)$; es decir, en el producto de m factores iguales á $(x+a)$, ó sea en la potencia m.ésima de $(x+a)$: se escribirán, por tanto, $(x+a)^m$. En cuanto al segundo miembro, el coeficiente de su segundo término será $(a+a+\ldots.a)$; y como hay m factores, será lo mismo que ma. El coeficiente del tercer término será $(a^2+a^2\ldots.a^2)$; y como habrá tantos sumandos a^2 como combinaciones binarias se pueden formar con los segundos términos de los m factores binomios, $\frac{m(m-1)}{1.2}a^2$. El coeficiente del cuarto término será $(a^3+a^3+a^3+\ldots.a^3)$; es decir, tantas veces a^3 por sumando como combinaciones ternarias se pueden formar con los segundos términos de los m factores binarios, ó sea $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3$. En general el término $(n+1)$ del desarrollo tendrá por coeficiente a^n, repetido tantas veces como combinaciones n á n se pueden formar con los segundos términos de los m binomios, ó sea

$\frac{m(m-1)\ldots.(m-(n-1))}{1.2.3\ldots\ldots n}a^n$. Luego la fórmula general de este desarrollo es $(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1.2}a^2x^{m-2}+\ldots.+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-(n-1))}{1.2.3\ldots\ldots n}a^n x^{m-n}+\ldots.a^m$. Ésta se llama la fórmula del binomio de Newton, y sirve para las elevaciones á potencias.

188. Este desarrollo tiene $(m+1)$ términos, toda vez que hay que pasar en los exponentes de x ó de a, desde m á o ó vice-versa. Tambien es evidente la razon de por qué los *coeficientes de los términos equidistantes de los extremos han de ser iguales*, pues teniendo cada una por coeficiente el número de combinaciones tantas á tantas como lugares tiene ántes, el término 5, por ejemplo, su coeficiente es el número de combinaciones 4 á 4 de m letras; y el coeficiente del término equidistante, que es el que tiene despues de sí 4, ó sea que tiene delante $(m-4)$, es el número de combinaciones $(m-4)$ á $(m-4)$ que se puede formar con m letras, y se sabe que el número de combinaciones de m objetos 4 á 4 es el mismo que de $(m-4)$ á $(m-4)$.

189. Para las aplicaciones se da una regla muy sencilla, que evita el cálculo de los coeficientes, y es: *Si se multiplica el exponente de* x *en un término por el coeficiente del mismo, y se divide el producto por el exponente de* a, *aumentado en una unidad, se tiene el coeficiente del término que le sigue.* Hay que recordar que sólo se tienen que calcular la mitad más uno de los coeficientes.

EJERCICIOS

1.º Desarrollar $(a+b)^7+(a-b)^7$.

2.º $(a+b)^m-(a-b)^m=2(ma^{m-1}b+\ldots.)$.

3.º $(5-4x)^4=625-2000x+2400x^2-1280x^3+256x^4$.

4.º $(3ax-b)^5$.

5.º $\left(2a\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^6$.

CAPÍTULO VII

Progresiones y Logaritmos.

§ I. PROGRESIONES POR DIFERENCIA Ó ARITMÉTICAS

190. *Progresiones por diferencia ó aritméticas son aquellas continuaciones de términos tales, que cada uno es igual al que le precede, más una cantidad constante que se llama* RAZON *de la progresion.*

191. El signo de estas progresiones son dos puntos separados por una raya. Así: $\div$ 4.6.8.10.... es una progresion *aritmética*, cuya razon es 2. En general, $\div a, a+r, a+2r....$ es una progresion cuya razon es r.

192. *Un término cualquiera es igual al primero, más tantas veces la razon como términos tiene ántes.*

En efecto; sea $\div a.(a+r).(a+2r)....$ una progresion. Es evidente, en los tres primeros términos se verifica, que uno cualquiera es igual *al primero, más tantas veces la razon como número de términos hay ántes del que se considera.*

Para demostrar la generalidad de esta ley, supóngase que se verifica para los $(n-1)$ primeros términos; bastará hacer ver que tambien se verifica para el siguiente que ocupa el lugar n.ésimo En efecto; sea éste u, y supuesto que se verifica la ley para los $(n-1)$ primeros términos, se tendrá, llamando t al anterior á u, que $t=a+(n-2)r$; pero segun la ley de formacion de progresion, el término $u=t+r=a+(n-2)r+r=a+(n-1)r$.

Es decir, que si la ley se verifica para el término $n-1$, tambien se verifica para el n.ésimo; pero ésta es verdadera para los tres primeros, luego lo será para el cuarto, y de aquí se deduce que tambien lo será para el quinto, y así sucesivamente.

193. *En toda progresion por diferencia, la suma de los ex-*

tremos es igual á la de dos términos equidistantes de ellos. En efecto; sea la progresion $\div a.b.c....p.t.u$, que tiene n términos y la razon es r. Se tiene $a+u=a+a+(n-1)r=2a+(n-1)r$. Tambien como $c=a+2r$, y $p=a+(n-3)r$, será $c+p=a+2r+a+(n-3)r=2a+(n-1)r$. Luego $a+u=c+p$.

194. *Se llama equidiferencia la reunion de cuatro números tales que dos á dos tienen la misma diferencia.*

Se escriben las equidiferencias como las progresiones aritméticas, sólo que constan de cuatro términos, que se llaman medios y extremos.

195. Es evidente que la suma de los medios es igual á la de extremos; pues si a, b, c, d son tales, que $a-b=c-d$, se tiene, pasando b al segundo miembro y d al primero, que $a+b=c+b$. Recíprocamente, si $a+d=c+b$, se tiene trasponiendo $a-b=c-d$. Esto supuesto, *cuatro términos equidistantes de una progresion aritmética forman una equidiferencia.* En efecto; se ha probado que la suma de los que hacen de extremos es igual á la de los medios.

196. *La suma de todos los términos de una progresion por diferencia es igual á la mitad del producto del primero, más el último, por el número de términos.*

En efecto; sea la progresion $\div a.b.c.... p.t.u$, y n el número de términos: llamando S á la suma, se tiene $S=a+b+c....+p+t+u$; y tambien, invirtiendo, $S=u+t+p+.... c+b+a$. Sumando ordenadamente, y observando que por la inversion del segundo miembro cada término se suma con su equidistante, se tendrá $2S=(a+u)+(b+t)+(c+p).... (t+b)+(u+a)=(a+u)+(a+u)+(a+u)....=(a+u)n$; de donde

$$S=\frac{(a+u)n}{2}.$$

197. *Se entiende por interpolar medios diferenciales entre dos números dados formar una progresion en la que los números dados sean los extremos y haya entre ellos los medios pedidos.*

Para interpolar cualquier número de medios diferenciales entre dos números dados, basta determinar la *razon*; pues, si-

$C_2H_5-O-C_3H_9$ $CH_3-O\ C_4H_9$

guiendo la ley definida, se formarán los términos intermedios.

198. *La razon se determina dividiendo la diferencia de los números dados por el número de medios que se quieren interpolar, más uno.* En efecto; si entre a y u se quieren interpolar m medios, el término u tendrá delante, $(m+1)$ términos; y si se llama r la razon, será $u=a+(m+1)r$, de donde $r=\dfrac{u-a}{m+1}$.

199. *Si entre cada dos términos de una progresion se interpola el mismo número de medios, todos forman una sola y única progresion.*

En efecto; todos los medios interpolados tienen la misma razon; pues, interpolando igual número de medios diferenciales entre cada dos términos de la progresion, el denominador de la fórmula de la razon es en todos el mismo: en cuanto al numerador, es la diferencia entre cada dos consecutivos de los términos primitivos; pero, como formaban progresion, su diferencia es la misma en todos; luego el numerador de la fórmula de la razon es tambien el mismo: es evidente que esta razon es igual para todos los medios interpolados; es decir, que forman una sola y única progresion.

Así, si $\div a.b.c.d....p.q.t.u$ es una progresion, y entre cada dos términos se interpolan m medios, la razon de todos estos medios interpolados está expresada por

$$r=\frac{b-a}{m+1};\ r'=\frac{c-b}{m+1};\ldots.r^{n-1}=\frac{u-t}{m+1}.$$

Pero $b-a=c-b=....=u-t$; luego $r=r'=....$

EJERCICIOS

1.° *Hallar el término* 17 *de una progresion por diferencia, que tiene por primer término* 2, *y por razon* 3, *y hallar la suma de los* 17 *términos*. Solucion: $u_{17}=50$ y $S=442$.

2.° *Siendo el primero* 7 *y la razon* $\frac{1}{4}$, *hallar el término* 16 *y la suma de los* 16. Solucion: $u_{16}=10\frac{3}{4}$ S 142.

3.º *Hallar el primer término de una progresion por diferencia, sabiendo que la suma de los tres primeros es* $7\frac{1}{7}$ y la razon $1\frac{2}{3}$. Solucion: $a=\frac{5}{7}$.

4.º *Hallar el número de términos de una progresion, sabiendo que el primero es* $2\frac{1}{2}$, la razon $\frac{1}{3}$ y la suma 1900. Solucion: $n=100$.

5.º *Hallar el último término de una progresion, cuya suma es* $60\frac{1}{8}$, *su razon* $\frac{1}{8}$ y su primer término $\frac{3}{4}$. Solucion: $u=3\frac{7}{8}$.

6.º *Un comerciante ajusta un dependiente en su casa de comercio por* 240 *duros al año, prometiéndole un aumento de sueldo de* 36 *duros por año*. Se pregunta cuál era su sueldo al cabo de los 17 años y cuánto recibió en los 17 años. Solucion: á los 17 años cobraba 816 duros, y en todos 8976.

7.º *Un obrero ajusta la construccion de un pozo de* 20 *metros de profundidad, á razon de* 2 *pesetas por el primer metro y* 0,50 *de más por cada metro que profundice*. Se pregunta cuánto lleva por el último metro, y cuánto recibe por la construccion del pozo. Solucion: por el último metro 11ps, 50, y por todo 135 pesetas.

8.º *Uno presta un capital de* 3500 *reales al* 4 *por* 100, *y cada año, durante* 24 *años, añade* 300 *reales al capital*. Se pregunta á cuánto ascienden los intereses. Solucion: á 6672 reales.

9.º *Un viajero que quiere llegar en* 19 *dias al fin de un viaje lo arregla de manera que cada dia ande un cuarto de legua más que el precedente: el último dia anda* $14\frac{1}{2}$ *leguas*. Se pregunta cuántas leguas anduvo el primer dia, y cuántas en todo el viaje. Solucion: en el primer dia 10 leguas, y por todo $232\frac{3}{4}$.

10.º *Hallar la razon de una progresion que tiene* 22 *términos, siendo el primero* 1 *y el último* 15. Solucion: $r=\frac{2}{3}$.

11.º *Preguntado un mozo de servir cuánto gana cada año, responde: este año mi sueldo es de 550 reales; el primer año no gané más que 100, pero cada año me lo han aumentado en 30 reales.* Se pregunta cuántos años ha estado el criado sirviendo en aquella casa. Solucion: 16 años.

§ II. PROGRESIONES POR COCIENTES Ó GEOMÉTRICAS.

200. *Se llama progresion geométrica á aquellas continuaciones de términos tales, que cada uno se forma multiplicando el precedente por un número constante que se llama* RAZON.

Es claro que si la *razon es mayor que la unidad* los términos irán aumentando, y se llama CRECIENTE, y si es menor irán disminuyendo, y se llama DECRECIENTE.

201. El signo es cuatro puntos separados con una raya. Así: $\div\div 4.8.16.32....$ y $\div\div a.aq.aq^2.aq^3....$ son progresiones por cociente, cuya razon es 2 y q respectivamente.

202. *Un término cualquiera de una progresion por cociente es igual al primero por la razon elevada á un exponente igual á los términos que tiene delante.* En efecto; sea la progresion $\div\div a.b.c.d....p.t.u$, en la que a es el primer término, u el último, q la razon y n el número de términos. Segun la definicion, se tendrá: $b=aq.$' $c=bq=aq^2$ $d=cq=aq^3$.

En donde se ve que en estos tres términos *uno cualquiera es igual al primero multiplicado por una potencia de la razon igual al número de términos que hay ántes del que se considera.*

Esta ley es general, y para probarlo se hará ver que si se verifica para los $(n-1)$ primeros términos, tambien se verifica para el siguiente. En efecto; si se designa este término del lugar $(n-1)$ por t, se tendrá

$$t=a.q^{n-2}.$$

(pues el término del lugar $(n-1)$ tiene $(n-2)$ ántes de él.)

Segun la ley, el siguiente u (que ocupa el lugar $n^{\text{ésimo}}$), será

$$u=t.q=a.q^{n-2}.q=aq^{n-1}.$$

Se ve, pues, que el n.ésimo término u es igual al primero a por la potencia $(n-1)$ de q; es decir, que si la ley se verifica para un término cualquiera, tambien se verifica para el siguiente, pero se verifica en los tres primeros; luego se verificará para el cuarto, y verificándose para el cuarto, tambien para el quinto; luego es general.

Así el octavo término de la progresion $\div\div 2.6.18....$ es igual á $2.3^7=4374$; y el término 12 de la progresion $\div\div 64:16:4....$ cuya razon es $\frac{1}{4}$, es igual á $64.\left(\frac{1}{4}\right)^{11}=\frac{11}{65536}$.

203. *Cuatro términos, equidistantes dos á dos de una progresion por cociente, forman proporcion*. En efecto; si entre el primer término que se considera y el segundo hay, por ejemplo, 3 intermedios, su cociente es la *razon de la progresion elevada al cubo:* entre otros dos términos cualesquiera, entre los cuales haya otros tres intermedios, tambien su cociente es *la razon de la progresion elevada al cubo;* luego esos cuatro términos, dos á dos, tienen el mismo cociente; luego forman proporcion. Así en la progresion $\div\div a:b:d:e:f:g:h:i:j:k:p:r:s:t$, llamando c la razon de sus términos q, se tiene que escogiendo a, d, p y s $\frac{d}{a}=q^2$ y $\frac{s}{p}=q^2$; luego $d.p=as$.

204. *La suma de todos los términos de una progresion geométrica creciente es igual al último término por la razon, ménos el primero, dividido por el exceso de la razon sobre la unidad.* En efecto; sea la progresion $\div\div a:b:c....t:u....(1)$, y S la suma de sus términos, se tendrá $S=a+b+c....+t+u;$ multiplicando los dos miembros por q, y observando que el producto de cada término por la razon produce el siguiente, será $Sq=b+c+....t+u+uq....$ (2); restando (1) de (2), será $Sq-S=uq-a$, ó sea $S(q-1)=uq-a;$ de donde $S=\frac{uq-a}{q-1}$.

205. *Si la progresion es decreciente*, la suma se halla del mismo modo, sólo que se invierten los términos de la resta. Así: $S=\frac{a-uq}{1-q}$.

206. La fórmula anterior tiene un *límite* cuando se trata de una progresion decreciente de un número de términos indefinidos. En efecto; miéntras más léjos está el término u del primero, tanto más pequeño es, y como q es menor que la unidad, porque la progresion es decreciente, el producto uq es todavía menor. Si, pues, u es susceptible de ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea, y uq es aún menor, la diferencia $a-uq$ difiere cada vez ménos de a, á medida que se consideran ó suman más términos; luego el límite hácia el cual tiende esta suma es $\frac{a}{1-q}$, que es constante, sean cualesquiera los términos que se sumen.

Así la serie de valores 0,5 0,05 0,005 0,0005, etc., forman una progresion geométrica decreciente, cuya razon es $\frac{1}{10}$. El límite hácia el cual tiende la suma de sus términos, á medida que se considere mayor número de ellos, es $\frac{0{,}5}{1-\frac{1}{10}}=\frac{0{,}5}{\frac{9}{10}}$ $=\frac{5}{9}$; valor ya conocido (Arit. 253) como límite de la suma 0,5555....

207. *Se entiende por interpolar medios proporcionales entre dos números dados, formar una progresion por cociente, en la que los números dados sean los extremos y tengan entre sí los medios pedidos.*

Para interpolar cualquier número de términos entre dos dados, basta averiguar la *razon*, pues, una vez conocida, como se da el primer término, los demás se forman segun la ley definida.

208. *Para averiguar la razon se extrae al cociente de los números dados la raíz del grado que indica el número de medios, más uno, que se han de interpolar.*

En efecto; si entre a y u se han de interpolar m medios, el término u tendrá delante $m+1$ términos, y si se llama q á la razon, será $u=aq^{m+1}$, ó sea $q^{m+1}=\frac{u}{a}$; de donde $q=\sqrt[m+1]{\frac{u}{a}}$.

209. *Si entre cada dos términos de una progresion por cociente se interpola el mismo número de medios proporcionales todos tienen la misma razon y formarán una sola progresion.*

En efecto; la razon de cada una de estas progresiones parciales se obtiene dividiendo cada término por el anterior (lo cual da de cociente la razon constante de la primera progresion) y extrayendo á este cociente una raíz del grado que indican los medios que se van á interpolar, más uno. Si, pues, entre cada dos términos se interpola el mismo número de medios, el índice de esta raíz es el mismo: en resúmen; si el sub-radical es el mismo y la raíz de igual grado, claro es que la razon de todas las progresiones parciales es una sola y constante. Y como el último término de cada una es el primero de la siguiente, todas ellas forman una sola y única progresion.

210. Así en la progresion $\div\div 1:10:100:1000:10000....$ si entre cada dos términos consecutivos se interpolan 10 medios, la razon es $\sqrt[11]{10}$ en todos los intérvalos, y la nueva progresion de 1 á 10 se enlaza con la siguiente de 10 á 100, porque 10, último término de la primera, es el primero de la segunda, etc.

Nota. Como el número de medios que se pueden interpolar es indefinido, y la razon puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, aumentado el número de medios interpolados, se concibe que estos medios pueden crecer por grados tan insensibles como se quieran, de modo que entre uno y el siguiente puede haber una diferencia menor que cualquier cantidad dada. Así, si entre 1 y 10, en lugar de interpolar 10 medios se interpolan 1000, la razon sería la raíz 1001 de 10, número muy pequeño; y si se interpolasen 10000, la razon sería la raíz 10001 de 10, etc.; es decir, que se puede hacer que los términos varien tomando todas las gradaciones de la cantidad que se quieran entre 1 y 10 y lo mismo entre 10 y 100, etc. Luego, en fin, por una conveniente interpolacion se puede hacer que en la progresion geométrica propuesta aparezcan números tan aproximados á los que se pidan como se quiera.

EJERCICIOS

1.º *Hallar el término noveno de una progresion por cociente cuyo primer término es* 5 *y la razon es* 4, *y la suma de estos nueve términos*. Resulta: llamando n al noveno término, y S á la suma, será $n=327680$ $S=436905$.

2.º *Siendo el primer término* $6\frac{1}{4}$, *la razon* $1\frac{1}{2}$, *hallar el término* 8 *y la suma de todos los términos*. Resulta $n=106\frac{403}{512}$ $S=307\frac{441}{512}$.

3.º *Cuál es el límite de la suma de todos los términos de una progresion geométrica decreciente cuya razon es* $\frac{2}{3}$ *y* 9 *su primer término*. Resulta $L=27$.

4.º *Cuál es el límite de la suma de los términos de la progresion geométrica decreciente cuyo primer término es* 40 *y la razon* $\frac{3}{7}$. Resulta $L=70$.

5.º *Uno pide por un caballo lo siguiente: un céntimo de peseta por el primer clavo de las herraduras, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto y así sucesivamente hasta el treinta y dos. ¿Cuál era el precio del caballo?* Resulta 42949672 pesetas 95 céntimos.

6.º *Un labrador siembra cada año todo el trigo que recolecta: el primer año siembra una fanega y á los diez años recolecta* 1048576 *fanegas. Suponiendo que la produccion por una fanega haya sido igual en los diez años ¿cuál ha sido esta produccion?* Resulta 400 por 100.

7.º *Un pueblo en cuatro años ha aumentado de* 10000 *almas á* 14641. *Suponiendo la relacion de aumento la misma en cada año, ¿cuál es ésta?* Resulta $\frac{1}{10}$.

8.º *Una progresion por cociente se compone de siete términos.*

La suma de los seis primeros es $157\frac{1}{2}$ *y la suma de los seis últimos es doble de la primera. ¿Cuál es la progresion?* $\div\div 2\frac{1}{2} : 5 : 10 \ldots . 160$.

§ III. Logaritmos.

211. *Si consideramos dos progresiones, una aritmética, que empieza por cero, y otra geométrica, que empieza por uno, los términos de la aritmética se llaman los logaritmos de los términos que ocupan los mismos lugares en la geométrica.*

Así: $\left\{\begin{array}{l} \div\, 0 . r . 2r . 3r . 4r \ldots . mr \ldots . nr \ldots . \\ \div\div\, 1 . q . q^2\ q^3\ q^4 \ldots . q^m \ldots . q^n \ldots . \end{array}\right\}$ forman un sistema de logaritmos.

212. *Los sistemas de logaritmos son infinitos, pues variando la razon de las progresiones se tiene otro distinto.*

213. *En todo sistema de logaritmos el logaritmo de la unidad es cero.* En efecto; por definicion, la progresion aritmética empieza por cero y la geométrica por uno.

214. *Se llama* BASE *de un sistema de logaritmos el término de la progresion geométrica, cuyo logaritmo es la unidad.*

215. Las tres letras *log* se leen *logaritmo de.*

216. Ántes de demostrar la propiedad fundamental de los sistemas de logaritmos conviene observar:

1.º Que *si una progresion aritmética empieza por cero todos los términos son múltiplos de la razon*, pues siendo todos iguales al primero, más tantas veces la razon como términos le anteceden, es evidente que si el primero es nulo todos se convierten en la razon multiplicada por la serie natural de los números enteros.

2.º Que considerada la progresion indefinida, *cualquier múltiplo de la razon es un cierto término de ésta.*

3.º Que *el número por el cual se halle multiplicada la razon en un término expresa los que tiene delante*, y por tanto indica el lugar que ocupa.

Análogamente acontece en la progresion por cociente, sólo que en ella es por multiplicacion lo que en la aritmética por suma. Así que, siendo cada término igual al primero multiplicado por la razon elevada á una potencia igual al número de términos que tiene delante, es evidente que si el primero es la unidad, se verifica: primero, que *todos los términos son potencias de la razon indicada por la serie natural de los números enteros;* segundo, que *considerada la progresion con un número indefinido de términos, toda potencia de la razon forma parte de ella;* tercero, que *el exponente expresa los términos que tiene delante el de que se trata*, y por tanto indica el lugar que ocupa.

Nótanse, pues, desde luego analogías entre las dos progresiones, y son que *tantas veces como la razon de la aritmética entra como sumando en un término, otras tantas entra la de la geométrica por factor en el que corresponda ú ocupe el mismo lugar*.

Así, es una fórmula general de los sistemas de logaritmos la siguiente: llamando r la razon de la aritmética y c la de la geométrica:

$$\text{Logaritmos} \div 0.r.2r.3r.4r \ldots .nr \ldots .mr \ldots .\ (m+n)r.$$

$$\text{Números} \ldots \div\!\div 1{:}c{:}\ c^2{:}\ c^3{:}\ c^4 \ldots .c^n \ldots .c^m \ldots .\ \ c^{n+m}\ .$$

217. Esto supuesto, demostremos el principio fundamental, que es: *en todo sistema de logaritmos el logaritmo de un producto es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

Sean primero dos factores que se supone que forman parte de la progresion geométrica, tales como c^n y c^m.

Se tiene que $c^n \times c^m = c^{m+n}$. Este producto, que por ser potencia de la razon forma parte de la progresion, tiene precisamente un logaritmo, que es el término que le corresponde en la aritmética. Para averiguarlo observo que c^{m+n} tiene delante $(m+n)$ términos; luego su logaritmo será el término de la aritmética, que tiene tambien delante $m+n$, y esto es $(m+n)r$. Hay, pues, seguridad de que log. $c^{n+m}=(m+n)r$; pero $(m+n)r=mr+nr=$log. c^m+log. c^n. Queda, por tanto, demostrado el principio, para cualquier sistema, y cuando se consideran dos términos de la progresion geométrica cuyo logaritmo es positivo.

Si se supone r positivo y c positivo y mayor que 1, y ámbas progresiones se prolongan en ámbos sentidos (el creciente y decreciente), tendrá el sistema de logaritmos esta forma:

$$-nr \ldots\ldots -mr\ldots\ldots -3r-2r.-r\ .0.r.2r.3r.4r\ldots mr\ldots nr\ldots$$

$$\frac{1}{c^n}\cdots\cdots\frac{1}{c^m}\cdots\cdots\frac{1}{c^3}:\frac{1}{c^2}:\frac{1}{c}:1:c:c^2:c^3:c^4\ldots c^m\ldots c^n$$

218. La demostracion del principio general para dos factores cualesquiera, tomados en la serie decreciente, ó uno en la creciente y otro en la decreciente, puede servir de ejercicio á los alumnos: los fundamentos son los expuestos para el caso demostrado de que sean dos de la serie creciente.

219. Otra demostracion más elemental y sintetizada, del principio, es la siguiente. Sean c^n y c^m dos factores, y mr y nr sus logaritmos respectivos. Si se llama x el término de la geométrica, que dista de c^n, lo que c^m dista de 1, se tendria que $1\ldots c_m\ldots c^n\ldots x$ son cuatro términos, equidistantes dos á dos, y por tanto (203) $1\times x=c^m.c^n$, ó sea $x=c^{m+n}$. Si se llama z el término que en la aritmética corresponde á x, se tiene que, $0\ldots mr\ldots nr\ldots z$ son tambien equidistantes dos á dos, puesto que corresponden á los de la geométrica, y por tanto (193) que $0+z=mr+nr$, pero $z=\log.\ x=\log.\ c^{m+n}$ y $mr=\log.\ c^m$, $nr=\log.\ c^n$; luego sustituyendo será $\log.\ c^m\times c^n=\log.\ c^m+\log.\ c^n$.

220. *Demostrada la proposicion para dos factores*, es fácil extenderla para tres ó más. Sea el producto ABC. Si se considera como formado de dos factores, uno A y el otro BC, se tendrá $\log.\ BC=\log.\ B+\log.\ C$, se tiene por fin $\log.\ A\times BC=\log.\ A+\log.\ B+\log.\ C$.

221. COROLARIOS. 1.º *El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la base multiplicado por el exponente*. En efecto; sea la potencia A^3; se tendrá $\log.\ A^3=\log.\ A.A.A=\log.\ A+\log.\ A+\log.\ A=3.\log.\ A$.

2.º *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo, ménos el logaritmo del divisor*. Sea el cociente C, el dividendo A y el divisor B. Se tiene $A=BC$, y tomando logaritmos, $\log.\ A=\log.\ B+\log.\ C$, de donde $\log.\ C=\log.\ A-\log.\ B$.

3.º *El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo del sub-radical dividido por el índice de la raiz*. Sea $\sqrt[3]{A}$ el radical, y R

la raíz; se tiene de $\sqrt[3]{A}=R$; elevando al cubo los dos miembros, $A=R^3$, y tomando logaritmos, dirá log. $A=3$ log. R, de donde log. $R=\frac{\log . A}{3}$.

222. SISTEMA VULGAR DE LOGARITMOS. *Es aquel en que la razon de la progresion aritmética es la unidad y la de la geométrica* 10.

Así: $\left\{\begin{matrix} \div 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \ldots \\ \div\!\div 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 \ldots \end{matrix}\right\}$ se llama sistema vulgar ó de Brigs.

En este sistema, para que aparezca formando parte de la progresion geométrica la serie natural de los números enteros (dados los conocimientos hasta aquí adquiridos), habria que suponer interpolados suficientes medios entre 1 y 10, entre 10 y 100, etc., á fin de que apareciesen números muy aproximados á los pedidos (209), y efectuando la misma interpolacion en la aritmética, entre 0 y 1, entre 1 y 2...., etc., aparecerian sus logaritmos. En virtud de esto se deduce:

223. 1.º *Que no tienen logaritmo conmensurable más que la unidad seguida de ceros.*

2.º *Que el logaritmo de la unidad seguida de ceros son tantas unidades simples como ceros la acompañan.*

3.º *Que los demás números de la serie natural tienen sus logaritmos compuestos de parte entera y parte fraccionaria. La parte entera se llama* CARACTERÍSTICA, *y la fraccionaria, reducida á decimal,* MANTISA.

4.º Como los números de una cifra están entre 1 y 10, y sus logaritmos entre 0 y 1, su característica debe ser cero. Los números de dos cifras están entre 10 y 100, y sus logaritmos entre 1 y 2; luego su característica debe ser 1. Análogamente se ve que los de tres cifras deben llevar de característica 2; los de cuatro cifras 3, y, en general, *que la característica de un logaritmo, en el sistema vulgar, tiene tantas unidades como* *cifras enteras, ménos una, el número propuesto ó logaritmado.*

Así, la característica del log. 4526 será 3; la del 7896542 será 6.

224. *Si un número se multiplica ó divide por la unidad seguida de ceros la mantisa de su logaritmo no varía.* En efecto; si para hallar el logaritmo de un producto se suman los logaritmos de sus factores, es claro que un número multiplicado por 10, 100 ó 1000, etc., su logaritmo vendrá aumentado en 1, 2 ó 3 unidades, y vice-versa si se divide; pero como la adicion ó sustraccion de unidades enteras se ha de hacer sobre la característica, es evidente que la mantisa permanece constante.

De aquí se deduce que la mantisa del logaritmo de un decimal no varía corriendo la coma á derecha ó izquierda. Así, la misma mantisa tiene el logaritmo de todos estos números, 34800; 3480; 348; 34,8; 3,48; 0,348; 0,0348, etc. Luego *la mantisa indica cuáles son las cifras de un número, y la característica cuántas de ellas son enteras.*

§ IV. Tablas y su uso

Nota. La explicacion siguiente se refiere á la última edicion de las excelentes tablas del Sr. Vazquez Queipo (edicion 17).

225. *Tablas de logaritmos es una parte de la serie natural de los números, empezando por uno, hasta cierto límite, y sus correspondientes logaritmos.*

226. La disposicion que generalmente se da á las tablas es la llamada á doble entrada, que consiste en que una misma columna de números tenga enfrente, no sólo la de sus logaritmos, sino otras várias que dan la mantisa de los mismos, uniéndole cada una de las nueve cifras 2,2,3....9, que encabezan las columnas auxiliares. De este modo se reduce notablemente el volúmen de una tabla, y el artificio no es difícil de comprender.

227. Las tablas á que se refiere esta explicacion llegan hasta

20000. La primera columna de cada llana está encabezada N y da directamente, junta con la que está al lado, encabezada log. 0, los números desde 1 á 1999 y las mantisas de sus logaritmos. Como estas dos, están otras nueve columnas encabezadas con los números dígitos de 1 á 9, que contienen las cuatro últimas cifras de las mantisas de los logaritmos de los números que están enfrente en la columna N, juntos con el número dígito que la encabeza.

Como cada dos llanas forman una página, la columna de los números se repite, para más claridad, en la llana de la derecha. Además contienen las tablas unas columnas intermedias entre las anteriores, encabezadas *dif.*, que quiere decir *diferencia*, y que marcan la que existe entre cada dos mantisas consecutivas.

Nota. Se debe advertir que las dos primeras cifras de la mantisa que aparecen aisladas en la columna log. 0 rigen para todas las que tiene debajo en claro, lo mismo que para las contenidas en las columnas encabezadas 1,2....9.

228. Segun esta disposicion, para buscar el logaritmo de un número en estas tablas, se distinguen tres casos:

1.º *Que el número sea menor de* 1999. En este caso se busca el número en la columna N, y enfrente, en la columna log. 0, está la mantisa de su log. Así: log. 1694=3,228913.

2.º *Que sea mayor que* 1999 y *menor que* 20000. En este caso se separa la última cifra, se buscan las restantes en las columnas N y se corre la vista hasta la columna encabezada con la cifra que se le separó: enfrente del número, en esa columna, están las cuatro últimas cifras de su mantisa; las dos primeras son las dos aisladas de la columna log. 0, que se tomarán las de la línea superior, que son las que allí rigen, á ménos que no tengan las cuatro últimas un *asterisco*, que entónces son las de debajo.

Ejemplo. Log. 14527: se separa el 7 y quedan 1452; buscando en la columna N, tiene encima, en la columna log. 0, las dos cifras aisladas 16, y enfrente, en la encabezada 7, las cuatro 2176; luego log. 14527=4,162176. Si hubiese sido 15136, como las cuatro últimas de su log. son 0011, y tienen un *asterisco*, las dos primeras no serán las aisladas superiores de la columna log. 0, sino las inferiores, que son 18; luego log. 15136=4,180011.

3.º *Que el número exceda de* 20000. En este caso se hace uso de una proporcion admitida entre las diferencias de los números y las de sus logaritmos cuando los primeros son muy grandes y próximos. Sea, segun esto, buscar el log. de 184294; como la mantisa de este número es la misma que la del que se obtiene separándole una ó más cifras decimales, se separa la última, y dirá 18429,4; se busca la mantisa de 18429, que es 265502, y se establece $\frac{1}{0,4}=\frac{23}{x}$ (cuyos términos son: 1, diferencia entre el número con que se ha operado y su consecutivo es á 0,4, diferencia entre el número con que se ha operado y el propuesto, como 23, diferencia entre los logaritmos del número con que se ha operado y su consecutivo es á x, diferencia entre el log. hallado y el del número propuesto); de donde $x=0,4\times 23=9,2$: añadiendo la parte entera de este producto á la mantisa hallada, porque la decimal es inferior á la del último órden de ella, se tendrá la del número 18429,4 y por tanto la de 184294 (224). Luego log. 184294=5,265511.

Resumiendo. *Para buscar el logaritmo de un número mayor que el límite de la tabla se separan de su derecha suficientes cifras para que el de la izquierda esté dentro del límite, se halla la mantisa correspondiente á esta parte, y se le añaden los enteros del producto de la parte separada por la diferencia tabular.*

229. El logaritmo de los productos, fracciones, potencias y raíces se hallará despues de esto fácilmente, teniendo en cuenta las propiedades generales explicadas. Sin embargo, al de las fracciones decimales se le suele dar una forma particular, que es la siguiente: como su denominador es la unidad seguida de ceros, su logaritmo serán unidades completas que habrá que restar del logaritmo que se encuentra para la frac-

cion, considerándola como entera; esta sustraccion se hace sólo de la característica; el resto es negativo y la mantisa positiva, lo cual se indica escribiéndole al resto de la característica el signo — encima. Así: logaritmo 0,00346 = logaritmo 346 — 5 (pues el denominador es 100000) = 2,539076 — 5 = $\bar{3}$,539076.

230. *Luego para hallar el logaritmo de una fraccion decimal se prescinde de la coma y se ponen tantas unidades negativas de característica como indique el lugar que ocupa su primer cifra significativa despues de la coma.*

231. Dado un log.º hallar el número correspondiente. Para resolver esta cuestion se prescinde de la *característica*, toda vez que sólo sirve para indicar cuántas cifras enteras tiene el número que se busca. Atendiendo sólo á la *mantisa*, pueden ocurrir dos casos:

1.º Que la mantisa del log. dado esté en la tabla. 2.º Que esté comprendida entre dos de la tabla.

1.º Si la mantisa se encuentra en la tabla, se toma el número que le corresponde en la columna N. Las unidades de la característica dirán si se le debe dejar tal como se encuentra, ponerle uno ó más ceros, ó separarle una ó más cifras decimales.

Ejemplo.—Sea el log. dado 3,541704. Para buscar esta mantisa se buscan primero 54 entre las cifras aisladas de la columna log. 0; una vez encontradas, se buscan las otras cuatro, 1704, entre los grupos de á cuatro, para los cuales rigen las dos primeras, y se verá que la mantisa propuesta se halla en la tabla y el número que tiene enfrente en la columna N es 348, que, junto con el 1 que encabeza la columna donde están las cuatro últimas, dice 3481: como la característica es 3, el número encontrado es el pedido; pero si hubiera sido la característica 5, habria que agregarle dos ceros para que sus cifras enteras fuesen 6. Así, el número sería 348100, y si por el contrario la característica hubiera sido 1, se le separarian al número bastantes cifras decimales hasta dejarle sólo dos enteras, y sería 34,81: si la característica fuese $\bar{2}$, el número sería una fraccion decimal, cuya primer cifra significativa sería la segunda, ó sea 0,03481.

2.º Si la mantisa dada no está en la tabla, se *busca la próxima menor y se escribe el número á que corresponde: para hallar las cifras complementarias se divide la diferencia de los dos logaritmos* (encontrado y el dado) *por la diferencia tabular*. La característica marcará las cifras enteras. Este procedimiento es el inverso del explicado (n.º 228-2.º): se apoya en la misma proporcionalidad, sólo que ahora la incógnita es la diferencia de los números.

Ejemplo. Sea el log. dado 3,641002: la mantisa próxima menor de la tabla es 640978, que corresponde al n.º 4375; para hallar las cifras complementarias se restan las dos mantisas (hallada y dada), cuya diferencia, 24, se divide por la tabular, 99, y el cociente (hasta la segunda cifra), 24, se agrega al número encontrado, que dirá 437524. Ahora, como la característica es 3, el número pedido será 4375,24.

232. *El uso de los logaritmos para simplificar los cálculos* es evidente, pues se ha visto que la multiplicacion se convierte en suma, la division en resta, la elevacion á potencias en el producto dos factores y la extraccion de raíces en una division simple.

Ejercicios. 1.º *Hallar los logaritmos de los números siguientes:*

Log. 14459809, log. 3,614699, log. 0,0013514133, logaritmo $522076\frac{2}{13}$.

Resp. 7,160162 0,558072 $\overline{3}$,130788 5,717734.

2.º *Dados los logaritmos siguientes, hallar los números á que corresponden.*

Logs. 0,781343 4,000567 5,616583 0,230761.

Núms. log. 6,044254.... log. 10013,07.... log. 413602,8.... log. 1,701222....

Calcular por logaritmos la expresion $\sqrt[5]{\frac{13}{16}}$; para ello se llama x su valor, y tomando los logaritmos de la expresion

$$\sqrt[5]{\frac{13}{16}}=x \text{ se tiene log. } x=\frac{\text{log. }13-\text{log. }16}{5}=0,959322.$$

Como este ejemplo los siguientes: $\sqrt[6]{235,78}=1,295695$

$$\left(2\frac{5}{6}\right)^9=11767,34 \quad \left(317\frac{3}{4}\right)^{0,6}=31,71403$$

$$243\sqrt[3]{\frac{716,5}{\sqrt{2}}}=1,295695 \quad \frac{\sqrt[16]{43+5\sqrt[3]{278}}}{\sqrt[16]{\sqrt[5]{17}}}=1,209435.$$