TEORIA TRANSCENDENTAL

DE LAS

CANTIDADES IMAGINARIAS.

Bernardo Ferrer

José M.ª Rey

26 am.

TEORÍA TRANSCENDENTAL

DE LAS

CANTIDADES IMAGINARIAS

POR

DON JOSÉ MARÍA REY Y HEREDIA.

PRECEDIDA DE UN PRÓLOGO-BIOGRAFIA

POR DON PEDRO FELIPE MONLAU

de la Real Academia Española.

PUBLÍCASE Á EXPENSAS Y BAJO LOS AUSPICIOS DEL GOBIERNO DE S. M.

MADRID

CARLOS BAILLY-BAILLIERE

Plaza del Príncipe Don Alfonso (antes de Santa Ana), núm. 8.

1865.

Il faut refaire les Mathématiques, les placer sur un nouveau piédestal : il serait à désirer que ce fût l'œuvre d'un homme nouveau, qui fût étranger aux mouvements et aux progrès des sciences et n'en connût que les premiers éléments.—LAPLACE, d'après COYTEUX.

REAL ÓRDEN.

MINISTERIO DE FOMENTO.=*Instruccion pública.*=*Negociado* 4.º=Ilmo. Sr.: Reconocida por el Real Consejo de Instruccion pública, como obra de mérito y digna de publicacion la titulada TEORÍA TRANSCENDENTAL DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS, que ha dejado inédita D. José María Rey y Heredia, Catedrático que fué de Psicología y Lógica en el Instituto del Noviciado de esta Córte; S. M. la Reina (Q. D. G.) deseando honrar la memoria y singulares dotes de aplicacion, ingenio y modestia de dicho profesor, ha tenido á bien mandar se imprima y publique la mencionada obra á expensas y bajo los auspicios del Gobierno, con cargo al capítulo 20, artículo único del presupuesto general de gastos del Estado.=De Real órden lo digo á V. I. para su inteligencia y efectos consiguientes.=Dios guarde á V. I. muchos años.

Madrid 21 de Noviembre de 1861.=CORVERA.=Sr. Director general de Instruccion pública.

PRÓLOGO.

Del mérito de la presente obra juzgarán por sí mismos los lectores; de las circunstancias de su Autor será bien enterarles brevemente. Y de pleno derecho me corresponde á mí el hacer tal reseña, porque el Autor fue uno de mis mejores amigos, fue mi contrincante en la mas noble de las lides, y mi compañero en el mas satisfactorio de los triunfos; juntos colaboramos en provechosas tareas, comunes fueron durante largos años nuestros intereses, y sin embargo, y contra lo que de ordinario acontece, no hubo entre los dos ni sombra de rivalidad, ni asomo de desconfianza, ni el menor altercado, ni síntomas de tibieza, y mucho menos de indiferencia; nuestra amistad se iba haciendo mas íntima, y mas sólida, y mas inalterable, al compás de los años que iban transcurriendo, y á despecho de las relaciones que en vulgares amistades suelen ser causas ocasionales de celos y recelos, de frialdad y de ruptura. Generoso é inolvidable amigo y compañero! Tú, mejor que nadie, comprendes la sinceridad de mis palabras y de mi cordial afecto; tú, mejor que nadie, comprenderás cuán gustoso tomo la pluma para rendir este leve tributo á tu memoria; y tú, el primero, reconocerás que á mí preferentemente, por deber, tanto como por derecho, me toca darte á conocer á tus lectores. Con este libro les das la medida de tu poderosa inteligencia; yo voy á darles, en sucintas frases, la medida de tu noble corazon.

En las amenas márgenes del Guadalquivir, á la sombra de las maravillas del arte musulman, en la patria de los dos Sénecas, de

Lucano, de Averroes, de Maimónides y del gran Capitan Gonzalo, en la insigne (y por tantos títulos célebre en la historia) ciudad de Córdoba, vió la luz primera D. José María Rey y Heredia, el dia 8 de agosto de 1818, habiendo recibido, en la parroquial de Santa Marina, las aguas lustrales del santo bautismo, que tuvo el gusto de administrarle su señor tio el presbítero D. Pedro de Heredia y Cisneros.

Los padres de nuestro amigo (D. Francisco Rey, hoy difunto, y Doña Josefa Heredia, que actualmente vive en Córdoba con los restantes hijos) eran pobres; mas ¿qué importa la humildad de la cuna de un hombre, cuando Dios le hace prócer por la inteligencia? Mucho peor suerte les cabe á aquellos que envueltos, al nacer, en la púrpura y las holandas de la aristocracia, han de pertenecer toda su vida á la plebe de los entendimientos.

Las primeras letras (en la Escuela Pia) y la latinidad (con el preceptor D. Juan Monroy) iniciaron al jóven en la brillante senda que le estaba reservado recorrer. Escasos de recursos se hallaban sus padres; mas el preceptor de Latin, que habia reconocido en su discípulo un talento nada comun, instó con decidido empeño para que á todo trance, y á costa de cualquier sacrificio, se le diese una carrera literaria. ¿Cuál es el sacrificio que no harán los padres por un hijo, y por un hijo de raras dotes mentales?..... No pregunte el lector por los apuros en que se vieron los buenos padres, ni por las privaciones que amorosos se impusieron; conténtese con saber que el 1.º de octubre de 1833, su hijo ingresaba de colegial interno en el renombrado Seminario conciliar de San Pelagio.

El impulso estaba dado: el corazon de los padres habia hecho su oficio, la cabeza del hijo hará lo demás. Tres años de Filosofía y siete de Sagrada Teología cursó, en efecto, el jóven seminarista, y siempre y constantemente fue el *primero*, el que sobresalió de mucho, entre el considerable número de alumnos que concurrian á las aulas de San Pelagio. Once años pasó en el famoso Seminario, y desde el segundo mereció ya que se le otorgara el beneficio de beca entera, y en los cuatro últimos desempeñó, con el carácter de *Pasante*, la enseñanza sucesiva de todas las asignaturas de Filosofía, y dió un curso de Instituciones teológicas. Durante los dos últimos años tuvo, además, el cargo de Bibliotecario de la pública Episcopal de Córdoba.

Hechas sus primeras armas en el magisterio con el acierto y lucimiento que todavia se recuerdan en el Seminario de Córdoba, natural fue que no abandonase la carrera del profesorado. Ya, por designacion espontánea de la Junta de gobierno de la provincia, se quiso poner á su cargo (en 4 de agosto de 1843) la cátedra de Lógica del Colegio nacional de Nuestra Señora de la Asuncion de Córdoba; pero consideraciones ajenas á la Instruccion pública le decidieron á no hacer uso de aquel nombramiento. Su indisputable aptitud, probada en pública oposicion y rigoroso certámen, le llevó muy luego (1844) á profesar la Lógica en el Instituto de Ciudad-Real, donde hubiera podido obtener tambien la cátedra de Matemáticas, si antes no se le hubiese conferido la propiedad de la de Lógica. Para ambas poseia igual idoneidad, como para las de Religion y Moral, Geografía y Francés, que mas de una vez substituyó el aventajadísimo *Pasante* de San Pelagio.

Nuevos ejercicios de oposicion le trajeron en 1848 á una de las dos cátedras de Psicología y Lógica vacantes en los Institutos de Madrid. Pasaban de doce los combatientes, entre los cuales los habia muy aguerridos, pero solo quedaron en pié, despues de la lucha, D. José Maria Rey y Heredia, de toda justicia el primero, y el que estas líneas escribe, por gracia de los jueces, el segundo. La suerte nos hizo contrincantes en la binca ó pareja para ejercitar, y entonces pude conocer y admirar de cerca el rico caudal de inteligencia y de bondad que poseia mi ilustre competidor, ya desde aquel punto mi mejor amigo, porque era imposible conocer á D. José Rey y Heredia, y no estimarle, y era imposible estimarle sin que él correspondiera con una efusion, una simpatía y un rendimiento indecibles.

Compañeros ya de profesorado, nos asociamos al efecto de escribir un *Curso* para la asignatura que desempeñábamos, tomando yo á mi cargo la *Psicología*, y Rey la *Lógica*. Esta última es inmejorable: aprobado nuestro libro por el Real Consejo de Instruccion pública, quince años há (desde 1849) que está sirviendo de texto en la mayor parte de los Institutos y Colegios del reino. Mis *Elementos de Psicología* podrán tener defectos, pero desafío á cualquiera á que señale uno substancial en los *Elementos de Lógica* de Rey y Heredia. ¿Quién mejor que un pensador tan recto y profundo como mi malogrado compañero, podia condensar didácticamente las leyes del pensamiento y la disciplina de la inteligencia, para uso de la juventud escolar? En España, como en América y en el extranjero, ha merecido mil elogios la *Lógica* de Rey y Heredia, y es tenida por libro verdaderamente *clásico*, sin que ni el tiempo ni la pasion puedan jamás despojarle de ese calificativo, porque las leyes del pensamiento son inmutables como el Dios que las trazó, y porque el método expositivo adoptado es el mas filosófico, á la par que el mas claro, sencillo y *docente*.

Mis amistosas y repetidas sugestiones fueron mas adelante necesarias para vencer su exquisita modestia, y obligarle á escribir unos *Elementos de Ética* para el uso de nuestros discípulos. Para redactar una *Lógica* es necesario ser un gran pensador; para escribir una *Ética* es necesario ser un gran hombre de bien. Las dos grandezas se reunian en mi comprofesor. Rey y Heredia se habia estudiado, y estudiaba, para conocerse, y solamente queria conocerse para perfeccionarse, para ser todavia mejor de lo que era, á pesar de que era bonísimo. Interrogar el alma por medio de la conciencia, y en virtud de un mismo esfuerzo de sincero y profundo análisis adquirir y merecer á la par la certeza de su inmortalidad, y explicar la voluntad para disciplinarla y reglarla, era el campo en que ejercitaba sus habituales meditaciones nuestro preclaro moralista, verdadero *vir bonus, philosophandi peritus*. La *Ética* se dió á la estampa en 1853, y desde entonces pregonan su mérito y valor científico la aprobacion del Gobierno de S. M., cinco ediciones sucesivas, y el juicio crítico de todos cuantos inteligentes la han examinado.

¡Cuán feliz debia ser una mujer al lado de un esposo como don José María Rey y Heredia! Fuelo, en efecto, la jóven, bella, virtuosa y simpática Doña Teresa Gorrindo y Castro (hija de D. Pedro Gorrindo, honrado comerciante y vecino de Córdoba); pero lo fue por poco tiempo: ni un lustro de extension (*) llegó á coger el espacio entre el velo nupcial y el sudario del ataúd!!! Gran fortuna que, como prenda de amor conyugal, quedó un hijo (**), hoy huérfano de padres, pero

(*) Recibieron los esposos la bendicion de la Iglesia, en la parroquial de San Pedro de Córdoba, el dia 11 de septiembre de 1851, y falleció la esposa á la temprana edad de 24 años, el dia 24 de abril de 1856.

(**) Don Pedro Rey y Gorrindo nació en Madrid el 18 de febrero de 1854, siendo bautizado en la Iglesia parroquial de San Ildefonso.

ídolo del cariño de toda la familia, é ídolo tambien de los que fuimos amigos y admiradores de su padre. La vida de este, sin embargo, quedó desde entonces como mutilada: el dia en que perdió á su querida esposa habia recibido Rey una herida de muerte. Herido y lastimado, no tardó en asomar en su pecho, predominadora ya, la enfermedad insidiosa y consuntiva que habia segado en flor la vida de la tan buena como hermosa Teresa; y que tambien habia de llevar prematuramente al sepulcro á su esposo. En vano buscaba este un consuelo en la música ó en sus estudios favoritos: desde 1856 llevaba Rey una espina hondamente clavada en el corazon, y las espinas del corazon no se arrancan. Comprendiólo sin duda por secreto instinto, y todo su afan se redujo ya á hacer el *testamento* de su vigorosa inteligencia, que así puede llamarse el libro al cual sirven de Prólogo estas líneas.

Cien veces habíamos oido á Rey, sus compañeros mas íntimos, lamentarse de que las *Matemáticas*, con todo y ser hoy tan frecuentes y portentosas sus aplicaciones, eran rara vez consideradas bajo su aspecto metafísico y transcendental, doliéndose, como de una profanacion, al ver que son tantos los que operan sobre la *cantidad*, el *número*, el *espacio*, etc., y tan pocos los que comprenden á fondo estas nociones fundamentales, ó saben darse razon adecuada de las mismas teorías que rutinariamente han aprendido, y por rutina aplican. A concederle Dios algunos años mas de vida, Rey y Heredia hubiera sacado á las Matemáticas del seno del empirismo en que generalmente yacen, y el orbe científico le habria sin duda aclamado como el restaurador, si no el creador ó reformador, de la *Filosofía de las Matemáticas*, señalándole en la historia del saber humano un puesto análogo al que ocupan Newton, Descartes, ó Bacon. Y no son estas puras hipérboles de Prólogo, ó vanas ilusiones de la amistad, no; son legítimas conjeturas autorizadas por la muestra de la série de estudios que se habia propuesto, por su Teoría *transcendental de las cantidades imaginarias* que comenzó á escribir en 1855, y de la cual puede hoy ya, á Dios gracias, disfrutar la ciencia.

Volveremos á hablar del libro antes de concluir este su Prólogo. Digamos ahora que D. José María Rey y Heredia, modesto siempre y por todo extremo, no ambicionó, antes rehuyó constantemente, la pompa de los grados y el lujo de los títulos académicos. Por exigencia de los Reglamentos, tomó los grados de Bachiller en Filosofía (1846),—Regente de Psicología y Lógica (1847),—y Licenciado en Filosofía y Letras (1857),—y por reiteradas instancias de sus amigos, tomó los grados de Bachiller (1852) y de Licenciado (1854) en la facultad de Jurisprudencia, cuyos estudios hizo en la Universidad Central, simultaneándolos con el desempeño de su cátedra en el Instituto del Noviciado. Hechos tenía tambien, con la brillantez que se deja suponer, los estudios superiores para el Doctorado en Filosofía y en Jurisprudencia, pero nunca pudimos decidirle á tomar un grado cuya pompa se avenia muy mal con su ejemplar sencillez y modestia.

Estas mismas dotes, tan sobresalientes en nuestro amigo, hicieron tambien que nunca aspirase á obtener títulos de Academias y Sociedades. Únicamente por lo notorio de su talento y de sus antecedentes literarios, que no por sus instancias, y quizás contra sus deseos, fue, en 1842, nombrado sócio de la Económica de Amigos del País y Académico de la general de Ciencias, Bellas letras y Nobles artes de Córdoba, su ciudad natal y primer teatro de sus glorias científicas y literarias.

Repugnábanle los *grados* y los *títulos*, pero siempre se le hallaba dispuesto para prestar *servicios*. En 1851 prestó conmigo el de ser juez del Tribunal de censura de los ejercicios de oposicion para la cátedra de *Ampliacion de la Filosofía y su historia*, á la sazon vacante en la Universidad de Sevilla; y á mí me prestó tambien el servicio de suplirme en la Escuela Normal de Filosofía dando, durante el curso de 1851-52 (época en que hube de trasladarme á Paris con una comision sanitaria oficial del Gobierno de S. M.), las lecciones correspondientes de *Psicología empírica y racional*, con gran ventaja para los alumnos de aquella Escuela, semillero de buenos profesores (todos sus alumnos lo son hoy, y muy distinguidos, en las Universidades ó en los Institutos), y, sin embargo, con el mas infeliz acuerdo suprimida por Real decreto de 17 de septiembre de 1852. ¡Ojala la veamos cuanto antes restablecida! Esta optacion nos arranca, no tanto el cariño que naturalmente debemos profesar á aquella Escuela y á sus aventajadísimos alumnos, como el deseo de que los Institutos y Colegios de segunda enseñanza tengan, como tienen todas las naciones cultas, un seminario que facilite cubrir dignamente las seiscientas, ó mas, plazas de catedrático que cuenta ese importantísimo grado de la Instruccion pública del reino.

El mal cundia entre tanto, siguiendo su inexorable curso, y el perspicaz doliente no se hacia ya ilusiones acerca de su estado. Hallándose en Córdoba con licencia superior, el 2 de febrero de 1861, y ante el escribano D. Pedro Aguilar y Perez, ordenó su testamento, nombrando tutor de su hijo á su hermano D. Joaquin Rey y Heredia, escribano de la misma ciudad de Córdoba. Este hermano amantísimo desempeña hoy su cargo con un celo, esmero y desinterés admirables; desempéñalo como una especie de culto que de justicia rinde en el huérfano á la memoria del padre, á la memoria de aquel hermano malogrado que compartió con él su escaso sueldo para mantenerle cursando en Madrid la carrera del Notariado que hoy con tanto lustre como merecida suerte profesa. D. José Rey y Heredia era, en efecto, el padre de sus jóvenes hermanos, y aunque con exiguos recursos pecuniarios, sus tesoros de amor y de bondad alcanzaban todavia para ayudar en algo á sus ancianos padres, y hasta para socorrer á algunos amigos desgraciados. Tal cual de estos le fue ingrato; pero él no sabia, ni podia, ni por asomo queria concebir la ingratitud. Conocia á los hombres, se conocia á sí mismo, y veia que el Cielo le habia destinado para amar á sus semejantes y hacerles todo el bien imaginable, otorgándole una constitucion moral de todo punto incompatible con el ódio, la malquerencia, la murmuracion, ni la queja. ¡Inolvidable amigo! Con dotes tan raras y excepcionales, ¿qué extraño es que no hayas dejado ni un solo enemigo, ni un solo descontento de tí, sobre esta tierra tan miserable? ¿Qué extraño es que tu familia vista constante luto, y vierta eterno llanto sobre tu sepulcro, é idolatre en tu Perico la memoria del mejor de los hijos, del mejor de los hermanos, del mejor de los esposos y de los padres, del fénix de los amigos?..... El sepulcro es el crisol de la gloria (ha dicho un filósofo contemporáneo), y de ese crisol ha salido considerablemente aventajada y sublimada la gloria de nuestro Rey y Heredia.

Su alma pura, prévia la última santificacion por los Sacramentos, abandonó la cárcel del cuerpo el lunes dia 18 de febrero de 1861 á las tres menos cuarto de la madrugada. ¡Dia de dolor universal para Córdoba, su patria! Dolor verdaderamente sentido, y espontáneamente manifestado en los funerales que se celebraron á las cinco de la tarde del siguiente dia, y á los cuales concurrió una multitud de personas de todas clases, ansiosa de tributar el último homenaje al ilustre compatricio. Presidia el duelo una Comision del Excmo. Ayuntamiento de Córdoba, en compañía del anciano y venerable Dean de aquella Santa Iglesia, D. Juan Gutierrez Correa, director espiritual del finado, de los Directores del Seminario y del Instituto de segunda enseñanza, de los profesores y alumnos, internos y externos, de la Escuela Normal, de la de Veterinaria y de los Colegios, etc.

Pocos dias después, en cabildo del 20 de febrero de 1861, dábase cuenta al Cuerpo municipal de la siguiente mocion:

«Excmo. Sr.: Deber es de la Corporacion que tiene el alto honor de representar la insigne y antigua ciudad de Córdoba, preclara madre de sabios, como la llamó un escritor antiguo, el transmitir á la posteridad, orlados con la aureola de gloria, respeto y consideracion á que son acreedores, los nombres de aquellos sus ilustres hijos que, elevándose por su mérito relevante sobre el nivel de sus contemporáneos, dan honra y prez á su patria.—En este caso se encuentra D. José María Rey y Heredia, cordobés tan modesto y probo, como sabio profundo, sobresaliente en el profesorado, y no menos distinguido escritor, que ha bajado al sepulcro casi en sus mas floridos años, cuando mas ópimos y sazonados frutos esperaba la patria de su privilegiada inteligencia.—Por tanto, el Alcalde que suscribe tiene el honor de proponer á la Corporacion municipal se sirva perpetuar la memoria del sabio escritor público D. José María Rey con el acuerdo siguiente:

1.° »Se concede bovedilla perpétua á su cadáver en el cementerio de la Salud.

2.° »Se pagará por la Corporacion, y cargo al capítulo de Imprevistos, la lápida que cubra sus restos mortuorios, proporcionando así, y de una manera indirecta, un pequeño socorro á su desconsolada familia.

3.° »Se procurará adquirir un retrato suyo, el cual se depositará en la sala de sesiones, donde, á ejemplo de lo que en otras partes se hace, debe procurarse formar una coleccion de retratos de cordobeses ilustres.

4.° »Se mudará el nombre de la calle en que ha ocurrido su fallecimiento, la cual deberá llamarse, en lo succesivo, Calle de José Rey.

»*Córdoba* 19 *de febrero de* 1861.—Cárlos Ramirez de Arellano.»

Por voto unánime, y en todas sus partes, aprobó el Ayuntamiento la mocion de su celoso é ilustrado Alcalde, confiando al mismo la ejecucion inmediata de los acuerdos tomados.

Poco tardaron en verse estos cumplimentados, puesto que el 1.° de noviembre de 1862 ya se inauguraba, enteramente concluido y asentado, en el cementerio de Nuestra Señora de la Salud, un sencillo y elegante monumento sepulcral, concebido y diseñado espontáneamente por el arquitecto titular D. Rafael de Luque, labrado, en su parte correspondiente, por el marmolista italiano D. José Frápoli, de Sevilla, y costeado todo por el Ayuntamiento. Campea en una de las losas la siguiente inscripcion:

DON JOSE MARIA REY Y HEREDIA.
R. I. P.
1861.

completada en otro mármol con la siguiente dedicatoria:

AL ILUSTRE
ESCRITOR
Y VIRTUOSO
CIUDADANO,
EL AYUNTAMIENTO
CONSTITUCIONAL
DE SU PATRIA
CÓRDOBA.

El retrato fue colocado en la sala consistorial el 15 de julio de 1861, llevando al pié la siguiente inscripcion:

«*Para perpetuar la ilustre memoria del sabio profesor de la Universidad Central y escritor, D. José María* REY *y* HEREDIA, *mandó hacer el presente retrato la Municipalidad de Córdoba, su patria, en* 1861.»

La calle de Santa Clara, en cuya casa núm. 12 falleció el insigne cordobés, tomó desde el 4 de septiembre de 1862 el nombre de JOSÉ REY.

En el retrato están figurados los volúmenes que representan los tan conocidos tratados de *Lógica y Ética*, y el libro de la *Teoría de las Imaginarias* que hoy ve la luz pública, y acerca del cual será bien añadir algunos pormenores que justifiquen de cierta manera el nombre de PRÓLOGO dado al presente escrito.

Examinada por el Real Consejo de Instruccion pública la *Teoría transcendental* de REY Y HEREDIA, y evidenciado su mérito, recayó en su virtud la Real órden de 21 de noviembre de 1861, que va transcrita después de la portada del presente libro.

En cuanto el Ayuntamiento de Córdoba tuvo noticia de esa soberana resolucion, se apresuró á felicitar á la angustiada madre del Autor en los siguientes términos:

»Alcaldía constitucional de Córdoba.=El Ayuntamiento de mi presidencia, en sesion de 30 de noviembre último, se ha enterado con satisfaccion de la Real órden de 21 del mismo, por la cual se ha dignado S. M. resolver que á expensas, y bajo los auspicios del Gobierno, se imprima y publique la obra titulada *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias*, que ha dejado inédita su malogrado hijo de V. Don José María Rey y Heredia; tributando así á su memoria la honra que con sus afanes y claro talento supo conquistarse, y que no ha podido menos de autorizar el Real Consejo de Instruccion pública en la censura de esa produccion científica.

»El Ayuntamiento, que fue el primero en rendir el homenaje debido á un cordobés tan apreciable por sus raras dotes como por su probidad y modestia, participa de la satisfaccion que á V. ofrece ese testimonio público, con que la munificiencia soberana dulcifica á V. las amarguras de tan sensible pérdida, y ha resuelto, por lo tanto, dar á V. por ello el mas sincero y afectuoso parabien, como una nueva muestra de las simpatías que el nombre de su señor hijo tiene arraigadas en el corazon de todos los miembros del Municipio.

»Dios guarde á V. muchos años.=*Córdoba* 2 *de diciembre de* 1861.=Cárlos Ramirez de Arellano.=Señora Doña Josefa Heredia, viuda de Rey.»

De la satisfaccion del Municipio de Córdoba participarán en España, y fuera de ella, todos cuantos se interesen por el cultivo y los adelantamientos de la ciencia matemática. El Consejo de Instruccion pública, proponiendo, y el Gobierno de S. M. acordando la impresion de la *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias*, han rendido el mas alto homenaje posible al talento del Autor, y añadido un floron á la corona científica de España, de esta España, que tan solo demanda paz y proteccion para reproducir aquellas épocas brillantísimas en que su teatro y su literatura, sus doctores y sus universidades, sus labores y sus descubrimientos científicos, le conquistaron el timbre de *potencia de primer órden* en la esfera de la inteligencia, cual sus armas y el valor de sus hijos le habian ganado igual calificacion en la esfera de la política y de la dominacion territorial.

El Autor no puso *Prólogo* á su obra, pero dejó una especie de *epílogo*, verbal, sí, pero fielmente recogido por el atentísimo amor de su querido hermano Joaquin. Hé aquí con toda puntualidad la manifestacion que hizo en su lecho de muerte:

«*No sé si el mal que hace tiempo me consume me permitirá escribir el* Prólogo *de mi* Teoría transcendental de las cantidades imaginarias. *Si algun dia llega á publicarse, cuidarás de que aparezca consignado lo que sigue:*

»*A fines de* 1850, *y muy pocos dias despues de conocer á mi amigo y compañero* D. Acisclo F. Vallin y Bustillo, *catedrático como yo en el Instituto del Noviciado de la Universidad de Madrid, tuve, no sé si la fortuna, ó la desgracia, de que advirtiese* *en mí alguna aficion al estudio de las ciencias exactas, consultándome varias veces sobre diferentes puntos de los Elementos de Matemáticas que por aquella fecha empezaba á publicar, y que tan ventajosamente sirven hoy de texto en muchos Establecimientos de segunda enseñanza.*

»De nuestras conferencias y discusiones sobre todos los ramos de la ciencia se formó mi buen amigo un concepto tan superior de mis escasos conocimientos, que me instó una vez y otra á escribir algunos opúsculos sobre las principales cuestiones filosófico-matemáticas que tratábamos en nuestras conferencias, y que sirviesen como de introduccion á la completa reforma de la ciencia. Llegó su empeño hasta el punto de anunciar en una de las ediciones de su obra estos mismos opúsculos, obligándome así á dar forma al que considerábamos siempre como el mas predilecto, y tambien como el mas difícil y transcendental para servir de base á los demás.

»A la perseverancia de mi consecuente amigo, por espacio de muy cerca de diez años consecutivos, durante los cuales he sufrido tristísimas desgracias de familia, se debe que haya al fin terminado mi trabajo. Conozco bien las grandes dificultades de una obra completamente nueva.... no sé el concepto que merecerá al Real Consejo de Instruccion pública; pero si alguna consideracion quieren dispensarme, y desgraciadamente fallezco antes, mi pobre hijo..... No puedo seguir, JOAQUIN: *la afliccion me ahoga.....»*

En efecto, cuarenta y ocho horas después, y muchas de ellas pasadas en el delirio precursor de la muerte, se extinguió para los mortales aquella lumbrera privilegiada, volando á unirse con la Bondad suma su alma bonísima y toda amor.

El Sr. VALLIN Y BUSTILLO, tuvo la singular fortuna de sugerir á REY Y HEREDIA la composicion de la profunda TEORÍA que hoy se da á la estampa;—á sus perseverantes instancias se debe que el Autor venciera su gran modestia, y que mas adelante luchara con la flojedad orgánica concomitante de la traidora enfermedad consuntiva;—y al ardiente celo é incansable laboriosidad del mismo Sr. VALLIN se debe el trabajo de formar y reducir todas las figuras que van intercaladas en el texto, así como la comprobacion y rectificacion de los cálculos y la penosa tarea de dirigir la impresion de este libro, y de pasar las pruebas, por encargo especial de la Direccion general de Instruccion pública, á la cual contestó, aceptando la comision, diciendo, entre otras cosas:

Después de lamentar, muy de veras, la pérdida de mi malogrado amigo y compañero, de cuyo talento extraordinario y vastísimos conocimientos filosófico-matemáticos tanto podia esperar nuestro país, acepto con gusto el honroso encargo de V. E., considerándome muy satisfecho con poder contribuir, siquiera sea en tan pequeña parte, á que los hombres de ciencia de dentro y fuera de España puedan admirar el profundo saber y la rara modestia del autor ilustre de la *Teoría transcendental de las cantidades imaginarias.*

Yo felicito por todo á mi excelente compañero y amigo; yo le envidio la buena suerte de haber sido en algun modo el asiduo colaborador de la nueva y transcendental Teoría; y me complazco en dejarlo aquí consignado para su satisfaccion, y en muestra tambien del agradecimiento vivísimo que por ello sentimos, á la par de la familia del Autor, todos sus amigos y compañeros.

¡Disfrute ya la ciencia de las profundas lucubraciones de Rey y Heredia, y sean ellas la base de ulteriores progresos en las ciencias exactas! ¡Sea este libro la ejecutoria mas preciada de un pobre huérfano!..... y quedará satisfecha toda la ambicion generosa del padre.

P. F. Monlau.

INTRODUCCION.

I

Cuando una ciencia que con visos de razon se gloria de llevar el título de *exacta*, consagra uno de sus capítulos á tratar del absurdo y del imposible como objetos de su especulacion, fundamento hay para sospechar ó que se ha arrogado presuntuosa un título inmerecido, ó que en los principios sobre que está basada anda ocultó algun vicio, algun pecado de comision ó de omision.

El primer defecto no puede achacarse á las ciencias matemáticas, sin desconocer su verdadera índole demostrativa y lógica; la suposicion segunda es mas justa, á la par que menos injuriosa para estas ciencias.

No es, con efecto, muy raro ver en ellas eclipsada su claridad por puntos obscuros, tanto mas fáciles de percibir cuanto aquella es mas brillante y diáfana, y cuanto mas cercanos se hallan al orígen primero de donde se irradia la luz, porque entonces se extiende detrás de ellos una inmensa sombra que anubla grandes espacios del campo matemático. Privilegio es este de las ciencias que se hallan constituidas, organizadas y modeladas, segun las leyes del espíritu que las crea por su virtualidad propia: un concepto mal definido, una division incompleta, un primer raciocinio inconcluyente, son como cuerpos opacos que atajan el paso de la luz y producen el eclipse, ó bien figuran el efecto de una ligera paja, que, puesta demasiado cerca del ojo, nos oculta una montaña.

Con todo, no son las ciencias matemáticas, evidentes y exactas por esencia, las que se hallan mas expuestas á estas obscuridades. Desde su orígen, que es remotísimo en la historia de las construcciones sistemáticas del espíritu humano, nacieron armadas de esa fuerza sintética que las organiza, y bañadas de la purísima luz que las penetra y esclarece: el entendimiento del hombre las concibió y produjo como vaciándolas en un molde que de antemano tuviese preparado allá en lo mas íntimo de su esencia, é imprimió en ellas por instintiva espontaneidad sus propias leyes como formas de su organizacion duradera, y como condiciones de su futuro engrandecimiento. No hay ciencias que tengan una historia mas antigua, ni mas ilustre, que las Matemáticas. Sus nieblas y obscuridades, que tambien las tiene, están muy circunscritas, y sus lagunas muy reconocidas, y sus misterios muy contados; y es de creer que al cabo la Matemática alcance toda su claridad interior y la integridad orgánica de sus formas, trayendo para ello la luz del mismo espíritu por la crítica reflexiva y profunda de las condiciones transcendentales de todo conocimiento. Y esta esperanza se funda en el hecho, cada vez mas patente, de que los puntos mas obscuros, por menos explorados ó mas difíciles de la ciencia, son precisamente aquellos que la ponen en contacto con la filosofía del espíritu humano. De esta filosofía transcendental y crítica es de donde únicamente puede venir la luz: hágase un esfuerzo, remuévase el obstáculo, y ella se derramará á torrentes, inundando con claridad igual todo el cuerpo de la ciencia.

II

Un punto hay mas notable que los otros por su obscuridad, y que reclama con mas urgencia una explicacion crítica. Este punto es el *imaginarismo*, hecho matemático de universal transcendencia, que en sí resume, y como que sistematiza, la contradiccion y el absurdo de tal manera, que no parece sino que se ha despejado de tinieblas todo el ámbito de la ciencia para acumularlas en un solo capítulo. El imaginarismo es el *scandalum mathematicum* constituido en teoría, la derogacion de la regla erigida en regla, el imposible sometido á la misma logística que las cosas posibles, el absurdo considerado como orígen de la verdad y de la realidad. ¡Y con todo eso, las cantidades imaginarias, *absurdas* y *contradictorias*, como se las llama, son para el cálculo algebráico lo mismo que la sangre para el cuerpo humano, que por todo él penetra y se difunde, y todo lo vivifica! ¡La ciencia de la exactitud y del rigor podria decirse que está animada por el absurdo!

Menester es, pues, pensar en cómo se resuelve esa mortal contradiccion, aunque para ello sea necesario borrar y rehacer el plano en que esta ciencia está proyectada; menester es pedir al espíritu humano la clave de ese enigma, que lleva trazas de ser el baldon eterno de la Matemática, si queremos dar á esta ciencia una constitucion tan lógica y tan regular como lo es el juego espontáneo del entendimiento en todos los órdenes de verdades. Es necesaria una *teoría transcendental del imaginarismo*, que salve todas las contradicciones y dé á la ciencia matemática aquel esplendor é integridad á que tiene derecho con mejores títulos que ninguna otra ciencia.

III

No han dejado en verdad de hacerse esfuerzos plausibles, aunque insuficientes, para dar una explicacion del imaginarismo, fundada en *razones puramente matemáticas*; y esta es cabalmente la causa de su insuficiencia y del escaso crédito que ganaron en el parecer de los geómetras. Mientras la generalidad de estos pretende que las *imaginarias* son la expresion pura y simple de la imposibilidad de solucion de algunos problemas contradictorios, otros, siguiendo á CONDILLAC, mas ideólogos que matemáticos, llegaron á considerarlas solo como signos sin significacion, voces sin sentido, términos sin idea, como, segun ellos, lo son muchas palabras de las lenguas que viven en ellas ociosas y sin oficio, vocablos parásitos, viciosas excrecencias del idioma que sirven tan solo para estorbo. Otros vieron, sin duda, gran profundidad lógica en el imaginarismo, pero se contentaron con verla, y no la explicaron más que dando á las imaginarias el expresivo dictado de *símbolos lógicos*. Otros, como WRONSKI, acuden á la nocion del infinito para borrar en el seno de esta idea inmensa, é informe, toda contradiccion que pudiera depender de los límites que determinan la cantidad. Algunos, en fin (y estos son los que en mi juicio aciertan), dan á las imaginarias la representacion de la *perpendicularidad*; y esta opinion, es la que logrará al fin elevarse á la categoría de creencia matemática, cuando en la ciencia pura de la cantidad no se vea más que una revelacion de las leyes inteligenciales del espíritu humano.

IV

A la gloria de este descubrimiento tiene un derecho indisputable Mr. Buée, emigrado francés, que en 1806 publicó, en las *Transacciones filosóficas* de Lóndres, una memoria en la cual puede verse la primera tentativa de interpretacion del imaginarismo por la perpendicularidad. Cierto es que en esa memoria aparece todavía algo vaga é informe la concepcion capital, siendo insuficientes las demostraciones, é imperfectas, y aún erróneas, muchas investigaciones comprobatorias; pero el pensamiento está allí revelado en medio de muchas observaciones originales acerca del uso y significacion de los signos del Álgebra; las consecuencias están como adivinadas por un sagaz presentimiento.

Casi al mismo tiempo, y por consiguiente con legítima pretension de originalidad, dió en esta interpretacion Mr. François, al cual siguió Mr. Gergonne, sin que todavía lograra el nuevo descubrimiento llamar la atencion de los matemáticos franceses.

Mas fortuna tuvo en Inglaterra, donde primero apareció la teoría de Buée, pues se publicaron obras sérias en que la interpretacion fue mejor comprendida, mas generalizada, y hasta introducida como una innovacion en los cálculos. Es notable la obra de John Warren por los teoremas que establece relativamente á la diagonal del paralelógramo, considerada como suma de los lados adyacentes, á la proporcionalidad de las rectas, en la que hace entrar la idea de su inclinacion, á la multiplicacion de los arcos para expresar las potencias de las líneas inclinadas, y al valor en grados que tiene la raíz cuadrada de una recta negativa. La interpretacion del imaginarismo es el alma de todo este libro, intitulado *Tratado de la interpretacion geométrica de las raíces cuadradas de las cantidades negativas* (*).

Siguióle Mr. Jorge Peacock, en su *Tratado de Algebra* (**). La interpretacion se empieza á imponer á los resultados sistematizándose y aspirando á

(*) Cambridge, 1828.
(**) Cambridge, 1830.

una significacion general y comprensiva de todas las posiciones: la teoría trigonométrica comienza á sentir el influjo del imaginarismo, y á poner su notacion y su cálculo al servicio de esta interpretacion. La regla de los signos es tambien mejor comprendida, y los productos entran asimismo en la teoría general de las afecciones de la cantidad.

Mas recientemente parece como despertarse la atencion de los matemáticos en Francia, donde se ve plenamente adoptado el pensamiento de Buée por Mr. Vallés, quien lo sigue hasta sus consecuencias mas remotas (*). En su libro, lleno por otra parte de ideas fecundas respecto de los principios generales del cálculo, entra en el espíritu de esta interpretacion, que ya era mas familiar entre los matemáticos ingleses.

Mr. Mourey pertenece tambien á este número de matemáticos nuevos, y hasta ha llegado á proponer la supresion de la notacion radical de las imaginarias, supliéndola con un índice de inclinacion al cual llama *versor*.

Muy recientemente ha visto la luz pública otra obra notable de Mr. Faure, que contiene curiosas elucubraciones acerca de la expresion giratoria de las raíces imaginarias de las ecuaciones.

Y mientras tan importantes trabajos amenazan con una subversion (que ya era necesaria) en la estructura tradicional de la ciencia matemática, introduciendo como legítimo un nuevo elemento de cálculo hasta ahora despreciado ó desconocido, la mayor parte de los geómetras aparentan indiferencia por esta cuestion, que ya dieron por resuelta con demasiada ligereza, cuando declararon imposibles las raíces de grado par de las cantidades negativas, ó cuando dijeron que las imaginarias no pueden expresar más que el absurdo. De este dogmatismo indolente y lleno de suficiencia apenas sale, y no siempre con acierto, alguno que otro matemático que se precia de pensador. Monsieur Renouvier, crítico y matemático á la vez, se resuelve por la opinion comun, y llega á comparar la interpretacion concreta de las imaginarias con las *cualidades ocultas* de los escolásticos. Mr. Cournot es injusto hasta la inconsecuencia de reconocer como legítima la interpretacion en algunos casos, y de negarla en todos los demás.

(*) Essai sur la philosophie du Calcul.

V

No es de extrañar que un pensamiento tan radicalmente innovador encontrase tibios, y aún resistentes, á los matemáticos de este medio siglo que va corrido; porque no puede pensarse en esa perpendicularidad revelada por el imaginarismo, sin que al momento nos veamos forzados á abandonar como insuficiente y mezquina la nocion hasta ahora formada del Álgebra y de todas sus aplicaciones.

Donde la ortografía matemática no reconoce mas afecciones que la positiva y la negativa, que se traducen por direcciones á derecha é izquierda, ¿qué significacion puede tener esa afeccion perpendicular, y como neutra, que se escapa de la direccion interna de una recta, que es la mas legítima representacion de un número? ¿Acaso el Álgebra, que no es más que *la generalidad numérica*, ha de contener tambien la expresion de todas las direcciones que reconoce y estudia la Geometría? Eficaz parece esta reflexion, la única tal vez en que podria escudarse el desden con que hasta aquí se tratara aquella feliz inspiracion del matemático francés: mas para atajar en su orígen la pretension de rutinario quietismo que envuelven esas dos interrogaciones, quisiéramos haber puesto en boca de los innovadores estas otras dos preguntas no menos perentorias: ¿es por ventura exacta la nocion vulgar del Álgebra, *generalidad numérica*? ¿Puede haber afeccion ó relacion geométrica que no sea representable por el Álgebra? Yo digo resueltamente que no: y presento como demostracion de mi aserto el contenido material de este libro, porque creo firmísimamente que el que lo leyere, y entendiere hasta el fin, estará conmigo en la razon.

Pero antes de llegar á esa lectura, y como preparacion para la inteligencia del libro, demos una idea del Álgebra en su verdadera naturaleza transcendental, y expliquemos el ideal superior á cuya realizacion aspira ella hoy mismo, á pesar del menguado papel á que en vano la condenan las definiciones estampadas al frente de los tratados, y á pesar de ese empeño con que son rechazadas las conclusiones que establece la Lógica transcendental. El Álgebra crece, se organiza y se levanta poco á poco al rango superior que le está destinado en el cuadro de las ciencias exactas, aunque, segun **Laplace**, *todavía está por hacer la Metafísica de estas ciencias*, y no ha llegado aún á ella ese impulso vital, esa renovacion feliz, que todo órden de conocimientos puede y debe recibir de la crítica de la razon humana.

VI

No basta que sean muy ámplias y comprensivas las definiciones que del Álgebra suelen dar los tratadistas, cuando la presentan unos como tratando de la *cantidad en general*, y otros como explicando el sistema de operaciones que han de practicarse sobre las *cantidades* dadas, para hallar otras desconocidas ó para resolver un problema, si en seguida, como pesarosos de tamaña largueza, restringen la nocion de cantidad á la puramente numérica y cifran toda la excelencia y superioridad del Álgebra en la generalidad é indeterminacion con que el número es tratado por ella, dejando, por supuesto, á la Aritmética el manejo y la combinacion de números determinados. No es suficiente esa mayor generalidad *característica*, ó puramente *simbólica*, para distinguir el espíritu algebráico del aritmético, ó para que el Álgebra pueda ser algo más que una *Arithmetica speciosa*, como se acostumbraron á considerarla sus primeros cultivadores. Es un error creer que las fórmulas á que conduce el cálculo son mas generales que los teoremas que enuncia y demuestra la Aritmética respecto de los números, solo porque en las fórmulas se emplea una notacion indeterminada, siendo así que los teoremas aritméticos no reciben su valor demostrativo de la particularidad ó determinacion de los números con que suelen ser ejemplificados, sino de los principios y relaciones generales que se contienen en la nocion del número concebido como cantidad. Si para mayores facilidades en la invencion analítica, el formulismo algebráico es preferible á la notacion aritmética, de suyo mas particular y concreta, no se ha de creer por esto que las fórmulas son mas generales ó mas superiores que los teoremas. Una diferencia, ó una ventaja, en la ortografía de la ciencia no cambia el fondo de ella, ni es bastante para colocar sus conclusiones en otra categoría que la que les corresponde como limitadas al número, cualquiera que sea el sistema de signos con que este sea expresado. Esta imperfecta nocion del Álgebra es sin duda la causa de ese vacío que hallan, y de ese tedio que experimentan los que por vez primera penetran en su estudio: y es que ven al pronto frustrada su esperanza de novedad en el objeto, se quedan al mismo tiempo privados de la claridad intuitiva de la notacion numérica, y no conocen todavía la tan ponderada ventaja de los signos alfabéticos. No ven, en suma, que se trate de un nuevo órden de números, ó del número bajo un nuevo órden de conceptos, en el Álgebra que en la Aritmética, lo que por lo menos tenian derecho á esperar al ser iniciados en esta superior categoría de verdades matemáticas; y por esto, son necesarios grandes esfuerzos de parte del que enseña, para procurar una fácil transicion de unos á otros estudios; y casi es menester recurrir á una alteracion del órden natural de la exposicion científica, ó á una revelacion anticipada y casi extemporánea del misterioso secreto del procedimiento analítico, para cautivar al iniciado con aquella facilidad y expedicion en el obrar, que se le promete para después de sufrido el tormento del llamado cálculo algebráico.

Entonces es cuando el Álgebra hace gala de sus méritos indisputables como lenguaje de las ciencias exactas. Sin ser mas universales sus conclusiones respecto de los números que las formuladas sintéticamente por la Aritmética, desenvuelve un nuevo y sorprendente poder de análisis, en virtud del cual ninguna de las relaciones derivadas de una relacion principal se obscurece, ni se borra por el cálculo, como sucede en la combinacion de las cifras, sino que todas quedan allí vivas y patentes, pudiendo ser deducidas y presentadas separadamente por un trabajo de transformacion casi manual. El pensamiento matemático de una relacion dada se resuelve de un modo mas fecundo, y mas fácil en todas sus relaciones elementales, bajo la notacion algebráica, que bajo la aritmética. Como lengua, alcanza el Álgebra esa superioridad á que no tiene derecho como ciencia limitada á números, segun la idea vulgar que se tiene de ella.

Pero el Álgebra es más que un lenguaje universal de las relaciones y propiedades de los números; y á su particular mérito, como instrumento analizador del pensamiento, debe reunir alguna otra excelencia por la especialidad de su materia ó la elevacion de su objeto, si ha de ser considerada como una parte, y parte nobilísima, de las ciencias exactas. La universalidad, que sin duda le compete, no es meramente filológica, sino objetiva, y debe de consistir en que realmente trata de cosas que no pueden ser objeto de la Aritmética, ni de la Geometría, ni de ambas reunidas, ni separadas.

VII

Aún sin necesidad de acudir á los progresos históricos de la ciencia algebráica, podrian adivinarse su nacimiento, su desarrollo rápido y su porvenir ideal y supremo, con solo penetrar un tanto en la íntima economía del conocimiento matemático.

Principiemos por dejar establecida la verdad importantísima de que este conocimiento es formado por la virtualidad propia de nuestro espíritu, sin deber á la experiencia más que la ocasionalidad de su excitacion; verdad contra la cual tanto se rebela el espíritu sensualista y empírico que heredaron de la Filosofía del siglo anterior los matemáticos, más que ningun otro linaje de pensadores.

Hay en nuestra alma una potencia de cálculo y de mensuracion oculta y misteriosa, que entra en ejercicio con ocasion de las impresiones que las cosas hacen en nuestros sentidos: se verifica en lo íntimo de nuestro sér una combinacion latente de los elementos sensibles á impulso de esta fuerza, cuyo instintivo desarrollo se remonta á los primeros dias de la vida, se fortalece con la edad, y se madura con la reflexion, de tal suerte que cuando la ciencia viene á darnos las reglas, ó á demostrarnos las verdades teóricas, mas parece que recordamos lo que antes sabiamos, que no que aprendamos lo que ignorábamos. Sabemos contar y medir antes que hablar y reflexionar; y así, contamos y medimos como por recurso ó inevitable ocupacion del espíritu, cuando ningun objeto sensible ocupa de lleno nuestra facultad de pensar. Somos mas matemáticos por naturaleza que lo que nosotros creemos, y nuestra facultad pensante se connaturaliza tanto con el cálculo y la medida, que es dable reconocer un gran fondo de verdad en aquella doctrina de los pitagóricos, de que nuestra alma *es un número que cuenta* (númerus numerans).

Nuestros conocimientos matemáticos, bien los debamos á esa espontánea virtualidad, bien nos sean sugeridos por la enseñanza, son, por otra parte, de una índole particular en cuanto al valor lógico que adquieren cuando los constituimos en juicios, y los formulamos en proposiciones. Nunca se nos ocurre fiar á la experiencia la fuerza de su demostracion, de manera que vayamos concediéndoles más y más grados de probabilidad á medida que aquella los va confirmando. De repente se verifica la iluminacion de la verdad, y la vemos sin esas tentativas y aplazamientos graduales que nos llevan á un conocimiento empírico ó *de hecho* por los trámites penosos de la observacion, del experimento ó de la hipótesis. La verdad matemática nunca se ve á media luz; ó se revela con deslumbradora evidencia, ó queda enteramente obscurecida. Y luego, si la experiencia tuviese en este conocimiento la misma intervencion que en los que se refieren, por ejemplo, á las cualidades de los cuerpos; ¿qué adelantaria el geómetra con observar que *algunos* triángulos tienen sus tres ángulos iguales á dos rectos? ¿Podria con solo esto ver tan claramente como ve, ó afirmar tan rotundamente como afirma, que *todos*, absolutamente todos, los triángulos (reales ó posibles) tienen esa misma propiedad? ¿Se procede por ventura aquí como en la ciencia empírica, en la que es menester ir sonsacando uno por uno todos los secretos de la naturaleza, por una observacion perseverante, ó arrancárselos á viva fuerza por el fuego y el hierro, por el *tormentum crucis* de la experimentacion? La necesidad y la universalidad con que las verdades matemáticas son concebidas ó demostradas, no caben en el reducido ámbito de la experiencia, la cual siempre es contingente, particular y concreta. Mas dispuestos estamos á corregir y ajustar nuestras intuiciones sensibles al tenor de la concepcion matemática, que tenemos por universal y necesariamente valedera, que á rectificar, ni aún siquiera á comprobar, la verdad matemática por la percepcion sensible. Siempre diremos que nuestros sentidos nos engañan, si alguna vez creemos percibir que dos rectas se cortan en más de un punto. Nunca diremos que dejará de verificarse esta propiedad, aunque el mundo material se trastorne, vuelva al cáos, ó desaparezca del espacio, con tal que nuestra actual constitucion sensible no experimente ninguna mudanza.

VIII

Cuando la Fiosofía transcendental intenta explicar ese singular carácter de los conocimientos matemáticos, se ve forzada á reconocer la naturaleza subjetiva y puramente formal del *espacio* y del *tiempo*, en que verifican su evolucion clarísima y necesaria las intuiciones geométricas y aritméticas (*theoremata*).

El espacio y el tiempo son las formas indefectibles é inmanentes de toda intuicion empírica de los fenómenos del mundo exterior é interior. En el espacio, y por el espacio, vemos los objetos como fuera de nosotros, y unos fuera de otros: en él son determinadas en figura, en magnitud y en posicion, las cosas que llamamos *exteriores*. En el tiempo, y por el tiempo, vemos sucederse las modificaciones de nuestro espíritu, y en el tiempo están determinados como anteriores ó posteriores todos los fenómenos de la vida *interna*. Ambas intuiciones son primordiales y coetáneas con nuestra vida, y tan tenazmente adheridas están á nuestra sensibilidad, que de todos los cuerpos del universo podemos prescindir y todos borrarlos del espacio, pero el espacio en que ellos están nunca puede ser borrado; todos los hechos de conciencia pueden cesar, y nunca cesará el tiempo en que se suceden.

Las intuiciones de espacio y de tiempo no se derivan de la experiencia, sino que la preceden, y son condiciones transcendentales de su posibilidad. No llegamos á la concepcion de espacio á fuerza de ampliar la representacion de las cosas extensas, sino que no podriamos percibir las cosas como extensas, si no lo fuesen ya en el espacio: no adquirimos la idea del tiempo por la experiencia de cosas que duran, sino que las cosas no durarian para nosotros, si ya no tuviésemos esta intuicion primitiva.

La intuicion de espacio, pura y despejada de todo elemento fenomenal ó sensible, nos es representada como una capacidad infinita, simultánea y homogénea, donde nada hay determinado en direccion, en figura, ni en magnitud, pero donde pueden fijarse todos los puntos, concebirse todas las direcciones, trazarse todas las figuras, y circunscribirse ó cerrarse todos los volúmenes, como partes del espacio uno y total. La Geometría se explaya por este espacio purísimo, dividiéndolo interiormente por *planos*, dividiendo los planos por *rectas*, y las rectas por *puntos*; y con esto obtiene los elementos con los cuales construye luego todas las figuras, y determina todas las relaciones de magnitud y posicion, llevando por aquellas construcciones esa diáfana claridad de intuicion, y por aquellas relaciones, esa rigorosa exactitud de raciocinio, que tanto la distinguen de las demás ciencias, y que hacen de ella el primero y el mas rico ramo de las que se llaman *exactas*.

La intuicion pura de tiempo nos aparece como una série infinita de momentos esencialmente sucesivos y transitorios. En esta série están determinadas las cosas como numerables: la numeracion es imposible sin la *síntesis sucesiva* de la unidad consigo misma, ó sin la transicion de una unidad á otra, para contarlas todas, ó para reducirlas á número. Por esta sucesion, esencial al tiempo, son posibles todas las combinaciones, todos los períodos y todas las armonías sobre que la Aritmética especula con no menor claridad y exactitud que la Geometría en su region propia.

Sin tiempo, no hay número, ni Aritmética, como sin espacio no hay extension, ni Geometría. Las dos ramas primeras de la Matemática pura vegetan y crecen en el seno de las dos intuiciones primordiales de nuestra naturaleza sensible, llenando éstas dos grandes capacidades con sus determinaciones, y presentando así preparada la materia primera del verdadero conocimiento matemático.

No queda, en efecto, constituido este conocimiento en toda su plenitud, si á la *materia*, que suministra la intuicion, no se allega la *forma*, que impone el entendimiento, ó si á la *intuicion* no se aplica el *concepto*. Es menester que lo *percibido* sea tambien *concebido*, interpretado y penetrado por conceptos intelectuales, para que surja acabado y perfecto el conocimiento de cosas como cantidades extensivas ó numéricas, ó de la extension y del número como objetos de consideracion científica.

A la pura sensibilidad, que no nos daria más que intuiciones ciegas é ininteligibles, se unen los conceptos que por sí mismos serian formas vacías sin el contenido de la intuicion. De manera, que ni la Geometría, ni la Aritmética, podrian desenvolverse como ramas de la ciencia matemática, si en las nociones de la extension y del número no fuesen ya embebidos los conceptos de cantidad, de cualidad, de relacion y de modalidad, que allí pone nuestro entendimiento por una espontaneidad que le es esencial. Lo diverso, que es dado en la intuicion pura de espacio ó de tiempo, y que está confundido en la receptividad pasiva de la sensibilidad, es ligado, ordenado y reducido á unidad de concepto, por el entendimiento activo y espontáneo.

La forma, pues, y como el alma del conocimiento matemático, es esa conceptualidad que recae sobre la materia intuitiva; es esa luz del entendimiento que baña y vivifica la materia informe y ciega de la intuicion, y que hace salir del cáos de la sensibilidad pura, nociones, ideas, conocimientos de número determinado en la inagotable série de momentos del tiempo, ó de extension formada en la infinita capacidad del espacio.

Mas como el advenimiento de los conceptos para dar luz y vida á las intuiciones ciegas é inertes, suponga el ejercicio del entendimiento, que es facultad superior á la sensibilidad, se comprende la posibilidad de un estudio, eminentemente matemático y lógico á la vez, de esta nueva facultad en cuanto consuma el conocimiento matemático por la aplicacion de sus conceptos: es posible una especulacion suprema acerca de esa conceptualidad pura é independiente de toda materia instintiva, libre de toda determinacion numérica ó extensiva, pero siempre superior á ella y aplicable á ella con perfecta indiferencia respecto de la clase de intuicion que se le subordina. Cuando la ciencia matemática llega á tal grado de evolucion, que por la aplicacion reflexiva del espíritu pueden ser distinguidos en la extension y en el número los conceptos que el entendimiento puso en ellos espontáneamente, hasta es natural que estos conceptos así separados se conviertan en objetos de una nueva especulacion mas abstracta y universal, y por lo tanto mas elevada y como mas dominante. Y no solo es esto natural, sino que es necesario en un grado ulterior de madurez científica, cuando el entendimiento se encuentra retratado en los conceptos que deprende, cuando recorre y mide toda la extension de su facultad, y cuando se reconoce á sí mismo como condicion transcendental, no solo de la posibilidad del conocimiento matemático, sino de todo conocimiento en general. Entonces es cuando brota y crece el Álgebra como un nuevo ramo del árbol matemático. Sobre la Geometría y la Aritmética, mas humildes y bajas, porque se hallan mas cerca del empirismo, se levanta y descuella floreciente esa rama del Álgebra que las cobija á ambas por igual, y las guarece con su universalidad, y las fomenta y extiende con sus aplicaciones.

IX

¡Cuánto dista ese sublime ideal de ciencia que la Filosofía señala al Algebra de lo que ella fue en su orígen, y de lo que seria hoy, si hubiera tenido que ceñirse á seguir los pasos de la Aritmética como un mero apéndice de ella! ¡Qué diferencia entre el Álgebra, pura generalizacion del número, y el Álgebra, verdadera Lógica de las ciencias matemáticas!

En sus principios no fue más que un ensayo imperfecto de notacion que se redujo á los números llamados *cósicos*, cuyo nombre les vino de la *cosa*, ó raíz que se consideraba como incógnita que habia de determinarse por la resolucion del problema. La construccion ó el planteo de las ecuaciones consistia en representar la cosa y sus diversas potencias con las iniciales de raíz, cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo, &c. Los números conocidos, que entraban en la igualacion como términos sumatorios, ó como coeficientes, ó divisores, conservaban su forma aritmética determinada. Venia luego la famosa *regla de Álgebra*, en la cual estaban encerrados todos los secretos de análisis que entonces poseia la ciencia. Un trabajo casi mecánico, que consistia en translaciones, reducciones, destrucciones y substituciones de aquellos elementos aritméticos, consumaba la obra despejando la raíz ó cosa y determinando su valor numérico concreto. Todo el poder del análisis estaba cifrado en la manipulacion ó *chirurgia*; que no otra cosa significa la voz *Álgebra* segun su etimología arábiga. Claro es que tal Álgebra apenas merecia el nombre de *arte*, cuanto menos la consideracion de *ciencia* matemática.

El uso que luego se introdujo de los caractéres alfabéticos extendió más el domínio del Álgebra por la region aritmética, creó un nuevo cálculo literal, multiplicó el número de los problemas y el de recursos para su solucion, y dió generalidad á los resultados, que ya fueron verdaderas *fórmulas*; pero en cambio contribuyó no poco, á fuerza de facilidad en la ejecucion, y de confianza en la indelebilidad de los datos en las combinaciones literales, á hacer todavía mas mecánico y ciego el cálculo, hasta el punto de que la *chirurgia algebraica* llegara á ser una verdadera prestidigitacion. El Álgebra pudo ser, y vino á ser con efecto, un arte de mucho provecho para extender los límites de la Aritmética, para enriquecerla con nuevas propiedades de los números, y para ampliar los procedimientos algorítmicos; pero parecia que lo que el arte ganaba en extension lo perdia la ciencia en profundidad, á causa de la ceguera misma del procedimiento, y de la ninguna, ó de la falsa, interpretacion que se daba á muchos resultados que aquel ofrecia.

El de las cantidades negativas, consideradas al pronto como imposibles, ó desechadas como inútiles, fue, sin duda la ocasion de los primeros pasos que diera el Álgebra por el buen camino. Los valores negativos no pudieron ser tenidos por verdaderos, ni propios, sin que los analistas reconociesen la *cualidad* de las cantidades como un concepto necesario, ó sin que viesen este concepto en toda su pureza y transcendencia, al menos en sus dos categorías antitéticas de realidad y negacion, dominando y justificando las soluciones contrarias de los problemas concretos. Desde este momento debió comenzar un nuevo período de elevacion y grandeza para el Álgebra: el arte debió tomar ya el porte de ciencia; y era imposible que esta nueva adquisicion conceptual no fuese seguida de alguna importante conquista en el terreno de las aplicaciones, porque una ciencia no puede medrar en altura sin ganar tambien en universalidad. Asi fue con efecto; la Geometría, inaccesible hasta entonces al espíritu analítico del Álgebra, comenzó á abrir sus puertas y á ceder terreno á esta ocupacion tan legítima, y bien pronto las fórmulas algebráicas tradujeron las relaciones de *magnitud* con igual facilidad que las de *número*, y retrataron la fisonomía de las curvas con la misma propiedad que las afecciones de la cantidad discreta.

Nació la *Geometria analítica* como consecuencia forzosa del nuevo dominio que el Álgebra fundaba en el campo de la cantidad contínua, en virtud del título que para ello le dieran el perfecto deslinde y la recta interpretacion de ese nuevo concepto intelectual. Más que por la notacion exponencial y por la análisis indeterminada, es DESCARTES el autor del *Álgebra científica* por haber sido el primero que sometió á su imperio algunas regiones de la Geometría, y estas, de las mas apartadas y al parecer mas impenetrables.

El Álgebra, en rigor, no hacia más que tomar posesion de un país casi conquistado por la Aritmética, porque ya eran muchas y muy bellas las armonías que entre el número y la magnitud habian reconocido los matemáticos desde los tiempos mas antiguos. EUCLÍDES, presintiendo la identidad de conceptos que dominaban en la Geometría y en la Aritmética, habia mezclado en sus célebres *Elementos* los libros que versaban sobre los números con los que trataban de la extension. Antiquísima es tambien la nomenclatura geométrica con que se designaban los *números figurados*, planos y sólidos; los cuadrados, triangulares, polígonos y circulares; los cubos, piramidales, serrátiles ó prismáticos, y los esféricos. Las teorías de la proporcionalidad con tanta felicidad eran ejemplificadas en líneas como en números, y muchos comentadores de EUCLÍDES se entretenian con gusto en hacer notar las curiosísimas congruencias que presenta la formacion de productos numéricos y geométricos. La Geometría y la Aritmética, sin embargo, hermanaban por instinto y no por reflexion; y aunque se reconocian ambas subordinadas á leyes de un órden superior, estas leyes no estaban formuladas todavía, porque los conceptos que habian de servir para su síntesis, aún no aparecian bastante puros ó bastante bien desprendidos de la particularidad extensiva ó numérica. Veíase el hecho de la congruencia, y esto causaba grande admiracion;

pero se ocultaba la ley ó el concepto *à priori* que debia extenderla después é imponerla sin límites á la totalidad de la ciencia matemática.

Esta armonizacion suprema estaba, empero, reservada al Álgebra, la cual, interpretando los resultados negativos, ha comenzado á vislumbrar la realizacion de su ideal en el entero sometimiento é incorporacion definitiva de la Aritmética y de la Geometría á la concepcion pura, y por lo tanto, en la indiferente aplicabilidad de sus conceptos á todo número y á toda extension. El cumplimiento de este destino superior, anunciado por la Filosofía del espíritu humano, tendrá lugar, sin duda, cuando estén reconocidos y como agotados todos los conceptos del entendimiento, descrita y redondeada la esfera de su aplicacion, y determinado su lugar en el desarrollo sistemático de esta facultad; porque entonces no habrá relacion matemática formulada por el Álgebra que no pueda ser realizada simultáneamente por la Aritmética y la Geometria, con la misma universalidad y y con idéntica evidencia. Entonces podremos decir con entero conocimiento de causa lo que PASCAL decia por una revelacion de su genio: *los números imitan al espacio, aunque son de naturaleza tan diferente.*

X

Mucho es todavía lo que resta de camino para que podamos reconocer la infinidad de rasgos y delicados perfiles en que consiste la imitacion de las magnitudes por los números; pero lo que hasta ahora no lograra enteramente la feliz interpretacion de las cantidades negativas, ¿por qué no ha de estar reservado á la no menos dichosa y fecunda de las *raíces imaginarias*?

Es lo cierto, que si hoy suponemos tan adelantada la ciencia algebráica en esa via de imitacion armónica, solo porque ha realizado en las direcciones opuestas de las rectas la antítesis de lo positivo y lo negativo de los números, sus progresos futuros serán incalculables cuando la veamos expresar, como si se tratase de números, las afecciones cualitativas correspondientes á las direcciones perpendiculares, paralelas y oblícuas, que son propias de las líneas. Si las aplicaciones algebráicas tuvieron que realizarse hasta ahora en los límites lineales de un eje horizontal, las nuevas interpretaciones podrán extenderse por la infinidad de un plano, y hasta representar evoluciones y giros verificados por la inmensidad del espacio. La teoría geométrica de la posicion, ó el *analísis sitûs*, que era el gran *desideratum* de LEIBNITZ, y el complemento necesario de la Geometría actual, casi exclusivamente cuantitativa, llegará á convertirse en una teoría algebráica ordinaria, desde el momento en que se nos dén signos para todas las posiciones de las rectas en el plano indefinido ó en el espacio, con tal que estos signos no sean arbitrarios, sino engendrados por el mismo cálculo como resultados algorítmicos necesarios de las teorías de los números.

Y es cosa admirable, que dándosenos estos signos, que no son otros que las raíces imaginarias, y acreditando ellos hasta en su forma gráfica un orígen esencialmente algorítmico, hayan estado hasta ahora desterrados de ese cálculo que los engendra como para extender la esfera de sus aplicaciones: porque no parece sino que la ciencia matemática ha tenido vergüenza de su propio error, ó pereza para rectificarlo y someterse á una reforma radical, cuando por tanto tiempo ha desconocido, ó negado, la verdadera significacion de esos símbolos anómalos, que hasta se llegan á hacer importunos por su frecuente aparicion entre las cantidades verdaderas.

En ellos, sin embargo, va encerrada como en gérmen la teoría completa de las cualidades en todos sus momentos lógicos, y la representabilidad de todas las direcciones lineales, como de todas las afecciones numéricas. Ellos están destinados á producir en la ciencia matemática una revolucion saludable, cuyo primer fruto será la inmensa amplitud de la ciencia algebráica, y la indiferente manera en que sus conceptos deberán ser aplicados á todos los números y á todas las magnitudes. Por ellos, rectamente interpretados, se desvanece el absurdo, y todo el cuerpo de la ciencia queda purgado de la contradiccion y del error. En ellos, en fin, estriba la armonía de las partes de la ciencia matemática y la altura y dignidad del Álgebra, que es el remate y la corona de este gigantesco monumento del espíritu humano.

XI

Tienen las ciencias matemáticas el raro privilegio de que nada hay en ellas pequeño ni indiferente. Lo que parece mas baladí, puede arrojar de sí mucha luz ó mucha obscuridad, segun sea bien ó mal interpretado. Por eso la teoría de las imaginarias, que podria ser un objeto de pura curiosidad en sí misma, viene á ser objeto de interés vivísimo cuando la vemos ligada con las nociones mas fundamentales de la ciencia. Todo el edificio se conmueve cuando se toca á los cimientos. ¿Se ha formado idea cabal de las afecciones ó modos de ser de la cantidad? ¿Están ya reconocidos y apurados todos los conceptos determinantes de estos modos de ser? Habiendo sido gradual y empírica la manera con que fue hecha esta determinacion de conceptos, ¿estamos seguros de que no habrá ya nada que añadir al cuadro que los contiene? ¿No pudiera suceder que algun símbolo dado á luz como al acaso, por el mismo cálculo, fuese la expresion viva de un nuevo concepto no reconocido todavía? ¿Y si esto fuera así, qué deberíamos pensar de la ciencia construida sobre un plano diminuto, por más que respondamos de la solidez de lo que sobre este plano se levanta? ¿Si el plano de la construccion se rehace y se amplía, no deberá tambien ensancharse el edificio? Van inspirando más y más interés estas interrogaciones, y á tal punto van engrandeciendo la cuestion de las imaginarias, que no solo quedan justificados los esfuerzos hechos hasta hoy para su interpretacion en el órden matemático, sino que la sacan de este terreno, y la llevan al de la *Lógica transcendental*, ramo de la Filosofía crítica que, por un análisis del entendimiento, reconoce los conceptos elementales á cuya aplicacion á la experiencia es debida la constitucion de todo conocimiento humano, y, por lo tanto, del conocimiento matemático.

XII

No se extrañen, pues, ni se duelan los matemáticos calculistas de que neguemos su competencia para resolver las cuestiones que van apuntadas. El cálculo de que disponen ellos fue creado en la inteligencia de que las imaginarias están condenadas ya como absurdas, y no puede ser un instrumento justificativo, ni un criterio abonado, para fallar sobre esa absurdidad que se pone en duda y hasta se niega. Ni tampoco es ofensiva tal intrusion de la Lógica en la jurisdiccion matemática. La Lógica tiene derecho á entrar donde quiera entre el pensamiento humano, y las ciencias *exactas* se llaman tales por la exactitud del pensamiento que las domina; y quien dice *exactitud*, dice rigor en el raciocinio, legitimidad en la consecuencia, absoluta imposibilidad de contradiccion y de absurdo; y donde quiera que todo esto se promete, y casi enteramente se cumple, ¿cómo no ha de tener derecho á intervenir la Lógica, siquiera para averiguar la causa de que haya todavía algunos puntos obscuros ó controvertibles? ¿Cómo no ha de ser eminentemente lógica una cuestion en la cual tanto se dejan oir las calificaciones de *contradictorio* y de *absurdo*?

Los matemáticos pensadores, que son los verdaderos matemáticos, no solo tienen por bueno y necesario este recurso á conocimientos que nunca pueden ser ajenos á la ciencia de la exactitud, sino que llegan á desconfiar de que esta ciencia, encerrada en su propia especialidad, contenta y todo como está con sus propias luces, pero aislada y huérfana de toda Filosofía, pueda nunca justificar la legitimidad de sus títulos de posesion, y lo que es aún mas indecoroso para ella, de que pueda en ciertos puntos librarse del error y del absurdo. Hasta la posibilidad de una reconstruccion de la ciencia, y de que sea necesario buscar un nuevo pedestal sobre que sentarla, admiten estos matemáticos; y á un punto tal se declaran á sí mismos incompetentes para esta clase de investigaciones, y de tal manera temen equivocarse confundiendo la luz intuitiva que abunda en la ciencia matemática con esa otra luz racional que es propia de los estudios transcendentales, que desean con ansia la venida de un hombre nuevo, extraño al movimiento y á los progresos de la ciencia, que, más por inspiracion del instinto que por un deliberado propósito, ponga mano á esta obra de renovacion. Piensan cuerdamente que en el árbol frondoso de las ciencias exactas cualquier desmedro de las ramas, aunque sean estas las mas altas y delgadas, siempre revela algun vicio en las raíces, y por eso más esperan de los trabajos de profundidad en busca de estas raíces, para reconocerlas, y si es posible curarlas, que en los de pura extension superficial para el ornato y mayor visualidad del ramaje. Y como saben que las raíces del árbol matemático penetran hasta lo mas profundo del espíritu humano, creen con mucha razon que el cuidado de su descubrimiento, de su exámen, y de su curacion, sale ya de los límites de la ciencia matemática, y entra plenamente bajo el fuero de la Filosofía transcendental. Por eso tienen en mucha estima estas investigaciones críticas acerca de lo que vale y lo que puede el espíritu humano en la constitucion de las bases fundamentales de su propia ciencia, y acuden á ellas con confianza en vez de mirarlas con prevencion ó menosprecio.

Si, por un incalificable horror á lo que entiende por Metafísica, se encierra el matemático en su propia ciencia y queda siempre extraño á toda especulacion, y como reñido con los conocimientos críticos y filosóficos; si ha de ser eterno ese lamentable y criminal divorcio que quieren mantener algunos entre la ciencia matemática y la filosófica; no es extraño que se perpetúen y se vuelvan incurables algunos errores que hubieran podido ser disipados con solo abrir las puertas de la ciencia al comercio intelectual, y tomar parte en el movimiento crítico que arrastra hoy á todos los espíritus.

¡Horror á la Metafísica los matemáticos, cuando ellos sin quererlo, y sin saberlo, son los primeros metafísicos! ¡Cuando las ideas de *espacio*, *tiempo*, *fuerza*, *movimiento*, *nada*, é *infinito*, aparecen á cada momento como enredadas entre sus teorías, ó siendo la trama de sus cálculos!

La ciencia matemática es una verdadera Metafísica que toma por objeto cosas que no son dadas en la experiencia, pero que al propio tiempo da por fiador á la idealidad de los conceptos, la evidencia y transcendentalidad de las intuiciones puras; que templa la aridez del concepto con la dulce luz de la intuicion; y que, determinando su objeto por eschêmas en el espacio ó en el tiempo, se acerca lo bastante al empirismo para autorizarse con su claridad sensible, sin manchar su elevada pureza, ni poner límite á su absoluta universalidad. La Matemática es la Metafísica mas luminosa, mas legítima y mas autorizada por la verdadera crítica. Los mejores matemáticos que ensalza la historia fueron al par metafísicos profundos; y es bien seguro que ni Leibnitz, ni Descartes, ni Newton, ni Pascal, ni Euler, hubieran rayado tan alto como matemáticos si no hubieran valido lo mucho que valieron como filósofos.

XIII

La Estética, la Lógica, la Dialéctica, todas las ramas de la Filosofía transcendental, vienen en auxilio de la ciencia matemática para darle la conciencia de su verdadero mérito como ciencia de la exactitud, y para salvarla de sus propias contradicciones. Mas, por una admirable reciprocidad de servicios que las ciencias se prestan como hermanas que son, no es menor el provecho que estos conocimientos sacan de tan cercano parentesco. La necesidad de las explicaciones críticas acerca de la formacion y del valor de todos los conocimientos humanos, quizá nunca se hubiera sospechado, y de cierto nunca hubiera llegado á emprenderse semejante trabajo, si no hubiera en nuestro espíritu ese tesoro de conocimientos tan ciertos como útiles, que participan de la altura de los puramente metafísicos y de la luminosidad de los naturales é intuitivos. Consecuencia de esto es que, por falta de esta crítica, el empirismo triunfaria siempre de las concepciones *à priori* de la Metafísica, convenciéndola de incapaz de justificar el valor objetivo de sus ideas; y la Metafísica por su parte, declarándose *ciencia de lo no sensible*, y por lo tanto, teniéndose por exenta de esa necesidad de justificacion objetiva en el terreno de la experiencia, se proclamaría legítima en su propia esfera, sin que pudiera hallarse un criterio superior de acuerdo, ni de oposicion, entre estas dos direcciones empírica y racional del espíritu humano. Tampoco fuera posible la crítica de los sistemas de Filosofía especulativa, porque la experiencia no podria nunca erigirse en criterio de la especulacion, ni los conceptos especulativos de la razon podrian tampoco aparecer como imponiendo una forma científica á la experiencia, la cual se arrastraria siempre por la baja region de los hechos individuales y concretos. Estaria cortada para siempre toda comunicacion entre la esfera de lo sensible y la de lo intelectual. Pero como hay una ciencia matemática, que ni es puramente conceptual, porque da un objeto á sus conceptos en las regiones intuitivas del tiempo y del espacio, que son las formas necesarias de toda experiencia, y al mismo tiempo prescinde de toda materia de esta experiencia, con lo cual se libra de la individualidad y limitacion del puro empirismo, se da un singular ejemplo de explicacion crítica del humano conocimiento, segun la cual, toda la validez que este alcanza depende del concurso de dos elementos igualmente necesarios: la intuicion sensible por la cual el conocimiento es experimental, y el concepto intelectual por el cual el conocimiento es racional. La sensibilidad y el entendimiento ponen cada uno su parte en la formacion de todo conocimiento, de tal manera que nada simplemente *percibido*, ó meramente *concebido*, es por eso verdaderamente *conocido*.

La ciencia matemática presenta el mas acabado modelo de este conocimiento reducido á la pura forma de la intuicion en lo que tiene de comun con la experiencia, y hecho inteligible por todos los conceptos del entendimiento que, dibujándose en unas formas tan puras, se presentan con esa claridad que es el dichoso privilegio de las ciencias exactas. Por eso las teorías transcendentales se ven realizadas y evidentemente ejemplificadas en los conocimientos matemáticos; y aparte del mérito de su invencion adquieren una indisputable validez científica cuando se las prueba en esta piedra de toque de la ciencia matemática, cuya evidencia, verdad y exactitud son para todo el mundo proverbiales. No puede hacerse un encomio mayor de estas ciencias excelentes, que el que se desprende de la historia de todos los grandes pensadores y críticos, los cuales fueron tambien eminentes matemáticos. ¿Quién ignora que por serlo en alto grado descollaron tanto los analistas del pensamiento humano, REID, KANT, HEGEL y KRAUSE? ¿Quién no sabe que KANT fue primero matemático que crítico, y que por eso apenas se encuentra una página de su inmortal *Crítica de la Razon pura* en que no salte á los ojos alguna profunda referencia á este género de conocimientos, que los poseia muy superiores? Y cuando enseña en ese libro que *la tabla de las categorías contiene como en proyecto los lineamientos de la organizacion interior*, *y hasta la ordenanza*, *de toda ciencia formada*, ¿quién no se lo representa con la mirada penetrante de su alto espíritu fija en la ciencia matemática como en un original del que era trasunto fidelísimo el cuadro que bosquejaba con mano tan maestra?

La crítica kantiana es un admirable trabajo matemático.

¡Ojalá que todas las impugnaciones y censuras que de ella se hacen, sin lograr conmoverla, en lugar de consistir en apasionadas declamaciones, sugeridas tan solo por la preocupacion en favor de sistemas de falsa Metafísica, amenazados de ruina por su irresistible influjo, se redujeran solamente á esa confrontacion con las verdades matemáticas, pues esto bastaria para que se viese la doctrina transcendental participando de toda la evidencia demostrativa que es propia de verdades tan superiores, y no vacilariamos en aplicarla con seguridad de acierto al exámen de todos los demás ramos de la filosofía especulativa!

Entonces podriamos gloriarnos con razon, no ya de despreciar ó aborrecer sin fundamento, sino de haber vencido para siempre, tanta y tan falsa apariencia de sabiduría como se escudó muchas veces bajo el nombre pomposo de Metafísica.

Este seria, cuando menos, el mas próximo y venturoso fruto de la deseada alianza entre la ciencia matemática y la Filosofía.

TEORÍA TRANSCENDENTAL

DE LAS

CANTIDADES IMAGINARIAS.

PREÁMBULO.

Cuando los matemáticos califican de imposibles y absurdas las raíces imaginarias, suelen formar un raciocinio que parece natural, y que de hecho es impecable bajo el punto de vista lógico, atendida la bondad del principio ó premisa en que lo fundan, que es la division ordinaria de todas las cantidades en positivas y negativas.

«Que sea, dicen, positiva ó negativa la cantidad que se tome por raíz, sus potencias de grado par han de ser positivas, segun enseña la llamada *regla de los signos* en la multiplicacion, de la cual no es más que un *caso particular* la elevacion á potencias.

Luego es imposible que las cantidades negativas sean segundas, cuartas, sextas....., y en general potencias de grado par.

Luego las raíces de grado par de una cantidad negativa son imposibles, puesto que su extraccion supone que esa cantidad es un cuadrado ó una potencia de grado par.»

Estas raíces singulares, cuya forma ordinaria es

$$\sqrt{-A},\ \sqrt[4]{-A},\ \sqrt[6]{-A},\ \sqrt[8]{-A},\ldots \text{ y en general } \sqrt[2n]{-A},$$

llevan el nombre característico de *imaginarias*, como para denotar lo imaginario, esto es, lo ilusorio que seria el intento de extraerlas ó de expresarlas bajo la categoría comun de *cantidades*.

Si valiera ese raciocinio, tan concluyente á primera vista, para que fuese válido aquel principio de la division de las cantidades, del cual se pretende deducir la calificacion de absurdidad, seria sin duda imposible, ó cuando ménos inútil, una teoría transcendental del imaginarismo. La imposibilidad de lo imaginario pasaria sin necesidad de exámen, como pasan por imposibles, sin desdoro de la ciencia matemática, las determinaciones exactas de raíces cuadradas y cúbicas de cantidades que no son cuadrados ni cubos. Pero aquí no parece que se trata de una determinacion cuantitativa irrealizable, sino que la imposibilidad va acompañada de la nota de absurdidad y de contradiccion lógica que se supone siempre envuelta en toda raíz imaginaria, y es menester examinar con qué derecho se condena como absurdo lo que es legítima consecuencia de un principio que se reconoce como verdadero: es necesario ver qué valor ó autoridad tiene en la ciencia esta division que tan llana parece; y si es más lógico seguir aceptando la absurdidad del resultado, por no poner en duda la verdad del principio, que negar la aparente autoridad de este, por salvar la legitimidad de los resultados á que él conduce.

Una ámplia é interesante investigacion crítica se presenta aquí como tarea preliminar respecto de las cantidades imaginarias. ¿Qué debe prevalecer en la ciencia de la verdad y de la exactitud; una division poco meditada de las cantidades que nos lleva necesariamente á establecer una verdadera *logística del absurdo*, ó la instantánea y definitiva desaparicion de este absurdo por la reforma de aquella division, que es inexacta en sí misma aún prescindiendo de sus consecuencias? En términos más concretos, ¿sostendrémos la division corriente de las cantidades en positivas y negativas, y calificarémos por lo tanto de absurdas las imaginarias; ó negarémos la exactitud de aquella division, salvando así la naturalidad y genuina procedencia de estas raíces?

La ciencia matemática ha seguido hasta ahora el primer camino, condenándose á luchar eternamente con el absurdo del imaginarismo, sin encontrar salida ó resolucion conveniente á esa antinomía matemática. La verdadera crítica señala el rumbo contrario, como el único verdadero y legítimo, como el único posible de seguir despues de un estudio lógico de los conceptos del entendimiento humano. Esta crítica debe probar que la division que parece tan adecuada es antilógica y falsa, y negar por consiguiente la consecuencia que se intenta deducir de ella. Debe establecer la legitimidad y aún la naturalidad de las imaginarias, hasta el punto de pretender que sean admitidas como formando un nuevo miembro de aquella division, que declara incompleta. Debe, en fin, sostener que las cantidades imaginarias tienen una significacion concreta, tan óbvia como las reales, y aún á trueque de tener que someter á exámen muchas ideas harto comunes acerca de los algoritmos conocidos, debe abrazar en el de las reales el de estas cantidades misteriosas é incomprensibles que siempre pasaron como excepciones ó derogaciones absolutas de las reglas ordinarias.

Mas para todo esto es necesario abandonar, aunque sea momentáneamente, el terreno matemático, é internarse un poco en esa region del pensamiento puro donde el entendimiento entregado, á las leyes de su propia espontaneidad y al juego formal de sus conceptos, retrata en las formas del juicio las varias funciones originales y primitivas de su ejercicio; las varias *categorías*, segun las cuales todas las cosas son pensadas: leyes, formas y categorías son estas, que si en algun órden de conocimiento tienen una realizacion natural y clara, es en el matemático puro, el cual es enteramente *á priori*, supuesto que en él prescindimos de toda determinacion concreta ó empírica de las cantidades.

Eminentemente lógico ha de ser este estudio preliminar en que hemos de echar los cimientos de la teoría transcendental de las imaginarias, porque lógica es tambien por esencia la cuestion que lo motiva, la antinomía que ha de ser resuelta. Una contradiccion es el fondo del imaginarismo, y de una contradiccion nunca puede salirse sin los recursos de la lógica.

En la ligera excursion á que nos vemos obligados, nos limitarémos, no obstante, á la consideracion parcial del cuadro de las categorías intelectuales, fijándonos con preferencia sobre las pertenecientes á la *cualidad*, puesto que sobre las cualidades del número y de la extension versa la cuestion general del imaginarismo. La naturaleza positiva ó negativa, real ó imaginaria, de las cantidades, ó el concepto matemático que de ellas formamos bajo el punto de vista de su afeccion ó modo de ser, no es más que la realizacion del concepto lógico, de la *categoría de cualidad*, que el entendimiento impone como condicion necesaria para ser pensados de esta manera el número y la extension. No puede haber mas afecciones matemáticas que las correspondientes á las categorías lógicas de la cualidad; pero no habrá categoría á la que no corresponda ó pueda corresponder una afeccion particular de la extension ó del número, á menos de que el pensamiento matemático tuviera el raro privilegio de regirse por otras leyes que las del pensamiento en general.

Si, pues, entre estas categorías ó conceptos fundamentales del entendimiento hallamos la *cualidad imaginaria* como un momento lógico tan legítimo como el de la real, ya no podrémos dudar de su valor matemático, de su verdadera significacion en el campo geométrico ó aritmético, y la cuestion preliminar acerca de la division de las cantidades recibirá una solucion superior y transcendental.

LIBRO PRIMERO.

DE LA NATURALEZA É INTERPRETACION DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

CAPÍTULO I.

EXPOSICION MATEMÁTICA DE LOS CONCEPTOS DE LA CUALIDAD.

ARTÍCULO 1.º

Importancia matemática y valor *à priori* de los conceptos de cualidad.

Entiendo por *cualidad* de las cantidades, aquel modo de ser ó aquella particular afeccion que las hace concurrir de diversa, y aún opuesta, manera á los fines intentados por el cálculo. Las cosas no son objeto del pensamiento matemático sola y exclusivamente como *cuantas*, sino tambien y muy principalmente como *cuales*: una cantidad de dinero nada es, ni significa, en el balance de un capital, si no es concebida tambien como perteneciente al *haber* ó al *deber*, ó á los depósitos activos ó pasivos de este capital. Ni aún para las más sencillas relaciones aritméticas valen los números, cualquiera que sea su cantidad ó *cuantía*, si no connotan, además, su manera de influir en los otros números con los cuales se combinan. La longitud absoluta de una recta no es tampoco objeto del cálculo, sino en cuanto se la concibe trazada en una direccion determinada y en relacion con otras direcciones. La cualidad es concepto tan matemático como la cantidad y, si cabe, aún más imprescindible que esta, pues aunque el Álgebra hace abstraccion del valor cuantitativo de los números y de las magnitudes, nunca puede dejar de atribuirles una determinada significacion cualitativa al considerarlos como elementos del cálculo.

La misma necesidad que el entendimiento siente de dar á las cantidades una afeccion particular cuando sobre ellas especula, nos descubre la naturaleza eminentemente intelectual y lógica del concepto de cualidad. El orígen sensible ó empírico que trae el conocimiento de las cosas, en cuanto son percibidas por los sentidos, no explica bien la índole necesaria de este concepto; pues además de que en la realidad de las cosas no siempre se encuentra fundamento para la variedad de cualidades que el entendimiento admite, el concepto de cualidad subsiste siempre aún después de haber privado á las cantidades de toda significacion concreta, como es necesario para que sobre ellas pueda recaer la especulacion de la matemática pura. La Aritmética y la Geometría despojan á las cantidades de todas sus propiedades físicas ó sensibles, pero conservan todavía en ellas sus determinaciones numéricas ó extensivas. El Álgebra viene en seguida, y las purifica todavía más, desnudándolas de esas determinaciones intuitivas y sometiéndolas al puro concepto de cantidades con una *cualidad* necesaria. Este último concepto de la cualidad radica en el espíritu mismo como forma y condicion transcendental de todo conocimiento, y muy particularmente del conocimiento matemático, el cual es irrealizable si no interviene la aplicacion de aquel concepto en alguna de sus categorías. No es esto privilegio de los conceptos de la cualidad: la ciencia matemática con la inmensidad de su espontáneo desarrollo, con la regularidad armónica de su organismo, con la luz clarísima de sus intuiciones, con la universalidad de sus teoremas que no consienten excepcion, y con la necesidad indefectible de sus conclusiones, protestará eternamente contra toda explicacion empírica de este género de conocimientos. No son para nosotros las cosas unas, ni muchas, ni todos, ni partes, ni positivas, ni negativas, porque así las *percibimos*, sino porque así las *concebimos*, porque así las juzgamos y entendemos.

ARTÍCULO 2.°

Tabla de las categorías.

La *Lógica transcendental*, que es la que trata del valor objetivo de esos conceptos, que *á priori* forman la esencia del entendimiento humano, enseña tambien la manera de determinar su número, y de trazar el cuadro en que aparecen distribuidos con un órden sistemático, tomando para ello, como principio de esta distribucion, la funcion lógica del entendimiento en todas las formas posibles del juicio. El juicio es el *hilo conductor* que sirve para encontrar todos los conceptos fundamentales, ó todas las categorías del entendimiento; porque la funcion, ó manera general que tenemos de *juzgar*, es la misma que empleamos para *concebir*, y no cabe que haya conceptos mas elevados que los de esas maneras en que se *forma* un juicio respecto de los objetos en general.

Por eso, antes de venir á nuestro particular asunto, y para mejor comprenderle, importa mucho tener una idea cabal de la correspondencia que guardan esas formas del juicio con aquellos conceptos categóricos; porque toda la ciencia matemática no viene á ser más que una copia de este cuadro (*).

Las categorías de la *cantidad* intervienen en la formacion de todas las nociones del número, de la unidad, de la pluralidad, de la medida, del múltiplo, de la totalidad, de la fraccion ó parcialidad.

Las de la *cualidad* dan un sentido y una afeccion á las cantidades y juegan en todas las teorías acerca de números positivos, negativos, reales ó imaginarios.

Las de la *relacion* corresponden á los algoritmos, ú operaciones en virtud de las cuales unas cantidades engendran á otras, lo cual es como el cuerpo ó el fondo mas sustancial de la ciencia matemática.

Y las de la *modalidad* finalizan la obra distinguiendo en los llamados *problemas* el diverso valor de las soluciones como posibles ó imposibles, como congruentes ó incongruentes, y como necesarias (determinadas) ó contingentes (indeterminadas).

La ciencia toda está proyectada en el plano de esas categorias fundamentales; y esto es muy natural que suceda en un órden de conocimientos que toman cuerpo y se organizan por la virtualidad espontánea del espíritu.

Fijémonos, pues, sobre la segunda rama de este árbol del humano pensamiento y expliquemos el concepto matemático de la afeccion numérica ó extensiva por las tres categorias de la cualidad, correspondientes á las tres formas de juicios: afirmativos, negativos y limitativos.

ARTÍCULO 3.º

Concepto matemático de las cantidades positivas.

El concepto matemático de las *cantidades positivas* se deriva naturalmente de la funcion lógica que ejerce el entendimiento en los juicios *afirmativos*.

Cuando juzgamos que un concepto (sujeto) se halla comprendido en la esfera

(*) La Lógica transcendental nos ofrece la siguiente tabla comparativa:

Formas del juicio.		Categorías de la	
cantidad..	universales...	cantidad..	unidad.
	particulares..		pluralidad.
	singulares...		totalidad.
cualidad..	afirmativos...	cualidad..	realidad.
	negativos....		negacion.
	limitativos...		limitacion.
relacion..	categóricos...	relacion..	substancia y accidente.
	hipotéticos...		causa y efecto.
	disyuntivos..		reciprocidad.
modalidad.	problemáticos.	modalidad.	posibilidad é imposibilidad.
	asertóricos...		existencia y no existencia.
	apodícticos..		necesidad y contingencia.

Las dos primeras clases de categorías, que son las de cantidad y las de cualidad, se llaman *matemáticas*; y las dos últimas, relacion y modalidad, son *dinámicas*. Véase el *fragmento de la Lógica transcendental* al fin de la obra. Para la explicacion de cada grupo de categorías, véase el *Glosario*.

ó circunscripcion de otro concepto (predicado), como cuando decimos A es B, ó el concepto de A se encuentra en el concepto de B, *ponemos* verdaderamente un concepto en otro, *positivamente* lo incluimos en aquel otro, y le hacemos participar de toda la *realidad* lógica, que le es propia. Esta funcion es sin duda el primer momento de la relacion que el juicio establece entre los conceptos, y á ella se refieren las demás funciones cualitativas que irémos explicando.

En toda investigacion matemática que tiende á la resolucion de un problema, ó que consiste en mera especulacion teórica acerca de los números ó de la extension, hay sin duda una necesidad prévia de fijar el concepto atributivo ó predicamental de donde se deriva el modo de ser ó de influir de todas las cantidades sobre que versa la investigacion: este concepto es dado por el sentido en que el problema se propone, ó impuesto por los fines particulares del calculador, cuando es posible tal arbitrariedad. Ninguna cantidad, por el solo título de cantidad, tiene el privilegio de fijar ese concepto cualitativo: todas las cantidades pueden tener todas las cualidades conforme se conciba variado el sentido ó la intencion final de la investigacion; pero una vez fijado este concepto, que va á ser el predicado de todos los juicios de que pende la cualidad, las cantidades, como sujetos, han de guardar una relacion necesaria de inclusion ó de exclusion en aquel predicado, y deberán tenerse como *positivas* aquellas que coincidan con él, ó se incluyan en él, porque verdaderamente son *puestas* (à ponendo) en la esfera de aquel concepto.

Es comun práctica, (y tan comun, que parece inspirada por cierto instinto intelectual) la de considerar como positivas todas las cantidades mientras no aparezca explícito su carácter substractivo ó negativo. En rigor no hay derecho para llamar positivas las cantidades, sino en cuanto á ellas se refieren las negativas. *Las cantidades bajo el puro concepto de cantidad no tienen cualidad;* y la uniforme afeccion que nos vemos inclinados á atribuirles, no es más que su carácter absoluto, su absoluta carencia de afeccion. Así considera la Aritmética los números y la Geometría las rectas, mientras entre aquellos y estas no se conciben más que relaciones cuantitativas. Un *minuendo* no es positivo, sino en cuanto se concibe modificable por la afeccion negativa del *substraendo*; una recta no es positiva, sino en cuanto se fija uno de sus extremos como *origen* ó punto de referencia de las rectas negativas ó que tienen direccion opuesta.

El signo +, que precede, ó se supone preceder, á toda cantidad, no es comunmente más que la expresion sumatoria ó sintética que revela otro órden de conceptos que nada tienen de comun con la afeccion ó cualidad. La doble aplicacion, cualitativa y algorítmica, que el Álgebra hace de este y de otros signos, influye mucho en esa especie de hábitos, que conviene rectificar por el estudio de las funciones lógicas que aquí tienen lugar.

ARTÍCULO 4.°

Concepto matemático de las cantidades negativas.

Con el concepto de las cantidades positivas está enlazado estrechamente el de las negativas, que no expresan en suma sino un segundo momento intelectual contrario al primero. Ninguna cantidad, con efecto, merece el título de *negativa*, si no se refiere á otra *positiva*.

Los juicios de donde nace la categoría de negacion, y que la Lógica llama *juicios negativos*, son aquellos en que excluimos el concepto del sujeto del concepto del predicado, limitándose, por otra parte, esta exclusion á *no poner* á aquel dentro de la esfera de este, ó á ver esta esfera como no incluyendo al sujeto en toda su extension lógica, que es lo que llamo su *circunscripcion*.

La inclusion y la no inclusion constituyen dos funciones tan perfecta y adecuadamente antitéticas, que no admiten término medio ó funcion intermedia posible *respecto de los dos conceptos sujeto y predicado*; y han de copiar necesariamente esta oposicion en las afecciones cualitativas que el entendimiento impone á las cantidades. Lo negativo es lo opuesto á lo positivo, sin que haya por otra parte en estas denominaciones correlativas otro fundamento que el concepto ó intencion en que se propone ó emprende la investigacion matemática. De tal manera subsiste la correlacion antitética, que las cantidades positivas no vienen á ser más que las verdaderas *negativas de las negativas*, ó que serían negativas si las negativas se tomasen como positivas; lo cual explica los resultados de ciertas combinaciones de signos, como

$$+a=-(-a), \text{ y } -(+a)=+(-a)$$

El carácter substractivo ó *destructor* de los números negativos se comprende muy bien, supuesta la contrariedad de concepto cualitativo que los domina; porque si todo número es una *síntesis*, la de los negativos, en cuanto es contraria á la de los positivos, debe recaer sobre ellos en sentido contrario, realizando el *análisis* de sus unidades elementales y separándolas en un órden descendente, que es la funcion regresiva contraria á la progresiva en que son engendrados los positivos.

La índole de las rectas negativas se expresa por una *direccion* contraria á la de las positivas, partiendo de un comun orígen; y para entender bien cómo esto se conforma con la funcion lógica del juicio, conviene advertir que en las rectas se distinguen dos especies de direccion: una *interna*, y otra *externa*. La direccion interna de una recta finita, que es de la que tratamos aquí, siempre es doble, ó positiva y negativa, como referida á la duplicidad necesaria de sus puntos extremos en que puede concebirse el origen, ó á la doble manera y opuesto sentido en que la recta puede ser recorrida al hacer la síntesis intuitiva de sus elementos. La direccion externa no es más que la posicion que las rectas tienen unas respecto de otras en un plano ó en el espacio. Esto sentado (*), así como la oposicion lógica de la inclusion y no inclusion de un concepto en otro concepto se refiere siempre á la *circunscripcion interna* del predicado, la oposicion de las rectas positivas y negativas debe revelarse *dentro* de la direccion total y única que ellas determinan por su síntesis en el punto de orígen. Si una afirmacion es la coincidencia ó superposicion de una recta sobre otra en el mismo sentido que ella, una negacion ha de ser necesariamente su direccion interna opuesta en la misma direccion absoluta ó externa que ambas determinan: cualquiera otra direccion exterior sería *algo más* que la negacion de una direccion interna positiva, y exigiria una determinacion ulterior por un acto positivo que no va envuelto en el juicio negativo.

Mucha importancia doy á esta observacion, porque en ella está la clave del imaginarismo de las rectas de que trataré en seguida. Pero detengámonos todavía un tanto en el concepto de las cantidades negativas.

ARTÍCULO 5.º

Teoría comun de las cantidades negativas.

Los algebristas que no se elevan á esta clase de conceptos, suelen explicar la naturaleza de la afeccion negativa por un *resultado de la substraccion*, que á veces se propone ó intenta, de un número mayor respecto de otro menor. Pero no advierten que lejos de inferirse aquella cualidad de esta operacion, en ella va necesariamente envuelta, aunque no expresada, la naturaleza negativa del substraendo respecto del minuendo. La necesaria oposicion de estos términos algorítmicos no puede ser explicada por la índole negativa del resultado, sino que es menester suponerla como una necesidad lógica del entendimiento en la concepcion de ciertas cantidades. Tambien hay aquí una confusion nacida del doble uso del signo —, el cual, cuando se emplea, como es costumbre, para indicar la operacion de restar, deja sin signo cualitativo al substraendo, y oculta su verdadera afeccion negativa.

Suele tambien decirse que *las cantidades negativas son menores que cero*: pero no comprendo cómo pueda esto afirmarse, cuando la calificacion de las cosas como mayores, iguales ó menores, no puede tener sentido sino bajo el concepto de *cantidad*, y bajo tal concepto no son comparables las cantidades con cero, ó con la nada que no es cantidad. La cualidad negativa que es propia de algunas cantidades es un punto de vista absolutamente diverso del *quantum* de ellas: las leguas que anda un viajero hacia Poniente no son ménos largas ó ménos cuantas, que las que anduviera hacia Oriente; y sería absurdo decir que, siendo aquellas las negativas, el viajero hace menor jornada que estándose parado: las deudas pueden ser, y son, más ó ménos grandes en sí mismas, segun lo sea el número que lleva esta

(*) Krause. Opuscula mathematica. Specimina quinque.

connotacion concreta de deuda, que no significa mas que lo opuesto al haber.

Cuando no se distingue bien lo que corresponde á las cantidades, como cantidades, de lo que pertenece á su cualidad ó modo de ser, se incurre en locuciones extrañas y paradójicas, que son una contínua ofensa del sentido comun.

Si las cantidades negativas fuesen menores que cero, serian con mas razon menores que las positivas, y entonces ¿por qué no se las desprecia, cuando entran en combinacion sumatoria con las positivas; como se desprecia el cero mayor que ellas?

Si la proporcion geométrica ó por cociente

$$a : —a :: —a : a$$

es legítima, como ciertamente lo es, ¿no se seguiría el absurdo de que una cantidad mayor a tuviese con otra menor $—a$ la misma relacion, que esta misma menor, con aquella misma mayor?

Si la cantidad $—a$ es menor que cero, ¿cómo se concilia que sus potencias pares son mayores, y sus potencias impares menores que cero?

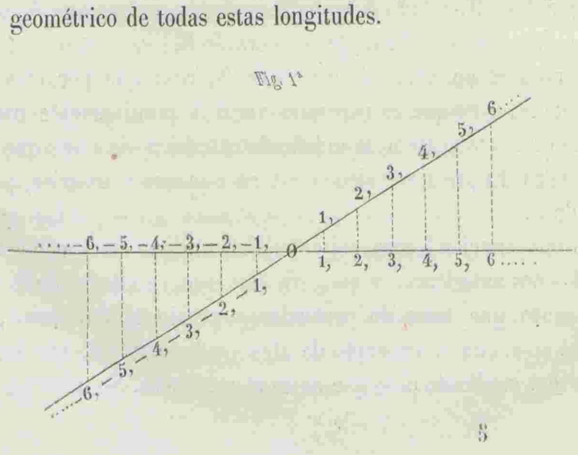
Contra estas antiguas objeciones de D' Alembert y de Carnot, no vale decir *que las cantidades negativas añadidas á las positivas dan una suma menor que si se les añadiese cero;* porque esta añadidura ó adicion no es otra cosa que substraccion, y el resultado debe llevar el nombre de *resta*, y no el de *suma*.

Ni tampoco es razon bastante la que se deduce de la série natural aritmética

$$\div \ldots\ldots —6, —5, —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots$$

á la cual erróneamente atribuye Mr. Coyteux el carácter de *creciente*, cuando no es sino *ascendente*, explicándose el ascenso uniforme de ella por el decremento cuantitativo de los términos negativos hasta cero, y el incremento de los positivos. Este ascenso progresivo podria representarse de una manera geométrica, haciendo perpendiculares por bajo y por cima de un eje horizontal los valores absolutos ó numéricos de todos los términos: una oblícua que pasase por el punto de orígen, sería el lugar geométrico de todas estas longitudes.

Fig. 1ª



Pero, volviendo á nuestro principio de la racional distincion entre la cantidad y la cualidad, sacaré una última consecuencia que tambien considero legítima. *Las cantidades positivas no son mayores que cero*, por la misma razon que las negativas no son menores: el cero no puede ser comparado con la cantidad, porque no es cantidad. Es impropio decir que una poblacion á 40° de latitud tiene mas latitud que la situada debajo del ecuador, que no tiene ninguna. Hasta es contradictorio asegurar que el que tiene 20 reales, tiene mas dinero que el que no tiene ningun dinero.

Por la misma razon que ninguna cantidad es, ni puede ser, igual á cero, afirmo que no es ni puede ser mayor ni menor que él. Solo de una manera hipotética pueden tener sentido estas frases tan frecuentes

$$a - b = 0,\ a - b > 0,\ \text{y}\ a - b < 0$$

La verdad está en las tésis definitivas que de ellas resultan:

$$a = b, \quad a > b, \quad \text{y} \quad a < b$$

ARTÍCULO 6.°

Concepto matemático de las cantidades imaginarias.

Vengamos por fin á la explicacion de la cualidad imaginaria de las cantidades, la cual ha de derivarse de un tercer momento intelectual esencialmente distinto de los dos anteriores.

No solo podemos referir el concepto del sujeto á la circunscripcion interior del predicado, considerándolo incluido ó no incluido en ella; sino que tambien podemos referirlo á la indefinida extension lógica exterior de aquel concepto, esto es, á todo aquello que no es el concepto del predicado: de suerte que además de poder juzgar por ejemplo que A es B, y que A no es B, podemos juzgar que A es no B, ó una cosa que no es B, ó que está fuera de la esfera de B.

No basta aquí el no ver á A dentro de B, cosa que por otra parte podria inferirse fácilmente, sino que es necesario ver á A positivamente constituido fuera de B, ó referido directamente á la indefinida extension de cosas que no son B, y contado entre ellas. El predicado viene á ser en este caso lo exterior, y no lo interior, del concepto de B.

Hay aquí una funcion lógica del entendimiento que no puede confundirse con ninguna de las dos anteriores, y que, sin embargo, participa de la naturaleza de entrambas; puesto que tiene de particular y propio lo afirmativo, por lo cual constituimos al sujeto en el concepto de algo, y lo negativo, por cuanto este *algo* es la negacion del predicado ó lo que no es el predicado. Se mezclan la afirmacion y la negacion en esta clase de juicios, que se llaman *limitativos*, y tambien *indefinidos*, de tal manera, que un sujeto se niega de un predicado afirmando su inclusion en lo que está fuera de aquel predicado. Si A es no B, claramente se infiere que no es B.

El nombre de *limitativos* que se da á estos juicios es muy propio, porque el predicado B limita realmente la indefinida extension de cosas que pueden ser A, pudiendo ser cualquiera de ellas menos B; el de *indefinidos* ó *infinitos*, que tambien llevan, les viene de la infinita extension exterior que rodea la circunscripcion del predicado. Todo concepto ó término lógico se hace en efecto infinito, cuando por la negacion que se le antepone connota su extension externa que no tiene límites: el concepto finito de B se hace infinito diciendo *no B*, porque en efecto son infinitas las cosas que no son B, como son infinitas las determinaciones y figuras geométricas que podemos concebir y trazar fuera de la circunscripcion periférica de un círculo ó de una esfera.

Hay que hacer aquí una observacion importantísima, y es que en esta *referencia indirecta* de un sujeto á un predicado, se reproducen las mismas dos funciones antitéticas de inclusion y no inclusion del sujeto en la exterioridad del predicado; de manera que al acto positivo por el que incluimos á A en lo que no es B, diciendo A es no B, se opone lógicamente el acto negativo de excluirlo de lo que no es B, diciendo tambien A no es no B, sin que por esto se entienda que afirmamos positivamente que es B, ó que volvemos al primer momento lógico de la pura afirmacion. Esto quiere decir que los juicios limitativos, como tales, son susceptibles de la misma oposicion lógica en lo que se refiere á la exterioridad del predicado, que los primitivos que directamente se refieren á su interioridad. Pero entiéndase siempre que ambas referencias indirectas, la positiva y la negativa, pertenecen á una categoría única, la *limitacion*, en la cual quedan neutralizadas las dos categorías extremas, la realidad y la negacion en que se fundan las dos cualidades matemáticas de las cantidades positivas y negativas.

Y así como aquellas dos categorías intelectuales tienen su realizacion en los números y en las magnitudes, así esta tercera debe tenerla por una necesidad transcendental que le es propia como forma primitiva é irreducible del juicio, que es la funcion del entendimiento.

Es necesario concebir cantidades que participen á la vez de la naturaleza positiva y de la negativa, y que se establezcan entre estas dos cualidades como un término intermedio, como un nuevo miembro de la division ordinaria de las cantidades atendida su cualidad; puesto que admite el entendimiento *un nuevo concepto de limitacion al que ha de corresponder un nuevo órden de cantidades* que desde luego debemos llamar *indirectas* por su referencia indirecta ó exterior á las positivas y negativas que reconoce la teoría comun. Esas cantidades intermedias solo pueden mediar exteriormente entre unas y otras, porque la afeccion ó direccion interna no admite término medio en sus dos determinaciones antitéticas, la positiva y la negativa; así como respecto de un predicado no cabe medio entre *ver* y *no ver* á un sujeto comprendido en su esfera ó circunscripcion interior; pero como externas ó indirectas, quedan fuera de esta antítesis, neutralizando en una sintesís perfecta sus determinaciones extremas, y siendo indiferentes entre ellas; aunque en su propio concepto de exteriores sean capaces de la nueva determinacion positiva y negativa que es propia de los dos primeros momentos funcionales del juicio, y que inmediatamente se aplica á las cantidades.

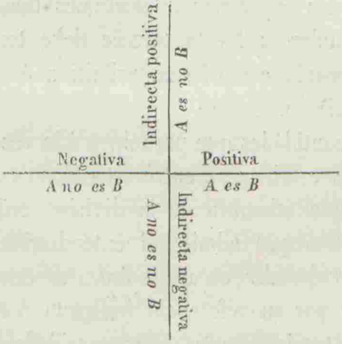
ARTÍCULO 7.°

Eschêma general de estos conceptos.

Casi es imposible seguir paso á paso esta teoría lógica en su realizacion matemática, sin irla eschêmatizando, ó figurando, mentalmente en la oposicion de las líneas rectas, ordinario recurso de la expresion cualitativa de las cantidades. Nos figuramos las cantidades positivas como séries numéricas ó rectas contínuas trazadas en una direccion cualquiera, hácia la derecha por ejemplo; en seguida imaginamos las negativas hácia la izquierda, para expresar su oposicion interior, esto es, sin salir del concepto de la línea recta, y dentro de su direccion absoluta; y por último, ideamos las cantidades indirectas como fuera de esta direccion y referidas á ella por su nueva y propia oposicion, como superiores ó inferiores á ella.

Poniendo, pues, en relacion las denominaciones cualitativas de las cantidades con las formas del juicio á que cada una de ellas debe su orígen, todo el cuadro de las oposiciones lógicas de la cualidad matemática, se encierra en el eschêma siguiente:

Fig 2.



No es precisamente la posicion perpendicular de las indirectas la que se infiere de la teoría lógica, sino la exterioridad de su cualidad, con cuya condicion cumplen tambien las infinitas oblicuas que pueden referirse al eje fijo de las positivas y negativas. Pero la perpendicularidad expresa un grado máximo de indireccion muy propio para realizar este eschêma geométrico en toda su perfeccion ideal.

En seguida justificarémos esta interpretacion geométrica de la cualidad indirecta.

ARTÍCULO 8.º

Consecuencias de esta doctrina lógica.

Debemos dar ahora sus antiguos nombres á estas cantidades para ir acomodando nuestra teoria al lenguaje matemático ordinario.

Las cantidades positivas y negativas que resultan de la relacion directa de un sujeto á la interioridad de un predicado son las llamadas *cantidades reales.*

Las cantidades indirectas, asímismo positivas y negativas, que resultan de la relacion de un sujeto á la exterioridad del mismo predicado, son las llamadas *cantidades imaginarias.*

Deduzcamos ahora algunas consecuencias de la disposicion eschêmática del artículo anterior.

Primera. *Las cantidades se dividen en reales é imaginarias, y en cada uno de estos miembros se subdividen en positivas y negativas,* para incluir en una division dicotómica ó bimembre los dos conceptos de interioridad y exterioridad en que un sujeto puede ser referido á un predicado.

Segunda. *Las cantidades se dividen en positivas y negativas, subdividiéndose en cada uno de estos miembros en reales é imaginarias*, cuando solo aspiramos á expresar el doble concepto de inclusion ó no inclusion de un sujeto en un predicado.

Tercera. *Las cantidades en general deben dividirse en positivas, negativas é imaginarias*, si queremos incluir en la division los tres momentos ó maneras absolutamente irreducibles de ser referido un concepto á otro concepto por la funcion eminentemente intelectual del juicio.

La teoría lógica no autoriza más divisiones cualitativas que estas, y en todas ellas lo imaginario figura por un concepto tan propio como lo real.

Muy lejos, pues, de ser absurda la concepcion de cantidades imaginarias, son estas la consecuencia, y al propio tiempo, el complemento de la teoría lógica, de donde únicamente pueden deducirse las cualidades positiva y negativa que el Álgebra admite.

Y volviendo al asunto primero que dió motivo á esta explicacion transcendental, reconocerémos cuán poco valor puede tener el raciocinio que procede de una division tan incompleta y antilógica como la que se hace comunmente de todas las cantidades en *positivas* y *negativas*. Deducir de esa division la absurdidad de las raices imaginarias, es incurrir, aunque sin intencion, en una manifiesta *peticion de* *principio*, que consiste en suponer esa misma imposibilidad, que se trata de probar, envuelta en lo exclusivo y limitado de la division (*).

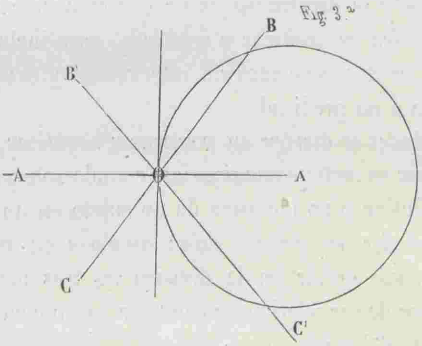
Y nótese bien: de este *círculo vicioso*, en que está encerrada la teoría del absurdo como objeto propio del Álgebra, no puede salirse más que negando la exactitud lógica de esa pretendida division, y admitiendo desde luego las cantidades imaginarias al lado de las positivas y de las negativas. Con solo esto queda arruinado el argumento exhaustivo en que se funda la calificacion de absurdidad (de que hemos hablado en el PREÁMBULO), el cual no es al cabo más que un paralogismo reprobado por la buena Lógica, por más que la irreflexion lo excuse, ó el hábito lo autorice.

ARTÍCULO 9.º

Interpretacion geométrica de las cantidades imaginarias.

La interpretacion geométrica de lo imaginario por lo perpendicular es un corolario inmediato de la teoría transcendental. Y aquí debo justificar la direccion que toman las imaginarias en el eschêma general de las cualidades.

Si se supone que un círculo (*Fig.* 3.ª) representa el concepto atributivo ó



(*) En este círculo vicioso me parece que cae el Sr. Marqués de Hijosa de Álava, en las pocas líneas que consagra á las imaginarias, en su interesante obra intitulada *Investigaciones matemáticas*, cuando dice que es absurdo suponer cantidades que, elevadas al cuadrado y aumentadas con la adicion de la unidad, sean iguales á cero, como se verificaria en la ecuacion

$$x^2+1=0,$$

cuyas raíces por esta razon son imaginarias ó imposibles. Aquí se supone lo mismo que se intenta probar; á saber: que no hay cuadrados negativos, ó que son imposibles sus raíces, y si no, ¿por qué no vale el mismo raciocinio respecto de la ecuacion

$$x^3+1=0$$

que tiene una raíz real? Porque los cubos negativos no son imposibles.

predicamental que ha de fijar la cualidad directa positiva ó negativa de las rectas; el rádio A (*) totalmente incluido en esta circunscripcion, será una recta positiva, y la recta —A, que se le opone en la direccion absoluta, es la expresion de la cualidad negativa. La cualidad imaginaria, que debe ser absolutamente exterior á aquel concepto, deberá expresarse por una direccion que nada tenga de comun con su interioridad; de tal manera, que ni en su cualidad positiva ni en la negativa entre en aquella circunscripcion. Y como la recta tangente del círculo, y por consiguiente perpendicular al radio positivo en su extremo que se considera como orígen, sea la única que cumple con esta condicion, ella es la mas perfecta expresion de la cualidad imaginaria en su puro concepto: es la *imaginaria típica*. Cualquiera otra recta como BC, ó B'C', de la cual se demuestra que debe cortar al círculo, tiene algo de comun con él, no es enteramente exterior á él, y no es perfectamente imaginaria.

Aparece aquí la perpendicularidad como la expresion mas pura de la indiferencia y de la neutralizacion entre dos cualidades antitéticas; y todas las propiedades geométricas de la perpendicular no son más que la realizacion intuitiva de aquel concepto de limitacion.

La perpendicular sirve de *límite* á las dos regiones cualitativas: con la igualdad de sus ángulos se constituye como indiferente entre ellas; y con la equidistancia de cada uno de sus puntos de dos puntos equidistantes del orígen, neutraliza verdaderamente ambas afecciones. Casi no hay necesidad de acudir á las teorías lógicas para comprender ese carácter mediador y perfectamente indirecto de las perpendiculares, y hé ahi la razon por que de anticiparnos naturalmente á representar por ellas el imaginarismo conforme vamos eschêmatizando los conceptos de la teoría transcendental.

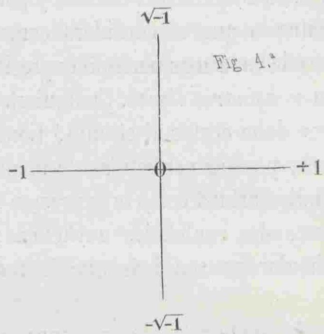
Todos los geómetras ven sin duda algo de característico y de singularmente propio en la perpendicular, cuando la declaran *única* medida de la distancia verdadera de un punto á una recta; pero no viendo otras cualidades que las direcciones internas de las rectas, cuando con un fin analítico tratan de realizar en Geometría la menguada ortografía algebráica de los signos + y —, aparentan desconocer el legítimo carácter cualitativo de las perpendiculares en el mismo punto de orígen que separa lo positivo de lo negativo: no ven sino imperfectamente copiado el cuadro intelectual de las categorías de la cualidad.

La perpendicular, si algo es respecto de la recta sobre cuyo orígen se constituye, ha de tener una cualidad tan momentánea y típica, tan legítima, natural y propia, como la de las negativas referidas á las positivas en este mismo orígen.

La perpendicular, como enteramente exterior y perfectamente indirecta respecto de la recta, con la cual tiene un punto comun, representa la cualidad imaginaria.

(*) Los elementos lineales de las figuras los señalarémos con un símbolo ó letra que se colocará en medio de la recta ó en el extremo opuesto á su orígen: esta última notacion se empleará con preferencia en todas las figuras que tengan una disposicion radial, como la á que hace referencia el texto.

Admitiendo, pues, *provisionalmente* como signos de la indireccion perfecta ó de la imaginaria pura el símbolo $\sqrt{-1}$, el eschêma total de las cualidades de las rectas referidas á un punto de orígen, estará bien representado por esta figura



en la cual aparecen conjugadas ú opuestas las dos direcciones reales en un eje horizontal, y las dos imaginarias en uno vertical. Ambos ejes son perpendiculares entre sí, ú *ortogonales*.

ARTÍCULO 10.

Imaginarismo doble. Paralelismo.

Quizás no haya una idea mas fundamental del paralelismo que la que lo hace consistir en la identidad de direccion externa de las rectas (*). Yo creo que si las paralelas se definiesen por ese concepto tan eminentemente cualitativo, podria introducirse mucha claridad en esa desdichada teoría, y tal vez llenarse la laguna que en vano se pretende colmar con el famoso *postulatum* de Euclídes, ó con demostraciones cuya complicacion es la prueba mas evidente de su insuficiencia.

Nunca se logrará desenvolver una verdadera teoría de las paralelas, mientras no se reforme la definicion ordinaria de estas; y la reforma debe consistir en no tomar por esencia del paralelismo lo que no es más que una de sus mas remotas consecuencias. La propiedad que tienen las paralelas de *no encontrarse en ningun punto por mucho que se las prolongue*, nace del paralelismo, pero no es su constitutivo esencial.

(*) Véase el artículo IV de este mismo Libro.

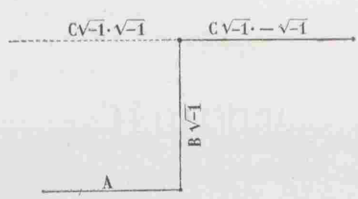
La verdadera naturaleza del paralelismo consiste en la identidad de direccion externa de las rectas que se hallan en un mismo plano; y las paralelas deben definirse: *rectas que, siendo distintas en un plano, tienen idéntica direccion exterior.*

De esta nocion del paralelismo se infiere inmediatamente que todas las rectas paralelas á una real son reales; y que las paralelas á una imaginaria son imaginarias.

Asímismo es evidente que las perpendiculares á una recta que es perpendicular á una real, son reales; y que las perpendiculares á una recta perpendicular á una imaginaria, son imaginarias. La doble perpendicularidad ó el doble imaginarismo restablece la identidad de direccion, y constituye el paralelismo. La teoría de las paralelas, cuya transcendencia geométrica es tan inmensa, viene á ser una ampliacion de la teoría del imaginarismo.

Continuemos usando del símbolo $\sqrt{-1}$ como signo provisional de la perpendicularidad, y verémos como sus combinaciones corresponden siempre á lo que exige esta teoría.

Fig. 5ª



Si A expresa una recta positiva y $B\sqrt{-1}$ otra recta B levantada perpendicularmente sobre su extremo, una nueva recta C perpendicular á esta exigiria en la expresion de su paralelismo una repeticion del signo de perpendicularidad, y sería

$$C\sqrt{-1}\,.\sqrt{-1}$$

Ahora bien: debe notarse que cuando la segunda perpendicularidad se considera constituida en el mismo sentido en que lo fué la primera, la paralela resultante es contraria ó negativa respecto de la base, aunque tan real como ella: el signo se repite entonces sin alteracion, y sabido es que

$$C\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -C$$

Mas cuando la segunda perpendicularidad se constituye en sentido contrario á la primera, la nueva posicion paralela es real como la base, y además es positiva; el signo de la segunda perpendicularidad debe ser contrario al de la primera; y la paralela resultante será

$$C\sqrt{-1}.-\sqrt{-1}=C$$

Puede tambien establecerse en general que las posiciones que resultan de un número par de perpendiculares sucesivas á una base real, reproducen la realidad de esta, cualquiera que sea su cualidad positiva ó negativa, ó su direccion interna con arreglo al sentido en que aquellas se supongan constituidas. Asi tambien las posiciones perpendiculares en número impar son siempre imaginarias; pero, como paralelas entre sí, reproducen este imaginarismo en la identidad de su direccion externa.

Por su parte el Álgebra elemental demuestra que esta misma ley siguen los llamados productos de un grado par ó impar de símbolos $\sqrt{-1}$.

ARTÍCULO 11.

Imaginarias afectas. Oblicuidad.

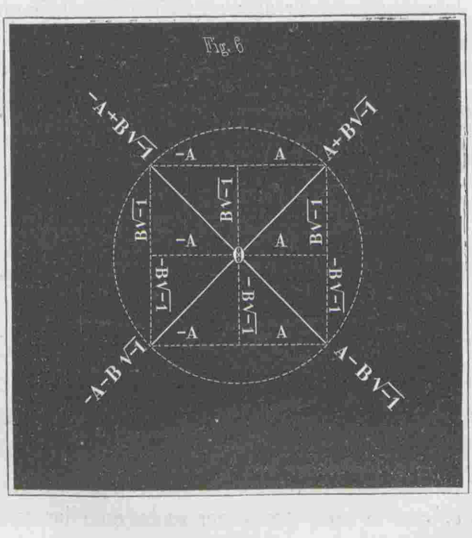
La interpretacion geométrica del imaginarismo no queda enteramente realizada con la perpendicularidad de las imaginarias puras, sino que es necesario ver en las oblícuas la expresion de una exterioridad ó indireccion ménos perfecta, por cuanto envuelve algo de comun con la interioridad del concepto atributivo que representamos por un círculo en la página 38. Suponiendo que el punto de orígen se halla en la circunferencia de este círculo, son infinitas las direcciones referidas á este punto, que ya positiva, ya negativamente, pueden cortarlo. Estas direcciones no pueden mediar como perfectamente neutras entre las dos cualidades fundamentales, la positiva y la negativa, como sucede á la imaginaria pura, sino que han de participar más de una que de otra, sin perder su carácter de exteriores ó indirectas.

Estas imaginarias menos perfectas, en que no están totalmente neutralizadas las dos afecciones extremas, sino que en ellas predomina una afeccion sobre la otra, son las que llamo *imaginarias afectas*, y las que encuentro rigorosamente interpretadas por la *oblicuidad*: todas las propiedades geométricas de las oblícuas están en perfecto acuerdo con esta afeccion cualitativa en que predomina alguna de las afecciones extremas.

Claro es que el símbolo algebráico de esta cualidad tan vária, debe ser tan complexo, cuanto sea bastante para representar con la variabilidad de sus elementos el grado de participacion que estas imaginarias tienen en la afeccion positiva ó negativa reales, y el grado de exterioridad ó indireccion, por el que se llaman imaginarias; de manera, que la forma de su expresion algebráica es necesariamente *binomia:* un término real $\pm A$ indica lo que hay de real en su afeccion, y otro imaginario puro $\pm B\sqrt{-1}$ expresa su indireccion; expresando $\pm A \pm B\sqrt{-1}$ la forma necesaria y universal del imaginarismo afecto.

Las oblícuas á su vez no pueden ser referidas á un eje horizontal, sino por la doble proyeccion, una real contada sobre este eje, que es la expresada por el elemento $\pm A$, y otra perpendicular á la anterior contada sobre el eje vertical ó imaginario expresada por $\pm B\sqrt{-1}$.

Las variaciones cuantitativas de A y B, combinadas con las que resultan de los signos $+$ y $-$, pueden representar todos los grados de oblicuidad, porque puede pasar una recta, que gira al rededor de uno de sus extremos como se vé en esta figura: en la cual



$$A+B\sqrt{-1}$$

denota oblícuas comprendidas en el ángulo recto formado por la real é imaginaria, ámbas positivas;

$$-A+B\sqrt{-1}$$

expresa oblícuas comprendidas en el ángulo recto formado por la real negativa y la imaginaria positiva;

$$-A-B\sqrt{-1}$$

significa oblícuas comprendidas en el ángulo recto formado por la real y la imaginaria ámbas negativas; y

$$A-B\sqrt{-1}$$

representa oblícuas trazadas en el ángulo recto formado por la real positiva y la imaginaria negativa.

Por la variedad funcional de que es capaz está forma universalísima del imaginarismo, se ve claramente que en ella se comprenden, no solo las posiciones perpendiculares propias de la imaginaria pura, cuando se supone $A=0$, sino tambien las posiciones absolutas y reales, cuando se supone $B=0$.

Las cuatro direcciones cardinales de los dos ejes son con efecto recorridas sucesivamente por la recta que gira en una circunvolucion completa; y las imaginarias puras, lo mismo que las reales, no vienen á ser más que *casos particulares* del imaginarismo, considerado como afeccion universal.

¿Qué quieren decir los algebristas cuando afirman que *las cantidades reales son casos particulares de las imaginarias*? ¿Acaso que las cantidades posibles son casos particulares de las imposibles, ó que las verdades son casos particulares de los absurdos?

ARTÍCULO 12.

Interpretacion aritmética de las cantidades imaginarias.

Aunque los números no sean capaces de direccion como las rectas, y no sean la perpendicularidad ni la oblicuidad la expresion de su imaginarismo, bástanos concebir en ellos la posibilidad de una afeccion neutra, que media entre las afecciones positiva y negativa, con lo cual queda realizada en ellos la transcendentalidad lógica del concepto de limitacion.

Verdad es que el tiempo, intuicion pura y forma necesaria de la sucesion numérica, se imagina siempre como *una recta que pasa* ante los ojos del espíritu, desenvolviendo su naturaleza esencialmente sucesiva en una direccion única invariable: el tiempo no retrocede, sino que avanza siempre en un sentido progresivo, que es el mismo para todos los órdenes de fenómenos, así del mundo exterior ó físico, como del interior ó psicológico. Pero este es el tiempo real, el tiempo de intuicion, el tiempo tal como domina de hecho en la fenomenalidad de nuestra vida interna y externa; pero el tiempo concebido y despojado por el entendimiento de aquella progresividad estética ó intuitiva en una direccion única, no encierra en su concepto intelectual más que la idea de sucesion, la cual así puede ser desenvuelta en el sentido del progreso de los fenómenos, como en el sentido contrario ó en un sentido diferente ó exterior á entrambos. Dado un punto fijo en el tiempo, es posible concebir una regresion ó marcha contraria á la que trae el tiempo real, y hasta un desarrollo exterior á la línea de su progreso, en el cual podemos ver como sucesivos todos los momentos que en la sucesion real pasan como simultáneos con el punto de orígen, sobre el cual todos ellos se proyectan.

En virtud de esa posibilidad en el concepto de tiempo, son concebibles los números negativos, y con el mismo título los imaginarios, los cuales expresan séries de momentos sucesivos entre sí, pero simultáneos respecto de aquel punto de la duracion que se señala como orígen en el tiempo real.

Resulta de esta concepcion del tiempo una asimilacion perfecta de todas sus determinaciones con las del espacio: *los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza tan diferente*, dijo PASCAL con profundidad suma. Y de tal manera es esto cierto, que no solo en líneas rectas ó séries, sino en planos y aún en sólidos, pueden los números concebirse dispuestos, figurando entre sí la misma coordinacion eschêmática propia de las magnitudes que domina en la Geometría (*).

(*) Mr. GERGONNE dispone los números imaginarios combinados con los reales en una tabla que imita perfectamente la disposicion de las rectas en un plano. La tabla es como sigue:

$$\begin{array}{ccccc}
-7+3\sqrt{-1} & & 3\sqrt{-1} & & \\
 & & 2\sqrt{-1} & & 6+2\sqrt{-1} \\
 & & 1\sqrt{-1} & & \\
\ldots\ldots -9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1, & & 0, & & 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ldots\ldots \\
 & & -1\sqrt{-1} & & \\
-4-2\sqrt{-1} & & -2\sqrt{-1} & & \\
 & & -3\sqrt{-1} & & 5-3\sqrt{-1}
\end{array}$$

Las expresiones binomias que hay en los ángulos son ejemplos de imaginarias afectas, en que entran números reales é imaginarios: equivalen en este eschêma á las oblicuas del eschêma geométrico.

La Aritmética atribuye á la sucesion en el tiempo un carácter intuitivo, segun el cual los números se desenvuelven siempre en un sentido progresivo en virtud de la síntesis sumatoria que los constituye: los números en ella carecen verdaderamente de cualidad, y si alguna tienen, es la positiva, segun comunmente se dice: en la síntesis aritmética, propiamente no hay números negativos ni imaginarios. Pero el Álgebra, que prescinde de esta cualidad intuitiva del número, los subordina inmediatamente á toda la variedad de cualidades impuestas á la sucesion por los conceptos del entendimiento; y para ella no solo son posibles números negativos, sino tambien imaginarios.

No suelen, en verdad, ofrecer los problemas concretos frecuentes ejemplos de indireccion numérica. El lenguaje comun es en este punto muy limitado, y los problemas ordinarios no suponen posibilidad de otras soluciones que las positivas, dando interpretacion natural solo en algunos casos á los resultados negativos. Todos los problemas referentes á la fortuna de las personas, versan ordinariamente sobre cantidades ó *habidas*, ó *debidas*, siendo muy raro formularlos respecto de cantidades meramente *depositadas*, y que no afectan directamente al haber ni al deber, y que sin embargo afectan de un modo indirecto á la situacion de un capital.

Si una cantidad positiva representa el *haber* y una negativa el *deber*, una imaginaria debe expresar un *depósito*. La imaginaria negativa significará un *deber* de este depósito.

Si en el juego se considera la circunstancia comun de quedar en fondo de una mano para otra algunas cantidades, créditos ó deudas, para expresar la verdadera situacion actual de cada jugador, será necesario, además de lo positivo (expresion de la ganancia) y de lo negativo (que significa pérdida), considerar lo imaginario, que representará lo retenido en el platillo, que ni es pérdida ni ganancia actual, sino aplazada: la imaginaria negativa será deuda al platillo, con el cual parece que se lleva una cuenta exterior, y como extraña al haber y deber directos que median entre los jugadores.

Si un exponente entero positivo conduce á una potencia entera, verdadero múltiplo de la raíz, y uno negativo á una fraccionaria ó submúltipla, uno imaginario dará potencias que en su valor cuantitativo medien entre los números enteros y los fraccionarios, esto es, dará *la unidad* diversamente modificada en su afeccion.

Cuando nos empeñamos en deducir la cualidad de los números de su significacion concreta, nos exponemos á que sea injustificable en muchos casos hasta la cualidad negativa. Hay en la naturaleza real de las cosas ciertos límites, más allá de los cuales es imposible la intuicion empírica, y por consiguiente la determinacion negativa de las cosas dadas en esta intuicion: ¿qué significa, por ejemplo, una cantidad negativa de movimiento, de velocidad, de peso, de luz? ¿qué es un número negativo de hombres?

El Álgebra pura, que no especula sino sobre los conceptos del número, debe ocuparse poco en estas determinaciones y limitaciones empíricas, y realizar enteramente sin contradiccion y sin absurdo los conceptos de la categoría de cualidad, cualquiera que sea la aptitud que el lenguaje comun ofrezca en cada caso para interpretar alguna de estas cualidades en la propuesta ó en la solucion de los problemas. Si los conceptos que el Álgebra aplica, y las leyes que dominan su desarrollo interior como ciencia, son *à priori*, esto es, independientes de todo empirismo, las limitaciones del lenguaje en que han de interpretarse las cualidades numéricas, nunca pueden argüir limitacion ó absurdidad en tal interpretacion.

ARTÍCULO 13.

Naturalidad de las imaginarias.

Y ahora se ve claramente que la obscuridad y el misterio atribuidos por el mundo matemático á las imaginarias, no son más que aparentes, desde el momento en que se reconoce, no ya la mera posibilidad, sino la necesidad indeclinable de admitir cantidades que no sean positivas ni negativas bajo el mismo concepto en que lo son las llamadas *reales*, cantidades de cualidad neutra, por cuanto median entre lo positivo y lo negativo y representan en perfecta síntesis esas dos afecciones antitéticas.

Estas cantidades, á las cuales no puede negarse la doble afeccion de positivas y negativas, pero dentro de la relacion que exteriormente guardan con lo positivo y negativo absolutos, son numerables, son mensurables y entran en relaciones cuantitativas bajo idénticos conceptos que todas las otras cantidades; su logística entera se realiza por los mismos algoritmos, y concurren á la generacion de la cantidad, á veces real, sometiéndose á las mismas exigencias algorítmicas que las llamadas reales.

Todo en ellas es fácil y llano, todo natural y lógico, cuando el algoritmo de las imaginarias es comprendido con la bastante amplitud para que en él quepan las nuevas determinaciones cualitativas que hace necesarias el reconocimiento de un nuevo concepto intelectual hasta aquí obscurecido, si no enteramente perdido, en el juego general del pensamiento matemático. Todo, por el contrario, se obscurece cuando nos obstinamos en reducir al estrecho cuadro de dos únicas afecciones el inmenso desarrollo algorítmico á que pueden prestarse los tres conceptos de afirmacion, negacion y limitacion.

Claro es que esta mayor anchura de la logística matemática no puede ni aún siquiera concebirse sin la explícita y terminante condenacion de los estrechos puntos de vista que ya por la necesidad de ajustar las teorías al número y naturaleza de los signos comunes, ya por el hábito mismo de no ver en la cantidad mas afecciones posibles que las de positiva y negativa, han limitado la universalidad y transcendencia necesaria del Álgebra conceptual, de la verdadera Lógica de la especulacion matemática pura.

Las imaginarias no habrán alcanzado el hasta ahora disputado derecho de figurar entre las cantidades reales con los mismos títulos que ellas, mientras no sean enteramente renovadas algunas ideas, por cierto muy vulgares, acerca de la índole conceptual de la suma, de la multiplicacion ó produccion, y de la elevacion á potencias ó graduacion.

Ni aún siquiera es presumible que tengan las imaginarias la misma fortuna que las cantidades negativas. Estas han justificado su entrada en los cálculos, mucho antes de estar creada su verdadera teoría, por la no repugnancia de su significacion en muchos casos. Las imaginarias están condenadas por todos los derechos y trámites de la Lógica ordinaria á aparecer como absurdas, mientras no se ensanche el cuadro categórico de las afecciones cualitativas de toda cantidad.

Sin embargo, ya hemos visto á la Lógica transcendental, importante ramo de la Filosofía crítica del espíritu humano, encargada de su rehabilitacion; y su triunfo, aunque todavía lejano, no es por eso menos seguro.

ARTÍCULO 14.

Impropiedad del nombre de imaginarias.

Digamos ahora cuatro palabras acerca del nombre que llevan y del signo con que se expresan las cantidades indirectas.

El nombre de *imaginarias* dado á estas cantidades compendia en sí los epítetos de imposibles, absurdas y contradictorias, con que han sido honradas por casi todos los geómetras. Imaginario es lo no real, lo fantástico, lo aparente, lo ilusorio: los espacios no ocupados por cuerpos se llaman espacios imaginarios; los proyectos irrealizables son proyectos imaginarios. Se atribuye á la fantasía todo aquello que no tiene una existencia exterior ó lo que no está sometido á la comprobacion de una experiencia sensible.

Fácilmente se concibe que esta significacion vulgar de la voz es inaplicable á las cantidades indirectas, porque ellas son en sí tan reales como las llamadas reales, y su concepcion es tan natural como la de las positivas y negativas.

No tiene, por otra parte, la fantasía una intervencion mas especial en su concepto que la que tiene en el de todas las demás cantidades, porque en todas ellas, cualquiera que sea su afeccion ó direccion, se mezcla esta facultad plástica, haciendo la síntesis de la diversidad dada en la intuicion, y reduciendo la pluraridad confusa á una unidad de concepto por la continuidad esencial del tiempo y del espacio. Sin esa síntesis primitiva de la imaginacion fuera imposible la totalidad eschêmática del número y de la extension; y esa representabilidad que les es propia constituye toda su realidad. En este sentido mas profundo podia decirse que todas las cantidades son imaginarias, y que solo merecen el nombre especial, aunque impropio, de reales aquellas cuya afeccion ó direccion es dada como término absoluto de referencia para todas las demás que *no son dirigidas* segun ellas, ó que son *indirectas* respecto de ellas.

En suma: si *realidad* significa verdadera existencia, todas las cantidades son *reales*: si *imaginario* denota la intervencion necesaria de la imaginacion en el concepto de la cantidad, todas pueden llamarse imaginarias. Mas como la denominacion exclusiva de imaginarias ó reales en todos los órdenes de cantidades, deja sin expresion la diferencia necesaria de su concepto cualitativo, y haya por consiguiente que distinguir en el nombre lo que la mente tanto distingue en el concepto, insisto en proponer, como el mas propio, el de *indirectas* para expresar la no direccion de las perpendiculares y oblícuas respecto de las que podrian llamarse *directas*. Estas denominaciones geométricas tendrian la ventaja de expresar la esencia del imaginarismo con la claridad intuitiva que es propia de la Geometría.

Para no alterar, sin embargo, la conveniente armonía que en órden al lenguaje debe guardar esta obra con todas las demás, conservaré las antiguas denominaciones de real é imaginario, que el uso, sin razon para ello, ha venido autorizando.

ARTÍCULO 15.

$+$, $-$ y $\pm\sqrt{-1}$ como signos de cualidad.

Muy notables son las circunstancias que acreditan de legítimo y apropiado el signo $\sqrt{-1}$ con que se expresa la cualidad imaginaria.

Los signos $+$ y $-$, absolutamente arbitrarios, en nada revelan al espíritu la índole de las cantidades á quienes afectan, ni mucho menos la clase de procedimiento en cuya virtud fuera posible deducirlos uno de otro: son signos sin genealogía y sin historia.

El símbolo típico $\pm\sqrt{-1}$, en cuanto resume las dos afecciones absolutas anteriores, es, por el contrario, abreviada indicacion de *lo que habria de hacerse con la unidad negativa para explicar el modo de ser de la cantidad á quien afecta*. Es un signo verdaderamente histórico, y aunque de tan breve y fácil escritura, compendia toda la logística de la cantidad, y por eso saca impresos todos los lineamentos de ella en la elaboracion que recibe de la accion sintética del Álgebra. Esta lo concibe y lo da á luz como para suplir la omision de los primeros inventores de la ciencia, y dar en rostro á los que la cultivan con el mas flagrante ejemplo de absurdidad á que lógicamente habia de conducir aquella desgraciada omision.

Algunos han propuesto que este signo fuese reemplazado por otro cualquiera de institucion arbitraria. Mr. Vallés indica la conveniencia de expresar el imaginarismo por el signo $\llcorner$, que ya señala gráficamente la perpendicularidad, ó por $\llcorner\!\!\llcorner$, para el caso de que esta fuese doble ó condujese al paralelismo. Mr. Mourey quiere suplir la escritura de la imaginaria con un índice angular al que llama *versor*. Pero estos signos, privados enteramente de naturaleza algorítmica, inmovilizarian la frase algebráica, perdiéndose la fecundidad original del símbolo $\pm\sqrt{-1}$, que en su varia potencialidad encierra todos los grados de indireccion. Casi puede decirse que fué una gran fortuna para el Álgebra el que los primeros que intervinieron en el arreglo de su ortografía, no se acordasen siquiera de inventar un nuevo signo, porque dejando, sin saberlo, á la ciencia misma el cuidado de engendrarlo, el signo saca estampado el blason de su noble estirpe, y enriquece á la ciencia con una nueva teoría. Por ser algorítmico el signo $\pm\sqrt{-1}$ se encierra en su potencialidad toda la teoría cualitativa.

Esta teoría, que exige la especial consideracion de las imaginarias como raíces, está contenida en el capítulo siguiente, el cual tiene por objeto demostrar que *las cantidades indirectas, cuya posibilidad enseña la teoría transcendental, no son otras que las* RAÍCES *imaginarias*; con lo cual queda enteramente expuesto su concepto matemático.

CAPÍTULO II.

DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS CONSIDERADAS COMO RAICES.

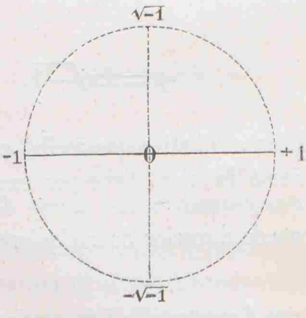
ARTÍCULO 1.º

$\sqrt{-1}$ como raíz de segundo grado.

En el anterior capítulo he considerado el símbolo $\sqrt{-1}$ como un signo de limitacion ó de neutralidad perfecta, entre la afeccion positiva y la negativa, ó como la expresion mas propia de un grado máximo de indireccion respecto de aquellas direcciones fundamentales. Sin embargo, por su forma radical revela el signo $\sqrt{-1}$ un orígen algorítmico potencial, y simboliza la totalidad de una teoría inmensa, de la cual no son sino determinaciones particulares los tres momentos típicos, representados por los signos $+$, $-$ y $\pm\sqrt{-1}$, y correspondientes á los tres conceptos, *realidad, negacion y limitacion*. En la teoría de la potencialidad, ó sea de la graduacion, está el gérmen de la teoría cualitativa.

Conservemos la misma representacion eschêmática de las direcciones que determinan dos ejes ortogonales, y veremos levantarse toda la teoría radical sobre los sencillos raciocinios que van á continuacion.

Fig. 1



La raiz cuadrada ó de segundo grado de -1 no puede ser $+1$ ni -1, porque cualquiera de ellas elevada á su segunda potenciada $+1$, segun la doctrina comun y verdadera de los algebristas. Luego esta raíz segunda no puede estar representada geométricamente ni por la recta $+1$, ni por la -1 de la figura anterior.

Luego habrá de hallarse fuera de la recta única formada por $+1$ y -1, y será *indirecta* respecto de ella.

Luego esta raíz indirecta, cualquiera que ella sea, ha debido llegar á ser potencia negativa -1, por una evolucion verificada fuera de la direccion de aquella recta.

Por otra parte, la posicion indirecta, que corresponde á la raiz $\sqrt{-1}$, debe constituir un grado tal de evolucion cualitativa respecto de la unidad positiva, que, repetido este grado en igual razon y manera progresiva, constituya á su vez la segunda potencia -1, como lo exige la igualdad de razon y de grado de todo desarrollo potencial.

Luego la raíz cuadrada ó segunda de -1, ha de hallarse igualmente distante (con distancia angular ó evolutiva) de -1, potencia, que de $+1$, eje de universal y necesaria referencia.

Pero no puede haber otra posicion que tenga tales condiciones sino la perpendicular, que ya suponemos representable por el signo $\sqrt{-1}$.

Luego la perpendicular representa la raíz segunda de -1, y el símbolo radical $\sqrt{-1}$ es á su vez genuina expresion de la perpendicularidad.

Si p expresa el coeficiente ó la modificacion particular que la cantidad a necesita para constituirse como raíz segunda de $-a$, es claro que, repitiendo esta modificacion sobre la raíz, quedará constituida la segunda potencia $-a$, y se tendrá

$$p.\,pa = p^2 a = -a;$$

y dividiendo por a, resulta

$$p^2 = -1;$$

de donde se deduce

$$p = \pm\sqrt{-1},$$

que expresa que la modificacion cualitativa que recibe una recta real ú horizontal para hacerse vertical (superior ó inferior), tiene por expresion legítima el símbolo $\pm\sqrt{-1}$, el cual es coeficiente de direccion de cualquiera recta en cuanto se concibe como perpendicular.

Todo el secreto de la fuerza demostrativa del anterior raciocinio se encierra en la doctrina de la igualdad de todos los grados, esto es, de la regularidad de la graduacion en una série progresiva de potencias, ó regresiva de raíces. Aún sin salir de las nociones mas vulgares acerca de este algoritmo, es sabido que entre todas las potencias enteras ó fraccionarias de una misma raíz se establece una misma igualdad de grado, no precisamente respecto de los valores absolutos ó cuantitativos de las potencias ó raíces, las cuales no proceden progresiva ó regresivamente en grado igual ó por diferencias iguales, sino que entiendo aquí por *grado igual* la relacion de término á término expresada por los valores aritméticos de los exponentes, entre los cuales hay siempre la misma diferencia ó distancia. Así la igualdad de razon entre los términos de la progresion geométrica

$$\div 1,\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4,\ aq^5,\dots\dots$$

dividiendo por a, conduce siempre á la igualdad de grado en la progresion:

$$\div 1,\ q,\ q^2,\ q^3,\ q^4,\ q^5,\dots\dots$$

que es un desarrollo potencial de la raíz q.

Esta igualdad de grado establece una relacion importante y necesaria entre toda raíz y la unidad, la cual relacion se va reproduciendo con perfecta igualdad por todas las potencias, de tal manera que la unidad es á la raíz como esta á su segunda potencia, ó como una potencia á su inmediata superior.

En el caso que nos ocupa, es legítima la suposicion de que la raíz segunda de $-a$ tenga una posicion tal que, repetida como grado igual, se constituya la potencia $-a$, y legítimo y evidente el resultado á que conduce la proporcion

$$a : ap :: ap : -a$$

De donde se deduce

$$a^2p^2 = -a^2, \quad \text{ó bien} \quad p^2 = -1,$$

y por consiguiente

$$p = \pm\sqrt{-1}$$

Hénos aquí como sorprendiendo este primer momento de la potencialidad de $\sqrt{-1}$, símbolo que hasta ahora hemos admitido como un mero signo de cualidad indirecta, y cuyos ulteriores desarrollos potenciales han de esparcir tanta luz sobre el algoritmo de la graduacion, al cual debemos desde ahora mirar como original y primitivo, y de todo punto independiente del de la produccion.

Los giros y evoluciones de las imaginarias en un plano, y en el espacio, son el grande objeto de esta interesante parte de la logística algebráica.

Las potencias en los números tienen su representacion geométrica en las posiciones de las líneas; los grados potenciales son grados de inclinacion respecto de la unidad positiva: los arcos que miden los ángulos de inclinacion son como los exponentes de las potencias; y la progresion aritmética de estos arcos, coordinada con la geométrica de las rectas, los declara verdaderos *logaritmos* de las rectas que son los *números.*

No hago aquí más que anticipar alguna doctrina de la que será ámpliamente desenvuelta en el Libro IV de esta obra. Todo aquel libro será una constante y eficacísima demostracion de esta verdad capital: *la evolucion potencial de las líneas consideradas como raíces es siempre lineal, longitudinal en el sentido de un eje horizontal si son reales, ó giratoria si son imaginarias.*

ARTÍCULO 2.°

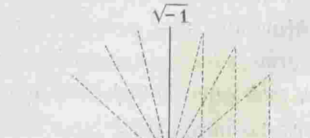
Transicion de los valores positivos á los negativos.

Coincide maravillosamente esta explicacion de la potencialidad cualitativa de las rectas con las nociones mas fundamentales acerca de la variabilidad de las cantidades y del tránsito de los valores positivos á los negativos.

De dos maneras pueden concebirse las transiciones de un valor positivo á otro negativo: ó la magnitud que *pasa* conserva inalterable su cualidad y experimenta alteracion solo en su cantidad, ó conserva invariable la cantidad sufriendo la alteracion solo en la cualidad ó posicion. Estas dos alteraciones corresponden á conceptos independientes, aunque pueden ser simultáneas. En el primer caso la transicion se verifica por medio de *cero*, que es la nada de cantidad; en el segundo por medio del símbolo $\sqrt{-1}$, que expresa una especie de nada cualitativa, una indiferencia ó neutralizacion de las afecciones positiva y negativa.

Fig. 9

Fig. 8



El primer caso tiene su representacion geométrica en un punto que recorre una recta retrogradando y acercándose al punto de orígen, sin salir nunca de la direccion fija de la recta recorrida (*Fig.* 8.). El punto móvil determina distancias cada vez menores del punto de orígen, y no puede pasar á la region opuesta ó negativa sin pasar por el orígen, siendo entonces cero la distancia de este. Esto es lo que sucede en las cantidades reales ó directas, segun las dos afecciones positiva y negativa.

El segundo caso es el de una recta que conserva siempre su magnitud ó valor cuantitativo, y aspira á convertirse en negativa por un cambio de posicion (*Fig.* 9.). Claro es que con estas condiciones jamás alcanzará esta conversion sino pasando en un momento de su evolucion contínua por el límite de las dos regiones positiva y negativa, es decir, por aquella posicion singular y típica, en que permanece indiferente á ambas afecciones, y en que, si esta relacion cardinal hubiera de expresarse por una proyeccion sobre la posicion real, esta proyeccion sería cero. La única posicion que cumple con estas condiciones es la perpendicular, y el símbolo $\sqrt{-1}$ que la expresa es tambien momento transitorio de la cualidad positiva á la negativa.

En el primer caso, el cero representa la nulidad cuantitativa: en el segundo, el símbolo $\sqrt{-1}$ representa la nulidad cualitativa.

La primera representacion es proyeccion necesaria de la segunda.

Las representaciones que preceden y siguen al momento transitorio *cero*, son tambien proyecciones de las que preceden y siguen al momento transitorio $\sqrt{-1}$.

ARTÍCULO 3.°

Raíces imaginarias de las ecuaciones.

En las anteriores generalidades se funda el diverso carácter de la variabilidad de los resultados en la substitucion de las raíces reales é imaginarias que tanto figuran en la teoría general de las ecuaciones. Hágase si se quiere una digresion de esta importante materia.

En las cantidades reales siempre es explicable por un valor único que da cero su transicion de positivas á negativas; y por eso respecto de ellas siempre es verdadero y demostrable el teorema algebráico de que: *cuando dos números substituidos sucesivamente en el primer miembro de una ecuacion dan dos resultados de signos contrarios, estos dos números comprenden* POR LO MENOS UNA RAÍZ REAL *de esta ecuacion, ó un valor capaz de reducir á cero su primer miembro.*

En las imaginarias, como raíces de las ecuaciones, sufre el teorema una restriccion justísima. Ellas, sin ser un valor único, pueden y deben de tal manera combinarse, que hagan que los valores reales resultantes de la substitucion pasen de positivos á negativos: este cambio nunca revelará la existencia de un valor único que haga pasar por cero los resultados de la substitucion contínua.

Puede haber, y hay con efecto, *dos raíces imaginarias por lo menos* que produzcan el cambio de signo, sin que sea necesario ese valor singular: estas dos raíces se hallan representadas por dos direcciones simétricas, superior é inferior, de tal manera que si una de ellas es $a+b\sqrt{-1}$, la otra será $a-b\sqrt{-1}$.

En las ecuaciones puras estas dos imaginarias pueden ser tambien puras.

Igualmente enseña el Álgebra que estas raíces son siempre dos, ó simétricas de dos en dos por el doble signo $\pm$ que precede siempre al radical imaginario. La necesidad de esta conjugacion algebráica procede de una necesidad geométrica: no puede, en efecto, concebirse que la recta real se haga perpendicular, sin que su prolongacion afecte la posicion contraria. El doble signo $\pm$ siempre expresa esta contrariedad de direccion.

ARTÍCULO 4.°

Descomposicion de $\sqrt{-A}$.

En las anteriores consideraciones de la teoría radical se funda la descomposicion á que constantemente se somete una imaginaria de segundo grado $\sqrt{-A}$, y en virtud de la cual se tiene que

$$\sqrt{-A}=\sqrt{-1.A}=\sqrt{A}.\sqrt{-1}$$

La uniforme manera con que aparece el símbolo $\sqrt{-1}$, afectando á la cantidad real $\sqrt{A}$, da bien á entender el carácter cualitativo que le distingue, y que no es al cabo más que un signo de cualidad ó de posicion que modifica la direccion real convirtiéndola de horizontal en vertical, enteramente como sería trasladado $-A$ por la extraccion de una raíz cuadrada. Esta extraccion modificaria la cantidad A (no siendo $A=1$), al mismo tiempo que *la constituiria en una posicion tal que, repitiéndose ó duplicándose el arco que la separa de la direccion positiva, se reprodujese la potencia* $-A$.

Las imaginarias monomias de la forma general $\sqrt[2n]{-A}$, tienen idéntica descomposicion

$$\sqrt[2n]{-A}=\sqrt[2n]{A}.\sqrt[2n]{-1}$$

y su interpretacion difiere por el grado de la raiz que es necesario extraer, cuyo grado, siempre par, depende de los valores de n.

Como todo número par puede expresarse por $r \cdot 2^p$, en que r es impar y p indica cualquiera potencia entera de 2, la expresion general de la imaginaria puede ser $\sqrt[r.2^p]{-A}$.

Esta nueva forma del índice ó exponente del radical nos descubre una propiedad curiosa de las imaginarias, y es que: *todas ellas pueden ser reducidas á otra forma radical en que el exponente sea* 2, 4, 8, 16, 32...... 2^p.

En efecto

$$\sqrt[r.2^p]{-A} = \sqrt[2^p]{\sqrt[r]{-A}};$$

pero siendo, por suposicion, r número impar, $\sqrt[r]{-A}$ será una raiz real negativa de $-A$, que puede expresarse por $-\alpha$: luego la imaginaria general puede ser $\sqrt[2^p]{-\alpha}$.

Todas estas transformaciones tienen su fundamento en la interpretacion general del imaginarismo.

ARTÍCULO 5.°

Racionalidad de las raíces imaginarias.

No extrañaria que las cantidades imaginarias, declaradas absurdas é imposibles como cantidades, se calificasen tambien de irracionales como raíces. Expliquemos qué clase de irracionalidad puede envolver la raíz imaginaria.

Admito que la irracionalidad cuantitativa se complique alguna vez con el imaginarismo: en el ejemplo concreto $\sqrt{-3}$ se nota que la sabida descomposicion $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$ no la evita; pero en un ejemplo como $\sqrt{-4}$, tal irracionalidad desaparece por la descomposicion $\sqrt{4} \cdot \sqrt{-1}$, ó, lo que es lo mismo, $2\sqrt{-1}$. Las imaginarias

$$\sqrt{-1},\quad \sqrt{-4},\quad \sqrt{-9}, \text{\&c.}$$

pueden tener la forma

$$1\sqrt{-1},\ 2\sqrt{-1},\ 3\sqrt{-1}, \text{\&c.};$$

y nadie negará que la primera es mitad de la segunda y tercio de la tercera, ni que con la primera tomada como unidad se pueden formar las otras por una contínua síntesis sumatoria, tan legítima como la que engendra los números reales. La irracionalidad del imaginarismo no es cuantitativa, respecto de que no procede siempre de la relacion inexpresable de la raíz numérica con la unidad, sino de la actual imposibilidad de dar un signo á esta raíz, que, segun las ideas comunes, no puede ser positiva ni negativa, y fuera de estas dos afecciones ni aún siquiera se ha pensado en que se pudieran concebir otras.

Claro es que encerrándose toda la imposibilidad en el símbolo $\sqrt{-1}$ que acompaña como factor al radical real (racional ó irracional), esta imposibilidad denota desde luego *irracionalidad cualitativa*, y esto solamente en la hipótesis de que no sean concebibles otras afecciones además de la positiva y la negativa.

Esta hipótesis arbitraria queda destruida por la doctrina del concepto de limitacion, que al aplicarse al número y á la extension les impone una afeccion neutra que media entre las afecciones ya reconocidas por el Álgebra y expresadas por los signos $+$ y $-$

ARTÍCULO 6.°

Representacion radical de la oblicuidad.

Volviendo al principal asunto de este capítulo en que vamos considerando las imaginarias como raíces, natural es la ampliacion de esta teoría haciéndola extensiva tambien á la expresion de las direcciones oblícuas. Y, con efecto, así como la perpendicular se concibe establecida como raíz segunda de la unidad negativa, las oblícuas comprendidas entre ella y la unidad positiva serán raíces ulteriores de la misma unidad negativa con exponente radical tanto mas elevado, cuanto mayor sea el grado de la oblicuidad ó proximidad al eje horizontal (unidad positiva) que es el verdadero límite de esa graduacion regresiva.

Partiendo, pues, de la posicion perpendicular expresada por $\sqrt{-1}$, como de una raíz de la que pueden tenerse otras raíces ú otras potencias, la representacion algebráica de la oblicuidad será una funcion exponencial (potencial ó radical) de aquel símbolo típico.

Este modo de expresion tiene, pues, por forma general

$$(\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}};$$

la cual, con las variaciones de su exponente, expresa todos los grados de oblicuidad que la perpendicular puede recorrer por un movimiento progresivo ó potencial alejándose de la posicion real positiva, ó por un movimiento regresivo ó radical acercándose á aquella posicion, segun se tenga

$$m > n \quad ó \quad m < n.$$

Entre estas posiciones se comprenden como casos particulares la misma perpendicular típica, cuando

$$\frac{m}{n}=1, \text{ esto es, } m=n,$$

la misma real $+1$, cuando

$$\frac{m}{n}=0, \text{ es decir, } n=\infty;$$

y la real negativa -1, cuando

$$\frac{m}{n}=2, \text{ esto es, } m=2n.$$

En el órden radical resulta igualmente cierto *que las reales son casos particulares de las imaginarias;* lo cual, traducido al lenguaje corriente del Álgebra, sería lo mismo que decir *que las verdades son casos particulares de los absurdos*, ó *que los posibles son casos particulares de los imposibles.*

La Matemática que limita el valor representativo de sus elementos á las cantidades reales, tiene que caer en esta contradiccion; la que admite la legitimidad de las imaginarias, es la única que puede salvarla y darle un sentido natural.

ARTÍCULO 7.°

Division de las imaginarias en puras y afectas.

No hay mas que un símbolo radical de la perpendicularidad, el cual con su doble signo representa alternativamente la raíz segunda superior ó inferior de -1. Este símbolo $\pm\sqrt{-1}$ es la imaginaria pura correspondiente á la única perpendicular que puede levantarse ó bajarse desde un punto de una recta á la misma recta.

Hay, por el contrario, un simbolismo infinito y funcional para la expresion de todos los grados de oblicuidad que una recta puede tener respecto de otra con la cual conserva un punto comun. La expresion general de una oblícua es siempre una imaginaria afecta de la forma $\sqrt[2n]{-1}$, que nunca puede corresponder á la horizontal ni á la vertical, mientras n tenga un valor numérico distinto de la unidad.

De la conocida igualdad

$$\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$$

se infiere que la teoría radical de las imaginarias afectas se funda en la interpretacion de las puras, y sin ella es absolutamente incomprensible.

El símbolo $\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$ expresa, en efecto, la extraccion de una raíz de $\sqrt{-1}$ que ya con su perpendicularidad denota una raíz segunda de -1, es decir, que después que se concibe dividida la semicircunferencia superior en dos partes iguales, para expresar la raíz segunda de -1, debe concebirse el cuadrante dividido en n partes tambien iguales para tener $\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$.

Verdaderamente, al mismo resultado se llegaria dividiendo desde luego toda la semicircunferencia en $2n$ partes iguales y tomando una de ellas, la mas próxima al eje real, como grado de la oblicuidad: igualdad de procedimiento que coincide exactamente con la igualdad algebráica, $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[n]{\sqrt{-1}}$.

La expresion radical de la oblícua coincide, por otra parte, con la expresion absoluta $A+B\sqrt{-1}$ explicada en el capítulo anterior; porque la subdivision que aquella representa no puede ménos de conducir á posiciones indirectas exteriores al eje real y al vertical, y referidas simultáneamente á ambos por las dos coordenadas A y B.

ARTÍCULO 8.º

Congruencia del Álgebra y de la Geometría en la interpretacion de las imaginarias afectas.

Como prueba irrecusable de la coincidencia necesaria del Álgebra con la interpretacion geométrica expuesta en el artículo anterior, acerca de las imaginarias afectas ú oblícuas, propongámonos la resolucion del siguiente problema:

Determinar las condiciones de magnitud de A *y* B *en el caso particular en que se tenga la igualdad*

$$\sqrt[4]{-1}=A\pm B\sqrt{-1}.$$

Partiendo de esta suposicion y elevando ambos miembros á la cuarta potencia tendremos

$$-1=A^4\pm4A^3B\sqrt{-1}-6A^2B^2\mp4AB^3\sqrt{-1}+B^4;$$

y como siendo real el primer miembro, es necesario que lo sea tambien el segundo, y por consiguiente que se destruyan los términos imaginarios, se tendrá

$$\pm 4A^3B\sqrt{-1}\mp 4AB^3\sqrt{-1}=0;$$

ó bien

$$4A^3B\sqrt{-1}=4AB^3\sqrt{-1};$$

de donde, dividiendo por $4AB\sqrt{-1}$, resulta

$$A^2=B^2, \text{ ó } A=B,$$

luego *las rectas* A *y* B *han de ser iguales.*

Por otra parte: como se tiene

$$-1=A^4-6A^2B^2+B^4,$$

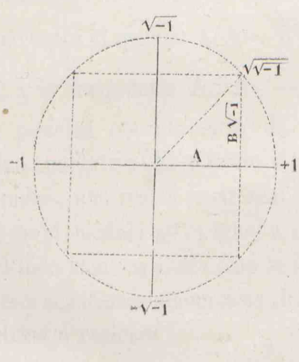
poniendo A en lugar de B, se deduce

$$4A^4=1, \text{ ó bien } A=\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Luego *la recta* A, *ó su igual* B, *debe ser el rádio dividido por* $\sqrt{2}$.

Ahora bien: á estas mismas conclusiones analíticas llega la Geometría sintética ó elemental, cuando considera la posicion de la oblícua $\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}$, que mide una octava parte de la circunferencia, como se ve en esta figura, demostrando

Fig. 10



respecto de dicha posicion; 1.° que siendo rádio oblícuo del cuadrado inscripto, cuyo rádio recto es A, este rádio recto siempre es la mitad del lado ó igual á B; y 2.° que en virtud de la propiedad del triángulo rectángulo se tiene

$$2A^2=1, \text{ ó } A=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Este concurso de los procedimientos analíticos del Álgebra con las deducciones sintéticas de la Geometría, en este caso particular, es una completa demostracion de cuán legítimamente se representa la imaginaria afecta $\sqrt[4]{-1}$ por la subdivision del arco que mide $\sqrt{-1}$.

Pero esa conformidad nada tiene de maravilloso para el que comprende que no puede formular el Algebra ninguna relacion en virtud de la aplicacion necesaria de sus conceptos, que no pueda tener simultáneamente una realizacion, una deduccion transcendental, en las regiones mas empíricas de la Geometría y de la Aritmética. El ideal de una Álgebra perfecta ha de consistir en la superioridad é indiferente aplicabilidad de todos sus conceptos al número y á la extension, sin que nada pueda limitarla más que la contradiccion lógica de estos mismos conceptos.

No hay tal contradiccion, ni repugnancia, entre los conceptos de la cantidad y el de *cualidad indirecta* en que consiste el imaginarismo.

CAPÍTULO III.

DEL MÓDULO Y ARGUMENTO DE LAS EXPRESIONES IMAGINARIAS.

ARTÍCULO 1.º

El módulo y el argumento de estas expresiones corresponden á las categorías de cantidad y cualidad.

Es doctrina corriente entre los algebristas que á toda expresion imaginaria de la forma $A \pm B\sqrt{-1}$ corresponde otra expresion subsidiaria de la forma $\sqrt{A^2+B^2}$ que se llama su *módulo*.

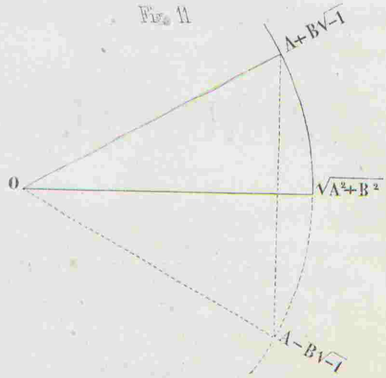
Sometamos esta doctrina, tan obscura hasta en las obras que pasan por magistrales, á la interpretacion general de nuestra teoría.

La forma $\sqrt{A^2+B^2}$, expresion ordinaria del valor numérico de una hipotenusa cuyos catetos fuesen A y B, es necesariamente real, porque A^2+B^2 siempre es positivo: es un valor puramente cuantitativo en el cual se prescinde de toda idea de posicion, y que por lo tanto debe medirse sobre el eje horizontal. Por el contrario, en la forma imaginaria comun $A \pm B\sqrt{-1}$ entra necesariamente la consideracion de la cualidad que afecta al valor cuantitativo de toda la expresion.

De donde se infiere que entre el módulo $\sqrt{A^2+B^2}$, que es hipotenusa real de catetos tales como A y B, y la imaginaria $A \pm B\sqrt{-1}$, que es un rádio determinado en su magnitud y posicion por el *coseno* de A y el *seno* de B, no hay diferencia cuantitativa, sino cualitativa. El módulo y la imaginaria de que procede son expresables por dos rádios, uno real ú horizontal y otro oblícuo (*Fig.* 11).

Infiérese tambien que si el módulo no es igual á la imaginaria sino cuantitativamente, para que sea del todo idéntico á ella (con la identidad que siempre expresan las llamadas igualdades y ecuaciones algebráicas), habrá que suponerlo modificado por un coeficiente de cualidad ó posicion.

Fig. 11



Llámase *argumento* el coeficiente de cualidad necesario cofactor del módulo de una imaginaria.

El argumento y el módulo han de combinarse por via de produccion, no de suma; porque como la cualidad no puede modificar á toda la cantidad sin modificar á cada una de sus unidades ó elementos homogéneos, el argumento es necesariamente un factor ó coeficiente; y la expresion algebráica (sincategoremática) del número ó de la extension debe reunir en un término esas dos categorías fundamentales, y expresar por un producto su recíproca influencia.

En la expresion imaginaria $A \pm B\sqrt{-1}$ se hallan compenetrados el módulo y el argumento de tal manera, que las cantidades A y B, como tales cantidades, determinan la cualidad de toda la forma, y la cualidad propia de sus elementos; esto es, la realidad del uno y el imaginarismo del otro influyen en la cantidad de toda la frase. El producto se halla realizado del modo mas íntimo y mas recíproco.

Cuando una expresion imaginaria aparece con la debida distincion factorial entre su argumento y su módulo, suele decirse que *está modulada.*

$A \pm B\sqrt{-1}$ se modula por $\alpha\sqrt{A^2+B^2}$, en que α siempre es argumento imaginario.

De igual manera se tiene que

$$\alpha\sqrt{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \cos x \pm \operatorname{sen} x\sqrt{-1}.$$

La *modulacion*, que es el hecho de la separacion factorial de la cantidad y cualidad de una expresion algebráica, es tan general como necesaria en toda clase de formas. La unidad *con su cualidad propia* es coeficiente de toda cantidad, ó argumento de todo módulo.

Las cantidades reales positivas, como $+A=+1\cdot A$, tienen por argumento $+1$.

En las reales negativas, como $-A=-1\cdot A$, el argumento es -1.

Las imaginarias bajo la forma general

$$A\pm B\sqrt{-1}=\alpha\sqrt{A^2+B^2},$$

tienen un argumento imaginario α, que puede afectar tantas formas como grados de oblicuidad ó indireccion se conciben en una recta respecto de un eje que se supone horizontal.

Si en la igualdad

$$\alpha\sqrt{A^2+B^2}=A\pm B\sqrt{-1}$$

se supone el caso particular de $A=0$, se tendrá

$$\alpha\sqrt{B^2}=\pm B\sqrt{-1}$$

ó bien

$$\pm\alpha B=\pm B\sqrt{-1};$$

y dividiendo ambos miembros por B resulta

$$\pm\alpha=\pm\sqrt{-1},$$

genuino argumento de la imaginaria pura $\pm B\sqrt{-1}$, cuyo módulo es B.

Una imaginaria monomia $\sqrt[2n]{-A}$, que presenta incorporados su módulo y su argumento, tiene su modulacion legitima en la descomposicion ordinaria $\sqrt[2n]{A}\cdot\sqrt[2n]{-1}$ El primer factor es módulo, y el segundo argumento.

Para determinar el argumento α en la igualdad hipotética

$$\alpha\sqrt{A^2+B^2}=A\pm B\sqrt{-1}$$

para el caso particular en que $A=B$, bastará observar que de ella se deduce

$$\alpha=\frac{A\pm B\sqrt{-1}}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

y haciendo A=B, resulta

$$\alpha=\frac{A\pm A\sqrt{-1}}{A\sqrt{2}},$$

ó bien

$$\alpha=\frac{1\pm\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}$$

como en el artículo anterior.

En suma: el módulo y el argumento corresponden, en todo caso, á las dos categorias intelectuales cantidad y cualidad, y se prestan, por lo tanto, á una teoría universalísima que debe hacerse extensiva de las imaginarias á las reales. Siendo siempre real el módulo, será imaginario el argumento en las primeras, y real en las segundas.

La doctrina de los módulos no está mas que desflorada en las obras mas voluminosas de Álgebra. En ellas se establecen algunos teoremas que parecen misteriosos por el aparato algebráico con que son demostrados, pero que son verdades muy llanas, cuando el imaginarismo recibe una interpretacion conveniente. El doble teorema de que: *el módulo de un producto ó de un cociente de imaginarias de la forma* $A\pm B\sqrt{-1}$ *es igual al producto ó al cociente de los módulos de estas*, se traduce con pasmosa naturalidad en el enunciado siguiente: *el valor cuantitativo de un producto ó de un cociente resulta de multiplicar ó de dividir respectivamente los valores cuantitativos de los factores ó de los términos de la division*: verdad de sentido comun, que se comprende con solo saber lo que es multiplicar ó dividir.

Yo no extraño que se apele al cálculo para la demostracion de semejantes teoremas acerca de los módulos. Sabido es el comun precepto de los libros de Álgebra mas autorizados que: *cuando entran en un cálculo expresiones imaginarias de la forma* $A\pm B\sqrt{-1}$, *sin ligar con ellas ninguna idea de cantidad,* LO CUAL SERIA ABSURDO, *ha de convenirse en someterlas á las reglas comunes establecidas para las cantidades reales.* Natural es que se pidan á un cálculo ciego nunca interpretado, conclusiones analíticas de originalidad afectada ó aparente, que por otra parte serian evidentísimas á la luz de una interpretacion tan natural y legítima como la que se propone en este libro. Lo que ciertamente me maravilla es la candidez de una *convencion* tan injustificable como la de someter los absurdos al cálculo de las cantidades.

ARTÍCULO 2.º

Interpretacion geométrica del módulo.

Penetremos un tanto en el orígen de la forma modular $\sqrt{A^2+B^2}$, y la verémos descompuesta en

$$\sqrt{(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})},$$

esto es, en dos factores imaginarios simétricos representables siguiendo la indicacion de los signos por la figura 12.

El producto de estos factores debe concebirse realizado por la contraposicion del sistema de rectas $A-B\sqrt{-1}$, esto es, por una mocion giratoria sobre el vértice comun de ambos sistemas, de suerte que A se haga perpendicnlar á A, y $-B\sqrt{-1}$ á $B\sqrt{-1}$. De aquí resultará la representacion binomia de los dos cuadrados A^2+B^2 de la figura 13.

Fig. 12

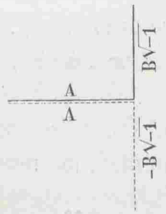


Fig. 13

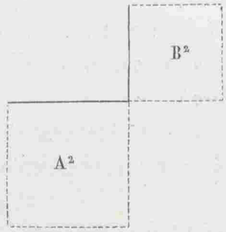
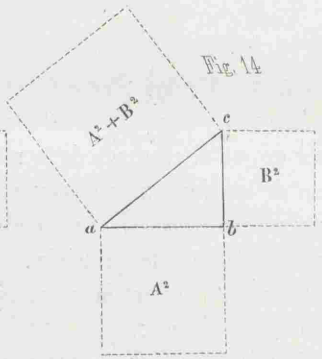


Fig. 14



Ahora bien: estos dos cuadrados equivalen al cuadrado de la hipotenusa en el triángulo rectángulo *abc* de la figura 14, y su raíz cuadrada, ó sea $\sqrt{A^2+B^2}$, es la representacion numérica de la hipotenusa *ac* prescindiendo de su posicion oblícua, ó considerada como real, como lo es el radical.

Los módulos no son, pues, sino valores absolutos ó reales, que, como cantidades, no se diferencian de las imaginarias que modulan. Los radios de un círculo por muy distintos que sean por su cualidad ó posicion, tienen un módulo idéntico que es la expresion de su longitud absoluta.

Esta es tambien la razon por qué $\sqrt{A^2+B^2}$ es módulo así de la imaginaria $A+B\sqrt{-1}$, como de su simétrica $A-B\sqrt{-1}$.

CAPÍTULO IV.

INTERPRETACION DEL IMAGINARISMO EN LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

ARTÍCULO 1.°

Los resultados imaginarios amplifican y generalizan las soluciones de los problemas de segundo grado.

Enseña el Álgebra elemental que puede haber incompatibilidad entre lo que exigen la suma y el producto de dos números, de tal manera que nunca puede ser este mayor que el cuadrado de la mitad de aquella, ó, lo que es lo mismo, que *el producto de las dos partes ó sumandos en que puede dividirse un número, es un* MÁXIMUM *cuando estas partes son iguales.*

Con arreglo á este principio, *rigorosamente demostrado*, *cuando se trata de cantidades reales*, declara imaginarios, y por consiguiente absurdos, los resultados del siguiente problema:

Hallar dos números cuya suma sea 14 *y su producto* 50.

Este problema se plantea y resuelve fácilmente, llamando x á uno de los números y 14—x al otro, y expresando su producto por la ecuacion

$$-x^2+14x=50;$$

ó bien

$$x^2-14x=-50;$$

de donde se deduce

$$x=7\pm\sqrt{49-50}=7\pm\sqrt{-1},$$

Los dos números que se buscan son pues $7+\sqrt{-1}$ y $7-\sqrt{-1}$.

Realizando sobre estos dos números *absurdos* las condiciones del problema, se ve sin embargo que

$$\begin{array}{lrcr} & & & 7+\sqrt{-1} \\ & & & 7-\sqrt{-1} \\ \hline & 7+\sqrt{-1} & & 49+7\sqrt{-1} \\ & 7-\sqrt{-1} & & -7\sqrt{-1}+1 \\ \hline \text{Su suma} = & 14 & ;\ \text{y su producto} = & 49 \ldots\ldots +1=50 \end{array}$$

El problema queda resuelto sin contradiccion algorítmica. El Álgebra, por lo que toca á la legitimidad de sus procedimientos, no puede reconocer esa incompatibilidad necesaria entre las exigencias de la suma y de la multiplicacion de dos números cualesquiera, *siempre que la nocion cualitativa de número no se limite,* como no debe limitarse, *á solos números reales.* Muy cierto es que respecto de ellos vale la limitacion impuesta por el *máximum* del producto, y que son imposibles los resultados imaginarios que traspasan ese *máximum*; pero semejante imposibilidad depende solo de la restriccion del problema enunciado respecto de números reales, entre los cuales, efectivamente, ningunos hay cuya suma sea **14** y cuyo producto sea **50**. Esa imposibilidad restrictiva es análoga á la de los resultados negativos ó fraccionarios, en aquellos problemas que se enuncian con intencion de hallar valores positivos ó enteros. La imposibilidad viene del sentido en que se propone el problema concreto, no de la genuina significacion de estos resultados fraccionarios, negativos ó imaginarios en la logística pura y abstracta del Álgebra.

El teorema del *máximum* no es verdadero para todo número; porque hay números imaginarios de tal manera constituidos, que en la suma pueden perder algunos de sus elementos substanciales, y hacer luego aparentes estos elementos en la multiplicacion, excediendo el *máximum* que limita el producto de los números reales.

Aritméticamente se percibe esta circunstancia en la suma antes realizada, en la cual se reducen á cero los elementos imaginarios conjugados, los cuales luego aparecen en el producto neutralizándose cuando se multiplican por los elementos reales, y dando un valor real, siempre positivo, cuando se multiplican entre sí, y, por consiguiente, aumentando y excediendo el máximo producto de los elementos reales. Todo consiste en el signo — que se descubre al desaparecer el radical, cuando se realiza $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}$, que siempre equivale á $(\sqrt{-1})^2$, esto es, á -1, y que combinándose con el — que corresponde al producto por los signos extraradicales, da un producto parcial positivo. ¡Maravillosa es esta estructura íntima de las imaginarias, que hace posible en determinadas combinaciones la repentina aparicion de un signo que viene á cambiar la marcha ordinaria, el juego regular de lo positivo y lo negativo! Esta negacion que va envuelta, y como de reserva, en el seno de la imaginaria original $\sqrt{-1}$, es el elemento perturbador que llega á derogar los principios al parecer mejor demostrados de la logística comun. Pero esa derogacion no es perturbacion, sino legítima amplificacion reclamada por la verdadera logística matemática.

Si los números $7\pm\sqrt{-1}$ reciben una traduccion geométrica con arreglo á la teoría del imaginarismo, y son representados por rectas horizontales y verticales, se verá que su *suma* equivale á $7+7=14$ (*Fig.* 15); y su *producto*, realizado por la contraposicion de los dos factores, uno de líneas llenas y otro de punteadas, se compone de los dos cuadrados verticales $49+1=50$ (*Fig.* 16).

Esta comprobacion es mas intuitiva, menos misteriosa, y si cabe, aún más decisiva y concluyente que la aritmética.

Fig. 15

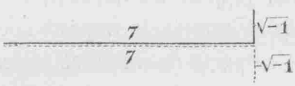
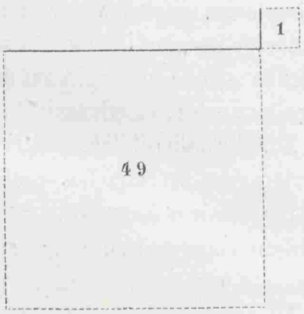


Fig. 16



ARTÍCULO 2.°

Algunas generalidades acerca de esta importante materia.

Enseñan comunmente los autores, que para poner de acuerdo los resultados negativos é imaginarios con el texto literal de un enunciado problemático, se debe suponer cambiado el sentido ó la intencion del problema, de tal manera, que al traducirle de nuevo en ecuacion, pueda ser mudado el signo de la incógnita, con lo cual el resultado perderá su cualidad de negativo ó de imaginario, que lo hacia incongruente, y podrá servir sin alteracion cuantitativa como solucion del nuevo problema.

Si de la ecuacion $f(x)=0$ se ha deducido $x=-\mathrm{A}$, se substituirá $-x$ por x en dicha ecuacion, y tendrémos $f(-x)=0$, de donde resulta $-x=-\mathrm{A}$, ó bien $x=\mathrm{A}$.

Si se hubiese obtenido $x=A\sqrt{-1}$, se substituirá $x\sqrt{-1}$ en vez de x en la ecuacion primitiva, y se tendrá $f(x\sqrt{-1})=0$, la cual dará $x\sqrt{-1}=A\sqrt{-1}$, ó bien $x=A$.

No es malo el consejo para un Álgebra concreta, que en realidad no hace más que acomodar soluciones contrarias á enunciados contrarios, y duplicar y repetir los problemas siempre que lo permite la materia empírica sobre que ellos versan: pero el Álgebra pura no debiera entender en estos acomodamientos, ni sujetar sus resultados legítimos á la posibilidad ó imposibilidad accidental que pudieran ofrecer en el lenguaje concreto con que se les enuncia. Ante el rigor y la consecuencia del procedimiento algebráico deben ceder la vaguedad y la falta de analogía del lenguaje empírico. El mejor precepto seria el de *hacer matemático el enunciado del problema*, despojándolo primero de todas las formas que, por via de adorno, por exigencia del uso ó por necesidad del lenguaje, pueden desfigurar su verdadero sentido y sus condiciones; y dar luego á los términos matemáticos toda la generalidad y amplitud que es propia de los conceptos *à priori*, á cuya relacion únicamente es debida la resolucion analítica. Las cantidades han de concebirse como susceptibles de toda cualidad, como pudiendo ser positivas, negativas ó imaginarias, y han de tenerse por legítimas cuando con tales cualidades aparecen en la fórmula final resolutoria: las cualidades deben considerarse como pudiendo recaer sobre toda especie de cantidad continua, discreta, entera, fraccionaria, y las relaciones se han de concebir tambien como realizables sin limitacion recíproca sobre todas las cantidades adornadas de todas las cualidades: no han de reconocerse, en fin, más imposibilidades matemáticas que las que radican en la contradiccion lógica de los conceptos.

Estas imposibilidades verdaderas son muchas menos que las que fuerzan de contínuo al algebrista á entrar en transacciones con el sentido poco preciso del lenguaje vulgar. Los números fraccionarios se consideraban como verdaderas excepciones de la nocion de número por los primeros aritméticos, que los llamaron *menudencias* (minutiœ); los números negativos se han tenido por absurdos casi hasta los tiempos de Descartes: no quedan ya más que los imaginarios que pugnan hoy por ganar carta de naturaleza entre los verdaderos elementos matemáticos. Poco á poco se ha ido reduciendo el círculo de la imposibilidad y del misterio, al compás mismo con que el Álgebra ha ido ganando en elevacion y en transcendencia: lo negativo, despreciado hasta los dias de Descartes, fue en manos de este genio el mas poderoso instrumento del análisis: lo imaginario, tan injustamente calificado hoy, servirá en tiempos venideros para armonizar la Aritmética con la Geometría, y dar al Álgebra toda la altura é independencia que la crítica le promete, y hacer de la Matemática una gran totalidad, un organismo inmenso.

Las imposibilidades matemáticas no son más que imposibilidades lógicas, y han de concebirse como independientes de los enunciados de los problemas *inconcretos*, respecto de los cuales no puede haber más que *incongruencias* de un resultado obtenido con un sentido atribuido á la enunciacion

Lo que conduce á una contradiccion entre los conceptos fundamentales y categóricos del entendimiento, resulta imposible y absurdo en el órden matemático, y basta conocer las formas de contradiccion lógica en los conceptos ó categorías matemáticas de la cantidad y de la cualidad, para determinar la forma general de los problemas verdaderamente imposibles:

1.° La cantidad idéntica á lo que no es cantidad: la cantidad idéntica á la nada ó al infinito, que no son cantidades

$$x=0, \quad x=\infty$$

2.° La cualidad positiva idéntica á la negativa ó á la imaginaria, y víceversa

$$x=-x, \quad x=x\sqrt{-1}.$$

Miéntras el Álgebra ordinaria se ha entretenido en buscar interpretacion á los resultados analíticos, siempre en consonancia con el sentido de los problemas propuestos, ha descuidado mucho la mas útil tarea de dar al lenguaje la suficiente generalidad, para que se ajustase á la fórmula rigurosa de sus resoluciones: no parece sino que de intento apartara la vista de la íntima, lógica é irresistible ilacion del cálculo, fijándola en la exterioridad verbal de las cuestiones, cuando se la ve pronunciar el veredicto de absurdidad respecto de los resultados negativos, y retractarlo luego creando la teoría de las cantidades negativas. Esta teoría ha tenido que esperar á que un número suficiente de imposibilidades problemáticas la hicieran necesaria como explicacion sistemática y completa de resultados aritméticos y geométricos: ha debido pasar no poco tiempo para que al fin las cantidades negativas fuesen habilitadas. Pero esta habilitacion, que ha cambiado la faz de la ciencia matemática, *duplicando*, por decirlo así, el campo de sus aplicaciones, debiera haber sugerido á los analistas el pensamiento transcendental de la limitacion verdadera de las imposibilidades antes tan frecuentes, y haberles inspirado el saludable propósito de no incurrir en nuevas declaraciones de absurdo hasta haber apurado todos los conceptos intelectuales en su legítima aplicacion al número y á la extension, y de abandonar el incierto criterio del lenguaje por el rigorosamente verdadero de las formas categóricas del entendimiento. No se ha procedido así; y el Álgebra ordinaria tendrá que luchar todavía por algun tiempo con el misterio del imaginarismo, y que prodigar sus calificaciones de absurdidad, hasta que ulteriores desarrollos de la ciencia matemática reproduzcan por do quiera el simbolismo imaginario, y hagan de él la trama general del cálculo algebráico; y sean más y más interesantes las derogaciones que las aplicaciones de los principios comunes, y *el absurdo* lo invada todo, y haya que optar por la condenacion general y definitiva del cálculo como viciado por la plaga imaginaria, ó por una interpretacion que vaya á buscar en el entendimiento la verdadera razon del aparente vicio.

Es de creer que suceda al fin lo que sucedió con las cantidades negativas, que no eran menos aparentemente absurdas que lo son hoy las imaginarias. Si aquellas *duplicaron* el campo de las aplicaciones matemáticas, estas lo extenderán en *horizontes* inmensos, y lo engrandecerán en *esferas* infinitas.

CAPÍTULO V.

INTERPRETACION DEL IMAGINARISMO EN LAS SECCIONES CÓNICAS.

ARTÍCULO 1.°

¿Qué representa el imaginarismo accidental de las coordenadas?

Un notable ejemplo de interpretacion tan fecunda como sistemática presenta el imaginarismo en la teoría de las secciones cónicas, y en general en todas las consideraciones de la Geometría analítica que versan sobre raíces imaginarias.

Es comun práctica de los analistas el desechar los valores imaginarios como no pertenecientes á la curva sobre que especulan, y (segun la poca atencion que prestan á su interpretacion) como *no pertenecientes á curva ninguna*, como absurdos que no pueden estar sometidos á ninguna ley, ni ser, por consiguiente, expresion algebráica de ninguna propiedad geométrica. Aislan las representaciones intuitivas de las curvas, y con esta manera de juzgar los resultados, mutilan la integridad del sistema que les da unidad y armonía.

Yo terminaré la série de mis interpretaciones generales del imaginarismo, dando una idea del papel que este desempeña en la totalidad del sistema de las secciones cónicas.

Más, ante todo, debo advertir que no hablo aquí del imaginarismo implícito en la perpendicularidad que se atribuye ordinariamente á los ejes coordenados y á las ordenadas respecto de las abscisas. Esta perpendicularidad no puede hacerse sensible por el imaginarismo de ninguna de ellas en la ecuacion de la curva. Las ordenadas y las abscisas son variables que en su mútua dependencia funcional no revelan en la ecuacion más que sus valores absolutos, no sus posiciones respectivas que pueden ser tan arbitrarias como las que se atribuyen á los ejes, á los cuales son respectivamente paralelas, y como tales se construyen para determinar cada punto de la curva.

¿Qué representa, pues, el imaginarismo accidental de las coordenadas?

A priori debe responderse, que los valores imaginarios de una ordenada correspondientes á ciertas suposiciones hechas respecto de la abscisa tienen una significacion tan regular y tan legítima *en otra curva, que debe guardar con la primitiva una relacion de perpendicularidad*, como los reales de la primitiva. Otro tanto afirmo del imaginarismo de las abscisas en funcion de las ordenadas.

Para justificar esta solucion, basta concebir un sistema de *cuatro conos* opuestos por el vértice de dos en dos en un mismo punto comun, de tal manera que, siendo rectangulares los ejes, las generatrices comunes formen cuatro ángulos que juntos valgan cuatro ángulos rectos, como se verifica en la siguiente figura.

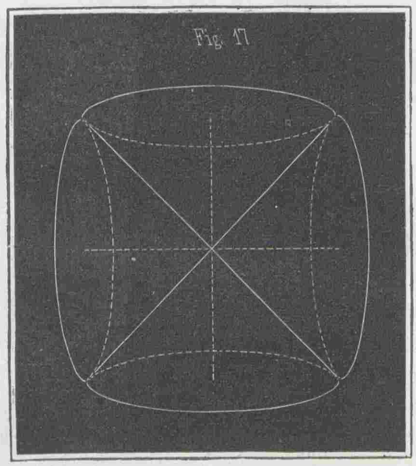


Fig. 17

Cada cono *es suplementario* de uno de sus adyacentes. Consideraré como principales á los dos verticales de la teoría ordinaria, y como suplementarios á los dos horizontales; y para mayor claridad en la intuicion supondré que las generatrices son rectangulares como los ejes, esto es, que los cuatro conos son iguales. Esto supuesto:

ARTÍCULO 2.°

Círculo é hipérbola equilátera.

La ecuacion del círculo referido á la extremidad del diámetro que es $2a$, es

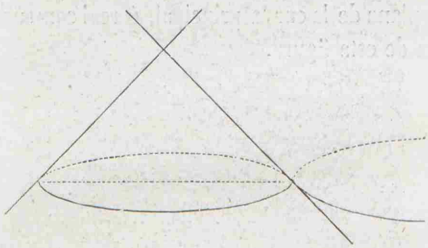
$$y^2=2ax-x^2 \quad (\delta)$$

de donde se deduce

$$y = \pm\sqrt{2ax - x^2}$$

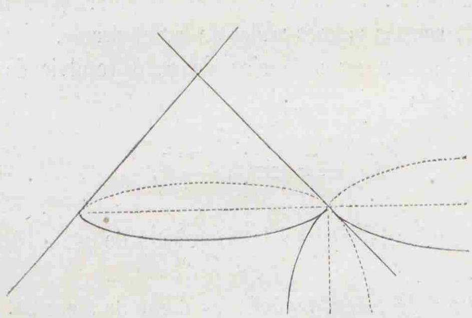
La suposicion de $x > 2a$, ó de una abscisa mayor que el diámetro, conduce á un valor imaginario de y, el cual, rectamente interpretado, indica que el círculo no se extiende mas allá de su diámetro, pero á cuya parcial é incompleta interpretacion yo añado, que: *esa ordenada imaginaria es ordenada real de la hipérbola equilátera suplementaria* que el mismo plano que traza el círculo traza en el cono adyacente, cuyo eje es *perpendicular* al eje del principal (*Fig.* **18**).

Fig. 18



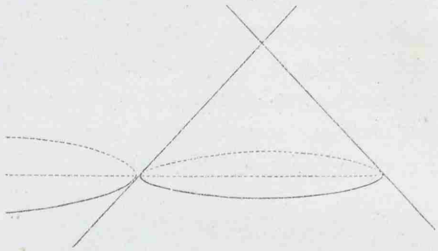
Si el cono adyacente tomase la posicion del principal, el plano de la hipérbola resultaria perpendicular al del círculo, y la hipérbola podria trazarse en el mismo cono principal con esta perpendicularidad, como puede verse en esta figura.

Fig. 19

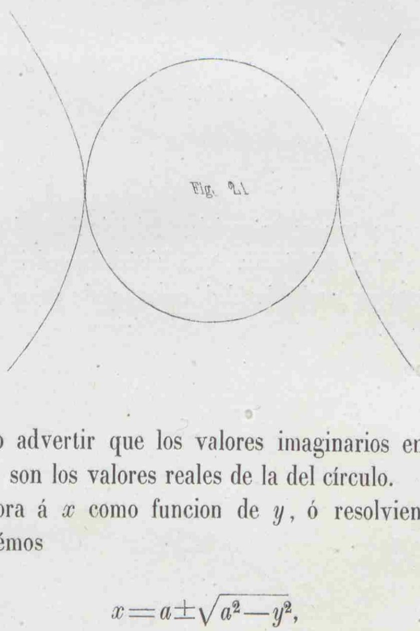


El imaginarismo de y puede resultar igualmente de la suposicion de x negativa; esto es, de una abscisa, que se cuente á la izquierda del punto de orígen, á cuya abscisa corresponderia una ordenada de la otra rama hiperbólica suplementaria del círculo (*Fig.* 20).

Fig. 20



La representacion plana de la curva principal, ó real con sus dos suplementarias ó imaginarias, sería la de esta figura.



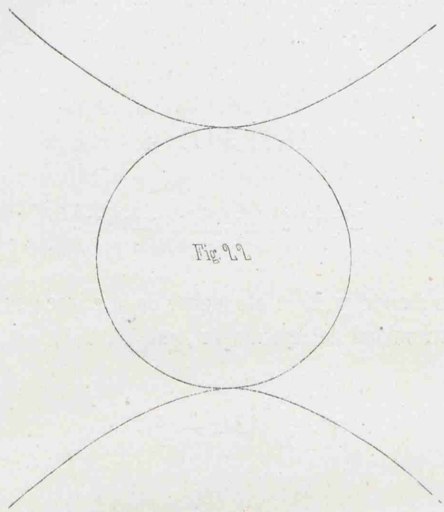
Casi es excusado advertir que los valores imaginarios en la ecuacion de la hipérbola equilátera, son los valores reales de la del círculo.

Considerando ahora á x como funcion de y, ó resolviendo la ecuacion (δ) respecto de x, tendrémos

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - y^2},$$

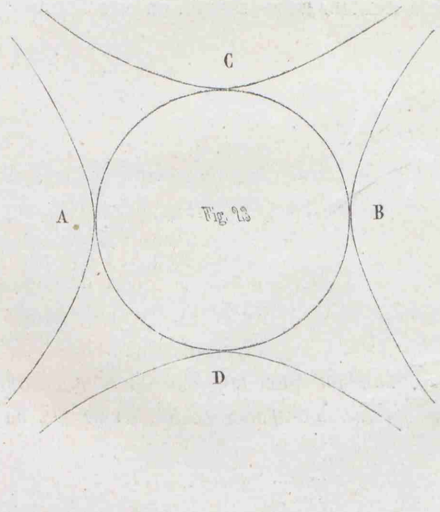
que no puede ser imaginaria sino en la suposicion de $y > a$, ó de una ordenada mayor que el radio.

Este imaginarísmo de forma binómia es digno de atencion. La abscisa x se compone de dos elementos consecutivos, uno real a, y otro imaginario que por su conjugacion corresponde á las hipérbolas equiláteras trazadas en los conos suplementarios, *suponiendo que estos han verificado una evolucion giratoria horizontal sobre el vértice comun, haciéndose perpendiculares á su posicion primera en* *el mismo plano horizontal.* La representacion plana del círculo con las ramas hiperbólicas (que en este caso serían anterior y posterior) es esta figura.



La intuicion de este imaginarismo de las abscisas exigiria una ampliacion del sistema de conos, concibiendo, en vez de esta evolucion giratoria, otros dos conos opuestos por el vértice anterior y posterior, además del superior é inferior y del diestro y siniestro con que para mayor sencillez he empezado estas consideraciones. Los *seis conos* abrazarian todo el espacio, coincidiendo cada dos de ellos con una de las tres direcciones de tres ejes ortogonales.

El círculo como curva principal tiene en rigor cuatro hipérbolas equiláteras suplementarias, dos, **A** y **B**, en que se hallan las ordenadas imaginarias, (*Fig.* **23**) y,



dos, C y D, en que se cuentan los elementos imaginarios de las abscisas: el nèxus de la forma binómia que tiene el valor de la abscisa imaginaria coincide con el centro del círculo.

La totalidad sistemática se va completando por sí misma, sin mas impulso que el del *absurdo* imaginarismo.

ARTÍCULO 3.°

Elipse é hipérbola escalena.

Siendo $2a$ el eje mayor, y $2b$ el eje menor de la elipse, su ecuacion, en cuanto está referida á la extremidad del eje mayor, es

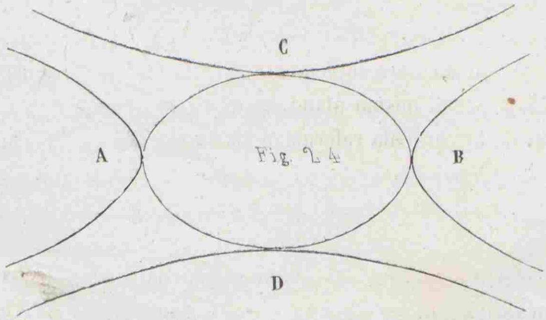
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$$

ó bien

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2};$$

en la cual se pueden señalar é interpretar los mismos casos de imaginarismo que en la del círculo, poniendo la elipse como curva principal ó real en relacion con las dos ramas hiperbólicas suplementarias ó imaginarias. Esta hipérbola sería escalena.

Suponiéndolas trazadas en un plano, las dos laterales A y B explican el imaginarismo de las ordenadas, y las dos C y D (anterior y posterior en el sistema de seis conos) interpretan el de las abscisas. La elipse con las cuatro ramas suplementarias de hipérbola escalena se representa en esta figura.



La expresion de la distancia de los focos al punto de orígen presenta en la elipse un caso curioso de imaginarismo.

Sí en la sabida expresion de esta distancia $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ se hace la suposicion ordinaria de $a > b$, los focos se fijan en el eje real, siendo el nêxus de los dos valores el centro de la elipse (*Fig.* 25).

Pero si se supone $a < b$, el radical resulta imaginario, y es menester concebir que la elipse ha hecho un giro tal, que su semieje menor a coincida con el eje de las abscisas (*Fig.* 26); ó que el orígen se traslada al extremo de a cambiándose la abscisa en ordenada y viceversa, como en la figura 27.

En cualquiera de estas dos disposiciones queda rigorosamente establecida la expresion binómia $a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$ por la cual se determinan los focos. El nêxus cae igualmente en el centro de la elipse.

Fig. 25

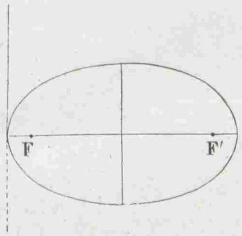


Fig. 26

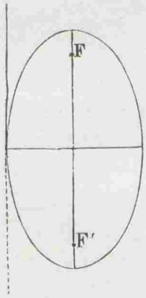
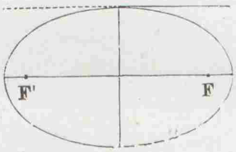


Fig. 27



ARTÍCULO 4.°

Parábolas suplementarias.

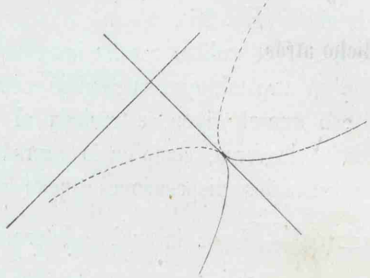
Las parábolas son siempre suplementarias de dos en dos, una principal y otra que resulta trazada por el mismo plano en el cono adyacente.

La ecuacion de la parábola referida á su vértice

$$y^2 = px, \text{ ó bien } y = \pm\sqrt{px} \quad (\text{A})$$

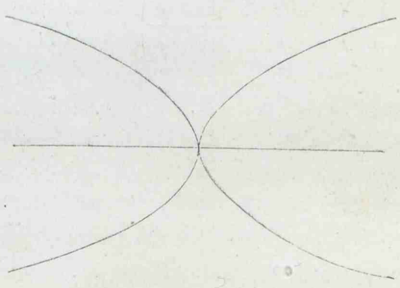
no admite con efecto otro caso de imaginarismo en funcion de x más que el que resulta de x negativa, ó sea de una abscisa contada al otro lado del punto de orígen: la ordenada imaginaria no puede ser sino ordenada real de la parábola contígua. (*Fig.* 28.)

Fig. 28



Las denominaciones de principal y suplementaria son tan relativas, que la ordenada imaginaria de cualquiera de ellas es real en la otra, como se ve claramente en su representacion plana (*Fig.* 29).

Fig. 29



Resolviendo la ecuacion (Δ) con relacion á x se tiene

$$x=\frac{y^2}{p}$$

que no presenta posibilidad de imaginarismo para ningun valor cuantitativo de y: lo cual quiere decir que no hay ordenada positiva ni negativa de tal magnitud que exija una abscisa negativa ó tomada en el eje de la parábola suplementaria.

La suposicion de $y\sqrt{-1}$, ó de una ordenada perteneciente á la parábola suplementaria, daría

$$x=-\frac{y^2}{p}$$

cuyo valor negativo de la abscisa corresponde tambien á la parábola contígua.

Digno es de notarse que si en la ecuacion (Δ) suponemos x imaginaria, ó levantada en el vértice comun de las dos parábolas, y hacemos $px=a^2$, se tendrá

$$y^2=a^2\sqrt{-1}, \text{ ó } y=\pm a\sqrt{\sqrt{-1}};$$

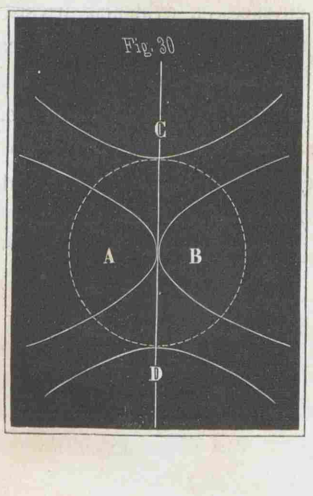
pero, segun hemos dicho atrás,

$$\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}=\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

luego tendrémos

$$y=\pm\frac{a+a\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

ordenada imaginaria de forma binomia que se construye levantando $\frac{a}{\sqrt{2}}$ en el vértice comun como ordenada real, y trazando $\frac{a\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ perpendicularmente en su extremo, como imaginaria: el punto que determina esta ordenada mista corresponde á una de las dos ramas hiperbólicas suplementarias que el plano generador de las parábolas traza en los dos conos anterior y posterior del sistema de seis conos. Las dos ramas hiperbólicas aparecen referidas á las parabólicas en la figura 30: el néxus está en el vértice comun de las dos parábolas A y B. El diámetro de las hipérbolas lleva consigo la representacion del círculo ó de la elipse.



ARTÍCULO 5.°

Reflexion general.

El hecho solo de aparecer retratada en la brevísima frase de una ecuacion algebráica toda la fisonomía de una curva con la infinita variedad de rasgos y de accidentes geométricos que la distinguen, podria sugerir una racional conjetura de la aplicabilidad original de las relaciones numéricas, que simboliza la ecuacion, á idénticas relaciones geométricas que la curva encierra. Traduccion tan rigurosa y tan universal, aún sin salir del estrecho ámbito de una sola curva, debe traer su orígen de un principio superior que encierre al par que exprese las relaciones numéricas y las geométricas con igual transcendencia. El Álgebra adquiere un justo título á la superioridad cuando concibe cantidades, cualidades y relaciones, que resultan verdaderas, bien se encargue de realizarlas en su region propia la Aritmética, bien las presente eschématizadas y hasta perceptibles para los sentidos la Geometría, que es mas intuitiva y como mas empírica.

Cuando el Álgebra sistematiza estas congruencias y las liga, y las ordena, y las compendia todas en una fórmula sencilla, de donde saca las expresiones particulares para todas las curvas que un plano giratorio puede trazar en un cono, comienza aquella conjetura del espíritu á convertirse en admiracion, en adhesion viva, en certeza plena, por lo grande, por lo bello, por lo verdadero de esta construccion intelectual.

Más cuando tales son las interpretaciones que da á sus símbolos, que todos y cada uno de los elementos del sistema encierran al sistema entero en perfecta compenetracion; cuando á favor del imaginarismo la trama orgánica del cálculo hace de sus representaciones geométricas un organísmo omnilateral y perfecto en que todo está en todo, y no hay parte que huelgue ó se substraiga de la armonía del conjunto; la certeza raya entonces en evidencia irresistible, y la luz que irradia esta admirable teoría de las curvas alcanza á todo el campo matemático, dejando vislumbrar el advenimiento definitivo del Álgebra al absoluto imperio de las dos grandes regiones de su aplicacion, el *tiempo* y el *espacio*.

Será visto á esa misma luz, y será juzgado como absoluto y universalmente verdadero, el profundo pensamiento de Pascal, que antes he sentado, *los números imitan al espacio, aunque son de naturaleza tan diferente.*

CAPÍTULO VI.

RESÚMEN DE ESTE LIBRO Y TRANSICION Á LOS SIGUIENTES.

Las cantidades imaginarias no son imposibles ni absurdas, sino verdaderas, legítimas y naturales, por los mismos conceptos de cualidad que lo son las positivas y las negativas. Ellas completan el cuadro de los momentos intelectuales, satisfaciendo á la necesidad de neutralizacion de las dos cualidades opuestas que el Álgebra admite en toda cantidad, y que la Geometría de todos los tiempos reconoce en las direcciones de las rectas.

Los signos con que se expresan, no por ser radicales y algorítmicos han de ser menos aptos que los de institucion arbitraria, con que se enuncian las cantidades reales, antes bien, su carácter algorítmico los habilita para la representacion universal de la *indireccion* en todos sus grados.

Consideradas como raíces, llenan el vacío que la teoría ordinaria deja respecto de las de grado par de las cantidades negativas, y aparecen tan legítimas como las reales de grado par ó impar.

En las ecuaciones reducen á sus verdaderos límites el campo de la contradiccion y de la imposibilidad, no bien deslindado aún por el criterio variable y empírico del sentido concreto de los problemas.

Donde quiera que entran las imaginarias llevan la luz, el órden y la armonía: las teorías se extienden por el infinito campo de la intuicion, adquieren una fuerza plástica que las completa y redondea, y desenvuelven un vigor interior que las organiza: toda la trama del cálculo se llena de luz por la racional interpretacion del imaginarismo.

Algo de este espíritu extensivo, armónico y organizador, hemos podido notar en la manera como las imaginarias amplifican y embellecen la teoría de las secciones cónicas; y yo no me resuelvo á abandonar un terreno tan fecundo sin sacar todavía de él todo el asunto sobre que han de versar los tres libros siguientes.

Renovemos nuestra intuicion sistemática de los conos principales y suplementarios, y concibamos como antes un plano que traza el círculo en un cono principal y dos ramas hiperbólicas en los dos adyacentes.

Estudiemos los resultados de la degeneracion de estas curvas en la variacion contínua y desaparicion definitiva del ángulo formado por las generatrices.

Si se concibe que las generatrices de los principales se aproximan, las de los adyacentes se apartan: el circulo será cada vez menor y las ramas hiperbólicas irán perdiendo su curvatura de tal manera que en el momento en que por confundirse las generatrices se anulan los conos principales, los adyacentes se convierten en dos planos que se confunden é identifican en uno solo: el círculo degenera en un punto, y las ramas hiperbólicas en dos rectas que á su vez se identifican en *una sola recta*. Si, por el contrario, hacemos mas divergentes las generatrices aumentando contínuamente su ángulo en los conos principales, lo que trae consigo la disminucion en el de los adyacentes; en el momento en que aquellos se conviertan é identifiquen en un plano, *el círculo conservará su forma*, y las ramas hiperbólicas se habrán convertido en lineas rectas identificándose con los ejes de los conos que se anulan.

Si trazadas las dos parábolas suplementarias por un plano que corte á los dos conos principal y adyacente, realizamos la aproximacion ó separacion de las generatrices, en el momento de desaparecer ó convertirse en un plano cualquiera de los conos, cada una de las parábolas degenerará en una recta, y una de las rectas formará *ángulos rectos* con la otra.

La *línea recta*, el *ángulo recto* y el *círculo*, aparecen aquí como degeneraciones de las curvas trazadas en las dos secciones típicas é instantáneas del cono, el círculo y la parábola. La elipse, que no es seccion momentánea, da elipses y rectas paralelas.

Acotemos este resultado precioso.

La línea recta, el ángulo recto y el círculo, son los elementos únicos y absolutos de la Geometría.

La línea recta simboliza en ella el algorítmo de la suma, el ángulo recto el de la multiplicacion, y el círculo con sus rectas accesorias el de la graduacion.

El ángulo recto es transicion de la recta á la curva, como el algorítmo de la multiplicacion es neutralizacion del de la suma y del de la graduacion.

De estos tres algorítmos, en cuanto se hallan realizados sobre cantidades imaginarias, tratarán los tres libros siguientes.

Cada uno de ellos será una completa exposicion de las doctrinas y pensamientos que no he hecho más que bosquejar en este libro primero.

Los tres juntos serán una demostracion completa é irresistible de que las imaginarias son un nuevo sentido que se abre á la inteligencia de las cosas y de las relaciones matemáticas. La luz que penetra por este sentido ha de cambiar el modo de verlas por una revolucion tan radical en las formas de esta vision, como la que traeria á nuestro modo actual de ver el mundo un sexto sentido que se nos diera sobre los cinco que ya tenemos. Al lado de la nueva ciencia matemática será como un incierto y vacilante ensayo de vision, esta de que ahora tanto nos admiramos. Tan pobre y escasa de contenido será la ciencia antigua comparada con la nueva, como lo es la línea recta comparada con la esfera.

LIBRO SEGUNDO.

DE LAS IMAGINARIAS EN EL ALGORITMO DE LA SUMA.

CAPÍTULO I.

SUMA ALGEBRÁICA.

ARTÍCULO 1.°

De la naturaleza de la suma algebráica.

En el Álgebra no puede tener la palabra *suma* la significacion demasiado restringida de reunion, agregado ó conjunto que se obtiene por la adicion de cantidades llamadas sumandos; porque la suma no ha de definirse por la naturaleza de los objetos sobre que recae, ni limitarse al caso particular en que esos objetos pueden realmente ser adicionados, sino por la naturaleza transcendental de la funcion del entendimiento, que se realiza por la operacion.

La primera y la mas elemental relacion que el entendimiento establece entre los conceptos que entran como materia del juicio, es la relacion categórica por la cual subordina simplemente entre sí el sujeto al predicado por una especie de aproximacion ó yuxtaposicion, en la cual se prescinde de la inclusion ó no inclusion de un concepto en el otro, segun su naturaleza positiva ó negativa.

Á esta relacion fundamental, por la cual quedan yuxtapuestos intelectualmente los conceptos, corresponde en la region algebráica el algoritmo fundamental de la suma, por la cual se yuxtaponen las cantidades cada cual con su propio signo, resolviéndose después esta yuxtaposicion en la adicion efectiva de sus módulos cuantitativos cuando tienen una misma cualidad ó signo, ó en la substraccion cuando los signos son opuestos.

Esta yuxtaposicion, en la que se considera uno de los sumandos como *substancia* sobre la cual recae la modificacion cuantitativa y cualitativa expresada por el otro que viene á ser el *accidente*, es una SÍNTESIS verdadera que entre ambos sumandos se realiza, síntesis que es resuelta en adicion ó substraccion como determinaciones ulteriores impuestas por la especial cualidad de los sumandos.

No hay palabra más apropósito para expresar esta síntesis en su mayor generalidad que la palabra *suma*, que atendido su orígen etimológico (SUMMA) no significa más que resúmen, compendio, resultado abreviado; esto es, resultante de la yuxtaposicion de varios elementos que tienen una misma ó diversa cualidad. Cuando hecho el balance de una caja comercial preguntamos qué es *en suma* lo que resulta, prescindimos de si todas las partidas han debido añadirse unas á otras, porque todas corresponden al haber ó al debe, ó si deben restarse unas de otras, porque las haya de una y otra clase.

Bajo la amplísima generalidad de la palabra *suma* se hallan, pues, como determinaciones mas especiales y mas concretas las de *adicion* y *substraccion*, correspondientes á los casos particulares de ser idénticos ó contrarios los signos de los sumandos.

ARTÍCULO 2.°

De la naturaleza sincategoremática de la suma algebráica.

De la explicacion que voy dando de la suma algebráica se infiere inmediatamente que esta es *sincategoremática* por esencia, esto es, que siempre se ha de concebir realizada bajo el doble concepto de la cantidad y de la cualidad de los sumandos. La cantidad y la cualidad radican en nuestro propio entendimiento como formas necesarias de todo pensamiento matemático, y son por lo tanto categorías de universal aplicacion á las relaciones de los números y magnitudes.

Además, las alteraciones de la cantidad y cualidad de los sumandos se convierten en determinadas circunstancias en alteraciones de cualidad y cantidad de la suma.

Estas circunstancias son los casos de heterogeneidad cualitativa que irémos reconociendo en los artículos siguientes.

Cuando los sumandos son perfectamente homogéneos, se prescinde en ellos de la cualidad como no influyente en la cantidad de la suma, la cual es entónces puramente cuantitativa comparable á la adicion aritmética.

Esta suma no se realiza sino bajo la categoría ó concepto de la cantidad, y por eso es meramente *categoremática*.

La suma sincategoremática del Álgebra puede tener una amplísima representacion geométrica aún para aquellos casos en que sumandos imaginarios entran en combinacion con sumandos reales, positivos ó negativos.

ARTÍCULO 3.º

Homogeneidad de los sumandos.

Los sumandos han de ser homogéneos: hé aquí un aserto que pasa casi por axioma entre los matemáticos, pero que debe tener alguna limitacion en su excesiva generalidad.

Es menester distinguir la homogeneidad que depende del concepto empírico en que los sumandos son tomados (como cuando exigimos que no se sumen, esto es, no se combinen por adicion ni substraccion, varas, por ejemplo, y reales, líneas con superficies), de la homogeneidad que depende del concepto categórico de la cualidad, esto es, lo positivo, lo negativo ó lo imaginario.

La suma algebráica, tan general como exige su carácter puro y conceptual, no puede exigir la homogeneidad cualitativa de estos conceptos, por lo mismo que no puede prescindir de ellos como realmente influyentes, no solo en la cualidad sino tambien en la cantidad de la suma. Lo que hace verdaderamente conceptual y algebráica á la suma, es esa doble consideracion de la cantidad y de la cualidad de los sumandos, conceptos indefectibles en el Álgebra.

Pueden, pues, y deben, ser sumadas sincategóricamente las cantidades positivas con las negativas, y unas y otras con las imaginarias.

CAPÍTULO II.

DE LA SUMA SINCATEGOREMÁTICA DE LAS CANTIDADES.

ARTÍCULO 1.°

De la suma de cantidades reales.

La suma de cantidades reales puede ser aditiva ó substractiva.

Suma aditiva es aquella que se realiza por una síntesis *progresiva* (á la derecha ó á la izquierda del punto de orígen) de todos los elementos cuantitativos que tienen un mismo signo ó cualidad. Tal es

$$A + B + C + D + E + \&c.$$

ó tambien

$$- A - B - C - D - E - \&c. = -(A + B + C + D + E + \&c.)$$

Suma substractiva es aquella que se realiza por una síntesis *regresiva* ó contraria entre los elementos que llevan opuesto signo

$$A - B$$

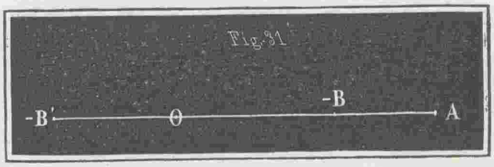
y tambien

$$- A + B$$

Suponiendo realizada la síntesis de todos los elementos ó unidades de A en un sentido, comienza la síntesis de los elementos ó unidades de B en el sentido opuesto.

Esta oposicion de direccion de ambas síntesis, es aplicable lo mismo á las cantidades numéricas que á las extensivas.

Si la cantidad A se cuenta como positiva á la derecha de un punto de orígen, por ejemplo O (*Fig.* 31), la substraccion ó regreso de B puede expresarse partiendo del último punto en que termina la síntesis de A, y volviendo sobre el mismo A hácia el punto de orígen: la resultante sumatoria será aquella parte de A que no quede neutralizada por el influjo regresivo de B ó aquella parte de B (cuando B es mayor que A) que expresa un regreso á la izquierda del punto de orígen no neutralizado por la síntesis progresiva de A. En este último caso la resultante sumatoria es negativa.

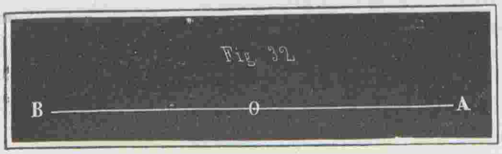


La substraccion puede tambien expresarse refiriendo cada uno de los elementos de signo contrario al punto de orígen y en sentidos opuestos, y considerándolos como dos fuerzas que obran simultáneamente sobre aquel punto, y cuya resultante final sería la diferencia de la mayor sobre la menor referida como positiva ó negativa al mismo punto de orígen.

La primera de estas expresiones es *geométrica*, y la segunda *dinámica*.

La suma substractiva $-A+B$ se representaria de un modo análogo aunque contrario al anterior ejemplo.

Cuando dos rectas A y B (*Fig.* 32) de cualidades opuestas están referidas á un punto de orígen O, la suma substractiva $A-B$ puede realizarse geométricamente trasladando la recta mayor sobre la menor hasta coincidir enteramente con ella, y el exceso de la mayor sobre la menor con su cualidad propia, representará el verdadero resultado sumatorio



Cuando $A > B$, el exceso cae á la derecha del orígen y es positivo.

Cuando $A = B$, cualquiera de ellas puede ser trasladada, su extremo cae sobre el orígen, y la suma es cero.

Cuando $A < B$ la que se traslada es B, y su exceso, cayendo á la izquierda, señala una suma negativa.

Un polinómio, expresion algebráica de la suma de muchos elementos que pueden tener signos contrarios, se descompone en dos sistemas, en cada uno de los cuales se verifica la adicion de los elementos homogéneos, y la suma substractiva de estos dos sistemas expresa la resultante final á que equivale el polinómio.

Así, el polinómio

$$A + B - C + D - E - F + G$$

equivale á la suma substractiva

$$(A + B + D + G) - (C + E + F).$$

Los primeros elementos se cuentan á la derecha del punto de orígen, y los segundos á la izquierda, cuando queremos dar una representacion dinámica á la resultante sumatoria de todo el polinómio.

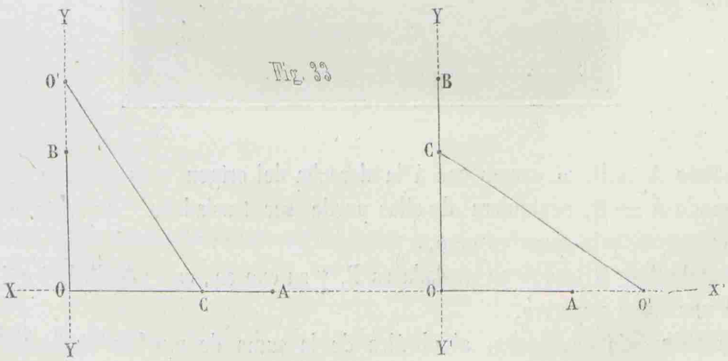
ARTÍCULO 2.°

Interpretacion geométrica de $\sqrt{A^2 - B^2}$.

En la doctrina del artículo anterior se funda la interpretacion de la suma substractiva expresada por el binómio subradical $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Hay aquí, en efecto, una traslacion de la recta mayor sobre la menor, pero no se verifica en la amplitud semicircular determinada por la oposicion de los signos $+$ y $-$, esto es, en las direcciones opuestas que estos signos expresan, sino en el límite de un ángulo recto, cuyo vértice es el orígen, y cuyos lados son los del triángulo rectángulo en el que se quiere determinar un cateto dada la hipotenusa y el otro cateto.

Concibamos que sobre los dos ejes ortogonales indefinidos, X é Y, de la figura que sigue, se cuentan respectivamente las rectas A y B.



La traslacion de la mayor sobre la menor debe suponerse hecha partiendo del punto de orígen y marchando hasta el extremo de la menor, con lo cual el extremo de la mayor señalará en su eje respectivo un punto C.

En todos los casos la recta mayor se supone ser la hipotenusa, y como tal queda constituida al determinar el cateto que se busca.

Si $A > B$, A es hipotenusa (siempre mayor que el cateto) y se eleva su extremo corriendo de O hasta B, y determinando con el otro extremo el cateto OC; este cateto hallado se supone ser el horizontal conforme con la realidad necesaria del radical $\sqrt{A^2 - B^2}$.

Si $A = B$, no puede suponerse que una de las rectas sea hipotenusa y la otra cateto, no hay determinacion triangular: cualquiera de las rectas que verifique su traslacion, fija su extremo en el orígen al coincidir con la otra. Tambien el radical es cero en esta suposicion.

Si $A < B$, B se considera como hipotenusa, y se traslada corriendo su extremo desde O hasta el extremo de A, con lo cual se determina en Y el cateto OC perpendicular, conforme tambien con el imaginarismo necesario del radical.

Nótese bien que el imaginarismo del radical en esta última suposicion puede hacerse explícito por una modulacion fundada en la conocida igualdad

$$\sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{B^2 - A^2} \cdot \sqrt{-1},$$

la cual no indica mas sino que podriamos determinar el cateto vertical, determinándolo primero como real (por suponerse $A < B$ en $\sqrt{B^2 - A^2}$), esto es, cambiando la posicion de las rectas, y obrando como en la suposicion primera, y afectando después al resultado con el argumento ó coeficiente cualitativo $\sqrt{-1}$. El resultado geométrico sería siempre el mismo.

A toda suposicion que consista en traducir la realidad de una recta por su posicion horizontal, corresponde la necesidad correlativa de traducir su imaginarismo por una posicion vertical. Esta necesidad se liga con aquella suposicion por la fuerza ilativa del Álgebra. Horizontal y vertical no significan aquí mas que perpendicularidad recíproca.

ARTÍCULO 3.°

De la suma de cantidades imaginarias.

Cuando todos los elementos de la suma son imaginarios, la ley de su síntesis es idéntica á la que domina en la suma de cantidades reales.

La homogeneidad de direccion externa que en todos ellos supone la identidad del signo cualitativo $\sqrt{-1}$ hace que la direccion de la suma se identifique con la que ellos tienen como sumandos. Y como esta es perpendicular á la de los sumandos reales, la suma de imaginarias se expresará por un eje vertical, cuyas dos regiones positiva (superior) y negativa (inferior) están referidas al mismo punto de orígen que las dos del eje horizontal en que se representan las cantidades reales.

En este eje vertical se realiza la adicion y substraccion, ó sea la síntesis progresiva y regresiva que es determinada por la contraria influencia de los signos $+$ y $-$ que la afectan. La suma, sin embargo, nunca puede salir de la direccion normal determinada por el signo $\sqrt{-1}$.

De esta manera la suma

$$A\sqrt{-1} + B\sqrt{-1} - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1}$$

realiza en el eje vertical (*Fig.* 34) las mismas adiciones y substracciones que tendrian en el eje real los elementos de la suma

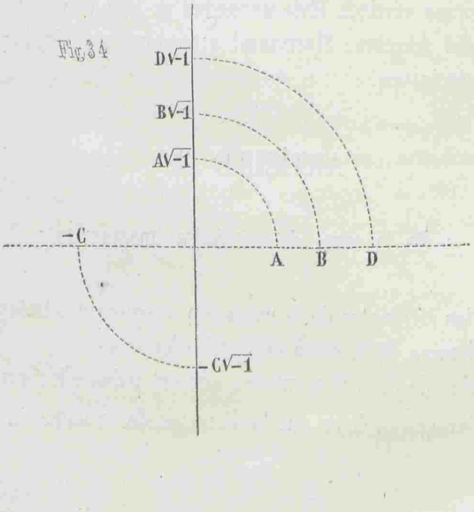
$$A + B - C + D.$$

Verdaderamente á esta suma de las imaginarias seríamos conducidos concibiéndola primero realizada en el eje real entre los módulos A, B, C y D, segun su propio signo, é imprimiendo en seguida á todo el sistema una mocion giratoria sobre el punto de orígen hasta darle una posicion vertical, ó, lo que es lo mismo, imponiendo á la suma modular $A + B - C + D$ el coeficiente que expresa esta nueva posicion, ó sea el argumento $\sqrt{-1}$.

En efecto, la suma de imaginarias puede tener la doble forma de los dos miembros de la siguiente igualdad:

$$A\sqrt{-1} + B\sqrt{-1} - C\sqrt{-1} + D\sqrt{-1} = (A + B - C + D)\sqrt{-1}$$

Fig. 34



ARTÍCULO 4.°

De la suma proyectiva de cantidades reales é imaginarias.

Entiendo por *suma proyectiva* aquella en que el valor cuantitativo de los sumandos es modificado por la incompatibilidad de sus cualidades. Esta suma expresa síntesis de las proyecciones de los sumandos.

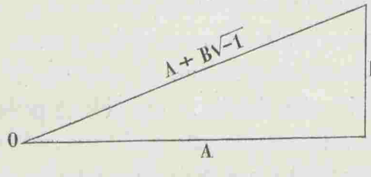
La suma es proyectiva siempre que los sumandos son de tal manera diversos en su afeccion cualitativa, que es imposible que se resuelva su síntesis en la adicion ó substraccion enteramente cuantitativas; tal es la suma de una cantidad real con otra imaginaria, cuya síntesis se expresa por el binómio $A + B\sqrt{-1}$, ó, más generalmente, $A \pm B\sqrt{-1}$.

Ni $A + B\sqrt{-1}$ representa una adicion verdadera y explícita, ni $A - B\sqrt{-1}$ una substraccion ó resta

Suponiendo ahora que esta suma proyectiva recibe una traduccion geométrica, estableceré el siguiente teorema:

La hipotenusa es la suma sincategoremática de los catetos. (*Fig.* 35).

Fig. 35



Sin aspirar á una demostracion geométrica, que de antemano declaro tan imposible como innecesaria, nos bastará considerar la hipotenusa en sus relaciones mas óbvias con los lados del triángulo rectángulo, para comprender fácilmente la verdad y transcendencia de la doctrina que declara á aquella como suma cualitativa de estos.

Con efecto: las dos rectas A y $B\sqrt{-1}$ pueden referir su suma al punto de orígen O bajo conceptos y miras muy diferentes.

1.° Pueden ser consideradas como simples magnitudes lineales, de cuya direccion se prescinde absolutamente como una circunstancia accidental en el problema sumatorio que se quiere resolver: tal sería el caso en que se tratase de averiguar las leguas que anduvo un viajero que, saliendo de O, recorrió sucesivamente A leguas en un sentido cualquiera, y B leguas en una direccion perpendicular á la anterior. En este problema, puramente aritmético, es de todo punto innecesario, y hasta impropio, considerar la direccion de estos dos períodos del viaje, porque el número de leguas andadas es del todo independiente del rumbo en que se anduvieron.

2.º Mas, si la intencion del problema sumatorio es determinar, no ya las leguas andadas, sino la distancia á que se encuentra el viajero de su punto de partida, la cuestion no es absoluta y exclusivamente aritmética, porque aparece inmediatamente la consideracion geométrica de la hipotenusa como necesaria para determinar el valor cuantitativo de esta distancia. Tiene aquí intervencion indispensable la Geometría ordinaria; porque geométrico ha de ser el principio en que se funde la determinacion de esta hipotenusa. Sin embargo, faltando la consideracion cualitativa de esta distancia, porque sin ella el problema queda suficientemente resuelto, apénas sale de la region aritmética el procedimiento de resolucion, y es ménos geométrico el problema á fuerza de ser exclusivamente cuantitativo.

3.º Otra cuestion concibo aún más geométrica que la anterior, porque lo es enteramente, no solo respecto de la determinacion cuantitativa de la hipotenusa, sino tambien en cuanto á la direccion ó posicion de esta recta en un plano. Tal sería el caso en que se intentase expresar de un modo general la posicion de un viajero respecto de su punto de partida, determinando no solo cuanto se habia alejado de este punto, sino tambien en qué direccion se hallaba después de haber corrido sucesivamente A leguas en una direccion, y B leguas en direccion perpendicular. La distancia cuantitativa tiene aquí una posicion fija, gráfica, enteramente geométrica, que no puede expresarse por una recta cualquiera con longitud determinada, sino por la hipotenusa que une los puntos extremos (salida y término del viaje); y como estos dos extremos determinan, no solamente la longitud absoluta de la distancia buscada, sino tambien la direccion de ella, como pide el problema, la hipotenusa que los une es la solucion suficiente de este problema sumatorio total y perfecto bajo ambas categorías de cantidad y cualidad: *la hipotenusa es la verdadera suma sincategoremática de los catetos.*

Muy notables son las diferencias que hay entre este y el anterior problema. El anterior quedaba satisfecho con la simple determinacion del módulo de $A+B\sqrt{-1}$, que es $\sqrt{A^2+B^2}$; el actual exige que al módulo acompañe el argumento: módulo y argumento van implícitos en la síntesis cuantitativo-cualitativa $A+B\sqrt{-1}$.

El problema segundo expresa la distancia buscada en el valor real $\sqrt{A^2+B^2}$, que puede y debe medirse en el eje horizontal, y es lo mismo que si se respondiese que *el viajero distará del orígen tanto como si hubiese andado en la primera direccion la distancia* $\sqrt{A^2+B^2}$.

El problema tercero, al exigir la direccion verdadera de esta distancia, necesita incorporar con aquel módulo el argumento correspondiente, y realizar, en la hipotenusa, toda la exigencia de las magnitudes y posiciones de los catetos sumandos A y $B\sqrt{-1}$.

Esta doctrina es consecuencia necesaria de la que todos los matemáticos admiten al suponer que el módulo, así de $A+B\sqrt{-1}$

como de $A-B\sqrt{-1}$,

siempre es $\sqrt{A^2+B^2}$, esto es, una longitud real é igual á la longitud absoluta que determinan las cantidades

$$A+B\sqrt{-1} \text{ y } A-B\sqrt{-1}.$$

Y así es, en efecto, como se comprende que expresiones algebráicas ó representaciones geométricas tan diversas como las conjugadas anteriores, pueden y deben tener un mismo módulo, porque la distancia que determinan estas dos expresiones, queda la misma al momento en que se prescinde en ellas de la idea de direccion diversa de la del eje real ú horizontal. Cuando el problema exige esta direccion además de la distancia, no es el módulo solucion suficiente, sino que es necesaria la expresion misma $A+B\sqrt{-1}$ ó $A-B\sqrt{-1}$, en la cual ya no es cosa indiferente esta diversidad del signo.

Sin tener en cuenta mas que lo que exige la naturaleza de la suma de dos rectas que tienen un extremo comun y direcciones incompatibles, como perpendiculares, se llega fácilmente á considerar la hipotenusa que une los otros extremos como la verdadera expresion proyectiva y la suma sincategoremática de tales sumandos. La hipotenusa, con efecto, satisface á las condiciones de esta suma, tanto á las que se refieren á su magnitud como á las de su direccion: en ella están perfecta y simultáneamente comprendidas las proyecciones de los sumandos, y su direccion es intermedia entre las dos direcciones extremas y antitéticas de los sumandos perpendiculares; y esto en perfecta síntesis, porque las direcciones se modifican en la suma por las magnitudes respectivas de los sumandos en que se consideran, y las magnitudes se modifican por la incompatibilidad de las direcciones.

He dicho que no es geométrica, y añado ahora que no puede serlo, la demostracion de este importante teorema, sino transcendental y deducida *à priori* de la naturaleza de la síntesis sumatoria, en que se deja ver el uso de uno de los conceptos categóricos ó fundamentales del entendimiento (el concepto de *substancia*). La Geometría que no entiende sino de sumas y relaciones cuantitativas, no puede suministrar un medio de prueba cuando se trata de sumas que se deben realizar bajo el doble concepto de la cantidad y de la cualidad de los sumandos. La Geometría de las magnitudes reales, que es puramente cuantitativa, y como numérica, reduce á un solo eje lineal el efecto sumatorio de las rectas positivas y negativas referidas á un punto de origen, y no puede ver este efecto resultante salir de esa direccion única, ni mucho ménos dar el nombre de sumas á magnitudes que ella demuestra ser menores (cuantitativamente) que los sumandos.

Todo esto es consiguiente, y eminentemente lógico, en el supuesto de que la Geometría nada tuviese que ver con la posicion de las rectas y figuras, y solo debiese tratar de su magnitud absoluta: pero esta suposicion, sobre ser absolutamente errónea, sería la mas propia para perpetuar la obscuridad y la falta de rigor demostrativo que reinan todavía en los puntos mas transcendentales de la ciencia. Nada hay mas geométrico que la situacion, la posicion, la relacion externa de las rectas y de los planos. No sería geométrica, sino puramente aritmética, la cuestion matemática que se limitase á la consideracion relativa de las magnitudes, y prescindiese (si esto es acaso posible) de toda idea de direccion ó de cualidad.

ARTÍCULO 5.º

Simplicidad y universalidad de la forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

Aunque reciban una traduccion numérica los elementos A y B del binómio $A \pm B\sqrt{-1}$, quedará siempre esta forma como irreducible, como original, como uno de los casos de síntesis en que hay una heterogeneidad cualitativa perfecta entre los sumandos, uno real y otro imaginario. El Álgebra no tiene tampoco ningun medio general de dar á este símbolo primitivo una transformacion que lo haga legible en términos reales: bien es verdad que esa transformacion sería improcedente y destruiría la originalidad de esa síntesis ó relacion sumatoria bajo la doble categoría de cantidad y de cualidad. Ese símbolo binómio tiene en el Álgebra la misma simplicidad é independencia que la idea de oblicuidad en la Geometría.

Al propio tiempo se mezcla, se reproduce con su forma invariable por todo el dominio algebráico con la misma autonomía que la idea de *ángulo*, que es el alma de todas las consideraciones cualitativas de las rectas y de los planos; y así, en virtud de la misma ley por las suposiciones sucesivas de $A=0$ y $B=0$, se deducen de $A+B\sqrt{-1}$ las direcciones típicas $\sqrt{-1}$ y $+1$ de dos ejes ortogonales, como casos particulares que allí se encierran; así como de la variabilidad cualitativa de una oblícua en general pueden traer orígen las posiciones geométricas particulares, la vertical y la horizontal.

Esta es la idea que debe formarse de la originalidad y universalidad de la suma sincategoremática.

ARTÍCULO 6.°

Suma dinámica.

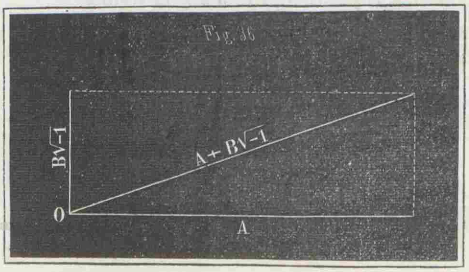
Y aquí se ofrece, naturalmente, la consideracion dinámica del binómio

$$A + B\sqrt{-1}.$$

Si trasladamos en la figura siguiente el elemento imaginario $B\sqrt{-1}$ paralelo á si mismo al punto de orígen, la que antes era hipotenusa del triángulo rectángulo, será ahora simplemente diagonal del rectángulo construido sobre los dos elementos real é imaginario.

Esta diagonal será la *resultante* sumatoria de aquellos elementos, considerados como *fuerzas* aplicadas simultáneamente al punto de origen; y como la idea de suma algebráica comprende en su generalidad cualquier resultante de la síntesis de elementos con cualidad diferente, la diagonal del rectángulo es verdadera suma sincategoremática de los lados que le son adyacentes en el rectángulo.

La Dinámica se ajusta en uno de sus teoremas fundamentales á la teoría sumatoria de las cantidades imaginarias.



ARTÍCULO 7.°

Consecuencias de la doctrina anterior.

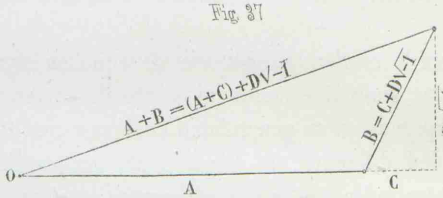
No es solo de la hipotenusa ó de la diagonal del rectángulo el representar la suma de los elementos real é imaginario: lo es tambien de cualquiera oblícua que une los extremos de otras dos que tienen un extremo comun, y de la diagonal de cualquiera paralelógramo respecto de los lados adyacentes.

Con efecto: para representar la suma de las dos rectas $A+B$ de la figura 37, podemos poner en lugar de B los elementos $C+D\sqrt{-1}$, en que se resuelve su oblicuidad: la suma será entónces

$$(A+C)+D\sqrt{-1},$$

cuya genuina expresion será la hipotenusa que une sus extremos.

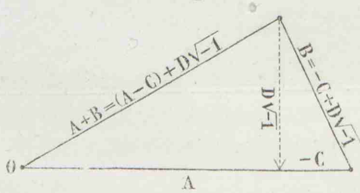
Fig. 37



A igual resultado llegariamos trazando la oblícua B desde el punto de orígen, y dando una forma dinámica ó paralelográmica á la figura.

Cuando la oblicuidad del elemento imaginario es de más de un ángulo recto, se cumple igualmente la ley general sumatoria (*Fig.* 38).

Fig. 38



Así: en la suma $A+B$, de esta figura, podemos poner por B su expresion proyectiva rectangular $-C+D\sqrt{-1}$: entonces la suma vendrá expresada por

$$(A-C)+D\sqrt{-1},$$

cuya legítima expresion será la diagonal que une los extremos de los sumandos y cuya forma no se diferencia de la anterior sino en la cualidad negativa de la proyeccion real del sumando oblícuo.

Los casos en que son negativos los sumandos imaginarios no se diferencian de los anteriores, sino en que estos son representados por oblícuas que se trazan en la parte inferior del eje horizontal, bien se adopte la representacion triangular ó geométrica, bien la dinámica ó paralelográmica.

La variedad de signos de los elementos reales haria representarlos á la derecha ó á la izquierda del punto de orígen, segun es sabido.

Las diagonales que expresan las sumas refieren su cualidad al mismo punto de orígen que los sumandos.

ARTÍCULO 8.°

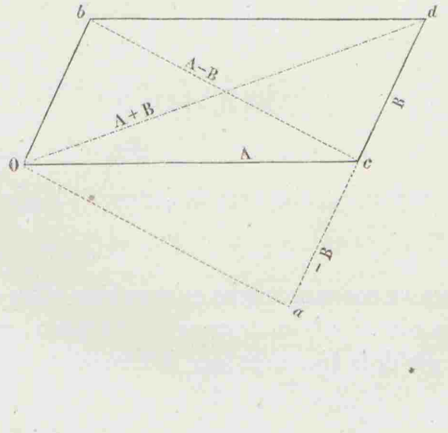
Paralelógramo sumatorio.

Toda la anterior doctrina se resume naturalmente en el siguiente teorema:

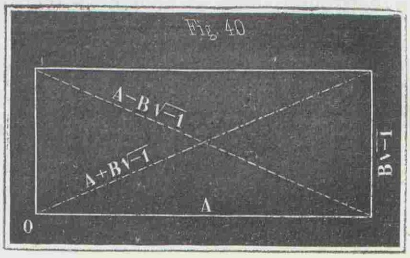
De las dos diagonales de un paralelógramo, la que pasa por el punto de orígen representa la suma de los dos lados adyacentes, y la otra representa la diferencia.

Con efecto; si la *suma* $A+B$ ó $A+Ob$ de la figura 39 se expresa por la diagonal Od del paralelógramo, como ya hemos demostrado en la página 93, $A-B$ que es la *diferencia* y que se supone trazada por la parte inferior por el signo negativo de B, estará representada por la recta Oa; pero Oa es paralela é igual á bc, porque Ob es igual y paralela á ac por construccion: luego la diagonal bc expresa la diferencia de los dos lados A y B.

Fig. 39

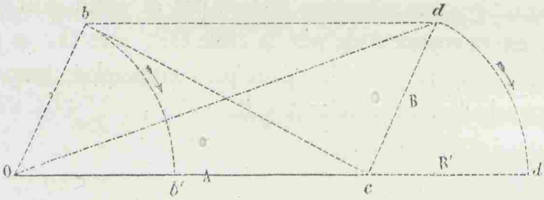


Cuando los dos lados son perpendiculares entre sí, como en el caso del rectángulo, las dos diagonales son iguales en magnitud, y solo con su diferente posicion representan una la suma $A+B\sqrt{-1}$, y otra la diferencia $A-B\sqrt{-1}$. (*Fig.* 40).



Suponiendo que el lado oblícuo B de la figura 41 se inclinase sobre la direccion de A, hasta confundirse con ella, la diagonal Od se identificaria en magnitud y en posicion con la suma aditiva de los sumandos, y la diagonal bc se confundiria tambien en posicion solamente con ellos, representando su diferencia cuantitativa ó substractiva: de donde se infiere, que aún las adiciones y substracciones de cantidades reales caen tambien bajo la ley general de la suma y diferencia sincategoremáticas representadas por las dos diagonales de un paralelógramo.

Fig. 41



ARTÍCULO 9.º

Cenciliacion del teorema pitagórico con la doctrina da la suma sincategoremática.

No creo que sea ya necesario mucho esfuerzo para poner de acuerdo la doctrina que voy sentando con el célebre teorema de Pitágoras, en que se establece *la igualdad del cuadrado de la hipotenusa con la suma de los cuadrados de los catetos*.

Contra este teorema, que es como el alma de toda la Geometría cuantitativa; contra esta verdad tan encarnada en todas las consideraciones acerca del espacio, no parece, á primera vista, que pueda prevalecer una doctrina que le es enteramente opuesta. Yo mismo confieso que he tenido que vencer el hábito de ver siempre á *dos lados de un triángulo mayores que el tercero*, para poder concebir de un modo general que le son *enteramente iguales.*

Tengo para mí que estas repugnancias y contradicciones de doctrina más proceden del hábito de colocarse en determinados y exclusivos puntos de vista, que de real oposicion que pueda haber entre el enunciado pitagórico y las teorías que voy desenvolviendo.

Con efecto: el teorema de Pitágoras está concebido y demostrado respecto de valores absolutos ó cuantitativos de las superficies. Cada una de ellas tiene una posicion diferente, y se concibe que han sido producidas por la raíz lineal que les corresponde, con entera independencia de toda idea de posicion ó de cualidad.

Bien es verdad que el teorema de Pitágoras no se enuncia sino bajo la hipótesis de que las tres rectas constituyan un triángulo rectángulo, pero la hipótesis de un teorema nada tiene de comun con el sentido de la enunciacion teoremática.

Esta enunciacion no es otra que la siguiente: *si se tienen tres rectas de tal longitud que con ellas pueda formarse un triángulo rectángulo, el cuadrado de la que se opone al ángulo recto es igual á la suma de los cuadrados de las otras dos.*

Si son, por ejemplo, tres rectas con cuyas longitudes H, A y B se puede cerrar un triángulo rectángulo, se tendrá

$$H^2 = A^2 + B^2$$

lo cual siempre se verifica cuando las longitudes son entre sí como los números 3, 4 y 5.

Igual concepcion domina en el teorema consiguiente relativo á las rectas ó lados que se enuncia diciendo: que la *hipotenusa es igual á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos*; igualdad que se refiere tambien á valores absolutos de estos, á relaciones como numéricas é independientes de toda consideracion cualitativa ó de posicion.

La traduccion del teorema lineal en su verdadero sentido sería esta: *la diagonal, como recta de una determinada longitud que hubiera de medirse en una direccion real, es enteramente* IGUAL EN CANTIDAD *á la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos considerados tambien como rectas de una magnitud determinada.* No pretende otra cosa el teorema pitagórico, ni otra cosa quiere decir la expresion algebráica del valor cuantitativo de esta hipotenusa $\sqrt{A^2+B^2}$ que, segun se infiere de la totalidad de la teoría que sostengo, y por comun confesion de todos los matemáticos, es el *módulo* de la forma elemental $A+B\sqrt{-1}$, que al valor cuantitativo de la hipotenusa añade la consideracion de su posicion ó cualidad, concepto tanto ó mas esencialmente geométrico que el de la cantidad de los elementos lineales.

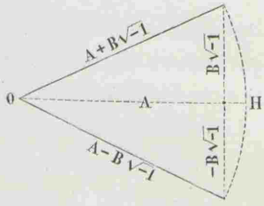
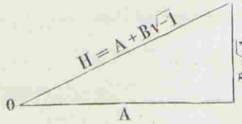
El teorema pitagórico no es más que categoremático, ó concebido bajo la sola categoría de cantidad. El teorema del paralelógramo es sincategoremático, ó concebido bajo la doble categoría de cantidad y de cualidad.

No hay oposicion entre estos dos teoremas; antes el segundo es natural y necesario complemento del primero, como la cualidad completa á la cantidad en toda consideracion verdaderamente geométrica.

Tengo, además, la pretension de que el teorema paralelográmico es más consiguiente y más lógico por el hecho mismo de establecer la relacion sumatoria perfecta entre las rectas que el pitagórico que la pone entre las superficies; porque no parece que debiera inferirse la relacion que tienen las rectas de la que tienen las superficies, sino mas bien la de estas de la de aquellas.

Para ver claramente esta mayor naturalidad y consecuencia de la teoría sumatoria que procede de las relaciones lineales á las superficiales, no hay sino presentar el cuadro en que el doble teorema lineal y superficial se considera sucesivamente bajo una sola ó bajo ambas categorías.

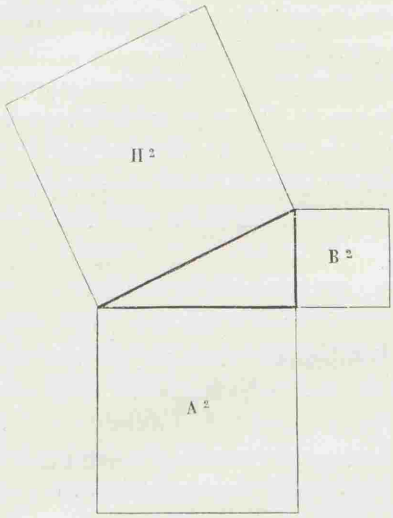
Sean H la hipotenusa, y A y B, como antes, los catetos.

TEOREMAS CATEGOREMÁTICOS.	TEOREMAS SINCATEGOREMÁTICOS.
RELACION LINEAL.	RELACION LINEAL.
$H=\sqrt{A^2+B^2}$	$H=A+B\sqrt{-1}$
La hipotenusa es igual á la raiz cuadrada de la suma de los cuadrados de los catetos.	La hipotenusa es igual á la suma de los catetos.
	

RELACION SUPERFICIAL.

$$H^2 = A^2 + B^2$$

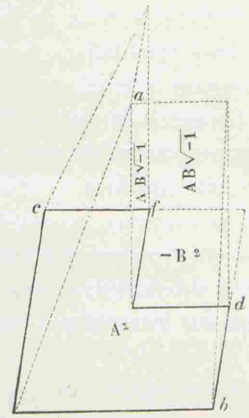
El cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.



RELACION SUPERFICIAL.

$$H^2 = (A^2 - B^2) + 2AB\sqrt{-1}$$

El cuadrado de la hipotenusa es igual á la diferencia de los cuadrados de los catetos, mas el doble producto de estos.



Como del teorema pitagórico relativo á las superficies se infiere otro relativo á las líneas, así del teorema sincategoremático de los lados se deduce con más naturalidad otro referente á las superficies, que es el último de los enunciados, y cuya representacion geométrica merece fijar nuestra atencion.

La naturaleza binómia del producto imaginario

$$(A^2 - B^2) + 2AB\sqrt{-1}$$

indica que su representacion sumatoria ha de ser un plano oblícuo, respecto del plano real $A^2 - B^2$ y de los rectángulos imaginarios $2AB\sqrt{-1}$. Esto era de inferir de la oblicuidad lineal de la hipotenusa respecto del elemento horizontal A y del vertical $B\sqrt{-1}$. En el producto es imposible prescindir de la cualidad de los factores, cuando estos (es decir, la hipotenusa multiplicada por sí misma) se conciben bajo la doble categoría de magnitud y de posicion.

El cuadrado de la hipotenusa (denominacion impropia en este caso, porque el producto de la hipotenusa por sí misma está representado por la suma de los dos planos *ab* y *ac*) no solo es plano oblícuo, sino que se compone de dos planos oblícuos en sí mismos y oblícuos el uno respecto del otro. El cuadrado de la hipotenusa habia de referirse á dos planos, como la hipotenusa misma se refiere á dos rectas, cuya referencia constituye su cualidad. En ese producto ha de reflejarse la reciprocidad de los factores por la doble oblicuidad de todo él respecto de los planos coordenados horizontal y perpendicular *cb* y *ad* y de sus dos elementos entre sí. El producto debe ser *oblícuamente oblícuo*, porque la oblicuidad de un factor se hace oblícua por la influencia de la del otro (*).

El cuadrado de la hipotenusa en el teorema pitagórico es una magnitud absoluta que nada revela, ni traduce por sí misma la posicion de la hipotenusa factor, posicion que depende necesariamente de la que tienen los catetos.

En suma; el teorema de Pitágoras es perfecto y fundamental, como expresion, de relaciones cuantitativas, y no es extraño que la Geometría ordinaria reconozca en ese teorema inmortal una de las verdades más capitales y fecundas.

La Geometría de posicion, que es la Geometría verdadera y completa, ha de modificar necesariamente aquel enunciado con arreglo á la nueva categoría de cualidad que ella introduce.

Esta modificacion no es, sin embargo, una oposicion de doctrina, sino un complemento y perfeccion á que forzosamente ha de conducir una aplicacion más vasta, más sistemática, en una palabra, más *crítica*, de todas las leyes formales del entendimiento humano.

(*) En el Libro siguiente será comprendida esta reciprocidad como esencial á la multiplicacion, y se entrará en otras consideraciones acerca de esta clase de productos.

CAPÍTULO III.

SUMAS POLIGONALES.

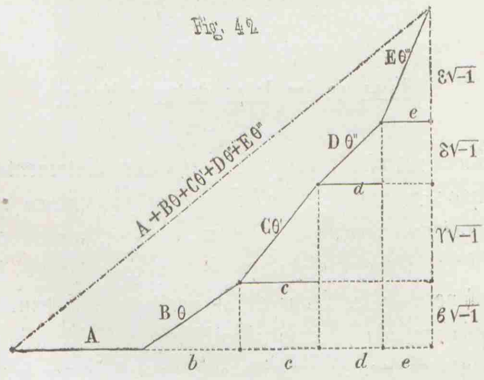
ARTÍCULO 1.°

Forma algebráica de la suma poligonal.

La suma binómia $A+B\sqrt{-1}$ puede recibir una amplificacion inmensa, no solo en la variedad de direcciones angulares ó externas que el elemento B puede tomar respecto de A, sino tambien en la indefinida variedad de elementos que con diversa inclinacion entre sí, y por consiguiente respecto del elemento real A, pueden entrar en una síntesis continuativa ó sumatoria. Una combinacion continuativa de elementos variamente inclinados, se llama un *poligonismo*; y su suma realizada bajo el doble concepto de cantidad y posicion, es lo que llamo *suma poligonal*.

Fácilmente se concibe que la expresion algebráica de la suma poligonal ha de ser un *polinómio* lineal en que cada letra represente el módulo ó valor cuantitativo de cada linea sumando, modificado por un coeficiente que exprese su posicion y que sea como su argumento. (*Fig.* 42,)

Fig. 42



Llamando θ á este argumento, ó al ángulo que un elemento oblícuo forma con el eje real la suma poligonal, se representará por

$$A + B\theta + C\theta' + D\theta'' + E\theta''' + F\theta'''' + \ldots\ldots$$

donde si ponemos en vez de cada sumando su expresion proyectiva elemental que resume al módulo y al argumento, tendremos

$$A + (b + \beta\sqrt{-1}) + (c + \gamma\sqrt{-1}) + (d + \delta\sqrt{-1}) + (e + \varepsilon\sqrt{-1}) + \ldots$$

y separando los elementos reales de los imaginarios

$$(A + b + c + d + e + \ldots) + (\beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \ldots\ldots)\sqrt{-1}$$

aparece la forma binómia irreducible, cuya traduccion geométrica conduce á la construccion aislada é independiente de los elementos reales en un eje horizontal, y la de los imaginarios en otro vertical levantado perpendicularmente en el extremo de aquel, y á la sumacion de ambas construcciones por una oblícua que junte sus extremos como hipotenusa.

Si ambas construcciones se refieren inmediatamente al punto de orígen, la suma total se representará por la diagonal del paralelógramo.

La ley de esta construccion sumatoria es invariable, cualesquiera sean los grados de oblicuidad de los sumandos, el número de ellos, y la mayor ó menor regularidad de su yuxtaposicion continuativa.

Las mas variadas combinaciones, las inflexiones y giros más caprichosos que pueda tomar la síntesis de elementos trazados en un plano, quedan resumidos en *una recta sumatoria que une los extremos libres de los sumandos extremos.* Esa recta es la síntesis legítima de todos los sumandos, la síntesis sincategoremática verdaderamente geométrica.

ARTÍCULO 2.º

Suma de los lados de un polígono.

No parecerá ahora extraña la proposicion que inmediatamente se deduce de esta doctrina, y es que: la *suma de los lados de un poligonismo que vuelve sobre sí mismo, ó de un* POLÍGONO *regular ó irregular, es cero*, porque es nula la distancia de sus *extremos libres*, ó mejor dicho, no hay tales extremos. Cualquiera que sea la magnitud y número de los lados de un perímetro, la cantidad de todos ellos como líneas, queda anulada y como absorbida y reducida á la condicion de mero límite en el momento en que se constituye la superficie por la cualidad particular de los sumandos; quiero decir, en el momento en que estos, sin perder su síntesis continuativa, realizan en el plano, cuando menos, las tres posiciones diversas que son necesarias para la determinacion de la superficie.

Un binómio imaginario $A+B\theta$, ó bien $A-B\theta$, nunca puede ser igual á cero, pero sí puede ya serlo el trinómio $A+B\theta+C\theta'$, por algunos valores de θ y de θ', y por algunas magnitudes de A, B y C.

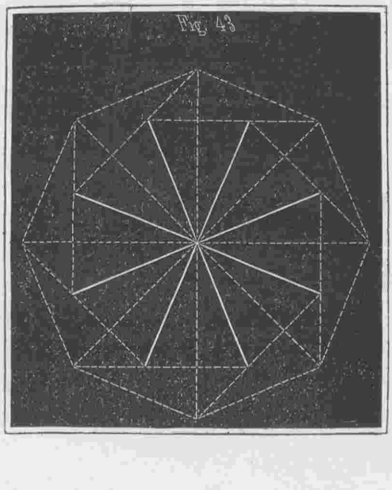
La suma poligonal puede realizarse por la composicion sucesiva de los sumandos por medio del paralelógramo dinámico: cada sumando, que expresa una oblícua, debe componerse con la resultante diagonal del paralelógramo anterior. La primera oblícua se compone directamente con la real. La última oblícua expresa la suma total, cierra el polígono, y reduce á cero el valor de los demás lados cuando es recorrida en sentido inverso, es decir, hácia el punto de orígen como es necesario para consumar la síntesis continuativa que determina la superficie.

ARTÍCULO 3.°

Conversion del polígono en irradiacion.

Si cada uno de los lados de un polígono se traslada paralelamente á sí mismo, segun la diagonal que expresa la suma de los lados anteriores, hasta que su extremo coincida con el punto de orígen, resultará una disposicion geométrica que merece el nombre de *irradiacion*, no porque sus elementos sean siempre verdaderos radios, sino por la divergencia necesaria que les dan su diversa posicion y la comunidad del punto de orígen.

El polígono regular da una irradiacion propiamente dicha equiangular y perfecta, como puede verse claramente en la figura que sigue.



Como la magnitud y la direccion de los lados del polígono no se altera por esta traslacion paralela, la irradiacion que resulta se somete á la misma ley de la suma sincategoremática de los lados del polígono. La suma de los elementos de una irradiacion que procede de un polígono siempre es cero.

Un desarrollo en sentido inverso nos conduciria de una irradiacion perfectamente estática, ó cuyo valor fuese cero á un polígono y de una irradiacion que tuviese una resultante sumatoria, ó cuyo valor no fuese cero á un poligonismo no cerrado, cuya suma sería la misma resultante de la irradiacion desenvuelta.

La Dinámica y la Geometría se comunican la luz y la fuerza demostrativa por esa transicion recíproca del polígono á la irradiacion, y de esta á aquel, cuyo verdadero fundamento es la categoría de cualidad ó de posicion externa realizada por el imaginarismo, sin el cual son imposibles las relaciones angulares, así de las fuerzas como de las rectas. Si la categoría de posicion es absolutamente necesaria para toda concepcion dinámica, ¿cómo no ha de serlo en la Geometría, de donde aquella recibe el fundamento de todas sus demostraciones?

ARTÍCULO 4.°

Sumas triangulares.

La doctrina de la suma poligonal puede concretarse á figuras de un determinado número de lados, y dar de esta manera un contenido geométrico y un sentido conveniente á algunos teoremas puramente algebráicos. Me limitaré á algunas consideraciones acerca del triángulo rectángulo.

Siendo $A+B\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$, resulta $A=a$ y $B=b$.

Los algebristas demuestran este teorema de la manera siguiente:

De la igualdad $A+B\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1}$

se deduce esta otra

$$A-a=(b-B)\sqrt{-1}\,;$$

pero esta igualdad sería absurda si no fuesen

$$A-a=0 \text{ y } b-B=0\,;$$

luego debe verificarse

$$A=a \text{ y } B=b\,.$$

Esta demostracion adolece del defecto de todas las que son indirectas ó fundadas en el absurdo, que es la falta de luz, por mucha que sea por otra parte su fuerza demostrativa. En ella nunca se verá claramente por qué, dada la igualdad de dos sumas, cada una de ellas con dos sumandos, uno real y otro imaginario, se determina la igualdad de los sumandos real con real é imaginario con imaginario, y esta igualdad es absolutamente indeterminable cuando los sumandos son reales. No parece muy conveniente invocar el absurdo como medio de prueba, cuando ésta ha de recaer sobre cantidades imaginarias declaradas absurdas por la comun opinion de los matemáticos.

Pero aún valiendo, como realmente vale, la anterior demostracion indirecta, recibe una inmensa claridad que todavía hace mayor el convencimiento de la interpretacion geométrica de que son susceptibles aquellas formas algebráicas.

Esta interpretacion consiste en el carácter de suma sincategoremática que tiene la hipotenusa del triángulo rectángulo. Y el teorema algebráico no es más que la traduccion de este otro geométrico: *dos triángulos rectángulos que tienen hipotenusas iguales é igual uno de los ángulos agudos, son enteramente iguales.* (*Fig. 44*).

Con efecto, la igualdad

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{-1}=a+b\sqrt{-1},$$

cuyos dos miembros representan las dos hipotenusas, no solo supone en ellas una igualdad de magnitud, sino tambien de posicion, porque cada uno de ellos no representa la hipotenusa sino bajo esta doble condicion: luego en esa igualdad va comprendida la igualdad del ángulo agudo que cada una de ellas forma con el correspondiente cateto horizontal: de aquella igualdad, pues, puede legítimamente inferirse la igualdad respectiva de todos los ángulos y lados, la entera igualdad de los triángulos, y las igualdades $\mathrm{A}=a$ y $\mathrm{B}=b$.

Fig. 44

Vése al propio tiempo muy clara la razon, porque la igualdad de estas sumas determina la igualdad de los respectivos sumandos. Siendo ellos heterogéneos en cada suma, y no convirtiéndose el aumento del uno en disminucion del otro, como sucede cuando son reales ó imaginarios ambos, no puede haber diferencia cuantitativa en los sumandos reales ó imaginarios que no produzca una diferencia, por lo menos cualitativa, en las sumas. Luego estas no pueden ser iguales sino á condicion de serlo tambien independientemente sus elementos respectivos real é imaginario.

Y aquí se ve tambien una nueva confirmacion de que el imaginarismo es la expresion general de la *indireccion* ó de la heterogeneidad de posicion que tienen las cantidades respecto de una afeccion típica y fundamental que las hace reales ó *directas*.

Otro teorema geométrico relativo á la igualdad de los triángulos rectángulos, se formula diciendo que estos *son iguales cuando tienen iguales las hipotenusas y uno de los catetos*.

Este teorema, esencialmente cuantitativo, en que nada se habla de ángulos, corresponde á este otro algebráico que podria formularse así:

Siendo $\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{a^2+b^2}$ y ademas $A=a$, se tendrá $B=b$,

que es un teorema cuya demostracion se funda en la naturaleza de la suma ordinaria de las cantidades reales, en que siempre es determinable un sumando dada la suma y otro sumando.

Generalizando ahora la interpretacion geométrica á toda especie de triángulos, se comprende bien que designando por θ el módulo ó coeficiente de direccion de una recta (*Fig.* 45), la igualdad

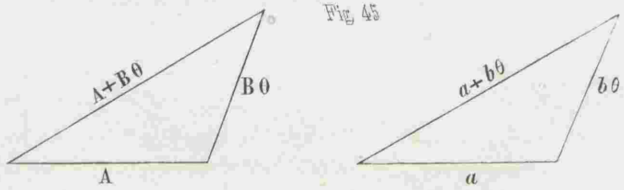
$$A+B\,\theta=a+b\,\theta$$

de la cual se infiere que

$$A=a \text{ y } B=b$$

expresa tambien uno de los casos de igualdad de triángulos en que se suponen iguales respectivamente un lado y dos ángulos, el adyacente y el opuesto á este lado.

Fig. 45



A ejemplo de estas traducciones tan legítimas podrian hallarse otras muchas. Tengo la persuasion de que no hay verdad geométrica fundamental á la que no corresponda de hecho, ó no pueda corresponder en un desarrollo ulterior y sistemático del Álgebra, algun teorema que en ella represente la misma fundamentalidad y transcendencia que la verdad geométrica.

Este ulterior desarrollo y renovacion sistemática debe esperarse de la teoría é interpretacion genuina de las cantidades imaginarias.

ARTÍCULO 5.º

Resúmen de este libro.

Cuando los elementos de una síntesis sumatoria son expresados por líneas rectas, y esta síntesis conduce á una resultante que no es cero, *la línea recta es la expresion geométrica de la suma*, bien sea que los elementos tengan todos una misma direccion externa (suma real), bien tengan diferentes relaciones externas (suma imaginaria).

Cuando los elementos sumados son superficies, una superficie expresa la suma geométrica, real si todos los elementos están en un mismo plano, é imaginaria si están en planos diferentes.

LIBRO TERCERO.

DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS EN EL ALGORITMO DE LA PRODUCCION.

CAPÍTULO I.

MULTIPLICACION BINARIA.

ARTÍCULO 1.°

De la naturaleza de la multiplicacion binaria.

Ante todo conviene someter á exámen las ideas vulgares acerca del *algoritmo productivo*, que no es otra cosa más que la operacion conocida con el nombre de *multiplicacion*.

De esta suele decirse que es: *una suma abreviada de varias cantidades iguales*; y por consiguiente *un caso particular de la suma*. Si no se atiende más que al efecto puramente cuantitativo del producto, el cual es verdaderamente determinable en la práctica aritmética como cantidad por la suma repetida de un mismo sumando, nada tengo que oponer á esta definicion; pero si la multiplicacion ó produccion se considera *algebráicamente* y con entera dependencia de la funcion del entendimiento, que por ella se realiza, sostengo que no es un caso particular de la suma, sino una relacion especial entre dos ó mas números que engendran otro número, un algoritmo propio, esencialmente distinto de la mera aproximacion ó *síntesis* que relaciona los sumandos en la suma. Los factores de un producto no se relacionan por via de síntesis, sino de *antítesis*, y están el uno respecto del otro en una perfecta *reciprocidad*, en virtud de la cual se determina un mismo producto con la repeticion sumatoria de cualquiera de los factores, sirviendo el otro de índice de esta repeticion. Vése desde luego que la repeticion sumatoria no es más que comprobativa del producto en la práctica aritmética, y esencialmente diversa de la relacion primitiva algebráica de los factores.

La reciprocidad es la esencia de la relacion que hay entre los factores, y por ella se realiza este concepto intelectual, verdaderamente mediador entre el de *substancia* y el de *causa*, correspondientes, el primero al algoritmo de la suma, y el segundo al de la graduacion ó elevacion á potencias. Por eso la operacion de multiplicar es verdaderamente mediadora entre la de sumar y la de graduar. La sumacion yuxtapone unidades, la graduacion determina la posicion de un número (potencia) respecto de otro (raiz) por la relacion que este otro tiene con la unidad. La multiplicacion abraza ambos conceptos y los hace recíprocos en los factores, de tal manera que uno de ellos, cualquiera, es sumado consigo mismo segun la relacion que el otro guarda respecto de la unidad. No veo que pueda decirse la multiplicacion caso particular de la suma, sin que bajo otro concepto se la considere tambien como caso particular de la elevacion á potencias.

Esta última asercion se aparta mucho de las ideas recibidas, pero quedará plenamente demostrada por lo que en su lugar dirémos acerca de la naturaleza de las potencias y raíces.

De la idea de reciprocidad nace la verdadera definicion de la multiplicacion de dos cantidades. Esta consiste en hallar una tercera cantidad que sea, respecto de una de ellas, lo que la otra es respecto de la unidad. Bajo cierto punto de vista esto no es más que una graduacion doble y recíproca de un mismo número (el producto) por su relacion con una de las dos bases ó raíces, relacion idéntica á la que la otra tiene con la unidad. La determinacion aritmética de este producto es ciertamente sumatoria, y bajo este concepto únicamente guarda la multiplicacion una afinidad necesaria con el algoritmo de la suma.

La definicion ordinaria que más se aproxima á la verdadera es la que refiere el producto al *multiplicando*, como el *multiplicador* á la unidad. Pero fácilmente se descubre el defecto de esta definicion, observando que los oficios de multiplicando y multiplicador dependen solo de la significacion concreta que tienen los dos factores en la cuestion particular que se resuelve. El algoritmo algebráico prescinde de estas determinaciones empíricas, y hace indiferente la funcion de los factores, y por lo tanto recíproca y mútua su accion multiplicativa. La definicion ordinaria no tiene la generalidad que pide el carácter conceptual de una funcion relativa entre términos abstractos.

La posicion recíproca de los factores debia excusarnos la demostracion de esa otra propiedad de que: *el órden de su multiplicacion no altera el producto;* y no comprendo cómo haya matemáticos que se propongan sériamente esta demostracion para todos los casos: tanto valdria querer demostrar que todos los rádios del círculo son iguales, cuando esta propiedad está esencialmente comprendida en la definicion del círculo. Este prurito de demostrar lo indemostrable, de que tanto abundan los ejemplos en las ciencias exactas, está alimentado en gran parte por la inexactitud y poca generalidad de las definiciones.

¿Por qué no se habrán propuesto los matemáticos demostrar que el órden de los sumandos no altera la suma? Porque la definicion de los sumandos tiene la suficiente generalidad y abraza esta propiedad como consecuencia necesaria.

La reciprocidad perfecta de los factores consiste en cierta *contraposicion*, en virtud de la cual uno de ellos (cuando son dos) es como imaginario respecto del otro que permanece real. Hay, con efecto, cierto imaginarismo paliado en la relacion que tienen dos factores en el producto. Este imaginarismo implícito y oculto está representado por el signo mismo de la multiplicacion ó por la yuxtaposicion gráfica de los factores, que es el signo comun de la contraposicion factorial. Ni se haria explícito y patente, sino cuando intentásemos representar de una manera aislada é independiente el oficio de factor que una cantidad ejerce respecto de otra: así pues $b\sqrt{-1}$ indicaria que b es factor, como $+b$ que es sumando, $-b$ que es substraendo, &c.

En este caso especial los signos $+$, $-$ y $\sqrt{-1}$, son signos de relacion y no de cualidad. Ya sabemos que la extremada sencillez (tanta que más es pobreza) del lenguaje algebráico atribuye á estos signos ese doble oficio, de donde proviene no poca obscuridad cuando el cálculo ha de interpretarse con arreglo á ciertos principios superiores.

ARTÍCULO 2.°

De la contraposicion en los números y magnitudes.

En los números no es tan perceptible la contraposicion factorial como cuando se trata de magnitudes geométricas. Sin embargo, los números se contraponen á los números, porque se concibe que los tiempos se contrapongan á los tiempos. Cuando, por ejemplo, vamos numerando las varias compañías de un batallon que desfila en columna, ponemos en cada acto de síntesis sumatoria el número igual de soldados que tiene cada compañía; la síntesis actual se verifica en el número de compañías, y á esta síntesis va como contrapuesta, y como colocada en otra direccion, la síntesis ya verificada de los varios soldados ó unidades que lleva cada una de ellas. En las unidades de tiempo, que empleamos en numerar las compañías, entran como extrañas y como no influyentes las unidades ó individuos que pueden contarse en cada una: en nada se prolonga, con efecto, la duracion de los momentos de esta síntesis actual por el más ó ménos de la síntesis ya consumada de las varias unidades individuales, las cuales entran todas como si fueran una sola en cada momento de la síntesis principal: cada guia es como un punto en que se proyecta la compañía entera. De igual modo en una narracion histórica, que tiene un valor actual, están como contrapuestas á la direccion de los momentos que van siendo presentes, las duraciones de los acontecimientos pasados: años y siglos enteros entran como momentos brevísimos en la narracion actual, como que una sola palabra los compendia y los condensa en cada uno de los puntos del tiempo que va corriendo mientras se habla. Cada punto es como proyeccion de la línea histórica contrapuesta.

Pero, donde se presenta clarísima esta contraposicion de los factores, es en la multiplicacion de magnitudes geométricas. El eschêma geométrico de la perfecta contraposicion de dos factores lineales se encuentra realizado en la perpendicularidad de uno de ellos respecto del otro; de tal manera, que siendo ambos reales en su posicion tética ó primitiva y con direccion idéntica ó contraria (segun sus signos + ó —), venga cualquiera de ellos á contraponerse al otro, haciéndose perpendicular á él en el punto de su comun orígen. Esta nueva posicion antitética determina geométricamente el producto en el plano tético ó de posicion primitiva.

Claro es que este producto ha de ser una superficie, no ya una línea, si hemos de distinguir el algoritmo sumatorio del productivo; multiplicar una línea por otra, si ambas han de conservar su naturaleza concreta de líneas, no es sumarla consigo misma *segun su longitud* cuantas veces indique la otra, porque esta otra no puede hacer la indicacion de un modo algorítmico ó finito con sus unidades lineales absolutas, que no son determinadas numéricamente como líneas, ni con sus puntos, que son infinitos. Lo que sí se concibe es, que una se yuxtapone á la otra, *segun su latitud*, que es infinitamente pequeña, por el indicio de los infinitos puntos de la otra; compensándose así la infinita pequeñez del elemento adicionado (la latitud) con el infinito número de estos elementos. Y bien se ve que, levantando una de ellas como perpendicular en cada uno de los infinitos puntos de la otra, quedaria determinada una superficie rectangular. Esta superficie será un *cuadrado* en el caso accidentalísimo de igualdad cuantitativa de los dos factores.

Esta generacion infinitesimal de la superficie expresa tambien la reciprocidad esencial de la multiplicacion.

El producto de dos líneas consiste, pues, en la limitacion que se imponen recíprocamente al determinar la superficie en el plano indefinido. Esta limitacion recíproca no puede obtenerse mas que reproduciéndose cada una de ellas paralela á sí misma á una distancia señalada por la otra.

Así la línea AD, de la figura 46, reproduciéndose en BC, limita, segun AB, la indefinida extension del plano en sentido horizontal, y AB, reproduciéndose en DC, limita segun AD la extension del plano vertical: y como estas dos limitaciones correspondientes á las dos dimensiones esenciales del plano constituyen la limitacion ó determinacion total de este, ellas son realmente las que *producen* la superficie finita; y como estas dos limitaciones están por necesidad en contrarias direcciones, ellas no son posibles sino por la contraposicion de los factores que las expresan.

Fig. 46

ARTÍCULO 3.º

Preliminares para demostrar la regla de los signos por la contraposicion.

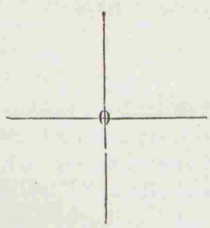
La llamada *regla de los signos* es tan obscura é incomprensible en la demostracion que de ella intentan dar los libros elementales, que ha merecido en boca de los mas eminentes críticos el título poco lisonjero de *Opprobrium mathematicum*; y, sin embargo, esta regla forma una parte integrante de la teoría de la contraposicion factorial, y solo en ella alcanza una demostracion verdadera. Es más: la regla ordinaria, que está hecha para el solo caso de cantidades reales ó directas, es ampliada á la consideracion de las cantidades indirectas ó imaginarias multiplicadas entre sí ó por las directas. La teoría que voy desenvolviendo comprende la regla con toda su plenitud en el eschêma geométrico de la contraposicion factorial.

Téngase presente que la afeccion positiva y negativa de los números y de la extension, está referida á un punto de orígen, que es el cero para los números, y el punto matemático (verdadero cero de extension) para las líneas (*Fig.* 47).

Fig. 47

Asimismo los productos binarios, sean numéricos ó extensivos, han de estar referidos á dos bases ó ejes; para la extension, estos ejes son dos rectas ortogonales que determinan en sus cuatro ángulos rectos la afeccion positiva ó negativa de los productos, como se ve en esta figura:

Fig. 48



De igual manera, la afeccion ó cualidad de un producto ternario estará referida geométricamente á tres planos ortogonales, que en sus ocho ángulos triédricos abrazan como positivas ó negativas todas las determinaciones sólidas del espacio (*Fig.* 49).

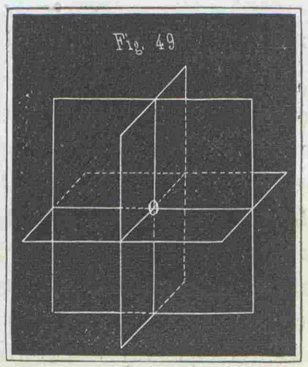


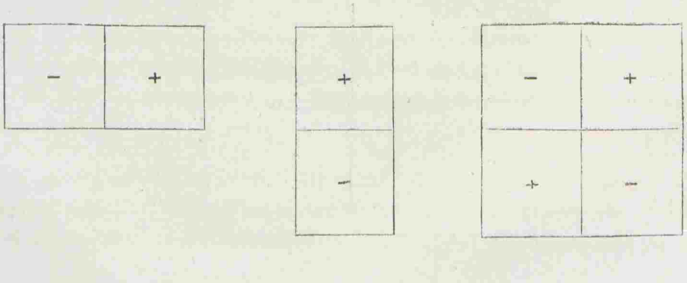
Fig. 49

ARTÍCULO 4.º

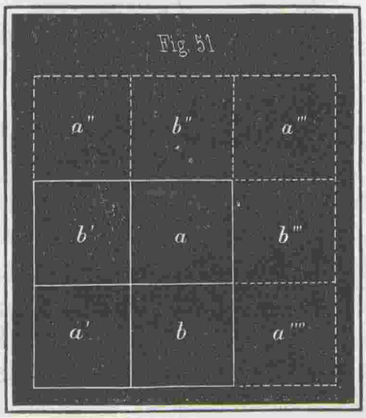
Regla de los signos en los productos reales.

Esto supuesto, si basta representar por + A y — A la contraria direccion referida á un punto de orígen de las rectas cuya magnitud cuantitativa es A; cuando se trata de superficies no solo habrá que considerar la superior é inferior como positiva y negativa respectivamente, sino tambien la de la derecha y la de la izquierda entre sí, puesto que en el plano es posible y necesaria esta doble determinacion lineal representante de la doble dimension que lo constituye. Combínanse, pues, estas dos determinaciones básicas en un sistema de dos ejes; lo positivo, por ejemplo, no puede ser solo lo superior respecto de lo inferior, ó lo diestro respecto de lo siniestro, sino lo superior y diestro, por ejemplo, respecto de las determinaciones adyacentes (*Fig.* 50).

Fig. 50



Si son positivos los productos determinados en el ángulo a, por ejemplo, de la figura 51 (hipótesis que es una continuacion de la antes sentada de llamar positiva la recta que está á la derecha de un punto de origen), serán negativos, no solo los situados en el ángulo b, sino los que están en b', y en general todos los rectángulos como b'' y b''' adyacentes á a. Ahora es fácil adivinar qué signos tendrán los colocados en a', a'', a''' y a'''', porque si ellos son negativos respecto de b y b', &c., los cuales á su vez son negativos respecto de a, serán necesariamente positivos y homólogos con a.

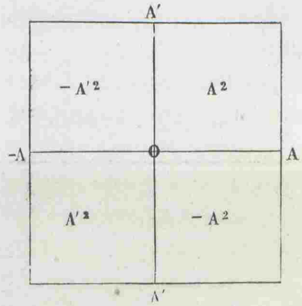


Son, pues, positivos a, a', a'', a''' y a'''', y negativos b, b', b'' y b''': hay homogeneidad y congruencia de afeccion en los rectángulos verticales, y heterogeneidad y contrariedad en los adyacentes (*).

(*) La doctrina que aquí establezco se opone á la sentada por Mr. Vallés, en su *Essai sur la Philosophie du Calcul*, quien sostiene que no pudiendo los rectángulos adyacentes ser homogéneos, ménos lo podrán ser los verticales que tienen una posicion aun más lejana y heterogénea que aquellos. Para afirmar esto, se funda en el falso principio de que *dos superficies de un mismo signo deben superponerse*; como si el que no es más que signo de cualidad hubiera de significar siempre esa superposicion material, que ni aún siquiera es necesaria para representar la adicion superficial ó lineal. La identidad de afeccion cualitativa de dos superficies, que es lo que representa la identidad de signo, está satisfecha con la idéntica relacion de todos los elementos á dos ejes ortogonales, y esto se verifica en los rectángulos verticales. Además, si consideramos la direccion ó cualidad de las cuatro rectas que forman el perímetro del producto rectangular, é intentamos darles un signo con arreglo á su direccion sucesiva, veremos que si DA y AB (*Fig.* 52) son positivas como ejes ortogonales, BC, que es recorrida en sentido inverso que DA, será negativa respecto de ella, y CD, que se recorre en contraria direccion á AB, será tambien la negativa de esta: luego las AE y AG, prolongaciones en sentido inverso de AB y AD, y, por consiguiente, sus respectivas negativas, determinarán tambien una superficie positiva como CD y CB, á las cuales son paralelas. Aquí se ve la exacta

Demos ahora una forma geométrica á la afeccion positiva ó negativa de cualesquiera dos factores, y veremos la conformidad de esta teoria con los resultados de la contraposicion en la siguiente figura

Fig. 53



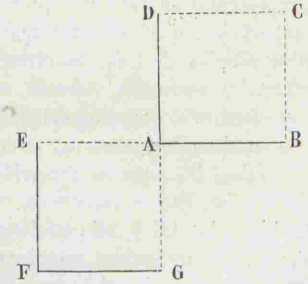
donde dos factores positivos (que supongo iguales) $A \times A$ estarán representados en su tésis, ó posicion primitiva factorial por OA, coincidente consigo mismo ó superpuesto á sí mismo: mas en su antítesis ó contraposicion productiva es menester que uno de ellos tome una posicion normal OA', en la cual se contraponga al otro factor que conserva su posicion primera ó tética: el producto se representará entónces por la superficie A^2, que supongo positiva. Esto quiere decir la regla ordinaria de que cantidad positiva multiplicada por positiva da un producto positivo, ó diciéndolo mas breve pero menos propiamente:

$$+ \times + = +$$

congruencia entre los rectángulos verticales: el ABCD no tiene ningun otro que le sea más análogo, mas simétrico que su vertical el AGFE, que no es más que su reproduccion.

En virtud de esta congruencia y homogeneidad, la compenetracion ó superposicion sucesiva de dos rectángulos iguales en direccion de su diagonal comun, siempre reproduce un rectángulo semejante, lo cual no sucede en la compenetracion lateral de los rectángulos adyacentes.

Fig. 52



Aquí advierto que esta suposicion es enteramente arbitraria, como sin duda lo es la de llamar positivas las rectas que se cuentan á la derecha de un punto de orígen, de cuya suposicion se infiere inmediatamente que serán negativas las que se encuentran en sentido contrario ó á la izquierda. La demostracion de la regla de los signos del producto no consiste más que en deducirla legítimamente de aquella suposicion, como en seguida lo vemos realizado por la contraposicion angular de los factores.

Dos factores, uno positivo y otro negativo, se representarán por OA y —AO yuxtapuestos en direccion contraria segun su primitiva determinacion tética: mas para que haya antítesis, es necesario que uno de ellos se contraponga al otro que permanece inmóvil. Si el positivo OA toma la posicion OA', determina con el negativo la superficie negativa $-A'^2$, esto es:

$$+\times-=-$$

Si el negativo —AO toma la posicion —A'O, determina con el positivo la superficie negativa $-A^2$, ó lo que es lo mismo,

$$-\times+=-$$

Ultimamente: dos factores negativos están representados por —AO superpuesto á sí mismo: la contraposicion productiva hará tomar á uno de ellos la posicion —A'O y determinará con el otro la superficie positiva A'^2, esto es:

$$-\times-=+$$

ARTÍCULO 5.°

Regla de los signos en los cocientes.

En los cuatro casos del artículo anterior la contraposicion se ha verificado por la mocion de uno de los factores, partiendo siempre de su posicion tética y marchando en sentido progresivo respecto de la tésis primera de OA, como positivo. Una mocion regresiva ó en sentido inverso expresaria una division, no una multiplicacion.

Así, dada la superficie positiva A^2, de la misma figura 53, como dividendo, y su base lineal positiva OA como divisor, el movimiento retrógrado de OA' hasta deshacer la contraposicion productiva, nos colocaria en la base primitiva OA como cociente de la division, esto es:

$$\frac{+}{+}=+$$

Dado el producto negativo $-A'^2$, y la base inmóvil negativa $-AO$, el movimiento retrógrado de OA' nos llevaria al cociente positivo OA, esto es:

$$\frac{-}{-}=+$$

Si la base inmóvil dada fuese la positiva, considerariamos como dividendo la superficie negativa $-A^2$, que por el movimiento retrógrado de la base $-A'O$ nos daria el cociente negativo $-AO$; esto es:

$$\frac{-}{+}=-$$

Finalmente, dada la superficie positiva A'^2 y una base negativa, la otra base, retrogradando, nos daria la misma posicion negativa, esto es:

$$\frac{+}{-}=-$$

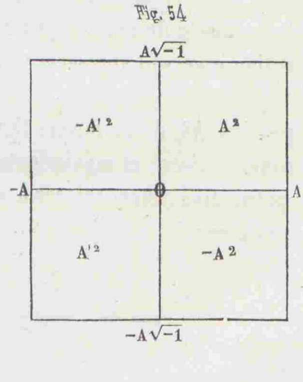
La regla ordinaria de que: *signos idénticos dan más y diversos dan menos*, así en la multiplicacion como en la division, está esencialmente contenida en la teoría de la contraposicion. No hay á mi ver otra manera de demostrar esta regla tan fundamental, cuando se trata de cantidades monómias.

ARTÍCULO 6.°

Regla de los signos en las cantidades imaginarias.

Ampliemos ahora la teoría de la contraposicion á las cantidades imaginarias que pueden ser tambien factores de un producto binario. Estas se representan por perpendiculares ó normales á las directas positivas ó negativas, y son tambien ó ambas positivas, ó una positiva y otra negativa ó ambas negativas, siempre con relacion al punto de orígen O. (*Fig.* 54).

Fig. 54



Dos factores imaginarios positivos estarán representados por la perpendicular $OA\sqrt{-1}$, y la contraposicion de uno de ellos, cayendo en la direccion — AO, determinará el producto negativo — A'^2: es decir

$$A\sqrt{-1} \times A\sqrt{-1} = -A'^2$$

Dos factores imaginarios, positivo uno y negativo otro, se representarán por $OA\sqrt{-1}$ y $-AO\sqrt{-1}$: la contraposicion del positivo conduce al producto positivo A'^2, esto es:

$$A\sqrt{-1} \times -A\sqrt{-1} = A'^2,$$

y la contraposicion del negativo determina el producto positivo A^2, esto es:

$$-A\sqrt{-1} \times A\sqrt{-1} = A^2.$$

En fin, dos factores imaginarios, ambos negativos, se superpondrán en la direccion $-A\sqrt{-1}$: la contraposicion de cualquiera de ellos dará el producto negativo — A^2, así:

$$-A\sqrt{-1} \times -A\sqrt{-1} = -A^2,$$

Luego: *en las cantidades imaginarias ó indirectas la regla de los signos es inversa de la observada en las reales ó directas*, esto es:

$$+ \times + = -$$
$$+ \times - = +$$
$$- \times + = +$$
$$- \times - = -$$

Una inversion análoga habria que suponer en la determinacion de los cocientes por el movimiento retrógrado de uno de los factores.

$$\frac{+}{+} = -$$

$$\frac{+}{-} = +$$

$$\frac{-}{+} = +$$

$$\frac{-}{-} = -$$

donde conviene advertir que el dividendo es real, y que el divisor y el cociente son imaginarios.

Y como el efecto cuantitativo de esta contraposicion de factores imaginarios es absolutamente idéntico al determinado por factores reales, *el producto binario de imaginarias es real*, directo y absolutamente comprendido en el mismo plano que los productos reales.

Y de paso, hé aquí aclarado el misterio de la multiplicacion de raíces imaginarias en número par: estas dan un producto real, porque son cantidades verdaderas sin mas diferencia respecto de la reales que su diversa cualidad, afeccion ó direccion. El imaginarismo es esencialmente cualitativo: la perpendicularidad que él expresa es neutralizada, y convertida en direccion positiva ó negativa, por el imaginarismo paliado en la multiplicacion, el cual se hace efectivo por la contraposicion que le es esencial.

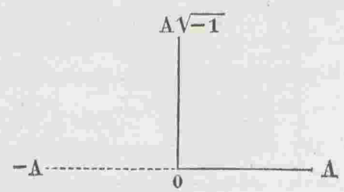
ARTÍCULO 7.°

Regla de los signos en el producto de cantidades reales é imaginarias. Planos imaginarios.

Vengamos en último término á la combinacion binaria de factores reales con imaginarios, y en ella resaltará mas todavía la universalidad y transcendencia de la teoría de la contraposicion.

La multiplicacion de un factor real por uno imaginario (cualquiera que sea por otra parte el signo positivo ó negativo que pueda afectarles) envuelve una contraposicion tética ó primitiva, que es puramente factorial; porque los factores, como tales, son recíprocamente perpendiculares en el nuevo hecho de suponer á uno imaginario respecto del otro real. Ahora bien: si la nueva contraposicion productiva ó necesaria para determinar el producto, se verificase en el factor indirecto $OA\sqrt{-1}$, dicho factor tomaria (*Fig.* 55) la posicion $-AO$, que, por ser opuesta á OA,

Fig. 55



no puede determinar producto superficial, donde no hay ya más que una sola dimension: si la contraposicion se realizase por la traslacion del factor real OA sobre $OA\sqrt{-1}$, habria superposicion absoluta de ambos factores y absoluta imposibilidad de producto con una sola dimension. No es, pues, posible que el producto de real por imaginaria se determine en el mismo plano de la posicion tética de los factores: *es imposible que este producto sea real.*

Es, pues, necesario que uno de ellos (cualquiera) de tal manera se contraponga á sí mismo, que resulte contrapuesto al otro; y esta necesidad no puede quedar satisfecha sino levantando á un factor á una posicion normal al plano que determina con el otro: entonces es normal con su posicion primitiva y con la del que ha permanecido inmóvil. El producto, pues, es un plano imaginario indirecto y normal con el plano de los factores y en las figuras que siguen estará representado por el $A^2\sqrt{-1}$ ó el $A'^2\sqrt{-1}$.

Fig. 56

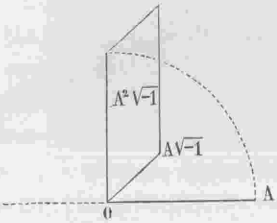
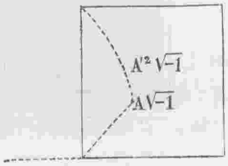


Fig. 57



Hay, pues, planos imaginarios, como hay rectas imaginarias; pero el imaginarismo de los planos, que no es al cabo más que su direccion perpendicular, pende del imaginarismo de una de las rectas que entra en ellos como factor.

Si los planos son capaces de direccion, reciben esta capacidad de las rectas que los determinan como factores: *la recta es esencialmente directiva.*

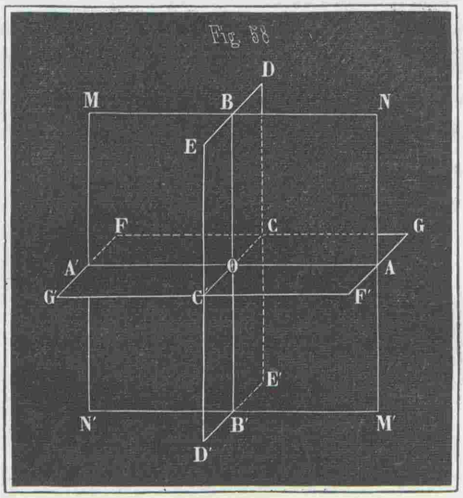
Los planos son positivos ó negativos respecto de las rectas que los separan, como las rectas lo son respecto del punto que las divide.

Los planos son imaginarios y perpendiculares respecto de los positivos ó negativos, teniendo por proyeccion la recta que divide ambos planos reales; así como las rectas imaginarias son perpendiculares á las reales en el punto de su comun orígen.

En la forma $a^2\sqrt{-1}$ ó $ab\sqrt{-1}$, que expresa un cuadrado ó un rectángulo imaginario, el signo $\sqrt{-1}$ procede del imaginarismo de uno de los factores siendo real el otro factor.

Considerando ahora la afeccion positiva ó negativa de esta clase de factores, determinarémos el signo de todos los productos suponiendo que la contraposicion se verifica por el ascenso (podria tambien suponerse por el descenso) de uno de los factores hácia la region superior ó inferior al plano de su posicion primitiva ó tética.

Cada combinacion de dos factores, uno real y otro imaginario, da dos productos imaginarios. Esto supuesto y refiriéndonos á la figura siguiente, tendremos



Caso primero.—*Multiplicacion de real positiva por imaginaria positiva.*

$$+a \times +a\sqrt{-1} = +a^2\sqrt{-1}\ .$$

Sean OA el factor real y OC el imaginario, ambos positivos: el movimiento ascendente de OA hasta tomar la posicion normal OB, determinará con la imaginaria OC el plano imaginario OD, y el ascenso de la imaginaria OC hasta OB determinará con la real OA el plano imaginario ON. Esta doble determinacion nos conduce á dos productos alternativos iguales imaginarios respecto del plano real ó tético OG, y además positivos, porque vamos en el supuesto de que el movimiento ascendente engendra planos positivos.

Esta suposicion es arbitraria, pero indispensable, para fijar segun ella la afeccion positiva ó negativa de todos los planos imaginarios; así como fue necesario suponer que lo positivo real se contaba á la derecha de un punto de orígen, y que las superficies reales eran positivas en el ángulo superior y diestro formado por los ejes ortogonales.

Caso segundo.—*Multiplicacion de real negativa por imaginaria positiva.*

$$-a\times+a\sqrt{-1}=-a^2\sqrt{-1}.$$

Sean OA' la real negativa y OC la imaginaria positiva; el ascenso de OC hasta OB determina con OA' el plano perpendicular OM, el cual será negativo como adyacente al determinado por OA y OB, que es positivo; el descenso de OA' á OB' determina con la OC el plano OE', que tambien será negativo como adyacente al que forman las OC y OB, el cual es positivo. Este ascenso y este descenso dan dos planos imaginarios respecto del negativo tético OF, y negativos respecto de los positivos imaginarios del caso anterior.

Caso tercero.—*Multiplicacion de real negativa por imaginaria negativa.*

$$-a\times-a\sqrt{-1}=+a^2\sqrt{-1}.$$

Sean OA' el factor real y OC' el imaginario, ambos negativos; el movimiento descendente de OA' hasta OB' determinará con la OC' el plano imaginario OD', que será positivo como adyacente al negativo formado por OC' y OB del caso anterior: el descenso de OC' hasta OB' determinará con OA' el plano imaginario ON', que tambien será positivo como adyacente al negativo formado por OA' y OB del caso anterior. Este doble descenso de los factores, correspondiente al doble ascenso del caso primero, da dos planos imaginarios respecto del real positivo OG', y positivos respecto de los negativos imaginarios del caso anterior.

Caso cuarto.—*Multiplicacion de real positiva por imaginaria negativa.*

$$+a\times-a\sqrt{-1}=-a^2\sqrt{-1}.$$

Sean AO la real positiva y OC' la imaginaria negativa; el descenso de OC' hasta OB' determina con OA el plano perpendicular OM', el cual será negativo como adyacente al positivo formado por OB' y OA' del caso anterior: el ascenso de OA á OB formará con OC' el plano perpendicular OE, el cual será negativo como adyacente al formado por OC' y OB' del caso anterior. El doble descenso y ascenso nos dará dos planos imaginarios respecto del real negativo OF', y negativos respecto de sus adyacentes, que son positivos.

Haciendo ahora la sinopsis intuitiva de estos cuatro casos en el sistema perfecto ortogonal, observarémos:

Primero. Que dada la hipótesis de que el movimiento ascendente de los factores positivos en el caso primero, determina planos imaginarios positivos, ninguna de las determinaciones posteriores es posible, si se convierte el ascenso en descenso y viceversa, sopena de incidir en planos ya determinados.

Segundo. Que el sistema completo abraza ocho ángulos triédricos, en cada uno de los cuales dos planos imaginarios se refieren á un plano real. Estos dos planos, que siempre son cuantitativa y cualitativamente iguales, no son simultáneos sino alternativos en el sentido de que *cualquiera de ellos representa el producto único de real por imaginaria.* En los dos ángulos END y G'N'D' todos los planos son positivos; en todos los demás se combinan dos planos negativos con uno positivo.

Tercero. Que el movimiento inverso ó regresivo, respecto del que hemos visto producir planos imaginarios, conduce á deshacer la contraposicion, y por consiguiente á *dividir* el producto por uno de los factores, y determinar un cociente que será real, cuando el factor inmóvil que hace de divisor sea imaginario, é imaginario cuando el divisor sea real; donde se ve la verdadera razon de la realidad ó imaginarismo de los cocientes segun la naturaleza del dividendo y divisor. Así, combinando estos resultados con los debidos á la multiplicacion, podemos presentar dos cuadros análogos á los que se fundan en la cualidad positiva y negativa de los datos en la multiplicacion y division. Hélos aquí. R indica real, é I imaginaria.

$$R \times R = R \qquad \frac{R}{R} = R$$

$$R \times I = I \qquad \frac{R}{I} = I$$

$$I \times R = I \qquad \frac{I}{R} = I$$

$$I \times I = R \quad (^*) \qquad \frac{I}{I} = R$$

(*) Apenas se concibe cómo Wolf, heredero del espíritu y comentador de los trabajos de Leibnitz, tuviese de las imaginarias la imperfectísima idea que se desprende de la corta explicacion que da del algoritmo de ellas. Estas son sus palabras:

Radices imaginariæ dicuntur, si quantitas sub signo radicali fuerit negativa, veluti $\sqrt{-2}$, cum quadratum -2 sit quantitas impossibilis, propterea quod omne quadratum sit positivum. Facilè autem patet additionem et substractionem radicum imaginariarum eodem modo fieri debere ac realium. Ita

$$\sqrt{-18} + \sqrt{-8} = 3\sqrt{-2} + 2\sqrt{-2} = 5\sqrt{-2} = \sqrt{-50}$$

et

$$\sqrt{-18} - \sqrt{-8} = \sqrt{-2}.$$

Quoniam vero quantitas privativa sub signo radicali consideratur instar positivæ, in multiplicatione signum non mutatur, sed facto perinde ac factoribus præfigitur signum —: *aliàs enim factores imaginarii efficerent factum reale, quod utique absurdum.* Quamobrem

ARTICULO 8.°

Productos implícitos.

He dicho, en el artículo anterior, que el producto de real por imaginaria no puede tener una representacion superficial ó *explícita* en el mismo plano que los factores; pero esto no obsta para que consideremos tambien como legítimo el producto *implícito*, que se presenta realizado en la disposicion lineal (prolongacion ó coincidencia) á que conduce la contraposicion efectuada en el mismo plano tético. La contraposicion, cualquiera que sea la posicion primitiva de los factores, y partiendo de ella, aparece como la ley fundamental de la produccion, ó la condicion algorítmica de la generacion numérica ó extensiva bajo el concepto de reciprocidad. El producto implícito ó lineal es producto verdadero, como sometido á la condicion de no suponer más que un eje lineal (horizontal ó vertical) para su expresion, como no se supone para su generacion más que un plano tético en que han de realizar su contraposicion los factores.

Cuando tal condicion se impone á la representacion de un elemento geométrico, y se exige que esta se realice en la region ó categoría inferior á la que le corresponde por su propia naturaleza factorial, como la recta en el punto, el plano en la recta y el sólido en el plano, es menester que el elemento representado pierda todo el contenido extensivo que constituye su *intervalo* y se reduzca á sus *límites* propios, la recta al punto, el plano á la recta, y el sólido al plano. Bajo esta condicion se concibe posible una representacion proyectiva, en la que va envuelta necesariamente la perpendicularidad del elemento representado respecto de aquel que se constituye como representante y en el cual se recibe la proyeccion.

Esta es la condicion general de toda representacion implícita ó hecha en region inferior, y esta ley, aplicada al caso que ahora nos ocupa, demuestra la legítima

regula de signis tantum modo observatur respectu radicum, minime vero respectu quantitatum sub signo radicali positarum.

$$\begin{array}{r} \sqrt{-3}+\sqrt{-2} \\ +\sqrt{-3} \\ \hline -3+\sqrt{-6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{-5}-\sqrt{-7} \\ \sqrt{-3} \\ \hline \sqrt{-15}-\sqrt{-21} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \sqrt{-8}+\sqrt{-2} \\ \sqrt{-8}-\sqrt{-2} \\ \hline -8-4+4+2=-6 \end{array}$$

Nimirum $\sqrt{-2}\times\sqrt{-2}=-2$, et $+1\times-1=-1$. Ergo $-1\times-2=+2$.

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{-5}+2\sqrt{-3} \\ 3\sqrt{-5}-2\sqrt{-2} \\ \hline -45-6\sqrt{-10}+6\sqrt{-15}-4\sqrt{-6} \end{array}$$

Crist. Wolfii. elementa analiseos.

significacion del simbolo $\sqrt{-1}$ en los productos binarios de la forma $a^2\sqrt{-1}$ ó $ab\sqrt{-1}$ que hemos traducido por planos perpendiculares al plano tético. La disposicion lineal de los factores, en prolongacion ó coincidencia, es, pues, representacion implícita abreviada y proyectiva de planos que se elevan perpendicularmente al plano tético. La forma $a^2\sqrt{-1}$ expresa una relacion productiva, así lineal como superficial, lineal en el plano que se dan los dos factores, uno real y otro imaginario, superficial en el espacio sin cuya intuicion es imposible la perpendicularidad de los planos.

Asimismo en el órden categórico de la línea, $a\sqrt{-1}$ representa la yuxtaposicion inmediata é indistinta, ó la superposicion de los dos puntos extremos de la recta a; ó bien la recta a explícitamente perpendicular á otra recta que se supone real ó eje horizontal.

De igual manera, la forma $a^3\sqrt{-1}$, ó $abc\sqrt{-1}$, expresaria prolongaciones ó superposiciones de superficies; ó bien sólidos explícitamente perpendiculares á otros sólidos, si esto fuese posible. Muy pronto demostraré que esta última representacion es contraria á la naturaleza de la intuicion de espacio, que no permite más que tres dimensiones.

En suma: el símbolo $\sqrt{-1}$ indica, no solo la perpendicularidad explícita del elemento geométrico á que afecta como argumento, sino, lo que es consecuencia inmediata de esta perpendicularidad, una proyeccion tal de este elemento que lo hace descender á la categoría geométrica inferior.

Siempre que la contraposicion productiva es de un factor respecto de su propia posicion y de la del otro factor, el producto es explícito; pero cuando se emplee solo la primera condicion (como en el caso á que nos referimos) el producto es implícito.

ARTICULO 9.°

De la multiplicacion de dos factores binómios. Binómios reales.

Cuando ambos factores de la multiplicacion binaria son binómios, la contraposicion de ellos como totalidades envuelve contraposiciones ó productos parciales de cada uno de los elementos de un binómio por cada uno de los del otro. El producto total se determina en unos casos por la adicion de todos los productos de las contraposiciones parciales, en otros hay substracciones que hacen desaparecer algunos productos parciales, y hasta es posible el caso de que algunos elementos del producto no puedan tener representacion explícita en la misma region cualitativa ó en el mismo plano que los factores.

Este último caso, que es el más interesante de todos, es el de productos imaginarios que tienen la forma $a^2+b^2\sqrt{-1}$, los cuales no pueden representarse sino en el espacio, porque cuando son referidos al plano en que se hace la contraposicion, el elemento imaginario $b^2\sqrt{-1}$ expresa superposiciones ó prolongaciones de líneas proyectadas sobre el plano tético.

La Aritmética universal y la Geometría coinciden maravillosamente en sus interpretaciones con la teoría de la antítesis en la multiplicacion. Algun tanto me detendré en el exámen de estos casos varios, entre los que se encuentran algunos bien singulares en medio de otros que son muy conocidos.

Empecemos por los que se refieren á los binómios reales.

1.° $(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$

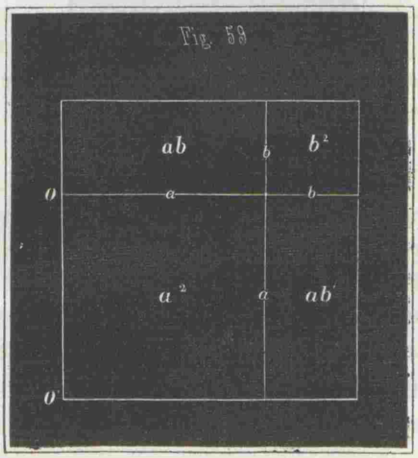


Fig. 59

a^2.. contraposicion de la parte mayor de un binómio con la mayor del otro ó sea $a\times a$. Supónese $a>b$ refiriéndonos á la figura 59.

$2ab=\begin{cases} ab \text{ .. contraposicion de la parte menor con la mayor, es decir: } a\times b \\ ab' \text{ .. contraposicion de la parte mayor con la menor, » } b\times a \end{cases}$

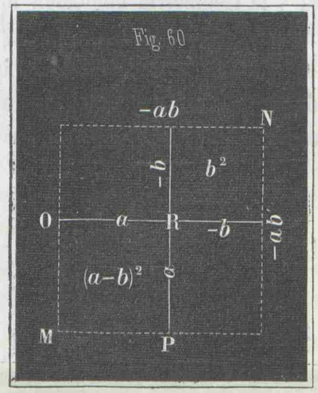
b^2.. contraposicion de la parte menor con la menor, » $b\times b$.

El punto de orígen de los factores está en O, y la contraposicion se verifica sobre el nêxus de a con b punto comun á los cuatro elementos. El punto de orígen para los productos parciales está en O': todos son positivos.

Las cuatro contraposiciones parciales se han realizado en el mismo plano de la antítesis total, y componen por su adicion un producto real.

La suma de los tres planos $ab+ab'+b^2$ se llama *gnomon*: los dos planos ab y ab' se llaman *complementarios*. Adoptaré esta antigua nomenclatura para hacer más sencilla la exposicion de la teoría.

$$2.^{\circ} \quad (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$



$a^2 =$ MN, contraposicion de a de un factor (*Fig.* 60) con a de otro factor: plano positivo.

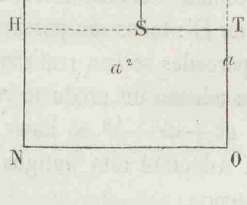
b^2 . . . . . contraposicion de $-b$ del uno con $-b$ del otro: plano positivo superpuesto al anterior.

$$-2ab = \begin{cases} -ab = \text{ON, contraposicion de } -b \text{ con } a\text{: plano negativo y substractivo.} \\ -ab' = \text{NP, contraposicion de } a \text{ con } -b\text{: plano negativo y substractivo.} \end{cases}$$

El cuadrado MR es el resíduo de las dos substracciones: el cuadrado b^2 es restado dos veces, y esto es posible porque está como duplicado por la superposicion: todas las contraposiciones parciales han sido posibles en el mismo plano tético é integran un producto real.

$$3.^{\circ} \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Fig 61



$$a^2 = \mathrm{MN},\ \text{contraposicion de } a \text{ con } a\text{: plano positivo ó tético } (Fig.\ 61).$$

$$0 = \begin{cases} +ab = \mathrm{MP}, & \text{contraposicion de } b \text{ con } a\text{: plano positivo y aditivo.} \\ -ab = \mathrm{MH}, & \text{contraposicion de } -b \text{ con } a\text{: plano negativo y substractivo que neutraliza al anterior restableciéndose el tético } a^2 = \mathrm{MN}. \end{cases}$$

$$-b^2 = \mathrm{RF},\ \text{contraposicion de } -b \text{ con } b\text{: plano negativo y substractivo del tético. RF es igual á RT.}$$

La superficie $a^2 - b^2$ está representada por el plano QRSTONH, en que ya aparece la irregularidad de la deficiencia del cuadrado gnomómico b^2 correspondiente al signo negativo de $-b^2$, y la compensacion destructiva de los complementos ab y $-ab$. El producto total es real.

La relacion expresada en este producto es un hecho matemático de alta transcendencia.

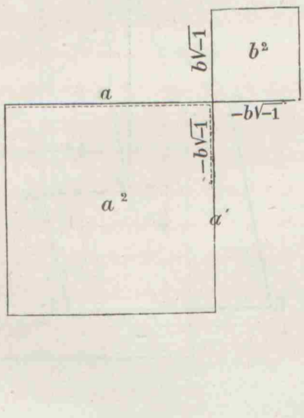
ARTÍCULO 10.

Binómios imaginarios.

Consideremos ahora productos de binómios imaginarios en los cuales veremos combinarse la contraposicion productiva con la normalidad propia del imaginarismo. En ellos tambien resplandece la universalidad de la teoría.

$$1.^\circ\ (a + b\sqrt{-1})\ (a - b\sqrt{-1}) = a^2 + b^2$$

Fig. 62



a^2. . . . contraposicion de a de un factor con a de otro: plano positivo tético (*Fig.* 62).

$ab\sqrt{-1}-ab\sqrt{-1}=0$ $\begin{cases} +ab\sqrt{-1}, & \text{contraposicion de } a \text{ con } b\sqrt{-1}\text{: es prolongacion de ambos elementos y no determina producto en el plano tético.} \\ -ab\sqrt{-1}, & \text{contraposicion de } a \text{ con } -b\sqrt{-1}\text{, que es coincidencia de ambos elementos en el plano tético.} \end{cases}$

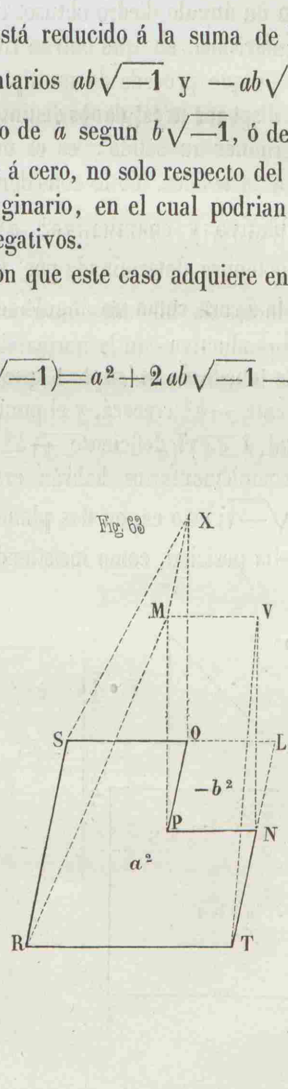
$+b^2$. . . . . contraposicion de $-b\sqrt{-1}$ con $+b\sqrt{-1}$: plano real y positivo gnomónico ó vertical con a^2.

El producto total real está reducido á la suma de los dos cuadrados a^2+b^2. Los rectángulos complementarios $ab\sqrt{-1}$ y $-ab\sqrt{-1}$ resultan imaginarios y trazados por cima y por bajo de a segun $b\sqrt{-1}$, ó de b segun $a\sqrt{-1}$, y por lo tanto neutralizados é iguales á cero, no solo respecto del plano real ó tético, sino tambien respecto del plano imaginario, en el cual podrian tener una representacion si fueran ambos positivos ó negativos.

Ya vimos la significacion que este caso adquiere en la teoría del módulo.

2.º $(a+b\sqrt{-1})\,(a+b\sqrt{-1})=a^2+2ab\sqrt{-1}-b^2=(a^2-b^2)+2ab\sqrt{-1}$

Fig. 63



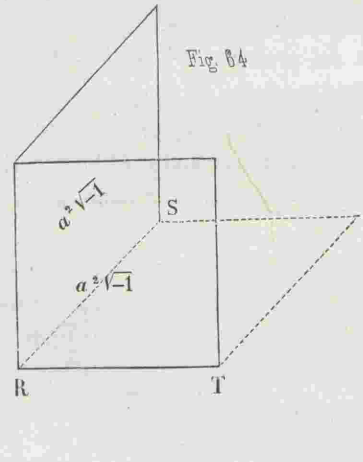
a^2.......... contraposicion de a consigo misma: plano real y tético igual á RL en la figura 63.

$-b^2=$PL..... contraposicion de $b\sqrt{-1}$ consigo misma: plano real negativo y substractivo del anterior.

$$2ab\sqrt{-1}=\begin{cases} ab\sqrt{-1}=\text{MN, contraposicion de } a \text{ con } b\sqrt{-1}\text{: plano antitético ó imaginario.} \\ ab\sqrt{-1}=\text{MO, contraposicion de } b\sqrt{-1} \text{ con } a\text{: plano antitético ó imaginario.} \end{cases}$$

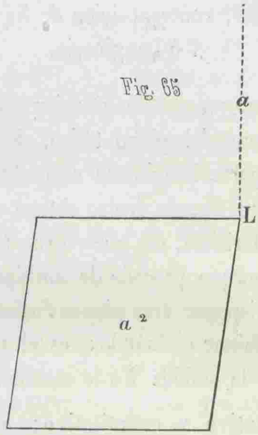
Ambos planos complementarios son imaginarios y positivos, y no neutralizándose ni en sí mismos ni respecto del plano tético, determinan con él un producto total, en parte real y en parte imaginario representado por los dos trapecios RMVT y RMXS que forman un ángulo diedro obtuso, cuya arista es RM. Esta determinacion geométrica singularísima, en que entran tres planos, no envuelve, sin embargo, la idea de solidez, porque procede de multiplicacion binaria, y es ciertamente la misma manera de disponer tres planos distintos, dando una arista comun á cada dos de ellos, sin determinar un sólido: es el mayor esfuerzo de la multiplicacion binaria aspirando á la solidez. Yo lo considero como el cuadrado de una hipotenusa con valor cualitativo y cuantitativo: $a^2+2ab\sqrt{-1}-b^2$ es con efecto el cuadrado de la hipotenusa determinada por $a+b\sqrt{-1}$. Tambien puede considerarse la totalidad de la figura como un ángulo recto superficial cuyo vértice fuera un ángulo recto lineal.

Si en la fórmula de este cuadrado se supone que b crece acercándose á ser igual á a, el cuadrado deficiente $-b^2$ crecerá, y el punto P se acercará continuamente á R: si b llega á ser igual á a, el deficiente $-b^2$ destruye al tético a^2 y este desaparece: los cuadrados complementarios habrán crecido segun la base b, y se habrán convertido en $2a^2\sqrt{-1}$; esto es, en dos planos iguales al tético destruido, pero perpendiculares á aquella posicion, como insistiendo en las RT y RS (*Fig.* 64).



Si se supone que b decrece acercándose á cero, el plano deficiente $-b^2$ en la figura principal, ó sea la 63, decrecerá; P se aproximará á L; los planos complementarios, conservando su altura igual á a decrecerán segun la base b, y cuando b llegue á ser cero, el plano a^2 no sufre substraccion alguna, y los complementarios serán una recta a levantada sobre el punto L, como se ve en la figura 65.

Fig. 65



Lo mas notable del caso que voy considerando es que de la combinacion de las dos determinaciones extremas anteriores resulta el ángulo triédrico saliente que es capaz de determinar la solidez. La recta única levantada sobre L ejerce entonces el importante oficio de limitar á una posicion única la del plano tético respecto de los complementarios, identificándose con la arista que ellos forman.

Si los factores llevasen signo negativo en el término imaginario, como

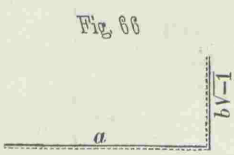
$$(a-b\sqrt{-1})\,(a-b\sqrt{-1})=a^2-2\,ab\sqrt{-1}-b^2,$$

los planos complementarios se trazarian ambos por la parte inferior del real ó tético, y la figura sería substancialmente la misma.

La forma imaginaria del producto $(a^2-b^2)+2\,ab\sqrt{-1}$ corresponde á la imposibilidad de apariencia explícita de los planos complementarios en el plano tético. En este, sin embargo, es posible representar la parte real a^2-b^2 por una contraposicion directa sobre el nêxus de ambos factores binómios.

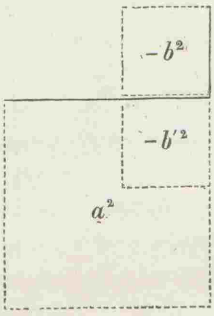
Siendo en efecto la posicion tética la de la figura 66 la multiplicacion conduce

Fig. 66



á la antítesis representada en la figura 67, en la cual el cuadrado b^2 es negativo respecto de a^2, y su efecto substractivo es b'^2 deficiente.

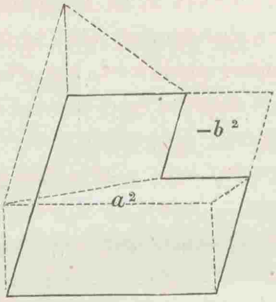
Fig. 67



El imaginarismo de los complementarios expresa en este caso la prolongacion de a (línea punteada) y b (línea llena), y la superposicion ó coincidencia de b (línea punteada) y de a (línea llena).

Obsérvese finalmente que la representacion explícita de los complementarios en el espacio podia haberse realizado levantándolos sobre a segun b como en esta figura:

Fig. 68

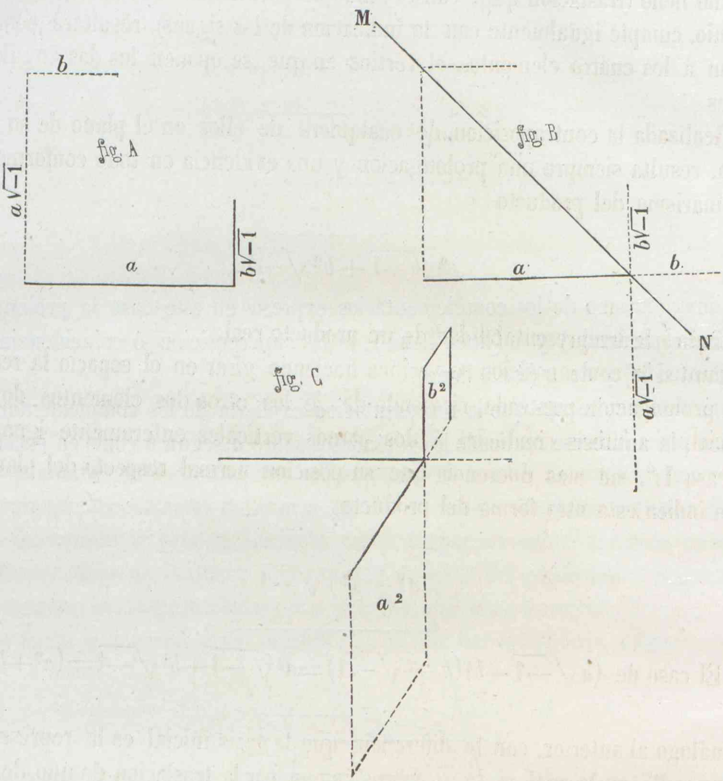


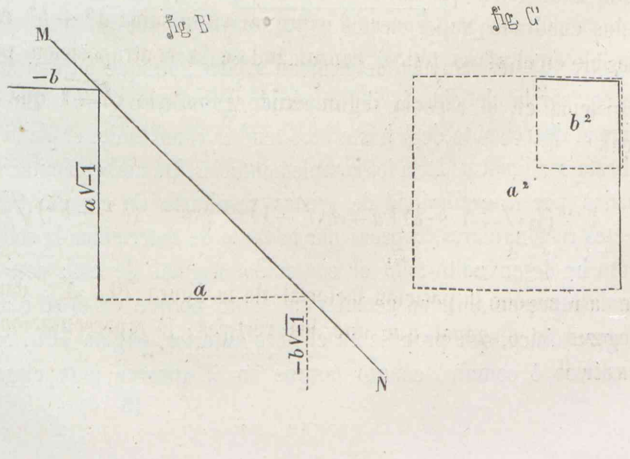
en la cual los tres planos tampoco determinan solidez, aunque forman ángulos diédricos salientes, por la deficiencia del cuadrado gnomónico $-b^2$. En esta nueva representacion el decremento de b hasta cero tendria como límite el plano tético y su incremento hasta ser igual a daria los complementarios. De ambas limitaciones extremas combinadas por la comunidad de aristas resultaria un ángulo triédrico con planos perfectos rectangulares, capaces por lo tanto de determinar la solidez.

De intento he desenvuelto todo el contenido original de este caso algebráico de tan anómala representabilidad geométrica, tanto porque en él se realiza el teorema sincategoremático, que propuse en el libro anterior, página 100, como correlativo al pitagórico ó comun, cuanto porque en él aparece muy clara la doble referencia al plano y al espacio de los dos elementos heterogéneos de todo producto binomial de la forma $A^2+B^2\sqrt{-1}$.

3.° $(a\sqrt{-1}+b)\,(a+b\sqrt{-1})=a^2\sqrt{-1}+b^2\sqrt{-1}=(a^2+b^2)\sqrt{-1}$.

Fig. 69





Siguiendo la indicacion de los signos, se representará la posicion de los factores antes de la antítesis por la figura A, en la cual un binómio va expresado por líneas llenas y otro por punteadas.

La particular combinacion de los signos del imaginarismo hace que en esta figura sea imposible la contraposicion sobre un nêxus comun á los cuatro elementos de los dos binómios; pero se comprende bien que trasladando el binómio punteado, segun la diagonal MN, de la figura B, hasta tomar una posicion vertical respecto del binómio lleno (traslacion que, conservando el paralelismo de ambos elementos del binómio, cumple igualmente con la indicacion de los signos), resultará como nêxus comun á los cuatro elementos el vértice en que se oponen los dos ángulos binomiales.

Realizada la contraposicion de cualquiera de ellos en el plano de su posicion tética, resulta siempre una prolongacion y una evidencia en todo conformes con el imaginarismo del producto

$$a^2\sqrt{-1}+b^2\sqrt{-1}\,,$$

que indica la irrepresentabilidad de un producto real.

Pero si la contraposicion se verifica haciendo girar en el espacio la recta llena y su prolongacion punteada, sirviendo de eje los otros dos elementos de la recta vertical, la antítesis conducirá á dos planos verticales enteramente iguales á los del caso 1.º, sin mas diferencia que su posicion normal respecto del plano tético, como indica esta otra forma del producto

$$(a^2+b^2)\sqrt{-1}\,.$$

El caso de $(a\sqrt{-1}-b)(a-b\sqrt{-1})=a^2\sqrt{-1}+b^2\sqrt{-1}=(a^2+b^2)\sqrt{-1}$

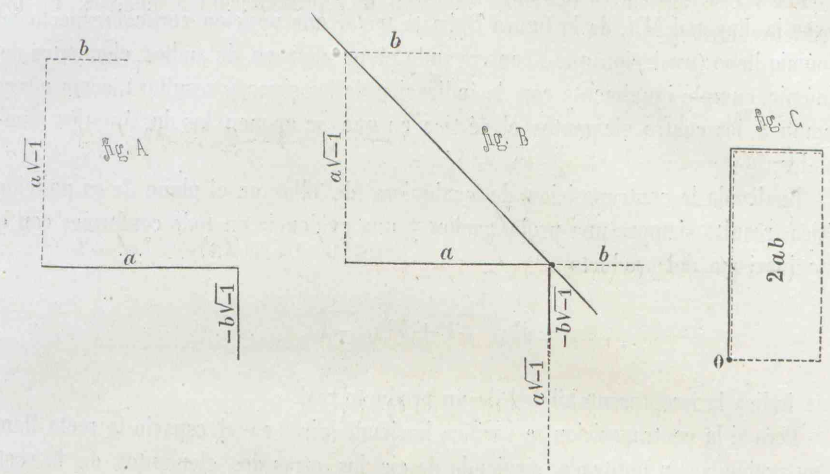
es análogo al anterior, con la diferencia que la tésis inicial es la representada en la figura B', en la cual se da un nêxus comun por la traslacion de uno de los binómios segun la diagonal que une los vértices, tomando entonces la forma C' en la que los dos cuadrados superpuestos expresan ya la suma a^2+b^2 como contraposicion posible en el plano tético, consumándose la contraposicion por un giro de todo el sistema en el espacio, segun exije el símbolo $\sqrt{-1}$ que afecta al producto real.

$$4.^{\circ}\quad (a\sqrt{-1}+b)(a-b\sqrt{-1})=2ab+(a^2-b^2)\sqrt{-1}.$$

Este caso supone la posicion factorial de la figura 70, A: dando un nêxus comun segun la diagonal que une los vértices; la representacion se convertirá en la figura B.

Haciendo la contraposicion del factor lleno en el mismo plano tético, resultarán los dos planos reales superpuestos ambos positivos como referidos al punto de origen que está en O, figura C.

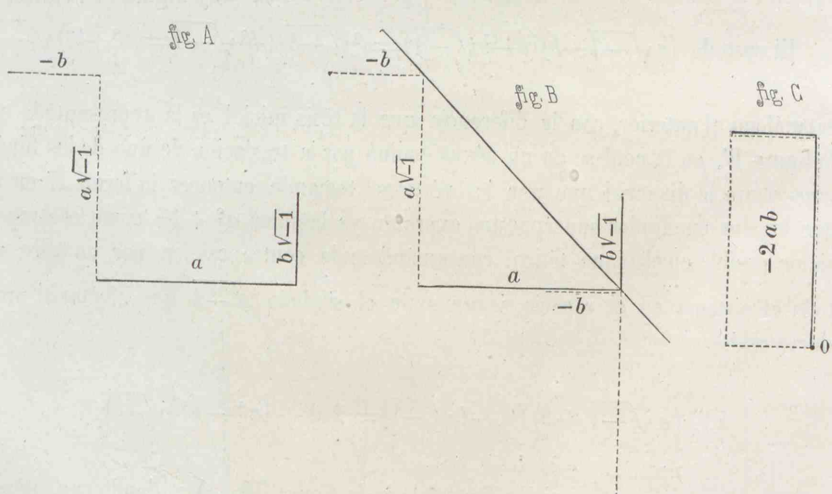
Fig. 70



Estos dos planos aparecen como complementarios deficientes del caso anterior.

$$5.^{\circ}\ (a\sqrt{-1}-b)(a+b\sqrt{-1})=-2ab+(a^2-b^2)\sqrt{-1}.$$

Fig. 71



Este caso supone la posicion factorial de la figura A.
La que para tener un nêxus comun ha de convertirse en la figura B.

La contraposicion del factor lleno se verifica en el mismo plano, y el producto es real representado por dos planos complementarios superpuestos en la figura C.

Ambos son negativos respecto del orígen que está en O.

Estos planos complementarios destruyen á los anteriores positivos y producen la deficiencia que es de notar en el caso 3.°

Por via de agradable ejercicio propongo la representacion geométrica de los productos siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}(+a\sqrt{-1}+b)(-a+b\sqrt{-1})= \\ (-a\sqrt{-1}-b)(+a-b\sqrt{-1})=\end{array}\right\}-a^2\sqrt{-1}-2ab+b^2\sqrt{-1}$$

$$\left.\begin{array}{l}(+a\sqrt{-1}-b)(-a-b\sqrt{-1})= \\ (-a\sqrt{-1}+b)(+a+b\sqrt{-1})=\end{array}\right\}-a^2\sqrt{-1}+2ab+b^2\sqrt{-1}$$

ARTÍCULO 11.

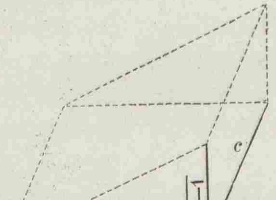
Producto de monómio por binómio.

Aunque mas sencillos que los anteriores, examinemos tambien los dos casos siguientes, en que un factor binómio $a+b\sqrt{-1}$ se combina con un binómio real ó con el símbolo $\sqrt{-1}$. En ellos hay particularidades muy dignas de notarse.

$$1.° \quad (a+b\sqrt{-1})\times c = ac+bc\sqrt{-1}.$$

El factor binómio $a+b\sqrt{-1}$ tiene la representacion tética de esta figura.

Fig. 72.



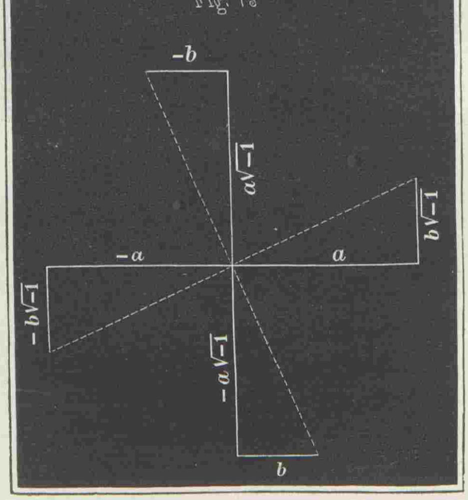
El factor real c, que debe coincidir en su posicion tética con el elemento real del binómio y tener un punto comun con el nêxus de este para representar su comun relacion factorial con ambos elementos, no puede contraponerse á ellos ó ser perpendicular á ambos á la vez sin determinar un plano real ac con el elemento real, y otro imaginario $bc\sqrt{-1}$ con el imaginario. Estos dos planos de los que cada uno es un producto parcial, tienen entre sí la misma relacion de perpendicularidad que los dos elementos lineales del binómio $a+b\sqrt{-1}$, y así como este expresa la magnitud y la posicion de la oblícua, así el producto total $ac+bc\sqrt{-1}$ representa la posicion oblícua del plano cuyas proyecciones alternativas son los productos parciales ac y $bc\sqrt{-1}$.

$$2.^{\circ}\ (a+b\sqrt{-1})\times\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}-b.$$

No siendo el símbolo $\sqrt{-1}$ una cantidad, sino un símbolo de afeccion ó direccion normal, no hay en este caso multiplicacion propiamente dicha, sino una mera imposicion de un nuevo signo al binómio imaginario, la cual hace que todo él, como sistema entero y perfecto, tome una posicion perpendicular á la que antes tenia.

El producto será el nuevo binómio que, sometido sucesivamente al influjo del mismo signo $\sqrt{-1}$, pasará por los cuatro estados ó posiciones cardinales de la figura que sigue, reproduciéndose en su posicion primitiva á la cuarta multiplicacion.

Fig. 73



Las mismas posiciones renacen en cada nuevo período, conformándose esta singular representacion geométrica con la combinacion periódica de signos que ofrece el siguiente desarrollo algebráico:

$$
\begin{aligned}
&(a+b\sqrt{-1})\times 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = && a+b\sqrt{-1}\\
&(a+b\sqrt{-1})\times\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = && a\sqrt{-1}-b\\
&(a+b\sqrt{-1})\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} \ldots\ldots\ldots\ldots = && -a-b\sqrt{-1}\\
&(a+b\sqrt{-1})\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} \ldots\ldots = && -a\sqrt{-1}+b\\
&(a+b\sqrt{-1})\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = && a+b\sqrt{-1}\\
&\qquad\qquad \&c. && \&c.
\end{aligned}
$$

Las cuatro oblícuas representadas por las cuatro posiciones del binómio, guardan entre sí la misma relacion de perpendicularidad sucesiva que el binómio mismo sometido como totalidad á la influencia del símbolo $\sqrt{-1}$.

En su lugar oportuno haré ver que esta evolucion giratoria periódica guarda mas analogía con la graduacion ó elevacion á potencias que con la multiplicacion. Los que aquí parecen productos no son sino sucesivas determinaciones lineales, cuya varia direccion procede de la rara y sucesiva potencialidad del símbolo $\sqrt{-1}$; porque siempre se tiene que

$$
\begin{aligned}
&1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\sqrt{-1})^0\\
&\sqrt{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\sqrt{-1})^1\\
&\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\sqrt{-1})^2\\
&\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = \ldots\ldots\ldots (\sqrt{-1})^3\\
&\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^4\\
&\qquad\qquad \&c. \qquad\qquad\qquad\quad \&c.
\end{aligned}
$$

Los resultados de esta potencialidad no son productos superficiales ni sólidos, ni pertenecientes á ninguna categoría geométrica ulterior, sino evoluciones giratorias de la recta $a+b\sqrt{-1}$.

CAPÍTULO II.

DE LA MULTIPLICACION TERNARIA.

ARTÍCULO 1.°

De la naturaleza y signos de la multiplicacion ternaria.

Vengamos ahora á la multiplicacion ternaria, ó de tres factores, en que llega á consumarse la representacion geométrica de los productos. Aunque más complicada que la binaria, cae bajo la teoría general de la contraposicion factorial.

La reciprocidad de tres factores no es perfecta y acabada, si cada uno de ellos no es normal á otros dos que son entre sí normales; de manera, que supuesta la normalidad ó antítesis de dos de ellos, el tercero ha de tomar una afeccion que lo contraponga al mismo tiempo á aquellos dos, sin poder coincidir ni yuxtaponerse su direccion contraria á ninguno de ellos.

Hay, pues, un imaginarismo particular en la multiplicacion ternaria, que consiste, en que dada la tésis ó realidad de un factor, los otros dos han de ser (y son en el producto) imaginarios con él y entre sí. En la realizacion del cálculo aritmético ó algebráico este imaginarismo va paliado por la indicacion misma de los signos algorítmicos, ó por la yuxtaposicion gráfica ó literal de los factores. La necesidad de un signo especial de este oculto imaginarismo no aparece sino cuando queremos representar el oficio factorial independientemente de la operacion productiva.

Muy fácil sería la institucion arbitraria de estos signos, como lo fué sin duda la del $\times$, que indica relacion factorial; pero así como preferimos para signos del simple imaginarismo de la multiplicacion binaria el símbolo $\sqrt{-1}$, pretendemos ahora expresar el imaginarismo mas complejo de la multiplicacion ternaria por un símbolo derivado en que aquel entra como elemento. Así, si a es factor real, $\frac{-a+a\sqrt{-3}}{2}$ será uno de los imaginarios, y $\frac{-a-a\sqrt{-3}}{2}$ será el otro.

De suerte que los tres signos son

$$1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

y sus contrarios negativos

$$-1,\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},$$

los cuales van implícitos en toda multiplicacion ternaria como coeficientes respectivos de los tres factores iguales á a en todas las direcciones en que pueden determinar un producto. Estas direcciones no son otras que las que entre sí tienen las tres aristas de un cubo. Los signos contrarios corresponden á las prolongaciones de las aristas más allá del vértice que es el punto de orígen comun á todas ellas.

Por ahora bástenos saber que la teoría comun algebráica demuestra que estos signos son tales que la multiplicacion los reduce á la mitad como coeficiente absoluto del producto

$$1\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=1$$

Estos coeficientes de direccion, verdaderos signos de relacion ternaria, tienen su particular historia no menos curiosa que la del símbolo $\sqrt{-1}$: ellos son dados por la teoría general de las raíces de la unidad que despues expondremos. Su introduccion, como coeficientes absolutos de todo factor en la multiplicacion ternaria, nos hará ver una perfectísima congruencia entre los resultados algebráicos y las determinaciones geométricas en la interpretacion del imaginarismo.

Desde luego expresan estos símbolos las proyecciones radiales de las tres aristas de un cubo cuyo ángulo triedro insistiese sobre el centro de un círculo. Mas adelante comprenderémos bien la significacion de la reciprocidad de los tres rádios proyectivos como representante de la reciprocidad normal de las tres aristas que determinan el sólido.

El producto cuantitativo de tres factores tiene su representacion geométrica en el sólido paralelepípedo determinado por la antítesis normal y recíproca de tres líneas que hacen de aristas.

Que así debe ser, se demuestra, porque la contraposicion de dos de ellos determina una superficie, y el tercero no puede contraponerse á uno de ellos sin coincidir con el otro: es pues menester que salga fuera del plano buscando su contraposicion á ambos, y se eleve en el espacio siendo perpendicular á cada uno de ellos: determinará, pues, con cada uno de ellos una superficie perpendicular á la anterior. Pero estas tres superficies, formando un ángulo sólido, determinan y encierran una parte del espacio reproduciéndose paralelamente á sí mismas á distancias medidas por cada factor lineal contrapuesto á sus dos elementos lineales; luego el producto determinado es un sólido.

La igualdad cuantitativa de los tres factores no induce mas novedad que llamarse *cubo* el producto.

El valor cualitativo de un producto ternario está referido á tres planos ortogonales, como el de uno binario á dos rectas perpendiculares, y el de una recta ó producto *monádico* á un punto.

Dada la suposicion de que los sólidos determinados en un ángulo triédrico formado de planos positivos, es positivo, la variedad de signos de los factores en sus ocho combinaciones colocará el producto en alguno de los ocho ángulos sólidos, cuatro positivos y cuatro negativos, que resultan de la interseccion ortogonal de tres planos. Así, ampliando la regla de los signos en la multiplicacion binaria al caso de ser tres los elementos combinados, diremos que en la suposicion de que

$$+\times+\times+=+$$

tendremos

$$
\begin{aligned}
&+\times+\times-=-\\
&+\times-\times-=+\\
&-\times-\times-=-\\
&-\times-\times+=+\\
&-\times+\times+=-\\
&-\times+\times-=+\\
&+\times-\times+=-
\end{aligned}
$$

Para traducir bien cada una de las ocho combinaciones de signos, véase el plano que determinan por antítesis dos factores segun el signo y posicion que les conviene respecto de un punto de orígen, levántese en seguida ó bajese como perpendicular en el mismo punto el otro factor, segun tenga el signo $+$ ó $-$, y el ángulo triédrico resultante de esta construccion intuitiva determinará el producto correspondiente.

En el eschêma que abraza el espacio entero en sus ocho ángulos triédricos, las líneas toman su valor refiriéndose á un punto central, los planos refiriéndose á las líneas, y los sólidos refiriéndose á los planos. Así los sólidos adyacentes ó referidos al plano llevan signos contrarios. Los verticales ó referidos á una línea llevan signos iguales, y los simétricos ó referidos á un punto tienen signos contrarios.

Por esto es de notar la singularidad de que en los ángulos sólidos no andan acordes los signos de las líneas, de los planos y de los sólidos: por ejemplo, en el ángulo sólido anterior, inferior y siniestro, un sólido negativo es determinado por tres planos positivos, los cuales á su vez se determinan por rectas negativas. Y la razon es óbvia; las tres aristas negativas por su combinacion binaria dan siempre tres planos positivos, referidos y adyacentes á otros negativos, siendo orígen la línea, y el sólido es negativo como referido y adyacente á otros sólidos positivos siendo orígen el plano.

ARTÍCULO 2.º

No hay sólidos imaginarios.

¿Hay tambien cubos, paralelepípedos y en general sólidos imaginarios? No. Los sólidos no pueden ser sino positivos ó negativos con relacion al plano que los divide: los sólidos no pueden ser perpendiculares á otros sólidos en el plano de la division de estos, porque este plano habia de dividir asimismo al sólido superpuesto en una parte positiva y otra negativa.

El sólido no es capaz de direccion como sólido, por lo mismo que las abraza todas: en él se consuma la plenitud de dimensiones del espacio. El sólido está dirigido siempre á todas partes: por eso no tiene direccion especial como el plano y la recta. Es como el compendio del espacio entero, y bajo este concepto es comparable al punto matemático. Este es orígen de toda direccion, aquel es el término y el complemento de ella.

En el sólido puede haber planos imaginarios, pero la solidez siempre es real; esto es, incapaz de toda determinacion ulterior á la positiva y negativa. Hay direcciones internas, pero ninguna externa.

Considerando bien la recíproca perpendicularidad de las tres aristas de un cubo ó paralelepípedo, es de notar que dos de ellas no pueden llamarse imaginarias si no se considera como real la tercera: en tal caso la multiplicacion de las dos imaginarias daria producto real para la superficie, la cual, combinada ó multiplicada por la tercera arista, que es real, daria el volúmen real del sólido.

En el caso de las tres aristas ó factores imaginarios, se llega á la realidad por un exceso de imaginarismo, porque tendrian entre sí idéntica posicion que si fuesen reales.

ARTÍCULO 3.º

Casos de realidad ó de imaginarismo en el producto ternario.

Consideremos, pues, los casos en que solo son imaginarios uno ó dos de los tres factores, apreciando además la circunstancia de su carácter positivo ó negativo respecto del punto de orígen, que es el centro del eschêma general del espacio.

Los tres signos

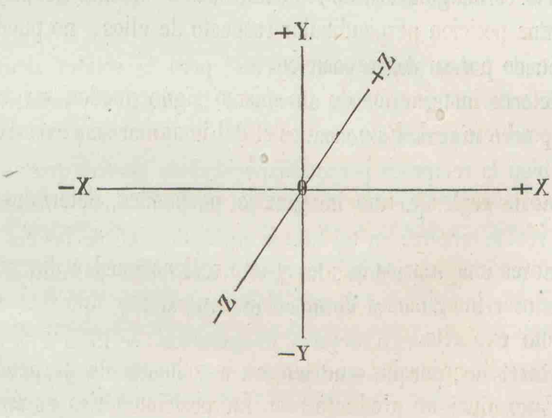
$$1,\quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\quad \text{y}\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

pueden ser afectados del signo —, y dar para las direcciones negativas los tres

$$-1,\quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2}\quad \text{y}\quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2},$$

que, combinados con los anteriores, representan las seis direcciones de los tres ejes ortogonales, de las X, de las Y y de las Z en la siguiente figura.

Fig. 74



Para que una combinacion ternaria de factores reales ó imaginarios dé un producto real ó susceptible de representacion geométrica, son necesarias las tres condiciones siguientes:

1.ª Que permaneciendo inmóvil uno cualquiera de los factores, hagan su contraposicion sucesivamente cada uno de los otros dos, y esto de tal manera, que al girar se contraponga simultáneamente á los dos restantes, estén ó no superpuestos ó confundidos en su direccion, ó sean el uno prolongacion del otro. Si son los tres factores X, Y, Z, y X permanece inmóvil, Y ha de contraponerse á X y á Z al mismo tiempo, y Z á X y á Y, cualesquiera que sean las posiciones de X, Z y de X, Y.

2.ª Que la antítesis definitiva que constituye el producto ternario (esto es, la perfecta y recíproca perpendicularidad que dispone los tres factores como las tres aristas de un cubo) *no se anticipe* con solo hacer la contraposicion de uno de ellos; porque seria necesariamente alterada por la contraposicion del otro, y se caeria en prolongacion ó coincidencia con alguno de los ya constituidos en la posicion definitiva.

3.ª Que la antítesis definitiva *no se retarde*, sino que aparezca constituida precisamente al hacerse la segunda contraposicion. La primera contraposicion debe determinar precisamente un plano en que se hallen los tres factores. Si la primera conduce á una prolongacion ó coincidencia lineal de los tres fàctores, la segunda no puede producir más que un plano, y sería necesaria una tercera contraposicion para dar apariencia á la solidez. Esta tercera contraposicion es incompatible con la reciprocidad esencial á la multiplicacion ternaria, la cual no exige ni permite más que dos contraposiciones.

Con arreglo á estos principios, que inmediatamente se deducen de la naturaleza de la funcion productiva, es muy fácil demostrar los siguientes teoremas, en que está compendiada toda la doctrina del imaginarismo en la multiplicacion ternaria.

1.° Tres factores imaginarios que lleven diferentes signos de su imaginarismo no pueden ser contrapuestos explícitamente, y su producto es inexpresable en el espacio.

2.° Tres factores imaginarios, de los cuales dos solamente llevan signos iguales, y el otro tiene una posicion perpendicular respecto de ellos, no pueden determinar producto geométrico por su contraposicion.

3.° Tres factores imaginarios de un mismo signo pueden ser contrapuestos y determinan un producto real. Este caso es el del imaginarismo excesivo que conduce á la realidad.

4.° Dos factores reales y uno imaginario no pueden determinar producto representable.

5.° Dos factores imaginarios iguales y uno real no pueden dar producto real.

6.° Dos factores imaginarios de afeccion contraria y uno real no pueden determinar producto explícito.

7.° Dos factores imaginarios que tengan la relacion de perpendiculares y uno real, pueden determinar un producto real. La posicion tética es análoga á la definitiva.

Para orientarse bien en la intuicion geométrica que exige la demostracion de estos teoremas, entiéndase que, supuesta la interseccion y perpendicularidad de los tres ejes ortogonales, el de las X representa en sus dos direcciones contrarias factores reales con los signos $+$ y $-$,

el de las Y imaginarios con los signos $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$,

y el de las Z imaginarios con los signos $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

En esta disposicion las dos direcciones reales forman como el eje del plano vertical en que están las cuatro posiciones imaginarias.

Completada la intuicion geométrica, siempre penosa, del eschêma en que giran estas contraposiciones tan varias, es sumamente satisfactorio hallar, como siempre se halla, una perfectísima congruencia entre los casos de posibilidad ó de imposibilidad de representacion geométrica de un producto sólido con el resultado real ó imaginario de la multiplicacion de factores, con el signo que exige el enunciado de cada teorema. Esta admirable armonía de la intuicion y del concepto, de lo sensible y de lo intelectual, de la Geometría y del Álgebra, tan manifiesta ya en las teorías anteriores, recibe úna amplitud inmensa y una comprobacion luminosa en la multiplicacion harto compleja de estos coeficientes tan derivados respecto del símbolo primitivo y capital del imaginarismo.

No cabe duda en que cada una de estas comprobaciones sería bastante á justificar la interpretacion concreta á cuyo desenvolvimiento se dedica este libro.

ARTÍCULO 4.°

Productos ternarios implícitos.

Hasta la imposibilidad de representacion, siempre relativa á la índole de la intuicion geométrica, está como sistematizada en esta relacion de la Geometría y del Álgebra. Algo significan geométricamente los resultados imaginarios con que esta califica esos productos irrepresentables; y es que la representacion ha de buscarse en el grado inferior, que es el plano, suponiendo que el producto fueran dos superficies yuxtapuestas ó superpuestas; á la manera que el caso de $a^2\sqrt{-1}$ podria representar dos líneas yuxtapuestas ó superpuestas, y $a\sqrt{-1}$ representaria dos puntos yuxtapuestos ó superpuestos (que es lo mismo). Estas representaciones menos perfectas, como se ve, son meramente proyectivas, y habria podido notarse cuánta relacion hay entre el imaginarismo y el hecho geométrico de la proyeccion. Digno es tambien de consideracion el cómo se retrocede en un grado en los tres casos para poder realizar, aunque proyectivamente, el producto geométrico El imaginarismo establece una relacion natural y sistemática entre la Geometría explícita que llena la intuicion de espacio y la implícita ó proyectiva que se detiene en el plano.

Los elementos algebráicos de la forma $a\sqrt{-1}$ y $a^2\sqrt{-1}$ tienen representacion explícita en su region propia, y representacion proyectiva en la region inmediatamente inferior: pero los que tienen la forma $a^3\sqrt{-1}$ no podrian tener una representacion adecuada en su region propia sino proyectiva en la superficie, porque ninguna forma imaginaria puede ser objeto de intuicion, segun su propio grado, sin suponer el grado inmediatamente superior, y en el caso que nos ocupa el órden superior, la hipersolidez no puede caer bajo la intuicion geométrica, y así reconocemos nuevamente que los sólidos no pueden ser entre sí más que positivos ó negativos respecto de un plano que los separa, y nunca perpendiculares ó imaginarios: la idea de perpendicularidad es inseparable de la de direccion: en el punto la direccion es cero, y en el sólido es infinita: para que haya direccion es menester determinacion de un *quid determinabile* por una negacion ó límite. En la línea y en la superficie hay esta limitacion determinante que les da dirigibilidad; la línea en efecto es longitud sin latitud ni profundidad, y la superficie es longitud y latitud sin profundidad.

Considerando los cuatro elementos como productos ternarios podrian ser representados por

$$
\begin{array}{llll}
\text{Cero} & \times\ \text{cero} & \times\ \text{cero} & = \text{Punto.}\\
\text{Long.} & \times\ \text{cero} & \times\ \text{cero} & = \text{Línea.}\\
\text{Long.} & \times\ \text{lat.} & \times\ \text{cero} & = \text{Superficie.}\\
\text{Long.} & \times\ \text{lat.} & \times\ \text{prof.} & = \text{Sólido.}
\end{array}
$$

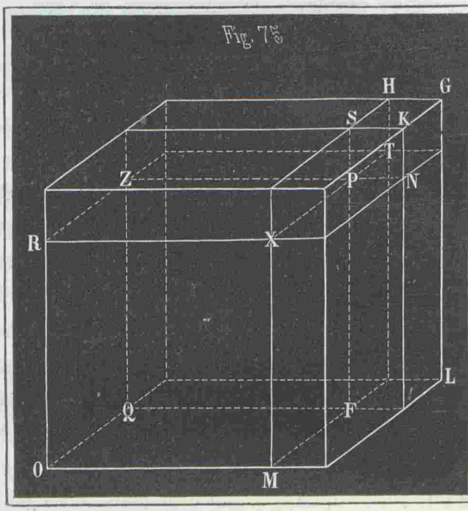
ARTÍCULO 5.°

De la multiplicacion ternaria de binómios. Binómios reales.

La contraposicion ternaria de binómios comprende en su producto total varias contraposiciones parciales cuyo número está dado por la teoría de las combinaciones. Suponiendo que cada binómio consta de dos elementos, que llamarémos a y b, mayor y menor, los seis elementos de los tres binómios dan ocho productos parciales, de los cuales seis están agrupados en los dos términos complementarios que da la multiplicacion algebráica, y los otros dos son los extremos: uno de ellos b^3 que supondrémos ser menor, junto con los complementarios, forma el gnomon sólido análogo al que aparece en los rectángulos ó productos binarios.

Expondrémos la representacion geométrica de tres factores reales, que para mayor sencillez supondremos iguales.

$$1.^\circ \ (a+b)(a+b)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$



a^3.... contraposicion ternaria de a=OP en la figura 75.

$3a^2b$.... tres sólidos resultantes de $a^2\times b$ que son MN, RS y QT.

$3ab^2$.... tres sólidos resultantes de $a\times b^2$ que están colocados sobre FL, sobre XN y sobre ZT.

b^3..... contraposicion ternaria de b: tiene por aristas PS, PT y PN; y cierra el gnomon.

$$2.^\circ \ (a-b)(a-b)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

La formacion de este producto puede comprenderse bien, suponiendo que en la figura anterior a representa toda la arista y b es substractiva: en tal caso,

a^3... es todo el cubo OG levantado sobre OL.

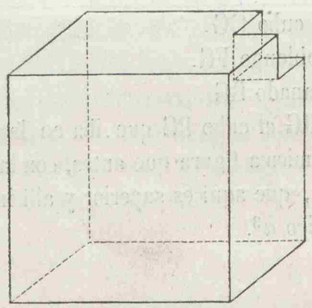
$-3a^2b$.. indica que de esta totalidad se restan los paralelepípedos RG, MG y QG; y adviértase que en esta substraccion van restados dos veces cada uno de los paralelepípedos XK, ZH y PL, y tres veces el cubo PG.

$+3ab^2$.. restablece por adicion los paralelepípedos oblongos anteriores, con lo cual se reduce á una la doble substraccion anterior, y como esta adicion restitutoria comprende tres veces el cubo PG, este queda restablecido.

$-b^3$.... indica substraccion definitiva de este mismo cubo, y con esto aparece deficiente el cubo PG.

La representacion definitiva de este producto es la figura que sigue.

Fig. 76



Escolio. Adviértase la analogía que este caso guarda con el correspondiente binario de la página 132.

$$3.^{\circ}\ (a+b)(a-b)(a-b)=a^3-a^2b-ab^2+b^3.$$

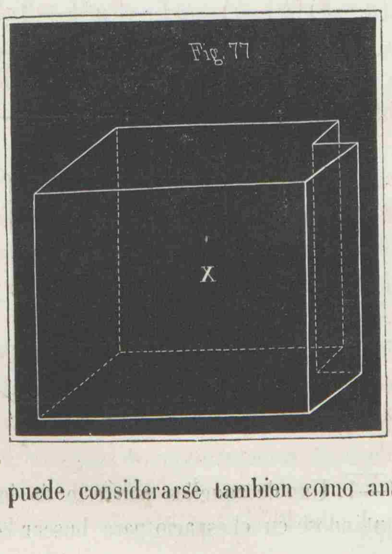
Este caso se representa del modo siguiente en la misma figura 75.

a^3.... pone todo el cubo OG.

$-a^2b$... substrae todo el paralelepípedo RG.

$-ab^2$... substrae todo el oblongo FG, con lo cual el cubo PG está substraido una vez más.

$+b^3$.... pone otra vez este cubo destruyendo el efecto de esa doble substraccion. De todo resulta la forma representada en la figura 77.



Escolio. Este caso puede considerarse tambien como análogo al último binario de la página 132.

4.° $(a+b)(a+b)(a-b)=a^3-ab^2+a^2b-b^3$.

Este producto se representa del modo siguiente en la figura principal ó sea la 75.

a^3.... pone todo el cubo OG.
$-ab^2$... substrae el oblongo FG.
$+a^2b$... añade el aplanado RG.
$-b^3$.... substrae de RG el cubo PG que iba en la tésis anterior, con lo cual resulta la misma figura que antes, con la diferencia de la altura del prisma X, que aquí es superior y allí inferior á la altura del cubo total ó tético a^3.

ARTÍCULO 6.°

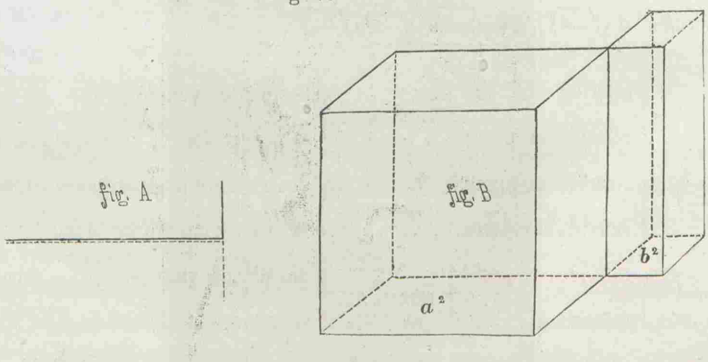
Binómios imaginarios.

La combinacion ternaria de factores, en parte reales y en parte imaginarios, tiene una representacion estereométrica algo mas difícil. Consideremos solamente el caso

$$(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})(a\pm b\sqrt{-1})=a^3+ab^2\pm a^2b\sqrt{-1}\pm b^3\sqrt{-1}$$

Así en el caso del signo superior como en el del inferior, la parte real dará verdadera representacion sólida, y la imaginaria no dará producto por falta de contraposicion: la posicion tética de los factores en un mismo plano es la figura 78, A: la línea llena representa los dos $a+b\sqrt{-1}$ del signo superior,

Fig. 78



y la punteada $a-b\sqrt{-1}$. Uno de aquellos con este da las dos bases positivas a^2+b^2 y el otro, levantándose en el espacio para buscar contraposicion perfecta, no contrapone más que la parte real a, y la imaginaria queda coincidente con un lado de b^2 y siendo prolongacion de otro lado de a^2: el producto es, pues, la suma de los dos sólidos levantados sobre a^2+b^2, de la figura B, representacion geométrica que coincide admirablemente con la parte real del producto algebráico.

Escolio. Nótese la analogía de este caso con el anterior, del cual se diferencia únicamente en que aquí es aditivo el oblongo levantado sobre b^2.

El caso de los signos inferiores es exactamente igual al anterior, con la única diferencia de que la coincidencia y la prolongacion que corresponde á los elementos imaginarios es de aristas y sobre aristas, adyacentes á las anteriores y negativas por consiguiente respecto de ellas.

ARTÍCULO 7.°

Traduccion parcial de los productos imaginarios.

De notar es que mientras se hace posible ó efectiva la contraposicion factorial, es posible un producto explícito aunque este no pueda representarse más que de una manera parcial. Los productos ternarios imaginarios de la forma $a^3\sqrt{-1}$ no pueden ser desenvueltos en la intuicion de espacio, y quedan como implícitos en la region inferior que es la superficie, proyeccion del sólido. Así como los binarios de la forma $a^2\sqrt{-1}$ pueden quedar implícitos en la representacion de la línea proyeccion de la superficie, y los de la forma $a\sqrt{-1}$ pueden representar, no la línea en su longitud explícita, sino el punto proyeccion de la línea como coincidencia ó yuxtaposicion puntual, que viene á ser lo mismo.

En la siguiente sinópsis puede admirarse la armonía que hay en las tres representaciones $a\sqrt{-1}$, $a^2\sqrt{-1}$ y $a^3\sqrt{-1}$.

$$a\sqrt{-1}\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{referida á la línea}\\ \text{referida al plano}\end{array}\right\}\text{representa}\left\{\begin{array}{l}\text{dos puntos yuxtapuestos.}\\ \text{la proyeccion de una recta normal.}\end{array}\right.$$

$$a^2\sqrt{-1}\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{referida al plano}\\ \text{referida al espacio}\end{array}\right\}\text{representa}\left\{\begin{array}{l}\text{dos rectas yuxtapuestas ó superpuestas.}\\ \text{la proyeccion de un plano normal.}\end{array}\right.$$

$$a^3\sqrt{-1}\ldots\left\{\begin{array}{l}\text{referida al espacio}\\ \text{referida á.......}\end{array}\right\}\text{representa}\left\{\begin{array}{l}\text{dos planos yuxtapuestos ó superpuestos.}\\ \text{la proyeccion de............}\end{array}\right.$$

$a^3\sqrt{-1}$ no tiene más que la representacion de dos planos coincidentes por yuxtaposicion ó superposicion, porque no puede referirse más que al espacio. No hay intuicion geométrica mas alta que la del espacio.

ARTÍCULO 8.°

Productos hipersólidos.

La contraposicion que se necesita para determinar un producto entre cuatro factores es tal, que cada uno de ellos ha de ser normal respecto de los otros tres, como cada uno de estos lo es respecto de los demas.

No puede haber intuicion geométrica de la contraposicion cuaternaria explícita, porque dada la antítesis normal de tres factores representados por la perpendicularidad de las tres aristas de un cubo ó paralelepípedo, el cuarto factor no puede ser normal á ninguno de ellos sin yuxtaponerse ó superponerse á alguno de los otros que ya le es normal. No hay intuicion geométrica de mayor número de dimensiones que de tres.

Obsérvese que los números 1, 2 y 3, que indican respectivamente las dimensiones del elemento lineal, del superficial y del sólido, son números primos, y que el 4, índice de un elemento hipersólido, es el primero de los números compuestos.

De todos modos las multiplicaciones cuaternarias, lo mismo que las ulteriores, no tienen más realizacion que la que da la Aritmética. Esta es la que continúa de un modo indefinido su progreso productivo; esta es la que por una indefinida y obscura numerabilidad de la sucesion en el tiempo, puede de una manera mas mecánica que intuitiva realizar esas contraposiciones, en las que ni la idea de normalidad, ni aún la de varia inclinacion, puede ser aplicable. En estas regiones superiores, donde la Aritmética ejercita su poder sintético y combinatorio, no puede tener lugar aquel notable dicho de Pascal de que: *los números imitan el espacio aunque son de naturaleza tan diferente.*

ARTÍCULO 9.°

Tres dimensiones del espacio.

Cualquiera que sea el concepto que formemos del espacio, bien le consideremos como cosa en sí, bien como relacion de las cosas corpóreas, bien como forma de la naturaleza, ó bien como forma subjetiva, condicion necesaria para percibir las cosas como exteriores á nosotros y exteriores unas á otras; el hecho es, que no podemos, por más que en ello nos esforcemos, ver en él otra cosa que tres dimensiones ó tres coordenaciones típicas, á las cuales son referibles las infinitas direcciones internas de que puede ser orígen cualquiera de los puntos determinables en su interior. Vemos á la Aritmética avanzar indefinidamente en la série de sus combinaciones factoriales, y al Álgebra formular con igual indefinicion las leyes de esta combinacion productiva, sin que haya un límite ó punto del progreso serial en que aparezca la mas ligera sombra de imposibilidad intuitiva ó conceptual; y cuando se trata de someter á combinacion factorial las magnitudes lineales, el progreso combinatorio se detiene de repente en la disposicion ternaria de las dimensiones, como llegando á un máximum de plenitud que entonces tiene la intuicion posible en los límites internos del espacio. El espacio inmensurable é infinito en cualquiera de estas direcciones típicas que en él son determinables, es limitado respecto de la distincion y número de estas direcciones, sin que el mayor esfuerzo de la imaginacion, tan poderosa para extender sin término y para aclarar la intuicion geométrica en todas y cada una de las tres direcciones, sea parte para descubrir ni siquiera idealmente, un nuevo rumbo ó direccion que caiga bajo alguna de ellas como determinacion propia. La imaginacion humana se encierra tambien en los límites insalvables del espacio.

Menester es convenir en que esta limitacion intuitiva, en cuyo seno se desenvuelve toda determinabilidad geométrica, es consecuencia necesaria de nuestra constitucion *sensible*, en la que no tiene poca parte nuestra constitucion *orgánica*: sentimos así, y así percibimos, porque tenemos *tantos* y *tales* sentidos, porque á la manera que si de nuestra actual constitucion sensorial pudiésemos eliminar la intervencion del sentido del *tacto*, que parece completar la particular extension de los cuerpos en tres dimensiones, quedarian todos los objetos como proyectados en un plano, porque proyectiva es, y exclusivamente superficial, la *Geometría de la vista*; de igual modo es concebible que una riqueza sensorial mayor que la humana ampliaría en nuevos órdenes de direcciones fundamentales esa intuicion inmanente y pura del espacio, que es en nosotros el único campo, y como la forma única, en que nos pueden ser dados los objetos como extensos, como divisibles, como impenetrables, en fin, como cuerpos.

La Geometría encerrada en la intuicion de espacio no es absoluta, sino en cuanto es absoluta nuestra constitucion sensible, porque las cosas no son extensas en más ó menos dimensiones en sí mismas, é independientemente de nuestra forma de intuicion, sino cuando son puestas en relacion con nuestra capacidad ó receptividad sensorial, la cual, mientras sea la que es nuestra constitucion humana, limita la intuicion del espacio, en el cual todo se da y se recibe con tres dimensiones fundamentales.

Tal es la naturaleza del espacio, segun el concepto transcendental que de él podemos formar para una razonable y crítica explicacion del conocimiento sensible. Las teorías del imaginarismo en el concepto relativo de la reciprocidad, presentan la contraposicion ó perpendicularidad de los factores como la ley de su multiplicacion; y en cumplimiento de esta ley, todos los productos geométricos realizados por sucesiva combinacion factorial, llegan á completar la plenitud de dimensiones del espacio, deteniéndose en el mismo límite á que aquel reduce la distincion y número de sus direcciones fundamentales. La doctrina de la contraposicion adquiere un legítimo valor científico por su conformidad con la doctrina transcendental del espacio, y la teoría del imaginarismo recibe tambien el carácter de evidencia y transcendentalidad que es propio de aquella doctrina tan radical y tan profunda.

ARTÍCULO 10.

Resúmen de este libro.

La idea de *ángulo* ó relacion externa de los elementos geométricos descuella en todo este libro como ley general de la expresion geométrica de la contraposicion que ha de establecerse entre estos elementos cuando se consideran como factores: multiplicar en Geometría no es sino constituir en ángulo los elementos multiplicados.

Cuando los factores son dados en alguna de las cuatro posiciones absolutas, dos reales y dos imaginarias, en que se resuelve la categoría de la cualidad numérica ó extensiva, el ángulo eficiente del producto ha de ser absoluto, invariable y típico, como lo son en su género aquellas posiciones. El ángulo ha de ser *recto*, y como tal expresar la mas perfecta contraposicion y antítesis entre factores absolutos. *La multiplicacion geométrica se realiza por la constitucion en ángulos rectos de los factores.*

LIBRO CUARTO.

DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS EN EL ALGORITMO DE LA GRADUACION.

CAPÍTULO I.

GRADUACION ALGEBRÁICA.

ARTÍCULO 1.°

De la naturaleza de la graduacion.

Para formar ideas exactas acerca de lo que debe entenderse por *potencia de un número*, detengámonos en notar la impropiedad con que se la define diciendo que *es el producto que resulta de multiplicar un número por sí mismo cierto número de veces*; porque, fuera de que en esta definicion no se incluye la potencia primera de todo número, no comprendo cómo un número puede multiplicarse por sí mismo varias veces sin perder su identidad en la primera multiplicacion, y sin modificarse á cada acto multiplicativo. Lo que verdaderamente sucede, es que el número (raíz) no se multiplica por sí mismo más que en el acto primero, ó la *vez primera*; no siendo él, sino alguno de sus múltiplos, lo que en los actos sucesivos entra en combinacion con la raíz primitiva, ó *consigo mismo*.

Verdaderamente, esto es lo que quieren decir, aunque con grande inexactitud, los que emplean esa definicion de la potencia.

Pero la principal y mas transcendental equivocacion que hay en esta materia, consiste en considerar la elevacion á potencias como un caso particular de la multiplicacion, es á saber, el caso en que los factores son iguales cuantitativa y cualitativamente. Cierto es, que multiplicando se ejecuta, se realiza aritméticamente la potencia, así como sumando se practica un producto; pero á la manera que la multiplicacion como algoritmo propio, ó relacion especial de los números generadores de un producto, no puede confundirse con la simple yuxtaposicion sumatoria, del mismo modo debe distinguirse esencialmente la graduacion de la multiplicacion. Yo insisto en declarar á la multiplicacion como caso particular de la elevacion á potencias (el caso de una potencialidad recíproca referida á dos ó más bases) con más razon que la elevacion á potencias como caso particular de la multiplicacion.

La graduacion es un algoritmo especial, y aunque su realizacion práctica sea consumada por uno ó más actos multiplicativos (que en realidad se resuelven en actos sumatorios, esto es, en la síntesis general que domina en la Aritmética), su relacion teórica ó algebráica envuelve especiales conceptos intelectuales muy diversos de los que figuran en la multiplicacion.

Desde luego la graduacion excluye la reciprocidad; porque, bien mirado, no hay en ella más que una base que es desenvuelta, un número que es conducido á dar de sí y por sí mismo *cuanto puede* (potencia) por una evolucion que es sucesiva ó gradual hasta tomar respecto de su punto de partida (base ó raíz) la posicion ó tésis determinada por otro número ordinal (exponente).

ARTÍCULO 2.º

Conceptos que se aplican en la graduacion.

El exponente que determina la evolucion representa la nocion de *causa*: la potencia á que llega la evolucion representa la nocion de *efecto*, y la base ó raíz es el sujeto que recibe el influjo de la causa, y sin el cual fuera imposible la evolucion. No es muy exacta la idea que generalmente se tiene del exponente, cuando se le considera como un mero indice, y como permaneciendo extraño al desarrollo, sin más oficio que el de señalar el grado que ha de tener este. La naturaleza del exponente influye en la de la evolucion de un modo más inmediato y hasta más perceptible que la de la raíz: él es un número determinante de la potencia, conservando al propio tiempo una independencia tal que nunca puede ser determinado *gradualmente* por la potencia y por la raíz. El estudio profundo de la generacion infinitesimal de las potencias demuestra que estas pueden ser dadas siempre por funciones del exponente y no de la raíz. La raíz es como el gérmen ó la materia de la evolucion, la que recibe el influjo causal del exponente, cuyo influjo determina el efecto, que es la potencia.

La base evoluble es, por lo tanto, una por esencia, y respecto de ella es imposible toda dualidad, toda antítesis, toda reciprocidad y toda contraposicion. No solo es una la base ó raíz, sino que todas sus potencias son de la misma especie que ella. Las potencias de una línea son siempre líneas. Una superficie no es potencia de una línea sino producto de dos líneas, porque la superficie no puede resultar sino de contraposicion limitativa de dos bases, á las cuales es referida simultáneamente como determinacion de su limitacion recíproca. El cuadrado de una línea no es su segunda potencia, ni el cubo su tercera. En la segunda potencia de una base lineal, la línea verdaderamente no se multiplica por sí misma, sino que se desenvuelve, se extiende *segun su longitud*, llegando á hacerse tantas veces mayor (longitudinalmente) que la base, cuantas esta lo es respecto de la unidad. Una cosa análoga sucede en la tercera y demás potencias de una línea. En la determinacion aritmética de esta longitud potencial es verdad que procedemos multiplicando; pero entonces no operamos sino sobre el valor aritmético de la raíz, cuyo múltiplo potencial debe obtenerse por la multiplicacion.

Tanta diferencia ha de ponerse entre el algoritmo de la graduacion y el de la produccion, como el que hay entre este y el de la suma, siempre que estos algoritmos se consideren segun tiene que considerarlos el Álgebra, como expresiones de funciones intelectuales esencialmente diferentes, esto es, siempre que los algoritmos no sean meras operaciones aritméticas, sino relaciones superiores y fundamentales entre números generadores de otro número. En la Aritmética hay que admitir, sin duda, una operacion fundamental y única que transciende á todas las otras operaciones, y las penetra y las liga en un sistema en que cada una de ellas es como derivacion ó caso particular de la anterior. Esta operacion fundamental es una síntesis primitiva é intuitiva, sin la cual no hay fenómeno ni intuicion empírica: esa síntesis en su estado primitivo es la *suma* de unidades que engendran los números: la síntesis de síntesis iguales anteriormente hechas es la *multiplicacion*, y la síntesis de síntesis de síntesis anteriores, es la *elevacion á potencias*. La Aritmética en sus procedimientos no aspira más que á representar los resultados intuitivos de esa síntesis universal en sus varias formas, y puede en rigor reducir todas las demás operaciones prácticas á la síntesis sumatoria. Pero el Álgebra, que no atiende más que al concepto de relacion de la cantidad y cualidad de todo número ó extension, ha de copiar en las relaciones algorítmicas los especiales é irreducibles conceptos que el entendimiento aplica en la relacion de todas las cosas, y no puede confundir la generacion por *síntesis* con la generacion por *antítesis*, ni con la generacion por *tésis*.

Los casos particulares (suma de sumandos iguales para la adicion y producto de factores iguales para la multiplicacion) son como vestigios de la intuicion numérica que todavía quedan en el Álgebra, la cual no ha podido, ni en mi juicio podrá, elevarse plenamente á la region conceptual del entendimiento, porque elevacion tan exagerada cortaria toda comunicabilidad, y por consiguiente toda deduccion ó aplicabilidad legítima de los conceptos á la region intuitiva pura del número, ó á la intuicion del tiempo, objeto de la Aritmética, y á la extension ó intuicion de espacio, objeto de la Geometría.

Entendida así la naturaleza puramente conceptual del algoritmo de la graduacion, se ve una admirable congruencia entre la Lógica y los hechos matemáticos mas vulgares. Los juicios hipotéticos de donde se desprende la categoría de causalidad que domina en la graduacion, consideran á la hipótesis ó condicion como causa lógica (antecedente) de la tésis ó condicionado (consiguiente) que es el efecto; y tal es la relacion entre el antecedente y el consiguiente, establecida por estos juicios. que el consiguiente depende del antecedente, y este es independiente de aquel El exponente, pues, que es indeterminable en el algoritmo de la graduacion por la potencia y por la raíz, y se concibe como independiente de una y otra, es la verdadera causa de la evolucion potencial; la potencia siempre determinada por la cantidad y cualidad del exponente (dada una base numérica) es el efecto de la evolucion; y la base ó raíz es el punto de partida, y como la materia ó sujeto de la evolucion misma. Sin ella no puede concebirse evolucion, como es inconcebible el efecto de una causa sin que la influencia de esta recaiga sobre algo.

ARTÍCULO 3.°

Graduacion cuantitativa.

La raíz como número ó como dimension, y en general como cantidad, ha de guardar una relacion numérica con la unidad, cuya relacion es la verdadera medida de la evolucion; además su afeccion ó cualidad primitiva ha de estar referida de alguna manera á la afeccion positiva y absoluta de la unidad. La evolucion, pues, ha de participar del doble carácter cuantitativo y cualitativo que es propio de la raíz; pudiendo estos dos conceptos aparecer alguna vez de una manera tan independiente como lo son entre sí el módulo y el argumento de toda cantidad.

Cuando la raíz ó base es la unidad misma, como no hay grado entre ella y la unidad, ninguna potencia puede dar grado diverso de la unidad. Todas las potencias de 1 son 1. La unidad elevada á cualquier potencia es 1. La unidad es una base verdaderamente inevoluble bajo el concepto de cantidad.

Si la unidad es positiva, todas sus potencias son la unidad positiva. La unidad positiva es base inevoluble cuantitativa y cualitativamente, esto es, como módulo y como argumento.

Cuando la raíz es un número entero, se refiere á la unidad como un verdadero múltiplo que la contiene un cierto número de veces como potencia primera. Luego el grado segundo ó potencia segunda ha de contener á la raíz cuantas veces esta contiene á la unidad, y por eso ha de multiplicarse la raíz por sí misma para realizar la segunda potencia: todos los grados ó potencias ulteriores se determinan por múltiplos de la raíz que se van conteniendo unos á otros en la misma razon que la raíz contiene á la unidad, y en esto se funda la multiplicacion sucesiva con que se van realizando. La potencia de un número entero es siempre número entero, mayor que la raíz y múltiplo de ella.

Cuando la raíz es un número fraccionario, está referida á la unidad como un submúltiplo, y léjos de contenerla, está contenida en ella. Las potencias ulteriores se irán conteniendo en las anteriores con la misma razon y por el mismo título que la raíz en la unidad, é irán siendo cada una un submúltiplo de la anterior. La potencia de un número fraccionario es siempre un número fraccionario menor que la raíz y submúltiplo de ella.

Bajo el concepto de cantidad, estas tres formas de la raíz constituyen una série de evolucion infinita, cuyo centro inevoluble es la unidad.

$$\&c.\ldots\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a},\ 1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4\ldots\ldots\ \&c.$$

Esta es la evolucion cuantitativa de las raíces bajo el influjo de un exponente entero y real.

Cuando el exponente, verdadera causa de la evolucion, es nulo, no hay evolucion numérica y no se sale de la unidad: luego cualquiera que sea la raíz a elevada á cero dará como potencia la unidad. Esa raíz, cualquiera que ella sea, tiene que revertirse á la fuente originaria de todo número. Así, tendremos

$$a^0 = 1$$

Si el exponente es la unidad, se considera la raíz en su primer grado de evolucion, esto es, tal como ella es en sí misma, en su relacion primitiva con la unidad. Toda cantidad es primera potencia de sí misma.

$$a^1 = a$$

El exponente fraccionario, como subordinado á la unidad, imprime á las potencias este mismo carácter respecto de la raíz, y hace que se refieran á ella de una manera regresiva, convirtiéndolas en raíces de ella, considerada por esto mismo como potencia. La potencia fraccionaria de una cantidad es verdadera raíz de esta cantidad. La graduacion no se constituye entonces por evolucion sino por involucion.

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$$

Si la raíz está sometida á una ley de evolucion negativa, se nos da á entender que ella no es un múltiplo sino lo contrario, un submúltiplo de la unidad, y que todas las evoluciones ulteriores han de tener la misma razon inversa respecto de la unidad. Luego se verificará que

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}\ ;\ \text{y por igual causa}\ \left(\frac{1}{a}\right)^{-m} = a^m$$

ARTÍCULO 4.°

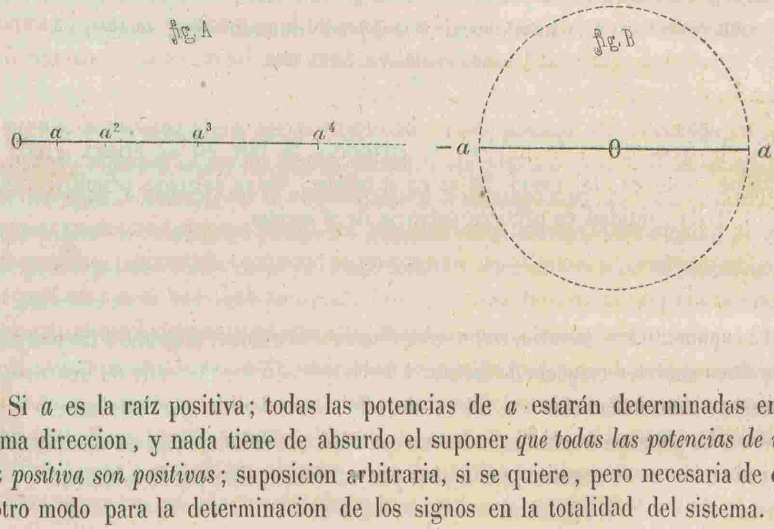
Graduacion cualitativa.

Ocupémonos ahora de la cualidad de las raíces, y de la correspondiente á las potencias y viceversa; y verémos como en esta interesante y transcendental investigacion se encuentra el fundamento de la teoría elemental de las cantidades imaginarias.

Y en primer lugar determinemos el signo de las potencias por el de las raíces.

Supongamos que la cualidad ó afeccion positiva así en el número como en la extension está referida á un punto de orígen que será el punto O de la figura 79, A.

Fig. 79



Si a es la raíz positiva; todas las potencias de a estarán determinadas en la misma direccion, y nada tiene de absurdo el suponer *que todas las potencias de una raíz positiva son positivas*; suposicion arbitraria, si se quiere, pero necesaria de este ú otro modo para la determinacion de los signos en la totalidad del sistema. La direccion positiva ha de establecerse como punto de partida para las demas direcciones y como eje de referencia de todas ellas.

Esto supuesto: veamos qué manera de evolucion tendrá una raíz negativa que ha de contarse desde O hasta $-a$ en la figura B.

Como esta raíz está diametralmente opuesta á la direccion primitiva ó cardinal y la potencia inmediata ha de ser respecto de la raíz lo que esta es respecto de la direccion primitiva de la unidad, síguese que la segunda potencia de una raíz negativa debe coincidir con la direccion positiva, esto es, que así como la raíz $-a$ ha tenido que suponerse apartada de a por todo el ámbito semicircular superior, tiene ahora en su potencia segunda que continuar su movimiento giratorio, y volver á tomar la direccion positiva Oa; de manera que $(-a)^2=a^2$.

Si continuando la evolucion de la misma raíz nos elevamos á otro grado, y constituimos la tercera potencia, volverémos á la direccion negativa de la raíz, y tendremos $(-a)^3=-a^3$.

La cuarta potencia se constituiria por una semievolucion más, que nos llevaria á la direccion primitiva Oa, reproduciéndose el mismo signo que en la segunda: luego $(-a)^4=a^4$.

Y así: *todas las potencias pares de raíz negativa dan* $+$ *y todas las impares dan* $-$.

$$(-a)^{2n}=+a^{2n} \text{ y } (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$$

Regla de los signos que no es privativa de la extension lineal, sino que es tambien aplicable á los números; porque en ellos se conciben igualmente como dos direcciones respecto de cero que es el centro de toda evolucion cualitativa.

Así queda explicada la cualidad de las potencias por la cualidad de las raíces, con la mera aplicacion de la teoría potencial evolutiva á los dos casos que considera el Álgebra ordinaria, á saber, raíz positiva y raíz negativa.

Cambiemos ahora de rumbo y procedamos de la potencia á la raíz, buscando la base correspondiente á una tésis evolutiva bajo una hipótesis ó exponente determinado.

La determinacion cuantitativa de una raiz depende de la potencia desenvuelta y del grado de la supuesta evolucion. Cuando la tésis no es, como suele decirse, una potencia perfecta, la raíz es inefable ó inexpresable aritméticamente, es lo que se llama un número sordo, inconmensurable con la unidad, y por lo tanto irracional. Se concibe en efecto, que cualquier número no es apto para determinar una raíz de un cierto grado por un retroceso involutivo hácia la unidad. Por lo mismo que todos los números no son potencias, no es dable fijar á todos una raíz. Pero la irracionalidad cuantitativa de que voy hablando, nada tiene que ver con la teoría de la evolucion cualitativa, ni ejerce influencia alguna en la consideracion algorítmica de las relaciones concebidas por el Álgebra. El imaginarismo es, cuando más, una irracionalidad puramente cualitativa. Veamos estos casos de involucion.

1.° Si la potencia es positiva, y el grado de involucion es impar, el signo de la raíz debe ser positivo, porque esta raíz se ha de hallar en la misma direccion en que está desenvuelta la potencia, y entre esta y la unidad, referida á esta unidad con arreglo al valor cuantitativo de la potencia, y al grado de la evolucion supuesta. Así tendremos

$$\sqrt[2n+1]{a}=+\sqrt[2n+1]{a}.$$

2.° Si la potencia es positiva y el exponente par, la raíz puede y debe llevar dos determinaciones cualitativas, puesto que esa potencia ha podido nacer de una raiz positiva que en todos los grados da tésis positiva, ó de una raiz negativa que da tésis positiva en los grados pares. Así:

$$\sqrt[2n]{a} = \pm \sqrt[2n]{a}.$$

El signo $\pm$ con que suele expresarse esta doble determinacion, impropiamente llamado *signo de ambigüedad*, debiera en mi juicio llamarse *signo de conjugacion*, porque realmente aquí la raiz se duplica, ó mejor dicho, se determinan dos raices que son conjugadas: pero adviértase que estas dos raices no son simultáneas ni cofactores de la potencia, sino sucesivas y alternativas, esto es, que cualquiera de ellas, desenvuelta segun el grado involutivo que sirvió para su determinacion, daria la potencia con su cualidad propia.

3.° Si la potencia es negativa y el grado impar, la raiz no puede tener el signo positivo, porque las raices positivas dan potencias positivas en todos los grados.

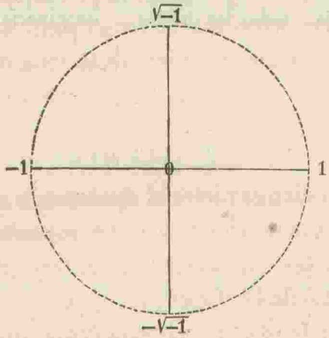
4.° ¿Cuál será la raiz que tenga por inmediata tésis ó por segunda potencia la direccion negativa —1? ó, lo que es lo mismo, ¿cómo deberá interpretarse la forma típica $\sqrt{-1}$?

La solucion de esta cuestion envuelve el fundamento de toda la teoría á cuya exposicion se consagra esta obra. Hasta aquí he supuesto la posibilidad y la existencia de cantidades indirectas ó imaginarias como resultado necesario de la aplicacion del concepto intelectual de limitacion, tan propio de la categoría de cualidad como el de afirmacion, que da orígen á las cantidades positivas, y el de negacion del que nacen las negativas. El símbolo $\sqrt{-1}$ no ha sido más que un signo de cualidad cuya historia estaba aplazada, y este plazo es llegado como uno de los casos comunes de la involucion ó extraccion de raices, esto es, el caso especial de raiz segunda de una cantidad negativa. La interpretacion de este caso es llana ahora que son conocidos todos los desarrollos que la preceden.

Si la potencia segunda, que suponemos sea —1, en la figura 80, ha de distar de la raiz tanto como esta dista de la unidad positiva, claro es que la raiz debe tener una direccion tal, que con solo repetir su distancia de la unidad positiva, coincida con la negativa; luego debe tener una posicion que tanto la aleje de $+1$ como de -1; pero esta posicion en su representacion geométrica no puede ser más que la perpendicular, luego el símbolo $\sqrt{-1}$ es un signo de perpendicularidad, y más generalmente de neutralidad entre lo positivo y lo negativo, de indireccion simultánea respecto de la direccion real que dan aquellas dos direcciones internas de la recta; un signo de indiferencia cualitativa en que se neutralizan las dos afecciones cardinales, la que afirma y la que niega, un signo, en fin, de mera limitacion porque se halla en el límite ó confin de las dos regiones positiva y negativa, y la línea que lleva esta afeccion neutra, limita realmente y separa las superficies negativas de las positivas.

Todo lo que llevo expuesto hasta aquí de la teoría transcendental, ha tenido por objeto poner en armonía la esencia del Álgebra con la verdad de esta interpretacion geométrica, y llegar á obtener la verdadera significacion de este símbolo singular dado por el Álgebra misma á impulso de la rigorosa consecuencia de sus elucubraciones. Ahora nos vemos obligados á aceptar la aparicion de este símbolo, de este signo de cualidad, omitido por los primeros inventores de la ciencia y concebido y dado á luz por la ciencia sola, porque ella es tal que se completa á sí misma, y se redondea y se reproduce por su propia vitalidad orgánica, que es la propia fuerza creadora del entendimiento.

Fig. 80



5.º Si la potencia es una imaginaria pura $\sqrt{-1}$, la raíz, cualquiera que sea su grado, es imaginaria: porque, representando esta potencia una direccion normal, cualquiera de sus raíces ha de hallarse dirigida oblícuamente y comprendida entre la potencia perpendicular y la direccion que sirve de eje. La inclinacion de la potencia imaginaria con el eje diametral, puede y debe concebirse como compuesta de tantas inclinaciones parciales como hay grados, y contando una de estas desde el eje hácia la potencia, ella será la inclinacion de la raíz: y como esta será siempre oblicua al eje, síguese que siempre será imaginaria.

Pero adviértase que este imaginarismo derivado y como secundario, cuya representacion geométrica es la oblicuidad, es de muy diversos géneros segun el grado de oblicuidad de la potencia y de la raíz; pero de todos modos, nunca podrán estas raíces caer en ninguna de las posiciones reales, porque por mucho que se divida la indireccion de la imaginaria normal ú oblícua que hace de potencia, nunca puede llegar á ser nula la inclinacion de la raíz por pequeña que sea.

Estas nuevas formas de imaginarismo doble, triple, &c., por el doble, triple, &, signo radical que envuelven, tienen un lugar tan preferente en la teoría potencial como las expresiones binómias de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$ en la suma y produccion. Realmente son las mismas imaginarias con forma radical.

Ahora me limitaré á presentar la siguiente sinopsis comprensiva de los cinco casos que he examinado.

Potencia			Raíz	
Potencia	Positiva...	grado impar es...	positiva......	Enunciados convertibles.
		grado par......	positiva......	
			negativa......	
	Negativa...	grado impar.....	negativa......	Enunciados no convertibles.
			imaginaria...	
		grado par........	imaginaria....	
	Imaginaria..	todos los grados..	imaginaria....	

Raíz.

CAPÍTULO II.

TEORIA ALGEBRÁICA DE LA GRADUACION DE LAS IMAGINARIAS.

ARTÍCULO 1.°

Producto aparente de $+\sqrt{-1}$ por $+\sqrt{-1}$

A las intuiciones geométricas propias del algoritmo de la graduacion corresponde el Álgebra con toda la prodigiosa fecundidad de sus fórmulas y de sus teorías. Tal es y tan perfecta la congruencia, que no parece sino que la teoría algebráica se ha hecho paso para recibir la interpretacion geométrica del imaginarismo, y nutrirse por ella de un sentido de que ahora carece, y adquirir una claridad que no tendrá nunca mientras el elemento $\sqrt{-1}$ sea considerado como un símbolo enigmático lleno de misterios y contradicciones.

Sometidas las expresiones imaginarias á los desarrollos propios del binómio de Newton, adquieren, si cabe, mayor amplitud y generalidad las interpretaciones geométricas, al paso que esta teoría del binómio, tan profundamente algebráica, tan eminentemente transcendental en sus infinitas aplicaciones, tan encarnada en todas las concepciones del órden y de la combinacion, que casi resume el Álgebra entera, viene á confirmar la significacion propia de estos símbolos tan infundadamente calificados de imposibles ó de absurdos.

Antes de proceder á la evolucion é involucion de una imaginaria pura, cuya forma típica es $\sqrt{-1}$, debo considerar el caso mas elemental de una aparente multiplicacion á que frecuentemente conduce el cálculo algebráico. Doy mucha importancia al desvanecimiento de esta apariencia.

El producto de $+\sqrt{-1}$ por $+\sqrt{-1}$ ó de $\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$ (suelen decir) es siempre -1, derogando el precepto general de la multiplicacion de radicales, en virtud del cual

$$(\pm\sqrt{-1})\times(\pm\sqrt{-1})=\sqrt{(-1)\times(-1)}=\sqrt{+1}=\pm 1.$$

Pero esta derogacion, que yo considero legítima en cuanto al resultado, acredita á su vez que la expresion gráfica $(\pm\sqrt{-1})\times(\pm\sqrt{-1})$ no es un genuino producto, y que su verdadera escritura en todos los casos debe ser $(\sqrt{-1})^2$, la cual conduce legítimamente, y sin derogacion ninguna, á la potencia segunda -1.

Porque no siendo el signo $\sqrt{-1}$ expresion de cantidad, sino de cualidad ó de direccion, la forma $(\pm\sqrt{-1})\times(\pm\sqrt{-1})$ supone una dualidad incompatible con la idea de direccion, la cual es idéntica á sí misma y siempre una, mientras se exprese con un mismo signo, sin poder distinguirse en factores iguales para verificar entre ellos una contraposicion como la que se intenta por aquella multiplicacion. Esta identidad y unidad de base, que tan esencial es en el caso presente, conduce por necesidad á un procedimiento evolutivo que no puede ser realizado, siquiera aritméticamente, por una contraposicion ó antítesis factorial. Este es el verdadero y el más puro ejemplo de *potencia irrealizable por producto*; este es el caso en que mas patente es la distancia y original diferencia de ambos algoritmos. Como nada hay de cuantitativo en que pueda determinarse una distincion y reciprocidad de factores, la multiplicacion es imposible; y como nada es mas propio de las direcciones que su cambio contínuo por una evolucion giratoria, el algoritmo que aquí puede tener lugar es el de la graduacion.

Cuando multiplicamos $a\sqrt{-1}$ por $a\sqrt{-1}$, el elemento cuantitativo a se contrapone á *otro distinto* aunque igual a produciendo una superficie; pero esta multiplicacion va necesariamente acompañada de un acto de potencialidad, del símbolo $\sqrt{-1}$ que por su evolucion da el signo $-$ como cualidad de la superficie producto: la multiplicacion recae sobre el módulo a y la evolucion sobre el argumento $\sqrt{-1}$, y no vemos en este ejemplo más que el empleo simultáneo de dos algoritmos esencialmente distintos. Por lo demás, tan cierto es que la graduacion se distingue de la produccion, que los matemáticos, aún sin pensar en ello, rechazan la idea de producto cuando declaran absurdo el resultado ± 1, y no ven en este caso singular más que una evolucion potencial.

Este razonamiento deja sin validez la especie de excusa en que fundan generalmente los algebristas la preferencia que dan al resultado -1 sobre el ± 1. Ellos dicen: «que como se conocen los factores -1 y -1 que dan orígen á la potencia

$+1$ que está bajo el radical, no hay lugar á la combinacion que se expresa por el signo $\pm$, y el producto de los radicales será -1, sin que por eso se derogue la regla general de la multiplicacion de radicales»; como si la mayor ó menor generalidad de las reglas, y la interpretacion legítima de los resultados algebráicos pudiese depender nunca de ese hecho tan accidental y tan extraño de que sea ó no sea conocida una circunstancia de los elementos del cálculo, cuando esta circunstancia es de tal naturaleza que no influye en aquella generalidad ni en aquella interpretacion. El producto ± 1, caso de serlo, no sería ambíguo sino doble ó conjugado. La ambigüedad es un estado intelectual, incompatible con la fatal exactitud de las especulaciones algebráicas. Todo resultado legítimo ha de tener una traduccion regular, verdadera y necesaria en el campo de la ciencia pura, por más que en su aplicacion empírica no siempre cuadre con el sentido concreto de la cuestion que se resuelve. Ante el rigor invencible del Álgebra deben ceder las formas no siempre analógicas del lenguaje en que se proponen las cuestiones concretas. No siendo así, nunca tiene derecho ni razon el Álgebra para declarar, como declara, algunas de ellas imposibles ó absurdas. Si, pues, el resultado $\sqrt{+1}$ ó ± 1 procede de una multiplicacion algebráica, en que nada concreto hay que limite la generalidad de su ley, el resultado es legítimo bajo ambos signos $+$ y $-$ sin ambigüedad ni duda. Luego si este signo $\pm$ es desechado, como incompatible con toda la teoría ordinaria de las cantidades imaginarias, desecharse debe tambien la supuesta multiplicacion de donde legítimamente naceria, y considerarse la expresion $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ como *una potencia que no puede ser producto*; una potencia segunda $(\sqrt{-1})^2$ que neutraliza el efecto de una raíz segunda y deja con su propio signo la cantidad subradical.

ARTÍCULO 2.°

Evolucion de las imaginarias puras.

Con la interpretacion verdadera del aparente producto $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ tiene el Álgebra expedito el camino para la evolucion de las imaginarias puras de la forma $\sqrt{-1}$, y la explicacion de su periodismo y de su simetría.

1.° La série de potencias de $\sqrt{-1}$ está sujeta á un periodismo cuaternario, cuya ley es visible en el siguiente cuadro:

$$(\sqrt{-1})^0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 1$$
$$(\sqrt{-1})^1 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = \ldots\ldots\ldots - 1$$
$$(\sqrt{-1})^3 = (-1)^{\frac{3}{2}} = (-1) \times (-1)^{\frac{1}{2}} = \ldots - \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^4 = (-1)^{\frac{4}{2}} = (-1)^2 = \ldots\ldots\ldots + 1$$
$$(\sqrt{-1})^5 = (-1)^{\frac{5}{2}} = (-1)^2 \times (-1)^{\frac{1}{2}} = \ldots + \sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^6 = (-1)^{\frac{6}{2}} = (-1)^3 = \ldots\ldots\ldots - 1$$
&c. &c. &c. &c.

Siempre se hallarán los cuatro resultados sucesivos,

$$+1\ ,\ +\sqrt{-1}\ ,\ -1\ \text{y}\ -\sqrt{-1}$$

correspondientes á las cuatro tésis fundamentales, en que se va constituyendo un radio que gira ó que recibe una evolucion circular, como hemos visto en la figura 80.

La demostracion algebráica de este hecho notable es la traduccion fiel de la representacion geométrica.

Para dar esa demostracion basta considerar que todo número mayor que 3 y designado por m, puede ser representado por la siguiente igualdad

$$m = 4n + p$$

siendo n el cociente, y p el resíduo de la division por 4.

En virtud de esta suposicion, tendremos que

$$(\sqrt{-1})^m = (\sqrt{-1})^{4n+p}$$

pero siempre se verifica

$$(\sqrt{-1})^{4n+p} = (\sqrt{-1})^{4n} \times (\sqrt{-1})^p = (-1)^{2n} \times (\sqrt{-1})^p = (\sqrt{-1})^p,$$

luego es evidente la igualdad

$$(\sqrt{-1})^m = (\sqrt{-1})^p,$$

y como p no puede ser más que 0, 1, 2 y 3, todas las potencias de $\sqrt{-1}$ estarán comprendidas en las cuatro capitales

$$(\sqrt{-1})^0,\ (\sqrt{-1})^1,\ (\sqrt{-1})^2 \text{ y } (\sqrt{-1})^3$$

que nos dan las cuatro formas irreducibles

$$1,\ \sqrt{-1},\ -1 \text{ y } -\sqrt{-1}.$$

En el desarrollo de este cálculo ha podido notarse que n (cociente de la division de m por 4) representa giros totales que constituyen una ó muchas circunferencias, y que por consiguiente no aparecen como resultados explícitos diferentes de $+1$; y que p (resíduo de la misma division) representa el primero, segundo, tercero ó cuarto cuadrante de toda la evolucion circular. Cuando p es cero, no hay resíduo, y la evolucion se detiene exactamente en la direccion $+1$ despues de haber recorrido una ó muchas circunferencias enteras, tantas como unidades tiene el cociente n.

Del periodismo de las potencias de $\sqrt{-1}$ se infiere un modo fácil de determinar una cualquiera de ellas: para esto no hay más que dividir su exponente por 4 y dar á la potencia la forma correspondiente al resíduo, que no podrá ser sino 0, 1, 2 ó 3. Así:

$$(\sqrt{-1})^7 = (\sqrt{-1})^{\frac{7}{4}} = (\sqrt{-1})^3 = -\sqrt{-1}.$$

2.° Cuando el símbolo $\sqrt{-1}$ que ha servido de base al desarrollo potencial se toma con signo negativo, esto es, cuando la base tiene respecto de la unidad positiva la distancia de tres cuadrantes, todas las tésis ó potencias sucesivas se constituirán recorriendo este mismo arco, é irán apareciendo en el mismo órden que si recorriesen un solo cuadrante, pero en sentido inverso al anterior: las formas, pues, de la potencias, serán las mismas que las de la base $\sqrt{-1}$, pero aparecerán en órden inverso. Esta sucesion, enteramente inversa de la anterior, podria inferirse de ella con solo tomar sus términos de tres en tres, puesto que 3 son los cuadrantes ó unidades graduales que la raíz $-\sqrt{-1}$ recorre al constituir cada potencia.

El cálculo algebráico da un desarrollo potencial que reune estas circunstancias. Así, si el grado es m, tendremos:

$$(-\sqrt{-1})^m = (-\sqrt{-1})^{4n+p} = (-\sqrt{-1})^{4n} \times (-\sqrt{-1})^p;$$

y como el primer factor es lo mismo que

$$(-1)^{4n}\times(\sqrt{-1})^{4n}=(-1)^{4n}\times(-1)^{2n}=(+1)\times(+1)=+1\,,$$

tendremos fácilmente

$$(-\sqrt{-1})^{m}=+1\times(-\sqrt{-1})^{p}=(-\sqrt{-1})^{p}$$

Esto es, que las potencias de $-\sqrt{-1}$ son periódicas como las de $\sqrt{-1}$, bastando, para determinarlas todas, conocer las cuatro primeras del siguiente desarrollo, que son las correspondientes á los cuatro valores 0, 1, 2 y 3 de p.

$$
\begin{array}{l}
(-\sqrt{-1})^{0}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots+1\\
(-\sqrt{-1})^{1}=\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots-\sqrt{-1}\\
(-\sqrt{-1})^{2}=(-1)^{2}\times(\sqrt{-1})^{2}=\dots\dots-1\\
(-\sqrt{-1})^{3}=(-1)^{3}\times(\sqrt{-1})^{3}=\dots\dots+\sqrt{-1}\\
(-\sqrt{-1})^{4}=(-1)^{4}\times(\sqrt{-1})^{4}=\dots\dots+1\\
\quad\&c. \qquad\qquad \&c. \qquad\qquad \&c.
\end{array}
$$

Reproduciéndose hasta lo infinito el mismo periodismo de las cuatro formas típicas

$$1,-\sqrt{-1},-1 \text{ y } +\sqrt{-1}$$

correspondientes á las cuatro anteriores

$$1,+\sqrt{-1},-1 \text{ y } -\sqrt{-1}\,.$$

Donde se ve que siendo los mismos los términos reales, llevan signos opuestos los imaginarios. Esto basta para la inversion del órden en el período, y para que la evolucion de la imaginaria negativa se verifique en sentido inverso al que sigue la positiva.

De aquí se infiere inmediatamente que la suma de dos evoluciones potenciales de los dos símbolos $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ es siempre una cantidad real, porque los términos imaginarios llevan signos contrarios en ambos desarrollos, y deben por consiguiente desaparecer.

3.° Tiene el símbolo $\sqrt{-1}$ una propiedad notable, que consiste en que sus potencias negativas son las mismas que las potencias positivas de la imaginaria negativa $-\sqrt{-1}$. La razon geométrica de esta congruencia es óbvia: un exponente negativo como $-m$ puede concebirse descompuesto en $-1\times m$: el factor -1, que establece una distancia semicircular respecto del $+1$, traslada la imaginaria positiva á quien afecta á la misma posicion que tiene la negativa, quedando una y otra bajo el exponente positivo m que las hace girar por los mismos términos: de suerte que

$$(\sqrt{-1})^{-m}=(\sqrt{-1})^{-1\times m}=(-\sqrt{-1})^{m}\;;$$

luego en general tendremos

$$(\sqrt{-1})^{-m}=(-\sqrt{-1})^{m}.$$

En el cálculo algebráico se llega á idéntico resultado, porque siendo

$$(+\sqrt{-1})^{-m}=\frac{1}{(+\sqrt{-1})^{m}}=\frac{(-\sqrt{-1})^{m}}{(+\sqrt{-1})^{m}\times(-\sqrt{-1})^{m}}$$

y verificándose, además, que

$$\begin{aligned}(+\sqrt{-1})^{m}\times(-\sqrt{-1})^{m}&=\left[(+\sqrt{-1})\times(-\sqrt{-1})\right]^{m}\\&=\left[-(\sqrt{-1})^{2}\right]^{m}=\left[-(-1)\right]^{m}=(+1)^{m}\\&=+1\;;\end{aligned}$$

fácilmente se deduce el resultado que nos proponiamos demostrar.

Donde es digna de notarse la correlacion necesaria que aparece entre el signo exterior del radical y el del exponente, en virtud de la cual la imaginaria, cualquiera que ella sea, no pierde su identidad como valor algebráico ni como representacion geométrica, aún cuando se cambien ambos signos simultáneamente. Así

$$(\pm\sqrt{-1})^{\pm m}=(\mp\sqrt{-1})^{\mp m}$$

y tambien

$$(\pm\sqrt{-1})^{\mp m}=(\mp\sqrt{-1})^{\pm m}$$

De esta igualdad fundamental se infiere inmediatamente que la série de las potencias negativas de $\sqrt{-1}$ es la siguiente:

$$(\sqrt{-1})^{-1}=-\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{-2}=-1$$
$$(\sqrt{-1})^{-3}=+\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^{-4}=+1$$
&c.

que es tambien periódica con período cuaternario enteramente igual al que da $-\sqrt{-1}$ con exponente positivo.

Es, pues, el periodismo un hecho constante de la evolucion potencial de $\pm\sqrt{-1}$: hecho natural y sencillísimo, cuando la potencialidad se explica geométricamente por una circunvolucion, y absolutamente incomprensible en la teoría ordinaria que considera la graduacion como un caso particular de la multiplicacion.

En la explicacion transcendental de la categoría de cualidad se encuentra la razon *à priori* de este periodismo cuaternario: hemos visto que aquella teoría conduce necesariamente á una codivision y subdivision recíprocas de toda cantidad bajo el concepto de cualidad. Toda cantidad es real ó imaginaria, y en cada uno da estos dos miembros se subdivide en positiva y negativa, ó es positiva ó negativa, subdividiéndose cada una de ellas en real ó imaginaria. De cualquier manera que se consideren estas divisiones, que se compenetran, dan cuatro miembros de calificacion absoluta bajo el concepto de cualidad.

La cantidad real positiva cuyo argumento es $+1$
El de la cantidad imaginaria positiva...... $+\sqrt{-1}$
El de la real negativa................. -1
Y el de la imaginaria negativa.......... $-\sqrt{-1}$

que son las cuatro direcciones cardinales señaladas en un plano indefinido por dos ejes ortogonales, como se ve en la figura 80.

ARTICULO 3.°

Involucion de las imaginarias puras.

Partiendo de la imaginaria pura $\sqrt{-1}$ considerada como potencia, pueden tambien determinarse las raíces concibiendo un desarrollo regresivo hácia la unidad positiva en el cual ha de dividirse y subdividirse la inclinacion ó arco total de la potencia segun la inclinacion del exponente de la raiz que se busca (*Fig.* 81).

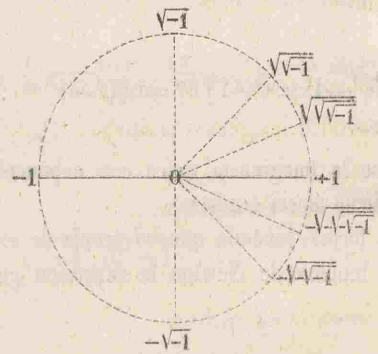
Así la raíz segunda de $\sqrt{-1}$. ó bien $\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}$ debe representarse por una direccion oblícua que media entre la unidad positiva, y la potencia $\sqrt{-1}$.

La raíz cuarta de $\sqrt{-1}$ ó sea $\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}=\sqrt[8]{-1}$ media entre la unidad positiva y la raíz segunda.

Partiendo de $-\sqrt{-1}$ como potencia, se obtendrian las raíces inferiores por idéntica subdivision del arco que mide la potencia $-\sqrt{-1}$.

Una continua subdivision del arco que mide la inclinacion de la potencia, iria dando como representacion de las raíces sucesivas radios más y más inclinados al real $+1$. La inclinacion nunca desaparece mientras el exponente tiene un valor finito, de donde se infiere que todas las raíces pares subcesivas de una imaginaria son imaginarias. La consideracion algebráica de estas raíces prueba su imaginarismo necesario porque su exponente, hecha la reduccion de los radicales, siempre es bipar.

Fig. 81



Si en vez de raíces pares subcesivas quisiéramos determinar la raíz de un grado cualquiera m de $\sqrt{-1}$ dividiriamos directamente el arco de la potencia en tantas partes iguales como unidades tuviera el exponente m y la recta tirada por el punto de division más próximo al radio real, que hace de unidad, expresaria la raíz deseada, la cual sería siempre imaginaria como oblícua al radio real, imaginarismo necesario algebráicamente porque la forma $\sqrt[m]{\sqrt{-1}} = \sqrt[2m]{-1}$ siempre es imaginaria.

Iguales consideraciones ofrece la involucion de la imaginaria negativa $-\sqrt{-1}$ con la única diferencia de que el arco que aquí se divide y subdivide es de tres cuadrantes, y como este arco sometido á una division en m partes iguales no puede dar ni 0, ni 2, ni 4 cuadrantes para la inclinacion de la raiz, se sigue que ésta en todos los casos ha de ser imaginaria.

ARTÍCULO 4.°

Graduacion de las imaginarias afectas ó binómias.

Toda imaginaria afecta tiene la forma general $\sqrt[2m]{-1}$, en la que m expresa el número de partes iguales en que se divide la inclinacion de $\sqrt{-1}$ considerada como potencia respecto de la unidad positiva, porque

$$\sqrt[2m]{-1} = \sqrt[m]{\sqrt{-1}}\,.$$

De la teoría algebráica ordinaria de los exponentes se infiere que

$$\sqrt[2m]{-1} = (-1)^{\frac{1}{2m}} = (\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\ ;$$

y por consiguiente que la imaginaria típica con exponente fraccionario expresa siempre imaginaria oblícua afecta ó mista.

Para demostrar la forma binómia que es propia de estas imaginarias, sometamos al desarrollo del binómio de Newton la expresion general de la imaginaria afecta $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$.

Esta puede ser preparada como el desarrollo exige, observando que una cantidad cualquiera es igual á sí misma más y menos la unidad, y por consiguiente

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = \left[1 - (1 - \sqrt{-1})\right]^{\frac{1}{m}}$$

Desenvuelta esta expresion, segun la fórmula general del binómio, da la série infinita que sigue:

$$\left[1-(1-\sqrt{-1})\right]^{\frac{1}{m}}=1-\frac{1}{m}(1-\sqrt{-1})$$

$$+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)}{1\cdot 2}(1-\sqrt{-1})^2$$

$$-\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(1-\sqrt{-1})^3$$

$$+\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}-3\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(1-\sqrt{-1})^4\ldots\text{\&c.}\ (\Delta)$$

pero antes conviene determinar la forma que deben tener las potencias sucesivas

$$(1-\sqrt{-1})^1,\ (1-\sqrt{-1})^2,\ (1-\sqrt{-1})^3,\ (1-\sqrt{-1})^4,\ \text{\&c.}$$

Estas, bajo una forma general $(1-\sqrt{-1})^p$, sometidas de nuevo á la fórmula de Newton dan la série infinita

$$(1-\sqrt{-1})^p=1-p\sqrt{-1}+\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}(\sqrt{-1})^2-\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\sqrt{-1})^3\ldots$$

de donde poniendo, en vez de

$$\sqrt{-1},\ (\sqrt{-1})^2,\ (\sqrt{-1})^3,\ \text{\&c.},$$

sus valores periódicos

$$\sqrt{-1},\quad -1,\quad -\sqrt{-1},\ \text{\&c.},$$

resulta la série

$$(1-\sqrt{-1})^p=1-p\sqrt{-1}-\frac{p(p-1)}{1\cdot 2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\sqrt{-1}+\text{\&c.}$$

en la cual si hacemos igual á a_p la suma de los términos reales, y á b_p la de los coeficientes de los imaginarios, tendrémos:

$$(1-\sqrt{-1})^p = a_p + b_p\sqrt{-1}$$

como forma general de la potencialidad de $1-\sqrt{-1}$, cuyos casos particulares de $p=1$, $p=2$, $p=3$, &c., tendrán las formas

$$a+b\sqrt{-1}\ ,\ \ a_2+b_2\sqrt{-1}\ ,\ \ a_3+b_3\sqrt{-1}\ ,\ \ a_4+b_4\sqrt{-1}\ , \text{\&c.}$$

Substituyendo ahora estas formas particulares en lugar de las respectivas potencias de $1-\sqrt{-1}$ en la série (Δ), y expresando para mayor sencillez los coeficientes por A_1, A_2, A_3, &c., tendremos la série

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = 1 - A_1(a_1+b_1\sqrt{-1}) + A_2(a_2+b_2\sqrt{-1}) - A_3(a_3+b_3\sqrt{-1},$$

y hechas las multiplicaciones indicadas, se convertirá en la siguiente (Δ')

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = 1 - a_1A_1 - b_1A_1\sqrt{-1} + a_2A_2 + b_2A_2\sqrt{-1} - a_3A_3 - b_3A_3\sqrt{-1} + ..$$

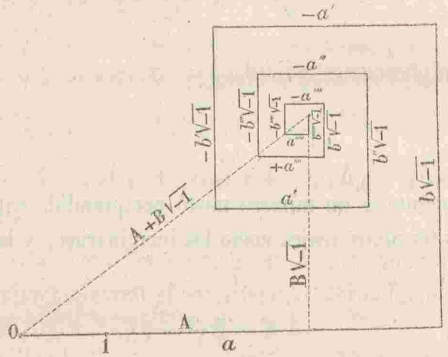
Designando de nuevo por A la suma de los términos reales, y por B la de los coeficientes de los imaginarios, obtendrémos la forma definitiva de esta potencialidad fraccionaria

$$(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}} = A + B\sqrt{-1}\ .$$

Resultado algebráico que nos dice *que una raíz cualquiera de* $\sqrt{-1}$ *tiene siempre la forma binómia* $A+B\sqrt{-1}$ *y es imaginaria*, segun queda consignado en el artículo anterior.

La traduccion geométrica de esta fórmula es llana: el binómio $A+B\sqrt{-1}$ es una representacion de la oblícua $(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$ referida á los dos ejes horizontal y vertical. A es la abcisa, y $B\sqrt{-1}$ es la ordenada con su perpendicularidad propia. Los valores absolutos aritméticos ó modulares están dados por los coeficientes de todos los términos del desarrollo (Δ'), donde es de notar que además del primer término 1, que es el rádio, todos los otros se siguen á pares con el mismo signo, constituyendo cada par un binómio con elemento real é imaginario. Con relacion al rádio constituido en el primer término, pueden construirse por adicion ó substraccion los elementos reales de cada binómio, y con relacion al eje vertical levantado sobre el orígen se construirán los elementos imaginarios. Cada uno de los términos real ó imaginario que se vaya incluyendo en la suma, irá dando incrementos ó decrementos, segun sus signos á la abscisa ó á la ordenada respectivamente, de suerte que la oblícua determinada por cada binómio se irá acercando por una especie de oscilacion á la distancia $\frac{1}{m}$ del cuadrante, tanto más cuanto mayor sea el número de términos que se traduzcan. El número total de términos, que es infinito, fijará la verdadera posicion de la oblícua ó raíz $m.^{\text{sima}}$ de $\sqrt{-1}$ con los valores concretos de $A+B\sqrt{-1}$. Esta posicion definitiva es el límite de la oscilacion y de la totalidad de la série, como se ve en esta figura:

Fig. 82



Igual traduccion pudiera haberse hecho de la fórmula general (Δ), en que aparecen sin reduccion las varias potencias de $1-\sqrt{-1}$, porque si estas se realizan inmediatamente y por separado, de cada término resultará un binómio en que estarán distinguidos y modificados, por el respectivo coeficiente, los elementos reales y los imaginarios. Los términos definitivos de la série alternarán real con imaginario y se construirán de la misma manera con relacion á los dos ejes ortogonales.

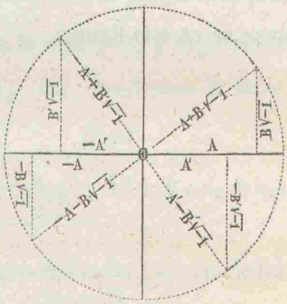
Cuando el exponente potencial de $\sqrt{-1}$, en vez de ser un número fraccionario (quebrado propio) es un número misto cuyo valor está comprendido entre

1 y 2, fácil es notar que todos los términos del desarrollo antes reales se hacen imaginarios, y los imaginarios se hacen reales cambiando estos de signo $\pm$. En este caso la nueva forma

$$-A'+B'\sqrt{-1}$$

representa las oblícuas comprendidas entre $\sqrt{-1}$ y -1, que tienen por proyecciones una abscisa negativa y una ordenada positiva. A' y B' representan los términos que eran antes respectivamente B y A (*Fig.* 83).

Fig. 83



Cuando el exponente es un número misto comprendido entre 2 y 3, cambian de signo $\pm$ así los términos reales como los imaginarios, y la expresion

$$-A-B\sqrt{-1},$$

á que equivale la série, representa las oblícuas del tercer cuadrante con abscisa y ordenada negativas.

Últimamente, si el exponente es misto entre 3 y 4, los términos imaginarios no cambian de signos $\pm$ al hacerse reales, y lo cambian los reales al hacerse imaginarios. La expresion

$$A'-B'\sqrt{-1}$$

representa las oblícuas del cuarto cuadrante con abscisa positiva y ordenada negativa.

La ley, al par que el fundamento, de estos cambios de signos aparece clara en las cuatro igualdades siguientes:

$$(\sqrt{-1})^{0+\frac{1}{m}}=(\sqrt{-1})^{0}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}=+1\times(A+B\sqrt{-1})=A+B\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{1+\frac{1}{m}}=(\sqrt{-1})^{1}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}=(\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})=-A'+B'\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{2+\frac{1}{m}}=(\sqrt{-1})^{2}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}=-1\times(A+B\sqrt{-1})=-A-B\sqrt{-1}$$

$$(\sqrt{-1})^{3+\frac{1}{m}}=(\sqrt{-1})^{3}(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}=(-\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})=A'-B'\sqrt{-1}$$

Los exponentes mistos mayores que 4, que lleven el mismo elemento fraccionario, reproducen el mismo período en la combinacion de los signos, porque

$$(\sqrt{-1})^4=+1:$$

el periodismo de estas oblícuas es cuaternario, y enteramente análogo al de las imaginarias puras: los cuatro casos que se han considerado se realizan en un sistema de ejes ortogonales inclinados al sistema primitivo segun un arco que es $\frac{1}{m}$ de la circunferencia.

Como caso particular de este desarrollo newtoniano puede considerarse aquel en que el exponente potencial de la imaginaria pura es número entero; la série que se desenvuelve nunca tiene la forma $A+B\sqrt{-1}$, sino que es cero alguno de estos elementos, tomando en cada caso diferente signo el elemento restante, y los cuatro casos serán:

$$(\sqrt{-1})^0=+A+0\sqrt{-1}=+A$$
$$(\sqrt{-1})^1=-0+B\sqrt{-1}=+B\sqrt{-1}$$
$$(\sqrt{-1})^2=-A-0\sqrt{-1}=-A$$
$$(\sqrt{-1})^3=+0-B\sqrt{-1}=-B\sqrt{-1}$$

&c. &c. &c.

Estos se reproducen en un periodismo perpétuo, en todos los números enteros mayores que 4.

Este caso es el ordinario de evolucion de las imaginarias puras.

Siempre ha de tenerse presente que A no significa más que término real y $B\sqrt{-1}$ término imaginario, cualquiera sea el valor particular que la determinacion numérica de los coeficientes pueda dar á cada término.

Si en la série del binómio que expresa potencias enteras de la imaginaria substituimos en vez de m los números naturales $0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ &c., los términos de la série numérica conducen á los mismos resultados:

Así, para

			Casos particulares de	
$m = 0$	la série se reduce al primer término, y es	$= +1$		$+\mathrm{A}$
$m = 1$	la série es $1 - (1 - \sqrt{-1}) \ldots\ldots$	$= +\sqrt{-1}$		$+\mathrm{B}\sqrt{-1}$
$m = 2$	» $1 - 2(1 - \sqrt{-1}) +$ &c. .	$= -1$		$-\mathrm{A}$
$m = 3$	» $1 - 4(1 - \sqrt{-1}) +$ &c. .	$= -\sqrt{-1}$		$-\mathrm{B}\sqrt{-1}$

$m = 4$ » se reproduce el primer valor y comienza el mismo período.

Por último, la igualdad

$$\left[(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\right]^{n} = (\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$$

que se deduce de la teoría ordinaria de los exponentes, expresa en general la relacion entre una involucion y una evolucion á que se somete sucesivamente la normal $\sqrt{-1}$.

Si $n > m$, el exponente $\frac{n}{m}$ es mayor que la unidad, y la imaginaria girará en sentido progresivo por un número p de cuadrantes si $n = pm$; ó recorriendo un número p de cuadrantes y una parte q de un cuadrante, si $n = pm + q$.

Si $n = m$, el exponente es 1, y no hay evolucion giratoria.

Si por úitimo $n < n$, la evolucion es regresiva dentro del primer cuadrante: es involucion que conduce á una raíz de $\sqrt{-1}$, y no á una potencia.

En la forma, pues, $(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ está cifrada la graduacion mas general de una imaginaria.

Y como es evidente que

$$(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \left[(\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\right]^{n},$$

tendremos que $(\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1})^{n}$ es tambien expresion legítima de esta graduacion potencial en su sentido mas genérico.

Desenvuelto este binómio por la fórmula newtoniana, resultarán como antes dos séries de términos, unos reales y otros afectos del símbolo $\sqrt{-1}$. Designando por α la suma de los términos reales, y por β la de los coeficientes de $\sqrt{-1}$, tendrémos de la manera mas general

$$(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}=(A+B\sqrt{-1})^{n}=\alpha+\beta\sqrt{-1}\ :$$

pero como el exponente n es entero, la série será finita en sus valores numéricos, y tales pueden ser las relaciones entre m y n que se reduzcan á cero los términos reales ó los imaginarios: en el primer caso, la potencia será imaginaria pura de la forma $0+\beta\sqrt{-1}$; en el segundo, será real de la forma $\alpha+0\sqrt{-1}$. Nunca pueden reducirse á cero simultáneamente los términos reales y los imaginarios.

No sucede lo mismo cuando la oblícua $A+B\sqrt{-1}$ en su forma concreta ó numérica se somete á un exponente fraccionario $\frac{1}{n}$, ó de ella se extrae la raiz del grado n: la série es entonces infinita, y nunca puede reducirse á cero ninguno de los elementos α ni β. La forma sumatoria de la série es por necesidad $\alpha+\beta\sqrt{-1}$.

En suma, es cierto que $(A+B\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$ siempre conduce á la forma $\alpha+\beta\sqrt{-1}$; pero no lo es que $(A+B\sqrt{-1})^{n}$ termine siempre en valores concretos de esta forma como respecto de la forma general se establece en las obras elementales. *Todas las raíces de imaginaria afecta son imaginarias*; *pero no lo son todas sus potencias*.

Las potencias generales negativas de una imaginaria afecta se realizan por evoluciones ó involuciones en sentido contrario al de las positivas, ó bien tomando por base la imaginaria afecta negativa y sometiéndola al influjo del mismo exponente con signo positivo. La razon de este hecho es análoga á la que he presentado respecto de las imaginarias puras: el exponente $-\frac{n}{m}$ puede tambien descomponerse en $-1\times\frac{n}{m}$, cuyo primer factor traslada la imaginaria positiva á la posicion de la negativa. Luego

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}}=(\sqrt{-1})^{-1\times\frac{n}{m}}=(-\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$$

El cálculo comprueba la verdad de esta congruencia geométrica: con efecto, las potencias negativas, que no expresan mas que una graduacion descendente por bajo del eje real de todo el sistema circular, esto es, por bajo de $(\sqrt{-1})^0 = 1$, pueden tener la expresion que se infiere de la conocida igualdad

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}};$$

y como ya hemos dicho que

$$(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \alpha + \beta\sqrt{-1};$$

síguese que

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

Multiplicando ahora ambos términos de esta fraccion por $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, y sabiendo que

$$(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad (*)$$

tendremos fácilmente la igualdad

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

Ahora bien: al mismo resultado llegarémos sometiendo al desarrollo newtoniano la base negativa $-\sqrt{-1}$, porque todos los términos imaginarios cambiarán de signo quedando sin alteracion los reales, y por consiguiente la fórmula que expresa el desarrollo será $\alpha - \beta\sqrt{-1}$.

Luego coincidirán las potencias negativas de la base positiva con las positivas de la base negativa, y tendrémos la identidad fundamental

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = (-\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}};$$

como en el caso de potencias enteras de la imaginaria pura en el que se verifica

$$(\sqrt{-1})^{-m} = (-\sqrt{-1})^{m}.$$

(*) Es decir, al radio que es la hipotenusa de los catetos α y β.

ARTICULO 5.º

Graduacion simétrica de las imaginarias.

Puesto que el exponente de la graduacion de las imaginarias representa el arco que las separa del eje real $(\sqrt{-1})^0$, ó sea la unidad positiva, la oposicion de signos de este exponente colocará las potencias y las raíces imaginarias con perfecta y regular simetría por cima y por bajo del eje real.

Además, las potencias y raíces homólogas de imaginarias simétricas serán simétricas, como conducidas por iguales grados en los dos sentidos ascendente y descendente respecto del eje real positivo.

Esta simetría geométrica puede tener todas las formas que se deducen del siguiente cuadro de relaciones simétricas:

$$(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = (-\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = \alpha + \beta\sqrt{-1} = (\alpha - \beta\sqrt{-1})^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta\sqrt{-1}}$$

$$(\sqrt{-1})^{-\frac{n}{m}} = (-\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} = \alpha - \beta\sqrt{-1} = (\alpha + \beta\sqrt{-1})^{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}}$$

El signo anteradical se considera bajo la influencia del exponencial, y por eso debe ir dentro del paréntesis.

No es lo mismo $(-\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ que $-(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$: la primera expresion es simétrica de $(\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$; la segunda es su conjugada ó su negativa.

La simetría puede referirse á cualquiera de los dos ejes, horizontal ó vertical.

En la forma binómia la diferencia de signos en los términos imaginarios, como

$$\left.\begin{array}{l} A + B\sqrt{-1} \\ A - B\sqrt{-1} \end{array}\right\} \text{simétricas},$$

denota simetría respecto del eje horizontal, como se ve en la figura 84; la diferencia en los reales, como

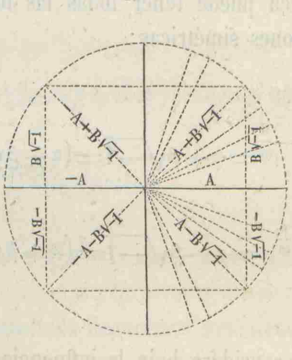
$$\left.\begin{array}{r} A+B\sqrt{-1} \\ -A+B\sqrt{-1} \end{array}\right\} \text{simétricas,}$$

simetría respecto del eje vertical; y la diferencia en ambos elementos, como

$$\left.\begin{array}{r} A+B\sqrt{-1} \\ -A-B\sqrt{-1} \end{array}\right\} \text{conjugadas,}$$

simetría respecto de ambos ejes, ó conjugacion, que es la simetría perfecta.

Fig. 84



Cuando la forma binómia no está desenvuelta, sino que va implícita en la pluraridad de los radicales, la simetría se expresa por la diferencia de signos que anteceden y se mezclan entre estos.

Cuando todos los signos se diferencian (excepto siempre el último que precede á la unidad y da fundamento al imaginarismo), hay simetría respecto del eje horizontal, como se advierte en la figura 85, relativamente á las expresiones

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}} \\ -\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}}} \end{array}\right\} \text{simétricas.}$$

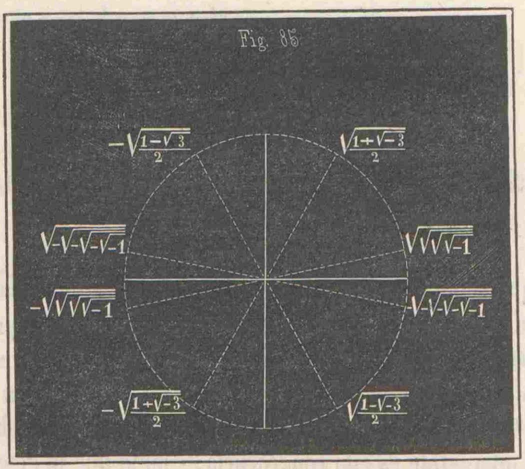
Cuando se diferencian todos menos el primero, simetría respecto del eje vertical, como

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}}\\ \sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}}}\end{array}\right\}\text{simétricas.}$$

Y cuando todos convienen, menos el primero, simetría perfecta ó conjugacion, como

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}}\\ -\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}}\end{array}\right\}\text{simétricas conjugadas.}$$

Fig. 85



Cuando la forma binómia está toda ella sometida á radicales, las condiciones de simetría son todas las de las dos formas anteriores, como

$$\left.\begin{array}{r}\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}}\\ \sqrt{\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}}\end{array}\right\}\text{simétricas.}$$

Fácil es comprender, segun la teoría de los complementos angulares, que *la conjugada de la simétrica en un eje es simétrica en el otro eje*, y que *la simétrica de la conjugada en un eje es simétrica en el otro eje.*

CAPÍTULO III.

DE LAS RAICES DE LA UNIDAD.

ARTÍCULO 1.°

Las raíces de la unidad debieran llamarse argumentales de la cantidad.

La teoría que demuestra el número y afecciones de la multitud de raíces de la unidad positiva ó negativa, es una de las mas decisivas comprobaciones de la doctrina del imaginarismo. Lo que el Álgebra enseña acerca de estas raíces extraordinarias, simbólicas y misteriosas, lo traduce la Geometría con pasmosa naturalidad, merced á la interpretacion de lo imaginario por lo perpendicular.

Tanto mas interesante es esta congruencia, cuanto que la determinacion de las raíces de la unidad en su genuina forma, que es imaginaria, es condicion precisa de la determinacion de las raíces de toda cantidad, que siempre han de ser tantas cuantas sean las de la unidad, su coeficiente necesario.

Si llamamos y á la raíz $m.^{\text{sima}}$ de 1, la ecuacion

$$y^m = 1 \quad \text{ó} \quad y^m - 1 = 0$$

dará en los varios valores de y la variedad de raíces de la unidad positiva.

Las de la unidad negativa procederán de la ecuacion

$$y^m = -1 \quad \text{ó} \quad y^m + 1 = 0$$

Todas las ecuaciones llamadas binómias pueden y deben ser traidas á la forma general

$$y^m \mp 1 = 0\,,$$

para dar, mediante las de la unidad, todas las raíces m. simas de cualquiera cantidad.

Si las de la unidad son, por ejemplo,

$$\alpha^0\,,\ \alpha^1\,,\ \alpha^2\,,\ \alpha^3\,,\ \ldots\ldots\ \alpha^{m-1}\,;$$

las de la cantidad A serán

$$\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha^2\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha^3\sqrt[m]{A}\ldots\ \alpha^{m-1}\sqrt[m]{A}\,;$$

y teniendo las de la unidad negativa la representacion

$$\alpha^1\,,\ \alpha^3\,,\ \alpha^5\,,\ \alpha^7\,,\ \ldots\ldots\ \alpha^{\frac{m-1}{2}}$$

las de la cantidad —A serán

$$\alpha\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha^3\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha^5\sqrt[m]{A}\,,\ \alpha^7\sqrt[m]{A}\ \ldots\ \alpha^{\frac{m-1}{2}}\sqrt[m]{A}\,.$$

Las raíces de la unidad merecen llamarse con razon *raíces argumentales de toda cantidad.*

Y como ellas, cualquiera que sea su forma, no pueden tener otro valor cuantitativo que la unidad, toda la diferencia que entre ellas hay (y el Álgebra demuestra que todas son diferentes) ha de ser meramente cualitativa, y serán argumentos ó coeficientes cualitativos de la única raíz aritmética ó modular de cualquiera cantidad.

ARTÍCULO 2.°

Raíces de la unidad positiva.

En la ecuacion $y^m - 1 = 0$ van implícitos m símbolos que dan m afecciones diversas á un mismo valor numérico, la unidad positiva, y por ella á la raíz aritmética de toda cantidad. Entre estos m símbolos podrá hallarse la misma unidad positiva cuando m es impar, ó la positiva y la negativa cuando m es par, y entonces los restantes, si han de ser diferentes de estas y entre sí, no podrán tener una forma real, sino imaginaria, recorriendo los varios grados de imaginarismo que hacen posible la transicion de $+1$ á -1, y de -1 á $+1$ si m es par, ó desde $+1$ hasta volver á $+1$, pasando por $m-1$ valores intermedios, si m es impar.

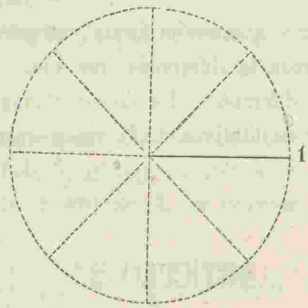
Este imaginarismo gradual y como transitorio está ya pidiendo una representacion geométrica radial ó evolutiva; porque solo una evolucion giratoria puede expresar estos grados de oblicuidad, estos matices y como degradaciones de imaginarismo, por los que se verifica la transicion. De esta manera una ecuacion de la forma $y^m-1=0$ sería una verdadera y perfecta irradiacion en que cada radio expresaria la afeccion y cantidad propias de cada raíz: la irradiacion sería, segun la bellísima frase de Monge, *un espectro semoviente* de las raíces. La ecuacion y la irradiacion quedarian en fin sometidas á una misma teoría, facilitándose la inteligencia, siempre obscura, de aquella por la vivísima claridad intuitiva de esta.

Tal es el sentido y la intencion del siguiente lema:

Si se divide la circunferencia en m *partes iguales, se tiran radios á los puntos de division y se considera uno de ellos como eje, todos los radios, al hacer* m *tésis respecto del eje, coincidirán con él.*

Cada movimiento ó mocion de un radio es una tésis que lo hace avanzar, siempre en un mismo sentido, recorriendo una distancia igual á la que él tiene en su posicion inicial respecto del eje. Esta posicion inicial es su primera tésis: la primera mocion que recibe es su segunda tésis: la mocion $(m-1)^{\text{sima}}$ es la tésis m^{sima} como indica la figura que sigue:

Fig. 86



Esto supuesto: sea n el número de arcos iguales que el radio evoluble dista del eje, que para mayor analogia supondrémos ser el horizontal positivo. Como el radio evoluble recorre en cada mocion tantos arcos cuantos él dista del eje, al hacer m mociones habrá recorrido $m\times n$ arcos: pero $m\times n$ siempre es divisible por m, y expresa en el cociente un número entero n de circunferencias ó giros completos respecto del punto de partida; luego el radio evoluble coincidirá siempre consigo mismo á la m.sima mocion después de hacer n giros; luego coincidirá con el eje á la mocion inmediatamente anterior ó $(m-1)$ sima. Pero esta es la m. sima tésis; luego coincidirá con el eje al hacer m tésis.

Luego si el eje se considera como unidad positiva y cada tésis como una verdadera potencia del radio evoluble, todos los radios de la irradiacion equiangular darán la unidad positiva al ser elevados á la potencia m: pero esta es condicion suficiente de todas las raíces m.simas de la unidad positiva; luego todos los radios de la irradiacion serán perfecta y simultánea representacion de las raíces de la unidad positiva que van implícitas en la ecuacion

$$y^m - 1 = 0 .$$

De ellas tambien se demuestra algebráicamente que cualquiera que sea su potencia p, siempre se tiene que

$$(y^p)^m = 1$$

porque siempre se verifica

$$(y^p)^m = y^{pm} = y^{mp} = (y^m)^p :$$

pero se supone que $y^m = 1$; luego $(y^m)^p = 1^p = 1$,

y por consiguiente $(y^p)^m = 1$ ó bien $(y^p)^m - 1 = 0$.

Que no pueden ser si no m las raíces de la ecuacion

$$y^m - 1 = 0 ,$$

bien puede inferirse de la naturaleza de la irradiacion, pues es evidente que entre los infinitos puntos de la circunferencia solo darán raíces adecuadas aquellos que haciendo m tésis respecto de la unidad lleguen á coincidir con ella.

Puede esto demostrarse suponiendo que se somete á evolucion otro radio intermedio, cuya distancia del eje sea $n+s$, siendo n, como antes, un número de arcos y s una parte cualquiera de otro arco. Al hacer m mociones este radio, habrá recorrido $m \times n + m \times s$ arcos, que, divididos por m, dan n circunferencias enteras, y una parte s de otra circunferencia: luego á las m mociones el radio evoluble no coincidirá consigo mismo: luego á la $(m-1)$.sima mocion, ó á la m.sima tésis, no habrá coincidido con el eje unidad. Pero esta coincidencia es condicion necesaria para ser raíz; luego este radio intermedio no será raíz m.sima de la unidad.

ARTÍCULO 3.°

Naturaleza de las raíces de $y^m - 1 = 0$.

Si m es par, todos los radios se conjugan de dos en dos, y al eje unidad positiva corresponde como conjugada la unidad negativa: todos los demás radios en número par son imaginarios. La ecuacion, cuya forma es

$$y^{2n} - 1 = 0$$

tiene, pues, dos raíces reales $+1$ y -1, y un número par de imaginarias. Cada imaginaria tiene su conjugada y su simétrica, y suponiendo que $2n = m$, las $\frac{m-2}{2}$ imaginarias superiores son conjugadas y simétricas con las $\frac{m-2}{2}$ inferiores. El eje de simetría está constituido por las dos raíces reales $+1$ y -1, y representado por el diámetro horizontal.

Si m es impar, no se conjuga ninguna raíz: á la unidad positiva, que es necesariamente raíz, no corresponde como tal la unidad negativa, y esta no figura en la irradiacion. Las demas raíces (siempre en número par) son imaginarias y simétricas, mitad superiores y mitad inferiores. La ecuacion, cuya forma es

$$y^{2n+1} - 1 = 0,$$

no tiene sino una raíz positiva, y un número par de imaginarias simétricas.

ARTÍCULO 4.°

Raíces de la unidad negativa.

Las m raíces de la unidad negativa que se deducen de la ecuacion

$$y^m + 1 = 0,$$

tienen tambien una disposicion radial, ó constituyen una irradiacion como las de la unidad positiva que he examinado.

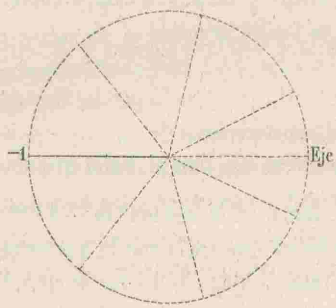
Hay, sin embargo, en ellas una doble referencia á la unidad positiva como eje fundamental de toda evolucion, y á la unidad negativa como tésis última determinada por el grado de la ecuacion. Estos dos conceptos se identifican en las ecuaciones de la forma

$$y^m - 1 = 0 .$$

Para demostrar la congruencia entre la irradiacion y la ecuacion $y^m + 1 = 0$ sirven los dos lemas siguientes:

Lema 1.º *Si se divide la circunferencia en un número impar de partes iguales, que llamarémos* m, *se tiran radios á los puntos de division, y se determina como eje la prolongacion de uno de ellos; todos los demás, al hacer* m *tésis respecto del eje, coincidirán con el radio cuya prolongacion sirvió de eje* (*Fig.* 87).

Fig. 87



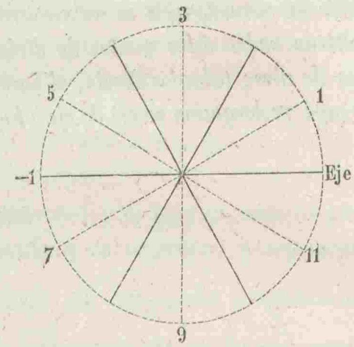
En efecto, si se llama n el número de arcos enteros que dista el radio evoluble del eje, su distancia será siempre $n + \frac{1}{2}$, y al hacer m mociones habrá recorrido $m \times n + \frac{1}{2} m$ arcos que dan n circunferencias enteras mas la mitad de otra circunferencia: luego tendrá una posicion contraria ó conjugada respecto de su posicion inicial: luego distará del radio que fue prolongado, una tésis ó la distancia del radio evoluble al eje: luego á la mocion inmediatamente anterior, ó $(m-1)^{\text{sima}}$, que es la tésis $m.^{\text{sima}}$, habrá coincidido con el radio que fue prolongado.

Luego si se supone que este radio prolongado es la unidad negativa, y su prolongacion ó eje la unidad positiva; todos los demás radios, incluso el prolongado, son raices de la unidad negativa, y la irradiacion representa fielmente la ecuacion $y^m + 1 = 0$.

Lema 2.º *Si se divide la circunferencia en* 2m *partes iguales, siendo* m *número* *par, se tiran radios á los puntos de division y se fija uno de ellos como eje; todos los* m *radios que tienen un lugar impar respecto del eje al hacer* m *tésis coincidirán con el radio conjugado del eje.*

Llamando n á cada una de las $2m.^{\text{simas}}$ partes de la circunferencia (*Fig.* 88), la distancia inicial del radio evoluble será siempre de $2n+1$ arcos: luego al hacer m mociones, habrá recorrido $2mn+m$ arcos, que, divididos por $2m$, dan

Fig. 88



$\left(n+\frac{1}{2}\right)$ circunferencias, esto es, dan al radio evoluble una posicion negativa ó conjugada con la inicial: luego en la mocion $(m-1)^{\text{sima}}$ inmediatamente anterior, ó en la tésis $m.^{\text{sima}}$ coincidirá este radio con la prolongacion del eje.

Esta prolongacion ó radio conjugado del eje se considera como unidad negativa: luego sus raíces están representadas por los radios impares 1.º, 3.º, 5.º, 7.º, &c., contados desde el eje; y la irradiacion de estos es el eschêma geométrico de las raíces de la unidad negativa en la ecuacion $y^m+1=0$ cuando m es número par.

Que el número de las raíces de esta ecuacion no puede pasar de m, se demuestra fácilmente segun lo dicho al hablar de las raíces de la unidad positiva.

ARTÍCULO 5.º

Naturaleza de las raíces de la ecuacion $y^m+1=0$.

En la irradiacion impar de la unidad negativa no hay real más que la unidad negativa: todas las demás $m-1$ raíces son imaginarias y simétricas representadas por los $\frac{m-1}{2}$ radios superiores y $\frac{m-1}{2}$ inferiores.

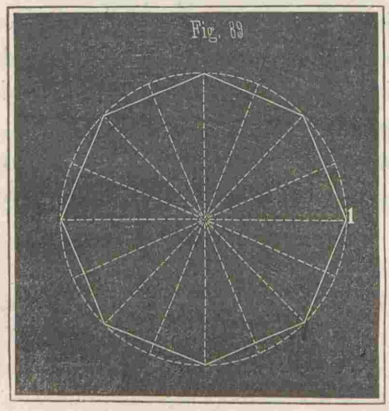
Cuando la irradiacion es par, ni el eje unidad positiva, ni su conjugado, unidad negativa, son impares respecto del eje mismo y no hay raíz real ni positiva ni negativa; todas ellas son imaginarias conjugadas y simétricas $\frac{m}{2}$ superiores y $\frac{m}{2}$ inferiores.

ARTÍCULO 6.°

Reproductividad de las raíces.

Las raíces de la unidad positiva, en su continua evolucion, no solo coinciden con ella al hacer m tésis, si no que antes de llegar á esta tésis definitiva reproducen en sus varios giros la unidad y todas ó algunas de las demás raíces. La ley de esta reproduccion, que permite expresar á unas por potencias ó tésis de las otras, depende de la relacion numérica de n potencia inicial de cada radio evoluble y m grado de la ecuacion. Los resultados de esta varia relacion son bien perceptibles en la irradiacion. No haré más que enunciarlos.

1.° Cuando m es divisible por n, el radio evoluble debe hacer tantos giros en que reproduzca la unidad cuantas unidades tiene n. Reproducirá asimismo tantas de las otras raíces cuanto sea el cociente de m por n. Esta reproduccion será regular y directa; de tal manera que, si en la irradiacion cada tésis se uniese con la siguiente por una cuerda, resultaria á las m tésis trazado un polígono regular ordinario de $\frac{m}{n}$ lados. Este polígono estaría sobrepuesto á sí mismo y como repetido n veces, segun indica la siguiente figura:



2.° Si m es número primo, cualquier radio evoluble no llega á la unidad hasta la tésis $m.^{sima}$, y en su discurso reproduce las demás raíces una tras otra, saltando por entre ellas segun el valor numérico de n. Estas incidencias no son directas ni subcesivas en el mismo sentido, si no alternadas; y si se expresasen por cuerdas, darian un polígono regular estrellado ó asteristico con m vértices, cuyo núcleo ó polígono interior sería el ordinario con m lados, como se ve en esta figura.

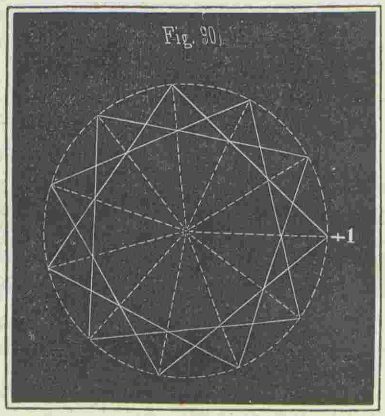


Fig. 90

3.° Cuando m y n tienen uno ó mas factores comunes, el radio evoluble reproduce la unidad tantas veces como unidades tiene el máximo comun divisor de m y n; reproduce además tantas raíces diversas cuanto sea el cociente de m entre c, siendo c el máximo comun divisor. El polígono trazado será ordinario de $\frac{m}{c}$ vértices ó lados, y estará c veces repetido ó superpuesto á sí mismo.

4.° Sea m par ó impar, primo ó compuesto, la primera raíz imaginaria ó la más inmediata al eje real reproduce todas las demas en órden subcesivo y regular coincidiendo con la unidad á su tésis $m.^{sima}$. La expresion de su curso será un polígono regular ordinario de m lados.

Todas las raíces pueden entonces ser expresadas por potencias subcesivas de la primera, indicando el exponente el órden con que se suceden en la irradiacion. Si la primera imaginaria, es α, (*Fig* 91), todas ellas serán

$$\alpha\,,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ \alpha^{m-1},\ \alpha^m\ (=\alpha^0=1)$$

Igual propiedad tiene la última raíz imaginaria inferior, la cual reproduce con sus potencias todas las demás raíces en órden subcesivo, pero inverso de la superior su simétrica. Si la última imaginaria es α^{m-1}, todas ellas serán

$$\alpha^{m-1},\ (\alpha^{m-1})^2,\ (\alpha^{m-1})^3,\ (\alpha^{m-1})^4,\ \ldots\ (\alpha^{m-1})^{m-1},\ (\alpha^{m-1})^m$$

esto es:

$$\alpha^{m-1},\ \alpha^{2m-2},\ \alpha^{3m-3},\ \alpha^{4m-4}\ \ldots\ldots\ \alpha^{m^2-2m+1},\ \alpha^{m^2-m}$$

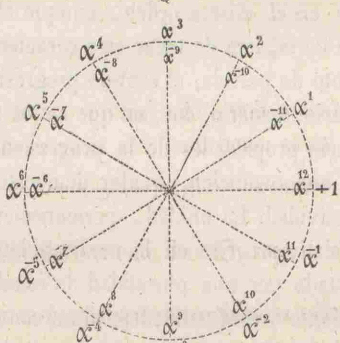
ó lo que es lo mismo,

$$\alpha^m\alpha^{-1},\ \alpha^{2m}\alpha^{-2},\ \alpha^{3m}\alpha^{-3},\ \alpha^{4m}\alpha^{-4}\ \ldots\ldots\ \alpha^{m^2}\alpha^{2}\alpha^{-m+1},\ \alpha^{m^2}\alpha^{-m}:$$

pero como $\alpha^m,\ \alpha^{2m}\ ..\ \alpha^{m^2}$ son siempre la unidad, el órden de las raíces será

$$\alpha^{-1},\ \alpha^{-2},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-4}\ \ldots\ldots\ \alpha^{-m+1},\ \alpha^{-m}\ (=\alpha^0=1)\ .$$

Fig. 91



En general, las simétricas tienen la misma ley de reproduccion, y las reproducidas van siendo tambien simétricas entre sí.

Respecto de las raíces de la unidad negativa podrian hacerse análogas observaciones acerca de su reproductividad.

La teoría más profunda de los polígonos está ligada íntimamente con la de las raíces imaginarias de la unidad. En una y en otra tiene grande importancia la divisibilidad de m por n. La exposicion algebráica de las consecuencias de esta divisibilidad forma parte de la teoría general de las ecuaciones. Recomiendo al lector que consulte los excelentes trabajos de Gauss, Poinsot y Chasles.

ARTÍCULO 7.°

Progresividad de las raíces.

Todas las raíces de la unidad correspondientes á un sistema forman una perfecta progresion geométrica cuando se consideran en un órden perimétrico ó segun su disposicion radial subcesiva, lo cual es muy digno de atencion, porque los signos + y — que estas raíces llevan, están acumulados, siendo positivas las superiores y negativas las inferiores de la irradiacion. Esta acumulacion aquí no es un obstáculo para la progresividad, como sin duda lo sería si se tratase de cantidades reales.

Es más: la progresion es eminentemente circular; de tal manera, que cualquiera de sus términos puede ser el primero, en cuyo caso será tambien el último de la primera circulacion y el primero de la segunda.

La razon de la progresion siempre es el segundo término de la irradiacion ó la primera imaginaria del sistema cualquiera que sea el primero de la progresion. El número de términos diferentes es m, ó el número de raíces.

Claro es que si todas ellas son potencias subcesivas de la primera ó última imaginaria, y se reproducen en el mismo órden, aunque el número de los términos que se consideren exceda de m, han de tener este carácter progresivo y periódico, cualquiera que sea el punto de partida, el sentido progresivo ó regresivo en que se los tome, y el órden binario, ternario, &c., en que se los cuente.

Estas y todas las demás propiedades de la progresion deben convenirles. Pero la realizacion de ellas en una evolucion circular demuestra el carácter meramente cualitativo de esta progresividad. La unidad, permaneciendo idéntica á sí misma bajo el concepto de cantidad, *progresa* en la modificacion de su cualidad, pasando de un estado al mismo estado por una pluralidad de estados intermedios, teniendo un máximum de apartamiento y confundiéndose al fin consigo misma en su afeccion ó posicion primera.

En la teoría radical, fraccionaria y combinatoria de los signos + y —, encuentra el Álgebra ingeniosísimos procedimientos para representar la evolucion que tan clara es en la irradiacion geométrica. Pero este ingenio, esta fecundidad de recursos, que más parece ser de la ciencia que de los que la cultivan, carece de sentido, y apenas es reconocida, cuando las fórmulas algebráicas no tienen la interpretacion necesaria que se desprende de la teoría del imaginarismo. Las fórmulas pierden toda su original belleza, y el cálculo ciego que las crea ó las desenvuelve, más es tormento que ocupacion grata del espíritu.

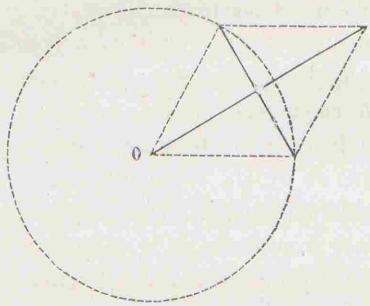
ARTÍCULO 8.°

Logística de las raíces de un sistema.

La logística algebráica de las raíces de un sistema guarda perfecta armonía con la geométrica de una irradiacion. En efecto:

1.° *La suma de dos cualesquiera raíces se expresa por la diagonal bisectriz del ángulo que forman en el paralelógramo construido sobre ellas.* El paralelógramo sumatorio, de que hemos hablado en las páginas 99 y 100, es en este caso un rombo, y la diagonal divide en dos partes iguales el ángulo de los sumandos, como se ve en esta figura:

Fig. 92



Si se proyectan sobre el eje real las dos raíces imaginarias, se suman directamente sobre él sus elementos reales, y en la extremidad de esta suma se levanta perpendicularmente la de los elementos imaginarios; la oblícua que determinan, coincide en magnitud y posicion con aquella diagonal.

Esta suma geométrica, referida á las raíces $a+b\sqrt{-1}$ y $c+d\sqrt{-1}$, está rigorosamente traducida por $(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$.

En estas sumas pueden ser comprendidas dos ó más raíces, y su composicion será subcesiva.

Las reales $+1$ y -1 entran tambien como sumandos cuyo elemento imaginario es cero. Las imaginarias puras $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ son sumandos en que es cero el elemento real.

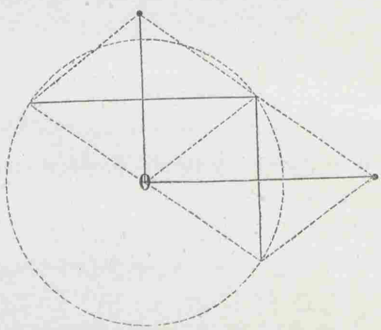
La diferencia de dos raíces es la diagonal que une sus extremos en el paralelógramo construido sobre ellas. Infiérese tambien de lo demostrado acerca del paralelógramo sumatorio. Cuando las dos raíces son consecutivas, esta diferencia es uno de los lados del polígono trazado sobre la irradiacion.

Esta diagonal ó lado puede ser determinado construyendo sobre el eje real la expresion algebráica de la diferencia $(a-c)+(b-d)\sqrt{-1}$.

Cuando las dos raíces son conjugadas, su suma es cero, y su diferencia es el duplo de la que se considera como minuendo (*Fig.* 93). Así tendrémos

$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) + (\mp a \mp b\sqrt{-1}) = 0$$
$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) - (\mp a \mp b\sqrt{-1}) = \pm 2a \pm 2b\sqrt{-1}.$$

Fig. 93



Cuando las dos raíces son simétricas respecto del eje real, su suma es dupla del elemento real, y su diferencia dupla del elemento imaginario del minuendo: así

$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) + (\pm a \mp b\sqrt{-1}) = \pm 2a$$
$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) - (\pm a \mp b\sqrt{-1}) = \pm 2b\sqrt{-1}$$

Si las dos raíces son simétricas respecto del eje vertical, su suma es dupla del elemento imaginario, y su diferencia dupla del elemento real del minuendo: así

$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) + (\mp a \pm b\sqrt{-1}) = \pm 2b\sqrt{-1}$$
$$(\pm a \pm b\sqrt{-1}) - (\mp a \pm b\sqrt{-1}) = \pm 2a$$

La suma de todas las raíces de un sistema es cero. Todas ellas se neutralizan en el punto de orígen, y *la nada es orígen y término sumatorio de estas raíces singulares.* Cuando el número de ellas es par, está visible la destruccion, porque son conjugadas á pares: cuando el número es impar, sobre el radio real y su prolongacion se proyectan y destruyen los elementos imaginarios; los elementos reales, cuya suma real se representa en los dos radios, se destruyen tambien por su igualdad y oposicion.

La irradiacion puede ser desenvuelta en una forma poligonal cuya suma es cero, segun hemos dicho en la página 106.

La consideracion algebráica conduce al mismo resultado: sea α la primera imaginaria ó la mas próxima al eje, y la representacion de todas ellas, en potencias de la primera, dará la progresion geométrica

$$\div\!\div\ \alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ \alpha^3,\ \alpha^4,\ \ldots\ldots\ \alpha^{m-1}$$

Si ahora en la expresion sumatoria de toda progresion geométrica

$$S=\frac{uq-a}{q-1},$$

substituimos los valores de la anterior, teniendo además presente que $\alpha^0=1=\alpha^m$, resulta:

$$S=\frac{\alpha^{m-1}\times\alpha-\alpha^0}{\alpha-1}=\frac{\alpha^m-\alpha^0}{\alpha-1}=\frac{0}{\alpha-1}=0$$

La suma de todas las diferencias consecutivas de las raíces es cero. Porque esta suma de diferencias está representada por el polígono trazado sobre la irradiacion. La expresion y realizacion algebráica de esta suma de diferencias sería

$$\begin{array}{l}
a^0-a\\
\quad a-a^2\\
\qquad a^2-a^3\\
\qquad\quad a^3-a^4\\
\qquad\qquad a^4\ldots\\
\qquad\qquad\qquad -a^m\\
\hline
a^0\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ -a^m=0
\end{array}$$

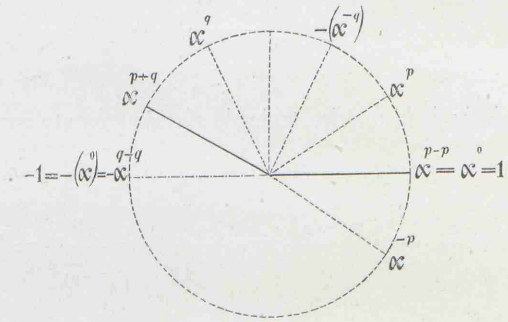
2.° *El producto de dos raices de la unidad es una raíz que dista de uno de los factores tanto como el otro dista de la unidad*: así resulta que el producto dista de la unidad ó eje un arco, que es la suma de los arcos distancias de los factores, conforme expresa el principio algebráico

$$\alpha^{p} \times \alpha^{q} = \alpha^{p+q}.$$

El producto de dos raíces simétricas, respecto del eje real, es siempre la unidad positiva; porque los dos arcos de los factores componen la circunferencia entera, y conducen al eje real cuando se cuentan en un mismo sentido. Así en la figura 94 se verifica

$$\alpha^{p} \times \alpha^{-p} = \alpha^{0} = 1 \text{ ó bien } \alpha^{p} \times \frac{1}{\alpha^{p}} = 1$$

Fig. 94



El producto de dos raíces simétricas respecto del eje vertical, es la unidad negativa: esta simetría debe expresarse por una conjugacion de la simétrica respecto del eje horizontal: así

$$^{q} \times -(\alpha^{-q}) = -(\alpha^{q-q}) = -(\alpha^{0}) = -1$$

ó bien

$$\alpha^{q} \times -\frac{1}{\alpha^{q}} = -\frac{\alpha^{q}}{\alpha^{q}} = -1$$

En general: *el producto de dos raíces simétricas respecto de un radio cualquiera, es igual á la segunda potencia de la raíz expresada por este radio.*

Esta propiedad es consecuencia de la disposicion progresiva de las raíces: dos simétricas respecto de un radio son dos términos equidistantes de otro término de la progresion: su producto es, por consiguiente, igual á la segunda potencia de este término medio. Cuando m es par, el término medio tiene su conjugado, que no se diferencia más que en el signo, y cuya segunda potencia es idéntica.

El producto de todas las raíces de la unidad positiva, es la unidad positiva si m *es impar, y la negativa si* m *es par. Lo contrario sucede con las de la unidad negativa.* Esta propiedad es consecuencia de la anterior.

Los cocientes se representan por una substraccion de arcos: el arco del divisor se resta del arco del dividendo, y la diferencia es el arco del cociente: esto expresa la igualdad

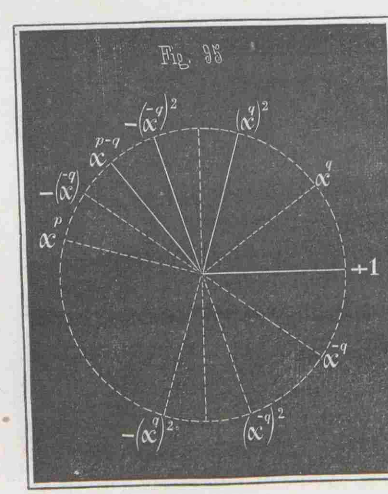
$$\frac{\alpha^{p}}{\alpha^{q}} = \alpha^{p-q}.$$

El cociente de dos simétricas respecto del eje real (*Fig.* 95), *es la segunda potencia del dividendo.* Así

$$\frac{\alpha^{q}}{\alpha^{-q}} = \alpha^{q} \times \alpha^{q} = \alpha^{2q} = (\alpha^{q})^{2},$$

y tambien

$$\frac{\alpha^{-q}}{\alpha^{q}} = \alpha^{-q} \times \alpha^{-q} = \alpha^{-2q} = (\alpha^{-q})^{2}$$



El cociente de dos simétricas respecto del eje vertical, es la conjugada de la segunda potencia del dividendo. Así

$$\frac{\alpha^{q}}{-\alpha^{-q}}=-\alpha^{2q}=-\left(\alpha^{q}\right)^{2}$$

y tambien

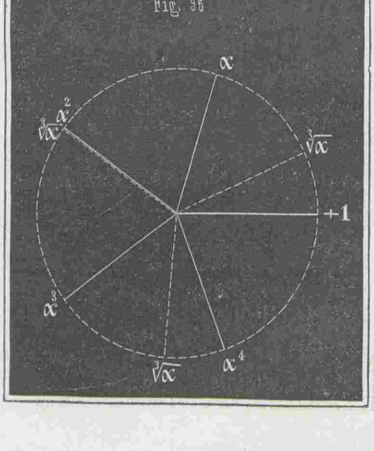
$$\frac{-\alpha^{-q}}{\alpha^{q}}=-\alpha^{-2q}=-\left(\alpha^{-q}\right)^{2}.$$

Nótese la armonía de estos casos de division con los análogos de substraccion de simétricas: lo que allí era duplo aquí es segunda potencia.

3.° *Cualquiera potencia entera de una raíz de la unidad es tambien alguna raíz de la unidad.* Cualquier término de una progresion circular coincide necesariamente en todas sus potencias con otro término de la misma progresion, sea el grado de aquellas igual, mayor ó menor, que m. En la irradiacion se ve que todas las mociones ó tésis que abrazan un número entero de arcos de inclinacion, conducen á una potencia inclinada segun un número de arcos tambien entero, y por lo tanto coincidente con alguna de las raíces $m.$ simas de la unidad.

Las raíces de las raíces de un sistema pueden llamarse raíces *secundarias* respecto de este mismo sistema. De ellas pueden demostrarse como referidas á cada una de las primarias, análogas propiedades que de estas: se distribuyen en perfecta irradiacion: son tantas en número como unidades tiene su grado, y coinciden con las primarias del sistema, segun la relacion numérica de su grado con el de aquellas, como se ve en esta figura.

Fig. 98



ARTÍCULO 9.°

Digresion.

Aquí debo hacer una observacion importante. En la multiplicacion de estas raíces argumentales ha podido notarse la ausencia de toda contraposicion normal determinante de una superficie. En esta multiplicacion de raíces el producto es una línea igual siempre á la unidad, y cuya inclinacion es regulada por la inclinacion de los factores. La multiplicacion ha sido esencialmente evolutiva y no antitética, porque así lo exige el carácter de raíces que llevan impreso los factores. No son propiamente cantidades lineales las que bajo el concepto de tales entran en la multiplicacion; son argumentos absolutamente cualitativos en evolucion recíproca, que no determinan por su reciprocidad sino otro argumento igualmente cualitativo. El resultado es como una potencia referida á dos bases distintas y recíprocas.

Cuando las dos bases tuviesen un mismo signo, ó fuesen una misma raíz de la unidad, idéntico radio de la irradiacion, ni merecerian el nombre de factores, porque ni aún como símbolos cualitativos podrian ser diferentes, y faltaria la dualidad que es necesaria para la reciprocidad factorial: no habria producto ni aún cualitativo; sino potencia pura, argumental y unitaria en su base. *Potencia irrealizable por producto.*

El tipo mas perfecto de la potencialidad, está pues, en lo meramente cualitativo, é independiente de todo concepto de cantidad numérica; y en esto me fundo para afirmar que, lejos de inferirse las reglas de los signos de las potencias y raíces de la que se establece en la multiplicacion, debiera, por el contrario, deducirse esta de aquellas; de suerte que

$$\text{no es } (-)^2 = +, \text{ porque } - \times - = +;$$
$$\text{sino } - \times - = +, \text{ porque } (-)^2 = +.$$

Las direcciones no se multiplican realmente, sino que se modifican y varian, *evolucionan* y giran sin término.

Las direcciones ó signos de los factores llevan á la multiplicacion su propia y esencial potencialidad, que, uniéndose al elemento cuantitativo, aritmético, modular y verdaderamente sumatorio, hacen de este algoritmo una transicion y perfecta neutralizacion de los algoritmos extremos y fundamentales, suma y graduacion.

De esta manera la multiplicacion representa esencialmente el concepto de reciprocidad que tan importante lugar ocupa en la teoría del imaginarismo.

Creo además que la simple duplicacion ó yuxtaposicion del signo —, en virtud de la cual decimos que $--=+$, cuya duplicacion es el fundamento de la interpretacion y de la lectura algebráica de muchos resultados del cálculo en que se descubre el signo — intraradical, como cuando decimos

$$\sqrt{-1}\times-\sqrt{-1}=-(-1)=+1,$$

trae su orígen remoto del algoritmo potencial y su orígen inmediato del de la multiplicacion.

Todo lo cualitativo ó argumental viene de la potencia, extendiéndose con igual ley por los tres algoritmos, *graduacion*, *produccion*, y *suma*: todo lo cuantitativo ó modular viene de la suma, extendiéndose con igual y progresiva síntesis por los tres algoritmos, suma, produccion y graduacion.

Estas son dos derivaciones que se cruzan en la produccion, y que podrian representarse por la siguiente sinópsis:

				Síntesis
SUMA.......		$- \quad - =+ \ldots$		$a+a$; $2+2=4$
				Síntesis de síntesis
PRODUCCION...	Cualidad	$-\times-=+\ldots$	Cuantidad	$a\times a$; $2\times2=4$
				Síntesis de síntesis de síntesis
GRADUACION ..		$(-)^2=+\ldots$		a^a ; $2^2=4$

ARTÍCULO 10.

Composicion de las irradiaciones.

Al determinar la naturaleza de las raíces de la unidad positiva y de la negativa, ha podido notarse que todas las de la unidad negativa de la irradiacion $y^m+1=0$, van intercaladas con las de la unidad positiva en la $y^m-1=0$. Esta intercalacion es, además, una perfecta conjugacion cuando m es impar en ambas irradiaciones. De uno y otro modo ambas irradiaciones se comunican y se completan en una irradiacion de la unidad positiva con grado duplo $y^{2m}-1=0$.

En general puede establecerse que toda irradiacion cuyo índice es par, puede ser descompuesta en dos irradiaciones complementarias del grado subduplo; una referida á la unidad positiva, y otra á la negativa. Considerando, en efecto, el binómio $y^{2m}-1$ como la diferencia de dos potencias pares, su resolucion en el producto $(y^m-1)(y^m+1)$ está autorizada por las mas vulgares nociones del Álgebra.

Si el índice de la irradiacion es bipar ó divisible por 4, hay lugar á una subdivision de la irradiacion de la unidad positiva y de la de la negativa: aquella dará siempre dos raíces reales para la unidad positiva, y todas las demás serán imaginarias, y esta dará siempre dos imaginarias á cada subdivision; y así el análisis que resuelve las ecuaciones binómias mas elevadas de grado 2^n, va haciendo aparecer nuevos pares de imaginarias en cada una de las n subdivisiones que expresa el índice 2^n. Nunca habrá, en último análisis, más raíces reales que las dos correspondientes á la ecuacion elemental $y^2-1=0$.

ARTÍCULO 11.

Determinacion orgánica de las raíces de grado par de la unidad.

Supuesta la ley de formacion de las irradiaciones, no es difícil expresar la determinacion algebráica ó analítica de las raíces, mostrando igual composicion armónica en las ecuaciones.

Las dos raíces segundas de la unidad positiva son siempre reales, y se determinan por la ecuacion pura $y^2-1=0$, en la cual y representa la raíz que se busca. De ella se deduce que

$$y=\pm\sqrt{+1} \text{ ó bien } y=\begin{cases}+1\\-1\end{cases}$$

Su irradiacion ó representacion geométrica es dada por dos radios horizontales en la figura 97. Son conjugadas.

Las dos segundas de la unidad negativa son imaginarias, y se determinan por la ecuacion

$$y^2+1=0 \text{ de donde se deduce } y=\begin{cases}+\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}\end{cases}$$

Su representacion geométrica está en los dos radios verticales. Son conjugadas.

Estos dos pares de raíces conjugadas son comunicables en una ecuacion de cuarto grado, y sus irradiaciones superpuestas y referidas á un mismo punto de orígen representan en el círculo las cuatro raíces cuartas de la unidad positiva.

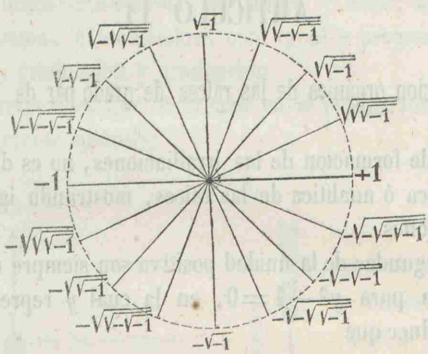
Estas, en efecto, están dadas en la ecuacion pura de cuarto grado $y^4-1=0$, la cual es resoluble en dos de segundo y en cuatro de primero: así

$$y^4-1=0;\begin{cases}y^2-1=0;\begin{cases}y=+1\\y=-1\end{cases}\\[2ex] y^2+1=0;\begin{cases}y=+\sqrt{-1}\\y=-\sqrt{-1}\end{cases}\end{cases}$$

Recorridas estas raíces en órden perimétrico ascendente respecto del eje, presentan la série progresiva

$$1\,,\ \sqrt{-1}\,,\ -1\,,\ -\sqrt{-1}\,.$$

Fig, 97



Las cuatro de la unidad negativa son todas imaginarias, y resultan de la ecuacion $y^4+1=0$, que tiene una descomposicion análoga á la anterior.

$$y^4+1=0;\ \begin{cases} y^2-\sqrt{-1}=0; \begin{cases} y=\sqrt{\sqrt{-1}} \\ y=-\sqrt{\sqrt{-1}} \end{cases} \\ y^2+\sqrt{-1}=0; \begin{cases} y=\sqrt{-\sqrt{-1}} \\ y=-\sqrt{-\sqrt{-1}} \end{cases} \end{cases}$$

En órden perimétrico dan la série

$$\sqrt{\sqrt{-1}}\,,\ \sqrt{-\sqrt{-1}}\,,\ -\sqrt{\sqrt{-1}}\,,\ -\sqrt{-\sqrt{-1}}\,,\ \text{\&c.}$$

cuyas raíces van intercaladas entre las del sistema de la unidad positiva, teniendo entre sí las mismas relaciones de contraposicion y conjugacion que las de este. Fijada esta relacion por la distancia de $\sqrt{\sqrt{-1}}$, primera del sistema -1, respecto de $+1$, primera del sistema $+1$, quedan todas determinadas en la irradiacion de cuarto grado.

Esta relacion de primera con primera en los dos sistemas congéneres expresa, la posicion geométrica de ambas irradiaciones, y la manera en que ambos están dados como comunicables en la ecuacion de octavo grado: esta con efecto es resoluble en dos de cuarto, en cuatro de segundo y en ocho de primero, como sigue:

$$y^8-1=0;\begin{cases} y^4-1=0; & \begin{cases} y^2-1=0; & \begin{cases} y=+1 \\ y=-1 \end{cases} \\ y^2+1=0; & \begin{cases} y=\sqrt{-1} \\ y=-\sqrt{-1} \end{cases} \end{cases} \\ y^4+1=0; & \begin{cases} y^2-\sqrt{-1}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{\sqrt{-1}} \\ y=-\sqrt{\sqrt{-1}} \end{cases} \\ y^2+\sqrt{-1}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{-\sqrt{-1}} \\ y=-\sqrt{-\sqrt{-1}}, \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

que dan las ocho raíces octavas de la unidad positiva. Su irradiacion geométrica resulta de la intercalacion intermediaria del sistema de las cuatro de -1 entre las cuatro de $+1$.

Su enumeracion serial es como sigue:

$$1, \sqrt{\sqrt{-1}}, \sqrt{-1}, \sqrt{-\sqrt{-1}}, -1, -\sqrt{\sqrt{-1}}, -\sqrt{-1}, -\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Las ocho raíces octavas de la unidad negativa son todas imaginarias, y tienen posiciones intermedias entre las de la positiva. Están dadas en la ecuacion pura de octavo grado $y^8+1=0$, la cual, por resoluciones análogas, se desenvuelve de la manera siguiente:

$$y^8+1=0;\begin{cases} y^4-\sqrt{-1}=0; & \begin{cases} y^2-\sqrt{\sqrt{-1}}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}} \\ y=-\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}} \end{cases} \\ y^2+\sqrt{\sqrt{-1}}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{-\sqrt{\sqrt{-1}}} \\ y=-\sqrt{-\sqrt{\sqrt{-1}}} \end{cases} \end{cases} \\ y^4+\sqrt{-1}=0; & \begin{cases} y^2-\sqrt{-\sqrt{-1}}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{\sqrt{-\sqrt{-1}}} \\ y=-\sqrt{\sqrt{-\sqrt{-1}}} \end{cases} \\ y^2+\sqrt{-\sqrt{-1}}=0; & \begin{cases} y=\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}} \\ y=-\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}}. \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

La enumeracion perimétrica de estas raíces es la que sigue:

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}},$$

$$\sqrt{\sqrt{-\sqrt{-1}}},$$

$$\sqrt{-\sqrt{\sqrt{-1}}},$$

$$\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}},$$

$$-\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}},$$

$$-\sqrt{\sqrt{-\sqrt{-1}}},$$

$$-\sqrt{-\sqrt{\sqrt{-1}}},$$

$$-\sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}}.$$

La posicion radial de estas ocho raíces es la misma que en las de $+1$, sirviendo de relacion ó razon distancial la de la primera de -1 á la primera de $+1$. Esta oblicuidad, que es doble de la anterior, determina la superposicion de los dos sistemas ó la intercalacion de las dos irradiaciones.

Todas las diez y seis raíces se comunican en la ecuacion $y^{16}-1=0$, de donde se deducirian las dieziseisavas de la unidad positiva.

Estas, con otras tantas de la unidad negativa, darian las treinta y dos de $+1$; y asi succesivamente en progresion dupla se construiria un gran organismo de raíces de la unidad, en el cual cada grupo contendria todas las de la unidad positiva y las de la negativa del grado subduplo anterior.

Para expresar la correspondencia de dos irradiaciones complementarias, he dicho que *se comunican* en una irradiacion superior. Esta es la expresion propia de la comunidad de raíces que tienen las irradiaciones que se subordinan unas á otras en cierta relacion numérica: la subordinada tiene todas sus raíces en la superior ó subordinante.

Adviértase, sin embargo, que aunque en dos irradiaciones no haya esta subordinacion regular y orgánica que resulta de la composicion explicada, basta que entre sus índices haya comunidad de factores, para que la coincidencia de una raiz traiga la coincidencia ó comunicacion de tantas raíces como unidades tuviera el máximo comun divisor de aquellos índices. Dos sistemas de raíces de la unidad positiva que son entre sí primos, no pueden tener mas raíces comunes que la unidad positiva.

ARTÍCULO 12.

Ecuaciones impares.

Hemos visto que la resolubilidad algebráica de las ecuaciones coincide con la intercalacion geométrica de las irradiaciones en el organismo cuyo índice general es la potencia 2^n.

Pero esta correspondencia es aún mas notable en las ecuaciones de grado impar.

Desde luego puede adivinarse que habiendo en ellas necesariamente una raíz real, los restantes pares de imaginarias no podrán ser conjugados, sino simétricos, y su expresion algebráica habrá de diferenciarse en algo más que en el signo ante-radical: no podrá esta expresion nacer de ecuaciones puras de segundo grado, que son las que en último análisis determinan por conjugacion todas las raíces del organismo 2^n, sino de ecuaciones mistas ó afectas, cuya resolucion ha de conducir á símbolos de afeccion tan compleja, cuanto sea bastante para expresar la posicion de cada raíz respecto del eje único real inconjugado y respecto de su simétrica.

Estas presunciones, sugeridas *à priori* por la idea de la correspondencia entre el Álgebra y la Geometría, se confirman plenamente por el estudio y la traduccion de las ecuaciones binómias de grado impar.

Sea la mas simple de todas las que tienen raíces imaginarias $y^3-1=0$: tomando por divisor $y-1=0$, puesto que la unidad positiva siempre es raíz de aquella ecuacion, obtendrémos el cociente

$$y^2+y+1=0\ ;$$

ecuacion afecta de segundo grado, en que están dadas las otras dos raíces imaginarias de la unidad positiva; pero con afeccion complicada, que no indica ya una simple relacion de conjugacion, sino de simetría y de referencia necesaria á la raíz real complementaria estirpada por la division; cosa que tiene que ir impresa en la ecuacion misma de segundo grado, que al fin no es más que un cociente, y no una fórmula primitiva é independiente, sino factorial y complementaria.

La afeccion y mistura de la ecuacion de segundo grado hará que las raíces que salgan de ella tengan un elemento real y uniforme que represente la uniforme relacion de simetría, la identidad de region á que van dirigidas, y otro elemento imaginario con signo de conjugacion para expresar la opuesta manera y sentido, como se realiza la simetría. A esta doble exigencia responden las dos imaginarias de la fórmula

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2},$$

que se deduce de la ecuacion afecta de segundo grado.

De suerte que, las tres raíces

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

constituyen una irradiacion equiangular, como se ve en esta figura:

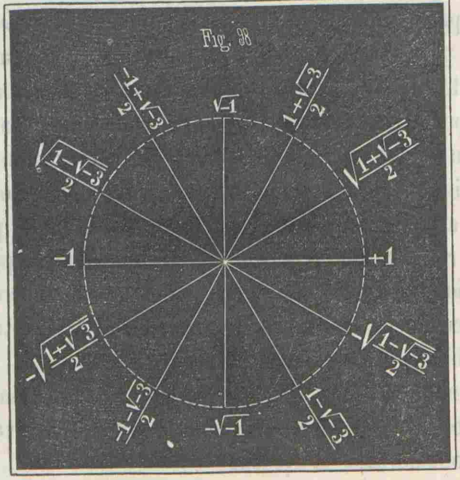


Fig. 98

Las tres raíces de la unidad negativa son enteramente análogas á las de la positiva. Están dadas en la ecuacion $y^3+1=0$, la cual, dividida por $y+1=0$, da la afecta de segundo grado $y^2-y+1=0$, de donde se obtiene

$$y=\frac{1\mp\sqrt{-3}}{2}$$

Las tres raíces son, pues,

$$-1, \quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

las cuales son de signos contrarios y conjugadas con las de $+1$, comunicándose en una irradiacion dupla que representa las seis sextas de la unidad positiva.

La ecuacion de sexto grado

$$y^6-1=0$$

expresa, con efecto, esta duplicidad, resolviéndose en dos de tercero, que se combinan, intercalando y conjugando sus raíces por la oposicion de signos. Así

$$y^6-1=0;\begin{cases} y^3-1=0;\ (y-1)(y^2+y+1)=0;\ y=\begin{cases}+1\\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\end{cases}\\ \\ y^3+1=0;\ (y+1)(y^2-y+1)=0;\ y=\begin{cases}-1\\ \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\\ \dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\end{cases}\end{cases}$$

La intercalacion da la série siguiente de raíces sextas de la unidad positiva en órden perimétrico

$$1,\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ -1,\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2}.$$

Las seis de la unidad negativa caen fuera del eje real, y son todas imaginarias é intermedias entre las anteriores. Su representacion algebráica está cifrada en la ecuacion

$$y^6+1=0,$$

que es resoluble tambien en dos de tercer grado,

$$y^6+1=0;\ \begin{cases} y^3-\sqrt{-1}=0\\ y^3+\sqrt{-1}=0,\end{cases}$$

ecuaciones que no tienen raíces reales.

Las seis imaginarias que resultan se comunican con las de la unidad positiva en una irradiacion de grado duplo, y así se construye con intercalaciones succesivas un organismo de 3, 6, 12, 24, ... 3×2^n, raices semejante en el desarrollo simétrico al organismo duplo 2^n, aunque diferente en su punto de partida ó ecuacion elemental.

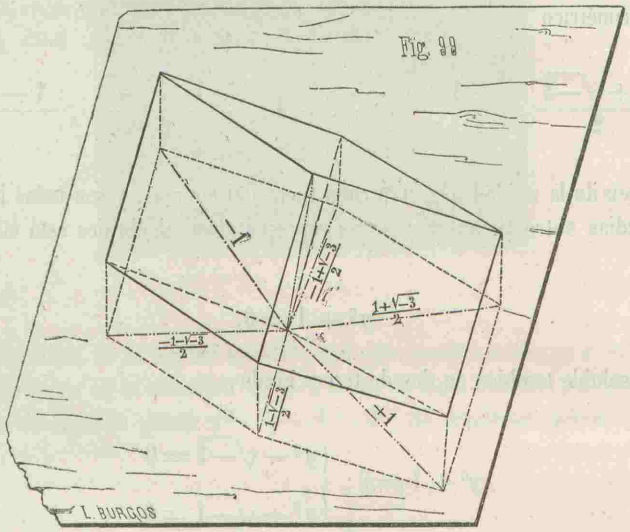
Las ecuaciones de quinto grado determinan sus raíces imaginarias por ecuaciones afectas de cuarto, en las cuales el imaginarismo es aún mas complicado, aunque siempre reducible á la forma binómia necesaria para expresar la simetría. La intercalacion succesiva de las de -1 con las de $+1$, engendra tambien un organismo de irradiaciones de 5, 10, 20, 40 ..... 5×2^n raíces.

ARTÍCULO 13.

Raíces terceras.

Detengámonos un momento en la consideracion de las raíces terceras contenidas en la ecuacion $y^3 - 1 = 0$, y justifiquemos el uso de sus expresiones algebráicas para representar la doble contraposicion factorial en la multiplicacion ternaria.

Si se hace coincidir el vértice triédrico de un cubo con un punto de un plano, de modo que la diagonal que une á aquel vértice con el vértice opuesto, sea perpendicular al plano, la intuicion geométrica nos da en la figura 99 las siguientes determinaciones.



1.ª Las tres aristas inmediatamente inclinadas sobre el plano tienen por proyecciones tres radios que dividen la circunferencia en tres partes iguales.

2.ª Las tres aristas que concurren en el vértice opuesto del cubo tienen por proyecciones tres radios asimismo equidistantes entre sí, y bisectores de los ángulos formados por la irradiacion anterior.

3.ª Las seis aristas restantes, con inclinacion alternativa sobre el plano circular, tienen por proyecciones las seis cuerdas que, uniendo los extremos de las dos irradiaciones, determinan un exágono regular.

El exágono es una imágen proyectiva de todos los elementos lineales del exaedro ó cubo.

La primera irradiacion proyecta tres aristas positivas que determinan un cubo positivo, respecto del vértice ó punto de orígen, y expresa tambien tres raíces de la unidad positiva.

La segunda irradiacion proyecta tres aristas que, por ser paralelas á las prolongaciones de las primeras mas allá del punto de orígen, son negativas, y por lo tanto determinan un cubo negativo: ella es tambien expresion de las tres raíces de la unidad negativa.

Ambas irradiaciones complementarias se conjugan en la irradiacion de sexto grado que resume en una expresion única geométrica las seis aristas cuya combinacion intercalar es referida á un solo punto de orígen, de la misma manera que la ecuacion

$$y^6-1=0 \quad \text{se compone de las dos complementarias} \quad \left\{\begin{array}{l} y^3-1=0 \\ y^3+1=0. \end{array}\right.$$

Las seis aristas restantes no están referidas inmediatamente al punto de orígen, sino á los extremos de los radios, y por su continuidad son esencialmente perimétricas. Sus proyecciones expresan las diferencias succesivas de las seis raíces.

La expresion proyectiva parece, pues, genuina representacion de la perpendicularidad recíproca de los tres factores que determinan la solidez. Ya vimos, con efecto, que la combinacion de sus símbolos en la multiplicacion algebráica conduce siempre á resultados análogos á los que da la contraposicion de factores ternarios.

Mas adelante daremos á conocer expresiones directas de la posicion inicial é inmediata de los cofactores de la solidez, considerados en sí mismos y abrazando las tres dimensiones del espacio.

ARTÍCULO 14.

Ecuaciones complementarias.

Doy este nombre no sólo á las que resultan de una descomposicion fundada en el principio de que

$$y^{2m}-1=(y^m-1)(y^m+1);$$

sino tambien á todas las que proceden de una division del primer miembro de la ecuacion principal por el de una ó varias raíces determinadas.

El caso mas sencillo es el de division por la raiz real positiva en la ecuacion

$y^m - 1 = 0$. Dividiendo, en efecto, por $y - 1 = 0$, la ecuacion cociente que es la complementaria de un grado inmediatamente inferior, tiene siempre la forma

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \dots + y + 1 = 0.$$

La division por $y + 1 = 0$ hace alternativos los signos positivos y negativos y da por cociente la ecuacion complementaria

$$y^{m-1} - y^{m-2} + y^{m-3} - \dots + y - 1 = 0.$$

La division por cada raíz da un nuevo órden de aparicion á los signos y coeficientes de la ecuacion cociente.

Dividiendo una ecuacion pura del grado m por la ecuacion elemental de cualquiera de sus raíces, los varios cocientes que en cada caso aparecen son polinómios (primeros miembros de nuevas ecuaciones afectas) de m términos que con varia alternativa de los signos $+$ y $-$ y de los de realidad é imaginarismo, representan por el órden gradual de los exponentes las varias modificaciones á que debe someterse cada una de las $m - 1$, raíces remanentes en la ecuacion complementaria, para que el polinómio que expresa su suma se reduzca á cero.

Las $m - 1$ raíces remanentes de la complementaria son comunicables con las de la ecuacion binómia del grado m, y no deben confundirse con las $m - 1$ que pudieran corresponder á la ecuacion de grado $m - 1$, pero binómia ó independiente: esto es, las $m - 1$ raíces de

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \dots + y + 1 = 0,$$

son raíces de la ecuacion $\qquad y^m - 1 = 0,$

pero no son las mismas que las de $y^{m-1} - 1 = 0$.

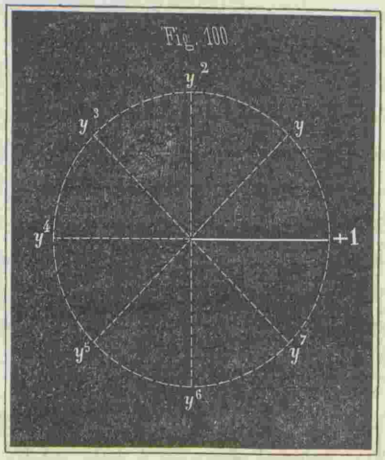
Las diversas combinaciones de signos que acompañan á las varias potencias de la incógnita en estas ecuaciones complementarias, son argumentos ó coeficientes cualitativos, que imprimen la conveniente disposicion radial á los valores que en vez de ella se van substituyendo. Hecha la substitucion, cada término representa un radio y la suma de todos ha de reducirse á cero, cuando el valor substituido es raíz verdadera. Cuando no lo es, como cuando se substituye la raíz ya estirpada, la disposicion radial es de tal naturaleza que se imposibilita su reduccion á cero.

Como ejemplo de estas y otras mas notables particularidades, propongo las ocho ecuaciones complementarias que resultan de la estirpacion succesiva de las ocho raíces en la irradiacion $y^8 - 1 = 0$.

Estas ecuaciones, conforme las da la division, segun la série descendente de los exponentes, aparecen en este cuadro:

$$y^8-1=\left\{\begin{array}{l}
(y-1)\left(y^7+y^6+y^5+y^4+y^3+y^2+y+1\right)\\
\left(y-\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(y^7+y^6\sqrt{\sqrt{-1}}+y^5\sqrt{-1}+y^4\sqrt{-\sqrt{-1}}-y^3-y^2\sqrt{\sqrt{-1}}-y\sqrt{-1}-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\\
\left(y-\sqrt{-1}\right)\left(y^7+y^6\sqrt{-1}-y^5-y^4\sqrt{-1}+y^3+y^2\sqrt{-1}-y-\sqrt{-1}\right)\\
\left(y-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(y^7+y^6\sqrt{-\sqrt{-1}}-y^5\sqrt{-1}+y^4\sqrt{\sqrt{-1}}-y^3-y^2\sqrt{-\sqrt{-1}}+y\sqrt{-1}-\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\\
(y+1)\left(y^7-y^6+y^5-y^4+y^3-y^2+y-1\right)\\
\left(y+\sqrt{\sqrt{-1}}\right)\left(y^7-y^6\sqrt{\sqrt{-1}}+y^5\sqrt{-1}-y^4\sqrt{-\sqrt{-1}}-y^3+y^2\sqrt{\sqrt{-1}}-y\sqrt{-1}+\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\\
\left(y+\sqrt{-1}\right)\left(y^7-y^6\sqrt{-1}-y^5+y^4\sqrt{-1}+y^3-y^2\sqrt{-1}-y+\sqrt{-1}\right)\\
\left(y+\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)\left(y^7-y^6\sqrt{-\sqrt{-1}}-y^5\sqrt{-1}-y^4\sqrt{\sqrt{-1}}-y^3+y^2\sqrt{-\sqrt{-1}}+y\sqrt{-1}+\sqrt{\sqrt{-1}}\right)
\end{array}\right\}=0$$

La ley de los coeficientes cualitativos es regular y armónica: en cada ecuacion van distando entre sí tanto como dista del eje real la raíz estirpada; se supone que el término constante es tambien coeficiente de y^0. Supongo además que y representa en todas las ecuaciones la primera imaginaria ascendente (*Fig.* 100), y en esta suposicion van fundadas todas las particularidades de las irradiaciones derivativas.



La primera recorre los radios en su órden succesivo desde el séptimo hasta el primero: el término constante se somete á la misma ley que los variables.

La segunda acumula todos los radios en el séptimo. No hay propiamente irradiacion; y así debia ser, representando y la misma raíz que ya se supone estirpada por la division.

La tercera los hace progresar en un grado hácia la region superior. La irradiacion comienza su evolucion en sentido regresivo.

La cuarta los va espaciando en el mismo sentido con dos grados de distancia, y no expresa más que las posiciones imaginarias, raíces cuartas de la unidad negativa, repitiéndolas en dos irradiaciones coincidentes.

La quinta los desenvuelve en el mismo sentido con tres grados de diferencia: salta por todas las tésis y da una irradiacion explícita.

La sexta los reparte con cuatro grados de distancia: no da más que dos posiciones conjugadas, entre las cuales oscila, expresando la coincidencia de cuatro irradiaciones de segundo grado. Esta irradiacion es el *máximum* de evolucion ascendente.

La séptima los vuelve á presentar en órden descendente con tres grados de diferencia: quedan otra vez explícitos todos los radios.

Y la octava afecta el mismo órden con intervalo de dos grados solamente.

El intervalo de un grado en sentido descendente vuelve á corresponder á la primera ecuacion.

De suerte que en las ocho ecuaciones es recorrida la irradiacion en todos los sentidos, con todos los intervalos, y ofreciendo eschêmas puramente radiales, diametrales y periféricos, con todos los síntomas de la reproductividad que se deducen de los principios consignados en las páginas 197 y siguientes.

Una sola raíz $\sqrt{\sqrt{-1}}$ es la que funciona en todas las ecuaciones; y la irradiacion en cada caso representa, no la posicion de las demás raíces, sino la diversa situacion á que aquella raíz única es conducida por el coeficiente cualitativo de cada término.

Lo mismo es que en las ocho ecuaciones se substituya por y una misma raíz, como antes hemos hecho, que el que en una misma ecuacion se substituyan las ocho raíces: las irradiaciones derivativas se presentan bajo la misma ley y con idéntico periodismo. Al substituir la raíz estirpada desapareceria la irradiacion.

Aún hay que notar otra armonía de este grupo de ecuaciones.

Los ocho primeros términos de todas ellas dan la misma irradiacion que la expresada por la segunda ecuacion.

Los ocho segundos dan la misma que los de la tercera.

Los ocho terceros la misma que los de la cuarta.

. . . .

Y los ocho octavos y últimos vuelven á dar la ecuacion primera.

Pero lo mas curioso es lo que ya notamos que sucede siempre que el valor substituido por y es una raíz inconveniente, como cuando es la raíz estirpada en la ecuacion de que se trata. Entonces la irradiacion se acumula sobre uno de los radios, el término constante, y desaparece como indicando la imposibilidad de la raíz. Este replegamiento con que la irradiacion expresa la inconveniencia de aquella suposicion, es muy digno de advertirse, porque es la única disposicion radial en que es imposible la reduccion á cero del primer miembro; agrupados todos los radios sobre el término constante, nunca pueden venir á una destruccion con él. Y véase como á la imposibilidad algebráica de la ecuacion corresponde la nulidad y el desvanecimiento de la irradiacion.

En todos los demás casos, la oscilacion sobre dos radios conjugados, la reduccion á cuatro apariencias diferentes, y la distribucion por intervalos más ó menos distantes son condiciones suficientes y necesarias para llegar por via de suma á una oposicion con el término constante que justifique la reduccion á cero del segundo miembro.

La estirpacion simultánea de dos ó mas raíces daria ecuaciones complementarias sometidas á leyes muy diferentes. Recomiendo las curiosas investigaciones hechas por M. Faure, en su opúsculo titulado: *Teoría de las cantidades imaginarias.*

En suma, se descubre en todo esto una maravillosa mecánica intelectual de conceptos algebráicos, que aparece primero en las formas geométricas de la irradiacion del *espectro moviente* de Monge, y anuncia ya la posibilidad de una mecánica verdadera de la naturaleza por una especie de anticipacion de la experiencia.

La ley general, segun la cual es lícito reconocer un cierto fin dinámico en todas las irradiaciones, se cumple de una manera indefectible en las ecuaciones de todos los grados, así puras como mixtas. El dinamismo se presenta aquí como en el algoritmo de la suma, generalizado por el imaginarismo (*).

(*) Como prévio ejercicio de grande utilidad recomiendo la estirpacion succesiva ó simultánea de las raíces en varios órdenes de ecuaciones binómias de grado par ó impar de la unidad positiva ó negativa. Como estos ejercicios comprobatorios no se encaminan á la resolucion de las ecuaciones, pueden practicarse sobre raíces determinadas y conocidas de antemano. Las multiplicaciones y divisiones que exije la estirpacion de las raíces han de practicarse con arreglo á la logística establecida en el artículo 8.° de este CAPÍTULO.

CAPÍTULO IV.

CONSIDERACION DINÁMICA DE LAS RAÍCES IMAGINARIAS.

ARTÍCULO 1.º

Naturaleza del dinamismo.

No hay representacion mas adecuada de una fuerza que la línea recta, porque esta, con la perfecta distincion de su longitud y de su direccion ó de su módulo y de su argumento, expresa separadamente la intensidad y modo de aplicacion que son los dos coeficientes del verdadero *momentum* de aquella.

Una irradiacion es por lo tanto un sistema de fuerzas tractivas ó impulsivas que estando sobre un mismo plano actuan sobre un punto.

Así como la irradiacion tiene una suma geométrica, el sistema que ella expresa tiene una *resultante*. Esta suma ó esta resultante es cero, cuando el sistema dinámico se constituye en equilibrio. Las condiciones estáticas de este equilibrio son:

1.ª Que la suma de las fuerzas positivas sea igual á la de las negativas; si todas son reales ó actuan en un mismo eje.

2.ª Que formen una irradiacion equiangular, si son iguales en intensidad é imaginarias ó indirectas, esto es, oblícuas ó no dirigidas segun el eje de las reales.

En todos los casos el equilibrio es imposible, si cada fuerza elemental no es igual y contraria á la resultante de todas las demás del sistema.

El cumplimiento de estas condiciones en la forma algebráica de las raíces, en la disposicion geométrica de las irradiaciones y en el equilibrio de un sistema de fuerzas, autoriza la representacion dinámica de las raíces y de las ecuaciones, que tanta claridad introduce en la estructura íntima de las de todos los grados y formas. La teoría general exclusivamente analítica, que demuestra (casi siempre indirectamente) algunas propiedades acerca del número, naturaleza, límites, &c., de las raíces, nunca llega á alcanzar la luz que sobre esta materia transcendental derrama la interpretacion geométrica y dinámica de las cantidades imaginarias.

Hay que distinguir dos especies de dinamismo; uno que puede llamarse hipotético ó radical, y es el que corresponde á las raíces, consideradas en sí mismas y prescindiendo de la varia potencialidad ó coeficiencia que pueden recibir en cada término de la ecuacion, y otro tético ó potencial, que no es ya de las raíces como tales, sino de los términos de la ecuacion considerados como momentos potenciales ó productivos de cada una de ellas.

En las ecuaciones de primer grado se identifican ambos dinamismos, porque la raíz es la primera potencia: en los demás grados se diferencian esencialmente.

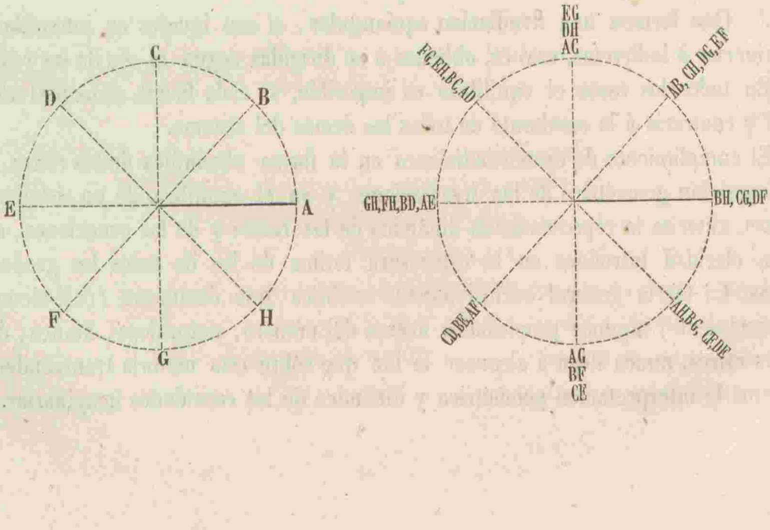
Cuando se sabe pasar del dinamismo radical al potencial, se penetra hondamente en la organizacion interna de las ecuaciones, porque se presencia su generacion sintética. Este primer estudio creo que es muy conveniente para el difícil tránsito analítico del dinamismo potencial al radical, en que consiste *la resolucion de las ecuaciones.*

ARTÍCULO 2.º

Dinamismo en las ecuaciones de la forma $y^m \mp 1 = 0$.

Si combinamos por via de multiplicacion cada radio con todos los que le siguen hasta el último de la irradiacion, verémos que los varios productos binarios se van disponiendo sobre los radios radicales de manera que los productos forman una irradiacion tan perfecta y equiangular como la de los factores, equilibrándose como aquellos se equilibran (*Fig.* 101).

Fig. 101



Los productos ternarios, como derivados de los binarios, continúan observando la misma ley de formacion, y se disponen asímismo en equilibrio sobre la irradiacion primitiva.

Los cuaternarios, y en general todos los productos que nacen de combinaciones succesivas y periódicas de los elementos de una irradiacion perfecta, son tambien irradiaciones perfectas exactamente coincidentes con la irradiacion primera de los factores que se combinan. La perfeccion de las irradiaciones derivadas subsiste á pesar de que sobre unos radios radicales se acumulen mas productos que sobre otros: fácilmente se nota que es cero la resultante de cada irradiacion.

De este hecho singular, que es absolutamente inconcebible en las cantidades reales, puede inferirse *á priori* cual será la forma de la ecuacion que se componga con estos elementos factoriales.

Como toda irradiacion perfecta tiene cero por resultante dinámica, será cero el coeficiente del primer término paródico ó del segundo de la ecuacion, porque expresa la suma de las raíces con signos contrarios: serán asímismo nulos los coeficientes de los términos paródicos consecutivos, que son suma de productos binarios, ternarios, &c., quedando reducida la ecuacion á la forma binómia, con el primer término que expresa la pura potencialidad de cada raiz, en que nada hay de producto, y con el último, ó término constante, que es el producto no potencial ó succesivo sino simultáneo de todas las raíces. Este último término siempre es la unidad positiva ó negativa.

En esta forma binómia el dinamismo potencial no puede consistir sino en la oposicion del término constante con el variable, únicos que tienen un verdadero *momentum* ó que no se anulan en sí mismos. Cada raíz de la irradiacion hipotética al hacer m tésis, ó al elevarse á la $m.^{\text{sima}}$ potencia, se va equilibrando succesivamente con el término constante, y realizando la ecuacion que tiene cero en su segundo miembro.

Valores algebráicos, radios ó fuerzas, aunque diversos entre si (bajo el concepto de cualidad), pueden alcanzar un mismo valor tético sometidos á una misma hipótesis, ó ley de evolucion potencial. Tambien es esto imposible entre cantidades reales cuya única diferencia cualitativa sea la que expresan los signos $+$ y $-$.

ARTÍCULO 3.°

Dinamismo de las ecuaciones de la forma $y^{m-1}+y^{m-2}+y^{m-3}\ldots+y+1=0$.

Estas son las complementarias que se obtienen por la estirpacion de una de las raíces en la ecuacion pura del grado m. El coeficiente cualitativo de y puede ser la unidad positiva, la negativa y la imaginaria bajo varias de sus formas, como se ve en el grupo de las ocho ecuaciones de la página 219.

El dinamismo radical va tambien acorde con la irradiacion equiangular en que falta uno de los radios, el correspondiente á la raíz estirpada.

Esta irregularidad de la irradiacion le da una resultante sumatoria igual y contraria á la raíz deficiente. De aquí puede inferirse, desde luego, que el segundo término que lleva por coeficiente esta resultante, no podrá desvanecerse.

Digno es de notarse que los productos binarios, ternarios, &c., forman tambien irradiaciones deficientes enteramente análogas á la irradiacion primitiva ó radical. Todas ellas tienen su resultante, que, con el signo conveniente, llega á ser coeficiente cualitativo de su propio término.

Ningun término se desvanece, y la ecuacion desenvuelve paródicamente toda la potencialidad descendente desde $m-1$ hasta cero, que es el exponente del término constante.

El dinamismo potencial es el que resulta de los momentos de todos los términos, y conviene advertir, que estos momentos son á la vez productivos, ó dependientes del coeficiente cualitativo, y potenciales, ó engendrados por el exponente. Ya sabemos que el coeficiente imprime una mocion á la raíz partiendo de ella misma y recorriendo el arco que él expresa; y que el exponente la hace girar segun su distancia de la unidad real ó del eje. (*) La evolucion potencial es la primera que debe concebirse realizada, porque el coeficiente afecta á la potencia ya desenvuelta.

Todas estas consideraciones son aplicables á las ecuaciones complementarias, que proceden de la estirpacion de dos ó mas raíces de la ecuacion pura.

ARTÍCULO 4.º

Dinamismo de las ecuaciones de la forma

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots+Tx+U=0\,.$$

Las ecuaciones afectas con coeficientes reales P, Q, R.... T, U, que tienen un valor cuantitativo algebráico ó numérico, suponen un sistema de raíces cuya representacion geométrica no es una irradiacion equiangular, pero que en su dinamismo radical encierra las condiciones del equilibrio tético de los términos de la ecuacion.

Cuando todas las raíces son reales, ejercen su accion dinámica sobre el eje horizontal á uno y otro lado del punto de orígen.

La resultante inmediata de este dinamismo, como suma que es de todas las raíces, es real, y, con signo contrario, viene á ser coeficiente del segundo término de la ecuacion: en las afectas, de que voy tratando, puede ser cero esta suma, y

(*) Segun hemos dicho en los artículos 8.º y 6.º del CAPÍTULO anterior.

faltar por consiguiente el segundo término; pero de esta circunstancia no ha de inferirse que todas sean iguales, sino que la suma de las positivas es igual á la de las negativas. Siempre ha de haber raices de diferente valor aritmético en las ecuaciones afectas.

La suma de los productos binarios ha de ser tambien real, porque debe serlo cada producto, y esta suma, considerada como un número abstracto, será el coeficiente del tercer término, esto es el momento productivo de cada raiz, que, obrando sobre su momento potencial, consuma todo el momento de ella en el término tercero.

La suma de productos ternarios con signo contrario es coeficiente del cuarto término, y combinada con la potencia correspondiente de la raiz, da el momento del cuarto término.

El único producto de todas las raices, coeficiente del último término, neutraliza con su correspondiente signo todos los momentos de los términos anteriores, y justifica la resultante cero del segundo miembro de la ecuacion.

Pero con la realidad de los coeficientes de la ecuacion es compatible la existencia de raices imaginarias que componen un dinamismo radical con las reales. En general, es sabido que son reales muchos productos y potencias de raices imaginarias.

En particular, se demuestra que si las imaginarias son simétricas, y por consiguiente en número par, los coeficientes que resultan en los términos de la ecuacion compuesta son reales.

Con efecto, la suma de las simétricas es real, y por consiguiente real el coeficiente del segundo término, que es la suma de todas las raices.

Los productos binarios de las imaginarias entre sí son reales ó simétricos en número par, y los de las imaginarias superiores por los reales simétricos con los de las inferiores por las mismas son siempre reales; la suma de todos los productos binarios, coeficiente del tercer término, es real.

Los productos ternarios de las imaginarias son simétricos en número par, y los de cada dos imaginarias simétricas por una real es real, y los de cada imaginaria superior por dos reales simétricos con los de cada inferior por las mismas son reales; luego el coeficiente del cuarto término, suma de estos productos ternarios, será real.

La misma ley de formacion simétrica ó directamente real siguen las demás combinaciones de las raices imaginarias entre sí y con las reales, de cuyas combinaciones resultan todos los términos paródicos.

El último término se ve claramente que ha de ser real, porque lo es el producto de cada par de imaginarias.

La potencialidad de una de las imaginarias de la forma $a+b\sqrt{-1}$, da evoluciones giratorias diversas en cada término con arreglo al exponente; pero como estas son simétricas con las que ofrece la simétrica $a-b\sqrt{-1}$, el momento evolutivo ó potencial de la doble imaginaria $a\pm b\sqrt{-1}$ es siempre real, y en nada altera la realidad que depende de los coeficientes.

Las reales tienen su potencialidad en el mismo eje.

El dinamismo radical irradiante de un sistema de raíces reales é imaginarias simétricas se resuelve, pues, en un dinamismo potencial longitudinal, en que tienen su representacion todos los momentos productivos y evolutivos de las raíces. En el eje horizontal se equilibran reduciéndose á cero por su oposicion con el término constante.

ARTÍCULO 5.º

Dinamismo de las ecuaciones afectas de tercer grado. Caso irreducible.

Las ecuaciones afectas de tercer grado merecen muy particular atencion por el caso singular de un imaginarismo doble y como redundante, que por su mismo exceso se resuelve en realidad.

Si en las fórmulas generales á que conduce la resolucion cardánica ú ordinaria

$$x=\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)+\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\right)$$

sometemos á discusion los varios casos de realidad ó imaginarismo que dependen de la cantidad $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, que está debajo del radical de segundo grado, podremos hacer las tres suposiciones siguientes:

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$$

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$$

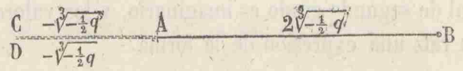
$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

segun los valores y signos que en cada caso concreto puedan tener los coeficientes p y q de la ecuacion preparada y resuelta

$$x^3+px+q=0.$$

Llamemos para mayor sencillez m al primer radical y n al segundo de la primera raíz. Esto supuesto:

Fig. 102



En el caso 1.°, figura 102, el radical de segundo grado desaparece, y la primera raíz

$$x=m+n \text{ se reduce á } 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

$$\text{y cada una de las otras á } -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}:$$

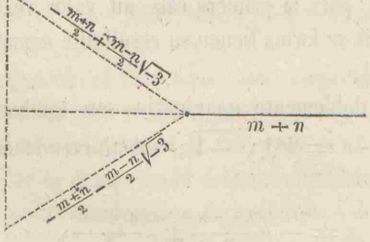
todas tres raíces son reales, y su dinamismo radical se expresa en el eje real por una recta AB opuesta á otras dos, la mitad menores, que son

$$AC=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \text{ y } AD=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Esta disposicion dinámica cumple con la condicion de ser cero la suma de las raíces ó de faltar el segundo término, como exige el método de resolucion por donde se obtienen las fórmulas.

En el caso 2.° (*Fig.* 103), el radical de segundo grado tiene un valor real. La

Fig. 103



primera raíz $x=m+n$ es, por consiguiente, real, y las otras dos incluidas en la fórmula

$$-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3},$$

son necesariamente imaginarias por el elemento $\sqrt{-3}$, puesto que $\frac{m-n}{2}$ tiene un valor real, y no es cero.

El dinamismo radical de estas raíces, representado en la figura, cumple con la condicion de equilibrio que exige la desaparicion del segundo término.

El caso 3.º es el irreducible que tanto ha ejercitado la paciencia de todos los geómetras. El radical de segundo grado es imaginario, y los valores de m y n deben dar para la primera raíz una expresion de la forma

$$x=m+n=\sqrt[3]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{\alpha-\beta\sqrt{-1}},$$

imaginaria en su apariencia algebráica finita. Los valores de las otras raíces combinan con este imaginarismo el del coeficiente $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, y se presentan como doblemente imaginarios.

Verdaderamente este imaginarismo es irreducible, porque sometiendo al desarrollo ordinario el radical

$$\sqrt[3]{\alpha+\beta\sqrt{-1}}=(\alpha+\beta\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}},$$

se cae en una série indefinida inexpresable en su valor total. De esta série nada sabemos sino la forma binómia que ha de tener la suma de los términos reales que pueden expresarse por P, y de los imaginarios expresados por $Q\sqrt{-1}$: el imaginarismo algebráico es inevitable en la forma $P+Q\sqrt{-1}$ que debe tener esta raíz tercera.

Pero si tenemos en cuenta la simetría de los radicales m y n, y que son simétricas las raíces de potencias simétricas; los valores $P+Q\sqrt{-1}$ y $P-Q\sqrt{-1}$ expresarán estas raíces simétricas, y sumadas para realizar $m+n$, perderán su imaginarismo y darán para la primera raíz un valor real igual á $2P$: los dos radicales de que esta raíz se forma tienen su resultante sumatoria en el eje real, como se ve en la figura 104.

Los otros valores doblemente imaginarios son tambien reales; porque como $m+n=2P$ y $m-n=2Q\sqrt{-1}$; substituyendo en

$$x=-\frac{m+n}{2}\pm\frac{m-n}{2}\sqrt{-3}$$

se tienen los valores reales

$$x=-P\pm Q\sqrt{-1}\times\sqrt{-3}=-P\mp Q\sqrt{3}\,.$$

La representacion geométrica de este imaginarismo aparente conduce siempre á direcciones simétricas, porque las evoluciones giratorias que reciben los radicales *m* y *n* de los coeficientes

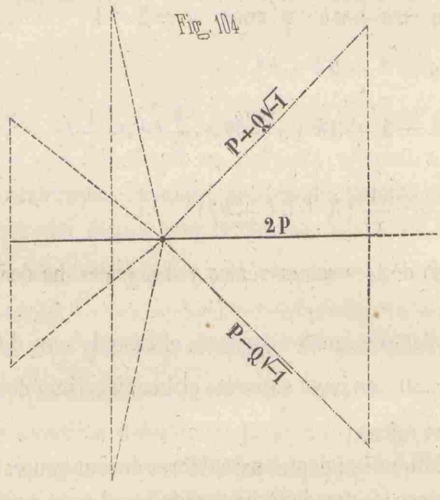
$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

en cada fórmula, son simétricas con las que reciben de

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}:$$

sus expresiones sumatorias son, por consiguiente, reales. Y serán reales las tres raíces á pesar del imaginarismo algebráico idefectible en la expresion de cada una de ellas.

Fig. 104



La única diferencia que ofrece este dinamismo respecto al del primer caso es que aquí las dos raíces reales que resultan de esta evolucion, no son iguales; sin embargo, su suma es igual y contraria á la raíz primera $x=m+n=2P$, como es necesario para justificar la desaparicion del segundo término de la ecuacion.

Aun prescindiendo de la consideracion de la infinitud de la série, por la que se explica ordinariamente el imaginarismo algebráico necesario en el caso irreducible, podria este inferirse analíticamente del hecho de faltar el segundo término (circunstancia necesaria del método de resolucion) y de la hipótesis de ser desiguales las tres raíces, que es la tercera y última disposicion dinámica que pueden tener para reducirse al equilibrio.

Fácil es, con efecto, demostrar que dadas estas dos condiciones, el coeficiente del tercer término (contando como segundo el deficiente) ha de ser negativo, y que además el valor absoluto de $\frac{p^3}{27}$ ha de ser mayor que $\frac{q^2}{4}$, y por lo tanto imaginario el radical de segundo grado.

La falta del segundo término supone que una de las raíces, que expresaremos por a, es igual á la suma de las otras dos. Si se designa por 1 la menor de estas, y por $1+b$ la otra, serán las tres raíces

$$\pm a, \ \mp 1 \ \text{y} \ \mp 1 \mp b;$$

y como el coeficiente del tercer término es la suma de todos los productos binarios que con ellas pueden formarse, se tendrá que esta suma será $-2a-ab+1+b$; y como $a=2+b$, el coeficiente será $-3-3b-b^2=-p$, esto es, siempre negativo.

Por otra parte, el último término, producto de todas las raíces

será $\quad q=a+ab$, y como $a=2+b$,

tendremos $\quad q=2+3b+b^2$

y el término $\quad \frac{q^2}{4}=1+3b+\frac{13}{4}b^2+\frac{3}{2}b^3+\frac{1}{4}b^4$

será menor que $\quad \frac{p^3}{27}=\frac{1}{27}(3+3b+b^2)^3$

Luego en el caso de tres raíces reales y desiguales ha de haber imaginarismo algebráico.

Cuando dos de ellas son iguales como en el caso 1.°, su diferencia b es cero y tambien $\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=0$; en cuyo supuesto el imaginarismo desaparece porque cesa la desigualdad de las raíces.

Cualquier método que se adopte para la resolucion general ó puramente algebráica de las ecuaciones afectas de tercer grado, conduce á un caso irreducible que corresponde necesariamente á uno de los dinamismos radicales, al de tres raíces reales y desiguales, si el método exige que sea cero, la suma de ellas, esto es, que falte el segundo término de la ecuacion.

CAPÍTULO V.

TEORÍA TRIGONOMÉTRICA DEL IMAGINARISMO.

ARTÍCULO ÚNICO.

Expresion trigonométrica de las raíces de la ecuacion $y^m - 1 = 0$.

La forma proyectiva $a + b\sqrt{-1}$, que expresa el valor de la oblícua en valores absolutos de los ejes sobre que se proyecta alternativamente, sufre una transformacion importantísima, cuando en vez de valores absolutos expresa la funcion trigonométrica del ángulo que la oblícua forma con el eje real. El elemento a es el coseno de este ángulo, y el elemento $b\sqrt{-1}$ es el seno con su perpendicularidad esencial.

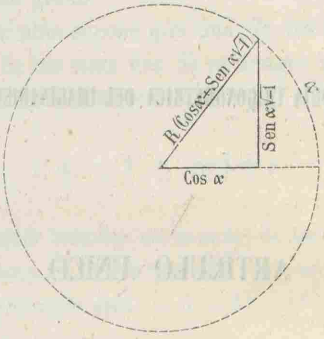
Si llamamos α al arco que mide el ángulo de oblicuidad, la forma trigonométrica de la oblícua, que entónces será un radio, será $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\sqrt{-1}$, verdadero coeficiente de direccion indeterminada para todas las posiciones evolutivas, como funcion que es del ángulo α medido desde el eje real. El valor numérico de la recta inclinada lleva este coeficiente que completa el valor total algebráico, como se ve en la figura 105; de suerte que

$$R(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \sqrt{-1})$$

representa una recta R veces mayor que el radio, é inclinada sobre el radio real segun el ángulo α. Cuando $R = 1$, es el radio mismo, y se omite su escritura, pero siempre queda sobreentendida.

Cuando la expresion $a+b\sqrt{-1}$ obtiene esta forma, en que aparecen separados los valores cuantitativo y cualitativo de la oblícua, puede decirse que está *modulada*: R es el módulo, y $\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cdot \sqrt{-1}$ puede considerarse como argumento indeterminado de la recta R.

Fig. 105



Esta expresion binómia en funcion del ángulo merece una particular atencion, porque de ella se deduce una demostracion trigonométrica del número y afecciones de las raíces de la unidad, con lo cual toda la Trigonometría entra de lleno en el plan de interpretacion concreta que vamos desenvolviendo.

Sentaré algunos precedentes trigonométricos indispensables, glosándolos de paso con arreglo al nuevo sentido que adquieren en esta teoria.

1.° Si se multiplican entre sí las dos expresiones

$$\cos a + \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \sqrt{-1},$$

es decir, dos factores, radios oblícuos cuyas inclinaciones sobre el radio real están expresadas respectivamente por los arcos a y b, el producto será

$$\cos a \cdot \cos b + (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a)\sqrt{-1} - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b;$$

luego en virtud de las fórmulas tan conocidas

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$$

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a,$$

se tiene fácilmente

$$(\cos a + \operatorname{sen} a\sqrt{-1})(\cos b + \operatorname{sen} b\sqrt{-1}) = \cos(a+b) + \operatorname{sen}(a+b)\sqrt{-1},$$

esto es, que el producto será otro radio cuya inclinacion será la suma de las inclinaciones de los factores, es decir $a+b$.

Expresando por a' esta suma, é introduciendo un nuevo factor, funcion de c, tendriamos asimismo

$$
\begin{aligned}
&(\cos a + \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{-1}) \\
&\times (\cos b + \operatorname{sen} b \cdot \sqrt{-1}) \\
&\times (\cos c + \operatorname{sen} c \cdot \sqrt{-1}) \\
&= \cos(a+b+c) + \operatorname{sen}(a+b+c) \cdot \sqrt{-1},
\end{aligned}
$$

y para el producto, la inclinacion anterior más la inclinacion del nuevo factor.

Siguiendo la misma ley de formacion, expresariamos el producto de m factores con inclinaciones $a, b, c \ldots p$ por el siguiente resultado

$$
\begin{aligned}
&(\cos a + \operatorname{sen} a \sqrt{-1})(\cos b + \operatorname{sen} b \sqrt{-1})(\cos c + \operatorname{sen} c \sqrt{-1}) \ldots (\cos p + \operatorname{sen} p \sqrt{-1}) \\
&= \cos(a+b+c \ldots + p) + \operatorname{sen}(a+b+c \ldots + p) \cdot \sqrt{-1};
\end{aligned}
$$

cumpliéndose la ley general de que la inclinacion del producto es la suma de las inclinaciones de los factores.

Supongamos ahora que estas inclinaciones son iguales, y que la suma de ellas es por consiguiente ma: el producto de m factores enteramente iguales en cantidad y cualidad, será

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \operatorname{sen} ma \cdot \sqrt{-1}.$$

Esta fórmula notable, que convierte el producto de sumas binómias en una suma binómia de productos, lleva el nombre de Moivre, que fue su inventor.

2.° Como esta fórmula es verdadera para todos los arcos, puede ponerse $-a$ en vez de a; y como de la teoría general trigonométrica se infiere que

$$\cos(-a) = \cos a \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a;$$

de esta substitucion resultará la nueva fórmula

$$(\cos a - \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma - \operatorname{sen} ma \cdot \sqrt{-1},$$

que expresa múltiplos de arcos descendentes ó negativos y simétricos con los positivos, siendo eje de simetría el radio real.

3.° Tambien es cosa sabida que designándose por 2π toda la circunferencia, por 1 el radio, y por k un número entero cualquiera, se tiene

$$\cos k \cdot 2\pi = 1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} k \cdot 2\pi = 0$$

ó que el coseno de un número cualquiera de circunferencias siempre es igual á 1, y el seno es nulo.

Con estas premisas de intuicion evidente se lleva igual claridad por todas las determinaciones concretas geométricas á que se prestan estas fórmulas. De ellas se infiere inmediatamente que

$$\left(\cos k\,\frac{2\pi}{m} \pm \operatorname{sen} k\,\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\right)^m = \cos(k\,2\pi) \pm \operatorname{sen}(k\,2\pi)\sqrt{-1}$$
$$= 1 + 0 \cdot \sqrt{-1} = 1 \qquad (\Delta)$$

expresion fundamental de todas las raíces de la unidad que satisfacen á la ecuacion $y^m - 1 = 0$, y cuya traduccion geométrica es la siguiente:

Siendo m el número de partes en que se divide la circunferencia y 2π la circunferencia entera, $\frac{2\pi}{m}$ será una $m.^{\text{sima}}$, y $k \times \frac{2\pi}{m}$ un número k de arcos iguales, $m.^{\text{simas}}$ partes de la circunferencia. El coseno y el seno imaginario de $k \times \frac{2\pi}{m}$ representan una oblícua igual al radio y referida al eje real por el valor variable y arbitrario de k número de arcos, pudiendo ser el eje mismo si k fuese cero. Esta oblícua, cualquiera que sea el número de arcos iguales que la separen de la real, tiene una posicion tal, que haciendo m tésis en su evolucion coincide con la unidad real positiva; y como ésta sea condicion propia de las m raíces de la unidad, la fórmula (Δ) las expresa todas con sólo dar á k valores concretos que fijen la posicion de la raíz. El segundo miembro de la fórmula, que siempre es igual á la unidad, expresa la potencia m de la raíz ó su perfecta y necesaria coincidencia con el eje real, después de hechas las m tésis que exige su evolucion.

Para obtener las varias raíces, no se necesita más que dar á k los valores 0, 1, 2, 3...., y calcular por las tablas trigonométricas los valores correspondientes á $\cos k\,\frac{2\pi}{m}$ y á $\operatorname{sen} k\,\frac{2\pi}{m}$: porque en la relacion numérica de estos valores y en el imaginarismo del seno estará cifrada la cantidad y posicion de cada raíz correspondiente á cada valor de k.

Principiemos por dar á k todos los valores enteros comprendidos entre cero y $\frac{m-1}{2}$ inclusive, si m es impar, y desde cero hasta $\frac{m}{2}$, tambien inclusive, si m es par; esto es, tantos valores distintos como radios superiores tiene la irradiacion en el primer caso, y además el radio real negativo en el segundo (*Fig.* 106).

$$\text{Si } k=0 \ldots \therefore\ y=\cos 0 \pm \operatorname{sen} 0\sqrt{-1}=1 \ldots \quad \text{radio real.}$$

$$k=1 \ldots \ y=\cos\frac{2\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots \left\{ \begin{array}{l}\text{primera raiz imaginaria supe-}\\ \text{rior con su simétrica.}\end{array}\right.$$

$$k=2 \ldots \ y=\cos\frac{4\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{4\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots \quad 2.^{a}$$

$$k=3 \ldots \ y=\cos\frac{6\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{6\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots \quad 3.^{a}$$

....

En fin; si m es impar, esto es si no hay raiz real negativa, tendremos

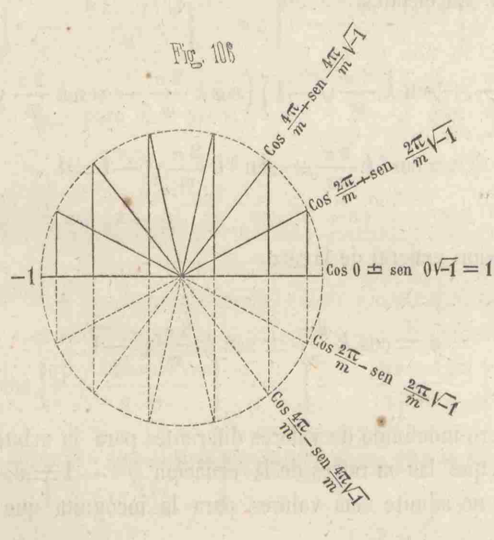
$$k=\frac{m-1}{2} \ldots\ y=\cos\frac{(m-1)\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{(m-1)\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots \left\{ \begin{array}{l}\text{última imaginaria supe-}\\ \text{rior con su simétrica.}\end{array}\right.$$

y si m es par, ó si hay raiz real negativa;

$$k=\frac{m}{2} \ldots\ y=\cos\pi \pm \operatorname{sen}\pi\sqrt{-1}=-1 \ldots\ldots\ldots \text{ raiz real negativa.}$$

Este cuadro da todas las raices de la ecuacion $y^m-1=0$.

Fig. 108



En efecto: 1.° Cuando m es impar, y no hay más raiz real que la positiva, cada uno de los valores $k=1, 2, 3, \ldots \frac{m-1}{2}$ da para y dos raices simétricas, superior é inferior, correspondientes al doble signo $\pm$; y el número total de los valores da por necesidad $m-1$ raíces imaginarias; y si á estas se añade la raíz real positiva correspondiente á $k=0$, el número total de las raíces será m.

Todas estas raíces serán diferentes en su afeccion cualitativa, porque los arcos $0, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1)\pi}{m}$, menores que π ó la semicircunferencia, tienen cosenos diferentes.

2.° Cuando m es par, y hay raíz real positiva y negativa, los dos valores extremos, $k=0$ y $k=\frac{m}{2}$, dan las dos raíces reales $+1$ y -1; porque

$$\cos 0 \pm \operatorname{sen} 0 \cdot \sqrt{-1} = 1 \quad \text{y} \quad \cos \frac{m}{2} \times \frac{2\pi}{m} \pm \operatorname{sen} \frac{m}{2} \times \frac{2\pi}{m} \cdot \sqrt{-1} = -1;$$

y además los valores intermedios $k=1, 2, 3 \ldots \left(\frac{m}{2}-1\right)$, que son los radios superiores, dan cada uno dos valores simétricos; de suerte que el número de estos es $2\left(\frac{m}{2}-1\right)$, y el número total, añadiendo los dos reales, será $2+2\left(\frac{m}{2}-1\right)=m$; siendo estas m raíces necesariamente diferentes, en cualidad, por la diferencia de sus cosenos.

La simetría de las dos raíces imaginarias envueltas en cada valor intermedio de k es patente, si se observa que su producto es siempre igual á la unidad ó al radio real positivo. En efecto

$$\left(\cos k \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)\left(\cos k \frac{2\pi}{m} - \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)$$
$$= \cos^2 k \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen}^2 k \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1} = 1$$

Si en la expresion general de la raíz

$$y = \cos k \frac{2\pi}{m} \pm \operatorname{sen} k \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1},$$

se tomase un número indefinido de valores diferentes para la arbitraria k, la fórmula no daria más que las m raíces de la ecuacion $y^m - 1 = 0$, cumpliendo con la ley general, que no admite más valores para la incógnita que los que indica el grado de su ecuacion. Cualesquiera valores superiores á $\frac{m-1}{2}$ ó á $\frac{m}{2}$ que pueden darse á la variable k, conducen siempre á los mismos m valores ya obtenidos.

Sea, con efecto, m impar y supongamos $k=\frac{m-1}{2}+n$, siendo n un núméro entero de arcos que se añaden á los correspondientes á la última imaginaria superior. La fórmula (Δ) se convierte en

$$y = \cos\frac{(m+2n-1)\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{(m+2n-1)\pi}{m}\sqrt{-1};$$

ó, lo que es lo mismo,

$$y = \cos\left[\pi + \frac{(2n-1)\pi}{m}\right] \pm \operatorname{sen}\left[\pi + \frac{(2n-1)\pi}{m}\right]\sqrt{-1}.$$

Ahora bien: este nuevo valor es enteramente idéntico al que daría la suposicion $k = \frac{m-1}{2} - (n-1)$, es decir, un valor inferior ya determinado.

Esta suposicion, en efecto, convierte la fórmula (Δ) en

$$y = \cos\frac{(m-2n+1)\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{(m-2n+1)\pi}{m}\sqrt{-1},$$

ó, lo que es lo mismo,

$$y = \cos\left[\pi - \frac{(2n-1)\pi}{m}\right] \pm \operatorname{sen}\left[\pi - \frac{(2n-1)\pi}{m}\right]\sqrt{-1}:$$

y como es sabido que para dos arcos $\pi + a$ y $\pi - a$ que son simétricos se tiene que

$$\cos(\pi + a) = \cos(\pi - a) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(\pi + a) = -\operatorname{sen}(\pi - a);$$

se concluye fácilmente que

$$\cos\left[\pi + \frac{(2n-1)\pi}{m}\right] = \cos\left[\pi - \frac{(2n-1)\pi}{m}\right]$$

$$\text{y} \quad \operatorname{sen}\left[\pi + \frac{(2n-1)\pi}{m}\right] = -\operatorname{sen}\left[\pi - \frac{(2n-1)\pi}{m}\right];$$

y haciendo las oportunas substituciones, se concluye de una manera definitiva que la expresion

$$\cos\left[\left(\frac{m-1}{2} + n\right)\frac{2\pi}{m}\right] \pm \operatorname{sen}\left[\left(\frac{m-1}{2} + n\right)\frac{2\pi}{m}\right]\sqrt{-1}$$

es lo mismo que esta otra

$$\cos\left[\left(\frac{m-1}{2}-(n-1)\right)\frac{2\pi}{m}\right]\pm \operatorname{sen}\left[\left(\frac{m-1}{2}-(n-1)\right)\frac{2\pi}{m}\right]\sqrt{-1}:$$

es decir, que las dos raíces que corresponden á $k=\frac{m-1}{2}+n$ son idénticas con las ya determinadas para el valor $k=\frac{m-1}{2}-(n-1)$, sin más diferencia que el hallarse en un órden inverso.

Si m es par, y se supone $k=\frac{m}{2}+n$, resulta

$$y=\cos\frac{m\pi+2n\pi}{m}\pm \operatorname{sen}\frac{m\pi+2n\pi}{m}\sqrt{-1},$$

ó bien

$$y=\cos\left(\pi+\frac{2n\pi}{m}\right)\pm \operatorname{sen}\left(\pi+\frac{2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1};$$

pero este valor es idéntico con el correspondiente á la suposicion $k=\frac{m}{2}-n$ que está ya determinado; porque para este valor se tiene

$$y=\cos\left(\pi-\frac{2n\pi}{m}\right)\pm \operatorname{sen}\left(\pi-\frac{2n\pi}{m}\right)\sqrt{-1},$$

el cual á causa de ser

$$\cos\left(\pi+\frac{2n\pi}{m}\right)=\cos\left(\pi-\frac{2n\pi}{m}\right)$$

$$\operatorname{sen}\left(\pi+\frac{2n\pi}{m}\right)=-\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{2n\pi}{m}\right)$$

se convierte en el que corresponde á la suposicion $k=\frac{m}{2}+n$: luego el nuevo valor $k=\frac{m}{2}+n$ no da sino raíces ya comprendidas en la série de valores de k inferiores á $\frac{m}{2}$, y por consiguiente el cuadro contiene todas las raíces de la ecuacion $y^m-1=0$, cualquiera que sea el valor de m, quedando sujetos á una necesaria reproduccion los valores indefinidos de la arbitraria k, esto es, limitando la pluralidad indefinida de raíces á la indicacion del exponente m.

Del mismo cuadro podemos tambien inferir la ley de reproductividad de las raíces de una irradiacion par ó impar. Transformando los valores del cuadro segun el principio

$$(\cos a + \operatorname{sen} a \cdot \sqrt{-1})^m = \cos ma + \operatorname{sen} ma \cdot \sqrt{-1},$$

tendrémos que

$$\cos \frac{4\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{m} \sqrt{-1} = \left(\cos \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)^2$$

$$\cos \frac{6\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{6\pi}{m} \sqrt{-1} = \left(\cos \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)^3$$

. . . .

. . . .

y si m es impar,

$$\cos \frac{(m-1)\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{(m-1)\pi}{m} \sqrt{-1} = \left(\cos \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)^{\frac{m-1}{2}};$$

y si m es par,

$$\cos \pi + \operatorname{sen} \pi \sqrt{-1} = \left(\cos \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}\right)^{\frac{m}{2}}:$$

y si llamamos α la raíz $\cos \frac{2\pi}{m} + \operatorname{sen} \frac{2\pi}{m} \sqrt{-1}$ del paréntesis, que es la primera imaginaria, correspondiente á $k = 1$, ó que tiene por inclinacion $\frac{1}{m}$ de la circunferencia, todas las raíces del cuadro (las correspondientes al signo superior) se representarán por

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \ldots\ldots \alpha^{\frac{m-1}{2}} \quad \text{ó} \quad \alpha^{\frac{m}{2}},$$

y las inferiores, como simétricas de las superiores, por

$$\alpha^{-1}, \quad \alpha^{-2}, \quad \alpha^{-3}, \ldots\ldots \alpha^{-\left(\frac{m-1}{2}\right)}, \quad \text{ó} \quad \alpha^{-\frac{m}{2}}$$

ó lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{1}{\alpha^3} \ldots\ldots \frac{1}{\alpha^{\frac{m-1}{2}}}, \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\alpha^{\frac{m}{2}}};$$

de donde se concluye que todas las raíces de la irradiacion son reproducidas por las varias potencias de la primera imaginaria α ó de su simétrica $\frac{1}{\alpha}$.

De igual manera podria demostrarse que cualquiera imaginaria α^p reproducirá potencialmente todas las de la irradiacion $y^m - 1 = 0$, siempre que m sea primo, y que solo reproducirá n raíces, cuando n sea el máximo comun divisor de m y p.

Asimismo es fácil deducir el carácter progresivo de todas las raíces.

La unidad negativa se presta de igual manera á una resolucion trigonométrica en la ecuacion $y^m + 1 = 0$, que contiene sus raíces.

Recuérdese que respecto de la semicircunferencia π se tiene

$$\cos(2k+1)\pi = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(2k+1)\pi = 0;$$

ó que el coseno de un número impar de semicircunferencias es el radio negativo, y que el seno es nulo.

Esto supuesto, segun la fórmula de Moivre, tendremos la expresion

$$\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{m}\sqrt{-1}\right]^m$$

equivalente á esta otra

$$\cos(2k+1)\pi \pm \operatorname{sen}(2k+1)\pi\sqrt{-1} = -1;$$

y por consiguiente

$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{m}\sqrt{-1}$$

representará la raíz $m.^{\text{sima}}$ de -1, ó resolverá generalmente la irradiacion $y^m + 1 = 0$.

Las diversas raíces pueden obtenerse dando á k los valores 0, 1, 2, 3....... hasta $\frac{m-1}{2}$, si m es impar, ó hasta $\frac{m}{2} - 1$, ó $\frac{m-2}{2}$, si m es par; es decir, hasta el número de radios superiores más el real negativo en el primer caso, y hasta el de radios superiores en el segundo.

Las raíces se presentarán en el siguiente cuadro:

$k = 0 \ldots\ y = \cos\frac{\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots$ $\Big\{$ primera imaginaria simétrica sobre el radio positivo (*).

$k = 1 \ldots\ y = \cos\frac{3\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots$ segunda imaginaria simétrica.

$k = 2 \ldots\ y = \cos\frac{5\pi}{m} \pm \operatorname{sen}\frac{5\pi}{m}\sqrt{-1} \ldots$ tercera imaginaria simétrica.

. . . .

(*) Tiene por inclinacion la mitad del arco que separa las raíces.

Si m es impar,

$$k=\frac{m-1}{2}\ldots\ y=\cos\pi\pm\operatorname{sen}\pi\sqrt{-1}=-1\ldots\ldots\ \text{raíz real negativa.}$$

Si m es par,

$$k=\frac{m-2}{2}\ldots\ y=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)\pm\operatorname{sen}\left(\pi-\frac{\pi}{m}\right)\sqrt{-1}\ldots\ \text{última simétrica.}$$

Enciérranse en él todas las raíces de la ecuacion $y^m+1=0$.

Cuando m es impar, el valor $k=\frac{m-1}{2}$ no da más que la raíz -1, y los otros $0, 1, 2, 3\ldots\frac{m-3}{2}$ dan cada uno dos valores simétricos correspondientes al doble signo del nèxus; de suerte que el número total de las raíces será $1+2+\frac{2(m-3)}{2}=m$.

Cuando m es par, cada valor de k desde cero hasta $\frac{m-2}{2}$ da dos raíces simétricas, y el número total es $2+2\left(\frac{m-2}{2}\right)=m$.

Aquí podria demostrarse como antes que todo valor de k superior á $\frac{m-1}{2}$, ó á $\frac{m-2}{2}$ en su caso conduce á raíces ya comprendidas en los valores inferiores.

Asimismo, es fácil deducir la ley de reproductividad de las raíces. Si α designa la primera imaginaria inmediata al eje real positivo, sometiendo esta raíz $\cos\frac{\pi}{m}\pm\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\sqrt{-1}$ á la fórmula de Moivre, todas las siguientes superiores se expresan por la série de potencias impares

$$\alpha^1,\ \alpha^3,\ \alpha^5\ldots\ldots\alpha^m \quad \text{si } m \text{ es impar,}$$

$$\text{ó } \alpha^{m-1} \quad \text{si } m \text{ es par.}$$

Las simétricas ó inferiores serán

$$\alpha^{-1},\ \alpha^{-3},\ \alpha^{-5}\ldots\ldots\alpha^{-m}$$

$$\text{ó } \alpha^{-m+1}$$

ó lo que es lo mismo

$$\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\alpha^3},\ \frac{1}{\alpha^5}\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\alpha^m}$$

$$\text{ó}\ \frac{1}{\alpha^{m-1}};$$

y como $\alpha^{2m}=1$, porque $\alpha^m=-1$, podrian todas las raíces expresarse por

$$\alpha^{2m-1},\ \alpha^{2m-2},\ \alpha^{2m-3}\ \ldots\ldots\ \alpha^m$$

$$\text{ó}\ \alpha^{m+1}.$$

Luego, en fin, todas las raíces de la ecuacion $y^m+1=0$ serán las siguientes:

$$\alpha^1,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7\ \ldots\ \alpha^{m-2},\ \alpha^m,\ \alpha^{m+2}\ \ldots\ \alpha^{2m-3},\ \alpha^{2m-1};$$

si m es impar, y

$$\alpha^1,\ \alpha^3,\ \alpha^5,\ \alpha^7\ \ldots\ \alpha^{m-1},\ \alpha^{m+1}\ \ldots\ldots\ \alpha^{2m-3},\ \alpha^{2m-1}$$

si m es par.

En todas estas expresiones es bien patente la índole progresiva.

He traducido al lenguaje de la Geometría las varias fórmulas que entran en la teoría trigonométrica de las raíces de la unidad. Ninguna de esas fórmulas puede tener sentido en medio de su exactitud y elegancia, sin la interpretacion geométrica del símbolo $\sqrt{-1}$, el cual les presta toda la fecundidad que en ellas se admira. Apenas concibo cómo puede ocultarse esta interpretacion á los autores de teorías tan completas bajo el punto de vista algebráico.

CAPÍTULO VI.

CONSTRUCCION GRÁFICA DE LAS RAICES DE LA UNIDAD.

ARTÍCULO 1.º

Construccion de las raíces de un sistema 2^n.

Toda ecuacion de las raíces de la unidad es una verdadera irradiacion ó un poligonismo radial en que cada raíz es un radio oblícuo y la diferencia ó distancia de las raíces medida por cuerdas de la circunferencia describe el polígono regular.

La construccion gráfica de las raíces con arreglo á su expresion algebráica dará los radios oblícuos de cada sistema poligonal, y dividirá la circunferencia en tantas partes iguales, cuantas unidades tenga el grado ó índice de la irradiacion.

Para obtener este importantísimo resultado conviene recordar:

1.º Que un exponente potencial que afecta á una imaginaria pura ó binómia, indica que la potencia ha de trazarse á una distancia evolutiva del eje real, tantas veces mayor que la que tiene la raíz, cuantas unidades tiene el exponente.

2.º Que un exponente radical que afecta á una imaginaria, cualquiera que sea su forma, indica que ha de dividirse la distancia evolutiva de la imaginaria en otras tantas partes iguales, y que debe trazarse la raíz tomando una de estas, la mas próxima al eje real.

3.º Que el signo — refiere á la direccion opuesta todo el valor de una expresion cualquiera, aunque ésta no sea real, y aunque el punto de orígen no sea el centro de la construccion.

Y 4.º Que tomando por unidad el radio, toda recta menor que él tendrá sus potencias menores y sus raíces mayores que ella.

Esto supuesto, y refiriéndonos á la figura 107, tendrémos que:

la irradiacion $y^2 - 1 = 0$ que se descompone en $\begin{cases} y = +1 \\ y = -1 \end{cases}$

se traduce por un diámetro horizontal ó por dos radios conjugados.

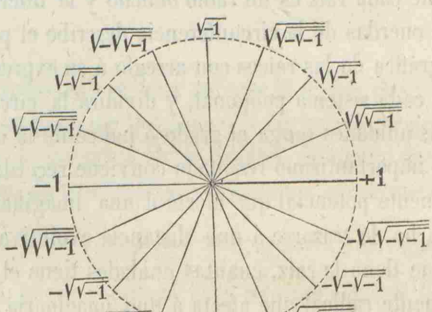
La irradiacion $y^2 + 1 = 0$ ó bien $\begin{cases} y = +\sqrt{-1} \\ y = -\sqrt{-1} \end{cases}$

expresa las dos imaginarias por el diámetro vertical.

$$\text{La irradiacion } y^4 - 1 = 0\,; \begin{cases} y^2 - 1 = 0\,; \begin{cases} y = +1 \\ y = -1 \end{cases} \\ y^2 + 1 = 0\,; \begin{cases} y = +\sqrt{-1} \\ y = -\sqrt{-1} \end{cases} \end{cases}$$

se construye con dos diámetros ortogonales: el vertical divide en dos partes iguales el arco que corresponde á -1, ó las dos semicircunferencias superior é inferior.

Fig. 107



Una subdivision contínua de estos arcos iria duplicando el número de radios y representando por una intercalacion regular las irradiaciones poligonales de los órdenes $2, 4, 8, 16, 32 \ldots\ldots 2^n$.

Las raíces de la unidad negativa se determinarán por irradiaciones de la unidad positiva del órden inmediatamente superior.

ARTÍCULO 2.°

Construccion de las raíces terceras.

Las raíces terceras correspondientes á $y^3-1=0$ son

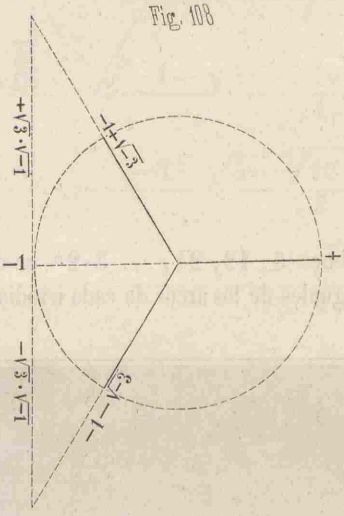
$$+1,\ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

La primera está dada por el radio real positivo (*Fig.* 108).

La segunda se construye levantando sobre -1 una perpendicular cuyo valor numérico sea $\sqrt{3}$; porque $\sqrt{-3}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$.

La diagonal que une los extremos de este binómio $-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$, dividida en dos partes iguales, como exige el denominador dará el valor y posicion del radio ó raíz.

Fig. 108



La tercera se construye trazando la perpendicular $-\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$ en direccion opuesta ó por bajo de -1, como conjugada que es de la anterior.

Para demostrar que los extremos de estas dos raíces simétricas caen en la circunferencia, basta considerar que el módulo ó valor absoluto de ellas, es igual á la unidad positiva.

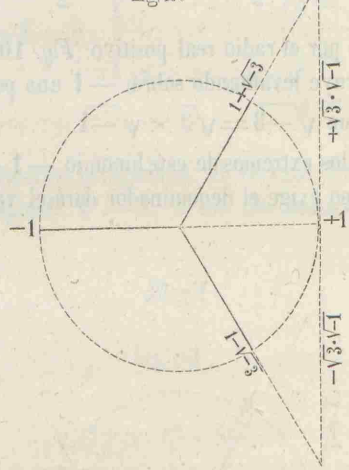
Por otra parte nada explica mejor la rarísima propiedad que tienen estas dos raíces imaginarias de ser cada una de ellas igual al cuadrado de la otra, que su evolucion giratoria respecto de la unidad positiva ó raíz real. Esta evolucion ha de hacerse en tésis que dividan la circunferencia en tres partes iguales.

Las tres raíces de la unidad negativa correspondientes á $y^3+1=0$

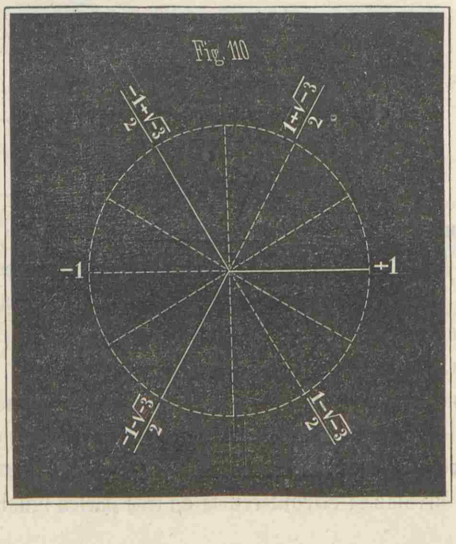
$$-1,\ \frac{1-\sqrt{-3}}{2},\ \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

tienen una construccion análoga, y dan una irradiacion conjugada con la anterior y referida al radio negativo como raíz real, según indica la figura que sigue, donde se advierte tambien la simetría de las dos últimas raíces.

Fig. 109



Las raíces de las órdenes 6, 12, 24.... $3\cdot 2^n$ se obtienen por la contínua subdivision en dos partes iguales de los arcos de cada irradiacion anterior. (*Fig.* 110).



Las de la unidad negativa son dadas en cada órden inmediatamente superior del sistema progresivo 3×2^n.

La construccion de las raíces terceras es una *triseccion directa inmediata y original de la circunferencia,* que nada tiene de comun con la inscripcion ordinaria del triángulo equilátero derivada de la del exágono regular.

ARTÍCULO 3.º

Construccion de las raíces quintas.

Las raíces quintas de la unidad son por su órden periférico

$$1.^a \ldots\ldots + 1$$

Simétricas:

$$2.^a \ldots\ldots \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}}{4}$$

$$3.^a \ldots\ldots \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}}{4}$$

$$4.^a \ldots\ldots \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}}{4}$$

$$5.^a \ldots\ldots \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}}{4}$$

y se construyen del modo siguiente en la figura **111**.

La primera está dada en el radio real positivo.

La segunda ó primera imaginaria, se determina tomando el valor numérico inconmensurable $-1+\sqrt{5}=+1,23\ldots$ en el radio positivo, que es la unidad, levantando sobre su extremo una perpendicular cuyo valor numérico sea

$$\sqrt{10+2\sqrt{5}}=\sqrt{14,46\ldots}=3,8\ldots:$$

y la resultante oblícua que une los extremos del binómio geométrico, dividida en cuatro partes iguales como manda el denominador, dará en una de ellas el radio expresivo de la raíz.

La simétrica de esta (que es la quinta de la irradiacion) no se diferencia de ella más que en el signo del nêxus, y se construye dando á la perpendicular $\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}$ una direccion opuesta, esto es descendente.

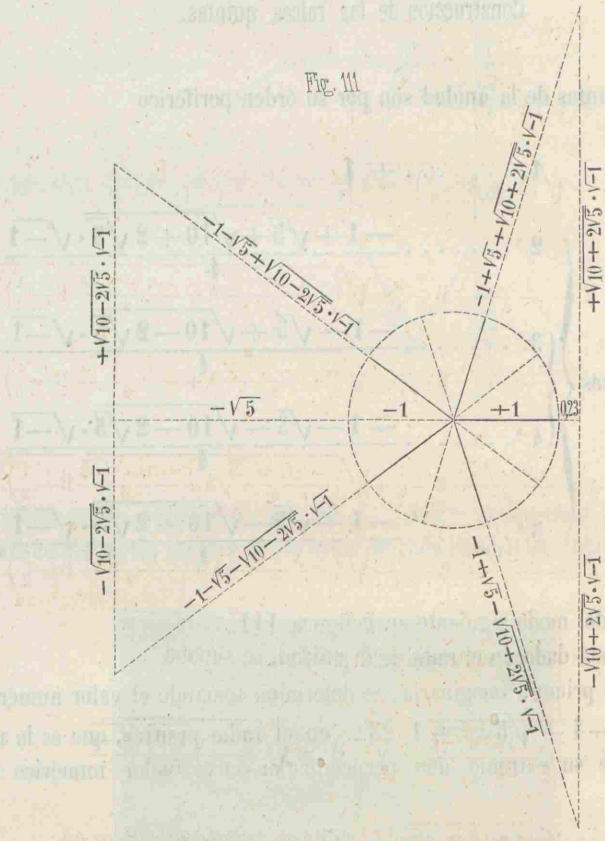
La tercera se construye tomando sobre el radio negativo el valor real $-1-\sqrt{5}=-3,23...$, y levantando sobre su extremo la perpendicular

$$\sqrt{10-2\sqrt{5}}\times\sqrt{-1}=\sqrt{5,54}\times\sqrt{-1}=2,35\sqrt{-1}:$$

la cuarta parte de la oblícua resultante será el radio raíz.

Su simétrica, que es la cuarta, se obtiene por los mismos valores dando opuesta direccion al elemento imaginario $\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\sqrt{-1}$.

Fig. 111



El módulo de estas raíces es siempre la unidad; y por consiguiente son radios en su valor absoluto.

Las raíces quintas de la unidad negativa componen una irradiacion perfectamente conjugada como la anterior y referida al radio -1 como raíz real.

Ambas irradiaciones representan las diez raíces de la unidad positiva, y por una biseccion contínua del arco evolutivo se determinarian las 20, 40, 80... 5×2^n raíces de la unidad.

ARTÍCULO 4.°

Construccion de las raíces séptimas.

Las raíces séptimas enumeradas por el órden de simetría con que resultan de la resolucion algebráica, son:

$$y = 1$$

$$y = \tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{A} + \mathrm{B} - \tfrac{1}{3} + \sqrt{\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} - \tfrac{1}{3}\right)^2 - 4}\Big]$$

$$y = \tfrac{1}{2}\Big[\mathrm{A} + \mathrm{B} - \tfrac{1}{3} - \sqrt{\left(\mathrm{A} + \mathrm{B} - \tfrac{1}{3}\right)^2 - 4}\Big]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{3}\mathrm{B} - \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3}\right)^2 - 4}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3} - \sqrt{\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3}\right)^2 - 4}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3}\right)^2 - 4}\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3} - \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\mathrm{A} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\mathrm{B} - \frac{1}{3}\right)^2 - 4}\right]$$

En las anteriores raíces séptimas de la unidad, se supone

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\frac{7 + \sqrt{1323}\sqrt{-1}}{54}}, \quad \text{y} \quad \mathrm{B} = \sqrt[3]{\frac{7 - \sqrt{1323}\sqrt{-1}}{54}}$$

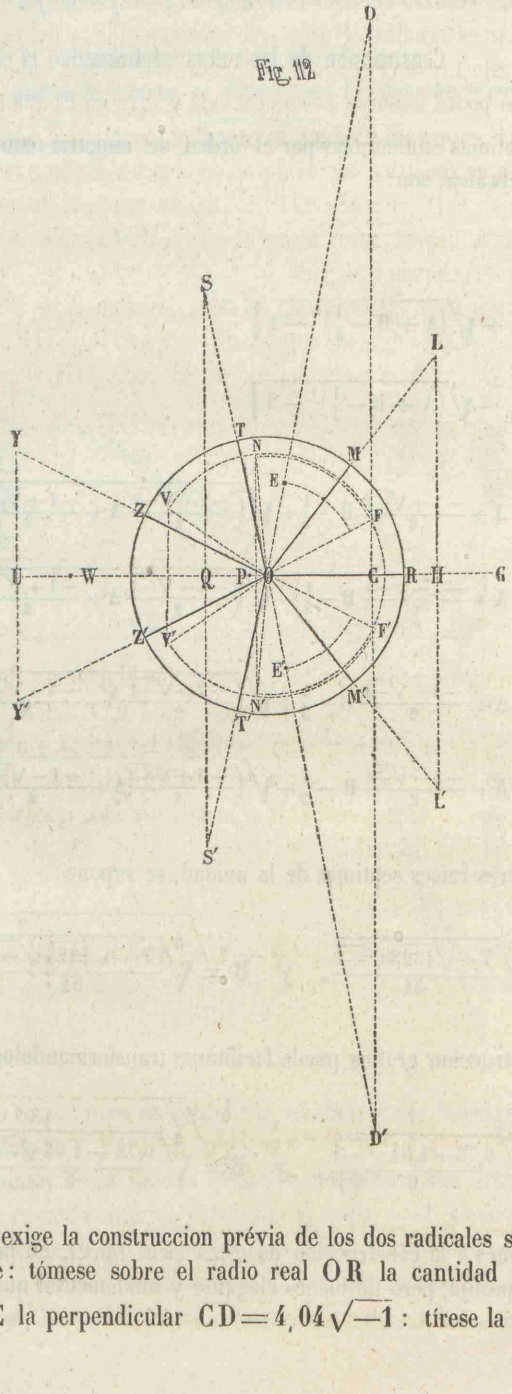
valores cuya construccion gráfica puede facilitarse transformándolos en

$$\mathrm{A} = \sqrt[3]{\frac{0{,}78 + 4{,}04\sqrt{-1}}{6}}, \quad \text{y} \quad \mathrm{B} = \sqrt[3]{\frac{0{,}78 - 4{,}04\sqrt{-1}}{6}}.$$

Procedamos pues á la construccion de estas siete raíces, en la figura **112**, la cual es algo mas prolija, pero no menos elegante y fundamental que la de las anteriores.

La primera raíz, que es la real, está representada por el radio OR igual á la unidad.

Fig. 112



La segunda exige la construccion prévia de los dos radicales simétricos A y B, y es como sigue: tómese sobre el radio real OR la cantidad $OC = 0{,}78$: levántese sobre C la perpendicular $CD = 4{,}04\sqrt{-1}$: tírese la oblícua OD, que expresa la suma binómia de las dos anteriores $0,78+4,04\sqrt{-1}$: divídase OD en seis partes iguales, como indica el denominador; y tómese $OE=\frac{1}{6}$ de OD; con lo cual queda construido todo el quebrado que está bajo el radical. Divídase ahora en tres partes iguales el arco que este valor dista del radio real, y por la mas próxima á este tírese OF, igual en magnitud á la raíz cúbica del valor numérico de OE (que podrá tomarse en una escala que tenga por unidad el radio): la recta oblícua OF expresará evidentemente el primer radical ó el valor de A.

El de B, que es simétrico con el de A, se obtiene dando una direccion opuesta á la perpendicular CD', tirando OD', tomando tambien la sexta parte OE' y extrayendo la raíz cúbica aproximada al eje real. La oblícua OF' dará el segundo radical ó el valor de B.

Viniendo ahora á la expresion de la raíz, la suma $A+B$ se obtiene por la diagonal OG del paralelógramo construido sobre OF y OF', de la cual, si se resta HG igual á la tercera parte del radio, la recta OH representará la parte real de lo contenido dentro del paréntesis, esto es, $OH=A+B-\frac{1}{3}$.

La parte imaginaria

$$\sqrt{\left(A+B-\frac{1}{3}\right)^2-4}=\sqrt{\overline{OH}^2-2^2}=\sqrt{2^2-\overline{OH}^2}\cdot\sqrt{-1},$$

se construye fácilmente considerando á 2 como una hipotenusa dada, y á OH como un cateto conocido: tómese, pues el diámetro igual 2, y determínese desde el centro O el punto L en la perpendicular indefinida levantada sobre H. La recta HL expresará la parte imaginaria de lo que está dentro del paréntesis.

La suma de ambas partes real OH é imaginaria HL queda entonces representada por la diagonal OL igual á

$$A+B-\frac{1}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{1}{3}\right)^2-4},$$

y su mitad

$$OM=\frac{1}{2}\left[A+B-\frac{1}{3}+\sqrt{\left(A+B-\frac{1}{3}\right)^2-4}\right]$$

será la raíz primera imaginaria ó segunda del sistema.

La simétrica de esta OM' se obtiene por una construccion análoga dando una direccion negativa ó descendente al elemento imaginario $-\sqrt{2^2-\overline{OH}^2}\cdot\sqrt{-1}$, que entonces será HL', en cuyo supuesto OM' ó sea la mitad de OL' expresará la séptima raíz.

Las dos imaginarias siguientes segun el órden de simetría, que son la tercera y sexta del sistema, proceden de la construccion de los mismos radicales A y B, pero variamente modificados por los coeficientes $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. El primero hace avanzar un tercio, y el segundo dos tercios de la circunferencia, á las cantidades á quienes afectan, pues tales son los arcos que expresan esos coeficientes. Así tendremos

$$ON' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}A \quad \text{y} \quad ON = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}B;$$

y por lo tanto

$$OP = ON' + ON = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}A + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}B:$$

y si en la misma direccion negativa de OP añadimos $PQ = -\frac{1}{3}$, resultará

$$OQ = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}A + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}B - \frac{1}{3}$$

que es la parte real de lo contenido dentro del paréntesis.

La parte imaginaria $QS = \sqrt{2^2 - \overline{OQ}^2} \cdot \sqrt{-1}$ se obtiene tambien como cateto por medio de la hipotenusa 2 y el otro cateto real hallado OQ.

La suma de ambas partes real é imaginaria será OS y su mitad OT será la raíz tercera del sistema.

Su simétrica OT', que es la sexta, se obtiene dando una direccion negativa al elemento imaginario $QS' = -\sqrt{2^2 - \overline{OQ}^2} \cdot \sqrt{-1}$.

El último par de las imaginarias cuarta y quinta, que son las mas distantes del eje real, tienen una construccion que no difiere de la anterior sino en la diversa combinacion de los coeficientes: así

$$OV = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}A \quad \text{y} \quad OV' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}B,$$

y por consiguiente

$$OW = OV + OV' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}A + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}B,$$

y añadiendo en la misma direccion negativa $WU = -\frac{1}{3}$, tendremos OU, parte real de lo que está dentro del paréntesis.

La parte imaginaria será UY, y OY la suma del elemento real y del imaginario: luego la mitad de esta suma ó sea OZ será la cuarta raíz del sistema.

La quinta, simétrica de la anterior, es OZ', que no difiere de ella sino en la direccion negativa de su elemento imaginario UY'.

Tambien es fácil comprobar que el módulo de estas raíces es la unidad, y por consiguiente que se terminan en la circunferencia.

Escolio. Al determinar los valores de A y de B, hemos construido los radicales que los representan por raíces terceras OF superior y OF' inferior, igualmente próximas al eje real: así lo exige la simetría de los quebrados contenidos bajo los radicales.

En vez de estas simétricas hemos podido tomar las otras mas remotas ON y ON', ó las más remotas todavía OV y OV': en cada uno de estos casos hubiera variado el órden de aparicion de cada uno de los pares de imaginarias, pero su número y posicion hubieran sido los mismos.

Si las raíces terceras no se tomasen con igual proximidad al eje real, los radicales no podrian conservar su esencial simetría de la que pende la realidad de la primera parte de cada fórmula; la construccion geométrica sería inconducente apartándose de la simetría algebráica.

Cualesquiera que sean las fórmulas con que el Álgebra exprese las raíces de la unidad en todos los grados, la Geometría no se detiene en dar una representacion radial de todas ellas. El procedimiento, por lo que se ha visto, es tan universal como sencillo.

En efecto, llevando toda imaginaria de la forma $\sqrt[2n]{-1}$ la expresion binomial $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, y teniendo aquella forma todas las raíces imaginarias de la unidad, se construyen todas estas raíces con un elemento real α, que se determina en la direccion del eje horizontal á la derecha ó á la izquierda del punto de orígen, y con otro imaginario β levantado perpendicularmente sobre la extremidad de aquel.

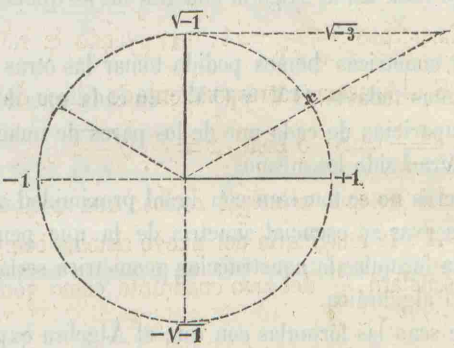
La resultante dividida, segun el denominador de la raíz, dará el radio en su valor cuantitativo y con la inclinacion debida.

ARTÍCULO 5.º

Triseccion del ángulo recto.

La triseccion del ángulo recto es natural corolario de la triseccion de toda la circunferencia por la construccion gráfica de las tres raíces terceras de la unidad. Desenvolveré esta teoría curiosa, por lo que tiene de algebráica. La triseccion geométrica del ángulo recto es llana, pues se obtiene inmediatamente por la inscripcion del radio; pero la triseccion que propongo, si no mas fácil, es enteramente original é independiente de las propiedades del exágono. Si llamamos x al radio trisector del ángulo recto (*Fig.* 113), este radio distará del eje real un tercio del cuadrante, y podrá ser considerado como raíz tercera de $\sqrt{-1}$, que es por sí mismo legítima expresion del lado del ángulo recto perpendicular al eje real.

Fig. 113



De esta suposicion se infiere la ecuacion

$$x^3 = \sqrt{-1}\text{, que equivale á esta otra } \frac{x^3}{\sqrt{-1}} = 1;$$

de donde extrayendo la raíz cúbica de ambos miembros se deducen para $\dfrac{x}{-\sqrt{-1}}$ los tres valores

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

que dan para la incógnita x estos otros tres

$$x = \left\{\begin{matrix} +1 \\ \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2} \\ \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2} \end{matrix}\right\} \times -\sqrt{-1}$$

Las tres raices de la unidad positiva como sistema total y entero reciben una mocion productiva expresada por el coeficiente $-\sqrt{-1}$.

La raiz real de aquel sistema se traslada á la posicion $-\sqrt{-1}$, y la raiz $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, que en este caso es $\frac{\sqrt{-1}+\sqrt{3}}{2}$, construida por los principios establecidos, dividirá el ángulo recto en tres partes iguales, señalando una distancia inicial de un tercio del arco medido por la potencia $\sqrt{-1}$.

Y no solo en tres, sino en cinco y en siete partes iguales puede dividirse el ángulo recto por análogas construcciones de sistemas de raices quintas y séptimas derivadas de mociones impresas á los sistemas primitivos que dividen la circunferencia entera en cinco ó en siete partes iguales.

Haciendo en el primer caso $\frac{x^5}{\sqrt{-1}}=1$, extrayendo la raiz quinta de ambos miembros, y llamando S al sistema correspondiente de raices de la unidad, se tiene

$$\frac{x}{\sqrt{-1}}=S \quad \text{ó bien} \quad x=S\cdot\sqrt{-1}.$$

Las raices quintas del sistema principal reciben una mocion $\sqrt{-1}$ ó trasladan su raiz real á $\sqrt{-1}$: la imaginaria del nuevo sistema comprendida entre los lados del ángulo recto señalará $\frac{1}{5}$ del arco cuadrante como verdadera raiz quinta de $\sqrt{-1}$.

En el segundo caso la ecuacion

$$\frac{x^7}{\sqrt{-1}}=1 \text{ conduce á } x=S\times-\sqrt{-1},$$

que traslada el sistema principal de siete raices segun la mocion $-\sqrt{-1}$ conjugada de la anterior; construyendo las raices séptimas con esta modificacion una de ellas caerá dentro del ángulo recto y lo dividirá en siete partes iguales.

Trasladando alternativamente los sistemas principales á las posiciones $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ consideradas accidentalmente como ejes reales, se iria dividiendo el ángulo recto en la série de números impares $3, 5, 7, 9, 11 \ldots . 2n+1$ partes iguales.

Las divisiones de un número cualquiera de cuadrantes se infieren fácilmente de los mismos principios.

Nótese aquí la particular congruencia de que 9, primer número impar que no es primo, seria exponente de una division del ángulo recto que daria más de una imaginaria comprendida entre sus lados: la más próxima al eje real lo dividiria sin embargo en nueve partes iguales.

Las expresiones aritméticas y la representacion geométrica aparecen tambien íntimamente ligadas en el problema de la triseccion del ángulo, tan antiguo y tan refractario á los esfuerzos de todos los matemáticos.

CAPÍTULO VII.

GRADUACION INFINITA DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

ARTÍCULO 1.°

Inevolubilidad esencial de la unidad bajo el concepto de cantidad.

La evolucion á que hemos sometido las cantidades imaginarias en los capítulos anteriores se verifica por una série de tésis finitas en que la raíz se va constituyendo con sujecion á un exponente ó hipótesis.

La involucion procede asímismo por divisiones y subdivisiones de un arco total (tésis definitiva de la potencia) hasta fijar la raiz que le dió orígen.

En este capítulo me propongo explicar la importantísima doctrina de la evoucion infinita de las imaginarias.

Antes, sin embargo, conviene saber lo que es esta evolucion respecto de las cantidades reales.

La unidad, como tal y bajo su propio concepto, es esencialmente inevoluble como hemos dicho al hablar de la *graduacion cuantitativa* en la página 162. La unidad sin pluralidad, y por consiguiente sin totalidad, no tiene contenido, no es cantidad; es invariable en todos los grados de su potencialidad; es estéril por esencia, é inepta para la generacion de ningun otro número por via de graduacion: no engendra más que á sí misma. Las potencias succesivas de una recta considerada como radio ó como unidad, son ella misma, como no diferenciándose cuantitativamente en nada de sí misma, y hallándose en sí misma en todas las evoluciones.

No hay exponente real finito que pueda dar á la unidad la fecundidad necesaria para producir potencialmente un número, y por eso la unidad no puede ser base de ningun sistema de logaritmos.

Por otra parte, no es posible formar idea de lo que fueran las potencias infinitas de las cantidades finitas mayores que la unidad, ni de cómo habria de establecerse entre ellas como potencias la distincion numérica que depende de su distincion como raíces. Todos los números sin distincion elevados á ∞ son infinitos.

La unidad, pues, no puede explicar la generacion potencial infinita de los números por lo que es en sí misma, ni por su adicion con otras unidades finitas. En el primer caso por defecto, y en el segundo por exceso de esencia cuantitativa, quedaria sin neutralizacion el efecto evolutivo de un exponente infinito.

La adicion de un elemento numérico infinitesimal con la unidad inevoluble satisface á esta exigencia, y produce una *potencia finita* por la neutralizacion de la infinitud del exponente con la infinita pequeñez de este elemento numérico que entra en la raíz.

Me detendré algun tanto en esta evolucion infinita, que es propia de las cantidades reales, para extenderla despues á las imaginarias.

Si designamos por μ el elemento numérico ó el número de unidades infinitamente pequeñas, que es necesario añadir á la unidad finita para producir por infinita potencialidad el número a, tendremos que la igualdad

$$a=\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}$$

expresa la condicion única de la posibilidad de la evolucion que intentamos.

Sometiéndola á un desarrollo regular, segun la fórmula de Newton, tendremos

$$a=\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=1+\infty\frac{\mu}{\infty}+\frac{\infty(\infty-1)}{1\cdot 2}\frac{\mu^2}{\infty^2}$$
$$+\frac{\infty(\infty-1)(\infty-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\mu^3}{\infty^3}$$
$$+\frac{\infty(\infty-1)(\infty-2)(\infty-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{\mu^4}{\infty^4}+\&c.$$

y si consideramos que por su finitud pueden desaparecer los números 1, 2, 3, &c. que afectan substractivamente al infinito en el coeficiente de cada término, se reducirá la série á

$$a=\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{\infty}{1}\times\frac{\mu}{\infty}+\frac{\infty^2}{1\cdot 2}\times\frac{\mu^2}{\infty^2}+\frac{\infty^3}{1\cdot 2\cdot 3}\times\frac{\mu^3}{\infty^3}+\frac{\infty^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\times\frac{\mu^4}{\infty^4}\dots$$

de la cual, reduciendo por via de division, se obtiene en definitiva

$$a=\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{\mu}{1}+\frac{\mu^2}{1\cdot 2}+\frac{\mu^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\mu^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\mu^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\dots\&c.;$$

donde el valor de la potencia a viene expresado en potencias de μ, esto es, se demuestra la posibilidad de engendrar el número a con la unidad, más una série de potencias del número de elementos infinitesimales que es necesario añadir á la unidad finita para engendrar el número a por evolucion infinita.

Claro es que, siendo finito, aunque inconmensurable el valor de esta série, la evolucion infinita termina en potencia finita con tal que la raíz encierre un elemento infinitesimal.

Para concretar esta importantísima ley general se puede suponer que el elemento μ sea 1, y entonces la série

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ldots\ \&c.$$

que da la potencia, adquiere un valor enteramente aritmético y apreciable con indefinida aproximacion como potencia de grado infinito del caso particular $\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}$, esto es, del caso en que solo nos proponemos averiguar qué potencia se obtendrá por evolucion infinita tomando como raíz la unidad finita, más una sola unidad infinitesimal.

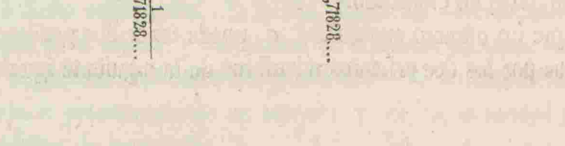
Sumando en esta série notable un número suficiente de términos, se obtiene el número

$$2{,}718281828459045\ \&c.,$$

el cual viene designado con la letra característica e en todos los libros de Matemáticas.

En una recta considerada como radio evoluble bajo el concepto de cantidad la adicion longitudinal (en la direccion real) de una unidad infinitesimal determina por evolucion infinita el número e en la misma direccion á los 2,718281828... radios del punto de orígen, como se ve en esta figura:

Fig. 14



Así en los números como en las líneas, es posible la consideracion de un número e, regresivo ó involutivo, que procede de la elevacion á una potencia con exponente negativo pero infinito. Su forma radical será

$$\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{-\infty}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}}$$

y su desarrollo dará el número

$$\frac{1}{e}=\frac{1}{2{,}718281828...}$$

que es fraccionario y como interior respecto de la unidad ó del radio segun indica la misma figura 114.

ARTÍCULO 2.º

Número e cuantitativamente considerado.

El número e es, por cierto, singularísimo. Potencia finita obtenida por la evolucion infinita de la unidad estéril, fecundada por la adicion de un elemento infinitesimal, expresa el máximo desarrollo á que puede aspirar la unidad con el minimum de aptitud evolutiva, con una evolubilidad cuantitativa infinitamente pequeña. Aunque encerrado en el abismo infinitesimal que media entre los números 2 y 3, en los primeros grados de la escala natural numérica, sin que fuera posible adivinar *à priori* que en ese punto singularísimo habia de parar la evolucion infinita del binómio radical $1+\frac{1}{\infty}$, el cálculo revela su existencia, dando al propio tiempo una prueba patente de cuánto se mezcla la nocion del infinito en las más someras especulaciones acerca de la cantidad.

Tiene el número e la notable propiedad de ser el punto de partida y la base natural, desde la cual se pueden determinar todos los números como potencias suyas por una *evolucion finita* cuyo exponente es el mismo número μ que, adicionado como infinitesimal con la unidad, produciria esta misma potencia por la evolucion infinita que antes he explicado.

De suerte que un número cualquiera a puede tener dos generaciones conceptuales expresadas por los dos primeros miembros de la siguiente igualdad

$$\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=e^{\mu}=a.$$

La primera directa é infinita, parte de la unidad más un cierto número μ de elementos infinitesimales: la segunda es indirecta, supone el número e engendrado infinitesimalmente, y la nueva evolucion finita á que se le somete tiene por exponente el mismo número μ que engendraria la potencia a directa é infinitamente.

Para demostrar esta rara propiedad del número e, basta considerar que una potencia cualquiera p de este número es

$$e^p = \left(1 + \frac{1}{\infty}\right)^{p\infty},$$

la cual, desenvuelta por la ley ordinaria, da

$$e^p = 1 + p\infty \times \frac{1}{\infty} + \frac{p^2\infty^2}{1\cdot 2} \times \frac{1}{\infty^2} + \frac{p^3\infty^3}{1\cdot 2\cdot 3} \times \frac{1}{\infty^3} \ldots \text{\&c.},$$

que se reduce como antes á

$$e^p = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p^2}{1\cdot 2} + \frac{p^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{p^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{p^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \ldots \text{\&c.},$$

donde la potencia de e está dada en potencias succesivas del exponente p enteramente como sería dado en el desarrollo infinito de $\left(1 + \frac{p}{\infty}\right)^{\infty}$: luego

$$e^p = \left(1 + \frac{p}{\infty}\right)^{\infty} \qquad (\Delta)$$

y por consiguiente, la potencia e^{μ} daria el mismo valor en série que $\left(1 + \frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}$.

Por esta propiedad singularísima es declarado el número e como base de los logaritmos naturales ó neperianos, quedando reducido el problema fundamental de la teoría logarítmica á la determinacion del exponente p, á que sometida la base e engendra un número dado a, ó lo que es lo mismo á la resolucion de la ecuacion exponencial $e^p = a$ cuya incógnita fuera p.

En la fórmula principal (Δ)

$$\left(1 + \frac{p}{\infty}\right)^{\infty} = a = e^p$$

aparecen ligados los valores p y a por las relaciones que expresan las igualdades

$$1 + \frac{p}{\infty} = a^{\frac{1}{\infty}} \quad \text{y} \quad p = \infty\left(a^{\frac{1}{\infty}} - 1\right);$$

de donde es fácil obtener un valor numérico de p con algunos artificios de cálculo que consisten en desenvolver separadamente $a^{\frac{1}{\infty}}$, dándole la forma

$$a^{\frac{1}{\infty}} = \left[1 + (a^n - 1)\right]^{\frac{1}{n\infty}},$$

y suponiendo en este desarrollo tales valores á la arbitraria n que las potencias de $a^n - 1$ sean quebrados muy pequeños que hagan la série bastante convergente (*).

Puesto que desde la base e con un exponente apropiado es posible llegar gradualmente á todo número entero, quebrado ó mixto, y á la unidad misma, el número e compendia en su propia esencia toda la evolubilidad numérica ó cuantitativa que es necesaria para alcanzar todas las magnitudes; y por el elemento infinitesimal que encierra, se aproxima infinitamente y sin solucion de continuidad numérica á todos los valores que en infinito número es posible determinar en la escala que se desenvuelve desde la unidad en sentido ascendente y descendente.

Ningun otro número tiene esta fecundidad maravillosa que tanto contrasta con la esterilidad esencial de la unidad en su puro concepto.

Notemos, al fin, como resultado de estas consideraciones, que parecen algo extrañas á nuestro principal asunto, cuán plenamente se justifica nuestra doctrina acerca de la naturaleza de los exponentes consignada al principio de este libro.

Las potencias en su generacion más profunda y más íntima resultan dadas en funciones de sus exponentes. Los exponentes no son meros índices de la evolucion potencial, sino verdaderas causas generadoras tan independientes en este algoritmo como lo es toda hipótesis en la relacion lógica que expresan los juicios condicionales. En la ecuacion exponencial $a^x = b$, el exponente x no es determinable por una relacion gradual, sino productiva, logarítmica $x \cdot \log a = \log b$, ó $x = \frac{\log b}{\log a}$.

ARTÍCULO 3.º

Inevolubilidad de la unidad positiva bajo el concepto de cualidad. Número e cualitativo.

¿Será posible un número e cualitativo? Sí por cierto; y á su determinacion me han conducido las reflexiones siguientes:

1.ª La unidad real positiva es esencialmente inevoluble bajo sus dos conceptos de cantidad y cualidad: es inmóvil en todos sus grados y potencias, y los desarro-

(*) Véase para este y otros pormenores de la generacion infinita de las potencias el *Curso de Matemáticas puras* de MONTFERRIER.

llos cuantitativos de que es susceptible por la adicion de un elemento infinitesimal, se verifican siempre segun su propia cualidad, en su misma afeccion como número, en su misma direccion como línea, sin evolucion giratoria ó cualitativa, cualesquiera que sean los grados que pueda alcanzar como cantidad.

2.ª La unidad real negativa es por el contrario esencialmente voluble y móvil, por lo mismo que su concepto cualitativo niega la positividad, que, como cualidad fundamental á que todas las demas son referidas, es por esencia invariable.

3.ª El símbolo típico $\sqrt{-1}$, en cuyo seno va encerrada la evolubilidad por esencia, es el gérmen elemental que unido á la unidad real positiva por la síntesis $1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}$ considerada como raíz de una evolucion infinita puede darle la movilidad giratoria de que es incapaz. Si este elemento evolutivo es además infinitesimal, se concibe que la unidad positiva se hará evoluble sin alteracion cuantitativa. Si es una recta positiva, unidad ó radio real, el que recibe en su extremidad este elemento infinitesimal, no ya en su misma direccion, sino perpendicularmente, la resultante binomial infinitamente próxima al radio, y cuya proyeccion es el radio mismo, en nada cambiará el valor cuantitativo del radio, y constituirá una mocion elemental infinitamente pequeña, que sometida á una evolucion infinita será orígen de alguna tésis ó potencia cualitativa singular análoga (aunque bajo otro concepto) á la tésis cuantitativa expresada por el número e.

El cálculo responde á estas presunciones y determina un verdadero número e cualitativo.

La forma $\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}$, desenvuelta por el método ordinario, conduce á la série

$$1+\frac{\sqrt{-1}}{1}-\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\&c.$$

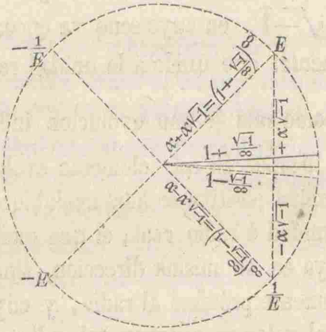
En esta série, cuya estructura es ya conocida, y que no ofrece más novedad que la alternativa de términos reales é imaginarios, y cuya forma sumatoria es $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, es posible reconocer la convergencia de los términos reales cuya suma es α, y de los coeficientes de los imaginarios cuya suma es β, á un punto comun en que ambas sumas se hacen iguales; de suerte que el límite en que esto se verifica es un punto de tal naturaleza, que respecto de él se tiene $\alpha=\beta$ y la expresion sumatoria de la série infinita es

$$\alpha+\alpha\sqrt{-1}=\left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}.$$

La traduccion de este resultado es óbvia: la evolucion infinita hace correr al radio un arco cuyo coseno (elemento real) es igual al seno (elemento imaginario).

Este arco es la octava parte de la circunferencia (*Fig.* 115), y el radio que por una oscilacion infinita lo determina, es el verdadero *e* cualitativo que designaré por $\mathscr{E}$ para mayor distincion.

Fig. 115.



Este nuevo número, más singular todavia que el antiguo, á que me ha conducido la teoría del imaginarismo, tiene tambien la propiedad de engendrar por sus potencias finitas cualquiera de las tésis ó direcciones circulares, así ascendentes como descendentes, tomando por exponente el mismo número que expresa los elementos infinitesimales imaginarios, que sería necesario sumar con la unidad para producir la misma tésis por evolucion infinita.

En efecto, siendo

$$\mathscr{E} = \left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty},$$

su potencia del grado p será

$$\mathscr{E}^{p} = \left(1 + \frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{p\infty},$$

y desenvolviendo en série el segundo miembro tendremos

$$\mathscr{E}^{p} = 1 + \frac{p\sqrt{-1}}{1} - \frac{p^{2}}{1 \cdot 2} - \frac{p^{3}\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{p^{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{p^{5}\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \dots \&c.$$

exactamente como resultaria de la evolucion de $\left(1 + \frac{p\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}$: luego tambien es evidente la igualdad

$$\mathscr{E}^{p} = \left(1 + \frac{p\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}.$$

Al número $\mathscr{E}$ corresponde tambien otro $\frac{1}{\mathscr{E}}$ ó $\mathscr{E}^{-1}$ simétrico, que procede de la evolucion regresiva de

$$\left(1-\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{\infty}, \text{ ó de } \left(1+\frac{\sqrt{-1}}{\infty}\right)^{-\infty}.$$

Los dos números $\mathscr{E}^{\pm 1}$ y sus conjugados $-\mathscr{E}^{\pm 1}$ señalan en la circunferencia cuatro puntos cardinales, que en la teoría ordinaria corresponden á las cuatro raíces imaginarias de la unidad negativa.

No hay, sin embargo, ningun procedimiento algebráico que conduzca á alguna de las cuatro igualdades consiguientes

$$\mathscr{E}=\sqrt{\sqrt{-1}}$$

$$-\mathscr{E}^{-1}=\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

$$-\mathscr{E}=-\sqrt{\sqrt{-1}}$$

$$\mathscr{E}^{-1}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$$

El fundamento de esta incomunicabilidad es óbvio.

La razon interviene en la generacion infinitesimal del número $\mathscr{E}$, y el entendimiento en la determinacion de $\sqrt{\sqrt{-1}}$ como tésis progresiva ó regresiva finita. El tránsito del entendimiento á la razon no es explicable por una deduccion puramente intelectual ó lógica como son todas las que realiza el Álgebra.

La racionalidad (no cuantitativa sino lógica) del número $\mathscr{E}$ se desprende naturalmente del carácter típico que entre las oblícuas alcanza la oblícua más perfecta que media entre la perpendicular (tipo de las indirectas) y la real positiva, tipo fundamental de todo el sistema de relaciones externas de las rectas.

$\sqrt{\sqrt{-1}}$ nace de la aplicacion intelectual del concepto de causalidad ó potencialidad regresiva á $\sqrt{-1}$, ó á la cantidad bajo el concepto de limitacion. En este juego de conceptos no interviene más que el entendimiento.

ARTÍCULO 4.°

Graduacion infinita sincategoremática.

No podemos ya detenernos en este camino, sino que por fuerza habremos de concebir tambien una evolucion infinita, mixta, en que la cantidad y la cualidad de la raíz desenvuelta influyen en la determinacion de una tésis finita. Esta tésis, tambien singular, es un número que anticipadamente designaré con la letra η.

Este número ha de suponer un desarrollo cuantitativo en el radio ó unidad finita, y otro cualitativo en su elevacion sobre la posicion inevoluble de la unidad positiva. El elemento infinitesimal que debe adicionarse con la unidad debe ser oblícuo para dar una proyeccion que aumente la longitud del radio, y al mismo tiempo una resultante sumatoria que sea una mocion cualitativa elemental.

Claro es que son infinitos los grados de oblicuidad con que el elemento infinitesimal puede entrar en combinacion con la unidad finita, y por consiguiente infinitamente varios los números η á que llegan estas evoluciones.

Pero supongamos que esta oblicuidad sea expresada por $\sqrt{\sqrt{-1}}$, que ya hemos reconocido como tipo natural de la oblícua mas perfecta, y la fórmula que ha de graduarse será entonces

$$\left(1+\frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{\infty}.$$

El desarrollo Newtoniano conduce á la série

$$1+\frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{1}+\frac{\sqrt{-1}}{1\cdot 2}+\frac{\sqrt{-\sqrt{-1}}}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\ \&c.$$

que guarda un período cuaternario respecto de los numeradores y de la alternativa de los signos $+$ y $-$. La naturaleza factorial de los denominadores permanece la misma.

Combínanse en esta série cuatro séries de rápida convergencia, que pueden formarse con los términos homólogos de los períodos cuaternarios. La primera es la de los términos reales, cuya suma es α: la segunda la de los términos afectos de $\sqrt{\sqrt{-1}}$, cuya suma es $\beta\sqrt{\sqrt{-1}}$; la tercera la de los términos que tienen $\sqrt{-1}$, cuya suma es $\gamma\sqrt{-1}$; y la cuarta la de los términos que llevan $\sqrt{-\sqrt{-1}}$, cuya suma es $\delta\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

La expresion sumatoria de la série total tendrá, pues, la forma

$$\alpha + \beta\sqrt{\sqrt{-1}} + \gamma\sqrt{-1} + \delta\sqrt{-\sqrt{-1}};$$

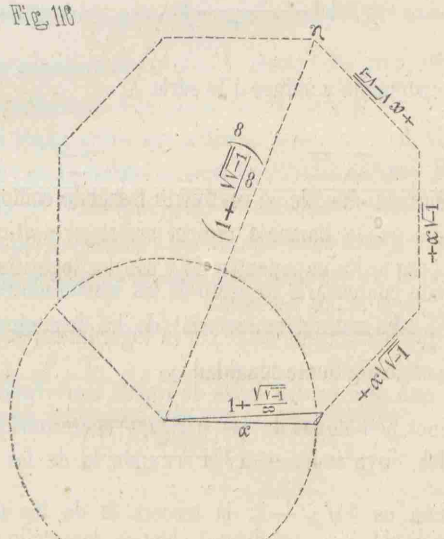
y teniendo presente que en el punto de convergencia á que todas se aproximan por una oscilacion infinita, serán iguales las magnitudes absolutas de estas sumas parciales, la suma total será

$$\alpha + \alpha\sqrt{\sqrt{-1}} + \alpha\sqrt{-1} + \alpha\sqrt{-\sqrt{-1}},$$

expresion genuina de cuatro lados consecutivos de un octógono regular, cuya construccion inmediata, tomando sobre el radio la magnitud lineal α, determinará como resultante sumatoria de toda la série, como número η verdadero, el diámetro del octógono cuyo lado es α, segun aparece en la figura 116. La magnitud absoluta de α se obtiene aproximadamente calculando un número suficiente de términos reales.

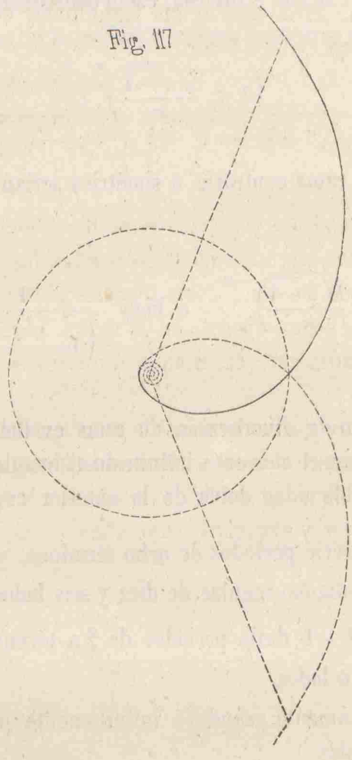
Y aquí debo llamar muy particularmente la atencion del lector sobre la extraña coincidencia de ser este número η igual en longitud absoluta al número e ordinario, de manera que el módulo de η es e. Así todos estos números singulares están ligados en una teoría superior y armónica, cuya alma es el imaginarismo.

Fig. 116



Este número η participa de la naturaleza del número e cuantitativo, y del $\mathcal{E}$ cualitativo: del primero señalando un desarrollo longitudinal de la unidad finita, y del segundo elevando al radio unidad sobre su posicion inicial. El número que expresa esta evolucion mixta, es el radio vector de una trayectoria que se desenvuelve desde la extremidad del radio como se ve en esta figura.

Fig. 17



Las varias potencias enteras de η continúan trazando como radios vectores la curva divergente, que puede llamarse *espiral sincategoremática.* Esta espiral es además logarítmica, porque los exponentes de η son los logaritmos naturales cuyos números son los respectivos radios vectores.

Esta propiedad, que le conviene como curva logarítmica, se infiere como ántes de la ley expresada por la siguiente igualdad

$$\left(1+\frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{p\infty}=\left(1+\frac{p\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{\infty},$$

cuyo primer miembro igual á η^{p} conduce á idéntico desarrollo que el segundo.

La parte de espiral comprendida entre el número η y el radio es dada por valores fraccionarios del exponente de η.

La parte interior de la espiral que nace de la evolucion de $\left(1-\frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{\infty}$, tiene tambien su base natural ó $\frac{1}{\eta}$ que, por exponentes fraccionarios retrocediendo hasta el radio traza la primera evolucion de la curva interior, y por exponentes enteros, aproxima infinitamente este desarrollo al punto de orígen, centro de toda la construccion. Las dos partes, externa é interna, están contenidas en la forma simultánea

$$\left(1 \pm \frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{\infty}.$$

Las dos partes de la rama contraria ó simétrica serian dadas por la forma simétrica de la anterior:

$$\left(1 \pm \frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{-\infty} \quad \text{ó bien} \quad \frac{1}{\left(1 \pm \frac{\sqrt{\sqrt{-1}}}{\infty}\right)^{\infty}}$$

Claro es que el grado de divergencia de estas evoluciones espirales depende del grado de oblicuidad que el elemento infinitesimal imaginario tiene respecto de la unidad finita real; una oblicuidad doble de la anterior expresada por la direccion $\sqrt{\sqrt{\sqrt{-1}}}$ daria en la série períodos de ocho términos, y la expresion sumatoria sería el diámetro de un polígono regular de diez y seis lados. En general, una oblicuidad expresada por $\sqrt[2n]{-1}$ daria periodos de $2n$ términos, y conduciria á diámetros de polígonos de $4n$ lados.

Una oblicuidad infinitamente grande é infinitamente pequeña se representaria por las dos formas evolubles

$$\left[1+\frac{(\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}\right]^{\infty} \quad \text{y} \quad \left[1+\frac{(-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\cdot\sqrt{-1}}{\infty}\right]^{\infty};$$

verificándose que en la série á que conduce la evolucion en ambos casos no puede desaparecer el exponente infinitesimal $\frac{1}{\infty}$: son sin embargo muy notables las interpretaciones geométricas de estos dos desarrollos.

El primero da el radio real con mocion cuantitativa ó cualitativa infinitamente pequeña, y expresa una divergencia máxima en la espiral, ó una máxima aproximacion á la línea recta.

El segundo da la circunferencia con iguales incrementos infinitésimos y corresponde á una divergencia mínima de la espiral: es la *espiral contigua* que se va envolviendo á sí misma sin intervalo finito y que en sus potencias positivas enteras ó fraccionarias puede llenar toda la superficie exterior á la circunferencia, ó con las negativas (ó las positivas correspondientes al número $\frac{1}{\eta}$) recorre infinitamente la superficie interior, siendo su límite el centro del círculo.

La forma simultánea $\eta^{\pm p}$ expresa todos los puntos del plano indefinido con los varios valores cuantitativos de p.

Los puntos simétricos de la espiral contígua contraria serian dados por iguales valores de p en la forma $\frac{1}{\eta^{\pm p}}$.

CAPÍTULO VIII.

DE LAS IMAGINARIAS EXPONENCIALES.

ARTÍCULO 1.º

De las exponenciales planas.

Llevan el nombre de *imaginarias exponenciales* las imaginarias que reciben su imaginarismo del de su exponente.

Un exponente imaginario influye en la constitucion de la potencia de un modo particular y digno de estudio.

Hay dos clases de imaginarias exponenciales; unas que tienen base real, á las que llamo *exponenciales planas*, cuya forma es $e^{x\sqrt{-1}}$; y ótras cuya base es imaginaria, y que pueden llamarse *esféricas*: éstas tienen la forma $\mathscr{E}^{x\sqrt{-1}}$. Para entender bien la diversa naturaleza de estas exponenciales, no se pierda de vista el diferente orígen y representacion geométrica de los dos números e y $\mathscr{E}$ del capítulo anterior.

Si una base real e sometida á un exponente real tiene una evolucion longitudinal expresada por un número entero cuando el exponente es positivo, y fraccionario cuando el exponente es negativo, se ocurre preguntar: ¿qué número expresará la evolucion cuando el exponente sea imaginario? Pero la respuesta es fácil, si se atiende á que ese número debe ser intermedio entre el entero y el fraccionario, á la manera que el exponente imaginario media entre las dos direcciones positiva y negativa. A un exponente imaginario debe corresponder la *unidad* que neutraliza los valores enteros y fraccionarios, y que, no teniendo verdadero valor cuantitativo, corresponderá á los varios valores del exponente con sus diversas afecciones cualitativas. De esta congruencia resultará que á la diversidad cuantitativa del exponente con la única cualidad imaginaria, corresponderá una diversidad cualitativa de la unidad con su único valor cuantitativo que es invariable.

ARTÍCULO 2.°

Exponenciales planas puras.

La eficaz influencia del exponente en el desarrollo de una potencia en general se infiere del principio consignado en la siguiente igualdad

$$a=e^p=1+\frac{p}{1}+\frac{p^2}{1\cdot 2}+\frac{p^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{p^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\ldots \&c.$$

que expresa la generacion de esta por una funcion de aquel.

Desenvolviendo ahora, segun esta ley, la exponencial plana $e^{x\sqrt{-1}}$, tendrémos

$$e^{x\sqrt{-1}}=1+x\sqrt{-1}-\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5\sqrt{-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\ldots \&c.$$

expresion compuesta de dos séries de términos, una real y otra imaginaria, para cuya representacion sumatoria total tendrémos la forma binómia

$$e^{x\sqrt{-1}}=\mathrm{F}x+fx\sqrt{-1}$$

designando por $\mathrm{F}x$ la primera série y por fx la suma de los coeficientes de la segunda.

El desarrollo de la exponencial conduce, pues, á una posicion oblícua determinada por dos funciones perpendiculares entre sí, y que denotan que la base real, que es el radio, ha perdido su posicion horizontal, é iniciado y consumado una mocion giratoria.

Digno es de notarse que, durante esta evolucion, el valor cuantitativo de la base permanece siendo siempre igual á la unidad, circunstancia que acredita la naturaleza circular de la evolucion y de que nos convencerémos observando que no solo se verifica

$$e^{x\sqrt{-1}}=\mathrm{F}x+fx\sqrt{-1}$$

sino tambien

$$e^{-x\sqrt{-1}}=\mathrm{F}x-fx\sqrt{-1}\,;$$

puesto que en este segundo caso todos los términos imaginarios del desarrollo general cambian de signo. Sumando ahora estas dos igualdades tendrémos

$$e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}=2\,\mathrm{F}x;$$

de donde se deduce

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{F}x=\frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}\right), \\ \text{y restándolas una de otra resulta} \\ fx=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}\right) \end{array}\right\}(\Delta)$$

Elevando ahora al cuadrado estas funciones, tendrémos

$$(\mathrm{F}x)^2=\frac{1}{4}\left(e^{2x\sqrt{-1}}+2+e^{-2x\sqrt{-1}}\right),$$

$$\text{y}\quad (fx)^2=-\frac{1}{4}\left(e^{2x\sqrt{-1}}-2+e^{-2x\sqrt{-1}}\right);$$

luego es evidente la igualdad

$$(\mathrm{F}x)^2+(fx)^2=1;$$

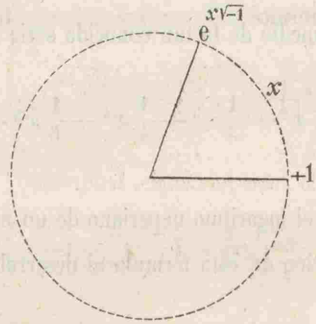
donde se ve que cualquiera que sea x son tales los valores absolutos de ambas funciones, que la resultante sumatoria que ellas determinan siempre es igual al radio y esencialmente periférica la evolucion de la exponencial. En este caso podemos considerar á $\mathrm{F}x$ como coseno y fx como seno del arco x que señala el grado de la evolucion potencial, y las dos fórmulas (Δ) son la expresion mas fundamental de las relaciones de magnitud y posicion de los senos y cosenos sobre que especula la Trigonometría plana.

La evolucion de la exponencial es, pues, esencialmente giratoria y circular, quedando justificada la singular proposicion de que: *una base real sometida á un exponente imaginario gira de igual manera que una base imaginaria sometida á un exponente real.*

En el caso de las imaginarias comunes, cuya forma es $(\sqrt{-1})^x$, toda la evolubilidad viene de la base: en el caso de las imaginarias exponenciales, cuya forma es $e^{x\sqrt{-1}}$, toda la evolubilidad viene del exponente.

Pero lo más notable de esta evolucion que voy considerando, consiste en la manera como los valores numéricos del exponente $x\sqrt{-1}$ (que supongo representado por una recta perpendicular cuya longitud es x) se convierten en arcos que determinan la tésis ó punto definitivo en que se detiene la exponencial. El exponente rectilíneo, sin perder su longitud absoluta, se *curvifica* segun el radio, que es su unidad, y señala el grado de la evolucion contándolo desde el extremo del radio ú orígen de los arcos como se ve en esta figura:

Fig. 118



Este hecho singular hace prever que un valor numérico de x, tal que conduzca la exponencial á la posicion primitiva del radio ó que la haga igual á la unidad después de hacer un giro completo, debe expresar numéricamente la longitud absoluta de la circunferencia cuyo radio es 1.

Esta prevision queda plenamente satisfecha por el cálculo. Por él se resuelve el problema: ¿ cuál será la longitnd de la recta que *curvificada* segun el radio 1, cierre un círculo como verdadera circunferencia?

Llamando π este exponente rectilíneo capaz de producir en la exponencial u n giro completo, tendrémos esta condicion expresada en la ecuacion

$$e^{\pi\sqrt{-1}}=1 \quad \text{ó} \quad \left(e^{\sqrt{-1}}\right)^{\pi}=1 \quad \text{ó bien} \quad \left(e^{\sqrt{-1}}\right)^{\pi}=\left(\sqrt{-1}\right)^{4};$$

tomando ahora los logaritmos naturales de ambos miembros, hallarémos

$$\pi\sqrt{-1}\cdot\log e=4\cdot\log\left(\sqrt{-1}\right);$$

ecuacion que por ser $\log e=1$, se reduce á

$$\pi\sqrt{-1}=4\cdot\log\sqrt{-1},$$

de donde se deduce la fórmula notabilísima

$$\pi = \frac{4 \log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}.$$

Interpretemos este resultado en un valor numérico real.

El imaginarismo de la expresion $\frac{4 \log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$, que puede transformarse en $\frac{4}{\sqrt{-1}}(\log. \sqrt{-1})$, no es más que aparente; y podemos llegar al verdadero valor real y numérico de π por medio de la tan conocida série logarítmica

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 \dots \&c. \quad (\Omega)$$

que sirve para determinar el logaritmo neperiano de un número cualquiera.

Mas para hacer aplicacion de esta fórmula al desarrollo de $\log \sqrt{-1}$, notarémos antes que como

$$\sqrt{-1}(1-\sqrt{-1}) = 1 + \sqrt{-1}$$

la imaginaria primitiva puede afectar la forma

$$\sqrt{-1} = \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}};$$

de donde tomando los logaritmos en uno y otro miembro se deduce

$$\log \sqrt{-1} = \log(1+\sqrt{-1}) - \log(1-\sqrt{-1}),$$

y la expresion de π quedará transformada en

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{-1}}\left[\log(1+\sqrt{-1}) - \log(1-\sqrt{-1})\right]$$

que puede ser desarrollada, desenvolviendo $\log(1+\sqrt{-1})$ y $\log(1-\sqrt{-1})$ segun la fórmula general (Ω), lo cual se consigue con sólo poner en ella succesivamente $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ en vez de x.

De esta substitucion resultará con efecto después de poner en lugar de las potencias de $\sqrt{-1}$ sus valores succesivos $\sqrt{-1}, -1, -\sqrt{-1}, +1$, &c.

$$\log(1+\sqrt{-1})=\sqrt{-1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{-1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\sqrt{-1}+\frac{1}{6}\ldots \text{ \&c.};$$

Asimismo tendrémos tambien

$$\log(1-\sqrt{-1})=-\sqrt{-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{-1}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\sqrt{-1}+\frac{1}{6}\ldots \text{ \&c.}$$

Restando ahora uno de otro estos desarrollos resultará

$$\log(1+\sqrt{-1})-\log(1-\sqrt{-1})=2\sqrt{-1}-\frac{2}{3}\sqrt{-1}+\frac{2}{5}\sqrt{-1}-\frac{2}{7}\sqrt{-1}\ldots \text{ \&c.}$$

ó bien

$$\log\sqrt{-1}=2\left(\sqrt{-1}-\frac{1}{3}\sqrt{-1}+\frac{1}{5}\sqrt{-1}-\frac{1}{7}\sqrt{-1}\ldots \text{ \&c.}\right)$$

y últimamente multiplicando por $\frac{4}{\sqrt{-1}}$ los dos miembros de esta última igualdad, tendrémos

$$\pi=8\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\ldots \text{ \&c.}\right)$$

de cuya série enteramente real, tomando un número suficiente de términos, resulta

$$\pi=6{,}2831853\ldots\ldots$$

que es la relacion numérica de la circunferencia al radio.

Esta relacion tan fundamental es dada por un cálculo cuyo sentido concreto no es otro que la traduccion de lo imaginario por lo perpendicular, que es el pensamiento dominante en esta obra. Este es otro de los muchos puntos transcendentales en que este pensamiento resulta evidentemente justificado.

De ecuaciones tales como

$$\left(e^{\sqrt{-1}}\right)^x=\sqrt{-1}$$

$$\left(e^{\sqrt{-1}}\right)^x=-1$$

$$\left(e^{\sqrt{-1}}\right)^x=-\sqrt{-1}$$

deducirémos por igual procedimiento los siguientes valores

$$x=\frac{1}{4}\left(6{,}2831853.....\right)=\frac{1}{4}\,\pi$$

$$x=\frac{1}{2}\left(6{,}2831853.....\right)=\frac{1}{2}\,\pi$$

$$x=\frac{3}{4}\left(6{,}2831853.....\right)=\frac{3}{4}\,\pi,$$

expresiones legítimas de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ de la circunferencia.

Los múltiplos de ésta todos están contenidos en la expresion general

$$\left(e^{\sqrt{-1}}\right)^{m\pi}=1\,,$$

y no señalan para la exponencial una posicion distinta de la que le corresponde por $(e)^{0}=1$, ó $\left(e^{\sqrt{-1}}\right)^{\pi}=1$; porque m no significa más que un cierto número de giros completos.

Los exponentes, tales como z, suponiendo que

$$z=m\pi+u,$$

y que la forma $e^{x\sqrt{-1}}$ se convierte por esta suposicion en $e^{(m\pi+u)\sqrt{-1}}$, no indican otra evolucion que la que da $e^{u\sqrt{-1}}$, esto es, la que lleva por exponente el resíduo de dividir z por π ó el arco excedente sobre un número m de giros totales.

Este es un periodismo particular análogo en la forma al que afectan las imaginarias puras con exponente real, aunque diferente en el valor numérico del período. Entre e^{0} y $e^{\pi\sqrt{-1}}$ se encierra la evolucion repitiéndose infinitamente segun su ley propia los valores del coseno y del seno como funciones dependientes del arco variable x.

ARTÍCULO 3.º

Aplicaciones trigonométricas.

Haciendo en efecto en las fórmulas primitivas (A) de la página 274 las substituciones de

$$x=0 \text{ y } x=\pi,$$

y suponiendo, como allí resulta probado, que $Fx = \cos x$ y $fx = \operatorname{sen} x$ tendremos las igualdades

$$\cos 0 = 1, \quad \operatorname{sen} 0 = 0,$$

$$\cos \pi = 1, \quad \operatorname{sen} \pi = 0,$$

que señalan los límites en que se contienen los valores absolutos del coseno y del seno correspondientes á los límites del exponente ó del arco.

Los valores intermedios del coseno y seno de x, correspondientes á los arcos

$$x = \frac{1}{4}\pi, \quad x = \frac{1}{2}\pi \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{4}\pi$$

se infieren naturalmente de la expresion ya conocida $\pi = \frac{4 \log \sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}$ de donde se deduce

$$\pi\sqrt{-1} = 4 \log \sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1} = \log \sqrt{-1}$$

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1} = 2 \log \sqrt{-1} = \log (\sqrt{-1})^2 = \log(-1)$$

$$\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1} = 3 \log \sqrt{-1} = \log (\sqrt{-1})^3 = \log(-\sqrt{-1}):$$

Luego serán evidentes las igualdades

$$e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}} = e^{\log(\sqrt{-1})} = \sqrt{-1}$$

$$e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = e^{\log(-1)} = -1$$

$$e^{\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}} = e^{\log(-\sqrt{-1})} = -\sqrt{-1}$$

y respecto de sus simétricas se verificará tambien

$$e^{-\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{4}\pi\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{-1}}{+1} = -\sqrt{-1}$$

$$e^{-\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$e^{-\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{4}\pi\sqrt{-1}}} = \frac{1}{-\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{+1} = \sqrt{-1};$$

cuya substitucion en las fórmulas primitivas nos da para

$$x = \frac{1}{4}\pi \quad \Big| \quad \cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{-1} - \sqrt{-1}}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{-1} + \sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = 1$$

$$x = \frac{1}{2}\pi \quad \Big| \quad \cos\frac{1}{2}\pi = \frac{-1-1}{2} = -1 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi = \frac{-1+1}{2\sqrt{-1}} = 0$$

$$x = \frac{3}{4}\pi \quad \Big| \quad \cos\frac{3}{4}\pi = \frac{-\sqrt{-1} + \sqrt{-1}}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = \frac{-\sqrt{-1} - \sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}} = -1$$

valores intermedios que juntos con los que corresponden á $x=0$ y $x=\pi$ completan el cuadro en que están cifrados los límites de toda la variabilidad cuantitativa y cualitativa del coseno y seno de un arco:

$$\cos 0 = 1 \qquad \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\cos\frac{1}{4}\pi = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi = 1$$

$$\cos\frac{1}{2}\pi = -1 \qquad \operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi = 0$$

$$\cos\frac{3}{4}\pi = 0 \qquad \operatorname{sen}\frac{3}{4}\pi = -1$$

$$\cos\pi = 1 \qquad \operatorname{sen}\pi = 0$$

Todos los teoremas relativos á la naturaleza de los cosenos y senos de los arcos negativos, de los que son sumas, restas y productos de los arcos, &c., tendrian una deduccion analítica natural de las fórmulas capitales (Δ), deducidas conforme á la interpretacion concreta del imaginarismo.

ARTÍCULO 4.°

Aplicaciones logarítmicas.

Los logaritmos naturales de los números negativos son necesariamente imaginarios si la base es real; porque no hay valor real de x capaz de dar

$$e^x = -A.$$

Pero la demostracion directa de este imaginarismo se infiere inmediatamente de la teoría exponencial que acabo de presentar.

En efecto, siendo evidente que

$$-A = A \times -1$$

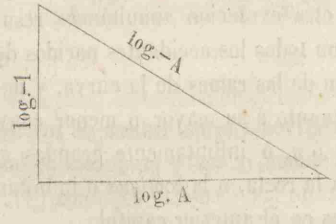
tendremos tambien

$$\log(-A) = \log A + \log(-1) = \log A + \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}$$

que, por su forma binómia irreducible, indica una oblicuidad ó un imaginarismo necesario.

Este logaritmo es único por lo que respecta á -1, y puede expresarse levantando una perpendicular igual á la longitud absoluta de la semicircunferencia sobre el extremo de la recta que expresa el logaritmo de A, y uniendo los extremos por un oblícua sumatoria, como se ve en esta figura:

Fig. 119.



Y aquí es de notar la circunstancia de que los números positivos, cuya forma general es $+1 \times A$, y la de su logaritmo, $\log A + m\pi\sqrt{-1}$, tienen el logaritmo real correspondiente al valor aritmético A deducido de la suposicion $m = 0$, y los infinitos logaritmos imaginarios que se deducen de dar á m un valor cualquiera.

Todos estos logaritmos son como argumentales respecto del logaritmo modular de A: el argumento y el módulo están sin embargo ligados en el logaritmo por una relacion meramente sumatoria y no productiva ó coeficiente, como lo están en el número. Sabido está que lo que es producto para los números, es suma para los logaritmos.

Casi es excusado advertir que con una base imaginaria pueden tener logaritmo real los números negativos, y hasta los imaginarios.

ARTÍCULO 5.°

Exponenciales planas afectas.

Resúmen estas exponenciales toda la evolubilidad sincategoremática de una recta sobre un plano alrededor de un punto, de tal manera que la evolucion circular y puramente cualitativa que ántes he considerado no es más que un caso particular de la forma $e^{y+x\sqrt{-1}}$ que les es propia.

Cuando $y = 0$, la evolucion es circular.

Cuando $x = 0$, la evolucion es longitudinal.

Cuando $y + x = 0$, no hay evolucion, y no se sale del radio constituido como unidad.

Cuando tanto y como x tienen un valor cualquiera, hay una evolucion espiral análoga á la explicada respecto del número μ de que hemos hablado en la página 267.

Con efecto; en este último caso el exponente $y + x\sqrt{-1}$ expresa con su forma binómia una oblicuidad que se resuelve en un elemento real, que desenvolverá la base longitudinalmente, y en otro imaginario puro, que la hará girar circularmente. De una y otra evolucion simultáneas resultará un desarrollo sincategoremático ó espiral, con todos los accidentes nacidos del vario signo de y y de x en cuanto á la direccion de las ramas de la curva, y de la varia relacion numérica de estos elementos en cuanto á su mayor ó menor convergencia. Segun sean infinitamente pequeños x ó y, ó infinitamente grandes y ó x, aparecerá la espiral infinitamente próxima á la recta, ó la *contigua* ó infinitamente próxima á la circunferencia que ya notamos en el anterior capítulo.

En la descomposicion factorial, verdadera modulacion de la exponencial afecta justificada por la igualdad $e^{y+x\sqrt{-1}}=e^{y}\times e^{x\sqrt{-1}}$, es visible la independencia al par que la simultaneidad de ambas evoluciones. El módulo e^{y} es el valor cuantitativo del radio vector, diverso por los varios valores de y en los varios momentos ó posiciones que da el argumento $e^{x\sqrt{-1}}$ por las variaciones de x.

Cuando el exponente afecto expresa oblícuas del primer cuadrante, ó es $y+x\sqrt{-1}$, la exponencial gira de un modo ascendente trazando una espira exterior á la circunferencia.

Si tiene la forma $-y+x\sqrt{-1}$, ó es oblícua del segundo cuadrante, asciende tambien la exponencial, pero traza su curva dentro del círculo.

Si es $-y-x\sqrt{-1}$, ó está en el tercer cuadrante, desciende la exponencial exteriormente y se aparta de la circunferencia.

Por último, si es el exponente $+y-x\sqrt{-1}$, ó del último cuadrante, la exponencial desciende tambien y gira dentro de la periféria, como puede verse en la figura 117.

Las dos partes, una exterior y otra interior, trazadas en el primero y cuarto de estos casos, compondrian una rama de espiral completa descrita por la exponencial de la forma $e^{y\pm x\sqrt{-1}}$, y cuyo origen está en el centro del círculo: la rama de espiral contraria ó simétrica estaria dada por

$$e^{-y\mp x\sqrt{-1}}=e^{-(y\pm x\sqrt{-1})}=\frac{1}{e^{y\pm x\sqrt{-1}}}$$

que resume los casos tercero y segundo.

Todas estas circunstancias guardan perfecta armonía con las evoluciones infinitas explicadas en el capítulo anterior.

ARTÍCULO 6.°

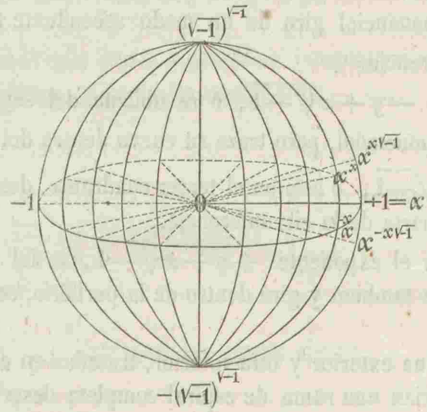
Exponenciales esféricas en general.

Son las que giran en el espacio describiendo círculos máximos de una esfera, y en ellas es donde recibe una repentina ampliacion la teoría del imaginarismo, quedando magníficamente realizada la imitacion aritmética y geométrica de Pascal.

Su forma algebráica $\alpha^{x\sqrt{-1}}$ resulta de la graduacion de una base imaginaria α

sometida á un exponente imaginario. El doble imaginarismo de la base y del exponente conduce á esta evolucion particular, que saca la exponencial del plano en que giraria con exponentes reales y la levanta en el espacio, haciéndola girar en un plano perpendicular á aquel. (*Fig.* 120.)

Fig. 120



Que tal debe ser la evolucion, se infiere del efecto natural de los exponentes reales sobre una base imaginaria. Si el exponente positivo le imprime una mocion progresiva, el exponente cero la coloca sobre el radio, y el negativo la hace retrogradar por bajo de esta posicion; el imaginario la elevará desde este orígen de los arcos por un arco que puede llamarse imaginario como perpendicular á los arcos positivo y negativo. Esta elevacion traslada los giros de la exponencial á un plano circular perpendicular á aquel en que se verificarian los giros reales, y en este plano (que es como un *meridiano* respecto del plano primitivo real, que puede llamarse el *ecuador*) somete la exponencial meridiana á las mismas condiciones de periodismo y de simetría que las imaginarias planas ó ecuatoriales en su propio plano.

ARTÍCULO 7.°

Exponenciales esféricas puras.

Esto sucede á la exponencial pura ó meridiana, la cual, sea el que quiera el punto del ecuador á que esté dirigida como raíz, es primero traida al punto de orígen de los arcos por un exponente cero, y luego elevada por el primer meridiano sobre este punto segun la determinacion numérica de x. Esta enunciacion se expresa por la igualdad

$$\alpha^{x\sqrt{-1}} = \alpha^{0+x\sqrt{-1}},$$

en la que α representa cualquiera imaginaria ecuatorial.

La determinacion numérica de x, ó la fijacion de la exponencial en su propio plano, supone necesariamente como unidad el arco que la base ecuatorial α dista de la unidad real positiva: no de otro modo son comparables la base y el exponente cuando ambos han de ejercer su influencia en el desarrollo de la exponencial $x\sqrt{-1}$, pues no significa sino un cierto número de arcos iguales al que mide la raiz α en el ecuador, y que en vez de contarse en este para establecer la tésis α^{x}, se cuentan en el meridiano para realizar $\alpha^{x\sqrt{-1}}$ (*Fig.* 120.)

Habrá, pues, tantos sistemas de exponenciales meridianas, cuantas sean las bases ecuatoriales, y en cada sistema el periodismo, la conjugacion y la simetría, aunque fundados en idénticos principios, tendrán una ley de expresion diferente, de la cual penderá la interpretacion geométrica de estas exponenciales.

Así, siendo la base $\sqrt{-1}$, la unidad á que entónces se refiere el arco x es el cuadrante; y cuando $x=1$ se levanta la exponencial perpendicularmente sobre el plano real, se constituye como eje, y determina con su extremidad el *polo* del ecuador. Esta exponencial meridiana merece el nombre de *polar*: su forma primitiva es $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, y tiene en el meridiano una posicion análoga á la de $\sqrt{-1}$ normal en el ecuador.

Cuando $x=2$, la meridiana desciende hasta confundirse con el radio negativo -1, lo que tambien podria expresarse con la igualdad $(\sqrt{-1})^{2\sqrt{-1}} = -1$.

El valor $x=3$ conduce la meridiana por bajo del ecuador, determinando el *polo negativo* de éste, y conjugándola con la polar positiva: esto es, que se tendrá $x^{3\sqrt{-1}} = -(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$, análoga con la ecuatorial $-\sqrt{-1}$.

Si, por último, $x=4$, la meridiana termina su evolucion y cierra el período de su curso, constituyéndose en su posicion inicial ó en el radio real positivo: esto es $(\sqrt{-1})^{4\sqrt{-1}} = (\sqrt{-1})^{0} = 1$.

Esta evolucion periódica es enteramente análoga á la que dan los valores enteros de x en la imaginaria comun ó ecuatorial $(\sqrt{-1})^{x}$.

Pero si la base fuera $\mathcal{E}$ (base natural de la evolucion cualitativa) el período sería de ocho términos para los valores enteros de x, porque $\mathcal{E}$ mide $\frac{1}{8}$ de la circunferencia, segun hemos dicho al principio de la página 265; la polar sería $\mathcal{E}^{2\sqrt{-1}}$, y la conjugacion y simetría muy diversas en la expresion numérica de los exponentes combinada con los signos de éstos y de la exponencial.

Tienen, sin embargo, de comun todos los sistemas de meridianas dos circunstancias: 1.ª, que son idénticos los términos reales que pueden entrar en su periodismo, como que expresan la interseccion comun del meridiano y ecuador: y 2.ª, que su representacion trigonométrica tiene los mismos cosenos del sistéma análogo ecuatorial, sin más diferencia, respecto de los senos, que la de ser perpendiculares en el espacio los que ántes se concebian perpendiculares en el ecuador.

ARTÍCULO 8.º

Exponenciales eclípticas ó afectas.

Son la expresion general de toda evolucion cualitativa en el espacio. Las meridianas son un caso particular de estas.

La forma eclíptica $\mathcal{E}^{y+x\sqrt{-1}}$ se presta á las siguientes suposiciones:

Si $y=0$... la exponencial $\mathcal{E}^{x\sqrt{-1}}$ es meridiana,

Si $x=0$.............. $\mathcal{E}^{y}$ es ecuatorial,

Si $y+x=0$........... $\mathcal{E}^{0}$ es el radio real.

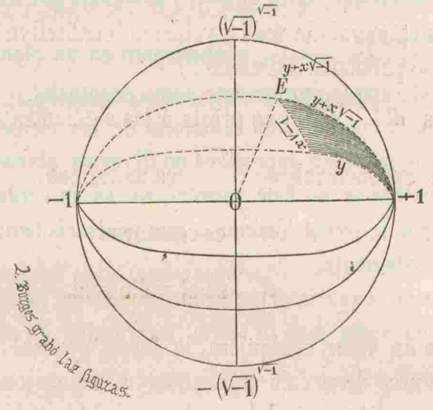
Si y y x tienen un valor cualquiera, la forma general $\mathcal{E}^{y+x\sqrt{-1}}$ señala una evolucion por un arco de círculo máximo cuya inclinacion sobre el ecuador es determinada por la suma del arco y del ecuador y x del meridiano: y y x son como las dos *coordenadas curvilíneas* ortogonales del arco inclinado que la exponencial recorre, por cuya inclinacion recibe esta el nombre de *eclíptica*, tomado en una acepcion más general que la propiamente geográfica. Idéntica posicion alcanza la exponencial recorriendo succesivamente los dos arcos y y $x\sqrt{-1}$, que trasladándose directamente por el arco oblícuo que aquellos determinan, segun la figura 121. Aquí, como cuando se trata de líneas rectas, el arco oblícuo es la expresion sumatoria de los arcos ortogonales.

Nótese tambien cómo en la descomposicion autorizada por la igualdad

$$\mathcal{E}^{y+x\sqrt{-1}} = \mathcal{E}^{y} \times \mathcal{E}^{x\sqrt{-1}}$$

se traduce la naturaleza de esta síntesis de los elementos directo é indirecto del exponente. Por la misma razon de que $y+x\sqrt{-1}$ no expresa una verdadera adicion, conforme á lo que hemos dicho al hablar de la suma proyectiva de cantidades reales con imaginarias, $\mathcal{E}^{y} \times \mathcal{E}^{x\sqrt{-1}}$ no es un producto verdaderamente multiplicativo, cuya contraposicion deba hacerse en el mismo plano en que está cada factor, sino en un plano perpendicular, enteramente como cuando se contraponen dos factores lineales, uno real y otro imaginario. A la misma posicion llega, con efecto, la exponencial recorriendo $\mathcal{E}^{y}$ el arco x perpendicularmente al ecuador, que recorriendo $\mathcal{E}^{x\sqrt{-1}}$ el arco y (ó un número igual de grados que y) perpendicularmente al meridiano: donde es visible el cumplimiento de la reciprocidad que domina en el logaritmo de la produccion.

Fig. 121



La analogía nos autoriza para considerar como un módulo el elemento exponencial $\mathcal{E}^{y}$, en cuanto es modificado por la nueva direccion perpendicular que imprime el argumento $\mathcal{E}^{x\sqrt{-1}}$; y sin embargo este módulo tiene la notable circunstancia de no ser cuantitativo, sino exclusivamente cualitativo, como lo es la base imaginaria $\mathcal{E}$. Por esta razon el desarrollo potencial del módulo no se traduce en una evolucion longitudinal como el módulo e^{y} en $e^{y} \times e^{x\sqrt{-1}}$ de las exponenciales planas afectas. El radio conserva durante la evolucion su longitud absoluta, y la exponencial describe con su extremidad móvil curvas en la superficie de la esfera.

Y tal es la movilidad que este radio vector alcanza con la doble evolucion ortogonal que expresa su exponente, que no hay punto de esta superficie esférica á que no pueda ser conducido por la conveniente determinacion cuantitativa ó cualitativa de las dos variables $y, x,$ que pueden tener una influencia succesiva ó simultánea en la funcion exponencial.

Si permaneciendo y invariable, damos valores diversos á x, la exponencial recorrerá un meridiano que parte del punto del ecuador expresado por $\mathscr{E}^{y}$ y señalará *latitudes* (acepcion geográfica); si es y la que varía, permaneciendo constante x, la exponencial describirá un *paralelo* al ecuador, distante de este el arco $\mathscr{E}^{x\sqrt{-1}}$, y marcará *longitudes*. Las variaciones simultáneas de y y de x darán al plano de la evolucion todos los grados de inclinacion imaginables.

La eclíptica sometida á un exponente real $\left(\mathscr{E}^{y+x\sqrt{-1}}\right)^{u}$ continuará su curso en su propio plano, que puede considerarse accidentalmente como ecuador: desenvuelta segun un exponente imaginario $\left(\mathscr{E}^{y+x\sqrt{-1}}\right)^{z\sqrt{-1}}$, girará en un plano perpendicular al oblícuo en que ántes giraba; y graduada por un exponente imaginario binómio $\left(\mathscr{E}^{y+x\sqrt{-1}}\right)^{u+z\sqrt{-1}}$, evolucionará en un plano oblícuo al anterior ó propio, que se considera transitoriamente como ecuatorial.

Cualquiera que sea la combinacion sumatoria de los elementos del exponente, será traducida por giros parciales succesivos en diversos planos que se resumen en un arco que une los extremos de este vario curso, es su verdadera suma y queda siempre determinado por la forma binómia á que necesariamente se reduce la complicada expresion del exponente.

La teoría exponencial, cuya interpretacion geométrica he iniciado en estos últimos artículos, no es en suma sino la teoría logarítmica en toda la plenitud de su desarrollo.

ARTÍCULO 9.°

Expresion absoluta de las tres dimensiones del espacio.

La forma algebráica de las imaginarias esféricas suministra la expresion general, independiente é irreducible de la tercera dimension necesaria para completar la intuicion del espacio, y extiende el formulismo algebráico á todas las categorías geométricas que resultan de la contraposicion factorial.

Si $+A$ y $-A$ bastan para la expresion de la línea recta,

$$y \quad +B\sqrt{-1} \quad y \quad -B\sqrt{-1}$$

en combinacion productiva con aquellos elementos determinan toda superficie;

$$+C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \quad y \quad -C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

vienen á cerrar la representacion intuitiva del sólido con la tercera dimension C, perpendicular á la vez á las dos anteriores.

Asimismo: si $A+B\sqrt{-1}$ es el símbolo binómio irreducible de la oblicuidad en el plano referida á dos ejes ortogonales A y B,

$$A+B\sqrt{-1}+C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

es legítima, elemental é irreducible forma trinomia de la oblicuidad en el espacio, en cuanto se refiere á los tres ejes cardinales A, B y C.

Y así como $1+\sqrt{-1}$ es la expresion sumatoria de la diagonal del cuadrado bajo el concepto sincategoremático de magnitud y posicion,

$$1+\sqrt{-1}+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

representa la diagonal del cubo construido sobre aquellos elementos sumatorios.

Y así como $\sqrt{A^2+B^2}$ es el módulo de la imaginaria plana $A \pm B\sqrt{-1}$, el de la esférica $A \pm B\sqrt{-1} \pm C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ será $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$.

La teoría algebráica llega aquí á un máximum de desarrollo combinatorio que mide maravillosamente el máximum de la posibilidad en la intuicion geométrica.

Tan imposible es una nueva forma irreducible distinta de las tres típicas

$$1,$$

$$1 \times \sqrt{-1},$$

$$y \quad 1 \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},$$

como aumentar el número de las tres dimensiones del espacio.

ARTÍCULO 10.

Resúmen del último libro.

Concluyamos por fin, condensando en pocas palabras todo el contenido de este libro, toda la substancia diseminada en la teoría potencial.

La evolucion real de una recta positiva es *longitudinal* en una direccion invariable.

La de una recta negativa es *oscilatoria* de la region negativa á la positiva, y de ésta á aquella.

La de una indirecta ó imaginaria es *giratoria* al rededor de un centro y dirigida á las cuatro regiones del plano. La evolucion imaginaria conduce á alguno de estos tipos.

La evolucion longitudinal representa un *radio*.

La oscilatoria da idea de un *diámetro*.

La giratoria describe una *circunferencia*.

El radio, el diámetro y la circunferencia, son elementos geométricos íntimamente ligados con la teoría algebráica y conceptual de la graduacion.

RESÚMEN DE LOS TRES ÚLTIMOS LIBROS.

Toda la logística algebráica se compendia en los tres algoritmos fundamentales:

Suma ó *síntesis*,
Produccion ó *antítesis*,
Graduacion ó *tésis*.

La suma conduce á la representacion de la *línea recta*.

La produccion se expresa por un *ángulo recto*.

La graduacion supone ó describe la *circunferencia*.

La recta, el ángulo y la circunferencia, son los elementos primitivos y necesarios de la Geometria.

RESÚMEN DE TODA LA OBRA.

Hélo aquí presentado en los tres pensamientos que reinan en toda ella.

1.° El símbolo $\sqrt{-1}$ es un signo de perpendicularidad.—BUÉE.

2.° Los números imitan el espacio, aunque son de naturaleza tan diferente.—PASCAL.

3.° El cuadro de las categorías del entendimiento indica todos los *momentos* de una ciencia especulativa proyectada, y da hasta su ordenacion y régimen.—KANT.

El primero es un pensamiento puramente matemático.

El segundo es de Filosofía matemática.

El tercero es de Filosofía transcendental.

FIN DE LA OBRA.

FRAGMENTO

DE LA

CRÍTICA DE LA RAZON PURA

DE

KANT.

CRÍTICA DE LA RAZON PURA

POR E. KANT.

FRAGMENTO DE LA LÓGICA TRANSCENDENTAL.

....

LÓGICA TRANSCENDENTAL.

PRIMERA DIVISION.

Cuando consideramos todo nuestro conocimiento *à priori*, como un conjunto de elementos de conocimientos constitutivos del entendimiento puro, llamamos á la descomposicion del conocimiento *à priori* en estos elementos, ANALÍTICA TRANSCENDENTAL; y es evidente que estos elementos, como tales y como constitutivos del entendimiento puro, han de ser conceptos puros y elementales necesariamente, y debe por lo tanto no perderse de vista que, como puros, no pueden ser debidos á la experiencia, ni á la intuicion, ni á la sensacion, sino sola y exclusivamente al pensamiento y al entendimiento; y que como elementales no pueden ser derivados ni compuestos de los que se derivan de otros, sino establecidos *à priori*.

El concepto de todos ellos debe ser completo, y encerrar en sí todo el campo del entendimiento puro.

Pero como esta integridad que requiere la ciencia no puede obtenerse por resultado de investigaciones aisladas y fortuitas, y sí, y solamente, por medio de una idea total del conocimiento *à priori* del entendimiento, dividida en los conceptos que la componen, resulta que solamente podremos obtener la integridad científica por el encadenamiento sistemático de estos conceptos.

Distínguese el entendimiento puro perfectamente, no sólo de cuanto pertenece á la experiencia, sino tambien de todo lo respectivo á la sensacion. Subsiste por sí, se basta á sí mismo, y es extraño á todo cuanto en sí mismo no encierra.

El conjunto de elementos de conocimiento á que llamamos entendimiento puro, constituye un sistema que deberá estar contenido en una sola idea, y que por su integridad y distribucion debe de ser como piedra de toque que demuestre el valor de todos los elementos constitutivos de un mismo sistema.

Esta parte de la Lógica transcendental forma *dos libros*; uno que comprende los *conceptos*, y otro los *principios* del entendimiento puro.

ANALÍTICA TRANSCENDENTAL.

LIBRO PRIMERO.

ANALÍTICA DE LOS CONCEPTOS.

Llamamos así, no al ejercicio del entendimiento sobre los conceptos descomponiéndolos para esclarecerlos, que es el método ordinariamente seguido en las investigaciones filosóficas, sino que entendemos por Analítica de los conceptos la descomposicion, no de los conceptos, sino de la facultad conceptiva para reconocer en su capacidad la posibilidad de los conceptos *à priori*, no buscándolos sino en el entendimiento solamente como en su suelo natal, analizando el uso puro y *germinal* de esta facultad. Este es el fin especial de la Filosofía transcendental: otro análisis seria objeto del tratado de los conceptos en la Filosofía en general.

Buscarémos pues, los conceptos puros en los primeros gérmenes ó rudimentos del conocimiento; y deslindando en éste lo que hay de empírico de lo que hay de facultativo, veremos lo que son las capacidades intelectuales antes de ser ocupadas por la experiencia, y establecerémos los conceptos puros ó *à priori* en vista de lo que es el entendimiento en su primordial pureza.

CAPÍTULO PRIMERO.

DEL HILO CONDUCTOR PARA DESCUBRIR TODOS LOS CONCEPTOS PUROS DEL ENTENDIMIENTO.

Cuando ponemos en ejercicio una facultad intelectual, se nos manifiestan diferentes conceptos, segun las diferentes circunstancias con que esto se verifica; y estos conceptos dan á conocer la facultad. Ellos deben formar una lista cuya extension depende del grado de intensidad con que hayamos procurado su investigacion y penetrado en ella; pero no pudiéndose por este método, que podemos llamar mecánico, determinar con certeza cuándo puede darse por terminada esta investigacion, y como además los conceptos (que siguiendo este procedimiento sólo se descubren ocasionalmente) no se presentan en ningun órden, ni bajo una unidad sistemática que los asocie definitivamente, sino que son dispuestos por séries, segun sus semejanzas y la cantidad de la materia, procediendo de los más simples á los más compuestos, resulta que, aunque asociados, siguiendo algun método, se hallan muy lejos de constituir un sistema.

La Filosofía transcendental tiene la ventaja, no ménos que la obligacion, de investigar sus conceptos, segun un principio por el cual ellos salen del entendimiento en toda su pureza y sin mezcla ninguna como constitutivos de una unidad absoluta, por lo cual deben estar ligados entre sí segun un concepto ó una idea; y este enlace necesario suministra seguramente una regla, segun la cual pueden determinarse *à priori*, no sólo el lugar de cada concepto puro del entendimiento, sino tambien la integralidad de su número, cosas que de otro modo dependerian de la fantasía ó del azar.

HILO CONDUCTOR TRANSCENDENTAL

para descubrir los conceptos puros del entendimiento.

SECCION PRIMERA.

DEL USO LÓGICO DEL ENTENDIMIENTO EN GENERAL.

Se ha definido el *entendimiento* de un modo negativo al decir que es una facultad de conocer no sensible; mas como no podemos tener intuicion alguna independiente de la sensibilidad, se sigue de aquí que el entendimiento es una facultad separadamente de la intuicion; y como fuera de la intuicion no hay otra manera de conocer que por conceptos, resulta que el conocimiento de toda inteligencia (al menos de toda inteligencia humana) es un conocimiento por conceptos, no intuitivo, sino discursivo (general).

Todas las *intuiciones*, como sensibles que son, descansan sobre afecciones, á diferencia de los *conceptos* que por su naturaleza se basan sobre funciones.

Entendemos por *funcion* la unidad de accion que es necesaria para ordenar diferentes representaciones, haciendo de ellas una representacion comun.

Estas funciones, que, como hemos dicho, son la base de los conceptos, no son otra cosa que la espontaneidad del pensamiento, así como la receptividad de las impresiones es el fundamento de las intuiciones sensibles. Ahora bien: el entendimiento no puede hacer otro uso de estos conceptos que el de juzgar por medio de ellos; y como la única representacion que tiene inmediatamente de un objeto es la intuicion, nunca puede un concepto referirse inmediatamente á un objeto, sino mediante la intuicion, esto es, que solamente puede referirse á alguna otra representacion de este objeto (bien sea ella una intuicion, ó ya hasta un concepto).

El *juicio* es, pues, el conocimiento mediato de un objeto, puesto que está de por medio la intuicion; es por consiguiente la representacion de la representacion de un objeto.

Hay en todo juicio un concepto aplicable á muchas cosas, y que bajo esta pluralidad comprende tambien una representacion dada, la cual se refiere inmediatamente al objeto. Así en el juicio, *todos los cuerpos son divisibles*, el concepto divisible conviene á otros diferentes conceptos, entre los cuales el concepto de cuerpo es al que aquí se refiere particularmente. Pero á su vez este concepto de cuerpo es relativo á ciertos fenómenos que tenemos ante los ojos, y todos estos objetos son mediatamente representados por el concepto de divisibilidad.

Todos los juicios son por lo tanto funciones de la unidad en nuestras representaciones, puesto que en lugar de una representacion inmediata sirve para el conocimiento del objeto otra representacion mas ámplia y elevada que contiene á aquella con otras muchas; y de esta manera un gran número de conocimientos posibles se encuentran resumidos en uno solo. Pero podemos reducir todas las operaciones del entendimiento al juicio, por manera que el *entendimiento* en general puede ser representado como una *facultad de juzgar*, porque, segun lo que precede, el *entendimiento es la facultad de pensar*, y pensar es *conocer por conceptos*, y los conceptos, como atributos de juicios posibles, se refieren á una representacion cualquiera de un objeto aún todavía indeterminado. Así es que el concepto de *cuerpo* significa alguna cosa (v. g.: un metal) que puede ser conocido por este concepto. No es, pues, tal *concepto* este, sino porque contiene en sí otras representaciones, por cuyo medio puede referirse á objetos. Es pues, todo concepto el atributo de un juicio posible, v. gr.: de éste, *todo metal es un cuerpo.*

Podrian por lo tanto descubrirse todas las funciones del entendimiento, si se expusiesen con certeza las funciones de la unidad en el juicio. En la seccion siguiente haremos ver cuán fácil es esto.

HILO CONDUCTOR

para descubrir los conceptos puros del entendimiento.

SECCION SEGUNDA.

DE LA FUNCION LÓGICA DEL ENTENDIMIENTO EN EL JUICIO.

Si hacemos abstraccion de toda materia en un juicio en general, y no consideramos en él más que la forma sola del entendimiento, hallaremos que la funcion del pensamiento puede ser reducida á cuatro títulos, cada uno de los cuales comprende tres momentos ó grados. Estos pueden representarse muy bien por el cuadro siguiente:

1.º—CANTIDAD DE LOS JUICIOS.

Generales.
Particulares.
Singulares.

2.º—CUALIDAD.

Afirmativos.
Negativos.
Indefinidos.

3.º—RELACION.

Categóricos.
Hipotéticos.
Disyuntivos.

4.º—MODALIDAD.

Problemáticos.
Asertóricos.
Apodícticos.

Como esta division parece un tanto diferente en algunas partes de la *téchnica* ordinaria de los lógicos, aunque estas partes no son esenciales, con las observaciones siguientes podrá evitarse una confusion en que de otro modo incurriríamos necesariamente:

1.° Dicen con razon los lógicos que en el uso que se hace de los juicios en el razonamiento, se pueden tratar los juicios singulares, como los juicios generales. Porque supuesto que estos juicios no tienen ninguna pluralidad ó ninguna extension, su predicado no puede referirse solamente á alguna de las cosas que están comprendidas bajo el concepto del sujeto, sino al contrario, entenderse del sujeto todo entero. Vale pues sin excepcion para todo este concepto, lo mismo enteramente que si éste fuera un concepto general, á cuya circunscripcion entera pudiese aplicarse el predicado. Mas si por el contrario se compara un juicio singular con un juicio general, como simple conocimiento en cuanto á la cantidad, el primero es al segundo, como la unidad á lo indefinido, y se distingue de él esencialmente. Si pues yo aprecio un juicio singular (*judicium singulare*), no sólo en cuanto á su valor intrínseco como juicio, sino tambien como conocimiento general segun la cantidad que tiene con relacion á otros conocimientos, es ciertamente muy diferente de los juicios universales (*judicia communia*), y debe por este título tener un lugar particular en una tabla completa de todos los momentos del pensamiento en general (aunque seguramente no sea así en una Lógica restringida al simple uso de los juicios entre sí).

2.° De la misma manera en la Lógica transcendental los *juicios indefinidos* deben distinguirse de los juicios *afirmativos*, aunque en la Lógica general hagan justamente parte de estos, y no formen ningun miembro de division particular.

Esta Lógica hace abstraccion de toda materia del predicado (aún en el caso de que este sea negativo), y considera sólo si este atributo conviene al sujeto ó si le es opuesto. Mas la Lógica transcendental mira además al juicio en cuanto á la materia ó contenido de esta afirmacion lógica que se hace por un atributo puramente negativo y á lo que esta afirmacion hace ganar al conocimiento total. Si hablando del alma digo que *es no mortal*, me eximo por lo ménos de un error por un juicio negativo. Realmente yo afirmo, en cuanto á la forma lógica, diciendo que el alma es no mortal, respecto de que la coloco en la circunscripcion indeterminada de los séres inmortales. Ahora bien: como lo que es mortal comprende una parte del todo de los séres posibles, y lo que no es mortal la otra, no vengo á decir con mi proposicion otra cosa, sino que el alma es uno de esos séres que quedan de la cantidad indefinida de todos ellos, despues de haber restado de ella todo lo que es mortal. Pero la esfera indefinida de todo lo posible no es restringida por este medio, sino en cuanto se necesita para separar de ella lo mortal, y el alma es colocada en la restante circunscripcion de esta esfera. A pesar de esta resta, la circunscripcion queda siempre indefinida, y podrian suprimirse todavía muchas partes de ella, sin que por esto el concepto de alma ganase absolutamente nada, ni se determinase afirmativamente. Síguese de aquí que los juicios indefinidos, por lo que hace á la circunscripcion lógica, son en realidad puramente limitativos en cuanto á la materia del conocimiento en general; y en este concepto no deben omitirse en la tabla transcendental de todos los momentos del pensamiento en los juicios, porque la funcion que en ellos ejerce el entendimiento puede sin duda ser importante en el campo del conocimiento puro *á priori*.

3.° Todas las relaciones del pensamiento en los juicios, se reducen á las siguientes: 1.ª, del predicado al sujeto; 2.ª, del principio á la consecuencia; y 3.ª, del conocimiento dividido y de todos los miembros de la division entre sí. En la primera especie de juicios no se consideran más que dos conceptos, en la segunda dos juicios, y en la tercera muchos juicios entre sí. La proposicion hipotética siguiente: *si hay una perfecta justicia, el que persiste en el mal será castigado;* contiene propiamente la relacion de dos proposiciones: *hay una perfecta justicia*, y *el que persevera en el mal será castigado.* Queda por saber ahora si cada una de estas proposiciones es verdadera en sí misma, y esto es precisamente lo que no se decide. La consecuencia es, por lo tanto, lo único que se piensa por este juicio. Por último, el juicio disyuntivo contiene la relacion de dos ó más proposiciones entre sí, no por una relacion de consecuencia, sino por una relacion de oposicion lógica en tanto que la esfera de la una está excluida por la esfera de la otra. Este juicio contiene al propio tiempo una relacion de comunidad ó reciprocidad que consiste en que estas proposiciones reunidas llenan conjuntamente la esfera de un conocimiento especial. Contiene, pues, tambien una relacion (total) de las partes de la esfera de un cierto conocimiento, puesto que la esfera de cada una de estas partes es la parte complementaria de la esfera de la otra parte relativamente al conjunto del conocimiento particular. Por ejemplo: *el mundo existe, ó por una causa fortuita, ó por una necesidad interior, ó por una causa externa.* Cada una de estas proposiciones parciales comprende una parte de la esfera del conocimiento que es posible acerca de la existencia de un mundo en general. Todas juntas forman la esfera total. Negar que el conocimiento provenga de una de las esferas, es hacerlo entrar en una de las otras, como, por el contrario, colocarlo en una de ellas, es restarlo ó excluirlo de las demas. Hay pues en el juicio disyuntivo una cierta comunidad de los conocimientos, que consiste en que ellos se excluyen mútuamente; pero sin embargo, por esto mismo determinan en el todo el verdadero conocimiento, puesto que tomados juntos constituyen el objeto total de un conocimiento particular dado. Esto es lo que creo conveniente notar para la inteligencia de lo que sigue.

4.° La modalidad de los juicios es tambien una funcion particular que tiene por carácter distintivo el no contribuir en nada á su materia (porque esta no se compone más que de la cantidad, de la cualidad y de la relacion), sino sólo á considerar el valor de la cópula con respecto al pensamiento en general. Los juicios *problemáticos* son aquellos en que se toma, sea la afirmacion, sea la negacion, como simplemente *posible* (hipotética). Los juicios *asertóricos*, son aquellos en que la afirmacion ó la negacion se considera como *real* (verdadera). Los juicios *apodícticos* son aquellos en que la afirmacion ó la negacion se concibe como *necesaria* (*). Así, los juicios cuya relacion constituye por una parte el juicio hipotético (el antecedente y el consiguiente) y cuya reciprocidad forma por otra la disyuncion (miembros de la division), son dos especies de juicios solamente problemáticos. En el ejemplo anterior, el juicio, *si hay una justicia perfecta*, no se forma asertóricamente, no es pensado sino como un juicio arbitrario que se puede admitir: la consecuencia sola es asertórica. De donde se sigue que estas especies de juicios pueden ser visiblemente falsos, y con todo eso, tomados una vez problemáticamente, pueden llegar á ser la condicion del conocimiento de la verdad. Así es como el juicio, *el mundo es efecto de una causa ciega*, no tiene más que una significacion problemática en el juicio disyuntivo, en el sentido de que se puede admitirlo desde luego por un instante, y servir con todo como una indicacion para descubrir el verdadero camino

(*) Como si el pensamiento en el primer caso fuese una funcion del *entendimiento*, en el segundo una funcion del *juicio*, y en el tercero de la *razon*. Esta observacion se hará mas clara cuando se haya visto lo que sigue.

que hay que seguir por el hecho mismo de señalar el falso entre todos los que pueden emprenderse. La proposicion problemática es pues aquella que no expresa más que una posibilidad lógica (que no es la posibilidad objetiva), es decir, la libertad de tomar tal proposicion como válida. La admision de semejante proposicion en el entendimiento, es pues puramente arbitraria. El juicio asertórico enuncia una realidad ó verdad lógica, poco más ó ménos que en un raciocinio hipotético, en el cual el antecedente es problemático en la mayor, asertórico en la menor, y muestra que la proposicion está ya ligada al entendimiento segun las leyes que lo rigen. La proposicion apodíctica, en la conclusion, concibe la proposicion asertórica determinada por estas leyes del entendimiento mismo, y, afirmando por consiguiente *à priori*, enuncia de este modo una necesidad lógica. Ahora bien, como todo se une aquí al entendimiento de una manera progresiva, de tal suerte que se juzga primero una cosa problemáticamente y despues se la toma asertóricamente como verdadera, para unirla al fin de una manera íntima al entendimiento, es decir, para afirmarla necesaria y apodícticamente, se pueden llamar estas tres funciones de la modalidad otros tantos momentos del pensamiento en general.

HILO CONDUCTOR

para el descubrimiento de todos los conceptos puros del entendimiento.

SECCION TERCERA.

DE LOS CONCEPTOS PUROS DEL ENTENDIMIENTO Ó CATEGORÍAS.

La Lógica general hace abstraccion, como lo he dicho muchas veces, de toda materia del conocimiento, y espera á que de otra parte le sean dadas representaciones para convertirlas primero en conceptos, por medio del análisis. La Lógica transcendental, por el contrario, tiene por objeto una diversidad de la sensibilidad *à priori*, diversidad que le es suministrada por la estética transcendental para servir de materia á los conceptos puros del entendimiento, conceptos sin los cuales la Lógica careceria de objeto, y por consiguiente seria vana de todo punto. El espacio y el tiempo contienen, pues, una diversidad de la intuicion pura *à priori*; pero ellos forman, sin embargo, parte de las condiciones de la receptividad de nuestro espíritu, condiciones bajo las cuales únicamente puede éste representarse los objetos, y que por consiguiente deben tambien afectar al concepto de ellos. Pero la espontaneidad de nuestro pensamiento exige que esta diversidad sea primero recorrida de una cierta manera, que sea recogida y ligada para hacer de ella en seguida un conocimiento. Esta operacion se llama *síntesis*.

Entiendo por *síntesis* en el sentido mas ámplio, la accion de juntar unas con otras varias representaciones diferentes, y de comprender su diversidad en un solo conocimiento. Esta síntesis es *pura*, si la diversidad que es objeto de ella no es empírica, sino por el contrario dada *à priori* (como la diversidad en el espacio y en el tiempo). Estas representaciones deben sernos dadas ante todo análisis que las tiene por objeto, y ningun concepto, en cuanto á la materia ú objeto, es posible analíticamente. Pero la síntesis de una diversidad (dada empíricamente ó *à priori*) produce primero un conocimiento que, á la verdad, puede ser grosero y confuso en el primer momento, y que por consiguiente tiene necesidad de ser analizado; pero la síntesis no deja por eso de ser la que propiamente reune los elementos que sirven para formar los conocimientos y la que los reune en una cierta materia. Es, pues, la síntesis la primer cosa á que debemos dirigir la atencion, cuando queremos juzgar acerca del orígen de nuestros conocimientos.

La síntesis es por punto general, como veremos más adelante, una obra pura y simple de la imaginacion, funcion ciega del alma, pero indispensable, puesto que sin ella no tendriamos ningun conocimiento de nada; funcion por otra parte de la que rara vez tenemos conciencia. Pero la accion de reducir esta síntesis á *conceptos*, es la funcion del entendimiento, por la cual tenemos, y no ántes, el conocimiento propiamente dicho.

La *síntesis pura concebida de una manera general* nos da, pues, el concepto intelectual puro. Pero entiendo por síntesis pura aquella que descansa sobre un principio de la unidad sintética *à priori*. Así nuestra manera de contar (lo cual es fácil de notar sobre todo en los números elevados) es una *síntesis segun conceptos*, porque se verifica segun un principio comun de la unidad (por ejemplo el decimal). La unidad en la síntesis de la diversidad, es pues necesaria bajo este punto de vista.

La Lógica general tiene por objeto *someter*, con ayuda del análisis, representaciones diferentes á un solo concepto. La Lógica transcendental por el contrario enseña á traer á conceptos, no ya las representaciones, sino la *síntesis pura* de las representaciones. La primera cosa que debe sernos dada para facilitar el conocimiento de todos los objetos *à priori*, es la *diversidad* de la intuicion pura. La segunda es la *síntesis* de esta diversidad por la imaginacion; todavía no hay conocimiento. Los conceptos que dan la *unidad* á esta síntesis pura, y que consisten en la simple representacion de esta unidad sintética necesaria, son la tercer cosa que se requiere para el conocimiento de un objeto cualquiera, y descansan sobre el entendimiento.

La funcion que da la unidad á las diferentes representaciones *de un juicio*, es la misma que la da tambien á la simple síntesis de las diferentes representaciones *en una sola intuicion*; y esta unidad, entendida en un sentido general, se llama concepto puro del entendimiento. Por consiguiente, el mismo entendimiento, ejerciendo precisamente las mismas operaciones que le sirven para dar á los conceptos la forma lógica de un juicio por medio de la unidad analítica, introduce tambien una materia transcendental en sus representaciones, por medio de la unidad sintética de la diversidad en la intuicion en general: lo que hace que se llamen conceptos puros del entendimiento aquellos que se refieren *à priori* á los objetos, resultado que no puede dar la Lógica general.

Hay, pues, precisamente tantos conceptos puros del entendimiento que se refieren *à priori* á los objetos de la intuicion en general, cuantas hay funciones lógicas en todos los juicios posibles en la tabla anterior. Porque el entendimiento está completamente agotado, y toda su facultad perfectamente reconocida y medida por estas funciones. Llamaremos á estos conceptos *categorías*, segun Aristóteles, pues que su fin era el nuestro, á pesar de la diferencia en la ejecucion.

TABLA DE LAS CATEGORIAS.

1.ª — DE LA CANTIDAD.

Unidad.
Pluralidad.
Totalidad.

2.ª — DE LA CUALIDAD.

Realidad.
Negacion.
Limitacion.

3.ª — DE LA RELACION.

Inherencia y substancia,
(substancia et accidens).
Causalidad y dependencia,
(causa y efecto).
Comunidad,
(reciprocidad entre el agente y el paciente).

4.ª — DE LA MODALIDAD.

Posibilidad,—Imposibilidad.
Existencia,—No existencia.
Necesidad,—Contingencia.

Tal es, pues, el inventario de todos los conceptos originalmente puros de la síntesis que el entendimiento encierra en sí mismo *à priori*, y por cuya causa únicamente se le llama entendimiento puro. Con efecto, sólo por estos conceptos es como puede comprender una cosa en la diversidad de la intuicion, ó pensar el objeto de ella. Esta division de las categorías ha nacido sistemáticamente de un principio comun, á saber: de la facultad de *juzgar* (que es lo mismo que la facultad de pensar); no proviene ella de una investigacion fortuita y sin órden de los conceptos puros, cuya exactitud de enumeracion nunca puede ser cierta por este procedimiento, puesto que entónces esta enumeracion no es concluida sino por induccion, sin atender á que obrando así, nunca se percibe por qué precisamente las ideas que se encuentran y no otras son inherentes al entendimiento puro. El propósito de Aristóteles de averiguar los conceptos fundamentales, era digno de tan grande hombre. Pero Aristóteles, no habiendo partido de ningun principio, los recogió conforme se presentaron á su espíritu, y reunió primero diez que llamó *categorias* (predicamentos). Más adelante creyó haber encontrado otros cinco, y los añadió á los anteriores, bajo el nombre de *post-predicamentos*. Pero su tabla no resultó por eso más perfecta. Además, hay entre sus categorias algunos modos de la sensibilidad pura (*quando*, *ubi*, *situs*, lo mismo que *prius*, *simul*), así como tambien un modo empírico (*motus*), que no deben formar parte de esta tabla genealógica del entendimiento. Tambien hace entrar conceptos derivados (*actio*, *passio*), entre los conceptos primitivos, y por el contrario algunos de estos últimos faltan enteramente.

Menester es notar aún, que en cuanto á los conceptos primitivos ó categorias, como *conceptos* verdaderamente fundamentales del entendimiento puro, tienen tambien sus conceptos puros derivados, que no pueden por consiguiente omitirse en un sistema completo de Filosofía transcendental; pero yo me contentaré con mencionarlos en este ensayo puramente crítico.

Séame permitido llamar estos conceptos puros del entendimiento, pero derivados, los *predicables* del entendimiento puro, por oposicion á los predicamentos. Cuando se tienen los conceptos primitivos y originales, es fácil obtener los conceptos derivados y subordinados; el árbol genealógico del entendimiento puro se levanta entónces á toda su altura como por sí mismo y sin trabajo ninguno.

....

....

Se pueden hacer observaciones curiosas acerca de esta tabla de las categorías, las cuales pueden conducir á consecuencias importantes en órden á la forma científica de todos los conocimientos racionales. Porque es evidente que esta tabla es de la mayor utilidad para la parte teórica de la Filosofía, y hasta es indispensable para trazar el *plan completo de una ciencia*, en cuanto esta ciencia descansa sobre conceptos *à priori*, y para dividirla materialmente *segun principios determinados*. Esta tabla contiene evidentemente todos los conceptos elementales del entendimiento, y hasta la forma de su conjunto ó sistema en el espíritu humano; ella indica, pues, todos los *momentos* de una ciencia especulativa proyectada, ella da hasta su *ordenanza*. Por ahora no haré más que algunas de estas observaciones.

Primera observacion. La tabla de las categorías, que comprende cuatro clases de conceptos intelectuales, se divide primero en dos partes, de las cuales la primera se refiere á los objetos de la intuicion (pura ó empírica), y la segunda á la existencia de estos objetos (sea con relacion de unos á otros, sea con relacion al entendimiento).

La primera clase de conceptos es la de las categorías *matemáticas*; la segunda la de las *categorías dinámicas*. La primera, como se ve, carece de conceptos correlativos; no los hay como en la segunda. Esta diferencia debe no obstante tener una razon en la naturaleza del entendimiento.

Segunda observacion. En cada clase es el mismo el número de las categorías; ellas son en número de tres, lo que es digno de observarse, porque cualquiera otra division *à priori* por conceptos debe ser dicotómica. Añadamos á esto, que la tercera categoría resulta siempre de la union de las dos primeras de aquella clase á que pertenece.

Así la *universalidad* (totalidad) no es más que la multiplicidad considerada como unidad; la *limitacion* no es otra cosa más que la realidad junta á la negacion; la *reciprocidad* es la *causalidad* de una substancia en determinacion mútua con otra; en fin, la *necesidad* no es más que la existencia dada por la posibilidad misma. Pero no se crea por esto que la tercera categoría es un concepto puramente derivado, y no un concepto primitivo del entendimiento puro, porque la union de la primera y de la segunda categoría, para formar el tercer concepto, exige de parte del entendimiento un acto particular distinto del que tiene lugar en la primera y segunda categoría. Así, el concepto de un *número* (que pertenece á la categoría de totalidad) no es siempre posible donde se encuentran los conceptos de pluralidad y de unidad (v. g.: en la representacion del infinito). De igual manera: de que yo una los dos conceptos de *causa* y de *substancia*, no se comprende por esto desde luego la *influencia*, es decir, cómo es posible que una substancia sea causa de alguna cosa en otra substancia. Es menester, pues, claramente para esto un acto especial del entendimiento. Lo mismo sucede en las otras categorías.

Tercera observacion. En cuanto á la categoría de la *comunidad*, que se encuentra bajo el tercer título, su acuerdo con la forma del juicio disyuntivo, que le corresponde en la tabla de las funciones lógicas, no es tan evidente como en las otras clases.

Para comprender bien esta congruencia, es menester notar que en todos los juicios disyuntivos, la esfera (el conjunto de todo lo que se comprende en un juicio de esta naturaleza) está representada como un todo dividido en partes (los conceptos subordinados); y como una de estas partes no puede estar contenida en la otra, deben ser concebidas entre sí, como coordenadas y no como subordinadas; de tal manera que no se determinan unas á otras, succesiva ni parcialmente, como en una série, sino mútuamente como en un agregado. Si pues un miembro de la division es puesto, es admitido, todos los demas son rechazados, y recíprocamente.

Ahora bien; desde el momento en que se concibe semejante enlace en un *todo de las cosas*, una de estas cosas como efecto no está subordinada á la otra como causa de su existencia, sino que ambas estan coordinadas al mismo tiempo, y recíprocamente como causas una de otra, respecto á su determinacion (v. g.: en un cuerpo cuyas partes se atraen ó se rechazan mútuamente).

Esta es una especie de enlace muy diferente del que se encuentra en la simple relacion de causa á efecto (de principio á consecuencia), relacion en la que la consecuencia no determina á su vez al principio, y por esta razon no forma un todo con ella (tal es el Criador con el mundo). Este procedimiento que emplea el entendimiento cuando se le representa la esfera de un concepto dividido, es además el mismo, cuando una cosa es concebida como divisible; y así como los miembros de la division se excluyen unos á otros en el primer caso, aunque estén reunidos en una esfera, de igual manera el entendimiento se representa las partes de una cosa divisible á las cuales (como substancias) compete individualmente una existencia independiente de la de las otras partes, como reunidas sin embargo en un todo.

....

....

Para comprender bien esta congruencia, es menester notar que en todos los juicios disyuntivos, la esfera (el conjunto de todo lo que se comprende en un juicio de esta naturaleza) está representada como un todo dividido en partes (los conceptos subordinados); y como una de estas partes no puede estar contenida en la otra, deben ser concebidas entre sí, como coordenadas y no como subordinadas, de tal manera que no se determinan unas á otras, sucesiva ni parcialmente, como en una série, sino mútuamente, como en un agregado. Si pues un miembro de la division es puesto, es admitido, todos los demas son rechazados, y recíprocamente.

Ahora bien: desde el momento en que se concibe semejante enlace en un todo de las cosas, una de estas cosas como efecto no está subordinada á la otra, como causa de su existencia, sino que ambas están coordinadas al mismo tiempo, y recíprocamente como causas una de otra, respecto á su determinacion (v. g.: en un cuerpo cuyas partes se atraen ó se rechazan mútuamente).

Esta es una especie de enlace muy diferente del que se encuentra en la simple relacion de causa á efecto (de principio á consecuencia), relacion en la que la consecuencia no determina á su vez al principio, y por esta razon no forma un todo con él (tal es el Criador con el mundo). Este procedimiento que emplea el entendimiento cuando se le representa la esfera de un concepto dividido, es además el mismo, cuando una cosa es concebible como divisible; y así como los miembros de la division se excluyen unos á otros en el primer caso, aunque estén reunidos en una esfera, de igual manera el entendimiento se representa las partes de una cosa divisible á las cuales (como substancias) compete individualmente una existencia independiente de la de las otras partes, pero reunidas sin embargo en un todo.

GLOSARIO

DE LAS PRINCIPALES VOCES EMPLEADAS EN LA EXPOSICION

DE LA

TEORÍA TRANSCENDENTAL DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

GLOSARIO

DE LAS PRINCIPALES VOCES EMPLEADAS EN ESTA OBRA.

A

ACCIDENTE. Es voz escolástica (*accidens*, *quod accidit*) lo que acontece, lo que sobreviene, lo que se allega á una cosa como calidad ó modificacion de ella. Es término correlativo de *substancia*; esta se concibe como base ó sustentáculo del accidente, cae bajo él, es su *substratum* (quia substernitur).

Substancia y accidente son dos conceptos primitivos y fundamentales del espíritu humano, dos categorías por las cuales pensamos las cosas, ora como sujetos de una modificacion, ora como modificaciones de un sujeto. Son estos conceptos inseparables, y perfectamente correlativos: nada es substancia sino respecto de un accidente, ni nada se concibe como accidente sino respecto de una substancia. Vide *Substancia.*

En todo juicio categórico, esto es, en todo juicio que expresa una relacion entre un sujeto y un predicado, el sujeto representa el concepto de substancia, y el predicado el de accidente; y esto de una manera tan necesaria, que la substancia como tal nunca puede ser predicado del juicio. Predicar una cosa de otra no es, con efecto, mas que atribuirla, aplicarla como modificacion, yuxtaponerla á ella como determinacion de su concepto: es en suma, hacerla recaer sobre ella (*accidere*).

En el juicio categórico hay, pues, una aproximacion, una yuxtaposicion, una síntesis de los dos conceptos sujeto y predicado, una verdadera suma intelectual de la substancia y del accidente. Cuando yo juzgo que *los cuerpos son graves*, agrego al concepto de cuerpo el concepto atributivo de la gravedad, que la experiencia me descubre en ellos; yo sumo á la gravedad con el cuerpo para tener un conocimiento verdadero de él, un conocimiento autorizado por la experiencia.

El algoritmo representante de esta síntesis conceptual del juicio, es ciertamente el de la *suma*, la cual realiza entre elementos matemáticos la misma yuxtaposicion que aquella establece entre los conceptos. Sumar una con otra dos cantidades, dos números, dos rectas ó dos fuerzas, no es más que considerar á una de ellas como substancia sobre la que se hace recaer la modificacion expresada por la otra que es el verdadero accidente. La segunda modifica á la primera en su cantidad numérica, en su magnitud ó en su intensidad. Hay entre los llamados sumandos una verdádera accion modificativa que se ejerce de una manera inmediata por su mútua aproximacion ó síntesis.

Conviene advertir que lo *accidental* se entiende vulgarmente por lo opuesto á lo *esencial*, esto es, que significa la modificacion ó cualidad que puede existir ó faltar en las cosas, salva su esencia: en este sentido se dice que determinado color ó forma son *accidentales* á ciertos cuerpos mientras no dejen de ser extensos é impenetrables, que es en lo que consiste su esencia. La acepcion técnica de *accidente*, por oposicion á *substancia*, es mas general, y comprende toda clase de modos ó cualidades, constituyan ó no la esencia de las cosas. En esta segunda acepcion ha de tomarse la voz *accidente* en esta obra.

AFECCION. Modo de ser ó cualidad de toda cantidad.

Aunque para concebir las cosas como *cantidades*, basta considerarlas como *unas*, como *muchas* ó como todos formados de *multitud* ó pluralidad de unidades, es menester además atender á la manera como son ó como existen las cosas, ó como influyen unas sobre otras: este nuevo órden de conceptos es necesario aplicar á la cantidad ya constituida como tal, para que sea completo el conocimiento matemático que debemos tener de ella. La cantidad ha de ser concebida con alguna afeccion ó cualidad particular, no empírica, porque de todas las determinaciones empíricas, prescinde la Matemática pura, sino conceptual como el entendimiento concibe todas las cosas, cuando establece su *realidad*, ó cuando las *niega*, ó cuando las *afirma* en el seno de una *negacion*. La cantidad ha de ser *puesta* como real por una afirmacion *negada* ó destruida por un acto contrario del entendimiento, ó *puesta* en un concepto que es la *negacion* de otro concepto. La cantidad ha de ser *positiva*, *negativa* ó *limitativa*, y alguna de estas tres maneras de sér ha de constituir su AFECCION propia. Bajo este nuevo punto de vista intelectual adquiere la cantidad un sentido que es tan matemático como el que le corresponde á título de cantidad. Sin la afeccion no podria establecerse entre las cantidades mas relaciones que las de magnitud, y serian imposibles todos los algoritmos teóricos que combina y desenvuelve el cálculo. Lo que verdaderamente constituye la superioridad extensiva y combinatoria del Álgebra sobre las demas ramas de la Matemática pura, es la atencion preferente que concede á la afeccion de las cantidades. El Álgebra es una *semiótica* matemática, una teoría conceptual rigorosa y sistemática del *signo* ó afeccion de las cantidades: por eso las relaciones que formula ó descubre son mas completas en el órden matemático y se imponen como leyes del procedimiento aritmético y geométrico. Vide *Cualidad*.

AFECTA (imaginaria). Cualquier cantidad ó expresion imaginaria distinta de la *pura* ó típica $\pm\sqrt{-1}$ se llama AFECTA por el elemento real que envuelve. Unas veces este elemento real está explícito, y entonces tiene la forma binómia $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$; y otras va paliado en una forma radical monomia como

$$\sqrt[4]{-1},\ \sqrt{\sqrt{-1}},\ \sqrt{-\sqrt{-\sqrt{-1}}},\ \text{\&c.}$$

y en general $\sqrt[2n]{-1}$ para cualquier valor de n que no sea la unidad.

Las imaginarias afectas son genuina representacion de la *oblicuidad*: esta, en efecto, es resoluble en una proyeccion y una proyectante perpendiculares recíprocamente, esto es, en un elemento real y otro imaginario puro.

Alguna analogía se descubre entre el significado de afectas que se da á algunas ecuaciones y lo que en esta obra significa la misma palabra cuando se trata de imaginarias.

AFIRMACION. Acto intelectual constitutivo de la realidad de las cosas. Es el primer momento del juicio categórico en el cual se subordina el concepto de un sujeto al de un predicado: establecemos la realidad de una cosa cuando la ponemos bajo un concepto y como encerrada dentro de su circunscripcion. Si juzgamos que A es B, *ponemos* á A dentro del concepto de B, como formando *realmente* una parte subjetiva ó subordinada de este concepto.

Toda cantidad por el solo hecho de *ser puesta* como objeto por el entendimiento, es *positiva*, y lleva en sí misma una afirmacion suficiente de su realidad.

Á esta afirmacion se refiere como correlativa la negacion de donde nacen las llamadas cantidades *negativas*, que nunca son tales sino se conciben como contrarias y destructivas de las afirmativas. Vide *Negacion*.

Fácil es notar que la realidad que se establece por la afirmacion del juicio es lógica, y nada tiene de comun con la que es propia de las cantidades positivas ó negativas, en cuanto son opuestas á las imaginarias. Esta realidad es meramente nominal.

ALGORITMO. Trabajo ú operacion sobre los números.

La algoritmia entera está cifrada en estas tres fórmulas capitales:

$$A+B=C$$

$$A\times B=C$$

$$A^B=C,$$

correspondientes á la suma, á la produccion y á la graduacion.

Ni son, ni se concibe que sean más las relaciones numerarias fundamentales que conducen á la generacion de unos números por otros, por verdaderas operaciones aritméticas. Esta trinidad de algoritmos representa con efecto la trinidad de relaciones lógicas que pueden constituir un juicio. Vide *Relacion*.

En la naturaleza del entendimiento debe buscarse la verdadera razon de este número limitado de algoritmos: no hay más operaciones fundamentales porque el entendimiento no admite mas que tres formas de relacion en el juicio, porque no juzga más que atribuyendo predicados á sujetos de un modo categórico, ó atribuyendo varios predicados incompatibles á un sujeto, en el sentido de que cada uno pueda convenirle, pero excluyendo los restantes, ó sometiendo su atribucion á alguna hipótesis de tal manera que lo verdaderamente afirmado es la dependencia de un juicio respecto de otro. Estos tres grados ó momentos de la relacion son irreducibles, como lo son las tres relaciones teóricas antes formuladas; y lo son únicos, como lo son las tres operaciones fundamentales que admite la algoritmia matemática.

Mr. Wronski, que reconoce y traduce perfectamente al lenguaje matemático las dos primeras categorías kantianas, cantidad y cualidad, se aparta mucho de este camino cuando llega á interpretar la de relacion. Hace intervenir á la *sensibilidad* en la suma, al *juicio* en la produccion, y á la *razon*, facultad superior, en la graduacion. No encuentro motivo para abandonar esta asimilacion sistemática del cuadro de las categorías, ó sea de las funciones lógicas del juicio con el desarrollo natural, y hasta histórico de la Matemática pura. No hay que salir de la region del entendimiento ó del cuadro de sus categorías para encontrar como el bosquejo y hasta la ordenanza de toda ciencia formada por la virtualidad propia del entendimiento, como lo ha sido más que ninguna otra la Matemática, ciencia orgánica y eminentemente conceptual. Véase el Fragmento sobre la *Lógica transcendental*.

AMBIGÜEDAD (signo de). Vide *Conjugacion*.

ANTECEDENTE. Lo mismo que *hipótesis*. La acepcion de esta palabra es lógica, y se diferencia mucho de la que tiene en la teoría matemática de las razones y proporciones. El antecedente es un juicio del cual depende otro que se llama *consiguiente*, como de la hipótesis depende la tésis, y de la condicion el condicionado.

La relacion lógica del antecedente y del consiguiente no es recíproca: así que el consiguiente depende del antecedente, pero este no depende de aquel. Igual falta de reciprocidad se advierte entre los conceptos de causa y efecto, que aunque correlativos en el entendimiento no denotan una determinacion mútua en el órden de las existencias: el efecto es determinado por la causa; pero esta no lo es por aquel.

La realizacion matemática de estos conceptos de causalidad da orígen al algoritmo de la graduacion, en el cual es de notar la independencia é indeterminabilidad del exponente, dada la potencia y la raiz, como sucede en la ecuacion exponencial $a^x = b$, en que es necesario salir del algoritmo gradual para determinar el exponente por la relacion logarítmica $x = \frac{\text{Log. } b}{\text{Log. } a}$, que rebaja el algoritmo de la graduacion al de la produccion.

El exponente representa el concepto de causa; él es el que verdaderamente determina la evolucion potencial, sin ser determinable por ella.

La potencia expresa el concepto de efecto como determinable por el grado de evolucion á que se somete una raiz. Vide *Graduacion*.

ANTERADICAL (signo): El que precede á una forma radical cualquiera. Tambien puede llamarse *extraradical*, porque es extraño á la evolucion gradual y la supone realizada imponiéndole su afeccion propia.

ANTÍTESIS. Literalmente significa *contraposicion*. La antítesis es una tésis incompatible con otra tésis.

En los juicios disyuntivos siempre son antitéticos los predicados, de tal manera, que la afirmacion de cualquiera de ellos lleva consigo la negacion de todos los demas.

De la funcion del entendimiento en esta clase de juicios, se desprende la categoría de la *reciprocidad*, ó *comunidad*, que en el órden matemático se halla realizada por el algoritmo de la produccion ó multiplicacion. Los factores de un producto son perfectamente recíprocos en su contraposicion: por una antítesis de cualquiera de ellos respecto del otro es determinado un mismo producto, cualquiera que sea el oficio de multiplicando ó multiplicador que tengan en la significacion concreta que les impone el problema multiplicativo.

La antítesis de los factores lleva consigo una cualidad esencial y característica de este algoritmo. Todo producto está siempre referido por lo menos á dos factores ó bases antitéticas y simultáneas. La graduacion, cualquiera que sea su índice determinante, es evolucion de una base única: la pluralidad de raices no es simultánea, sino succesiva ó alternativa: cada una de por sí, y sin el concurso de las demas, puede servir de materia ó punto de partida á la evolucion potencial. Vide *Contraposicion*.

A PRIORI. Expresion latina que denota, más que una precedencia ó anterioridad respecto del tiempo, una superioridad respecto al orígen. En el lenguaje crítico tiene esta fórmula una significacion rigorosa. El espacio y el tiempo son intuiciones *á priori*, porque lejos de derivarse de la experiencia, son condiciones formales de toda intuicion empírica, y hay que admitirlos como formas subjetivas de nuestra sensibilidad indispensables para que sean percibidos los cuerpos como extensos y los fenómenos de conciencia como succesivos y durables.

Tambien hay que admitir en el entendimiento ciertos conceptos *à priori*, necesarios para el conocimiento experimental de las cosas, los cuales son muy superiores á los llamados *empíricos*, porque los sacamos de este conocimiento experimental.

En el uso de la razon en la demostracion tiene mucho lugar la denominacion de *à priori* y *à posteriori*, que es su correlativa. Las demostraciones matemáticas son todas *à priori*: no se fundan en la experiencia, ni son meras comprobaciones de *lo que sucede* en cierto número de casos: hacen ver *lo que ha de ser* universalmente y sin excepcion. El método demostrativo que se emplea en las ciencias de hechos, como lo son todas las naturales, es *à posteriori*: la demostracion vale tanto cuanto valga la experiencia en que se funda.

ARGUMENTO. Es voz recientemente introducida en la nomenclatura de las matemáticas puras: está tomada de la Astronomía, donde significa la cantidad de que depende una ecuacion, una desigualdad ó una circunstancia cualquiera del movimiento de un planeta: así, *argumento de latitud* es la distancia de un planeta á su nodo ascendente, porque esta distancia sirve para calcular la latitud del planeta, etc. Es expresion general de la inclinacion de una recta en evolucion giratoria respecto de un eje fijo. Y como sea la inclinacion en las rectas lo que la afeccion ó cualidad en toda clase de cantidades, el argumento representa de un modo universal el punto de vista cualitativo de todas ellas.

Cuando se trata de imaginarias, que es cuando más se usa esta palabra, tiene por correlativa la voz *módulo*, que significa la cantidad absoluta y real, que calificada por el argumento, toma la afeccion ó posicion imaginaria. El módulo y el argumento son cofactores necesarios de todo objeto matemático, como representantes que son de la cantidad y cualidad. Vide *Módulo*.

ASTERÍSTICO (polígono). Así se llama el polígono estrellado ó que tiene forma de estrella (ΑΣΤΗΡ) por la disposicion perimétrica de sus lados en ángulos entrantes y salientes alternativos. A todo polígono regular ordinario es posible dar esta forma por medio de diagonales sucesivas que abracen un número tal de lados que sea primo con el número total de ellos. Los antiguos geómetras especularon mucho sobre esta clase de polígonos que tambien son susceptibles de cierta regularidad.

B

BASE. No es exclusivamente geométrica la acepcion de este vocablo. Significa el punto de partida de toda evolucion potencial; es la cantidad en su primer grado de evolucion, la primera potencia, la raíz.

Tambien suelen llamarse *bases*, y tambien *raíces*, los factores de un producto, principalmente cuando este es una superficie determinada por la contraposicion ó antítesis de dos rectas.

En un sistema logarítmico se llama *base* al número que tiene por logaritmo la unidad. Esta acepcion coincide enteramente con la que generalmente recibe esta palabra en la presente obra.

BINÓMIA (forma). La forma binómia, de la cual tanto se habla en esta teoría de las imaginarias, consta necesariamente de dos elementos heterogéneos que representan las dos afecciones fundamentales de la realidad y del imaginarismo. En el órden geométrico, estas afecciones son las dos direcciones incompatibles de dos ejes ortogonales: todas las posiciones de una recta sobre un plano caben, con efecto, en la forma típica $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ considerada como funcion de las dos variables independientes α y β.

Las posiciones de una recta en el espacio corresponderian á la variabilidad funcional de una *forma trinómia*, tal como $\alpha + \beta\sqrt{-1} + \gamma\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, que expresa valores cuantitativos de tres coordenadas ortogonales.

C

CANTIDAD. Suelen llamarse cantidades las cosas *quantas*, ó las que son concebidas como *quantas*. Pero esta acepcion aunque es la más comun es la menos propia. La cantidad es un concepto de las cosas, y no es la cosa misma. La cantidad es una categoría fundamental del entendimiento, el cual la aplica á las cosas que son su objeto cuando las considera bajo el punto de vista de su *unidad* ó de su *pluralidad*, ó de la *totalidad* que forma la pluralidad de unidades.

Tres son los conceptos categóricos de la cantidad correspondientes á otras tantas formas del juicio respecto de la mayor ó menor extension (lógica) del sujeto.

O todo él se comprende bajo la esfera del predicado. Juicio general; como, *todos los cuerpos son pesados.*

O parte indeterminada de él entra en esta esfera. Juicio particular; como, *algunos cuerpos son elásticos.*

O el sujeto considerado como individuo forma parte del predicado. Juicio singular; como, *este cuerpo es metálico.*

En el primer caso, el sujeto es concebido como una unidad tan esencial, que nada de él queda fuera del predicado que pueda constituir pluralidad respecto de él ó con él. Hay *unidad* perfecta en el sujeto.

En el segundo, queda sin incluir una parte indefinida que constituye una pluralidad esencial respecto de la que se incluye. El fraccionamiento lógico á que se somete el sujeto es irrealizable sin *pluralidad.*

En el tercero, el sujeto representa la unidad referida á la pluralidad, ó formando una *totalidad* lógica indispensable en la nocion de todo individuo. Nada es determinable como individuo si la unidad no resalta en el seno de la pluralidad, ó si la pluralidad no es totalizada en cierta unidad.

A los juicios, pues, *generales*, *particulares* y *singulares*, corresponden las categorías *unidad*, *pluralidad* y *totalidad*, que son necesarias para concebir algo como cantidad, para formar la nocion de número y para conocer las cosas como extensas.

No hay número para el entendimiento si este no forma una cierta *totalidad* de *pluralidad* de *unidades.*

No es posible la representacion geométrica, ni aún de la línea, que es lo más elemental, sino á condicion de la síntesis ó totalidad de pluralidad de elementos extensivos. El punto no es cantidad, porque no es todo formado de partes.

Las categorías de la cantidad son eminentemente matemáticas; y fuera muy conveniente que los que la definen diciendo que es *todo lo susceptible de aumento ó disminucion*, penetrasen algo más en el juego intelectual de estos conceptos. Lo que pasa ordinariamente por una definicion exacta de la cantidad, no es mas que un criterio empírico para conocer cuándo una cosa es cantidad, pero no una definicion esencial del objeto de la ciencia matemática.

CATEGOREMÁTICO. Lo perteneciente á una sola categoría; es voz correlativa de *sincategoremático*, que significa todo lo concerniente á dos ó más categorías reunidas.

CATEGORÍA. Literalmente *predicamento*. Las categorías son conceptos superiores y fundamentales del entendimiento, que nos sirven para pensar las cosas como objetos percibidos. Son puntos de vista generales que *à priori* determinan la forma de la atribucion que hay en todo juicio, y por consiguiente la manera de ser pensada una cosa como objeto de nuestra intuicion.

Aristóteles se propuso la investigacion de estos conceptos fundamentales, y nos dió una tabla de ellos conforme se fueron presentando á su espíritu como claves que podian servir para la clasificacion de todas las cosas en general. La tabla es la siguiente:

Substancia....................	Οὐσία
Cantidad....................	Ποσόν
Cualidad....................	Ποιόν
Relacion....................	Προστι
Accion....................	Ποιεῖν
Pasion....................	Πάσχειν
Lugar....................	Ποῦ
Tiempo....................	Πότε
Situacion....................	Κεῖσθαι
Habitud....................	Εχειν

A estos diez predicamentos añadió despues otros cinco conceptos derivados con el nombre de *predicables* ó *post-predicamentos*, que son los siguientes:

Género....................	γενος
Especie....................	εἶδος
Diferencia....................	διαφορὰ
Propio....................	ἴδιόν
Accidente....................	συμβεβηκός.

Kant ha perfeccionado el cuadro de las categorías aristotélicas, no sólo por una enumeracion mas completa de sus elementos, sino por la determinacion *à priori* del principio de su distribucion sistemática. Este principio está tomado de la funcion lógica del entendimiento en todo juicio. Véase el Fragmento de la *Lógica transcendental*.

Nada puede ser juzgado como *cosa* objeto de conocimiento, sino bajo alguna de estas categorías. Nada puede ser objeto del pensamiento matemático como no sea bajo el concepto de cantidad, de cualidad, de relacion ó de modalidad, que son los cuatro títulos en que se comprenden todas las categorías.

La recta, el plano y el sólido, se llaman tambien categorías geométricas en algunos lugares de esta obra.

CAUSA. Concepto fundamental ó categórico del entendimiento, por el que pensamos las cosas como determinantes de otras que se llaman *efectos*, sin que estos á su vez determinen la existencia de aquellas. La relacion de *causalidad* no es bilateral ó recíproca: el efecto depende de la causa, pero esta no depende de aquel.

En los juicios hipotéticos se encuentra la forma pura de esta relacion: la tésis ó consiguiente, depende lógicamente de la hipótesis ó antecedente, sin que esta dependa de aquella.

El algoritmo de la graduacion realiza en el órden matemático esta categoría de la causa: el exponente es la causa determinante de la potencia, que es como el efecto, y el exponente nunca puede ser determinado por la potencia dentro del mismo algoritmo gradual.

COMPLEMENTARIA (ecuacion). Cualquiera de las ecuaciones más ó ménos elementales en que puede descomponerse otra que se llama *principal*. Las ecuaciones complementarias son cofactores unas de otras, y las raíces de todas ellas son raíces de la principal que no puede tener otras.

COMPLEMENTARIOS (planos). Son aquellos que completan la totalidad de un cuadrado del que se tienen los cuadrados formados sobre las dos partes en que se concibe dividido uno de sus lados. En la expresion algebráica del cuadrado total

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

los planos complementarios están siempre representados por el término $2ab$, y son dos rectángulos verticales determinados por paralelas á los dos lados del cuadrado. Los dos planos complementarios, más el cuadrado de la parte menor de la raiz, forman el *gnomon* del cuadrado. Vide *Gnomon*.

Los antiguos geómetras, que daban más importancia que los modernos á estas relaciones de los productos geométricos con los numéricos, usaban mucho de estas denominaciones.

En la construccion del cubo, los sólidos complementarios y el gnomon tienen una posicion anóloga.

COMUNICABLES (raíces). Así se llaman las que por ser raíces de una ecuacion elemental ó factorial, lo son tambien de la ecuacion compuesta que resulta como producto.

Toda raíz de la ecuacion factor es raíz de la ecuacion producto, sin que pueda decirse que toda raíz del producto lo es necesariamente de cualquiera de los factores.

CONCEPTO. Lo *concebido*, lo que *concebimos ó pensamos* de las cosas, á diferencia de lo que *percibimos* de ellas. Todo el conocimiento que podemos tener de una cosa se resuelve en dos elementos: uno, que comprende todo aquello que de la cosa nos es dado en nuestra intuicion sensible, y que nosotros recibimos pasivamente en nuestra capacidad perceptiva; y otro, que abraza todo lo que de la cosa pensamos espontáneamente sin sernos dado, si no siendo puesto en ella por la actividad misma del espíritu. Lo primero pertenece á nuestra sensibilidad, lo segundo es obra del entendimiento. Intuiciones sensibles y conceptos intelectuales entran necesariamente en todo conocimiento experimental y verdadero de las cosas; de tal manera que ni lo que de ellas percibimos (*intuimur*) ni lo que de ellas pensamos (*intelligimus*) es bastante por sí solo para que se pueda decir que *las conocemos* como cosas determinadas ó como objetos de nuestra intuicion.

Los conceptos que se derivan de la experiencia, y que suponen una abstraccion y generalizacion operadas sobre un conocimiento ya completo, se llaman *empíricos*: estos no pueden establecerse como condiciones del conocimiento que ya se supone consumado. Los que preceden á la experiencia, de tal manera que esta nunca es posible sin su intervencion, se llaman conceptos *à priori*, y deben establecerse como condiciones de la posibilidad del conocimiento experimental.

Las categorías son todas conceptos *à priori*, necesarios para pensar cosas como objetos dados en intuicion, sin lo cual nunca puede decirse que las conocemos.

La verdadera razon de la superioridad y de la transcendencia del Álgebra consiste en la naturaleza de los conceptos *à priori* sobre que expecula, los cuales, como puros é independientes de toda materia empírica, son condiciones formales del pensamiento matemático de las cosas como extensas ó numerables, y deben tener una aplicabilidad y transcendencia igual á la Geometría y á la Aritmética.

CONJUGACION. Expresion simultánea de las dos afecciones opuestas que puede tener una misma cantidad. Su signo $\pm$ es el comunmente llamado de *ambigüedad*. Aparece necesariamente esta dualidad de afecciones en la expresion de una raíz par, real ó imaginaria; y con ella se indica la posibilidad de que así la raíz positiva como la negativa *alternativamente* ó cada una de por sí, reproduzcan la potencia. La idea de duda ó de ambigüedad es menos propia que la de esta posibilidad alternativa.

Es muy comun entre los matemáticos el llamar *conjugadas* á las raíces de la forma $a \pm b\sqrt{-1}$, á pesar de que en ellas no es perfecta la oposicion de afecciones por el elemento positivo comun $+a$ que envuelven: á estas raíces conviene mas bien el nombre de *simétricas*, por la analogía fundada en su representacion geométrica.

La conjugacion en ellas no es más que parcial, porque no afecta más que al elemento imaginario. Hay verdadera conjugacion en las raíces $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, que representadas geométricamente resultan opuestas. Vide *Simetría*.

CONSIGUIENTE. Voz correlativa de *antecedente*: la acepcion de estas dos palabras es lógica. Consiguiente es un juicio que depende de otro juicio, como la tésis depende de la hipótesis.

En el algoritmo de la graduacion toda potencia es tésis de la hipótesis expresada por el exponente. Vide *Hipótesis* y *Graduacion*.

CONTÍGUA (espiral). Aquella que se toca á sí misma en toda su extension, sin dejar intervalos entre sus circunvoluciones. La espiral contígua interior y exterior al círculo en su evolucion indefinida, pasa por todos los puntos de un plano. El elemento cuantitativo de esta evolucion mixta es infinitamente pequeño.

CONTINUATIVA. Disposicion geométrica de los sumandos, por la cual estos verifican su síntesis haciendo comunes sus puntos extremos. De todos ellos no quedan libres más que el primero del primer sumando, en el cual se supone el orígen, y el último del último. La suma reune estos dos extremos.

CONTRAPOSICION. Posicion contraria de las cosas. Es la relacion que los factores tienen en el producto: la contraposicion ó antítesis expresa la esencia del algoritmo de la multiplicacion. Vide *Produccion*.

CUALIDAD. Vide *Afeccion.*

CURVIFICACION. Reduccion á línea curva de la longitud absoluta de una recta. Es concepto opuesto al de la *rectificacian.*

En las exponenciales planas de la forma general $A^{x\sqrt{-1}}$ la recta expresada por el exponente imaginario perpendicular al radio A, curvificada segun este radio real, señala en la circunferencia el punto en que la exponencial se detiene en su graduacion progresiva.

D

DEFICIENTE (irradiacion). Aquella que, siendo regular ó equiangular en los elementos existentes, carece de algunos de los que exije su grado. Las irradiaciones deficientes son complementarias de la que representase la raíz ó raíces que faltan.

DICOTÓMICA (division). La que se hace de un todo en dos partes ó miembros.

DINÁMICA (disposicion). Es la que se da á varios sumandos lineales que tienen un punto comun: este punto es el *orígen.* Las rectas en esta disposicion representan un sistema de fuerzas que obran sobre el punto de orígen: la resultante de las fuerzas ó la suma de las rectas es la diagonal del paralelógramo construido sobre ellas. Por esta razon la disposicion dinámica se llama tambien *paralelográmica.*

DINAMISMO. Se da este nombre á la consideracion de las rectas como representantes de las fuerzas de un sistema.

El dinamismo de las raíces de una ecuacion consiste en su representacion lineal en irradiacion perfecta ó imperfecta, segun la ecuacion sea pura ó mixta. El dinamismo de la ecuacion no es el mismo que el de sus raíces, sino que se establece entre los términos de ella, y siempre tiene por resultante cero.

DUALIDAD. Condicion esencial de los factores del producto, los cuales son dos cuando menos, y perfectamente recíprocos y simultáneos. Esta condicion se opone á la *unidad* que es esencial en la raíz sometida al algoritmo de la graduacion: la pluralidad de raíces de una potencia no denota un concurso simultáneo en la generacion de ella, sino succesivo ó alternativo, puesto que cada una de por sí *puede* engendrarla, sometida á un mismo exponente gradual.

E

ECLÍPTICA (exponencial). Así puede llamarse la imaginaria exponencial que se concibe girando en un plano oblícuo respecto del ecuador.

La significacion de esta palabra en Astronomía es menos ámplia que en este tratado: la exponencial eclíptica puede tener cualquier grado de oblicuidad respecto del plano ecuatorial.

ECUADOR. Es el plano en que se conciben trazadas las imaginarias comunes, las cuales por esta razon pueden llamarse *ecuatoriales.*

Esta nomenclatura astronómica es muy exacta, y muy propia para dar claridad á la teoría de las imaginarias exponenciales.

EFECTO. El hecho consiguiente á la accion de la causa y determinado por ella. Las potencias pueden considerarse como *efectos graduales* de los exponentes, en cuanto estos las determinan obrando sobre las raíces, y son indeterminables por las potencias en el mismo algoritmo gradual. Vide *Causa*.

EJE. Tiene esta palabra una acepcion muy ámplia, y significa la direccion ó afeccion real á la cual se refieren las afecciones imaginarias ó direcciones exteriores de la perpendicular y de las oblícuas.

En el algoritmo de la graduacion, el eje de universal referencia es el radio real que se considera como *unidad positiva*.

EMPÍRICO. Lo mismo que experimental ó debido á la experiencia.

Se dice de todo conocimiento en que entra un elemento intuitivo ó sensible; y como las intuiciones de espacio y de tiempo sean la forma necesaria de la extension y del número, la Geometría y la Aritmética tienen una relacion necesaria con nuestra sensibilidad, de que carece el Álgebra, la cual pertenece al entendimiento por su carácter eminentemente conceptual.

La verdadera razon porque la Geometría aparece como mas empírica que la Aritmética, es la mayor claridad intuitiva del espacio que en ella domina. Una y otra, sin embargo, no tienen de empírico más que la forma pura de toda experiencia.

EQUIANGULAR (irradiacion). Aquella cuyos elementos lineales consecutivos forman entre sí ángulos iguales. La irradiacion equiangular cuya suma es cero, es tambien equilátera: sus elementos son verdaderos radios, y puede ser desenvuelta en un polígono regular.

ESCALENA. Los geómetras antiguos llamaban así á la hipérbola trazada por un plano no paralelo al eje del cono. La que es trazada por un plano paralelo, se llama *equilátera*. Estas denominaciones son tomadas de la naturaleza del triángulo que forma el eje de la hipérbola con las generatrices del cono.

ESFÉRICA (exponencial). Aquella que representa una recta trazada fuera del plano del ecuador. Estas exponenciales son imaginarias por su raíz y por su exponente.

ESPACIO. Intuicion pura que es condicion transcendental de la percepcion de los objetos como exteriores á nosotros y exteriores unos á otros. El espacio es incomprensible é indefinible como *cosa en sí*; y de él no podemos tener más que un concepto transcendental, en cuanto le consideramos como forma necesaria *á priori* de la percepcion exterior: no podemos, con efecto, percibir las cosas como extensas ó figuradas, sino en cuanto están determinadas en el espacio. Aunque la indefinibilidad del espacio no obsta á la creacion y desarrollo sistemático de la Geometría, que no es transcendental en sí misma, el concepto que de él forma la Estética transcendental es necesario para establecer el verdadero fundamento crítico de la evidencia y certeza demostrativa de las verdades geométricas.

ESTÁTICA (irradiacion). Aquella que con sus elementos lineales representa un sistema de fuerzas en equilibrio. La suma de la irradiacion estática es cero. Cada elemento lineal es igual y contrario á la suma dinámica de todos los demás.

ESTÉTICA. Aquella parte de la Filosofía del espíritu humano que trata de la sensibilidad. La Estética transcendental no estudia los hechos sensibles en sí mismos, sino las condiciones formales de toda percepcion, que son el espacio y el tiempo.

Tambien se llama *estético* todo lo que pertenece ó de algun modo se refiere á la sensibilidad humana.

EVOLUBILIDAD. Posibilidad de desarrollo potencial. Es lo mismo que *potencia-*

lidad. Se conciben como evolubles todas las cantidades. La unidad como tal es inevoluble porque no es cantidad, ni aún siquiera tiene evolubilidad cualitativa cuando es positiva: porque esta cualidad se considera como término absoluto é invariable de todas las demas evoluciones cualitativas.

EVOLUBLE (radio). El radio imaginario que se considera como raíz ó primera tésis de una evolucion. Cuando el radio evoluble es la unidad negativa, no hay evolucion propiamente dicha, sino *oscilacion* de la region negativa á la positiva y de esta á aquella. Esta oscilacion podria considerarse como una evolucion máxima, y bajo este punto de vista la unidad negativa es una raíz eminentemente evoluble, y así resulta que su concepto cualitativo es enteramente opuesto al de la unidad positiva que es inevoluble bajo el concepto de cualidad.

EVOLUCION. Lo mismo que desarrollo potencial. Expresa mas particularmente el desarrollo *progresivo* ó el que procede de la raíz á la potencia: el desarrollo regresivo ó que procede de la potencia á la raíz, se llama *involucion*.

El desarrollo potencial, en las rectas reales, es siempre longitudinal: la segunda potencia de una recta no es una superficie, ni su tercera potencia es un sólido. La evolucion en las imaginarias es giratoria, en cuanto depende de su argumento ó coeficiente cualitativo, y longitudinal por lo que respecta al módulo que siempre es real.

La palabra *evolucion* es sumamente propia para expresar esta mocion contínua de la graduacion cualitativa.

EXPLÍCITA (representacion). Aquella que es irrealizable en su region propia, como el producto de dos rectas es explícito en un plano, y el de tres rectas en un sólido. Los productos binários que no son realizables en un plano, sino en una recta, y los ternarios que no lo son en el sólido, sino en el plano, quedan como envueltos ó implicados en una region inferior y llevan el nombre de *implícitos*.

La teoría de los productos implícitos es una parte integrante de la teoría de las imaginarias. Los productos implícitos son siempre imaginarios.

EXPONENCIAL (imaginaria). Toda expresion cuyo exponente es imaginario. Cuando la raíz es real, la exponencial es plana y gira en el ecuador, como las raíces imaginarias comunes con exponente real; cuando son imaginarios el exponente y la raíz, la exponencial es esférica y se desenvuelve fuera del plano del ecuador.

EXTIRPACION. Acto de separar una ó más raíces de una ecuacion, dividiendo su primer miembro por el primero de la ecuacion de aquella ó aquellas raíces. Esta operacion ordinaria rebaja la ecuacion en tantos grados cuantas son las raíces extirpadas. La ecuacion complementaria que se forma del cociente carece de todas las raíces extirpadas.

Tratándose de raíces, la palabra *extirpacion* tiene un significado natural y propio. Lo que ordinariamente se llama *eliminacion* se refiere á las incógnitas de un sistema de ecuaciones, y la operacion que ella expresa nada tiene de comun con la supresion de una ó varias raíces de una sola ecuacion.

F

FACTORIAL (forma). Es la que recibe un producto binómio ó polinómio cuando aparecen explícitos todos sus factores. La forma factorial en cuanto á ella se reduce la forma sumatoria de una ecuacion envuelve la resolucion de esta; puesto que cada factor diferente encierra una ecuacion elemental de una raiz diferente.

En las obras de Wronski y de otros matemáticos modernos, el adjetivo substantivado *factorial* tiene una significacion mas determinada. Las *factoriales* son combinaciones productivas de factores sometidos á una ley de incremento ó decremento. En este sentido se llaman factoriales las formas 1, $1\cdot2$, $1\cdot2\cdot3$, $1\cdot2\cdot3\cdot4$, $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$,.....; que afectan los denominadores en muchas séries de importante aplicacion.

FENÓMENO. Lo que aparece, lo que se presenta, lo que es objeto de la intuicion empírica. Las Matemáticas puras, en cuanto prescinden de toda materia empírica en la intuicion, no pueden tener por objeto los fenómenos, sino la forma pura de ellos.

G

GIRATORIA (evolucion). La que es propia de las raíces imaginarias: estas, en sus diversas tésis ó mociones graduales, van determinando posiciones equiangulares, cuyo número y sucesion periódica depende del exponente de la graduacion. Cada período completo constituye un *giro*.

GNOMON. Significa lo mismo que *escuadra:* tambien expresa el *estilo* ó punta que se levanta perpendicularmente sobre un plano para la construccion de los horarios solares, que ha dado el nombre á la ciencia ó al arte de esta construccion.

Los geómetras antiguos llamaban *gnómon* á lo que queda de un cuadrado despues de restar de él el cuadrado de una de las partes en que se concibe dividido el lado; esto es, á la suma de los rectángulos complementarios y del cuadrado de la otra parte (ordinariamente la parte menor). Vide *Complementarios (rectángulos)*.

El *gnómon* sólido consta de seis paralelepípedos y del cubo de una de las partes del lado. La suma de los tres paralelepípedos oblongos y de este mismo cubo constituyen un *gnómon* sólido parcial.

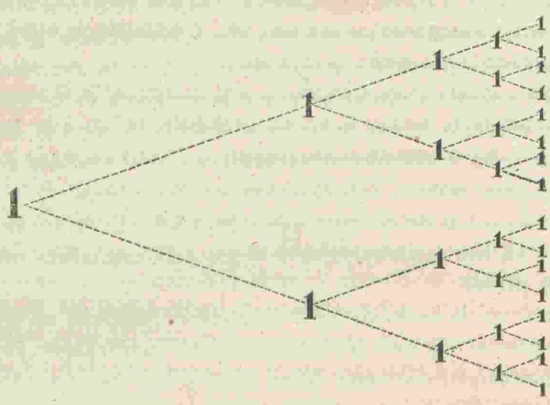
GRADO. Cada uno de los momentos de la evolucion potencial así progresiva como regresiva. Los grados se expresan por números que se llaman exponentes ó índices.

Fuera muy conveniente distinguir de un modo gráfico los exponentes verdaderamente graduales, escribiéndolos en la parte inferior de la raíz, siguiendo colocados en la superior los que no tienen mas oficio que expresar el número de factores iguales que engendran un producto. Así a^3 equivaldria á $a\times a\times a$; y a_3 seria a elevada á la *tercera potencia*. Respecto de exponentes radicales no habria que hacer novedad, porque estos no se conciben en el algoritmo de la produccion, donde no hay propiamente raíces sino factores. Los exponentes factoriales son números *cardinales*, y los graduales son *ordinales*.

GRADUACION. Es el tercero de los algoritmos fundamentales, y corresponde al concepto de causalidad. La graduacion de las cantidades es su determinacion en la série natural numérica segun la relacion que ellas tienen con la unidad positiva, y la ley de evolucion expresada por el exponente.

La graduacion supone que la cantidad que le está sometida (raíz) es única, y excluye por consiguiente toda idea de concurso factorial con otra cantidad igual, mas ó menos veces repetida como factor, para engendrar la potencia. La graduacion es, por consiguiente, un algoritmo muy distinto del de la multiplicacion, el cual exige por lo menos una dualidad de factores. El caso particular en que estos dos factores son cuantitativa y cualitativamente iguales no es una graduacion verdadera de ninguno de ellos, sino un producto ordinario de ambos: la superficie cuadrada que representa este producto, no es un grado ó una potencia de ninguno de los factores lineales.

El exponente gradual no expresa un número de factores iguales concurrentes á la formacion de la potencia considerada como producto, sino el grado ó posicion de la potencia con respecto á la raíz en la forma numérica que es concebida como un resultado de una síntesis sucesiva de unidades, á la cual es enteramente extraña toda idea de produccion ó multiplicacion. El número 4, considerado como producto, puede llamarse con propiedad geométrica el cuadrado de 2; pero no es su segunda potencia porque resulte de multiplicar 2 por 2, sino porque 4 es el término á que alcanza en la série natural numérica un segundo grado de evolucion á que se somete el número 2, suponiendo que su primer grado ó tésis respecto de la unidad es 2. El primer grado de evolucion es el de la raíz que se refiere á la unidad por el número de sus propias unidades: en el segundo, cada unidad de la raíz se desenvuelve en otras tantas unidades como fueron las de la raíz: en el tercero, cada unidad del segundo se desenvuelve en otras tantas, etc., en esta forma:



Cada grado es la síntesis de tantas unidades reproducidas por cada unidad del grado anterior cuantas unidades encierra la raíz; y esta síntesis se concibe como independiente de toda idea de multiplicacion factorial. El sistema entero representa la generacion de los números, no por una *suma* ó síntesis succesiva de la unidad á un número ya constituido, ni por una produccion ó *multiplicacion* de dos números ya determinados en la escala natural, sino por una reproduccion contínua de la unidad con arreglo á la ley expresada por el exponente y á la relacion que la raíz guarda con la unidad. Se ve aquí un desarrollo, una evolucion causada por el exponente sobre la raíz, la cual, sometida á esta causa, da de sí *cuanto puede* (potencia) segun su relacion con la unidad ó segun las unidades que contiene.

Vése asimismo que la unidad, punto de partida y término de la relacion, es por esencia inevoluble, como que corresponde á un grado nulo de evolucion; que la raíz, primer número constituido por la síntesis de la unidad, es tambien el primer grado de evolucion numérica ó cuantitativa, esto es, la primera potencia. La segunda potencia, impropiamente llamada *cuadrado*, reproduce en cada unidad de la raíz la misma generacion numérica que la de la raíz respecto de la unidad: las demas potencias siguen la misma ley que las que preceden.

Esta generacion numérica, que puede compararse á una *germinacion* de la raíz bajo el influjo causal y ley determinante de un exponente, es original é irreducible á ningun otro modo de generacion algorítmica. En la concepcion pura y abstracta de este algoritmo, tal como debe tratarlo el Algebra, no cabe llamar á la elevacion á potencias *un caso particular de la multiplicacion,* por mas que multiplicando realicemos abreviadamente esta reproduccion contínua de la unidad, por la que se engendra la potencia; así como no es dado confundir la multiplicacion con la suma, á pesar de que multiplicando realicemos con mas prontitud la síntesis de números ó sumandos iguales. Aunque la operacion práctica aritmética sea en rigor una para todos los algoritmos, puesto que todos ellos se realizan por la síntesis ó suma mas ó menos brevemente, los tres algoritmos representan tres conceptos independientes, especiales é irreducibles, de ninguno de los cuales puede decirse que es un caso particular de cualquier otro. (Vide *Algoritmo.*) Tan lejos está la graduacion de ser un caso particular de la multiplicacion, que mas bien deberia mirarse á esta, si no como un caso particular, al menos como participando á la vez de la doble naturaleza de la graduacion y de la suma, como correspondiente que es al concepto de la *reciprocidad,* el cual, aunque original y puro como los otros, neutraliza y comprende en una síntesis los conceptos de causa y de substancia á que corresponden la graduacion y la suma.

Tanto en el texto como en este Glosario, insisto mucho sobre la especialidad del algoritmo gradual, porque en ella se funda en gran parte la teoría de las imaginarias, las cuales tienen un orígen esencialmente radical.

H

HIPÓTESIS. Es término de nomenclatura lógica y significa un juicio del cual depende ó es consecuencia otro juicio: este juicio dependiente lleva el nombre correlativo de *tésis.* Hipótesis y tésis equivalen respectivamente á condicion y condicionado, ó antecedente y consiguiente.

En la teoría gradual ó potencial el exponente es la hipótesis, de la cual dependen todos las potencias, que por esta razon tambien se llaman tésis, y se cuentan en el mismo órden que aquellas: la raíz es la primera tésis ó primera potencia, y la unidad puede considerarse como la tésis cero de una raíz.

Las potencias geométricas de raíces lineales imaginarias son verdaderas *posiciones* (tésis) de la raíz que gira; y esta circunstancia justifica plenamente el uso que hacemos de esta voz.

HIPOTÉTICO (juicio). El que expresa una relacion de dependencia ó consecuencia entre dos juicios (hipótesis y tésis).

La síntesis particular que el entendimiento realiza en los juicios hipotéticos nos revela el concepto de *causa,* por el cual el mismo entendimiento de tal manera relaciona los fenómenos que se suceden en el tiempo, que los que concibe como efectos los ve como dependientes de los que concibe como causas y á estas las concibe como independientes de aquellos.

En el algoritmo gradual intervienen estos conceptos siendo el exponente la causa determinante de la evolucion, y la potencia el efecto desenvuelto. El exponente es indeterminable por la potencia, y por consiguiente independiente de ella dentro del algoritmo gradual.

La raíz es la materia numérica ó cuantitativa sobre que se ejerce la causalidad evolutiva del exponente: sin esta condicion fuera imposible toda graduacion. Vide *Algoritmo, causa y efecto.*

I

IMAGINARISMO. Cualidad propia de las cantidades imaginarias. Coincide esta palabra con la voz *indireccion*, que explica la verdadera naturaleza de estas cantidades, sobre todo cuando tienen una representacion geométrica.

La necesidad de expresar de un modo general la cualidad imaginaria, abona el uso de esta palabra en la teoría que la explica, á pesar de lo que pueda haber en ella de neologismo.

INDIRECTA (cantidad). Aquella que se refiere á otra por una afeccion ó posicion externa distinta de la de ella. Las cantidades imaginarias son *indirectas* respecto de las reales y viceversa. El nombre de *indirectas* les conviene con mas propiedad que el de imaginarias. Las cantidades negativas no son indirectas respecto de las positivas, porque se hallan comprendidas en la misma direccion externa que aquellas.

INEFABLE. Voz muy propia para significar aquellas relaciones que no pueden ser expresadas ó *dichas* por ninguno de los sistemas de signos convencionales admitidos en la ciencia matemática. Entre el diámetro y la circunferencia existe sin duda una relacion geométrica; pero esta relacion es *inefable* ó indecible.

INEVOLUBILIDAD. Incapacidad de evolucion que tiene la unidad. La unidad como tal no puede ser desenvuelta potencialmente. La unidad positiva es incapaz de evolucion bajo el doble concepto de la cantidad y de la cualidad. La unidad negativa es inevoluble bajo el concepto de cantidad, y eminentemente evoluble bajo el de la cualidad.

INTERCALACION. Interposicion de las raíces de una irradiacion entre las de otra. Cuando las irradiaciones son perfectas ó regulares, y tienen un elemento comun, la intercalacion ofrece casos de coincidencias periódicas, cuya ley está determinada por la relacion de los exponentes de las irradiaciones. Dos irradiaciones de un mismo grado impar referidas á la unidad positiva y á la negativa, carecen de coincidencia y tienen una intercalacion tan perfecta, que lleva consigo la conjugacion de todas las raíces: si el grado es par, todas coinciden. Cuando las irradiaciones son de un mismo grado par ó impar, es imposible que tengan coincidencias periódicas: todas las raíces coinciden si tienen un elemento comun, ó ninguna de ellas si no le tienen.

INTERADICAL (signo). El que media entre los radicales que expresan graduaciones regresivas á que succesivamente se somete una cantidad. Esta clase de signos deben tenerse muy en cuenta para el conocimiento de la simetría que pueden tener las imaginarias afectas.

INTRARADICAL (signo). Por oposicion al extraradical es el que inmediatamente afecta á la cantidad de que se extrae una raiz. En las imaginarias este es constantemente el signo —, el cual afecta siempre á la unidad, cuando la imaginaria está descompuesta ó modulada.

INTUICION. Literalmente *vision.* Es voz escolástica de un uso tan antiguo como universal. Intuicion equivale á acto de percepcion, no solo por el sentido de la vista, sino por cualquier otro. La Filosofía crítica da á esta palabra una acepcion muy determinada en cuanto considera la parte que la intuicion tiene en el conocimiento de las cosas. No puede suponerse que conocemos verdaderamente una cosa, si de ella no tenemos, ante todo, una representacion cualquiera sensible, una intuicion; y si el pensamiento no sobreviene tomando á esta representacion como medio para concebir una cosa dada en la intuicion. Ni la intuicion sola, ni el pensamiento solo son verdadero conocimiento de las cosas.

Esta intuicion, que la Estética transcendental considera necesaria para el conocimiento de cosas reales, es la intuicion empírica ó sensible, que es la que se refiere á un objeto por medio de la sensacion ó modificacion de los sentidos. El objeto entonces toma el nombre de *fenómeno.* Pero, como formas necesarias *á priori* de toda intuicion empírica, es necesario concebir al espacio y al tiempo, representaciones inmanentes de nuestro espíritu; no percibidas por ningun sentido, no debidas á la experiencia, que nada tienen de sensible ni de fenomenal, y que constituyen por lo tanto dos intuiciones *puras* en que está fundada como en su condicion transcendental la posibilidad de todo fenómeno exterior é interior. Sin la intuicion pura de *espacio* no podriamos percibir los cuerpos como extensos, ni como divisibles, ni como impenetrables; y el mundo exterior, tal como ahora nos aparece, dejaria de existir para nosotros: sin la intuicion de *tiempo* los fenómenos de la conciencia, tan reales como los del mundo exterior, dejarian de ser *succesivos*, y quedaria borrado este mundo de ideas y pensamientos, de afecciones y resoluciones, que llevamos dentro de nosotros.

Este concepto superior y profundamente transcendental en la teoría y en la crítica del conocimiento humano nos es dado por la *Estética transcendental*, primera é importantísima parte de la Filosofía crítica del espíritu.

Las determinaciones puramente formales (no sensibles) del espacio y del tiempo son los objetos propios de la Geometría y de la Aritmética, las cuales revelan en la evidencia intuitiva de sus principios (*theoremata*) y en la indefectible universalidad de sus demostraciones, la naturaleza pura é independiente de todo empirismo, que es propia de aquellas intuiciones.

Ambas ramas de la Matemática pura son, sin embargo, intuitivas; y se hallan mas cerca de la experiencia, sobre cuya forma especulan, que el Álgebra, que prescinde de esta forma, se eleva á la region del entendimiento y somete la extension y el número á los puros conceptos de *cantidad*, de *cualidad* ó afeccion, de *relacion* algorítmica, y de *modalidad* problemática. El Álgebra no es intüitiva, sino eminentemente conceptual.

La conceptualidad algebráica, aplicándose á las determinaciones intuitivas puras de espacio y tiempo, que son objeto de la Geometría y de la Aritmética, consuma el conocimiento matemático puro.

La Geometría, la Aritmética y el Álgebra, son tres partes necesarias y únicas del todo sistemático llamado MATEMÁTICA PURA.

INVOLUCION. Desarrollo gradual regresivo, ó que procede de la potencia á la raiz; equivale á la operacion ordinaria llamada *extraccion de raices.* La involucion es contraria á la evolucion, y su exponente ó hipótesis es siempre un número quebrado.

IRRADIACION. Sistema de rectas que tienen un punto comun y direcciones diferentes. Cuando las rectas son verdaderos radios, y el ángulo que mide su inclinacion es el mismo entre dos consecutivas, la irradiacion es perfecta y *equiangular.* Esta irradiacion puede desenvolverse en un polígono regular, y expresa la cantidad y cualidad de un sistema análogo de raíces de la unidad. Las irradiaciones imperfectas é irregulares, bien por la diversa longitud de sus elementos, bien por su vária inclinacion, llevan el nombre de irradiaciones con menos propiedad. La simple conjugacion de dos rectas reales puede tambien llamarse irradiacion en esta acepcion general de la palabra.

IRREDUCIBLE (caso). Asi se llama ordinariamente aquel caso particular de la resolucion de las ecuaciones de tercer grado en que las tres raíces que se obtienen aparecen todas con forma imaginaria, y sin embargo son reales. La forma imaginaria algebráica es irreducible á una forma real, como parece que exige la realidad de las raíces.

La aplicacion de esta irreducibilidad es sumamente fácil en la teoría del imaginarismo, segun la cual las raíces son susceptibles de una consideracion dinámica, cuya teoría completa presenta tres casos posibles de equilibrio para tres fuerzas que obran sobre un punto y estando en un mismo plano.

1.º Dos fuerzas iguales neutralizadas por una tercera obrando todas dentro del eje real (caso de tres raíces reales).

2.º Dos fuerzas iguales fuera del eje neutralizadas por una tercera que está dentro del eje (caso de una real y dos imaginarias).

3.º Dos fuerzas desiguales que están en el eje neutralizadas por una tercera que está en el eje. Este último caso es el *irreducible:* la irreducibilidad depende de la desigualdad de las raíces.

L

LATITUD. En la teoría de las imaginarias esféricas, esta palabra tiene una acepcion análoga á la que recibe en Geografía, cuando por ella se expresa el arco de meridiano contado desde el ecuador hasta un punto determinado. En estas exponenciales, cuya forma es $\mathcal{E}^{x+y\sqrt{-1}}$, el término imaginario del exponente expresa con efecto el arco que mide la elevacion de la exponencial sobre el plano en que están trazadas las imaginarias comunes, el cual merece el nombre de ecuador.

LEY. El exponente de un desarrollo potencial merece este nombre tan significativo, por cuanto él regula y gobierna la graduacion fijando el número de grados por que ha de pasar el desarrollo de la raíz para la determinacion de la potencia. El exponente es la ley de la graduacion en el sentido natural y primitivo de esta palabra, que expresa una causacion superior y determinante.

LIMITACION. Concepto del entendimiento por el cual la afirmacion y la negacion son neutralizadas en una síntesis. Tiene lugar este concepto en aquellos juicios en que por una afirmacion incluimos al sujeto en lo que es negacion de un predicado, como cuando decimos: A es no B, ó está positivamente entre las cosas que no son B: y como todo lo que no es B, ó está fuera de B, *limita* realmente al concepto de B, estos juicios se llaman *limitativos* con suma propiedad, y no deben confundirse con los negativos que explica la Lógica ordinaria, en los cuales al decir por ejemplo: A no es B, excluimos á A del predicado B, sin intentar directamente incluirlo entre las cosas que no son B.

Esta forma, en el juicio, constituye un momento especial y propio del entendimiento en la manera de referir uno á otro dos conceptos, y especial y propia debe ser tambien la *cualidad* lógica que por esta forma de juicio se imprime á las cosas juzgadas.

Cuando las categorías de la cualidad se aplican al número y á la extension, es necesario que además de la afeccion positiva y negativa, reconozcamos una afeccion limitativa que los constituya fuera de estas cualidades antitéticas en una region que las limita y las neutraliza. Es necesario concebir la cualidad imaginaria como una necesidad matemática de la realizacion plena y entera de todos los momentos intelectuales en la constitucion de las categorías de cualidad.

El orígen transcendental del imaginarismo está en el concepto de limitacion.

LOGISTICA. Realizacion matemática de todos los conceptos de relacion por los cuales unos números engendran á otros números.

Todo lo que pertenece á la relacion de los números, cualquiera que sea el algoritmo por el que esta relacion se convierta en efectiva generacion numérica, entra plenamente en el dominio de la logística matemática.

LONGITUD. Esta voz tiene una significacion análoga á la geográfica en la teoría de las exponenciales esféricas, en la cual significa el arco del ecuador que separa á un meridiano del que se cuenta como *primero*, que es el que pasa por el extremo del radio real positivo. En la forma de la exponencial esférica $\mathscr{E}^{x+y\sqrt{-1}}$, el elemento real del exponente binómio expresa la longitud.

M

MATERIA (del juicio). Las ideas relacionadas en él. Es voz correlativa de *forma* (del *juicio*), que es la relacion que se establece entre ellas. La Lógica prescinde de la materia de los juicios, y solo considera su forma, puesto que hace abstraccion de todas las diferencias reales que hay en los objetos del conocimiento, atendiendo solo á la verdad de los juicios que podemos pronunciar entre estos objetos, verdad que no depende de las ideas relacionadas, sino de la manera de relacionarlas. Las ideas, como hechos de conciencia, no son verdaderas ni falsas: la verdad ó la falsedad es cosa del juicio, cuya naturaleza es la relacion de esas ideas en la unidad de la conciencia.

De esta indiferencia con que la Lógica mira la materia del conocimiento, nace la universal aplicacion de sus preceptos, y el que ningun género del saber humano, ningun órden de ciencia, pueda substraerse de su amplísimo dominio.

El Álgebra ocupa asimismo un lugar superior respecto de las demas ramas de la ciencia Matemática. Ella prescinde de la diversidad intuitiva de la extension y del número, materia de las relaciones que establece, y es la verdadera *Lógica de la ciencia de la cantidad.*

MERIDIANA (exponencial). Es la imaginaria comun con exponente imaginario puro. Su forma es $(\mathscr{E})^{\sqrt{-1}}$, suponiendo siempre que $\mathscr{E}$ representa una imaginaria comun. El giro de estas exponenciales se verifica en un plano que se eleva perpendicularmente sobre el ecuador.

MERIDIANO (primer). El que se eleva perpendicularmente sobre el ecuador partiendo de la extremidad del radio que representa la unidad positiva. Todas las exponenciales meridianas se conciben como desenvueltas en el primer meridiano, siendo traidas á la unidad positiva por un exponente cero, y levantadas en seguida en este meridiano por el elemento imaginario del exponente, puesto que siempre se tiene

$$\varepsilon^{\sqrt{-1}} = \varepsilon^{0+\sqrt{-1}}.$$

MOCION. Transicion instantánea de una tésis á otra tésis. Un desarrollo gradual es una série de mociones, y tantas son estas, como tésis menos una indica el exponente del desarrollo. En el lenguaje comun algebráico suele decirse, por una consideracion análoga, que en la elevacion á potencias intervienen tantos actos de multiplicacion como unidades menos una tiene el exponente de la potencia.

Las mociones tienen lugar propiamente en la evolucion progresiva de las imaginarias, en la cual se verifica una transicion del radio evoluble por una série de posiciones ó tésis equiangulares.

La mocion excluye toda idea de movimiento como determinacion empírica ó fenomenal.

MODALIDAD. La modalidad de los juicios es el grado de fuerza con que se relacionan el sujeto y el predicado. Considerados los juicios bajo este punto de vista de su forma, se dividen en *problemáticos*, *asertóricos* y *apodícticos*, segun que en ellos se afirma una relacion posible, existente ó necesaria entre el sujeto y el predicado.

En la resolucion de los problemas matemáticos, así como en la demostracion de los teoremas, no tienen con efecto igual valor las proposiciones. A puede ser igual á B, A es igual á B, y A es necesariamente igual á B.

De la modalidad como forma del juicio se desprenden tres categorías, cuya aplicacion matemática es sumamente interesante, aunque algo extraña al objeto de esta obra; y son: POSIBILIDAD é IMPOSIBILIDAD, EXISTENCIA y NO EXISTENCIA, NECESIDAD y CONTINGENCIA. Véase el FRAGMENTO.

MODULACION. Descomposicion de una forma algebráica ó aritmética en dos factores que expresen independientemente la cantidad y la cualidad. La forma así descompuesta se dice que *está modulada*.

MÓDULO. En las imaginarias de la forma $A \pm B\sqrt{-1}$ se llama *módulo* á la expresion radical $\sqrt{A^2 + B^2}$, que expresa el valor cuantitativo de la imaginaria, prescindiendo de toda idea de cualidad, posicion ó afeccion. Si la imaginaria es una recta, el módulo es su magnitud absoluta; si es un número, el módulo expresa su valor numérico ó aritmético.

El módulo de las imaginarias de la forma $A \pm B\sqrt{-1} \pm C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ es la expresion radical $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Al módulo corresponde como cofactor el argumento expresivo de la cualidad. Vide *Argumento*.

MOMENTÁNEA (posicion). La que es propia de las rectas y de los planos en cuanto son perpendiculares ó paralelos. La posicion momentánea no ocupa sino un instante ó momento indivisible de la duracion en que se concibe realizada la evolucion giratoria. El círculo y la parábola pueden llamarse secciones cónicas momentáneas, atendida la posicion transitoria del plano que las traza: la elipse y la hipérbola escalena no son momentáneas.

MOMENTUM (ó momento). Resultado complexo de la intensidad y de la direccion de una fuerza en la produccion de un efecto dinámico. La intensidad de las fuerzas cae bajo la categoría de cantidad, y su direccion bajo la de cualidad. En la consideracion matemática de las fuerzas estos dos conceptos son inseparables aunque distintos.

N

NEGACION. Momento intelectual por el que excluimos en el juicio un concepto de otro concepto. Este segundo momento es contrario al primero, la afirmacion, por el cual incluimos un concepto en la esfera de otro. Vide *Afirmacion.*

La negacion puede tambien considerarse como categoría intelectual opuesta á la realidad, y que nos sirve para pensar las cosas como contrarias á las que se establecen como *reales* (acepcion lógica).

NEGATIVA (cantidad). Aquella que se concibe como contraria á la positiva. Ninguna cantidad es negativa sino en cuanto se refiere á otra que se supone positiva como contraria á ella y destructiva de ella. Estas denominaciones son tan relativas, que lo afirmativo puede llamarse á su vez negativo de lo negativo.

Cuando en un problema ó consideracion teórica de la cantidad hay lugar á esta oposicion de afecciones, ninguna de ellas tiene el privilegio de ser constituida como positiva; pero fijada como tal una de ellas, segun los fines impuestos por la consideracion concreta, es necesario que la otra afeccion contraria se considere como negativa.

La teoría de las cantidades negativas nada tiene de misterioso ó paradógico, cuando se distinguen bien los conceptos de cantidad y cualidad, y se refieren á la primera las cuestiones que ordinariamente se proponen acerca de cantidades negativas.

NEUTRALIDAD. La síntesis intelectual de dos conceptos antitéticos. Sobre la tésis y la antítesis se levanta un concepto superior que las neutraliza en una síntesis.

En los cuatro grupos de las categorías intelectuales es de notar que una de ellas es la síntesis que neutraliza las dos antitéticas.

Así la *totalidad* neutraliza la unidad y la pluralidad; la *limitacion* es síntesis de la realidad y de la negacion; la *reciprocidad* resume la substancia y la causa, y la *necesidad* es síntesis de la posibilidad y de la existencia.

En sus aplicaciones matemáticas tienen estos conceptos la misma neutralizacion. Las cantidades imaginarias presentan un notable ejemplo de neutralidad cualitativa por la síntesis de las dos afecciones reales antitéticas entre las cuales median, sirviéndoles de transicion.

NÈXUS. No encuentro voz mas propia para expresar el punto en que se verifica la síntesis de dos elementos sumatorios. Cuando estos elementos son geométricos con direcciones distintas ó idénticas, el nèxus supone que tienen una disposicion continuativa. En la expresion $A \pm B\sqrt{-1}$ ó $A \pm B$, los signos que expresan la síntesis forman un nèxus algebráico que corresponde al geométrico.

NORMAL. Así se llama generalmente la recta perpendicular. El carácter momentáneo y absoluto de la normalidad tiene su representante en el imaginarismo, el cual es síntesis perfecta ó neutralizacion de las direcciones positiva y negativa.

NÚCLEO. El polígono regular interior determinado por los lados del asterístico.

O

ORGANISMO. Acuerdo entre la variedad y la unidad; entre las partes y el todo. El organismo es una coordinacion mútua en que todo se refiere á todo, y en que las partes se ligan y se sostienen unas á otras, como en las partes de un ser vivo que por esto se llama *organizado*. La armonía en el organismo expresa la variedad en la unidad; la unidad es la nocion primera ó el principio donde deben buscarse los elementos de la variedad.

Tal es la ciencia matemática en su constitucion intelectual, la cual consiste en la vária determinacion que se va realizando en una intuicion única; la de espacio para la Geometría, y la de tiempo para la Aritmética. Pero sucede que esta unidad de la intuicion primitiva es restablecida en medio de la variedad de sus determinaciones por la perfecta aplicacion de las formas conceptuales del entendimiento: cuando ellas son plenamente realizadas, reaparece la unidad dominando la diversidad de los elementos.

Las teorías matemáticas son verdaderos organismos para el entendimiento.

La teoría del imaginarismo es quizá la mas orgánica que puede resultar de la aplicacion del entendimiento á la intuicion de espacio y de tiempo.

Tambien se llama *organismo de raíces* su disposicion regular con dependencia de la naturaleza numérica de los exponentes.

ORÍGEN. Es aquel punto á que se refieren en general las cualidades positiva, negativa é imaginaria. El punto es orígen en Geometría, el cero lo es en Aritmética. En la disposicion continuativa de los sumandos el nexo de estos está fuera del orígen: en la disposicion dinámica el nexus de todos ellos está en el orígen; entonces hay una irradiacion y un verdadero dinamismo.

ORTOGONAL. Posicion de las rectas ó de los planos que se cortan unos á otros formando ángulos rectos. Las rectas y planos ortogonales están constituidos en una posicion absoluta y momentánea, por la cual merecen el nombre de *ejes*, á los cuales son referidas todas las posiciones en un plano para las rectas y en el espacio para los planos.

Los ejes ortogonales son dos: los planos ortogonales son tres necesariamente. No hay sólidos ortogonales.

P

PARÓDICO (término). Se llaman así todos los de una ecuacion afecta en que la incógnita lleva un exponente inferior en grado al que marca el grado de la ecuacion. Este vocablo, de un uso frecuente entre los analistas antiguos, debiera ser rehabilitado en gracia de la mayor expedicion y facilidad con que podrian enunciarse algunas propiedades notables de las ecuaciones en general.

PERIMÉTRICO (órden). Aquel en que se recorren los lados ó los radios oblícuos de un polígono, segun su disposicion continuativa desde el primero hasta volver al primero. Las raíces imaginarias (incluyendo entre ellas las reales) contadas segun su órden perimétrico forman siempre una progresion geométrica.

PERIODISMO. Reproduccion regular de una raíz imaginaria al cabo de un número determinado de tésis.

PLURALIDAD. Concepto del entendimiento que nos sirve para conocer las cosas como muchas ó como mas de una. Opónese á la unidad, como los juicios particulares se oponen á los universales.

El concepto de pluralidad, así como el de unidad y el de totalidad, es necesario para formar la nocion de número. La unidad por sí sola no es número, como no se la conciba como totalidad de pluralidad de unidades inferiores: $\frac{4}{4}$ es verdaderamente *un número de cuartas partes*.

Tan esencial es la *pluralidad* en los juicios particulares, que sin ella no es lógicamente posible la inclusion parcial (en parte indefinida) del sujeto bajo la esfera del predicado. No se puede decir, por ejemplo, que *algunos hombres son sabios* sin concebir á los hombres como *muchos*.

POLAR (imaginaria). Es la imaginaria típica ó fundamental respecto de las que se elevan en el espacio por círculos meridianos. Esta acepcion es geográfica.

La forma general de la imaginaria polar es $\left(\sqrt{-1}\right)^{\sqrt{-1}}$.

POLIGONISMO. Disposicion continuativa de varias rectas. Un poligonismo que vuelve sobre sí mismo ó cuya suma es cero, constituye un *polígono*. La expresion algebráica de un poligonismo es un polinómio cuyos varios signos sumatorios corresponden á los nêxus de las rectas elementales.

PREDICADO. Lo que se dice del sujeto en el juicio, lo que se atribuye. El predicado y el sujeto son dos conceptos cuya intervencion es necesaria en todo juicio categórico, que es en el que hay verdadera predicacion. El predicado siempre es un concepto, porque denota lo que el entendimiento pone en el acto de juzgar, que es su funcion propia: el sujeto puede ser una intuicion ó un concepto; solo en el primer caso se refiere el juicio á la realidad de las cosas, puesto que en su conocimiento debe entrar algun elemento intuitivo.

PRINCIPALES (conos). Los dos verticales, superior é inferior, que considera la teoria ordinaria de las secciones cónicas. En ellos solamente considera las secciones cuando tiene por absurdo los resultados imaginarios que en ella son tan frecuentes.

PRODUCCION. Algoritmo fundamental é irreducible que conduce á la generacion de un número llamado *producto*, por la recíproca accion sumatoria de otros dos que se llaman *factores*.

Este algoritmo, que no es otro que el de la multiplicacion, corresponde á la categoría de *reciprocidad* que es una de las de *relacion*. Véase el FRAGMENTO.

PROGRESIVIDAD. Propiedad que tienen todas las raíces reales é imaginarias de una ecuacion pura de formar una perfecta progresion geométrica, cuando se las cuenta por su órden perimétrico.

La progresion geométrica en que se disponen estas raíces, es esencialmente circular.

PURO. Esta palabra significa en general todo aquello que no es empírico ó que está libre de la materia de la experiencia.

El espacio y el tiempo son intuiciones *puras*, en cuanto son concebidos como formas *à priori*, ó condiciones transcendentales de toda intuicion empírica.

Las categorías son conceptos *puros*, porque son formas intelectuales necesarias *à priori* para el conocimiento de las cosas como objetos de la experiencia.

La razon humana es *pura* cuando expecula sobre principios que no son debidos á la experiencia.

Por último, la Matemática es *pura* cuando concibe las cosas que mensura ó numera despojadas de sus cualidades físicas ó empíricas, y reducidas á la mera forma de su intuicion, espacio y tiempo.

R

REALIDAD. Categoría intelectual por la cual afirmamos las cosas como subsumidas ó sometidas á un concepto. Esta es la funcion propia del entendimiento en todos los juicios afirmativos respecto de que en ellos el sujeto se considera bajo la esfera del predicado. Vide *Afirmacion*.

Cuando el concepto de realidad se traduce en cualidad de los objetos matemáticos, corresponde á la afeccion *positiva* de los números y magnitudes. Una recta positiva puede ser cualquiera que concebimos bajo una direccion determinada, con tal que la direccion opuesta se considere como negativa, y las indirecciones ó direcciones exteriores sean tenidas como imaginarias.

Aquí conviene notar que la realidad lógica que voy explicando debe distinguirse mucho de la realidad matemática que se opone al imaginarismo. Esta última es puramente nominal, y tan impropio es el nombre de *reales* dado á las cantidades positivas y negativas, como el de *imaginarias* dado á las demás.

RECIPROCIDAD. Se llama tambien *comunidad*, y significa la causalidad de una substancia en determinacion mútua con otra. Este concepto neutraliza en una síntesis los dos conceptos extremos de la substancia y de la causa. El concepto del *influjo* supone que dos substancias son cada una de ellas causa de las modificaciones de la otra.

La categoría de la reciprocidad está de acuerdo con la forma del juicio disyuntivo que le corresponde en la tabla de las funciones lógicas del entendimiento. Véase FRAGMENTO.

La reciprocidad entra como esencia en la relacion algorítmica de la produccion ó multiplicacion: los dos factores son recíprocos, respecto de que cada uno de ellos es la causa determinante de la modificacion sumatoria del otro. Vide *Algoritmo* y *Produccion*.

REGRESIVA (evolucion). Es lo mismo que involucion ó extraccion de raices. Vide *Involucion* y *Regresivo*.

REGRESIVO (algoritmo). El que tiene por objeto determinar uno de los elementos generadores de un número, dado este número y el otro elemento generador. Los algoritmos regresivos son correlativos y contrarios á los progresivos, como se ve en la tabla siguiente:

	ALGORITMOS PROGRESIVOS.		ALGORITMOS REGRESIVOS.	
SUMA..........	Adicion......	$A+B=C$.	Substraccion....	$C-B=A$
PRODUCCION......	Multiplicacion..	$A\times B=C$.	Division.......	$C:B=A$
GRADUACION.....	Evolucion.....	$A^B=C$.	Involucion......	$\sqrt[B]{C}=A$

La generacion progresiva de los números es indefinida en su posibilidad, y su procedimiento sintético siempre conduce á resultados determinables en la série natural numérica, constituida por la síntesis succesiva de la unidad; pero la generacion regresiva, que parte de cualquier número de esta série, buscando análiticamente los elementos que lo engendraron, puede tener necesidad de salir de esta série para determinar estos elementos. Así la substraccion puede conducir á los números *negativos*, la division á los *fraccionarios* y la involucion á los *irracionales*.

Los números *imaginarios*, aunque debidos al algoritmo regresivo de la involucion, no son irracionales sino en cuanto lo sea su módulo ó valor cuantitativo. El imaginarismo no es irracionalidad algorítmica, sino imposibilidad cualitativa de expresion por los solos signos de $+$ y $-$.

RELACION. La significacion crítica de esta palabra es puramente lógica. La relacion es la dependencia entre los términos ó ideas que son materia del juicio.

Tres son estas relaciones fundamentales:

La subordinacion de un sujeto á un predicado: como A es B.

La subordinacion de un sujeto á uno de varios predicados incompatibles: como A es B, ó C, ó D.

La dependencia de un juicio respecto de otro juicio: como si A es B, C es D.

De donde resultan las tres clases de juicios *categóricos, disyuntivos é hipotéticos*, con cuyas funciones lógicas están de acuerdo las tres categorías de relacion, *substancia* y *accidente*, *reciprocidad*, y *causa* y *efecto*.

La traduccion matemática de estas tres categorías da orígen á los tres algoritmos fundamentales, *suma*, *produccion* y *graduacion*, cuyo conjunto constituye la logística matemática.

RESULTANTE. Así se llama en un sistema de fuerzas la nueva fuerza á que da orígen la suma dinámica de sus elementos.

S

SCHÊMA (pronúnciese Squema). Voz griega que significa forma, y tambien figura. En el lenguaje crítico significa la condicion formal y pura de la sensibilidad á la cual se restringen en su uso los conceptos intelectuales; esto es, el espacio y el tiempo en cuanto limitan y determinan la generalidad necesaria de los conceptos.

La Geometría y la Aritmética son schêmáticas porque contemplan determinaciones figuradas en el espacio, ó números que son schêmas de la cantidad determinada en el tiempo por la adicion succesiva de la unidad consigo misma. Las palabras schêma y schêmática se usan en esta obra en un sentido menos crítico, para dar á entender algunas determinaciones importantes del espacio; como la representacion de los ejes ortogonales de los planos ortogonales, etc.

SECUNDARIA (raiz). Así llamo á la raíz de una raíz de la unidad. Un sistema de raíces secundarias del mismo grado que el principal se refiere á cualquiera de las de este considerada accidentalmente como real; y en este caso son las mismas del sistema principal multiplicadas por la expresion argumental del arco de aquella raíz.

SIMETRÍA. Disposicion de las raíces imaginarias, que siendo iguales en cantidad, tienen una misma distancia angular por cima y por bajo del eje real. La simetría supone comunidad ó identidad de direccion horizontal, combinada con la oposicion de direcciones verticales. $A \pm B\sqrt{-1}$, es la expresion de dos imaginarias simétricas cuya proyeccion comun horizontal ó real es A, y cuyas proyecciones verticales opuestas ó conjugadas son $\pm B\sqrt{-1}$.

La simetría puede concebirse referida al eje vertical, en cuyo caso tiene por expresion $A\sqrt{-1} \pm B$, ó á cualquiera eje oblícuo considerado accidentalmente como real.

A lo que nosotros llamamos simétrico, llaman generalmente *conjugado*. Lo conjugado es para nosotros la oposicion absoluta de direcciones, que entra como elemento constituyente de la simetría y que á veces puede tener una expresion independiente, como $\pm A$, $\pm B\sqrt{-1}$.

Atendida la significacion geométrica de la palabra, es mas propia la denominacion de *simétricas* que la de *conjugadas* para expresar raíces de la forma $A \pm B\sqrt{-1}$.

SINCATEGOREMÁTICO (ó **sincategórico**). Lo perteneciente á dos categorías unidas. Es voz muy usada por los antiguos metafísicos, y muy apropiada para la expresion de toda consideracion ó punto de vista matemático, que abraza simultáneamente la cantidad y la cualidad. El Álgebra es esencialmente sincategoremática en el desarrollo de sus algoritmos y en la exposicion teórica de las propiedades comunes del número y de la extension.

A lo sincategoremático se opone lo *categoremático*, que es lo perteneciente á una sola categoría. La Geometría elemental y la Aritmética apenas conciben la extension y el número mas que bajo el concepto de cantidad, y son categoremáticas.

SÍNTESIS. Significa *composicion*. Toda síntesis supone unidad y pluralidad; pero unas veces la unidad es dada primitivamente, y en su seno determinamos la pluralidad por un análisis subsiguiente, y esta se llama unidad sintética; y otras veces es dada la pluralidad como resultado del análisis, y la unidad á que la sometemos por la síntesis se llama unidad analítica.

La síntesis es la funcion generadora de todo conocimiento, y en el órden matemático es el orígen de toda representacion numérica y extensiva.

SORDO (número). Este nombre daban los antiguos aritméticos á las raíces inconmensurables, que son aquellas cuya relacion con la unidad es inefable. Quizá esta denominacion tan gráfica tenga su fundamento en la Acústica, en la cual se consideran como inarmónicos los sonidos cuyo número de vibraciones en un tiempo dado son inconmensurables ó carecen de una medida comun.

SUBSTANCIA. Concepto de la cosa modificada por un accidente. Vide *Accidente*.

El concepto de substancia denota la funcion propia del entendimiento en el juicio categórico, en el cual el sujeto se concibe siempre como substancia modificada por el predicado, que es el accidente.

El algoritmo en que se realiza esta síntesis substancial es el de la suma, en la cual un sumando se considera como accidente que modifica al otro, concebido como substancia.

SUMA. Expresion general de la síntesis de todas las cantidades, cualquiera que sea el concepto de su cualidad. Bajo la denominacion genérica de *suma*, que en rigor etimológico no significa mas que compendio ó resultado abreviado, se comprenden la *adicion* y la *substraccion*, como procedimientos especiales de un mismo algoritmo en su doble marcha progresiva ó regresiva.

La suma aditiva es síntesis de cantidades de idéntica cualidad.

La suma substractiva es tambien síntesis de cantidades con cualidad contraria.

SUPLEMENTARIOS (**conos**). Aquellos cuyo ángulo de las generatrices es suplemento del de los principales. Estos conos principales son los dos verticales superior é inferior de la teoría ordinaria.

Los dos conos principales con los suplementarios adyacentes forman un sistema regular y armónico en que tiene racional interpretacion el imaginarismo de las coordenadas. Este sistema se completa todavía concibiendo otros dos conos anterior y posterior, segun el eje perpendicular al plano en que están los otros ejes.

T

TÉSIS. Lo mismo que *posicion*. La representacion geométrica de las potencias de una recta imaginaria, son sus diversas posiciones en una evolucion giratoria. En esto se funda el llamarse *tésis* las varias potencias de una raiz. La hipótesis determinante de las tésis potenciales es el exponente de la evolucion gradual. Vide *Graduacion*.

En el algoritmo de la produccion se llama tambien tésis la posicion inicial de los factores, con arreglo á su cualidad propia. El plano en que estos se conciben *puestos* ó trazados se llama *tético*.

Con la tésis de los factores es correlativa su *antítesis* en el producto. Esta antítesis no es mas que la contraposicion recíproca por la cual aquel se determina. La contraposicion de los factores geométricos consiste en su perpendicularidad.

TIEMPO. Intuicion pura que es condicion transcendental de la percepcion de los objetos como anteriores ó posteriores, esto es, como sucesivos. El tiempo es incomprensible é indefinible, como *cosa en sí*; y de él no podemos tener mas que un concepto transcendental, en cuanto lo consideramos como forma necesaria *á priori* de las percepciones interiores y exteriores: el tiempo es forma universal de todos los fenómenos así del mundo físico como del psicológico. No podemos, con efecto, percibir las cosas como anteriores ó posteriores, sino en cuanto están determinadas en algun momento del tiempo.

La Aritmética, que no es transcendental en sí misma, se limita á exponer las relaciones de las cosas numerables en el tiempo, y no necesita para su desarrollo de este concepto transcendental. Sin embargo, este concepto es necesario para comprender y explicar la certeza apodíctica y absoluta universalidad de las verdades aritméticas.

TÍPICA (**imaginaria**). La imaginaria normal ó elemental que expresa la perpendicularidad. El símbolo $\sqrt{-1}$ es la imaginaria típica, argumento absoluto que entra como elemento en todas las imaginarias afectas; como la perpendicularidad es posicion absoluta y momentánea entre todas las posiciones oblícuas.

TOTALIDAD. Concepto del entendimiento en que se verifica la síntesis de la unidad y de la pluralidad. Una cosa se concibe como un *todo* cuando en su unidad concebimos pluralidad de partes.

En el órden lógico el concepto de totalidad coincide con el de *individualidad*, y es funcion propia de los juicios individuales. El individuo lógico no es posible sin la unidad determinada en la pluralidad de unidades colaterales de la especie.

El concepto de totalidad se halla plenamente realizado en la nocion de número, el cual se concibe siempre como un *todo* formado de *pluralidad* de *unidades*. La unidad como tal no es número, porque carece de pluralidad. La unidad como conjunto de unidades inferiores encierra la pluralidad bastante para ser concebida como un todo y para ser un verdadero número de partes ó fracciones.

TRANSCENDENTAL. Voz tan generalmente usada como poco comprendida en su verdadera significacion crítica: lo transcendental no es lo obscuro, ni lo sublime, ni lo profundo, ni lo elevado, ni aún siquiera lo fundamental, sino pura y simplemente aquello que se establece *à priori* como condicion necesaria en el conocimiento de las cosas. Cuando concebimos el espacio y el tiempo como condiciones formales de toda intuicion externa é interna, tenemos un concepto transcendental del espacio y del tiempo. La Estética que nos da estos conceptos se llama por esto *transcendental*.

Las categorías intelectuales consideradas, no simplemente como conceptos *à priori*, sino como referidas *à priori* à objetos de la experiencia, como condiciones de la posibilidad del pensamiento empírico de estos objetos, son conceptos transcendèntales; y la Lógica, que así los considera y estudia es con razon Lógica *transcendental*.

Así tambien una teoría del imaginarismo que considera esta afeccion de la cantidad como una deduccion ó aplicacion necesaria de los conceptos intelectuales al número y à la extension, merece el título de *teoría transcendental del imaginarismo*, que hemos puesto al frente de esta obra.

TRISECCION. El problema de la triseccion del ángulo, así como el de la duplicacion del cubo son antiquísimos. Los mas distinguidos geómetras los han considerado como pendientes de la resolucion de un problema de tercer grado.

La division que propongo del ángulo recto en tres, en cinco y en siete partes iguales, no tiene la pretension de resolver aquel problema, sino la de hacer aplicables al ángulo recto las divisiones sistemáticas análogas de toda la circunferencia.

La triseccion ordinaria del ángulo recto por la inscripcion del radio es una consecuencia gráfica de la igualdad del radio al lado del exágono; es sin duda mas expedita pero menos elemental que la que procede de la triseccion directa de la circunferencia por la construccion de las tres raíces terceras de la unidad.

U

UNIDAD. Concepto intelectual que aplicamos à las cosas cuando las consideramos como *unas*. Este concepto es indefinible, como todo lo que es primordial en el espíritu; una definicion sería una descomposicion lógica irrealizable en un concepto tan simple como la unidad, que es la simplicidad esencial.

El concepto categórico de la unidad se encuentra realizado lógicamente en los juicios universales, en los que el sujeto se concibe tan uno al subordinarse al predicado, que nada queda fuera de este que constituya pluralidad con él. Vide *Cantidad*.

V

VERTICAL. Se dice no solo de los ángulos, sino tambien de los rectángulos y aun de los paralelepípedos, entre cuyos ángulos planos ó sólidos hay la misma oposicion.

A veces se da en esta obra el nombre de *vertical* á la recta ó al plano perpendiculares, como imaginarios; la perpendicularidad entonces está referida á rectas ó planos que se consideran como *horizontales*.

VERSOR. Mr. Mourey da este nombre al ángulo que expresa la inclinacion de una recta respecto de otra. El ángulo *versor* equivale al argumento en nuestra Teoría, y es la expresion de la cualidad imaginaria. Llamando 2π á toda la circunferencia, las cantidades reales pueden expresarse por $A_{2n\pi}$, en que n puede tener cualquier valor incluso cero: la negativa por consiguiente será $A_{2n\pi+\pi}$; y la imaginaria perpendicular ú oblícua puede ser $A_{2n\pi+\alpha}$, en que α representa un ángulo menor que 2π. Segun esta notacion, siempre se tiene que

$$A_{2n\pi+\alpha} = A_{\alpha}.$$

Por esta notacion ingeniosa se propone Mr. Mourey evitar la expresion gráfica de las imaginarias; y al sentar por ejemplo que

$$-\sqrt{-A^2} = \sqrt{(A^2)}_{2n\pi+\pi} = A_{n\pi+\frac{1}{2}\pi},$$

se conforma enteramente con la teoría que desarrollamos en esta obra.

Y

YUXTAPOSICION. Posicion de una cosa junto á otra. En la suma se yuxtaponen las cantidades con su cualidad propia.

CORRIGENDA.

En algunos ejemplares se han notado las siguientes erratas.

PÁGINA	LÍNEA	DICE	DEBE DECIR
42	17	grado	número
53	11	$\div\!\div 1, a, aq,$	$\div\!\div a, aq,$
150	4	$\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
184	8	$1-4($	$1-3($
268	6	$+\alpha\sqrt{\sqrt{-1}}$	$\alpha+\alpha\sqrt{\sqrt{-1}}$

La línea $b\sqrt{-1}$ de la figura 69, B debe ser llena.

ÍNDICE.

Páginas.

TEORIA TRANSCENDENTAL DE LAS CANTIDADES IMAGINARIAS.

LIBRO I.

De la naturaleza é interpretacion de las cantidades imaginarias.

LIBRO II.

De las imaginarias en el algoritmo de la suma.

LIBRO III.

De las cantidades imaginarias en el algoritmo de la produccion.

LIBRO IV.

De las cantidades imaginarias en el algoritmo de la graduacion.

Páginas.