MEMORIA

SOBRE LA

TEORIA DE LAS DETERMINANTES,

POR

DON JOSÉ ECHEGARAY.

Ingeniero Jefe de Caminos, Canales y Puertos.

MADRID:

IMPRENTA DE LOS CONOCIMIENTOS ÚTILES, Á CARGO DE F. ROIG,

calle del Arco de Santa María, número 39.

1868.

ADVERTENCIA.

Esta Memoria debió publicarse formando parte del tomo VIII de la coleccion de *Memorias y documentos*, y por esta causa su paginacion empieza con el número 243.

ADVERTENCIA.

Esta Memoria es un arreglo, y casi pudiera decir que la traduccion libre de la parte elemental de la excelente obra del profesor Trudi. No conozco libro mejor escrito que el del profesor italiano: claridad, método, exactitud, todo lo reune, y lo más á que puedo aspirar es á que en mi trabajo se refleje algo de las brillantes cualidades del original.

José Echegaray.

TEORIA DE LAS DETERMINANTES.

§ I.

Inversiones en las permutaciones.

1. Imaginemos una série de *elementos* literales ó numéricos en los que exista un órden natural de sucesion, ó á los que, para las combinaciones subsiguientes, demos á voluntad un número de órden.

Por ejemplo, las letras a, b, c, d.....; los números 1, 2, 3, 4, 5.....; la série de letras no sucesivas a, d, f, g, r.....; ó la numérica 2, 4, 5, 8, 10.....; en las cuales existe el órden natural alfabético ó numérico: ó bien esta otra série b_1, a_2, d_3, l_4, e_5..... en la cual á las letras b, a, d, l, e..... les damos número de órden por los subíndices 1, 2, 3, 4, 5...

Agrupemos estos varios elementos en un cierto órden, ya solo para formar lo que en Algebra se llama una permutacion, ya constituyendo un producto de factores ordenados, por ejemplo, a, b, c, d....., 1, 2, 3, 4....., ó $a. b. c. d$....., $1 \times 2 \times 3 \times 4$....., y tratemos de distinguir unas de otras estas diferentes permutaciones ó productos.

Cuando los elementos se suceden en *série directa* creciente, segun el número de órden que á cada uno corresponde, se dice que la permutacion formada de este modo es la ***permutacion principal***:

Por ejemplo, los productos

$a\ b\ c\ d\ e$. . . .	ó los grupos	a, b, c, d, e. .
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$		1, 2, 3, 4, 5.
$b_1\ a_2\ d_3\ l_4\ e_5$. . . .		b_1, a_2, d_3, l_4, e_5.
$a\ d\ f\ g\ r$. . . .		a, d, f, g, r. .
$2 \times 4 \times 5 \times 8 \times 10$		2, 4, 5, 8, 10.

son permutaciones principales de las séries de elementos citados anteriormente.

Si, por el contrario, se agrupan los mismos elementos en un órden rigorosamente inverso, la permutacion que resulta se dice que es la *permutacion inversa*.

Los productos

$e\ d\ c\ b\ a$. . . .	ó los grupos	e, d, c, b, a. .
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$		5, 4, 3, 2, 1. .
$e_5\ l_4\ d_3\ a_2\ b_1$. . .		e_5, l_4, d_3, a_2, b_1.
$r\ g\ f\ d\ a$. . . .		r, g, f, d, a. .
$10 \times 8 \times 5 \times 4 \times 2$		10, 8, 5, 4, 2.

son las permutaciones inversas de las mismas séries.

Entre todas las permutaciones, $a\ b\ c\ d$..... $b\ a\ c\ d$..... $c\ a\ b\ d$..... de varios elementos, $a\ b\ c\ d$....., ú otras análogas, conviene mucho fijar la atencion en las dos permutaciones *principal* é *inversa* que acabamos de definir, porque á ellas, como á su *orígen*, *punto de partida* ó *base*, se refieren todas las demás por leyes en extremo sencillas del análisis combinatorio.

2. Se dice que dos elementos, sean ó no contiguos, de una permutacion cualquiera, forman *inversion* cuando no siguen el órden directo: así, para fijar las ideas, en la permutacion $e\ h\ d\ g\ b$, de los elementos b, d, e, g, h: e y d forman una *inversion*, porque en el órden alfabético la d precede á la e, y en la permutacion $e\ h\ d\ g\ b$ sucede precisamente lo contrario: en esta misma permutacion d y g no forman inversion; e y b la forman, y así sucesivamente.

Como en cada permutacion podemos tomar dos á dos todas las letras que contiene para reconocer si forman ó no inversion, pero el número de estas combinaciones binarias es limitado, resulta que *cada permutacion tiene un número fijo* y *perfectamente determinado de inversiones*, número que difiere y caracteriza en el análisis combinatorio la clase del término ó permutacion á que corresponde.

Fácilmente podemos hallar las inversiones totales del grupo ya citado *e h d g b*, ó de otro cualquiera: bastará para ello comparar *cada letra con todas* las que le siguen y sumar las diferentes inversiones que resultan.

Diremos: *e* y *h* no forman inversion. .	»	
e y *d*. . forman inversion. .	1	
e y *g* no forman inversion. .	»	
e y *b*. . forman inversion. .	1	
	—	
A *e* corresponden pues.	2	inversiones. . 2
h y *d* forman una inversion. . . .	1	
h y *g* otra.	1	
h y *b* otra más..	1	
	—	
A *h* corresponden pues.	3	 3
d y *g* no forman inversion.	»	
d y *b*. . forman una.	1	
	—	
A *d* corresponden pues.	1	 1
Finalmente, *g* y *b* forman una inversion.	1	 1
		—
Total del grupo *e h d g b*.		7

De aquí se deduce:

1.° Que en toda *permutacion principal no hay inversiones*, puesto que todas las letras están en el órden natural.

2.° Que en la permutacion inversa de n elementos el número total de inversiones es $\frac{1}{2} n (n - 1)$.

En efecto, el *primer elemento* forma inversion con todos los que le siguen, que son en número $(n - 1)$, pues tiene menor número de órden que todos ellos; luego á dicho elemento corresponden..... $(n - 1)$ inversiones: el *segundo elemento* forma asimismo inversion con los $(n - 2)$ que le siguen; tenemos, pues, $(n - 2)$ inversiones más: al *tercero* corresponden $(n - 3)$, y así sucesivamente hasta el penúltimo, que forma *una* inversion con el elemento final.

Tendremos en resùmen para el número total de inversiones de la permutacion inversa

$$(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots \quad 2 + 1 = \frac{n(n - 1)}{2}$$

segun habíamos indicado.

Por ejemplo....: $d\ c\ b\ a$ presenta $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ inversiones como es fácil comprobar.

3.° Todas las permutaciones de n elementos pueden dividirse en dos grupos ó categorías respecto al número de inversiones, á saber: permutaciones en las que el número de inversiones es *par*, y permutaciones en que dicho número es *impar*.

3. Dada una série literal ó numérica de elementos, por ejemplo, la alfabética a, b, c, d... ó la numérica 1, 2, 3, 4..., podemos escoger varios elementos de la una ó de la otra para formar con ellos diversas permutaciones: sean estos elementos b, d, e, g, h en la primera, ó 2, 4, 5, 7, 8 en la segunda. Si les conservamos el órden natural primitivo, la permutacion principal será evidentemente $b\ d\ e\ g\ h$, ó $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 8$ formando productos, ó más en general b, d, e, g, h, y 2, 4, 5, 7, 8 si solo atendemos al órden (1).

---

(1) En el análisis combinatorio solo se atiende al *órden* prescindiendo del valor numérico, y por lo tanto prescindiremos en adelante de si los elementos que se con-

Ahora bien, á cada letra de las que constituyen el grupo *b, d, e, g, h* corresponden evidentemente dos números de órden: *el primero* por el lugar que ocupa en la série alfabética, por ejemplo; á *b*, el 2; á *d*, el 4; á *e*, el 5; á *g*, el 7 y á *h* el 8; *el segundo* por el lugar que ocupa en la permutacion principal *b d e g h*; á *b*, el 1; á *d*, el 2; á *e*, el 3; á *g*, el 4 y á *h* el 5.

En resúmen

á *b* corresponden dos números de órden. .	2	ó	1
á *d*.	4	ó	2
á *e*.	5	ó	3
á *g*.	7	ó	4
á *h*.	8	ó	5

Pero como al comparar cada dos de las letras del grupo que consideramos, para conocer si están en órden natural ó inverso, tanto dá considerar unos ú otros números, puesto que la *d* y la *g*, por ejemplo, no forman permutacion, ya se atienda á sus números de órden naturales 2 y 4, ya á los que tienen en la permutacion principal, á saber, 4 y 7; y á la inversa *g* y *d* forman una permutacion que aparece lo mismo en los números 4, 2 que en los 7, 4, lo cual puede repetirse para todas las demás letras de dicho grupo, resulta finalmente que el número de inversiones es el mismo, ya se atienda al número de órden de cada letra en la permutacion principal, ya al órden natural de sucesion (1).

sideran están agrupados formando un producto, una suma ú otra funcion cualquiera, para tener en cuenta únicamente el órden de dicha agrupacion.

Notaremos, sin embargo, que por lo general en la teoría de las determinantes los elementos se multiplican entre sí y cada permutacion es un producto; pero los teoremas de este primer párrafo son completamente generales.

(1) Obsérvese que este órden natural de sucesion depende por completo de nuestra voluntad y es por lo tanto el que nosotros fijemos de antemano, aunque para simplificar y evitar confusiones sea generalmente el órden alfabético, si se trata de letras, ó el numérico si se trata de números.

Análogamente veríamos que en las permutaciones formadas con los números 2, 4, 5, 7, 8 pueden sustituirse, si sólo se trata del número de inversiones, á dichos números los naturales 1, 2, 3, 4, 5 que expresan su lugar en la permutacion principal: es decir al 2 el 1
al 4 el 2
al 5 el 3
al 7 el 4
y al 8 el 5.

4. Representemos por P una permutacion principal de un número cualquiera de elementos, y por A la permutacion que se deriva de aquella, quitando m elementos de dicha combinacion principal, y colocándolos en órden directo delante del grupo que forman los elementos restantes.

Por ejemplo, si P representa la permutacion principal $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ j\ k$, y si de esta permutacion tomamos cinco elementos (en cuyo caso $m=5$), $c\ e\ f\ h\ j$, y los colocamos en órden directo delante del grupo restante $a\ b\ d\ g\ k$, habremos formado la permutacion $c\ e\ f\ h\ j\ a\ b\ d\ g\ k$ que es la que designamos en general por A.

Los m elementos de la permutacion P que cambian de lugar estarán definidos por sus números de órden en dicha permutacion, números de órden que representaremos en general por $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_i \ldots\ldots r_m$; pues como no sabemos cuáles serán en cada caso, es preciso dejarlos indeterminados, empleando á este fin la letra indeterminada r, si bien para indicar la *sucesion creciente* acudimos á los sub-índices 1, 2, 3... i... m: es decir, que $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_i \ldots\ldots r_m$ son números crecientes de la série natural 1, 2, 3, 4..... m.

Cuando así no sea los índices ó sub-índices indicarán claramente el órden establecido.

Nótese además que no siempre y en toda clase de problemas pueden sustituirse unos números de órden á los otros: hay fórmulas en las que deben entrar precisamente los números de órden de los elementos en la permutacion principal; es decir, refiriéndonos al ejemplo anterior, los 1, 2, 3, 4 y 5.

En el ejemplo anterior se tiene $r_1 = 3$; $r_2 = 5$; $r_3 = 6$; $r_4 = 8$; $r_5 = 9$, puesto que los elementos c, e, f, h, j que se anteponen á los restantes ocupan los lugares que indican dichos números 3, 5, 6, 8 y 9.

Comprendido esto, tratemos de determinar el número E de inversiones de la permutacion A.

Puesto que no hay inversiones en la presentacion P, para determinar las de A, basta ver cuántas resultan ó aparecen por el cambio de cada elemento que varía de posicion al pasar de P á A, y sumar todas ellas.

Fijémonos en el elemento que ocupa el lugar r_i en P; lo que digamos de este podriamos repetirlo para otro cualquiera.

• Dicho elemento pasa en A al lugar i; queda siempre delante de los elementos que le seguian en P, de suerte que con ellos no forma inversion; no se antepone á ninguno de los m elementos que varían con él, y solo avanza respecto á los elementos de P que estaban delante y no han variado: por lo tanto, solo con estos podrá ofrecer inversiones.

Ahora bien, en P teníamos delante del elemento que ocupaba el lugar r_i, $r_i - 1$ elementos, de los cuales $i - 1$ han variado al mismo tiempo que el que consideramos, luego este elemento tan solo avanza sobre $(r_1 - 1) - (i - 1)$ elementos y dá orígen por consiguiente á $r_i - i$ inversiones.

Tendremos pues $r_1 - 1$ inversiones procedentes del elemento que ocupa el lugar r_1

$$\begin{array}{l} \text{y } r_2 - 2 \\ \quad r_3 - 3 \\ \quad r_4 - 4 \\ \quad \vdots \\ \quad r_i - i \\ \quad \vdots \\ \quad r_m - m \text{ para los restantes} \end{array}$$

ó en total $E = r_1 + r_2 + r_3 \ldots\ldots + r_i + \ldots\ldots r_m - (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots i + \ldots\ldots m) =$

$$r_1 + r_2 + r_3 + \ldots\ldots r_m - \frac{1}{2} m (m + 1).$$

En el ejemplo anterior el elemento *c* ocupaba el *tercer* lugar en la permutacion principal *a b c d e f g h j k*, y se antepone á los dos *a*, *b*, dando lugar á 2 inversiones: el *e* se antepone á los *a*, *b*, *d*, puesto que el *c* cambia con él y no debe contarse, luego dá orígen á *cuatro ménos una* inversion ó sean 3 inversiones, y análogamente veríamos que *f*, *h* y *j* dan orígen á 3, 4 y 4 inversiones ó en total á $2+3+3+4+4=16$.

Sustituyendo en la fórmula

$$r_1=3;\ r_2=5;\ r_3=6;\ r_4=8;\ r_5=9;\ m=5$$

tendremos $3+5+6+8+9-\frac{1}{2}5(5+1)=16$ que es el mismo número que habíamos obtenido directamente.

5. Sea A una permutacion cualquiera de n elementos y supongámosla dividida en dos grupos B, y C; el primero formado con los m primeros elementos de dicha permutacion A, y el segundo con las $n-m$ restantes.

Es evidente que el número de inversiones de la permutacion A se obtendrá sumando las inversiones del grupo B, que representaremos por β, las del grupo C, que designaremos por γ, y las que forman los elementos de B respecto á los de C, puesto que cada dos elementos que comparemos ó pertenecerán los dos al grupo B ó al C, ó uno al primero y otro al segundo. Llamando E á las inversiones de todos los elementos de B, respecto á los de C y α al número de inversiones de A, tendremos pues

$$\alpha=\beta+\gamma+E.$$

Ahora bien, si los elementos de B varían de posicion, pero dentro de su propio grupo, y asimismo los de C dentro del suyo, β y γ variarán, pero E permanecerá constante y el nuevo valor de α será

$$\alpha'=\beta'+\gamma'+E.$$

Este número constante E solo depende de los números de órden de los elementos de B en la permutacion principal P, de la cual podemos suponer derivada la permutacion A. En efecto, podemos pasar de la permutacion P á la A trayendo en P los m elementos de B al principio del grupo, con lo cual obtendremos una permutacion A′ dividida en dos grupos, que contendrán los mismos elementos que B y C, y bastará cambiar de lugar los elementos de cada grupo dentro del suyo respectivo para trasformar A′ en A.

Sea, por ejemplo, la permutacion $A = d\,f\,a\,j\,c\,b\,e\,h\,g$ derivada, por cambios convenientes, de la principal $P = a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\,j$, y dividámosla en dos grupos $d\,f\,a\,j\,c$ el primero, $b\,e\,h\,g$ el segundo, en esta forma $d\,f\,a\,j\,c|b\,e\,h\,g$. Para pasar de P á A′ tomaremos en P los elementos a, c, d, f, j que son los que entran en el primer grupo de A, y los trasladaremos al principio de la permutacion, obteniendo de este modo la permutacion $A' = a\,c\,d\,f\,j|b\,e\,h\,g$ dividida en dos grupos $a\,c\,d\,f\,j$ y $b\,e\,h\,g$, que contienen los mismos elementos que los $B = d\,f\,c\,a\,j$, $C = b\,e\,h\,g$, aunque dispuestos en diverso órden. Para pasar de A′ á A basta alternar convenientemente las letras en cada dos grupos $acdfj$, $behg$.

Pero esta última operacion no altera el valor de E, luego esta cantidad tendrá el mismo valor en A′ que en A, y como en A′ (núm. 4) viene dado por la fórmula

$$E = r_1 + r_2 + \dots r_m - \frac{1}{2}m(m+1)$$

resulta, por último, que en la espresion $\alpha = \beta + \gamma + E$ el valor de E es el que acabamos de escribir representando por $r_1, r_2, r_3, \dots\dots r_m$ los números de órden de los elementos que entran en B, tomados dichos números de órden por el lugar que ocupan los elementos en cuestion en la permutacion principal.

En el ejemplo precedente tendríamos

$$r_1 = 1;\ r_2 = 3;\ r_3 = 4;\ r_4 = 6;\ r_5 = 9;$$

y la fórmula general se trasformaria en esta otra inversiones de $(dfajcbehg) =$ inversiones de $(dfajc) +$ inversiones de $(behg) + 1 + 3 + 4 + 6 + 9 - \frac{1}{2} 5 (5 + 1)$.

6. Segun hemos indicado en el núm. 2 las diversas permutaciones de n elementos se dividen en dos *clases*: comprende la *primera* todas aquellas que tienen un número *par* de inversiones; y la *segunda* los que contienen un número *impar*.

7. Sean k y g dos elementos contiguos de una permutacion cualquiera A: representando por B el grupo que precede á k, y por C el que sigue á g tendremos evidentemente

$$A = B\,k\,g\,C.$$

Veamos ahora qué alteracion experimentan las inversiones de A cambiando de lugar los elementos k y g de suerte que se constituya la permutacion

$$A' = B\,g\,k\,C.$$

Las inversiones de todos los elementos de B respecto á g, k y C no han variado, puesto que B les precede siempre; las de k y g con relacion á los elementos contenidos en C tampoco variarán por la misma razon, ni los de este último grupo; luego la única inversion que aumenta ó disminuye es *la que resulta* del cambio relativo de los elementos g y k.

De aquí se deduce que *cuando dos elementos contiguos cambian recíprocamente de lugar, la permutacion gana ó pierde* UNA INVERSION.

Consideremos ahora un elemento cualquiera k y supongamos que camina de izquierda á derecha ó de derecha á izquierda pasando sobre r elementos consecutivos.

Diremos para abreviar que un elemento k pasa sobre otro contiguo g cuando se invierte su colocacion respectiva, es decir, cuando en vez de $k\,g$ se escribe $g\,k$, ó en vez de $g\,k$ se escribe $k\,g$: en el primer caso camina de izquierda á derecha pasando sobre g, en el segundo de derecha á izquierda pasando tambien sobre dicho elemento.

Segun acabamos de decir, por cada elemento sobre el cual pase k, la permutacion gana ó pierde una inversion, luego tendremos:

1.° Que al pasar sobre *un* elemento, la permutacion A′ que resulte tendrá una inversion más ó ménos que la A: A y A′ *serian pues de distinta clase.*

2.° Al pasar sobre el *segundo* elemento, la permutacion A″ que resulte tendrá una inversion más ó ménos que la anterior A′ : A′ y A″ serán por lo tanto de distinta clase, luego A y A″ pertenecerán á la misma.

Veremos análogamente, representando por A‴, A⁗... $A^{(r)}$ las permutaciones que resultan al pasar el elemento k sobre varios elementos de A, que

A y A‴ son de distinta clase;

A y A⁗ de la misma;

y en general A y $A^{(r)}$ serán de la *misma clase* ó de *clase distinta* segun que r sea número *par* ó *impar.*

En resúmen:

Cuando un elemento de una permutacion pasa en uno ú otro sentido sobre r *elementos consecutivos, la nueva permutacion será de la misma clase ó de clase distinta que la primera segun que* r *sea par ó impar.*

8. Cuando en una permutacion solo interesa tener á la vista dos elementos k y g, porque sobre ellos versan las trasposiciones que han de efectuarse, se expresa dicha permutacion de esta manera:

$$A\, k\, B\, g\, C:$$

representando por A el grupo de elementos que preceden á k, por B el de los comprendidos entre k y g, y finalmente por C el conjunto de los que siguen á g.

Así en $\quad c\ b\ f\ k\ l\ r\ g\ b\ d\ e,$

A representa el grupo. . . . . $c\ b\ f$;

B el . . . . $l\ r$;
y C el . . . . $b\ d\ e$.

Veamos ahora qué alteracion experimentan las inversiones del grupo

$$A\ k\ B\ g\ C\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$

cuando se invierte el órden de los elementos k y g en esta forma:

$$A\ g\ B\ k\ C\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

Supongamos que en B hay r elementos:

Para pasar de la permutacion (1) á la (2): 1.° haremos pasar á k en la permutacion (1) sobre los r elementos de B, con lo cual obtendremos la permutacion A B k g C; 2.° haremos asimismo pasar á g en la permutacion (2) sobre los r elementos de B y sobre el elemento k, es decir, sobre $r + 1$ elementos, con lo cual obtendremos la misma permutacion intermedia A B k g C que antes.

Resulta de aquí que para pasar de las permutaciones (1) y (2) á la misma permutacion A B k g C ó recíprocamente de esta á las (1) y (2) son necesarios r y $r + 1$ cambios consecutivos; luego si r es par, A B k g C y (1) serán de la misma clase, A B k g C y (2) de clase distinta por ser $r + 1$ impar, ó al contrario si r es impar. Siempre, pues, A B k g C es de la misma clase que una de las dos permutaciones (1), (2) y de distinta clase que la otra, de donde se deduce finalmente que (1) y (2) son de diversa clase. De aquí resulta este teorema:

Dos permutaciones A k *B* g *C y A* g *B* k *C que solo difieren por el cambio recíproco de dos elementos* k y g *pertenecen á distinta clase.*

9. Dadas dos permutaciones que pertenezcan al mismo sistema de elementos, es claro que puede suponerse deducida la una de la otra mediante un cierto número de cambios sucesivos de elementos tomados dos á dos, puesto que de este modo cada elemento de la primera puede venir al lugar que ocu-

pa en la segunda; pero estas operaciones pueden efectuarse de muchas maneras distintas, y segun el sistema de cambios que se elija, variará evidentemente el número de estos. Sin embargo, como cada cambio de dos letras hace cambiar de clase á la permutacion, puede establecer en general:

Que dos permutaciones formadas de los mismos elementos pertenecerán á la misma clase ó á clases distintas, segun que sea par ó impar *el número de los cambios de elementos dos á dos que se hayan efectuado ó puedan efectuarse para pasar de una permutacion á otra.*

10. Hallemos ahora, entre las 1. 2. 3... n permutaciones diversas de n elementos, cuantas pertenecen á cada clase.

Para ello llegaremos á las permutaciones de n letras procediendo desde las de $n - 1$, y agregando un nuevo elemento á las últimas.

Supongamos formadas todas las permutaciones de $n - 1$ elementos $a, b, c... k$, y sean A y B dos permutaciones de $n - 1$ elementos, de clase distinta.

Consideremos un elemento más, l, último de los n elementos $a, b, c..... k, l$, y agreguémoslo al final de las permutaciones A y B, con lo cual tendremos dos permutaciones A_1 B_1 de n letras y de clase distinta evidentemente, pues el número de inversiones será el mismo en A que en A_1 y en B que en B_1.

Haciendo ahora pasar l sobre cada uno de los elementos de A y B caminando siempre de derecha á izquierda y á la par, es decir, por un cambio en A otro en B, tendremos:

por el primer cambio en A_1 y B_1, dos permutaciones de n letras. A_2 B_2
de distinta clase, pues A_1 y B_1 lo eran y ambas cambian á la vez de clase;
por el segundo cambio otras dos. . . . . A_3 B_3
de distinta clase tambien, y así sucesivamente hasta que l ocupe el primer lugar en. . . . . A_n B_n.

De aquí se deduce que las dos permutaciones de $n - 1$ letras A y B, de clase distinta, han dado orígen á tantas permutaciones de n letras de una clase como de otra, pues á A_1 corresponde B_1, á A_2, B_2 y así en general: es decir, que de las 2 n permutaciones que que resultan, la mitad pertenece á una clase y la otra mitad á la clase opuesta.

Recordemos además (Algebra elemental), que se puede pasar de las permutaciones de n — 1 letras á las de n agregando el nuevo elemento l á todas las permutaciones de n — 1 letras y haciendo pasar á este elemento sobre todos los anteriores, sin que de este modo falte permutacion alguna, ni resulte ninguna duplicada.

Esto supuesto, partamos de las dos permutaciones de dos elementos

$$ab. \ldots . ba$$

que son de clase distinta y agreguemos el elemento c: segun lo demostrado obtendremos tantas permutaciones de una clase como de otra: sean estas,

M_1 M_2 M_3 las de una clase,
N_1 N_2 N_3 las de la opuesta.

Considerando ahora M_1 y N_1 primero; M_2 y N_2 despues; M_3 y N_3 finalmente, y agregando otra nueva letra d, cada grupo dará tantas permutaciones de cuatro letras de una clase como de otra, luego en definitiva habrá tantas permutaciones de cuatro elementos de la primera como de la segunda clase.

Generalizando tendremos que,

En el sistema completo de permutaciones de n *elementos la mitad pertenece á una clase y la otra mitad á la clase opuesta.*

Este teorema supone, como así es, esceptuando el caso $n = 1$, que el número 1, 2, 3. . . . . n de permutaciones de n elementos es par.

§ II.

Consideraciones generales sobre los cuadros generadores ó matrices.

11. Consideremos varias séries de elementos conteniendo cada série el mismo número y correspondiéndose todos los primeros, segundos, terceros términos, etc. Esta concepcion de órden y de correspondencia aparece de un modo claro, y salta, por decirlo así, á la vista, escribiendo las diferentes séries unas debajo de otras en líneas horizontales, de suerte que dichos primeros, segundos, terceros términos, etc. se correspondan en columnas verticales.

Así se formará un cuadro ó tabla, que se suele encerrar entre dos líneas verticales, y que recibe el nombre de *matriz*, porque de él y de la agrupacion de sus elementos se derivan y nacen, por decirlo así, importantes resultados del órden combinatorio.

Sean para fijar las ideas, cuatro séries de cinco letras cada una: a, b, c, d, e la primera; f, g, h, i, j la segunda; k, l, m, n, p la tercera; y q, r, s, t, u la cuarta: tendremos

$$\begin{vmatrix} a, & b, & c, & d, & e \\ f, & g, & h, & i, & j \\ k, & l, & m, & n, & p \\ q, & r, & s, & t, & u \end{vmatrix} \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

Este cuadro ó tabla, ú otro análogo, se designa, segun acabamos de indicar, con el nombre de *matriz*.

Sus diferentes términos reciben el nombre de *elementos* de la matriz.

Los que se hallan en una línea horizontal ó vertical se dice que forman una *línea*, y las líneas se distinguen en *horizontales* y *verticales*.

Tanto en unas como en otras, los elementos se determinan por números de órden 1, 2, 3. . . que se cuentan para las primeras de *izquierda* á *derecha*, para las segundas de *arriba abajo*.

12. Como cada elemento pertenece á la vez á una *horizontal* y á una *vertical*, y es, por decirlo así, la interseccion de ambas líneas, resulta que para individualizar ó fijar cada elemento de una matriz, basta indicar el *número* de órden de la horizontal y el de su vertical.

En general se designa el elemento, que se halla en la $r.^{ma}$ horizontal y en la $s.^{ma}$ vertical, reuniendo los dos números de órden en el siguiente símbolo:

$$(r, s).$$

Los números r y s se dice que son los dos índices del elemento: el primero, *índice de las horizontales*; el segundo *índice de las verticales*, ó más sencillamente *primero* y *segundo índice*.

Así, por ejemplo, en la matriz (1) se tiene

$$a=(1,1);\ b=(1,2);\ c=(1,3);\ d=(1,4);\ e=(1,5)$$
$$f=(2,1);\ g=(2,2);\ h=(2,3);\ i=(2,4);\ j=(2,5)$$

. . . .

13. Cuando más adelante nos ocupemos de productos de dos ó más elementos de una matriz, deberá entenderse siempre, y es condicion constante, que dichos elementos *pertenecen á horizontales* y *verticales distintas*; es decir, que no pueden entrar en el producto dos ó más elementos de una misma línea.

Así en la matriz (1) $a\,g\,p$ es un producto aceptable, porque de las dos líneas que pasan por a, de las que pasan g, y de las que se cortan en p, no entra en el producto $a\,g\,p$ mas que un elemento por cada grupo de dos líneas de distinto nombre.

Por el contrario, $a\ g\ h\ m\ e$ es un producto inaceptable y que nunca consideraremos en esta teoría, porque a y e pertenecen á la misma horizontal, h y m á la misma vertical.

De aquí resulta que si en un producto sustituimos á cada elemento de la matriz su expresion simbólica (núm. 12), tanto los primeros como los segundos índices deberán ser distintos; porque en efecto, si en la série de los primeros índices, por ejemplo, hubiera dos números iguales, como dichos índices expresan el número de órden de la horizontal á que pertenece el elemento que representan, ambos elementos pertenecerian á la misma horizontal, lo que es contra la definicion dada precedentemente.

Así, representando varios elementos por (r_1, s_1), (r_2, s_2), (r_3, s_3), (r_4, s_4). . . . . (r_m, s_m), en el producto

$$(r_1, s_1)\ (r_2, s_2)\ (r_3, s_3)\ (r_4, s_4) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (r_m, s_m) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

los números r_1, r_2, r_3. . . . . r_m, que son índices de líneas horizontales, serán todos distintos, como tambien s_1, s_2, s_3, s_4. . . . . s_m.

Tanto una como otra série, son términos de la série numérica 1, 2, 3, 4. . . . .

Por ejemplo, en el producto

$$a\ g\ s\ n,\ \text{ó}\ (1,1)\ (2,2)\ (4,3)\ (3,4) \qquad [\text{Matriz } (1)]$$

la série r_1, r_2 . . .r_m es 1, 2, 4, 3,
y la s_1, s_2 . . .s_m. 1, 2, 3, 4,
números comprendidos en la série natural 1, 2, 3. . . . . y distintos entre sí.

Al conjunto de los primeros índices r_1, r_2, r_3. . . . . r_m, ó de los segundos s_1, s_2, s_3. . . . . s_m, tomados en el producto

$$(r_1, s_1)\ (r_2, s_2)\ (r_3, s_3) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (r_m, s_m)$$

segun el órden en que están escritos, se les designa en general con el nombre de *permutaciones del producto*: llamando en particular

á la del grupo $r_1, r_2 \ldots r_m$ *permutacion de las horizontales*,
y á la del $s_1, s_2 \ldots \ldots s_m$ *permutacion de las verticales*.

Como una y otra permutacion presentarán cierto número de inversiones, se dice que las correspondientes al primer grupo son *inversiones de las horizontales*, y las del segundo *inversiones de las verticales*, designando en general unas ú otras con el nombre de *inversiones del producto*.

De este modo el producto en cuestion está sujeto á la vez á dos leyes de órden ó sucesion, segun se considera en él, el órden de las horizontales ó de las verticales á que pertenecen sus elementos. Y el conjunto de ambas leyes y su combinacion caracterizan, por decirlo así, cada producto.

Observemos ahora que si permutamos de cualquier modo que sea los elementos del producto, trasformándole, por ejemplo, en este otro

$$(r_2, s_2)(r_3, s_3)(r_1, s_1)(r_5, s_5)(r_4, s_4) \ldots (r_m s_m)(r_{m-1} s_{m-1}) \quad (3)$$

se habrán alterado las séries de las r y de las s presentando por ejemplo estas nuevas permutaciones

$$r_2, r_3, r_1, r_5, r_4 \ldots\ldots r_m\, r_{m-1}; \text{ y } s_2, s_3, s_1\, s_5, s_4 \ldots\ldots s_m\, s_{m-1}$$

cuyas inversiones serán distintas de las que correspondian á las primitivas permutaciones

$$r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_m; \; s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_m.$$

Pero como se puede siempre pasar del producto (2) al (3) por cambios sucesivos y binarios de los elementos; como por otra parte al permutar, por ejemplo, dos elementos (r_3, s_5), (r_5, s_5), á la vez se permutan los índices r_3, r_5, y los s_3, s_5 que van invariablemente unidos á los primeros; es decir, que si á la primera disposicion (r_3, s_3) (r_5, s_5) sustituimos la (r_5, s_5) (r_3, s_3) á la vez hemos alternado los primeros y los segundos índices; como además cada cambio binario de elementos, y por lo tanto de índices, hace cambiar de clase á la permutacion de estos, resulta finalmente, que si las permutaciones r_1, r_2, r_3. . . . . r_m; s_1, s_2, s_3. . . . . s_m pertenecian á la misma clase, ó lo que es igual, si presentaban las dos un número par ó un número impar de inversiones, á la vez cambiarán de clase y siempre por lo tanto pertenecerán á la misma; ó que si, por el contrario, dichas permutaciones eran de distinta clase, al cambiar, ambas continuarán perteneciendo á distinta clase tambien. De aquí se deduce el siguiente teorema:

Si se multiplican entre sí muchos elementos de una matriz tomados en horizontales y verticales distintas, sea cual fuere el órden de los factores, las dos permutaciones del producto serán siempre, es decir, para todas las permutaciones de los elementos de dicho producto, de la misma clase ó de clase distinta.

Si ambas son de la misma clase sus inversiones serán las dos pares ó las dos impares y su *suma* será siempre par.

Si son de clase distinta, una será par, la otra impar y la suma impar tambien.

De aquí se deduce que el final del teorema anterior puede enunciarse de este otro modo:

El número que expresa la suma de las inversiones de las dos permutaciones del producto será siempre par ó siempre impar.

14. El producto de diferentes términos de una matriz se dice que es un *producto algebráico* cuando se le afecta del signo + ó del signo —; y se emplea uno ú otro signo segun que las dos permutaciones del producto son de la misma clase ó de clase distinta; ó de otro modo segun que el número total de inversiones del producto es par ó impar.

Por ejemplo, el producto $p\ s\ b$ derivado de la matriz (1) debe llevar el signo ménos cuando se considere como algebráico.

En efecto, sustituyendo á p, s, b sus expresiones simbólicas tendremos

$$p\ s\ b = (3,\ 5)\ (4,\ 3)\ (1,2);$$

pero en la série 3, 4, 1 de los primeros índices hay *dos* inversiones,

y en la 5, 3, 2 de los segundos hay *tres*; luego las permutaciones 3, 4, 1 y 5, 3, 2 son de distinta clase, de donde se deduce segun lo convenido que $p\,s\,b$ debe llevar el signo *ménos*.

Por el contrario, al producto $p\,h\,q\,d$ corresponde el signo más, porque escrito bajo la forma

$$p\,h\,q\,d = (3,\,5)\,(2,\,3)\,(4,\,1)\,(1,\,4)$$

en la série 3, 2, 4, 1 hay *cuatro* inversiones y otras *cuatro* en la 5, 3, 1, 4 de los segundos índices.

Escribiremos pues, $\quad -p\,s\,b \quad y \quad +p\,h\,q\,d.$

Por lo demás siempre corresponderá el signo + ó — á *todas* las permutaciones de cada producto, porque en todas ellas (núm. 13) la suma de las inversiones de ambas séries de índices es constantemente *par* ó *impar*.

Así cuando tratemos de dar signo á un producto formado de elementos conteniendo dos índices ó números de órden, sea cual fuere la permutacion que estos elementos formen, el signo siempre será el mismo, y estará dado por la expresion $(-1)^{\varkappa}$, ó $(-1)^{\varkappa'}$, ó $(-1)^{\varkappa''}$. . . . . siendo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ las sumas de las inversiones de los primeros y segundos índices en cada caso.

Todas las expresiones $(-1)^{\varkappa}\,(-1)^{\varkappa'}\,(-1)^{\varkappa''}$. . . . tendrán en efecto el mismo signo, puesto que todos los exponentes serán *pares* ó *impares*.

Siempre puede hacerse depender dicho signo de una sola de las séries de índices, permutando los elementos del producto de suerte que una ú otra série de índices se presente en órden natural: disponiendo, pues, los elementos del producto en el órden de las horizontales, la permutacion de los primeros índices será una permutacion principal; disponiéndolos en el órden de las verticales, lo será la permutacion de los segundos índices.

Los productos precedentes pueden, por ejemplo, escribirse bajo una de estas dos formas:

$$(1,2)\ (3,5)\ (4,3)\ ;\ (1,4)\ (2,3)\ (3,5)\ (4,1);$$
$$(1,2)\ (4,3)\ (3,5)\ ;\ (4,1)\ (2,3)\ (1,4)\ (3,5).$$

En general llamando s al número total de las inversiones de un producto correspondiente á varios elementos de una matriz, el signo que le corresponde será el que resulte de la potencia $(-1)^{\varkappa}$, puesto que dará $+1$ ó -1 segun que $\varkappa$ sea par ó impar, y es evidente que siempre puede sumarse ó restarse á $\varkappa$ un número *par* sin que dicho signo cambie.

15. La determinacion del signo de cada producto se puede simplificar adoptando notaciones oportunas: por ejemplo, las dos siguientes:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \dots & l_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m & c_m & d_m & \dots & l_m \end{array}\right| \quad (4) \qquad \left|\begin{array}{cccccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \dots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & a_{m,4} & \dots & a_{m,n} \end{array}\right| \quad (5)$$

En la forma (4) el símbolo de cada elemento indica por su *sub-índice* la horizontal á que pertenece, y por el número de órden de la letra la vertical en que se halla. De aquí resulta que en un producto de elementos de dicha matriz la permutacion de las horizontales aparece desde luego por los sub-índices, y para hallar la de las verticales debe cambiarse cada letra por su número de órden natural; pero como el estudio de las permutaciones solo interesa para determinar las inversiones, es inútil la sustitucion de los números de órden á las letras y basta contar directamente las de estas últimas.

Por ejemplo: $d_4\ b_3\ c_2$ lleva el signo —, puesto que corresponden *dos* inversiones á las letras y *tres* á los índices.

En la matriz (5) todos los elementos están figurados por una sola letra á la cual se agregan dos sub-índices, el primero indicando la horizontal, y el segundo la vertical á que corresponde el elemento de que se trata. Con esta notacion las dos permutaciones del producto aparecen inmediatamente á la sola inspeccion de dicho producto, y de aquí se deduce con gran facilidad su signo.

A veces para más sencillez se suprime la letra, y en vez de a_{rs} se escribe tan solo (r, s).

16. En adelante para abreviar el razonamiento emplearemos las siguientes expresiones.

I. Se dice que *dos ó mas líneas* de una matriz son de *igual nombre* ó *paralelas* si ambas son horizontales ó verticales, y dos líneas son de *nombre diverso* si una es horizontal y otra vertical.

II. En dos líneas del mismo nombre ó de nombre distinto, se llaman *elementos correspondientes* los que ocupan igual posicion: los primeros, segundos, etc.

III. *Sumar* ó *restar* dos líneas del mismo nombre significa que se suman ó se restan todos los elementos correspondientes:

por ejemplo,

$$a_1+a_2;\, b_1+b_2;\, c_1+c_2 \ldots l_1+l_2, \text{ ó } a_1-a_2;\, b_1-b_2;\, c_1-c_2 \ldots l_1-l_2$$

son la suma ó diferencia de las dos primeras líneas de la matriz (4).

Análogamente, *multiplicar* ó *dividir una línea por una cantidad dada,* expresa que se multiplican ó dividen por esta cantidad todos los elementos de dicha línea:

por ejemplo

$$ka_3,\, kb_3,\, kc_3 \ldots\ldots kl_3;\; \frac{a_3}{k},\, \frac{b_3}{k},\, \frac{c_3}{k} \ldots\ldots \frac{l_3}{k}.$$

Cuando se cambia el signo á todos los elementos de una línea se dice que se *cambia el signo á dicha línea* lo cual equivale á multiplicarla por -1.

IV. Dos ó más líneas son *iguales* ó *idénticas* cuando sus elementos correspondientes son iguales; y se dice qne son *equivalentes* cuando solo difieren en un factor comun á todos los elementos:

por ejemplo

$$\begin{array}{l} a,\ b,\ c,\ d.\ \ldots\ l \\ ka,\ kb,\ kc,\ kd.\ \ldots\ kl \end{array}$$ son líneas equivalentes.

V. Diremos que son semejantes dos matrices cuando tengan el mismo número de líneas horizontales y el mismo número de líneas verticales: y en estas matrices serán *líneas homólogas* ó *elementos homólogos* las líneas ó los elementos que ocupen la misma posicion.

17. Las matrices que hasta ahora hemos estudiado se designan con la denominacion de *rectangulares* si las horizontales son en número distinto de las verticales; cuando hay tantas líneas horizontales como verticales la matriz se dice que es *cuadrada*, y el número de las unas ó de las otras expresa el *grado de la matriz*. De aquí resulta, puesto que una matriz cuadrada del grado n tiene n líneas y cada línea n elementos, que el número total de estos es n^2.

En las matrices cuadradas *dos líneas* de nombre diverso, que llevan un mismo número de órden, se dice que son *conjugadas*: así son conjugadas la primera horizontal y la primera vertical; la segunda horizontal y la segunda vertical, y en general la r^a horizontal y la r^a vertical (matriz 6.)

$$\left|\begin{array}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{1,r}\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{2,r}\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{3,r}\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{r,1}\ a_{r,2}\ a_{r,3}.\ .\ .\ a_{r,r}\ .\ .\ .\ a_{r,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ a_{n,r}\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right| \ldots\ldots \quad (6)$$

En dos líneas conjugadas los elementos correspondientes, es decir, los que ocupan la misma posicion, se dice que son conjugados: por ejemplo, $a_{r,1}$ y $a_{1,r}$; $a_{r,2}$ y $a_{2,r}$. . . .

El elemento comun á ambas líneas es el *elemento principal.*

Sea en general la matriz cuadrada

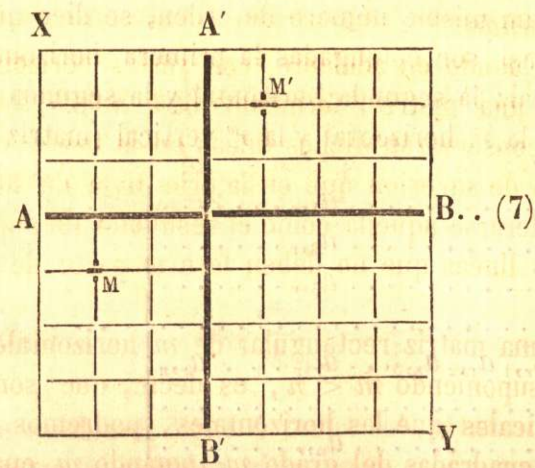
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \cdot & \cdot & \cdot & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \cdot & \cdot & \cdot & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

un elemento cualquiera $a_{r,s}$ es *conjugado* del $a_{s,r}$;

$a_{r,r}$ es el *elemento principal* de órden r^{mo};

$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3} \ldots \ldots a_{n,n}$ son los elementos sucesivos principales.

Si imaginamos dos séries de rectas paralelas, en número n cada una, cortándose en ángulo recto y formando una série de cuadrados (7)



y en los puntos de interseccion colocamos ordenadamente los diferentes elementos de la matriz de òrden n, se vé desde luego que dos líneas conjugadas A B y A' B', ó dos elemenlos conjugados M, M′ están simétricamente situados por relacion á la diagonal X Y y que sobre esta se hallan todos los elementos principales.

La palabra *conjugado* indica, pues, *simetría de posicion relativamente á la diagonal* ó línea de elementos principales.

Se llaman *simétricas* las matrices cuadradas en las que cada línea es idéntica á su conjugada. Así la matriz de tercer grado

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & d \end{vmatrix}$$

es simétrica; y más en general una matriz del grado n será simétrica si se verifica constantemente

$$a_{r,s} = a_{s,r}$$

para todas las combinaciones de los índices r, y s al variar desde 1 hasta n.

En toda matriz cuadrada se distinguen los elementos situados en las dos diagonales dando á estas los nombres de *principal* y *segunda*.

18. Cuando en adelante, con varias horizontales ó verticales de una matriz, formemos otra nueva, entiéndase que siempre conservarán dichas líneas en la nueva matriz el mismo órden de sucesion que en la primitiva, de suerte que puede considerarse aquella como el resultado de suprimir en esta todas las líneas que no deben formar parte de la nueva matriz.

Dada una matriz rectangular de m horizontales y n verticales y suponiendo $m < n$, es decir, que son más las líneas verticales que las horizontales, podremos formar varias matrices cuadradas del grado m tomando m cualesquiera de las verticales y agrupándolas, segun la condicion precedente, en órden directo; pero como las verticales son n y de ellas solo debemos tomar m, resulta que podremos construir tantas matrices cuadradas del grado m como combinaciones pueden formarse con n objetos m á m, es decir

$$\frac{n\,(n-1)\ldots\ldots(n-m+1)}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots m}$$

Por ejemplo, de la matriz de tres horizontales y cuatro verticales

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

combinando las verticales tres á tres, pueden deducirse las

$$\frac{4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3} = 4$$

matrices cuadradas, de tercer órden, siguientes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

En cada una de estas matrices las verticales conservan el mismo órden que en la matriz primitiva.

Si en vez de ser $m < n$ fuera al contrario, es decir, si hubiese más horizontales que verticales, para formar nuevas matrices, deberiamos combinar, no ya las verticales, sino las horizontales de la matriz primitiva.

§ III.

Primeras nociones sobre las determinantes.

Determinantes menores y complementarias.

19. Sea la matriz cuadrada de grado n

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \cdots & a_{3,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Tomemos en *cada vertical* un elemento, de suerte que todos ellos correspondan á *horizontales distintas*; formemos su producto, y démosle el signo + ó — segun que las dos permutaciones (núm. 14) de los primeros y de los segundos índices sean de la misma ó de distinta clase.

Por ejemplo, en la matriz de cuarto grado

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

tomemos de la *primera* vertical el elemento $a_{3,1}$;
de la *segunda* el $a_{2,2}$ que puede elegirse porque no pertenece á la horizontal del anterior elemento que es la 3.ª;
de la *tercera* vertical el $a_{4,3}$ que puede asimismo elegirse porque no pertenece ni á la 2.ª ni á la 3.ª horizontal que son las

que pasan por los dos elementos anteriores; por último, de la *cuarta* el elemento $a_{1,4}$.

Multipliquemos estos cuatro elementos formando de esta suerte el producto $a_{3,1}\ a_{2,2}\ a_{4,3}\ a_{1,4}$ y démosle el signo + segun la regla establecida.

El producto

$$+\ a_{3,1}\ a_{2,2}\ a_{4,3}\ a_{1,4}$$

seria en este caso particular uno de los definidos precedentemente.

Pero este producto no es único: de la misma matriz pueden deducirse otros muchos distintos entre sí, aunque en número finito, y á la suma algebráica de todos ellos se le da el nombre de DETERMINANTE.

La determinante, pues, de los n^2 elementos de una matriz es por lo tanto *una cierta funcion algebráica, racional, entera y homogénea de dichos* n² *elementos.*

Como el número de términos de *las determinantes,* por pequeño que sea el *grado* de la matriz de donde se derivan, es considerable, se las expresa *abreviada* y *simbólicamente* por la misma matriz, la cual por otra parte es símbolo apropiado por su constitucion para expresar las leyes del órden combinatorio que corresponden á estas funciones algebráicas.

Los elementos, líneas, grado, etc. de la matriz, toman el nombre de *elementos, líneas, grado,* etc. de la determinante, y si la matriz es simétrica, *simétrica* se dice que es la determinante.

Designando, pues, por P el valor de una determinante del grado n, tendremos

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \cdots\cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \cdots\cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \cdots\cdots & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

pero entiéndase que este cuadro no es *matriz, grupo* ó *tabla.*

Por el contrario, debe considerarse como expresion *simbólica* y *abreviada* de una funcion perfectamente definida, que para valores numéricos de sus elementos tomará valores numéricos tambien y determinados.

20. Al formar cada término de una determinante, es claro que el órden en que se multipliquen los elementos de la matriz es de todo punto indiferente; porque en efecto: en primer lugar, el producto, en cuanto á su valor numérico, no varía porque se invierta el órden de los factores, y además el signo tampoco cambia (núm. 14); luego el término permanecerá invariable. De aquí se deduce que si se cree conveniente puede hacerse que una de las séries, la de los primeros ó la de los segundos índices, es decir, la que expresa las horizontales ó las verticales á que pertenece cada término, aparezca en órden natural y creciente, y solo habrá necesidad de tener en cuenta, para fijar el signo, las permutaciones de la segunda série.

De la definicion que hemos dado se deduce, que si escribimos aparte para uno cualquiera de los términos, la série de los primeros ó de los segundos índices, en ninguna de ellas podrá haber dos números repetidos, porque si los hubiera, como los índices marcan el número de órden de las horizontales y de las verticales, habria tambien dos ó más elementos pertenecientes á la misma horizontal ó á la misma vertical, lo cual es contra el supuesto. Además, en cada término entran n índices de la primera y n *índices* de la segunda clase, luego dichos índices, que son distintos, que no pueden exceder al número n, y que son en número n tambien, no serán otra cosa que una permutacion de los números 1, 2, 3. . . . n.

En resúmen, en cada término

$$a_{r_1,\,s_1}\, a_{r_2,\,s_2}\, a_{r_3,\,s_3} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\; a_{r_n,\,s_n}$$

de la determinante, las dos séries de subíndices primeros y segundos

$$r_1,\ r_2,\ r_3 \,.\;.\;.\;.\;.\; r_n\,;\quad s_1,\ s_2,\ s_3 \,.\;.\;.\;.\;.\; s_n,$$

son dos permutaciones de los números naturales 1, 2, 3. . . . n.

Veamos ahora cuál es el número de términos de una determinante del grado n.

Supongamos que están formados todos ellos, y hagamos de manera que la série de los primeros índices se presente en el órden natural 1, 2, 3, 4, ... n: es evidente, que unos términos solo diferirán de otros por la permutacion de los segundos índices, de suerte que efectuando todas las permutaciones de los números 1, 2, 3. . . . . n, y dando á los n factores, que entran en cada término, por primeros subíndices los números 1, 2, 3. . . . . n en órden natural, y por segundos subíndices cada una de dichas permutaciones, tendremos los varios términos de la determinante: en efecto:

1.° Todos los términos son distintos, puesto que distintas son las permutaciones de los segundos índices.

2.° Todos ellos son *posibles*, porque ni se repiten los primeros ni los segundos índices en un mismo término.

3.° No falta ninguno, toda vez que si faltase uno, haciendo que los primeros índices fomaran la permutacion principal 1, 2, 3. . . . . n, tendríamos que dicho término se presentaria bajo la forma $a_{1,r_1}\ a_{2,r_2},\ a_{3,r_3}. \ldots .\ a_{n,r_n}$ (1); pero este término ya está escrito, pues r_1, r_2. . . . . r_n es una de las permutaciones de los números 1, 2, 3. . . . . n, y todas han sido formadas. De aquí se deduce que la determinante de grado n contiene tantos términos como permutaciones se pueden formar con n objetos, es decir,

$$\mu = 1 \times 2 \times 3 \times 4. \ldots . n.$$

Dedúcese además un método en extremo sencillo para formar la determinante de una matriz: basta hallar las μ permutaciones de los números 1, 2, 3. . . . . n y formar μ términos,

(1) r_1, r_2, r_3. . . . r_n expresan una permutacion de los números 1, 2, 3. . . . n, es decir, estos n números escritos segun cierto órden.

poniendo en cada uno, á los n elementos generales a, por primeros índices, constantemente, la série 1, 2, 3. . . . . n en órden natural, y por segundos índices las varias permutaciones de dicha série con el signo correspondiente.

Es claro que puede repetirse respecto á los segundos índices lo que acabamos de decir respecto de los primeros, y recíprocamente: de suerte que pueden formarse todos los términos de la determinante, conservando constantes los segundos términos y permutando de todas las maneras posibles los primeros.

En resúmen, considerando entre todos los términos de la determinante el $a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n,n}$ que se designa con el nombre de *término principal* y que lleva siempre el signo $+$, puesto que ni en una ni en otra série de índices hay inversiones; dejando en él invariables los primeros ó los segundos índices, y permutando la otra série, obtendremos todos los términos de la determinante.

De los 1, 2, 3. . . . . n términos de la determinante, la mitad llevarán el signo $+$ y la otra mitad el signo $-$, segun se deduce inmediatamente de lo dicho en el núm. 10.

Puede aun indicarse la determinante P con este otro símbolo más conciso

$$\Sigma \pm a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}.\ .\ .\ .\ .\ a_{n,n},$$

en el cual solo se expresa el término principal afectado del signo Σ y del doble signo $\pm$, indicando el primero la suma algebráica de todos los términos que se obtienen por las permutaciones ya indicadas de los primeros ó segundos índices.

21. Si en la determinante P se cambian las horizontales en verticales, y recíprocamente, conservando el mismo órden de sucesion, tendremos otra matriz y otra determinante,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} & \ldots & a_{n,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & \ldots & a_{n,3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

en la cual los primeros índices indican el número de órden de las verticales, y los segundos el de las horizontales; pero es evidente que la determinante deducida de esta manera es idéntica á la primitiva, toda vez que ambas se pueden desarrollar del mismo modo, y partiendo del mismo término principal $a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}.\ .\ .\ .\ .\ a_{n,n}$.

22. Considerando ahora el desarrollo de la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & l_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & \dots & l_3 \\ \dots & & & & \\ a_n & b_n & c_n & \dots & l_n \end{vmatrix}$$

se ve que cada término es un producto de n elementos con letras é índices diversos, y que toma el signo + ó — segun que es par ó impar el número de inversion de las unas y de los otros. Este desarrollo puede aun deducirse del término principal $a_1\ b_2\ c_3.\ .\ .\ .\ .\ l_n$, permutando tan solo las letras ó solo los subíndices. Puede tambien expresarse dicha determinante con el símbolo

$$\Sigma \pm a_1\ b_2\ c_3.\ .\ .\ .\ .\ l_n.$$

23. Presentemos algunos ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_{1,1}\ a_{2,2} = a_{1,1}\ a_{2,2} - a_{1,2}\ a_{2,1}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1\ b_2 = a_1\ b_2 - a_2\ b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm a_1\ b_2\ c_3 = a_1\ b_2\ c_3 - a_1\ b_3\ c_2 - a_2\ b_1\ c_3 + a_2\ b_3\ c_1 + a_3\ b_1\ c_2 - a_3\ b_2\ c_1$$

Para formar cualquiera de las determinantes precedentes, por ejemplo, la de tercer grado, se escribirán en órden natural las tres letras a, b, c tantas veces como términos debe tener la determinante, es decir, $1 \times 2 \times 3 = 6$,

$$a\,b\,c \quad a\,b\,c \quad a\,b\,c \quad a\,b\,c \quad a\,b\,c \quad a\,b\,c$$

y á cada término le pondremos por subíndice las seis permutaciones siguientes de los números 1, 2, 3

$$1, 2, 3;\; 1, 3, 2;\; 2, 1, 3;\; 2, 3, 1;\; 3, 1, 2;\; 3, 2, 1.$$

De este modo tendremos,

$$a_1 b_2 c_3;\; a_1 b_3 c_2;\; a_2 b_1 c_3;\; a_2 b_3 c_1;\; a_3 b_1 c_2;\; a_3 b_2 c_1:$$

Contando las inversiones de los subíndices hallaremos sucesivamente: 0, 1, 1, 2, 2, 3 inversiones, de suerte que deberemos tomar para los seis términos anteriores los signos $+ - - + + -$.

Veremos bien pronto que las determinantes pueden ser desarrolladas por métodos mucho más sencillos y más rápidos que el precedente, y deduciremos leyes generales de desarrollo; por ahora observemos tan solo que una determinante de *segundo grado equivale al producto de los dos elementos principales disminuido del de los otros dos.*

24. El producto de todos los elementos de la segunda diagonal es aun un término de la determinante, puesto que no hay repeticion, ni en los primeros, ni en los segundos índices. En la determinante P dichos elementos ordenados segun los primeros índices, ó sean los de las horizontales forman el producto

$$a_{1,n}\; a_{2,n-1}\; a_{3,n-2}\; a_{4,n-3} \cdots\; a_{n,1},$$

en el cual los primeros índices proceden segun el órden directo, y los segundos en órden rigorosamente inverso. Pero como en la série

$$n,\; n-1,\; n-2, \ldots\ldots 2,\; 1,$$

el número de inversiones es, (núm. 2), $\frac{1}{2}\,n\,(n-1)$, el signo que corresponde á este término será el que resulte de la potencia $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ (núm. 14).

25. Cuando en una determinante se suprimen cierto número de horizontales y otras tantas verticales, queda una matriz cuadrada formada por los demás elementos, y á la cual corresponde una nueva determinante, la que recibe el nombre de *determinante menor* por comparacion con la primitiva, de donde se deriva.

Dos *menores* de una misma matriz primitiva se dice que son *complementarias*, ó que una es *complemento* de la otra, *cuando cada una* resulta de la matriz fundamental, suprimiendo en ella las líneas horizontales y verticales que concurren á la formacion de la *otra*.

Por ejemplo, si en la matriz de cuarto grado

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

suprimimos la *primera* y la *tercera* línea horizontal, y en la matriz rectangular resultante

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

suprimimos asimismo la *primera* y la *tercera* vertical, quedará la matriz cuadrada

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

que es *una menor* de segundo grado.

A la formacion de esta concurren:

1.° La *segunda* y la *cuarta* horizontal, segun indican los subíndices.

2.° La *segunda* y la *cuarta* vertical segun se deduce del número de órden de las letras.

Pues bien, suprimiendo sucesivamente en la matriz primitiva

1.° La *segunda* y la *cuarta* horizontal.
2.° La *segunda* y la *cuarta* vertical, tendremos:
1.° La matriz rectangular

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

2.° La matriz cuadrada

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

cuya determinante es *complementaria* de la precedente de segundo grado.

Es evidente que la suma de los grados de dos menores complementarias es igual al grado de la primitiva.

26. Conviene observar que puede considerarse á toda determinante menor de grado m como procediendo de una matriz cuadrada comun á dos matrices rectangulares, una formada de m horizontales de la primitiva, y otra de m verticales. Por ejemplo, la determinante

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

tiene por matriz la parte comun á estas dos matrices rectangulares:

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

La menor complementaria es asimismo la que corresponde á la matriz de las horizontales restantes de la primitiva, y á la de las verticales de esta que no concurren á formar la primera.

Si representamos en general por H una menor de grado m, de la determinante P, correspondiente á la matriz comun á dos rectangulares, formada la primera por las horizontales que tienen por números de órden los comprendidos en la série

$$r_1, r_2, r_3, r_4 \dots\dots r_m,$$

y la segunda por las m verticales marcadas con los índices

$$s_1, s_2, s_3, s_m \dots\dots s_m,$$

representando una y otra série m números distintos y escritos en órden directo de la série natural 1, 2, 3, 4. . . . . n

Tendremos

$$H = \begin{vmatrix} a_{r_1, s_1} & a_{r_1, s_2} & a_{r_1, s_3} & \dots\dots & a_{r_1, s_m} \\ a_{r_2, s_1} & a_{r_2, s_2} & a_{r_2, s_3} & \dots\dots & a_{r_2, s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots \\ a_{r_m, s_1} & a_{r_m, s_2} & a_{r_m, s_3} & \dots\dots & a_{r_m, r_m} \end{vmatrix}.$$

En esta determinante menor los primeros índices de cada vertical reproducen la série $r_1, r_2, r_3 \dots\dots r_m$, cuyos términos expresan el órden de los horizontales; y los segundos índices de cada horizontal reproducen asimismo la série $s_1, s_2, s_3 \dots s_m$, que expresa los números de órden de las verticales. Es evidente además que en la matriz complementaria de H los primeros índices de cada vertical serán los números de la série 1, 2, 3, 4. . . . . n distintos de los $r_1, r_2, r_3 \dots\dots r_m$, y que los segundos índices de las horizontales serán de una manera análoga los números de la misma série 1, 2, 3. . . . . n, diferentes de $s_1, s_2, s_3 \dots\dots s_m$.

Nótese que las matrices de las determinantes menores difieren, de la forma general de las demás matrices, en que los dos sistemas de subíndices no están formados por todos los números naturales desde 1 hasta n sino por *algunos números de esta série*, si bien siempre se hallan en el órden natural creciente.

Así en la matriz (núm. 25)

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

ó en su equivalente

$$\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{4,2} \\ a_{2,4} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

las dos séries $r_1, r_2 \ldots r_m$, y $s_1, s_2 \ldots s_m$ son:

2,4 la primera y 2,4 la segunda,

y faltan de la série 1, 2, 3, 4 los números 1,3.

27. Consideremos el desarrollo de la determinante H.

Cada uno de sus términos es un producto de m elementos en los que los primeros índices forman una permutacion de los números $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$, y los segundos una permutacion asimismo de los números $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$, y pueden deducirse fácilmente del término principal

$$a_{r_1, s_1} a_{r_2, s_2} a_{r_3, s_3} a_{r_4, s_4} \ldots \ldots a_{r_m, s_m}.$$

Permutando de todas las maneras posibles, ó solo los primeros índices, ó bien los segundos, dando á cada término el signo que le corresponde, y sumando todos ellos, obtendremos la determinante H.

En cuanto al signo, para determinarlo, deberíamos formar en cada término las permutaciones de horizontales y verticales correspondientes, (núm. 19), despues de marcar cada horizontal con un número de órden en la matriz H, números de órden que serian los 1, 2, 3 . . . . . m, distintos en general de los $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_m$; $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_m$; pero puede simplificarse esta investigacion y la introduccion de nuevos números de órden recordando (núm. 3), que las mismas inversiones presentan las permutaciones de estas séries $r_1, r_2 \ldots r_m$;

$s_1, s_2 \ldots s_m$, que la de sus números de órden 1, 2, 3. . . m. Sea, por ejemplo,

$$a_{3,4}\ a_{7,2}\ a_{1,9}\ a_{4,6}\ a_{8,7}\ ,$$

un término de la determinante II en la cual suponemos $m = 5$: este término podrá escribirse de este modo, sin que su signo varíe,

$$a_{1,9}\ a_{3,4}\ a_{4,6}\ a_{7,2}\ a_{8,7},$$

y puesto que los primeros índices 1, 3, 4, 7, 8 siguen el órden natural, basta considerar los segundos 9, 4, 6, 2, 7.

Ahora bien, tanto dá escribir estos números en órden natural 2, 4, 6, 7, 9, y sustituyéndolos por sus números de órden 1, 2, 3, 4, 5, buscar las inversiones del grupo 5, 2, 3, 1, 4, (que se obtiene sustituyendo al 9 su número de órden 5
al 4 el suyo. 2
al 6. 3
al 2. 1
y al 7. . . . . 4)
como buscar directamente las inversiones del grupo 9, 4, 6, 2, 7.

En uno y otro, es decir, en 9, 4, 6, 2, 7 y en 5, 2, 3, 1, 4, hallaremos siempre 6 inversiones lo que prueba que el término propuesto debe llevar el signo +.

De aquí resulta finalmente que las determinantes menores de la primitiva P se desarrollan exactamente de la misma manera que la fundamental, y que empleando notaciones análogas pueden expresarse para la fórmula

$$\Sigma \pm a_{r_1, s_1}\ a_{r_2, s_2}\ a_{r_3, s_3} \ldots\ldots a_{r_m, s_m}.$$

Para obtener, pues, sus diferentes términos, conservando los primeros índices, se permutarán los segundos, ó recíprocamente, y se dará á cada término en la suma algebráica de todos ellos el signo que le corresponda.

28. Dos determinantes menores de una primitiva se dice que son conjugadas cuando las horizontales y las verticales, que concurren á la formacion de una de ellas, están definidas por

los mismos números de órden, pero invertidos, de las horizontales y verticales de la segunda.

Es decir, que siendo

$r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ los números de órden de las horizontales,

y $s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$ los de las verticales que concurren á la formacion de la primera determinante,

$s_1, s_2, s_3 \ldots s_m$ son los números de órden de las horizontales,

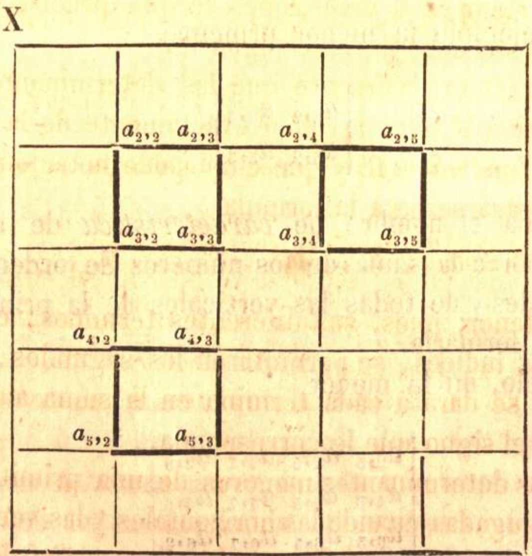
y $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$ los de las verticales que forman la segunda determinante.

Veriamos fácilmente como en el (núm. 17) que los elementos de ambas determinantes conjugadas forman dos figuras simétricas por relacion á la diagonal principal tomada como eje.

La matriz siguiente indica esta agregacion geométrica.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} \end{vmatrix}$$

X



Y

La palabra *conjugado* continúa, pues, indicando simetría respecto á la diagonal principal X Y.

Si los números de órden de las horizontales que concurren á formar una determinante menor son los mismos que los de las verticales, esta ***determinante menor*** se dice que es ***principal.***

De esta definicion se deduce inmediatamente:

1.° Que las horizontales y las verticales de la primitiva, que concurren á formar la determinante menor son conjugadas dos á dos, es decir, cada vertical con la horizontal del mismo índice.

2.° Que sus diferentes elementos son asimismo conjugados en la determinante primitiva.

3.° Que la menor complementaria, de una menor principal, es principal tambien, puesto que separando de las dos séries de índices 1, 2, 3. . . n; 1, 2, 3. . . n de horizontales y verticales, los mismos índices, los restantes son tambien iguales.

4.° Que la matriz de toda menor principal constituye una figura geométrica que tiene por eje de simetría la diagonal X Y.

Sirva de ejemplo la menor principal

$$\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

29. Se dá el nombre de *característica* de una determinante menor á la suma de los números de órden de todas las horizontales y de todas las verticales de la primitiva, que concurren á formarla.

Por ejemplo, en la menor

$$\begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,5} & a_{2,7} & a_{2,8} \\ a_{4,3} & a_{4,5} & a_{4,7} & a_{4,8} \\ a_{6,3} & a_{6,5} & a_{6,7} & a_{6,8} \\ a_{9,3} & a_{9,5} & a_{9,7} & a_{9,8} \end{vmatrix},$$

como las dos séries de índices son 2, 4, 6, 9, y 3, 5, 7, 8, la característica será

$$\chi = 2 + 4 + 6 + 9 + 3 + 5 + 7 + 8 = 44.$$

En general designando por χ la característica de H (número 26), tendremos

$$\chi = r_1 + r_2 + \ldots r_m + s_1 + s_2 + \ldots s_m.$$

Si designamos análogamente por χ' la característica de la determinante complementaria de H; por r'_1, r'_2, $r'_3 \ldots\ldots r'_m$; s'_1, s'_2, $s'_3 \ldots\ldots s'_m$ los índices de las horizontales y de las verticales de esta última determinante, hallaremos

$$\chi' = r'_1 + r'_2 + \ldots\ldots r'_m + s'_1 + s'_2 + \ldots\ldots s'_m,$$

y sumando ambas ecuaciones,

$$\chi + \chi' = (r_1 + r_2 + \ldots\ldots r_m + r'_1 + r'_2 + \ldots\ldots r'_m)$$
$$+ (s_1 + s_2 + \ldots\ldots s_m + s'_1 + s'_2 + \ldots\ldots s'_m);$$

pero como los índices de las horizontes de H, y los análogos de la determinante complementaria forman la série de los números 1, 2, 3. . . . . n; y otro tanto podemos decir de los índices de las verticales, resulta

$$r_1 + r_2 + \ldots r_m + r'_1 + r'_2 + \ldots r'_m = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n$$
$$s_1 + s_2 + \ldots s_m + s'_1 + s'_2 + \ldots s'_m = 1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n$$

y finalmente,

$$\chi + \chi' = 2(1 + 2 + + \ldots\ldots n);$$

de donde se deduce, puesto que la suma de χ y χ' es un número par, que *las características de dos menores complementarias son á la vez pares ó á la vez impares.*

Es claro que la característica de cualquier menor de la primitiva determinante P es siempre igual á la suma de todos los índices de cada término de dicha determinante menor; pero en general se calculará por el término principal.

Se dá el nombre de *característica* de un elemento $a_{r,s}$ á la suma $r+s$ de sus dos índices.

30. Dada una determinante menor su *determinante complementaria* puede ser *algebráica* si se afecta del signo + ó — segun la regla que á continuacion daremos, ú *ordinaria* cuando se prescinde de este signo: en este último caso especificaremos casi siempre dicha circunstancia por el adjetivo *ordinaria*.

A las determinantes complementarias algebráicas se les dá el signo + ó el — segun que su característica es *par* ó *impar*; pero como las características de dos menores complementarias son á la vez, las dos pares ó impares, podemos generalizar el enunciado anterior diciendo, que la menor complementaria algebráica lleva el signo + ó — segun que es *par* ó *impar* su característica ó la de la menor de la cual es complemento.

Si, pues, H designa una determinante menor, K su complemento ordinario y χ la característica de una ú otra determinante, la menor complementaria de H será evidentemente $(-1)^{\chi}K$; y vice-versa $(-1)^{\chi}H$ la de K.

Es claro que sin alterar dichos signos podemos aumentar ó quitar á χ un número par cualquiera y aun reducir esta característica á *cero* ó á *uno*.

De aquí resulta, y esta observacion es importantísima, que cada determinante *menor* es una funcion algebráica, perfectamente determinada en su forma y en los signos de sus diferentes términos, y por lo tanto invariable, de varios elementos de la determinante primitiva; pero que si con relacion á esta se considera la menor complementaria, y no ya por sí como *otra menor*, sino con el carácter de complementaria de la primera y subordinada por decirlo así á ella, de suerte que ambas han de unirse en el cálculo segun ciertas leyes que más adelante estudiaremos; en este caso la segunda menor, es decir, la complementaria de la primera, toma un factor $(-1)^\chi$ dependiente de la característica χ, y que le dá signo conveniente, aparte de los signos de cada uno de sus términos definidos por la ley general de las determinantes menores.

Así dada la determinante menor (núm. 26)

$$\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_4 & d_4 \end{vmatrix},$$

la complementaria órdinaria será

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

y el complemento algebráico

$$(-1)^\chi \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

31. Respecto á *menores complementarias algebráicas*, ó abreviadamente *á complementos algebráicos*, deben notarse los siguientes casos particulares:

I. El complemento algebráico de *un elemento* lleva el signo + ó el signo — segun es par ó impar la suma de los números de órden de las dos líneas que pasan por dicho elemento.

Sea el elemento en $a_{r,s}$: este elemento puede considerarse como *una menor* y su complemento será otra menor del grado $n - 1$; pero el signo de la última depende de su característica ó de la característica de $a_{r,s}$ (núm. 29) y esta es $r + s$, luego el complemento algebráico del elemento $a_{r,s}$ llevará el signo + ó el signo — segun que $r+s$ sea par ó impar: pero r es el número de órden de la horizontal que contiene al elemento $a_{r,s}$, y s el de la vertical que pasa por dicho elemento, luego el teorema queda completamente demostrado.

II. Los complementos algebráicos de los elementos sucesivos de una misma línea llevan alternativamente el signo + y el — ; comenzando por + si el número de órden de la línea es impar y por — si por el contrario es par.

En efecto, representando por r el número de órden de la línea en cuestion

$$a_{r,1},\ a_{r,2},\ a_{r,3}.\ .\ .\ .\ .\ a_{r,n}$$

serán sus varios elementos: y las características de estos, que son las que dan signo (teorema anterior) á los complementos correspondientes

$$r+1,\ r+2,\ r+3.\ .\ .\ .\ .\ r+n,$$

números alternativamente pares é impares, y que comenzarán por número par, si r es impar; ó por número impar, si r fuese par.

III. El complemento algebráico de un elemento principal ó de una determinante menor principal, lleva siempre el signo +.

Respecto al primer caso, la proposicion es evidente, porque todo elemento principal es de la forma

$$a_{r,r},$$

y la característica $2\,r$ de este elemento es siempre un número par.

En cuanto al segundo caso, observaremos que las dos séries de índices $r_1, r_2, r_3.\ .\ .\ .\ .\ r_m$; $r_1, r_2, r_3.\ .\ .\ .\ .\ r_m$ de las horizontales y de las verticales, en las menores principales son iguales, y que por lo tanto la característica

$$(r_1+r_2+.\ .\ .\ r_m)+(r_1+r_2+.\ .\ .\ r_m)=2\,(r_1+r_2+.\ .\ .\ r_m)$$

es siempre un número par.

IV. Los complementos algebráicos de dos elementos conjugados $a_{r,s}$, $a_{s,r}$, ó de dos menores conjugadas

$$\begin{vmatrix} a_{r_1,s_1} & a_{r_1,s_2} & \dots & a_{r_1,s_m} \\ a_{r_2,s_1} & a_{r_2,s_2} & \dots & a_{r_2,s_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r_m,s_1} & a_{r_m,s_2} & \dots & a_{r_m,s_m} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{s_1,r_1} & a_{s_1,r_2} & \dots & a_{s_1,r_m} \\ a_{s_2,r_1} & a_{s_2,r_2} & \dots & a_{s_1,r_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s_m,r_1} & a_{s_m,r_2} & \dots & a_{s_m,r_m} \end{vmatrix},$$

llevan siempre el mismo signo.

En efecto, en el primer caso, es decir, cuando se trata de las determinantes complementarias de los elementos $a_{r,s}$, $a_{s,r}$, las características $r+s$ y $s+r$ de ambos elementos son iguales; y en el segundo caso, tanto en una como en otra *menor*, las características

$$r_1 + r_2 + \dots . r_m + s_1 + s_2 + \dots . s_m,$$
$$s_1 + s_2 + \dots . s_m + r_1 + r_2 + \dots . r_m,$$

son tambien iguales, luego el signo de los complementos algebráicos, que solo depende de dichas características, es el mismo.

32. *Propiedad fundamental.*—Sean, P una determinante del grado n;

H una determinante menor de P y del grado m;

K su menor complementaria cuyo grado será $n - m$.

Si multiplicamos los desarrollos de las determinantes H y K, es fácil probar que, cada término del producto H K, abstraccion hecha del signo, es un término de la determinante P.

En efecto, sean

$$h = \pm a_{r_1, s_1} a_{r_2, s_2} a_{r_3, s_3} \dots . a_{r_m, s_m}$$

$$\text{y } k = \pm a_{r'_1, s'_1} a_{r'_2, s'_2} a_{r'_3, s'_3} \dots . . a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}}$$

dos términos, el primero del desarrollo H y el segundo del desarrollo K, afectados de los signos que les corresponden segun las permutaciones de sus índices.

Hemos dicho ya (núm. 26) que el conjunto de los índices $r_1, r_2 \ldots r_m, r'_1, r'_2 \ldots r'_m$ no es otra cosa que la série $1, 2, 3 \ldots\ldots n$ permutada de cierto modo, y que otro tanto sucede con los subíndices $s_1, s_2 \ldots s_m, s'_1, s'_2 \ldots s'_m$, luego es evidente que el producto

$$(a) \quad a_{r_1, s_1}\, a_{r_2, s_2} \ldots a_{r_m, s_m}\, a_{r'_1, s'_1}\, a_{r'_2, s'_2} \ldots a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}}$$

que contiene n factores, y en el que tanto los primeros como los segundos índices son permutaciones de la série $1, 2, 3 \ldots n$ es un término de la determinante P.

Ahora bien, este producto llevará en P el signo + ó el signo — (núm. 19), segun que el número total de inversiones de las séries $r_1, r_2 \ldots r_m, r'_1, r'_2 \ldots r'_{n-m}$; $s_1, s_2 \ldots s_m, s'_1, s'_2 \ldots s'_{n-m}$ sea par ó impar; pero como las inversiones de los grupos $r_1, r_2 \ldots r_m$; $r'_1, r'_2 \ldots r'_{n-m}$; $s_1, s_2 \ldots s_m$; $s'_1, s'_2 \ldots s'_{n-m}$ están ya tenidas en cuenta en los signos de h y k, basta para conocer el signo final del producto considerar tan solo las inversiones que los dos grupos formados por los primeros y segundos índices de h forman con los dos grupos que constituyen los primeros y segundos índices de k: llamando χ al número total de estas inversiones, tendremos que la expresion $(-1)^{\chi} h\, k$ será un término de P.

Si aun se quiere comprender con más claridad lo que precede, designemos por E el número de inversiones en los índices del producto (a);

por χ las inversiones de todos los índices del grupo

$$r_1, r_2 \ldots r_m \text{ con relacion á } r'_1, r'_2 \ldots r'_m,$$
$$\text{y del } s_1, s_2 \ldots s_m \text{ respecto al } s'_1, s'_2 \ldots s'_m;$$

por φ las de los dos grupos de la izquierda;

y por φ' las de los dos de la derecha.

Es evidente que tendremos la relacion $E = \varphi + \varphi' + \chi$ (número 5).

Los valores de h y k serán con sus signos respectivos

$$h = (-1)^{\varphi} a_{r_1, s_1} \, a_{r_2, s_2} \dots a_{r_m, s_m} \,,$$

$$k = (-1)^{\varphi'} a_{r'_1, s'_1} \, a_{r'_2, s'_2} \dots a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}} \,;$$

y el término de P

$$(-1)^{E} a_{r_1, s_1} \, a_{r_2, s_2} \dots a_{r_m, s_m} \, a_{r'_1, s'_1} \, a_{r'_2, s'_2} \dots a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}},$$

puede trasformarse en

$$(-1)^{\varphi + \varphi' + \chi} a_{r_1, s_1} \, a_{r_2, s_2} \dots a_{r_m, s_m} \, a_{r'_1, s'_1} \, a_{r'_2, s'_2} \dots a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}},$$

ó en $(-1)^{\chi} \left[(-1)^{\varphi} a_{r_1, s_1} \, a_{r_2, s_2} \dots a_{r_m, s_m} \right] \times$

$$\left[(-1)^{\varphi'} a_{r'_1, s'_1} \, a_{r'_2, s'_2} \dots a_{r'_{n-m}, s'_{n-m}} \right] = (-1)^{\chi} h \, k$$

segun habiamos indicado.

Pero χ se descompone en dos partes:

χ' . . . inversiones en la série $r_1, r_2, r_3 \dots r_m, r'_1, r'_2 \dots r'_{n-m}$ del grupo $r_1 \dots r_m$ sobre el $r'_1 \dots r'_{n-m}$;

χ'' . . . inversiones en la série $s_1, s_2 \dots s_m, s'_1, s'_2 \dots s'_{m-n}$ del grupo $s_1 \dots s_m$ sobre el $s'_1 \dots s'_{n-m}$,

y se tiene (núm. 4)

$$\chi' = r_1 + r_2 + \dots r_m - \frac{1}{2} m (m + 1),$$

$$\chi'' = s_1 + s_2 + \dots s_m - \frac{1}{2} m (m + 1);$$

luego finalmente

$$\chi = \chi' + \chi'' = r_1 + r_2 \dots + r_m + s_1 + s_2 + \dots + s_m - m (m + 1) =$$

$\varkappa - m (m + 1)$, siendo $\varkappa$ la característica de H.

El término $(-1)^{\chi} h \, k$ se convertirá en $(-1)^{\varkappa - m(m-1)} h \, k$ ó suprimiendo $m (m + 1)$, que es siempre un número par,

$$(-1)^{\varkappa} h \, k.$$

De aquí resulta que, para convertir los términos del producto H K en términos de la determinante primitiva P, basta multiplicar todos ellos por $(-1)^{x}$, y que por lo tanto el producto $(-1)^{x}$ H K es una parte de P. Puede pues establecerse el siguiente teorema.

El producto de dos menores complementarias tomado con el signo + ó — segun que la característica de una ú otra sea par ó impar, es una parte de la determinante primitiva.

O de otro modo:

El producto de una determinante menor H por su complemento algebráico $(-1)^{x}$ K es una parte de la determinante primitiva P.

34. El complemento de una determinante menor se dice aun que es *complemento* de cualquiera de los términos de dicha menor, porque en efecto es la determinante que resulta de suprimir todas las líneas horizontales y verticales que pasan por los diferentes elementos de dicho término.

Por ejemplo, en la determinante de cuarto grado

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}$ es la determinante complementaria de esta otra $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$;

pero al mismo tiempo si se desarrolla la primera y del desarrollo $a_{2,2}\, a_{4,4} - a_{2,4}\, a_{4,2}$ se toma un término cualquiera $a_{2,4}\, a_{4,2}$, puede decirse que la determinante $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ es el complemento de dicho término $a_{2,4}\, a_{4,2}$, en este sentido, que suprimiendo de la matriz primitiva la 2.ª y 4.ª horizontal y la 4.ª y 2.ª vertical, que son las líneas que indican los índices 2, 4; 4, 2, se obtiene la matriz $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$.

En general se dice que un producto de m elementos de una determinante, tiene por complemento *la menor* que resulta de suprimir todas las horizontales y verticales que pasan por dichos elementos; es decir, todas las horizontales que tienen por números de órden los primeros índices del producto y todas las verticales que tienen por números de órden los segundos, y por característica la suma de sus números de órden.

De aquí resulta el siguiente teorema:

Si se multiplica el producto ALGEBRÁICO *de* m *elementos de una determinante por su complemento* ALGEBRÁICO, *resulta una parte de la determinante primitiva.*

En el ejemplo precedente el producto de

$$-a_{2,4}\,a_{4,2}$$

por $(-1)^{1+3+1+3} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ será una parte de la determinante de 4.º grado.

§ IV.

Propiedades generales de las determinantes.

35. Si se multiplican los elementos de una línea de una determinante de grado n por sus respectivos *complementos algebráicos*, que serán determinantes del grado $n-1$, obtendremos n partes, evidentemente distintas entre sí, de la determinante primitiva, y su suma será por lo tanto una parte de dicha determinante; pero cada parte contiene tantos términos como son los que corresponden á una determinante de grado $n-1$, es decir, $1, 2, 3 \ldots (n-1)$, luego el número total de términos, puesto que son n los elementos de cada línea, será $n \times 1, 2, 3 \ldots (n-1) = 1, 2, 3 \ldots n$ y este es precisamente el número de términos de la determinante propuesta: de suerte que dicha suma no es ya una parte, sino la determinante misma.

De aquí se deduce que:

Cada determinante equivale á la suma de los productos de todos los elementos de una línea por los respectivos complementos algebráicos.

O en otros términos:

Cada determinante equivale á la suma algebráica de los productos de todos los elementos de una línea por los respectivos complementos ordinarios tomados alternativamente con el signo + ó con el signo —, comenzando por el + si el número de órden de la línea es impar y por el — si es par.

36. Este teorema permite desarrollar las determinantes con gran facilidad reduciendo sucesivamente el grado.

Ejemplos:

I. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ v & x & y \\ v' & x' & y' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ u & x & y \\ u' & x' & y' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ u & v & y \\ u' & v' & y' \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ u & v & x \\ u' & v' & x' \end{vmatrix}$$

$$= a \left[b' \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix} \right] - b \left[a' \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix} \right]$$

$$+ c \left[a' \begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} + d' \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \right] - d \left[a' \begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} \right]$$

$$= a\, b' (x\, y' - y\, x') - a\, c' (v\, y' - v'\, y) + a\, d' (v\, x' - v'\, x) - b\, a' (x\, y' - y\, x') +$$
$$b\, c' (u\, y' - u'\, y) - b\, d' (u\, x' - u'\, x) + c\, a' (v\, y' - v'\, y) - c\, b' (u\, y' - u'\, y) +$$
$$c\, d' (u\, v' - u'\, v) - d\, a' (v\, x' - v'\, x) + d\, b' (u\, x' - u'\, x) - d\, c' (u\, v' - u'\, v).$$

II. $$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x' & y' \\ 1 & x'' & y'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & y' \\ 1 & y'' \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & x' \\ 1 & x'' \end{vmatrix} = (x'\, y'' - x''\, y') - x\,(y'' - y') + y\,(x'' - x') = (x'\, y'' - y'\, x'') - (x\, y'' - y\, x'') + (x\, y' - y\, x').$$

III. $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2\,(4 + 3) + (-8 - 6) + 3\,(+12 - 12) = 0.$$

57. Considerando la determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

designaremos en general por $A_{r,s}$ el *complemento algebráico* del elemento $a_{r,s}$ es decir, la determinante de grado de $n - 1$ que resulta de suprimir en la matriz precedente la r.ma horizontal y la s.ma vertical: esto supuesto el teorema precedente se expresará por una de las dos fórmulas

$$P = a_{r,1} A_{r,1} + a_{r,2} A_{r,2} + a_{r,3} A_{r,3} \ldots \ldots a_{r,n} A_{r,n},$$
$$P = a_{1,r} A_{1,r} + a_{2,r} A_{2,r} + a_{3,r} A_{3,r} \ldots \ldots a_{n,r} A_{n,r},$$

segun que se elijan, para ordenar el desarrollo, los elementos de la horizontal ó de la vertical r.ma

r puede evidentemente tomar todos los valores $1, 2, 3 \ldots n$.

38. Si se trasforma una determinante cambiando recíprocamente dos líneas paralelas contiguas, se reconoce desde luego que el complemento ordinario de un mismo elemento perteneciente á una de las dos líneas alternadas es el mismo que en la primitiva; pero que si se considera dicho complemento como algebráico, en este caso tomará signos contrarios en las dos determinantes.

En efecto, sean

$$P = \begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a\ b\ c\ d\ldots\ldots k \\ a'\ b'\ c'\ d'\ldots\ldots k' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

las dos líneas contiguas que se alternan, convirtiéndose la determinante P en esta otra

$$P' = \begin{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'\ b'\ c'\ d'\ldots\ldots k' \\ a\ b\ c\ d\ldots\ldots k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{vmatrix};$$

representemos por r el número de órden de la línea $a, b, c\ldots$ en cuyo caso $r+1$ será el de la siguiente $a', b', c'\ldots\ldots$ y sea, por último, k el elemento que consideramos.

Puesto que el complemento ordinario se obtiene suprimiendo la horizontal y la vertical que pasan por k, es claro que en P ó en P' siempre resultará la misma matriz suprimiendo la horizontal $a, b, c\ldots k$ y la vertical que pasa por k; por lo tanto los complementos ordinarios de k son idénticos en P y en P'.

Veamos ahora cuál es el signo de cada uno.

El correspondiente á P viene dado por el símbolo $(-1)^{r+s}$, puesto que r es el primer índice de k, y podemos designar por s el segundo. El de P' es el que resulta en la potencia $(-1)^{r+1+s}$ toda vez que la línea $a\ b\ c\ldots k\ldots$ ha avanzado un lugar y su número de órden, y el de k por consiguiente, en P', es $r+1$ al paso que el índice s no ha variado.

Pero $(-1)^{r+s}$ y $(-1)^{r+s+1}$ son de signo contrario, luego queda demostrada la proposicion.

Supongamos por ejemplo que en la determinante P se cambian las dos primeras verticales, tendremos:

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad P' = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,2} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n,2} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Segun lo demostrado, si desarrollamos las determinantes P y P' por los elementos de la primera línea en P, y de la segunda en P', tendremos

$$P = a_{1,1}\,A_{1,1} + a_{2,1}\,A_{2,1} + a_{3,1}\,A_{3,1} \dots a_{n,1}\,A_{n,1},$$
$$P' = -a_{1,1}\,A_{1,1} - a_{2,1}\,A_{2,1} - a_{3,1}\,A_{3,1} \dots a_{n,1}\,A_{n,1}$$

y por lo tanto $P = -P'$.

De aquí se deduce que el *cambio de dos líneas paralelas consecutivas no altera el valor absoluto de una determinante, pero le hace cambiar de signo.*

Si, dada una determinante, se traslada paralelamente á sí misma una línea horizontal ó vertical, caminando en uno ú otro sentido, la determinante cambia de signo á cada cambio segun hemos demostrado; luego,

avanzando un *lugar cambiará de signo* la determinante;
avanzando *dos recobrará* su signo primitivo;
avanzando *tres* lugares *cambiará* de nuevo,
y en general la determinante cambiará de signo ó conservará el que tenia segun que avance la línea dada un número par ó impar de líneas ó lugares; de suerte que designando por P' la nueva determinante, que resulta de trasladar una línea en uno ú otro sentido sobre r líneas consecutivas, tendremos

$$P' = (-1)^r\,P.$$

Partiendo de esta propiedad, y razonando respecto á las determinantes, como en el núm. 8 respecto á las permutaciones, se llega inmediatamente al siguiente teorema.

Una determinante cambia de signo, pero no de valor, cuando se permutan dos líneas paralelas cualesquiera.

39. Resulta de lo expuesto que una determinante no cambia de valor cuando se cambian entre sí varias horizontales y verticales, es decir, horizontales por horizontales y verticales por verticales; pero que conserva ó muda el signo segun que que es *par* ó *impar* el número total, entre horizontales y verticales, de los cambios efectuados. O de otro modo: segun que el número de inversiones que reciben los primeros y segundos índices de la determinante P sea par ó impar. Pero como la permutacion de las horizontales aparece en los primeros índices del término principal de la nueva determinante, y la permutacion de las verticales en los segundos índices de dicho término principal, resulta todavía este tercer enunciado para el teorema precedente:

Cuando en una determinante se cambian entre sí varias horizontales y varias verticales no cambia su valor, pero conserva ó muda el signo segun sea par ó impar el número total de inversiones en las dos séries de índices del término principal de la nueva determinante.

Representando por Σ este número de inversiones tendremos

$$P' = (-1)^{\Sigma} P.$$

Casos particulares de la fórmula $(-1)^{\Sigma} P$. I. Si la determinante P' se forma disponiendo en órden rigorosamente inverso las verticales, sin alterar el órden de las horizontales; ó al contrario, conservando el órden de las horizontales, el núm. Σ será igual núm. (2) á $\frac{1}{2} n (n - 1)$, y por lo tanto

$$P' = (-1)^{\frac{1}{2} n (n-1)} P.$$

II. Supongamos ahora que se forma P trasladando de derecha á izquierda, hasta que ocupen las m primeras líneas, y en órden directo creciente, las que en la determinante P llevan los números de órden $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_m$; y que análogamente se hacen subir hasta las m primeras horizontales las que en P ocupaban los lugares $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_m$ colocándolas como las verticales en órden directo tambien.

Las inversiones que del cambio de verticales resulta serán, atendiendo á la manera de efectuar este cambio,

$$s_1 + s_2 + \ldots\ldots s_m - \frac{1}{2} m(m-1); \text{ (núm. 4)}$$

las que proceden del cambio de horizontales serán análogamente

$$r_1 + r_2 + \ldots\ldots r_m - \frac{1}{2} m(m+1);$$

y por lo tanto

$$\Sigma = r_1 + r_2 + \ldots + r_m + s_1 + s_2 + \ldots s_m - m(m+1),$$

ó designando, segun notacion ya convenida, por $\varkappa$ la característica de la menor formada por las horizontales $r_1, r_2, r_3 \ldots r_m$, y por las verticales $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_m$, resulta

$$\Sigma = \varkappa - m(m+1)$$

y la fórmula $P' = (-1)^{\Sigma} P$ se convierte en

$P' = (-1)^{\varkappa - m(m+1)} P$, ó suprimiendo el número par $m(m+1)$

$$P' = (-1)^{\varkappa} P.$$

Debemos observar, que la determinante menor definida en P por su característica $\varkappa$, se halla en P' convertida en *menor principal*, y su matriz es la parte comun á las matrices rectangulares formadas por las m primeras horizontales y las m primeras verticales.

40. Del teorema del núm. 35, ó de la fórmula del núm. 37,

que lo expresa analíticamente, se deducen las siguientes proposiciones:

Si todos los elementos de una línea tienen un factor comun, podrá sacarse este como factor de toda la determinante.

Supongamos en efecto que en la determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} . & . . . & a_{1,n} \\ . . . . & . . . & . . . & . . . \\ a_{r,1} & a_{r,2} . & . . . & a_{r,n} \\ . . . . & . . . & . . . & . . . \\ a_{n,1} & a_{n,2} . & . . . & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

todos los elementos de la línea $a_{r,1}$, $a_{r,2}$. . . . . $a_{r,n}$ tengan un factor comun d, de suerte que

$$a_{r,1} = d\,a'_{r,1}\ ;\ a_{r,2} = d\,a'_{r,2}\ ;\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{r,n} = d\,a'_{r,n}.$$

Desarrollando P por la fórmula del núm. 37, tendremos

$$P = a_{r,1} A_{r,1} + a_{r,2} A_{r,2} + .\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{r,n} A_{r,n};$$

ó bien

$$P = d\,a'_{r,1} A_{r,1} + d\,a'_{r,2} A_{r,2} + .\ .\ .\ d\,a'_{r,n} A_{r,n} = d\,[a'_{r,1} A_{r,1} + a'_{r,2} A_{r,2} + .\ .\ .\ a'_{r,n} A_{r,n}];$$

y como la cantidad entre paréntesis solo difiere en la sustitucion de $a'_{r,1}\, a'_{r,2}$. . . . $a'_{r,n}$ á $a_{r,1}\, a_{r,2}$. . . . $a_{r,n}$ resulta finalmente

$$P = d \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} . & . . . & a_{1,n} \\ . . . . & . . . & . . . & . . . \\ a'_{r,1} & a'_{r,2} . & . . . & a'_{r,n} \\ . . . . & . . . & . . . & . . . \\ a_{n,1} & a_{n,2} . & . . . & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

lo cual prueba que d entra como factor en otra determinante de grado n.

Corolarios. I. *El factor comun á los elementos de una* *línea puede pasar á otra cualquiera del mismo nombre ó de nombre distinto.*

II. *Para multiplicar ó dividir una determinante por una cantidad basta multiplicar ó dividir por dicha cantidad todos los elementos de una cualquiera de sus líneas.*

III. Una determinante no se altera si se multiplican todos los elementos de una línea por una cantidad y por la misma se dividen todos los *comprendidos en otra.*

IV. *Si se cambian los signos á todos los elementos de una línea, la determinante cambia de signo.* Porque en efecto, esto equivale á multiplicarla por — 1.

V. *El valor absoluto de una determinante no varía cuando se cambian los signos á varias líneas, y el de la nueva determinante será el mismo ó distinto que el de la primitiva, segun que sea par ó impar el número de líneas á que se ha cambiado el signo.*

Ejemplos. Sea la determinante:

$$\begin{vmatrix} a & bx & cy \\ d & ex & fy \\ g & hx & iy \end{vmatrix}.$$

Podemos sacar x é y por factores comunes escribiéndola de este modo:

$$x\,y \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}.$$

Podemos tambien trasladar el factor y de la tercera línea vertical á la primera, en esta forma:

$$\begin{vmatrix} ay & bx & c \\ dy & ex & f \\ gy & hx & i \end{vmatrix}.$$

Puede suprimirse el factor x de la segunda línea, introduciéndolo en la segunda horizontal y resultará:

$$\begin{vmatrix} ay & b & e \\ dyx & ex & fx \\ gy & h & i \end{vmatrix}.$$

Y así sucesivamente.

41. Si todos los elementos de una línea son nulos, la determinante es nula tambien. En efecto, ordenando el desarrollo por relacion á los elementos de dicha línea se ve claramente que todos los términos se anulan.

Si dos líneas paralelas son idénticas la determinante es tambien nula: para demostrarlo observemos:

1.° Que cambiando ambas líneas, y representando por P′ el resultado, puesto que dichas líneas son iguales,

$$P' = P.$$

2.° Que en general por el cambio de dos líneas paralelas se tiene (núm. 38) $P' = -P$; luego $P = -P$ lo cual es absurdo á ménos que no se tenga

$$P = o.$$

Si dos líneas paralelas son equivalentes, sacando de una de ellas el factor comun en que difiere de la otra, tendremos una determinante con dos líneas paralelas iguales y que por lo tanto será nula.

En resúmen :

Es nula una determinante cuando todos los elementos de una línea son nulos, ó cuando dos líneas paralelas son iguales ó equivalentes.

Ejemplo. La determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

es nula puesto que multiplicando la segunda vertical por -2 se reproduce la primera, y por lo tanto ambas verticales son equivalentes.

42. Entre los varios casos particulares del teorema del número 37 es digno de notarse el siguiente:

Si todos los elementos de una línea, escepto uno, son nulos, la determinante será igual al producto de dicho elemento por su complemento algebráico; ó bien al producto de dicho elemento por la misma determinante sustituyendo en ella al elemento en cuestion, la unidad.

La primera parte del teorema es consecuencia inmediata de la fórmula

$$P = a_{r,1}\, A_{r,1} + a_{r,2}\, A_{r,2} \ldots a_{r,n}\, A_{r,n},$$

puesto que si todos los elementos, ménos uno, $a_{r,s}$, son nulos, el segundo miembro se reducirá al término

$$a_{r,s}\, A_{r,s}$$

y tendremos

$$P = a_{r,s}\, A_{r,s}.$$

En cuanto á la segunda parte basta observar que siempre puede suponerse que $a_{r,s}$ es factor de todos los elementos de la línea

$$o, o \ldots a_{r,s} \ldots o,$$

la cual, sacando el factor $a_{r,s}$, se convierte en

$$o\; o \ldots 1 \ldots o.$$

Ejemplos.—I. Sea la determinante

$$P = \begin{vmatrix} a & b & o & c \\ d & e & f & g \\ t & u & o & v \\ x & y & o & z \end{vmatrix},$$

tendremos $P = -f \begin{vmatrix} a & b & c \\ t & u & v \\ x & y & z \end{vmatrix}$, puesto que la característica de f es $3 + 2$. Como en este valor de P no entran los términos d, e, g, podremos tambien escribir

$$P = \begin{vmatrix} a & b & o & c \\ o & o & f & o \\ t & u & o & v \\ x & y & o & z \end{vmatrix},$$

ó en general

$$P = \begin{vmatrix} a & b & o & c \\ d' & e' & f & g' \\ t & u & o & v \\ x & y & o & z \end{vmatrix}, \text{ siendo arbitrarias } d',\ e',\ g'.$$

Finalmente, sacando f, factor comun á los tres elementos o, f, o, o de la tercera línea vertical

$$P = f \begin{vmatrix} a & b & o & c \\ o & o & 1 & o \\ t & u & o & v \\ x & y & o & z \end{vmatrix}.$$

II. $$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ o & a & b & c \\ o & o & x & y \\ o & o & x' & y' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ o & x & y \\ o & x' & y' \end{vmatrix} = a^2 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

43. Se deduce de lo que precede que en una determinante pueden siempre suprimirse, ó que pueden siempre aumentarse, tantos pares de líneas de nombres diversos como se quiera, con tal que cumplan con las dos condiciones siguientes:

1.ª Que las dos líneas tengan la unidad por elemento comun y que todos los demás elementos de una de ellas sean nulos, sean cuales fueren los de la otra.

2.ª Que se dé á la nueva determinante el signo que convenga al complemento algebráico del elemento comun, *uno*. Esta condicion es innecesaria cuando ambas líneas sean conjugadas, porque en este caso el elemento comun es principal y su característica par.

Ejemplos:

I. $\begin{vmatrix} a & b & c & o & d \\ e & f & g & 1 & h \\ i & j & k & o & l \\ m & n & o & o & p \\ q & r & s & o & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \\ q & r & s & t \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} a & o & o & o & b \\ c & 1 & o & o & d \\ e & o & o & o & f \\ g & o & o & 1 & h \\ i & o & 1 & o & j \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} a & o & o & b \\ e & o & o & f \\ g & o & 1 & h \\ i & 1 & o & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & o & b \\ e & o & f \\ i & 1 & j \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}.$$

En el ejemplo precedente se han podido suprimir tres líneas, convirtiendo la determinante de cuarto grado propuesta en otra de segundo.

II. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & o & b & c \\ d & o & e & f \\ m & 1 & n & p \\ g & o & h & i \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a & o & b & o & c \\ d & o & e & o & f \\ q & o & r & 1 & s \\ m & 1 & n & o & p \\ g & o & h & o & i \end{vmatrix}$,

siendo m, n, p, q, r, s arbitrarias.

Y en efecto, al pasar, por ejemplo, de la primera á la segunda, se convierte aquella en el complemento algebráico de 1 en la segunda; y como este lleva el signo —, debemos agregar otro signo —, que con el primero dé el + de la determinante propuesta, y haga posible la igualdad.

Pero como el aumento de pares de líneas es arbitrario y no tiene límite, resulta que *una determinante de cualquier grado puede trasformarse en otra de un grado superior cualquiera agregando un número conveniente de pares de líneas.*

44. *Si en una determinante son nulos todos los elementos situados á un lado de una diagonal, equivaldrá al producto de los elementos de dicha diagonal con el signo +*

si es la principal, ó con el signo $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ *si es la segunda diagonal.*

Para demostrar el teorema precedente, basta aplicar á la determinante dada el del número 42 tantas veces como unidades tenga el grado de la determinante.

En cuanto á los signos ninguna dificultad presenta la primera parte del teorema, toda vez que, al sustituir á una determinante en que todos los elementos de una línea son nulos, ménos el elemento principal, el producto de este término por su complemento, el signo explícito del producto es siempre +. Respecto á la segunda parte, observaremos que para trasladar todos los elementos de la segunda diagonal á la primera, basta invertir todas las verticales sin alterar los horizontes, en cuyo caso la determinante propuesta será igual á la nueva multiplicada por $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ y como esta última, por la primera parte del teorema es igual al producto de los elementos de su diagonal principal, queda demostrado el teorema por completo.

Ejemplos:

$$\text{I.}\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ o & e & f & g \\ o & o & h & i \\ o & o & o & k \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f & g \\ o & h & i \\ o & o & k \end{vmatrix} = a\,e \begin{vmatrix} h & i \\ o & k \end{vmatrix} = a\,e\,h\,k$$

$$\text{II.}\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & o \\ h & i & o & o \\ k & o & o & o \end{vmatrix} = -d \begin{vmatrix} e & f & g \\ h & i & o \\ k & o & o \end{vmatrix} = +d\,g \begin{vmatrix} h & i \\ k & o \end{vmatrix} = -d\,g\,i\,k$$

$$\text{III.}\quad \begin{vmatrix} a & b & x \\ c & x & o \\ x & o & o \end{vmatrix} = -x^3$$

45. Imaginemos que se multiplican ordenadamente los elementos $a_{r,1}$, $a_{r,2}$ . . . . . $a_{r,n}$ de una línea de la determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

por los complementos algebráicos $A_{s,1}$ $A_{s,2}$. . . . . $A_{s,n}$ de otra línea $a_{s,1}$ $a_{s,2}$. . . . . $a_{s,n}$ paralela á la primera, y que se sumen los resultados así obtenidos: tendremos de este modo

$$a_{r,1} A_{s,1} + a_{r,2} A_{s,2} \dots + a_{r,n} A_{s,n}.$$

Pero la expresion precedente es el valor de la determinante P en la cual se sustituyera á la línea $a_{s,1}$, $a_{s,2}$. . . . . $a_{s,r}$ la $a_{r,1}$, $a_{r,2}$. . . . . $a_{r,n}$, es decir, de esta otra determinante:

$$P' = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \dots & a_{r,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

la cual es nula por tener dos líneas iguales. De aquí se deduce que *la suma de los productos de los elementos de una línea de una determinante por los complementos algebráicos de los elementos correspondientes de otra línea paralela á la primera, es idénticamente nula.*

Ejemplo. Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}:$$

si multiplicamos los elementos a, b, c por los complementos algebráicos de la segunda línea

$$- \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} ; + \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} ; - \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} ;$$

el producto

$$-a \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = -a\,(b\,c'' - c\,b'') +$$

$$b\,(a\,c'' - c\,a'') - c\,(a\,b'' - b\,a'',$$

será idénticamente nulo como es fácil comprobar.

46. En resúmen, las espresiones

$$a_{r,1}\, A_{s,1} + a_{r,2}\, A_{s,2} + a_{r,3}\, A_{s,3} + \ldots\ldots\, a_{r,n}\, A_{s,n}$$

$$a_{1,r}\, A_{1,s} + a_{2,r}\, A_{2,s} + a_{3,r}\, A_{3,s} + \ldots\ldots\, a_{n,r}\, A_{n,s}$$

serán equivalentes á P, ó idénticamente nulas, segun que r y s sean iguales ó desiguales.

47. Supongamos ahora que todos los elementos de una misma línea de la determinante P sean polinomios del mismo número de términos: por ejemplo, para fijar las ideas,

$$a_{r,1} = a_1 + b_1\,;\ a_{r,2} = a_2 + b_2 \ldots\ldots\, a_{r,n} = a_n + b_n\,;$$

sustituyendo en el desarrollo de P tendremos

$$P = (a_1 + b_1)\, A_{r,1} + (a_2 + b_2)\, A_{r,2} + \ldots\ldots\, (a_n + b_n)\, A_{r,n}.$$

ó bien

$$P = (a_1\, A_{r,1} + a_2\, A_{r,2} + \ldots\ldots\, a_n\, A_{r,n}) +$$
$$(b_1\, A_{r,1} + b_2\, A_{r,2} + \ldots\ldots\, b_n\, A_{r,n}).$$

Pero las dos partes del segundo miembro expresan el resultado de sustituir respectivamente a_1, a_2... a_n, y b_1, b_2... b_n á los elementos $a_{r,1}$, $a_{r,2}$. . . $a_{r,n}$ de la r.ma línea, lo cual prueba que la determinante P puede descomponerse en dos determinantes parciales en cada una de las que se haya hecho la sustitucion indicada.

En general: *si los elementos de la línea que se considera son polinomios compuestos de* m *términos, la determinante P podrá descomponerse en* m *determinantes parciales, cada* *una de las cuales se formará reduciendo sucesivamente la línea de elementos polinomios á una línea de monomios y tomando á este fin los primeros, segundos, etc., términos de dichos polinomios.*

48. Se comprende que este teorema puede siempre aplicarse aunque los polinomios no tengan el mismo número de términos, puesto que pueden remplazarse con ceros los que falten; y se comprende aun que la descomposicion que de aquí resulta puede efectuarse de varios modos toda vez que es arbitraria la eleccion de los monomios que van á constituir la nueva línea de cada determinante parcial. En las aplicaciones conviene, para evitar toda equivocacion, disponer en los mismos lugares, es decir, primeros ó segundos, etc., de los diferentes polinomios todos aquellos sumandos que han de entrar en la misma determinante parcial: esto supuesto cada línea compleja

$$a_{r,1},\ a_{r,2} \ldots\ldots a_{r,n}$$

ó

$$a_1+b_1+c_1+\ldots l_1;\ a_2+b_2+c_2+\ldots l_2;\ \ldots\ a_n+b_n+c_n+\ldots l_n$$

se podrá evidentemente considerar como compuesta de m líneas sencillas

$$\begin{array}{l} a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_n \\ b_1\ b_2\ b_3 \ldots\ldots b_n \\ c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots c_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_1\ l_2\ l_3 \ldots\ldots l_n\ , \end{array}$$

y la determinante P como la suma de m determinantes que se obtendrán reduciendo sucesivamente *la línea compuesta* á cada una de sus m líneas componentes.

Ejemplos:

I. $$\begin{vmatrix} a & b & x+y+z \\ a' & b' & x'+y'+z' \\ a'' & b'' & x''+y''+z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & x \\ a' & b' & x' \\ a'' & b'' & x'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & y \\ a' & b' & y' \\ a'' & b'' & y'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & z \\ a' & b' & z' \\ a'' & b'' & z'' \end{vmatrix}.$$

II. $\begin{vmatrix} a & b & c+x \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c+x \\ a' & b' & c'+o \\ a'' & b'' & c''+o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} +$

$$\begin{vmatrix} a & b & x \\ a' & b' & o \\ a'' & b'' & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.$$

Cuando en una determinante hay muchas líneas compuestas, cada una puede dar lugar á descomposiciones análogas á las anteriores.

En general si son m las líneas compuestas y sus componentes son en número de $r_1, r_2. \ldots . r_m$ respectivamente, el número de las determinantes parciales que resulten será $r_1 . r_2 \ldots r_m$.

Suponiendo que el grado de la primitiva es n, y que cada línea de las n que forman la matriz, está compuesta de m líneas sencillas, las determinantes parciales serán en número de $m. \ m. \ m \ldots m = m^n$, y podrán obtenerse combinando las líneas sencillas n á n con la precisa condicion de no tomar cada vez mas que una línea sencilla de cada línea compuesta y de ordenarlas en las determinantes parciales en el mismo órden de sucesion que tienen en la determinante total las líneas compuestas á que pertenecen.

49. Invirtiendo el teorema general precedente resulta la siguiente proposicion:

Muchas determinantes que solo difieren en una línea de igual nombre y de igual puesto, pueden reunirse en una sola determinante que no diferirá de cada una de las parciales sino en la línea indicada, la cual será la suma de todas las líneas diferentes de dichas determinantes propuestas.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a & u \\ a' & u' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & v \\ a' & v' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & u+v+x \\ a' & u'+v'+x' \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} x^2 + \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a & b & e \\ a' & b' & e' \\ a'' & b'' & e'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & cx^2 \\ a' & b' & c'x^2 \\ a'' & b'' & c''x^2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a & b & dx \\ a' & b' & d'x \\ a'' & b'' & d''x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & e \\ a' & b' & e' \\ a'' & b'' & e'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & cx^2 + dx + e \\ a' & b' & c'x^2 + d'x + e' \\ a'' & b'' & c''x^2 + d''x + e'' \end{vmatrix}.$$

50. Si á una línea de una determinante se agrega, ó de ella se resta, otra línea del mismo nombre, se habrá formado una determinante con una línea compuesta formada de dichas dos líneas sencillas, y es claro que en descomponiéndola en dos determinantes parciales, una de ellas será idéntica á la primitiva y otra contendrá dos líneas idénticas y será nula por lo tanto.

Si, por ejemplo, á la primera vertical de la determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

se agrega ó se resta la segunda, resulta:

$$\begin{vmatrix} a \pm b & b & c \\ a' \pm b' & b' & c' \\ a'' \pm b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \pm \begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

puesto que las dos primeras verticales de la segunda determinante parcial son iguales, y por lo tanto es nula.

Aun subsiste el teorema si se multiplica por una cantidad arbitraria la línea que se agrega ó se resta, porque afectando la descomposicion indicada, dos líneas de la segunda determinante parcial, no serán ya iguales, pero sí equivalentes.

En general:

Una determinante no cambia de valor si á una línea se agrega ó resta otra del mismo nombre multiplicada ó dividida por una cantidad cualquiera.

51. El teorema anterior, además de la importancia que

tiene porque á cada paso hay ocasion de aplicarlo, puede servir para simplificar el cálculo numérico de las determinantes.

Ejemplo: Sea la determinante:

$$\begin{vmatrix} 9 & 13 & 17 & 4 \\ 18 & 28 & 33 & 8 \\ 30 & 40 & 54 & 13 \\ 24 & 37 & 46 & 11 \end{vmatrix} \cdot \quad (1)$$

Si multiplicamos la última vertical por 2, 3, 4, y restamos sucesivamente estos productos de las tres primeras verticales, tendremos:

$$\begin{vmatrix} 9-2\times4\ ; & 13-3\times4 & 17-4\times4 & 4 \\ 18-2\times8\ ; & 28-3\times8 & 33-4\times8 & 8 \\ 30-2\times13; & 40-3\times13 & 54-4\times13 & 13 \\ 24-2\times11 & 37-3\times11 & 45-4\times11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Restando de la última vertical la suma de las tres primeras, la determinante (2) se trasformará en la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4-1-1-1 \\ 2 & 4 & 1 & 8-2-4-1 \\ 4 & 1 & 2 & 13-4-1-2 \\ 2 & 4 & 2 & 11-2-4-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Si restamos la primera vertical de la (3) de las tres restantes, se vé desde luego que los tres últimos elementos de la primera horizontal se reducen á cero, lo cual nos indica que podremos inmediatamente reducir la determinante á otra de tercer grado: tendremos pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-1 & 1-1 & 1-1 \\ 2 & 4-2 & 1-2 & 1-2 \\ 4 & 1-4 & 2-4 & 6-4 \\ 2 & 4-2 & 2-2 & 3-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

que se reduce á

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Agregando á la primera horizontal la última, y en el resultado

$$\begin{vmatrix} 2+2 & -1+0 & -1+1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

restando de la segunda horizontal la última multiplicada por 2, tendremos:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 4\times-2-(-1)\times(-7) = -15.$$

52. Para familiarizar al lector con este importantísimo teorema presentaremos algunos ejemplos que no sólo dan lugar á notables trasformaciones, sinó que se presentan en muchas importantes aplicaciones á la geometría y al análisis.

I. Cuando en una determinante los elementos de una línea sean todos iguales á la unidad, podremos agregar ó quitar una cantidad arbitraria á todos los elementos de otra línea cualquiera del mismo nombre, porque esto equivale á agregar ó quitar á esta última línea la primera multiplicada por dicha cantidad.

Si todos los elementos ménos uno son iguales á 1 y este á *cero*, podrá emplearse una trasformacion análoga.

Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \dots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} \dots & a_{2,n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \dots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Se deduce de lo dicho que podremos agregar tanto á las horizontales como á las verticales cantidades arbitrarias, dejando invariables las líneas de los *unos* puesto que el último elemento de la diagonal principal es *cero*, y siempre da *cero* sea cual fuere la cantidad arbitraria por la cual se multiplique la vertical ó la horizontal á que pertenece.

Agregando β_1 á la primera vertical, β_2 á la segunda, y así sucesivamente hasta β_n á la última, tendremos :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\beta_1 & a_{1,2}+\beta_2 & a_{1,3}+\beta_3 \ldots\ldots & a_{1,n}+\beta_n & 1 \\ a_{2,1}+\beta_1 & a_{2,2}+\beta_2 & a_{2,3}+\beta_3 \ldots\ldots & a_{2,n}+\beta_n & 1 \\ a_{3,1}+\beta_1 & a_{3,2}+\beta_2 & a_{3,3}+\beta_3 \ldots\ldots & a_{3,n}+\beta_n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+\beta_1 & a_{n,2}+\beta_2 & a_{n,3}+\beta_3 \ldots\ldots & a_{n,n}+\beta_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} :$$

y en esta determinante agregando asimismo $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_n$ á las diferentes horizontales, tendremos por último :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+\beta_1+\gamma_1 & a_{1,2}+\beta_2+\gamma_1 & a_{1,3}+\beta_3+\gamma_1 \ldots & a_{1,n}+\beta_n+\gamma_1 & 1 \\ a_{2,1}+\beta_1+\gamma_2 & a_{2,2}+\beta_2+\gamma_2 & a_{2,3}+\beta_3+\gamma_2 \ldots & a_{2,n}+\beta_n+\gamma_2 & 1 \\ a_{3,1}+\beta_1+\gamma_3 & a_{3,2}+\beta_2+\gamma_3 & a_{3,3}+\beta_3+\gamma_3 \ldots & a_{3,n}+\beta_n+\gamma_3 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}+\beta_1+\gamma_n & a_{n,2}+\beta_2+\gamma_n & a_{n,3}+\beta_3+r_n \ldots & a_{4,n}+\beta_n+\gamma_n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

II. Consideremos la determinante de grado n

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \ldots & a_n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

en la que $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ son cantidades arbitrarias, y cada vertical está formada por todas las potencias, desde *cero* á $n-1$, de una de estas cantidades.

Ahora, si se trasforma una vertical, por ejemplo, la r.^{ma}, restando otra cualquiera, la s.^{ma}, es evidente que la nueva vertical

$$\begin{array}{l} 1 \quad - 1 \\ a_r \quad - a_s \\ a_r^2 \quad - a_s^2 \\ a_r^3 \quad - a_s^3 \\ \ldots\ldots \\ a_r^{n-1} - a_s^{n-1} \end{array}$$

contendrá el factor comun $a_r - a_s$, que será, por lo tanto, divisor de la determinante Δ; pero los r y s son arbitrarios: luego Δ será divisible por todas las diferencias de dichas cantidades tomadas dos á dos, y aun por el producto de estas diferencias, puesto que son primas entre sí.

A la cantidad a_1 corresponden las $(n - 1)$ diferencias distintas

$$a_2 - a_1 \,;\; a_3 - a_1 \,;\; a_4 - a_1 \ldots a_n - a_1 \,;$$

á la a_2 las $n - 2$ distintas tambien entre sí y de las precedentes

$$a_3 - a_2 \,;\; a_4 - a_2 \,;\; a_5 - a_2 \ldots a_n - a_2 \,;$$

á la a_3 las $n - 3$

$$a_4 - a_3 \,;\; a_5 - a_3 \ldots a_n - a_3 \,,$$

y así sucesivamente hasta la diferencia

$$a_n - a_{n-1} \,.$$

En resúmen, el producto de todas las diferencias precedentes contendrá

$$(n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \ldots 1 = \frac{1}{2} n (n - 1)$$

factores, y será, por lo tanto, una funcion homogénea del grado $\frac{1}{2} n (n - 1)$ de las cantidades a_1, a_2, a_3. . . a_n.

Por otra parte la determinante Δ es tambien una funcion homogénea del mismo grado, porque cada término contendrá un factor igual á la unidad y una de las cantidades a_1, a_2. . . a_n de la primera línea, otra de la segunda, otra de la tercera, y así sucesivamente ; es decir, *una primera potencia, otra segunda, otra tercera,* y por último, otra del grado $(n - 1)$; y su grado final será por consiguiente

$$1 + 2 + 3 + . . . + n - 1 = \frac{1}{2} n (n - 1).$$

Luego en el producto de las diferencias precedentes y la determinante Δ son funciones homogéneas del mismo grado, y como la primera divide á la segunda no podrán diferir más que por un factor numérico, que fácilmente se determina comparando dos términos homólogos de ambas funciones.

Para formar el producto en cuestion sin duplicar ninguna diferencia, y sin dejar tampoco ninguna, restaremos, por ejemplo, cada término de la série

$$a_1, a_2, a_3, a_4 . . . a_n ,$$

de todos los que le siguen, y representando por $\pi (a_1, a_2, a_3 . . . a_n)$ dicho producto tendremos :

$$\pi (a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) = \left.\begin{array}{r} (a_2 - a_1)\ (a_3 - a_1)\ (a_4 - a_1) \ldots\ (a_n - a_1) \\ (a_3 - a_2)\ (a_4 - a_2) \ldots\ (a_n - a_2) \\ (a_4 - a_3) \ldots\ (a_n - a_3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_n - a_{n-1}) \end{array}\right\}$$

Multiplicando los primeros términos de todas las diferencias tendremos el siguiente término del producto

$$a_2, a_3^2, a_4^3 . . . a_n^{n-1},$$

cuyo coeficiente es á $+ 1$, y no puede reducirse con ninguno ; pero este mismo término es el *principal* de la determinante Δ con el coeficiente $+1$; luego la determinante Δ y el producto π son iguales.

Tendremos, pues,

$$\Delta = \pi\,(a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_n).$$

Ejemplos:

$$\pi\,(a_1,\ a_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1.$$

$$\pi\,(a_1,\ a_2,\ a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)\,(a_3 - a_1)\,(a_3 - a_2).$$

III. Sea la determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & d^2 & c^2 \\ 1 & d^2 & o & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & o \end{vmatrix} \qquad (1).$$

Multiplicando las cuatro horizontales por bcd tendremos

$$\Delta \times (bcd)^4 = \begin{vmatrix} o & bcd & bcd & bcd \\ bcd & o & bcd^3 & bc^3d \\ bcd & bcd^3 & o & b^3cd \\ bcd & bc^3d & b^3cd & o \end{vmatrix}:$$

dividiendo la segunda horizontal por cd, la tercera por bd y la cuarta por bc tendremos:

$$\frac{\Delta \times \overline{bcd}^{\,4}}{cd \times bd \times bc} = \begin{vmatrix} o & acd & bcd & bcd \\ b & o & bd^2 & bc^2 \\ c & cd^2 & o & b^2c \\ d & c^2d & b^2d & o \end{vmatrix}:$$

dividiendo asimismo por cd, bd y bc las tres últimas verticales resultará

$$\frac{\Delta .\, \overset{4}{\overline{bcd}}}{(cd.\ bd.\ bc)^2} = \Delta = \begin{vmatrix} o & b & c & d \\ b & o & d & c \\ c & d & o & b \\ d & c & b & o \end{vmatrix} \qquad (2)$$

Nota. La trasformacion precedente puede considerarse como caso particular de estos dos teoremas.

I. *En una determinante de cuarto grado* P, *en la cual los elementos principales son nulos, todo factor de las líneas oblicuas*

$$\begin{array}{ccc} & \begin{matrix} & & y_2 & y_1 \end{matrix} & \\ \mathrm{P} = & \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & e & f \\ g & h & o & i \\ j & k & l & o \end{vmatrix} & \begin{matrix} y' \\ y'' \\ \\ \\ \end{matrix} \\ & \begin{matrix} x' & x'' & & \end{matrix} & \end{array} \qquad \begin{matrix} \\ \\ x_2 \\ x_1 \end{matrix}$$

$x'\,y'$, $x''\,y''$ puede trasladarse á su paralela simétrica por relacion á la segunda diagonal.

Las siguientes trasformaciones prueban inmediatamente este teorema. Sea m un factor de la línea $x''\,y''$, tendremos:

$$\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & e & f \\ g & h & o & mi \\ j & k & ml & o \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & e & f \\ g & h & o & mi \\ \frac{j}{m} & \frac{k}{m} & l & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ md & o & e & f \\ mg & h & o & mi \\ j & \frac{k}{m} & l & o \end{vmatrix} :$$

multiplicando por m la segunda vertical; y dividiendo por m la tercera horizontal

$$\mathrm{P} = \begin{vmatrix} o & ma & b & c \\ md & o & e & f \\ g & h & o & mi \\ j & k & l & o \end{vmatrix} .$$

De una manera analoga

$$\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & e & mf \\ g & h & o & i \\ jmk & l & o & \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & e & mf \\ g & h & o & i \\ \frac{j}{m} & k & \frac{l}{m} & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ md & o & e & mf \\ mg & h & o & i \\ j & k & \frac{l}{m} & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & a & mb & c \\ d & o & e & f \\ mg & h & o & i \\ j & k & l & o \end{vmatrix} .$$

II. *Si en la misma determinante hay un factor comun á los elementos centrales* h e *de la segunda diagonal, puede trasladarse á los extremos de la misma diagonal.*

Agregando en la determinante (2) á la primera horizontal las tres siguientes tendremos:

$$\begin{vmatrix} o & b & c & d \\ b & o & d & c \\ c & d & o & b \\ d & c & b & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b+c+d & b+d+c & c+d+b & d+c+b \\ b & o & d & c \\ c & d & o & b \\ d & c & b & o \end{vmatrix}$$

$$= (b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & o & d & c \\ c & d & o & b \\ d & c & b & o \end{vmatrix}.$$

En efecto, tendremos sucesivamente

$$\begin{vmatrix} o & a & b & c \\ d & o & me & f \\ g & mh & o & i \\ j & k & l & o \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ \frac{d}{m} & o & e & \frac{f}{m} \\ g & mh & o & i \\ j & k & l & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & ma & mb & mc \\ \frac{d}{m} & o & e & \frac{f}{m} \\ g & mh & o & i \\ j & k & l & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & ma & mb & mc \\ \frac{d}{m} & o & e & \frac{f}{m} \\ \frac{g}{m} & h & o & \frac{i}{m} \\ mj & mk & mb & o \end{vmatrix}:$$

dividiendo por m la tercera vertical y multiplicando por m la segunda horizontal

$$\begin{vmatrix} o & ma & b & mc \\ d & o & e & f \\ \frac{g}{m} & h & o & \frac{i}{m} \\ jm & mk & l & o \end{vmatrix}:$$

y análogamente dividiendo por m la segunda vertical y multiplicando por m la tercera horizontal resulta :

$$\begin{vmatrix} o & a & b & mc \\ d & o & e & f \\ g & h & o & i \\ mj & k & l & o \end{vmatrix}.$$

Vemos ahora que la trasformacion de que se trata consiste en trasladar los factores b, c y d segun las reglas precedentes,

ó bien
$$\begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & d^2 & c^2 \\ 1 & d^2 & o & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & b & c & d \\ b & o & d & c \\ c & d & o & b \\ d & c & b & o \end{vmatrix}.$$

lo cual prueba que $b + c + d$ es divisor de la determinante propuesta; pero la determinante (1) no se altera cuando sustituimos á $b, -b$, á $c, -c$, y á $d, -d$, porque estas tres letras entran elevadas al cuadrado, luego tendremos sucesivamente:

$$\Delta = (-b + c + d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & -b \\ d & c & -b & 0 \end{vmatrix};$$

$$\Delta = (b - c + d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & d & -c \\ -c & d & 0 & b \\ d & -c & b & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (b + c - d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & -d & c \\ c & -d & 0 & b \\ -d & c & b & 0 \end{vmatrix}.$$

Las cuatro últimas igualdades prueban que

$$(b + c + d); \quad (-b + c + d); \quad (b - c + d) \text{ y } (b + c - d)$$

son divisores de Δ; mas estos polinomios son primeros entre sí, luego Δ será divisible por su producto

$$(b + c + d)\ (b + c - d)\ (b - c + d)\ (-b + c + d).$$

Por otra parte, como el producto de cuatro factores lineales homogéneos es una funcion homogénea de cuarto grado de b, c, d, del mismo modo que la determinante (2), resulta, puesto que es divisible esta por aquella y el grado es el mismo, que no pueden diferir más que en un factor numérico; comparando el término $-d^4$ del producto con el término d^4 de la determinante cuyo signo está dado por la potencia $(-1)^{\frac{1}{2}4.3} = +1$ (núm. 24) y es positivo, resulta, finalmente, que el producto en cuestion con el signo cambiado es igual á la determinante. Así, pues, tendrémos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d^2 & c^2 \\ 1 & d^2 & 0 & b^2 \\ 1 & c^2 & b^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & d & c \\ c & d & 0 & b \\ d & c & b & 0 \end{vmatrix} = -(b+c+d)(b+c-d)(b-c+d)(-b+c+d)$$

Se sabe por la aplicacion del álgebra á la geometría que este producto con signo contrario es igual á 16 veces el cuadrado del área de un triángulo, cuyos lados fuesen b, c y d; luego cada una de las determinantes precedentes con signo cambiado expresará el mismo valor. Más adelante llegarémos directamente á este mismo resultado, sin apoyarnos en el conocimiento prévio del área de un triángulo en funcion de sus lados.

IV. Análogamente puede demostrarse la siguiente igualdad:

$$P = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d).$$

Desde luégo la igualdad

$$\begin{vmatrix} a+b+c+d & b+c+d+a & c+d+a+b & d+c+b+a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

prueba que la determinante P contiene el factor $(a+b+c+d)$.

Agregando á la primera horizontal la segunda, y restando las otras dos, tendrémos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b-c-d & b+a-d-c & c+d-b-a & d+c-b-a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+b-c-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

lo cual demuestra que $(a+b-c-d)$ es divisor de P.

Del mismo modo las igualdades

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+c-b-d & b+d-a-c & c+a-d-b & d+b-c-a \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+c-b-d) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+d-b-c & b+c-a-d & c+b-d-a & d+a-c-b \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+d-b-c) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix},$$

prueban que $a+c-b-d$, y $a+d-b-c$ son divisores de P.

Por lo tanto P y el producto $(a+b+c+d)$ $(a+b-c-d)$ $a+c-b-d)$ $(a+d-b-c)$ sólo pueden diferir en un factor numérico, y comparando los términos a^4 de ambas expresiones, resulta que dicho factor es la ***unidad positiva.***

V. Combinando el signo á la letra a en la igualdad

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c+d)\ (a+b-c-d)\ (a-b+c-d)\ (a-b-c+d)$$

resulta esta

$$\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix} = -(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

Recordando una fórmula de geometría, se ve que la determinante precedente con el signo cambiado expresa 16 veces el cuadrado del área del cuadrilátero inscrito, cuyos lados son a, b, c, d.

Cuando $a=o$, esta fórmula se reduce á la del tercer ejemplo.

§ V.

Descomposicion de determinantes en suma de productos de menores complementarias.

53. Dada una determinante P del grado n, consideremos la matriz rectangular formada por m líneas paralelas de la misma clase: la suma de los productos de todas las menores de grado m comprendidas en dicha matriz por sus complementos algebraicos, será una parte de la determinante propuesta.

En efecto, que cada producto parcial está comprendido en la determinante dada, queda ya demostrado en el número (32); pero es fácil ver que todos estos productos son distintos entre sí, y que por lo tanto si cada uno de ellos está comprendido en P, su suma lo estará asimismo.

Supongamos, para fijar las ideas, que la matriz rectangular, en las que se toman los menores de grado m, está formada de líneas horizontales: dos menores de esta matriz, H y H′ por ejemplo, diferiran por lo ménos en una línea vertical de m elementos, es decir que

$$\begin{array}{l|c|} \text{línea } r_1 \ldots & \ldots\ldots a \ldots\ldots \\ r_2 \ldots & \ldots\ldots b \ldots\ldots \\ r_3 \ldots & \ldots\ldots c \ldots\ldots \\ \vdots & \vdots \\ r_m \ldots & \ldots\ldots l \ldots\ldots \end{array}$$

entrará en una de las menores, sea en H, y no entrará en H'; pero cada término de H contiene un elemento distinto de la línea precedente; luego cada término de H contendrá un elemento que no entrará en H'.

Por otra parte, designando por K' el complemento algebráico de H', en este complemento no entrará ninguno de los elementos de la vertical $a, b, c. . . l$, puesto que quedan excluidas de él todas las líneas horizontales de la matriz rectangular. De suerte que los elementos $a, b, c. . . l$, de los que uno entra en cada término H, y por lo tanto en cada término del producto H K (designando por K su complemento algebraico) no pueden entrar ni en H' ni en K', ni por lo tanto en los términos del producto H' K'.

Cada menor de grado m de la matriz rectangular tiene $1, 2, 3. . . m$ términos (núm. 20), y cada menor complementaria $1, 2, 3. . . n - m$; luego cada *producto* contendrá $1, 2, 3. . . m. 1, 2, 3. . . (n - m)$, términos todos distintos entre sí; pero el número de menores del grado m, contenidas en una materia rectangular de m líneas es el de las combinaciones de n objetos m á m, es decir:

$$\frac{m(n-1)(n-2). . . . . (n-m+1)}{1, 2, 3. . . m},$$

luego éste será el número de productos parciales, y el número total de productos

$$1, 2, 3. . . m. 1, 2, 3. (n-m) \frac{n(n-1)(n-2). . . (n-m+1)}{1, 2, 3. . . m} = 1, 2, 3. . . n,$$

es decir, el mismo que el de términos de la determinante P.

De aquí resulta el siguiente notable problema, del cual es caso particular el del número (35), pues en él la matriz está formada de una sola línea, y las menores son los elementos de esta línea. . . . .

Toda determinante equivale á la suma de los productos de todas las menores comprendidas en una matriz rectan-

gular formada con m *líneas paralelas cualesquiera por sus respectivos complementos algebráicos.*

Ejemplo.—Sea la determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix}.$$

Tomemos por matriz la formada por las dos primeras horizontales $a\ b\ c\ d;\ a'\ b'\ c'\ d'$; las menores comprendidas en ella serán las seis siguientes :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix};$$

cuyos complementos algebraicos son

$$(-1)^6\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix};\ (-1)^7\begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix};\ (-1)^8\begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix};\ (-1)^8\begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix};\ (-1)^9\begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix};\ (-1)^{10}\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix},$$

y por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v & y \\ v' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} v & x \\ v' & x' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & y \\ u' & y' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & x \\ u' & x' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}.$$

54. Supongamos, para fijar las ideas, que la matriz en que se forman las menores está formada por las *m* primeras horizontales de la determinante propuesta; que en dicha matriz todos los elementos de algunas de sus verticales son nulos, y que el número de las verticales restantes sea inferior á *m*. En este caso todas las menores serán cero, porque habrán de contener, por lo ménos, una de las verticales de elementos nulos, y por la tanto, la determinante será nula tambien.

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} a & b & o & o & o \\ a' & b' & o & o & o \\ a'' & b'' & o & o & o \\ t & u & v & x & y \\ t' & u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = o.$$

Si en las mismas hipótesis precedentes al número de las verticales restantes fuese igual á m, de todas las menores de la matriz, sólo quedaría la formada por dichas m verticales, y la determinante seria igual al producto de esta menor por su complemento algebraico.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o & o \\ a' & b' & c' & o & o \\ a'' & b'' & c'' & o & o \\ t & u & v & x & y \\ t' & u' & v' & x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

55. *La suma de los productos de todas las menores comprendidas en una matriz de* m *líneas paralelas de una determinante por los complementos algebraicos de las menores homólogas á aquéllas tomadas en otra matriz de* m *líneas del mismo nombre, es idénticamente nula.*

Y en efecto, dicha suma de productos será el valor de una determinante en la que hubiera líneas del mismo nombre iguales, pues de este modo se identifican ambas matrices, pero esta determinante es nula; luego nula será dicha suma.

Sea, por ejemplo, la determinante:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix};$$

Tomemos las menores comprendidas en la matriz

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{vmatrix},$$

que serán:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix},$$

y multiplicándolas, no por sus complementos algebraicos, sino por los de las menores homólogas de la matriz

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' & d' \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix}$$

formada por la segunda y la cuarta horizontal, complementos, que serán

$$\text{el de } \begin{vmatrix} a' & b' \\ u' & v' \end{vmatrix} \text{ menor homóloga de } \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots - \begin{vmatrix} c & d \\ x & y \end{vmatrix}$$

$$\text{el de } \begin{vmatrix} a' & c' \\ u' & x' \end{vmatrix} \text{ menor homóloga de } \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots + \begin{vmatrix} b & d \\ v & y \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. De este modo formarémos el producto

$$\left.\begin{aligned} &-\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & d \\ v & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & d \\ a' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b & c \\ v & x \end{vmatrix} \\ &-\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & d \\ u & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & d \\ b' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & c \\ u & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & d \\ c' & d' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & b \\ u & v \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} = 0$$

Pero el primer miembro de la ecuacion precedente no es otra cosa que el resultado inmediato de aplicar el teorema del núm. 53 á una determinante en la cual á las líneas

$$\begin{vmatrix} u & v & x & y \\ u' & v' & x' & y' \end{vmatrix}$$

de la determinante dada se sustituyeran respectivamente las

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ u & v & v & y \end{vmatrix}$$

de las determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a & b & c & d \\ u & v & x & y \end{vmatrix},$$

determinante que es idénticamente nula.

En general habrá que identificar la matriz de los complementos algebraicos de las menores propuestas, á la de los complementos algebraicos de las menores homólogas tomadas en la segunda matriz, lo cual conduce siempre á identificar várias líneas de las determinantes.

Este teorema es la generalizacion del teorema del número (41).

56. Para traducir en fórmula los dos teoremas precedentes, es necesario adoptar una convencion que permita indicar é individualizar de una manera concisa los menores de una determinante de grado n comprendida en una matriz de m líneas paralelas, á cuyo fin será necesario establecer un órden determinado en las combinaciones m á m de los números de órden 1, 2, 3... n de las várias líneas de m elementos que contiene cada matriz rectangular, pues cada combinacion de éstas es una menor.

I. En cada combinacion los números de órden 1, 2, 3... n, se dispondrán en órden directo.

II. Considerando *las várias combinaciones* como términos de una serie, escribirémos en primer lugar todas las que principien por 1, despues las que comienzan por 2, y así sucesivamente.

En el grupo que comienza por 1, tomarémos primero todas aquellas en las cuales el segundo número de órden es 2, despues las en que dicho número sea 3, y así en adelante.

En el grupo que comienza por 2 se adoptará un órden análogo, y otro tanto podemos repetir, tanto para los grupos que comienzan por 3, 4, etc., como para los comprendidos en cada uno de éstos.

De aquí resulta que entre los números de cada combinacion no debe haber ninguno mayor que cualquiera de los que ocupan el mismo lugar en las siguientes.

Sean, por ejemplo, los números 1, 2, 3, 4, 5, que combinados 3 á 3 dan las diez combinaciones

$$\left.\begin{array}{l}(1,2,3)\ (1,2,4)\ (1,2,5)\ (1,3,4)\ (1,3,5)\ (1,4,5)\\ \qquad\quad (2,3,4)\ (2,3,5)\ (2,4,5)\ldots\ldots\ldots\\ \qquad\qquad\qquad (3,4,5)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}(h),$$

á las que corresponden los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

El sistema (h) recibe el nombre de *sistema ordenado de combinaciones*, puesto que á cada una corresponde un número de órden, y que recíprocamente á cada número de órden corresponde una combinacion perfectamente determinada.

57. Dada una matriz rectangular de m horizontales y n verticales, por ejemplo, suponiendo $m < n$, y combinando las verticales m á m, podrémos formar un sistema de determinantes del grado m cada una; mas como cada determinante del grado m procede de una combinacion de verticales, cada una de las que tiene un número de órden, resulta que cada menor corresponderá á una combinacion determinada de los números 1, 2, 3... n. Dando á las diferentes menores los números de órden de las combinaciones correspondientes, tendrémos un *sistema ordenado de menores*, y para determinar, y por decirlo así, individualizar cada menor, basta fijar su número de órden.

Análogamente de una determinante del grado n pueden deducirse combinando las horizontales ó las verticales m á m un sistema ordenado de matrices, y el número de órden de cada combinacion numérica será el número de órden de la matriz; determinada ésta, la matriz queda perfectamente determinada.

58. Se sabe (núm. 25) que cada menor de una determinante del grado n es la parte comun á dos matrices rectangulares, compuesta la primera de m horizontales, y la segunda de m verticales de la determinante primitiva. De aquí resulta que para individualizar, por decirlo así, cada menor, basta conocer las dos matrices rectangulares de cuyā interseccion resulta, pero cada una de estas ma-

trices está determinada por un número de órden; luego dos números de órden, á saber, el de la matriz horizontal y el de la vertical, determinan como en geometría la abscisa y la ordenada un punto, cada menor de la determinante dada.

Designando en general por h una menor del grado m para expresar la menor que corresponde á la r.ma matriz de las horizontales y á la s.ma de las verticales, emplearémos la notacion $h_{r,s}$; de suerte que todas las menores comprendidas en la r.ma matriz horizontal estarán expresadas por los símbolos

$$h_{r,1}\ h_{r,2}\ h_{r,3}\ .\ .\ .\ .\ h_{r,v}\,,$$

siendo v el número de combinaciones de n objetos m á m; y del mismo modo las menores comprendidas en la s.ma matriz vertical, se expresarán por las notaciones

$$h_{1,s}\ h_{2,s}\ h_{3,s}\ .\ .\ .\ .\ h_{v,s}\,.$$

Ejemplo:

Sea la determinante de quinto grado:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

en la cual, para simplificar, hemos suprimido las comas entre los dos índices.

Representando por h una menor de tercer grado, tratemos de determinar cuál es la menor dada por la expresion

$$h_{3,7}.$$

Segun las notaciones convenidas, ésta será la parte comun á la 3.ª matriz de las horizontales y á la 7.ª de las verticales.

Hallando en la serie 1, 2, 3, 4, 5, las combinaciones á que corresponden las várias matrices rectangulares, y colocándolas por su órden, tendrémos:

$$\overset{\text{I}}{(1,2,3)}\ \overset{\text{II}}{(1,2,4)}\ \overset{\text{III}}{(1,2,5)}\ \overset{\text{IV}}{(1,3,4)}\ \overset{\text{V}}{(1,3,5)}\ \overset{\text{VI}}{(1,4,5)}\ \overset{\text{VII}}{(2,3,4)}\ \overset{\text{VIII}}{(2,3,5)}\ \overset{\text{IX}}{(2,4,5)}\ \overset{\text{X}}{(3,4,5)}\ :$$

la 3.ª es (**1**, **2**, **5**), luego la menor $h_{3,7}$ corresponde á la matriz (**1**, **2**, **5**), y la 7.ª á la (**2**, **3**, **4**), formada por las horizontales **1**, **2**, **5**, y por las verticales **2**, **3**, **4**; es decir:

$$h_{3,7} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{52} & a_{53} & a_{54} \end{vmatrix}.$$

Llamando en general $H_{r,s}$ al complemento algebraico del menor $h_{r,s}$, el teorema del núm. 53 se expresa por la siguiente fórmula:

$$P = h_{r,1}\ H_{r,1} + h_{r,2}\ H_{r,2} + \ldots .\ h_{r,v}\ H_{r,v}\ ,$$

ó

$$P = h_{1,r}\ H_{1,r} + h_{2,r}\ H_{2,r} + \ldots .\ h_{v,r}\ H_{v,r}\ ,$$

segun que se aplique á una matriz horizontal ó vertical.

Y el teorema del núm. 53 se traduce analíticamente en la siguiente igualdad:

$$o = h_{r,1}\ H_{s,1} + h_{r,2}\ H_{s,2} + \ldots .\ h_{r,v}\ H_{s,v}$$
$$o = h_{1,r}\ H_{1,s} + h_{2,r}\ H_{2,s} + \ldots .\ h_{v,r}\ H_{v,s}\ .$$

Reuniendo los dos teoremas en uno, puede decirse que los segundos miembros de estas últimas expresiones serán nulos ó iguales á P, segun que r y s sean desiguales ó iguales.

§ VI.

Multiplicacion de determinantes.

59. Dadas dos determinantes del mismo grado n, si todos los elementos de una línea de una de ellas se multiplican por sus correspondientes de otra línea de la segunda,

la suma de estos productos recibe el nombre de producto de las dos líneas.

Por ejemplo, sea $a\ b\ c\ d$ una de las líneas,
$x\ y\ z\ u$ la otra;

la suma $az+by+cz+du$ se llama producto de las dos líneas.

Esto supuesto, sean las dos determinantes

$$P=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{vmatrix}, \quad Q=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix};$$

y proponemos demostrar que el producto K de dichas determinantes P y Q es una determinante formada segun la siguiente regla.

La primera horizontal del producto K está formada por los productos de la primera línea de P por todas las de K; es decir:

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots a_n \alpha_n \,;\; a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3 + \ldots a_n \beta_n \,;\; a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3 + \ldots a_n \gamma_n \,;\; a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 + \ldots a_n \lambda_n \,.$$

La segunda línea K se obtiene multiplicando la segunda de P por todas las de Q; resultará, pues,

$$b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + \ldots\ldots b_n \alpha_n \,;\; b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + \ldots\ldots b_n \beta_n \,;\; b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + \ldots\ldots b_n \gamma_n \,;\; b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + \ldots\ldots b_n \lambda_n \,.$$

Así sucesivamente se irán formando todas las líneas de K hasta la última, que se formará multiplicando la última línea de P por todas las de Q, en esta forma:

$$l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + \ldots\ldots l_n \alpha_n \,;\; l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + \ldots\ldots l_n \beta_n \,;\; l_1 \gamma_1 + l_2 \gamma_2 + \ldots\ldots l_n \gamma_n \,;\; l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + \ldots\ldots l_n \lambda_n \,.$$

De este modo habrémos formado la determinante

$$K = \begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 \ldots\ldots a_n \alpha_n & a_1 \beta_1 + a_2 \beta_2 + a_3 \beta_3 + \ldots\ldots a_n \beta_n & a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + a_3 \gamma_3 \ldots\ldots a_n \gamma_n \ldots\ldots & a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_3 \lambda_3 \ldots\ldots + a_n \lambda_n \\ b_1 \alpha_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 \ldots\ldots b_n \alpha_n & b_1 \beta_1 + b_2 \beta_2 + b_3 \beta_3 + \ldots\ldots b_n \beta_n & b_1 \gamma_1 + b_2 \gamma_2 + b_3 \gamma_3 \ldots\ldots b_n \gamma_n \ldots\ldots & b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2 + b_3 \lambda_3 \ldots\ldots + b_n \lambda_n \\ c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 \ldots\ldots c_n \alpha_n & c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2 + c_3 \beta_3 + \ldots\ldots c_n \beta_n & c_1 \gamma_1 + c_2 \gamma_2 + c_3 \gamma_3 \ldots\ldots c_n \gamma_n \ldots\ldots & c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2 + c_3 \lambda_3 \ldots\ldots + c_n \lambda_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2 + l_3 \alpha_3 \ldots\ldots l_n \alpha_n & l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + l_3 \beta_3 + \ldots\ldots l_n \beta_n & l_1 \gamma_1 + l_2 \gamma_2 + l_3 \gamma_3 + \ldots\ldots l_n \gamma_n \ldots\ldots & l_1 \lambda_1 + l_2 \lambda_2 + l_3 \lambda_3 \ldots\ldots + l_n \lambda_n \end{vmatrix} .$$

Antes de pasar á la demostracion general del teorema, debemos hacer algunas observaciones.

Los elementos de K así formada con polinomios de n términos, cada uno de los cuales es un producto de dos letras con el mismo índice, una letra latina y otra griega, y estos índices, en cada polinomio, crecen en el órden natural desde l hasta n.

De aquí se deduce que cada vertical de K es una vertical compuesta de n líneas verticales sencillas con los índices 1, 2, 3.... n. Por ejemplo, la vertical

$$\begin{vmatrix} a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + a_3\gamma_3 + \dots a_n\gamma_n \\ b_1\gamma_1 + b_2\gamma_2 + b_3\gamma_3 + \dots b_n\gamma_n \\ c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + \dots c_n\gamma_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_1\gamma_1 + l_2\gamma_2 + l_3\gamma_3 + \dots l_n\gamma_n \end{vmatrix}$$

se compone de las n verticales sencillas

$$\begin{vmatrix} a_1\gamma_1 & a_2\gamma_2 & a_3\gamma_3 & \vdots & a_n\gamma_n \\ b_1\gamma_1 & b_2\gamma_2 & b_3\gamma_3 & \vdots & b_n\gamma_n \\ c_1\gamma_1 & c_2\gamma_2 & c_3\gamma_3 & \vdots & c_n\gamma_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1\gamma_1 & l_2\gamma_2 & l_3\gamma_3 & \vdots & l_n\gamma_n \end{vmatrix}$$

á cada una de las que corresponde un número de órden 1, 2, 3... n.

Notemos ahora que en las n verticales sencillas

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_3\alpha_3 & \vdots & a_n\alpha_n \\ b_1\alpha_1 & b_2\alpha_2 & b_3\alpha_3 & \vdots & b_n\alpha_n \\ c_1\alpha_1 & c_2\alpha_2 & c_3\alpha_3 & \vdots & c_n\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1\alpha_1 & l_2\alpha_2 & l_3\alpha_3 & \vdots & l_n\alpha_n \end{vmatrix}$$

de la primera vertical de K, cada una de ellas tiene por factor comun uno de los varios elementos $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \dots \alpha_n$ de la primera horizontal de Q; del mismo modo las líneas verticales sencillas de la segunda vertical tienen por factores comunes los elementos de la segunda horizontal de Q, y así sucesivamente.

Dedúcese de aquí que las líneas sencillas del mismo número de órden de las diferentes verticales de K, por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} a_1 \alpha_1 & a_1 \beta_1 & a_1 \gamma_1 & \cdots & a_1 \lambda_1 \\ b_1 \alpha_1 & b_1 \beta_1 & b_1 \gamma_1 & \cdots & b_1 \lambda_1 \\ c_1 \alpha_1 & c_1 \beta_1 & c_1 \gamma_1 & \cdots & c_1 \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_1 \alpha_1 & l_1 \beta_1 & l_1 \gamma_1 & \cdots & l_1 \lambda_1 \end{vmatrix}$$

son equivalentes porque sólo difieren en los factores α, β, γ.

Pasemos ya á la demostracion del teorema.

Puesto que las verticales de K son compuestas, podrémos descomponer K en la suma dé otras várias determinantes de verticales sencillas monomias, tomando una en cada vertical de K (núm. 47) y disponiéndolas en el mismo órden en que se hallan en esta determinante total las verticales compuestas á que pertenecen.

Es decir, que si tomamos de la ***primera*** vertical de K la línea sencilla

$$\begin{matrix} a_7 \alpha_7 \\ b_7 \alpha_7 \\ c_7 \alpha_7 \\ \vdots \\ l_7 \alpha_7 ; \end{matrix}$$

de la *segunda* $\begin{matrix} a_2 \beta_2 ; \\ b_2 \beta_2 ; \\ c_2 \beta_2 ; \\ \vdots \\ l_2 \beta_2 ; \end{matrix}$ de la *tercera* $\begin{matrix} a_5 \gamma_5 ; \\ b_5 \gamma_5 ; \\ c_5 \gamma_5 ; \\ \vdots \\ l_5 \gamma_5 ; \end{matrix}$ de la *cuarta* $\begin{matrix} a_1 \delta_1 \ldots \\ b_1 \delta_1 \\ c_2 \delta_2 \\ \vdots \\ l_1 \delta_1 \end{matrix}$

. . . y así sucesivamente hasta $\begin{matrix} a_{10} \lambda_{10} \\ b_{10} \lambda_{10} \\ c_{10} \lambda_{10} \\ \vdots \\ l_{10} \lambda_{10} \end{matrix}$ en la última,

se formará la determinante parcial

$$\begin{vmatrix} a_7\,\alpha_7 & a_2\,\beta_2 & a_5\,\gamma_5 & a_1\,\delta_1 & \cdots & a_{10}\,\lambda_{10} \\ b_7\,\alpha_7 & b_2\,\beta_2 & b_5\,\gamma_5 & b_1\,\delta_1 & \cdots & b_{10}\,\lambda_{10} \\ c_7\,\alpha_7 & c_2\,\beta_2 & c_5\,\gamma_5 & c_1\,\delta_1 & \cdots & c_{10}\,\lambda_{10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_7\,\alpha_7 & l_2\,\beta_2 & l_5\,\gamma_5 & l_1\,\delta_1 & \cdots & l_{10}\,\lambda_{10} \end{vmatrix},$$

en la cual en la primera línea entrará la α, en la segunda la β... y así sucesivamente en órden alfabético hasta la última vertical, que contendrá la letra γ con un cierto subíndice.

Pero de todas estas determinantes parciales, aquellas en las que entren dos ó más verticales parciales que ocupen en las verticales de K á que pertenezcan el mismo lugar, ó de otro modo, que tengan el mismo índice, serán nulas, puesto que contendrán dos líneas equivalentes, y sólo quedarán las determinantes formadas por verticales sencillas de diversos índices. Deberémos, pues, tomar tan sólo verticales sencillas cuyos índices formen permutaciones diversas de los números 1, 2, 3... *n*, que son evidentemente en número de 1, 2, 3... *n*.

Tomando por ejemplo la permutacion principal, tendrémos que reunir la primera vertical sencilla de la primera vertical de K con la segunda sencilla de la segunda de K, y así sucesivamente, y resultará:

$$\begin{vmatrix} a_1\,\alpha_1 & a_2\,\beta_2 & a_3\,\gamma_3 & \cdots & a_n\,\lambda_n \\ b_1\,\alpha_1 & b_2\,\beta_2 & b_3\,\gamma_3 & \cdots & b_n\,\lambda_u \\ c_1\,\alpha_1 & c_2\,\beta_2 & c_3\,\gamma_3 & \cdots & c_n\,\lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_1\,\alpha_1 & l_2\,\beta_2 & l_3\,\gamma_3 & \cdots & l_n\,\lambda_n \end{vmatrix} \quad (1),$$

que se transforma, sacando factores comunes en el producto

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{vmatrix} \alpha_1\,\beta_2\,\gamma_3 \ldots\ldots \lambda_n \quad (2).$$

Permutando en (1) los índices de las letras griegas y latinas de todas las maneras posibles, tendrémos los varios términos de K que no se anulan, y cuya suma equivale á dicha determinante, porque, en efecto, todas las verticales sencillas de la primera de K tienen la parte comun

$$\begin{matrix} a\ \alpha \\ b\ \alpha \\ c\ \alpha \\ \vdots \\ l\ \alpha \end{matrix}$$

y sólo difieren en el subíndice.

Todas las de la segunda de K tienen asimismo la parte comun

$$\begin{matrix} a\ \beta \\ b\ \beta \\ c\ \beta \\ \vdots \\ l\ \beta \end{matrix}$$

con distintos índices, y así sucesivamente; pero tanto da permutar estos índices en (1) como en (2); luego resulta, por último, que para obtener los términos ó determinantes parciales de K debemos conservar en su órden las letras griegas y latinas, y perutar tan sólo los índices interiores y exteriores; mas la permutacion de los índices en (2), no altera el valor absoluto del primer factor (núm. 38), tan sólo puede hacerle cambiar de signo; de suerte que podemos dejar invariable dicho primer factor, dando al segundo el signo + ó —, segun que las inversiones de la permutacion de los índices sean en número par ó impar. Se ve ahora fácilmente que en los 1, 2, 3... *n* términos que se conservan del desarrollo de K, la determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & l_3 & \cdots & l_n \end{vmatrix} = P$$

es factor comun de una suma de términos que se derivan de $\alpha_1\ \beta_2\ \gamma_3 \ldots \lambda_n$, permutando los subíndices y dando al resultado el signo que indiquen las inversiones de dichos subíndices. Pero esta suma es la determinante Q; luego tendrémos, finalmente,

$$K = P\ Q.$$

60. Segun la regla precedente, para formar la determinante K, puede decirse que P funciona como multiplicador y Q como multiplicando; de suerte que los elementos de una horizontal de K se obtienen multiplicando una misma horizontal de P por todas las horizontales de Q, y el elemento s.^mo de la r.^ma horizontal será, por lo tanto, el producto de la r.^ma horizontal de P por la s.^ma horizontal de Q.

Dedúcese aún que los elementos de la s.^ma vertical de K son los productos de las mismas horizontales de P por la s.^ma horizontal de Q; y como si Q hubiese sido el multiplicador, dichos elementos hubieran formado la s.^ma horizontal de K, resulta que el cambiar de multiplicador equivale á cambiar las verticales en horizontales, y recíprocamente.

Sin embargo, sea cual fuere el órden de los factores, el r.^mo elemento principal es siempre el producto de la r.^ma horizontal de P por la r.^ma horizontal de Q, y así los elementos principales de K son los productos de las líneas homólogas de P y Q.

El método precedente de multiplicacion puede designarse con el nombre de *multiplicacion* por *horizontales*, mas se comprende que pueden multiplicarse dos determinantes dadas por *verticales*, y áun *horizontales* por *verticales*, de donde resultan cuatro expresiones distintas en la forma para el producto de dos determinantes, aunque idénticas en su valor algebraico.

Ejemplos:

I.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{cases} \text{Producto por horizontales, siendo la primera determinante el multiplicador.} & \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & a\,x' + b\,y' \\ a'\,x + b'\,y & a'\,x' + b'\,y' \end{vmatrix} \\ \text{Producto por verticales, siendo la segunda determinante el multiplicador.} & \begin{vmatrix} a\,x + a'\,x' & b\,x + b'\,x' \\ a\,y + a'\,y & b\,y + b'\,y' \end{vmatrix} \end{cases}$$

II.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,x + b\,y + c\,z & a\,x' + b\,y' + c\,z' & a\,x'' + b\,y'' + c\,z'' \\ a'\,x + b'\,y + c'\,z & a'\,x' + b'\,y' + c'\,z' & a'\,x'' + b'\,y'' + c'\,z'' \\ a''x + b''y + c''z & a''x' + b''y' + c''z' & a''x'' + b''y'' + c''z'' \end{vmatrix}.$$

61. El método precedente puede servir para multiplicar determinantes de grados desiguales; basta para ello aumentar la determinante de menor grado hasta el grado de la otra.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ p & q & r & s \\ p' & q' & r' & s' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & o & o \\ x' & y' & o & o \\ o & o & 1 & o \\ o & o & o & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,x + b\,y & a\,x' + b\,y' & c & d \\ a'\,x + b'y & a'\,x' + b'\,y' & c' & d' \\ p\,x + q\,y & p\,x' + q\,y' & r & s \\ p'\,x + q'\,y & p'\,x' + q'\,y' & r' & s' \end{vmatrix}.$$

62. Si los factores P y Q son idénticos, el producto PQ será el cuadrado de uno de ellos, lo cual nos da un método para elevar á potencias las determinantes. Ahora bien, como los elementos de la r.^{ma} horizontal de K son los productos de la r.^{ma} horizontal de P por todas las horizontales de la misma, y la r.^{ma} vertical es el producto de todas las horizontales P por su r.^{ma} horizontal, resulta que ambas líneas conjugadas son idénticas. Ademas, el r.^{mo} elemento principal de P^2, será evidentemente el cuadrado de la r.^{ma} línea de P.

De aquí se deduce que *el cuadrado de una determinante es otra simétrica, y sus elementos principales están formados por la suma de sus cuadrados.*

Conviene recordar que el r.^{mo} elemento principal del cuadrado es la suma de los cuadrados de todos los elementos de la r.^{ma} horizontal, si el producto se ha efectuado por horizontales, ó de la r.^{ma} vertical si se ha efectuado dicho producto por verticales.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a\,a + b\,b & a\,a' + b\,b' \\ a'\,a + b'\,b & a'\,a' + b'\,b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,a + a'\,a' & a\,b + a'\,b' \\ a\,b + a'\,b' & b\,b + b'\,b' \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a\,a + b\,b + c\,c & a\,a' + b\,b' + c\,c' & a\,a'' + b\,b'' + c\,c'' \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' & a'\,a' + b'\,b' + c'\,c' & a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'' \\ a\,a'' + b\,b'' + c\,c'' & a'\,a'' + b'\,b'' + c'\,c'' & a''\,a'' + b''\,b'' + c''\,c'' \end{vmatrix},$$

63. La notacion de dobles índices permite traducir fácilmente en fórmula el método anterior para la multiplicacion de determinantes.

Sean

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Designando por c cada elemento del producto, y agregando á esta letra dos índices, el primero relativo á la horizontal de P, y el segundo á la de Q, cuyo producto constituye el elemento de $P \times Q$, tendrémos:

$$P \times Q = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

y se tiene que

$$c_{r,s} = a_{r,1}\,b_{s,1} + a_{r,2}\,b_{s,2} + a_{r,3}\,b_{s,3} + \dots + a_{r,n}\,b_{s,n},$$

y haciendo variar r y s desde 1 á n, obtendrémos todos los términos del producto $P \times Q$.

Si el producto se efectúa por verticales el primer índice de c expresará la vertical de P, y el segundo la vertical de Q, que se multiplican, y en general tendremos

$$c_{r,s} = a_{1,r}\,b_{1,s} + a_{2,r}\,b_{2,s} + a_{3,r}\,b_{3,s} + \dots + a_{n,r}\,b_{n,s}.$$

Cuando P y Q sean idénticas, y por lo tanto $K=P^2$ las fórmulas precedentes, se convierten en

$$c_{r,s} = a_{r,1}\,a_{s,1} + a_{r,2}\,a_{s,2} + \ldots + a_{r,n}\,a_{s,n}\,,$$
$$c_{r,s} = a_{1,r}\,a_{1,s} + a_{2,r}\,a_{2,s} + \ldots + a_{n,r}\,a_{n,s}\,,$$

y como los segundos miembros no cambian, cuando se cambian r en s, y s en r, resulta en ambas

$$c_{r,s} = c_{s,r}\,,$$

lo cual prueba, como ya se ha deducido directamente, que el cuadrado de toda determinante es una determinante simétrica.

Para los elementos principales $r=s$, y las dos fórmulas generales se reducen á

$$c_{r,r} = a^2_{r,1} + a^2_{r,2} + \ldots\ a^2_{r,n}\,,$$
$$c_{r,r} = a^2_{1,r} + a^2_{2,r} + \ldots\ a^2_{n,r}\,,$$

lo cual comprueba la composicion ya indicada de los elementos principales.

64. Aplicando el método de la multiplicacion de determinantes á dos matrices, que en general supondrémos rectangulares y semejantes, se obtienen resultados dignos de notarse. Mas obsérvese que la palabra *multiplicacion* no tiene en este caso la misma significacion que en las determinantes; pues en éstas indica una operacion algebraica, y en el caso de dos matrices, sólo expresa una trasformacion del órden combinatorio, pues ni cada matriz expresa una cantidad, sino un cuadro ó agrupacion de elementos distribuidos segun cierto órden; ni, por lo tanto, el producto de dichas dos matrices puede expresar el producto de dos cantidades ó funciones algebraicas.

Sean las dos matrices de m horizontales y n verticales

$$\left|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_1 & l_2 & l_3 & \ldots & l_n \end{matrix}\right| \ (\mathrm{P}) \qquad \left|\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \ldots & \beta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \end{matrix}\right| \ (\mathrm{Q}),$$

en las que las $a, b, c \ldots l, \alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ serán en cada grupo en número de m.

Para fijar las ideas aplicarémos á estas matrices el método de multiplicacion por horizontales, pero fácil seria aplicar las conclusiones á que lleguemos al caso en que el producto se efectuase por verticales.

La primera línea de la matriz-producto se obtendrá, pues, multiplicando la primera horizontal de P por todas las de Q, y resultarán, por lo tanto, m elementos correspondientes á las m horizontales de Q.

La segunda línea se hallará análogamente multiplicando la segunda horizontal de P por todas las m de Q, y de este modo se continuará hasta multiplicar la m y última horizontal de P por todas las de Q, cuyos productos constituirán la m^a y última horizontal de la matriz $PQ = L$.

De aquí resulta inmediatamente que la matriz L será una matriz cuadrada del grado m, pues contiene m líneas, y cada línea m elementos.

A esta matriz corresponderá una determinante del grado m, que designarémos por la misma letra L.

Notemos, ántes de pasar adelante, que la matriz L difiere de la matriz K del núm. 59, en que K es del grado n, y cada uno de sus elementos se compone de n sencillos, y la matriz L, que es de grado m, está formada por partes que contienen n elementos, número distinto de m.

Distinguirémos tres casos : 1.º, $m > n$; 2.º, $m < n$; 3.º, $m = n$.

Primer caso : $m > n$. Las matrices P y Q tienen más elementos en sentido vertical que horizontal, son lo que podemos llamar matrices rectangulares verticales. En esta hipótesis, cada línea compuesta de la determinante L tiene ménos sumandos que unidades el grado m de la determinante.

Si aplicando el método del núm. (47), tratamos de descomponer la determinante L en sumandos, puesto que cada sumando, ó determinante parcial, se compone de una línea vertical sencilla por cada vertical compuesta, y el número de líneas compuestas es m, y n el de las líneas sencillas, despues de haber tomado una línea sencilla en cada una de las n primeras compuestas, si estas n sencillas son distintas, estarán, por decirlo así, todas agotadas, y la línea sencilla siguiente equivaldrá á una de las anteriores. De aquí resulta que cada determinante parcial contendrá por lo ménos dos líneas equivalentes, y será nula.

En conclusion, si $m>n$, $L=PQ=o$. Sea, por ejemplo, el producto

$$\begin{vmatrix} a\,a' \\ b\,b' \\ c\,c' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x\,x' \\ y\,y' \\ z\,z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,x+a'\,x' & a\,y+a'\,y' & a\,z+a'\,z' \\ b\,x+b'\,x' & b\,y+b'\,y' & b\,z+b'\,z' \\ c\,x+c'\,x' & c\,y+c'\,y' & c\,z+c'\,z' \end{vmatrix}.$$

Descompongamos este producto en determinantes parciales, tomando una línea sencilla cada línea compuesta; si tomamos en la primera línea compuesta, la segunda sencilla

$$\begin{matrix} a'\,x' \\ b'\,x' \\ c'\,x' \end{matrix},$$

y en la segunda compuesta la primera sencilla

$$\begin{matrix} a\,y \\ b\,y \\ c\,y \end{matrix},$$

al tomar en la tercera compuesta una línea sencilla, ésta tendrá que ser la primera

$$\begin{matrix} a\,z \\ b\,z \\ c\,z \end{matrix} \quad \text{ó la segunda} \quad \begin{matrix} a'\,z' \\ b'\,z' \\ c'\,z' \end{matrix}$$

y en uno ú otro caso la determinante

$$\begin{vmatrix} a'\,x' & a\,y & a\,z \\ b'\,x' & b\,y & b\,z \\ c'\,x' & c\,y & c\,z \end{vmatrix} \quad \text{ó la} \quad \begin{vmatrix} a'\,x' & a\,y & a'\,z' \\ b'\,x' & b\,y & b'\,z' \\ c'\,x' & c\,y & c'\,z' \end{vmatrix}$$

tienen dos líneas equivalentes, y son ambas nulas. Otro tanto pudiéramos decir de todas las determinantes parciales en que el producto se descompone.

Así, pues,

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{vmatrix},$$

ó mejor dicho, el producto ó determinante

$$\begin{vmatrix} a\,x + a'\,x' & a\,y + a'\,y' & a\,z + a'\,z' \\ b\,x + b'\,x' & b\,y + b'\,y' & b\,z + b'\,z' \\ c\,x + c'\,x' & c\,y + c'\,y' & c\,z + c'\,z' \end{vmatrix},$$

que por medio de las dos matrices propuestas se forma es nulo.

Segundo caso: $m < n$. Sean las dos matrices

$$P = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots & l_n \end{vmatrix} \quad \text{y } Q = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \dots & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} \quad (1),$$

en las que el número de líneas horizontales es m, y sea el producto

$$L = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 \dots a_n\,\alpha_n & a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3 + \dots a_n\,\beta_n & \dots\dots & a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + \dots a_n\,\lambda_n \\ b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + b_3\alpha_3 \dots b_n\,\alpha_n & b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + b_3\beta_3 + \dots b_n\,\beta_n & \dots\dots & b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 + \dots b_n\,\lambda_n \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 \dots c_n\,\alpha_n & c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + \dots c_n\,\beta_n & \dots\dots & c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_3\lambda_3 + \dots c_n\,\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 \dots l_n\,\alpha_n & l_1\beta_1 + l_2\beta_2 + l_3\beta_3 + \dots l_n\,\beta_n & \dots\dots & l_1\lambda_1 + l_2\lambda_2 + l_3\lambda_3 + \dots l_n\,\lambda_n \end{vmatrix}$$

Al descomponer L en determinantes parciales, deberémos tomar una vertical sencilla por cada una de las m verticales compuestas; pero estas verticales sencillas deben tener distinto número de órden, porque, de no ser así, habria dos ó más verticales equivalentes, y la determinante parcial sería nula.

Tomemos, pues,

de la primera vertical compuesta la vertical correspondiente al índice.. . r_1
de la segunda — la que corresponde al índice. . . . . . . r_2
de la tercera — la del. . . . . r_3
y así sucesivamente hasta
la m.ª, de la que tomarémos la vertical sencilla. . . . . r_m

Es claro que $r_1\, r_2\, r_3 \ldots\, r_m$ son una combinacion de m de los n núm. 1, 2, 3. . . n.

De estas combinaciones existirán $1 \times 2 \times 3 \ldots \times n = v$, que serán distintas entre sí, y como en vez de tomar las verticales sencillas $r_1,\, r_2,\, r_3 \ldots\, r_m$ en las verticales compuestas 1.ª, 2.ª, 3.ª. . . m^a, podemos tomar una permutacion cualquiera de estos números, por ejemplo

r_3. . . . . de la 1.ª vertical compuesta.
r_2. . . . . de la 2.ª
r_5. . . . . de la 3.ª
r_1. . . . . de la 4.ª
. . . .

resulta, finalmente, que las várias determinantes parciales de L se obtendrán :

1.º Combinando m á m los números 1, 2, 3. . . n.

2.º Permutando cada combinacion.

3.º Tomando de las diferentes verticales compuestas las verticales sencillas que indiquen los números de órden de cada una de dichas permutaciones.

Fijémonos en la combinacion $r_1\, r_2\, r_3\ \ r_m$
y designemos por

$$\begin{array}{l} s'_1\ s'_2\ s'_3\ \ldots\ s'_m \\ s''_1\ s''_2\ s''_3\ \ldots\ s''_m \\ s'''_1\ s'''_2\ s'''_3\ \ldots\ s'''_m \\ s^{(v)}_1\ s^{(v)}_2\ s^{(v)}_3\ \ldots\ s^{(v)}_m \end{array}$$

las v permutaciones de los números $r_1,\, r_2,\, r_3, \ldots\, r_m$.

Tomando de cada una de las m verticales compuestas la vertical sencilla que marca el número de órden correspondiente de la permutacion que consideramos, obtendrémos las determinantes parciales

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{s'_1}\alpha_{s'_1} & a_{s'_2}\beta_{s'_2} & a_{s'_3}\gamma_{s'_3} & \vdots\; a_{s'_m}\lambda_{s'_m} \\ b_{s'_1}\alpha_{s'_1} & b_{s'_2}\beta_{s'_2} & b_{s'_3}\gamma_{s'_3} & \vdots\; b_{s'_m}\lambda_{s'_m} \\ c_{s'_1}\alpha_{s'_1} & c_{s'_2}\beta_{s'_2} & c_{s'_3}\gamma_{s'_3} & \vdots\; c_{s'_m}\lambda_{s'_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{s'_1}\alpha_{s'_1} & l_{s'_2}\beta_{s'_2} & l_{s'_3}\gamma_{s'_3} & \vdots\; l_{s'_m}\lambda_{s'_m} \end{array}\right| ;$$

$$\left|\begin{array}{cccc} a_{s''_1}\alpha_{s''_1} & a_{s''_2}\beta_{s''_2} & a_{s''_3}\gamma_{s''_3} & \vdots\; a_{s''_m}\lambda_{s''_m} \\ b_{s''_1}\alpha_{s''_1} & b_{s''_2}\beta_{s''_2} & b_{s''_3}\gamma_{s''_3} & \vdots\; b_{s''_m}\lambda_{s''_m} \\ c_{s''_1}\alpha_{s''_1} & c_{s''_2}\beta_{s''_2} & c_{s''_3}\gamma_{s''_3} & \vdots\; c_{s''_m}\lambda_{s''_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{s''_1}\alpha_{s''_1} & l_{s''_2}\beta_{s''_2} & l_{s''_3}\gamma_{s''_3} & \vdots\; l_{s''_m}\lambda_{s''_m} \end{array}\right| ; \ldots\ldots$$

que sacando factores comunes, se convierten en

$$\alpha_{s'_1}\beta_{s'_2}\gamma_{s'_3}\lambda_{s'_m}\left|\begin{array}{c} a_{s'_1}\; a_{s'_2}\; a_{s'_3} \ldots a_{s'_m} \\ b_{s'_1}\; b_{s'_2}\; b_{s'_3} \ldots b_{s'_m} \\ c_{s'_1}\; c_{s'_2}\; c_{s'_3} \ldots c_{s'_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{s'_1}\; l_{s'_2}\; l_{s'_3} \ldots l_{s'_m} \end{array}\right| ;$$

$$\alpha_{s''_1}\beta_{s''_2}\gamma_{s''_3}\ldots\lambda_{s''_m}\left|\begin{array}{c} a_{s''_1}\; a_{s''_2}\; a_{s''_3} \ldots a_{s''_m} \\ b_{s''_1}\; b_{s''_2}\; b_{s''_3} \ldots b_{s''_m} \\ c_{s''_1}\; c_{s''_2}\; c_{s''_3} \ldots c_{s''_m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ l_{s''_1}\; l_{s''_2}\; l_{s''_3} \ldots l_{s''_m} \end{array}\right| ; \ldots\ldots$$

Como los números de órden $s'_1, s'_2, s'_3, \ldots s'_m$; $s''_1, s''_2, s''_3, \ldots s''_m$; ... son permutaciones de la serie ordenada $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$, podemos en cada derminante parcial ordenar las verticales segun dichos índices $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$, poniendo á la nueva determinante el signo que le corresponda, es decir, *positivo* si la serie de las s presenta un número par de inversiones, y *negativo* si este número es impar.

Tendrémos, pues, para determinantes parciales correspondientes á la combinacion $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$

$$\pm \alpha_{s'_1} \beta_{s'_2} \gamma_{s'_3} \ldots \lambda_{s'_m} \begin{vmatrix} a_{r_1} & a_{r_2} & a_{r_3} & \ldots & a_{r_m} \\ b_{r_1} & b_{r_2} & b_{r_3} & \ldots & b_{r_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{r_1} & l_{r_2} & l_{r_3} & \ldots & l_{r_m} \end{vmatrix};$$

$$\pm \alpha_{s''_1} \beta_{s''_2} \gamma_{s''_3} \ldots \lambda_{s''_m} \begin{vmatrix} a_{r_1} & a_{r_2} & a_{r_3} & \ldots & a_{r_m} \\ b_{r_1} & b_{r_2} & b_{r_3} & \ldots & b_{r_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{r_1} & l_{r_2} & l_{r_3} & \ldots & l_{r_m} \end{vmatrix}; \ldots\ldots$$

Sumando todos estos términos, y sacando factor comun la determinante $\Sigma a_{r_1}\, b_{r_2}\, c_{r_3} \ldots l_{r_m}$, tendrémos

$$\left(\pm \alpha_{s'_1} \beta_{s'_2} \ldots \lambda_{s'_m} \pm \alpha_{s''_1} \beta_{s''_2} \ldots \lambda_{s''_m} \pm \alpha_{s'''_1} \beta_{s'''_2} \ldots \lambda_{s'''_m} \ldots\ldots\right) \begin{vmatrix} a_{r_1} & a_{r_2} & \ldots & a_{r_m} \\ b_{r_1} & b_{r_2} & \ldots & b_{r_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{r_1} & l_{r_2} & \ldots & l_{r_m} \end{vmatrix};$$

pero la cantidad que está dentro del paréntesis se obtiene permutando en el término $\alpha_{r_1}\, \beta_{r_2}\, \gamma_{r_3} \ldots \lambda_{r_m}$ los sub-índices, y dando al resultado el signo que marcan las inversiones, segun la regla general, luego dicho paréntesis es la determinante $\Sigma\, \alpha_{r_1}\, \beta_{r_2} \ldots \lambda_{r_m}$, y, por lo tanto, el conjunto de las determinantes parciales que se derivan de la combinacion $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$, se reduce al producto

$$\begin{vmatrix} a_{r_1} & a_{r_2} \ldots & a_{r_m} \\ b_{r_1} & b_{r_2} \ldots & b_{r_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ l_{r_1} & l_{r_2} \ldots & l_{r_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{r_1} & \alpha_{r_2} \ldots & \alpha_{r_m} \\ \beta_{r_1} & \beta_{r_2} \ldots & \beta_{r_m} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \lambda_{r_1} & \lambda_{r_2} \ldots & \lambda_{r_m} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

de las dos determinantes que en las matrices (1) corresponden á las dos matrices cuadradas de las m verticales que llevan por número de órden los de la combinacion $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$.

A cada combinacion corresponden en P y Q una matriz cuadrada, y, por lo tanto, un producto análogo al (2); si, pues, designamos por $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_v$ las determinantes correspondientes á las v matrices cuadradas y ordenadas de P, y por $q_1\, q_2\, q_3 \ldots q_v$ las de Q, tendrémos

$$L = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3 \cdots\cdots p_v q_v,$$

en cuya suma v es igual al número de combinaciones de n cosas tomadas m á m.

Como L se deriva de las matrices P y Q, por la regla de la multiplicacion podrémos abreviada, y simbólicamente escribir

$$L = (P) \times (Q).$$

En resúmen :

Si multiplicamos por horizontales dos matrices semejantes de m *horizontales y* n *verticales, el producto es nulo cuando* m > n ; *y cuando se tenga, por el contrario,* m < n, *dicho producto será igual á la suma de productos de todas las determinantes de una de las matrices por las respectivas determinantes análogas de la otra.*

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Es evidente que debemos invertir las conclusiones del teorema anterior si la multiplicacion de las matrices se efectúa por verticales. En este caso el producto es nulo si $m<n$; y si $m>n$, será igual á la suma de todas las determinantes de una de las matrices por las homólogas de la segunda.

65. Si las dos matrices son idénticas, el producto de sus determinantes homólogas se convertirá en los cuadrados de las determinantes de una de ellas.

En este caso, si $m>n$

$$L=(P)^2=o;$$

si $m<n$

$$L=(P)^2=p_1^2+p_2^2+p_3^2 \ldots +p_v^2$$

el teorema podrá enunciarse de este modo:

El cuadrado por horizontales de una matriz de m *horizontales y* n *verticales es nulo si* m $>$ n, *y si* m $<$ n *será igual á la suma de los cuadrados de las determinantes de grado* m *de dicha matriz.*

Ejemplos:

I.

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a\,a + a'\,a' & a\,b + a'\,b' & a\,c + a'\,c' \\ b\,a + b'\,a' & b\,b + b'\,b' & b\,c + b'\,c' \\ c\,a + c'\,a' & c\,b + c'\,b' & c\,c + c'\,c' \end{vmatrix} = o.$$

II.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a\,a + b\,b + c\,c & a\,a' + b\,b' + c\,c' \\ a'\,a + b'\,b + c'\,c & a'\,a' + b'\,b' + c'\,c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}^2.$$

Esta última relacion, escrita bajo la forma ordinaria, demuestra la conocida identidad.

$$(a^2 + b^2 + c^2)\ (a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a\,a' + b\,b'\,c\,c')^2 =$$
$$(a\,b' - b\,a')^2 + (a\,c' - c\,a')^2 + (b\,c' - b\,c')^2.$$

III.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ A & B & C & D \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & aA+bB+cC+dD \\ aA+bB+cC+dD & A^2+B^2+C^2+D^2 \end{vmatrix} =$$
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(A^2+B^2+C^2+D^2)-(aA+bB+cC+dD)^2 =$$
$$\begin{vmatrix} a & b \\ A & B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & d \\ A & D \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & c \\ B & C \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b & d \\ B & D \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & d \\ C & D \end{vmatrix}^2 =$$
$$(aB-bA)^2+(aC-cA)^2+(aD-dA)^2+(bC-cB)^2+$$
$$(bD-dB)^2+(cD-Cd)^2 :$$

agregando á este segundo miembro la cantidad idénticamente nula

$$2\left[(aB-bA)(cD-dC)+(aC-cA)(dB-bD)+(aD-dA)(bC-cB)\right]$$

se convertirá en la suma de tres cuadrados

$$(aB-bA+cD-dC)^2+(aC-cA+dB-bD)^2+(aD-dA+bC-cB)^2 ,$$

y despejando el primer término del primer miembro, obtendrémos la fórmula de Euler

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2+d^2)(A^2+B^2+C^2+D^2) &= (aA+bB+cC+dD)^2 \\ &+(aB-bA+cD-dC)^2 \\ &+(aC-cA+dB-bD)^2 \\ &+(aD-dA+bC-cB)^2\end{aligned}$$

Haciendo en esta fórmula

$$a=p;\ b=q\sqrt{-B}\,;\ c=r\sqrt{-C}\,;\ d=s\sqrt{BC}\,;\ A=p';\ B=q'\sqrt{-B}\,;$$
$$C=r'\sqrt{-C}\,;\ D=s'\sqrt{BC}$$

obtendriamos la fórmula de Lagrange.

Tercer caso: $m=n$. En esta hipótesis las dos matrices son cuadradas, y los varios términos $p_1\,q_1$; $p_2\,q_2$. . . de la fórmula precedente se reducen á uno solo, como podria preverse por que este caso no es otro que el de multiplicacion de determinantes.

66. Sean dos determinantes P, Q

$$P=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad Q=\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots\ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots\ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots\ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} ,$$

cuyo producto K por horizontales se expresará abreviadamente por la determinante

$$K = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots\ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots\ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n.2} & \ldots\ldots & c_{n,n} \end{vmatrix},$$

en la cual

$$c_{r,s} = a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + a_{r,3}\, b_{s,3} + \ldots\ldots + a_{r,n}\, b_{s,n}.$$

Una determinante menor de grado m del producto K se expresará por la matriz cuadrada

$$\begin{vmatrix} c_{r_1 s_1} & c_{r_1 s_2} & c_{r_1 s_3} & \ldots\ldots & c_{r_1 s_m} \\ c_{r_2 s_1} & c_{r_2 s_2} & c_{r_2 s_3} & \ldots\ldots & c_{r_2 s_m} \\ c_{r_3 s_1} & c_{r_3 s_2} & c_{r_3 s_3} & \ldots\ldots & c_{r_3 s_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ c_{r_m s_1} & c_{r_m s_2} & c_{r_m s_3} & \ldots\ldots & c_{r_m s_m} \end{vmatrix} \quad (1),$$

en la cual $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$ son m números en órden natural de la serie 1, 2, 3. . . n, que expresan las horizontales á que pertenecen los elementos de la menor que se considera, y $s_1\, s_2 \ldots s_m$, m números en órden natural de la serie 1, 2, 3. . . n, expresando análogamente las verticales á que dichos elementos pertenecen.

Si recordamos ahora que los primeros índices de cada término $c_{r,s}$ indican la horizontal $a_{r,1}\, a_{r,2}\, a_{r,3} \ldots a_{r,n}$ de P, que se considera, y los segundos la horizontal $b_{s,1}\, b_{s,2}\, b_{s,3} \ldots b_{s,n}$ de Q, que concurre con la primera á la formacion de $c_{r,s}$, resulta que la primera línea horizontal de la matriz (1) se obtiene multiplicando la horizontal r_1 de P por las $s_1\, s_2 \ldots s_m$ de Q; la segunda multiplicando la horizontal r_2 de P por las mismas s_1, $s_2 \ldots s_m$ de Q, y así sucesivamente hasta la última horizontal, que será el producto de la horizontal r_m de P por la serie constante de las horizontales s_1, s_2,

$s_3, \ldots s_m$, y de aquí se deduce que la menor (1) está formada de las dos matrices.

$$\begin{vmatrix} a_{r_1 1} & a_{r_1 2} & a_{r_1 3} & \ldots\ldots & a_{r_1 n} \\ a_{r_2 1} & a_{r_2 2} & a_{r_2 3} & \ldots\ldots & a_{r_2 n} \\ a_{r_3 1} & a_{r_3 2} & a_{r_3 3} & \ldots\ldots & a_{r_3 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r_m 1} & a_{r_m 2} & a_{r_m 3} & \ldots\ldots & a_{r_m n} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b_{s_1 1} & b_{s_1 2} & b_{s_1 2} & \ldots\ldots & b_{s_1 n} \\ b_{s_2 2} & b_{s_2 2} & b_{s_2 3} & \ldots\ldots & b_{s_2 n} \\ b_{s_3 1} & b_{s_3 2} & b_{s_3 3} & \ldots\ldots & b_{s_3 n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{s_m 1} & b_{s_m 2} & b_{s_m 3} & \ldots\ldots & b_{s_m n} \end{vmatrix}$$

por la regla de la multiplicacion de matrices rectangulares.

De aquí el siguiente teorema:

Toda determinante menor del producto K *de dos determinantes* P, Q, *obtenida dicha menor por horizontales, equivale al producto de dos matrices de las dichas determinantes* P *y* Q; *la matriz de* P *está formada por las horizontales de esta determinante, que tienen el mismo número de órden que las horizontales de* K, *que concurren á formar la menor de que tratamos; y análogamente la matriz de* Q *está formada por las horizontales de* Q, *cuyos números de órden son los de las verticales de* K, *que forman la menor en cuestion.*

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} c_{2,1} & c_{2,3} \\ c_{4,1} & c_{4,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{1,2} + a_{2,3} b_{1,3} + \ldots\ldots + a_{2,n} b_{1,n} & a_{2,1} b_{3,1} + a_{2,2} b_{3,2} + a_{2,3} b_{3,3} + \ldots\ldots a_{2,n} b_{3,n} \\ a_{4,1} b_{1,1} + a_{4,2} b_{1,2} + a_{4,3} b_{1,3} + \ldots\ldots + a_{4,n} b_{1,n} & a_{4,1} b_{3,1} + a_{4,2} b_{3,2} + a_{4,3} b_{3,3} + \ldots\ldots a_{4,n} b_{3,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & \ldots\ldots & a_{4,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots\ldots & b_{1,n} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & \ldots\ldots & b_{3,n} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{4,1} & a_{4,3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{3,1} & b_{3,3} \end{vmatrix} + \ldots\ldots$$

67. Lo dicho en el núm. 57 permite convertir en fórmula el teorema precedente.

Sean :

$K_{r,s}$, $p_{r,s}$, $q_{r,s}$ las menores de grado m de las determinantes K, P, Q (siendo $K=P\times Q$), determinadas dichas menores por el concurso de la r^{ma} matriz horizontal, y de la s^{ma} matriz vertical.

$K_{r,s}$ será el producto de la r^{ma} matriz horizontal de P por la s^{ma} matriz horizontal de Q, y descomponiendo esta menor en el producto de determinantes homólogas (número 64), tendrémos que la matriz de P dará las determinantes

$$p_{r,1}\, p_{r,2}\, p_{r,3} \cdot \cdot \cdot\, p_{r,v}$$

y la matriz de Q, las

$$q_{s,1}\, q_{s,2}\, q_{s,3} \cdot \cdot \cdot\, q_{s,v}$$

de donde resulta

$$K_{r,s} = p_{r,1}\, q_{s,1} + p_{r,2}\, q_{s,2} + p_{r,3}\, q_{s,3} \cdots\cdots p_{r,v}\, q_{s,v}$$

en que v representa el número de combinaciones de n cosas m á m.

Separando de la matriz cuadrada K la r^{ma} matriz horizontal, queda otra matriz rectangular compuesta de $n-m$ horizontales : designemos por r' su número de órden.

Separando del mismo modo de dicha matriz K la s^{ma} matriz vertical, queda otra matriz rectangular compuesta de $n-m$ verticales : sea s' su número de órden.

La menor $K_{r',s'}$ será evidentemente el complemento ordinario de $K_{r,s}$.

Aplicando á esta menor la fórmula precedente, tendrémos

$$K_{r',s'} = p_{r',1}\, q_{s',1} + p_{r',2}\, q_{s',2} + p_{r',3}\, q_{s',3} + \cdots\cdots p_{r',v}\, q_{s',v}$$

en que v expresa el número de combinaciones de n cosas $n-m$ á $n-m$, que es idéntico al de combinaciones m á m; así las fórmulas

$$K_{r',s'} = p_{r',1}\, q_{s',1} + p_{r',2}\, q_{s',2} + \cdots\cdots p_{r',v}\, q_{s',v} \qquad (a')$$

y

$$K_{r,s} = p_{r,1}\, q_{s,1} + p_{r,2}\, q_{s,2} + \cdots\cdots p_{r,v}\, q_{s,v} \qquad (a)$$

tienen el mismo número de términos.

Consideremos ahora un término cualquiera, por ejemplo, el $p_{r,t}\, q_{s,t}$, del valor de $K_{r,s}$: $p_{r,t}$ es una menor del grado m, formada por la r.^{ma} matriz horizontal de m horizontales, y la t.^{ma} de m verticales, ambas tomadas en la determinante P. Separando de P la r.^{ma} matriz horizontal, queda la r.$'^{ma}$ matriz horizontal del grado $(n - m)$, porque la r.^{ma} matriz de P ocupa en esta determinante la misma posicion relativa que la r.^{ma} matriz de K en esta última: separando, igualmente, la t.^{ma} matriz vertical formada por m verticales, queda una matriz vertical de $n - m$ verticales, cuyo número de órden designarémos por t'.

Así $p_{r',t'}$ será el complemento ordinario de $p_{r,t}$, y análogamente $q_{s',t'}$ será el complemento ordinario de $q_{s,t}$, puesto que las matrices del órden s y t en Q ocupan la misma posicion que las del mismo órden en K, y por lo tanto, siendo K y Q del mismo órden, las matrices restantes de Q tendrán los mismos índices s' y t' que las correspondientes de K.

De aquí se deduce que á cada término del segundo miembro de la ecuacion (a) *corresponde otro en la* (a'), *que se obtiene cambiando las menores* p *y* q *en sus complementos ordinarios; luego, en general, se pasa de la fórmula* (a) *á la* (a'), *cambiando cada menor por su complemento ordinario.*

68. Cuando la menor $K_{r,s}$ de la determinante K se reduce al primer grado, es decir, á un elemento sencillo $c_{r,s}$, el teorema general equivale á la regla dada para la formacion del producto por horizontes de dos determinantes P y Q; porque en efecto, las dos matrices r.^{ma} de P y s.^{ma} de Q, ambas formadas por una línea, son precisamente la r.^{ma} horizontal de P y s.^{ma} de Q.

En el valor de $K_{r,s}$ las menores p y q no son otra cosa que los elementos de ambas horizontales, y por lo tanto, tendrémos la fórmula ya conocida

$$c_{r,s} = a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + a_{r,3}\, b_{s,3} + \ldots\ldots a_{r,n}\, b_{s,n}\,;$$

y como en esta fórmula podemos sustituir á cada menor su complemento ordinario, tendrémos áun, designando por $\gamma_{r,s}$, $\alpha_{r,s}$, $\beta_{r,s}$ los complementos ordinarios de $c_{r,s}$, $a_{r,s}$, $b_{r,s}$,

$$\gamma_{r,s} = \alpha_{r,1}\,\beta_{s,1} + \alpha_{r,2}\,\beta_{s,2} + \ldots\, \alpha_{r,n}\,\beta_{s,n}\,.$$

En esta última fórmula podemos sustituir á los complementos ordinarios los algebraicos; en efecto, multipliquemos toda la ecuacion por $(-1)^{r+s}$ y resultará

$$(-1)^{r+s}\gamma_{r,s} = (-1)^{r+s}\alpha_{r,1}\,\beta_{s,1} + (-1)^{r+s}\alpha_{r,2}\,\beta_{s,2} + \ldots\, (-1)^{r+s}\alpha_{r,n}\,\beta_{s,n};$$

multiplicando ahora el primer término del segundo miembro por $(-1)^{1+1}$; el segundo por $(-1)^{2+2}$; el tercero por $(-1)^{3+3}$, y así sucesivamente hasta el último, que lo multiplicarémos por $(-1)^{n+n}$, cantidades todas iguales á $+1$, se trasformará la expresion precedente en esta otra:

$$(-1)^{r+s}\gamma_{r,s} = (-1)^{r+1}\alpha_{r,1} \times (-1)^{s+1}\beta_{s,1} + (-1)^{r+2}\alpha_{r,2} \times (-1)^{s+2}\beta_{s,2}$$
$$+ \ldots\, (-1)^{r+n}\alpha_{r,n} \times (-1)^{s+n}\beta_{s,n}\,.$$

Pero el complemento algebraico de un elemento es igual al ordinario multiplicado por -1, elevado á la suma de los índices; luego las cantidades de esta última expresion son los complementos algebraicos de $c_{r,s}$, $a_{r,s}$, $b_{r,s}$: designándolos, segun la notacion admitida, por letras mayúsculas, obtendrémos:

$$C_{r,s} = A_{r,1}\,B_{s,1} + A_{r,2}\,B_{s,2} + \ldots\ldots\, A_{r,n}\,B_{s,n}\,.$$

De aquí se deduce que:

El complemento algebraico de un elemento cualquiera $c_{r,s}$ *del producto de dos determinantes, equivale á la suma de los productos de los complementos algebraicos correspondientes á los elementos de la r.ma horizontal del multiplicador por los complementos algebraicos de los elementos de la s.ma horizontal del multiplicado.*

67. Si P y Q son idénticos el teorema del núm. 66, se modifica de este modo:

Toda menor del cuadrado K *de una determinante* P, *siempre que dicho cuadrado se obtenga por horizontales, equivale al producto de dos matrices horizontales de* P, *definidas las horizontales de una y otra por los números de órden de las horizontales de* K *la primera, y de las verticales la segunda, que concurren á formar dicha menor.*

Si la menor de que se trata es una menor principal, entónces equivale al cuadrado de la matriz horizontal de P, *homóloga á la de* K, *á que pertenece dicha menor.*

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} a_{2,2} a_{2,3} \dots a_{2,n} \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,4} \end{vmatrix}^2 + \dots\dots$$

§ VII.

Derivadas y diferenciales de las determinantes.

70. En la fórmula

$$P = a_{r,1} A_{r,1} + a_{r,2} A_{r,2} + \dots + a_{r,s} A_{r,s} + \dots\dots a_{r,n} A_{r,n},$$

desarrollo de la determinante P, las cantidades $a_{r,1}\ a_{r,2} \dots\dots$ no entran en las coeficientes $A_{r,1}\ A_{r,2} \dots\dots$; luego si suponemos independientes entre sí los elementos de P, su derivada, con relacion á $a_{r,s}$, se reducirá al coeficiente de este elemento : así

$$\frac{dP}{d\,a_{r,s}} = A_{r,s},$$

luego :

Si los elementos de una determinante son independientes entre sí, su derivada, con relacion á uno cualquiera de ellos, es igual al complemento algebraico de este elemento.

71. Esta propiedad puede generalizarse. Sea

$$a_{r_1,s_1}\ a_{r_2,s_2}\ a_{r_3,s_3} \dots\dots a_{r_m,s_m} \qquad \text{(A)}$$

el producto de m elementos de la determinante P, tomados en horizontales diversas, es decir, uno en cada horizontal, y en verticales diversas tambien, ó, dicho de otro modo, uno en cada vertical: representemos por ε el número total de inversiones en los primeros y segundos índices, y por H el complemento algebraico de dicho producto, número 34: la expresion

$$(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \dots\dots a_{r_m,s_m} \mathrm{H} \qquad (1)$$

denotará la parte de la determinante P, en que entran como factores dichos elementos.

En efecto, el producto de la menor formada por las horizontales $r_1, r_2, r_3 \dots r_m$ y por las verticales $s_1, s_2, s_3 \dots s_m$ por su complemento algebraico H, es una parte de la determinante P; pero $(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \dots\dots a_{r_m,s_m}$ es un término de esta menor con el signo que le corresponde; luego la expresion (1) designa toda la parte de P en que entran como factores á la vez los elementos de que se trata.

Que $(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \dots\dots a_{r_m,s_m}$ es un término de la menor, cuyo complemento algebraico es H, es evidente puesto que su signo es el que corresponde á la suma de inversiones de los primeros y segundos índices.

Pudiera demostrarse directamente que $(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \dots$ $\dots a_{r_m} a_{s_m}$ es un término de la menor, cuyo complemento algebraico es H.

Sea para ello ε' las inversiones de la serie $r_1, r_2, r_3 \dots\dots r_m$ y ε'' las de la serie $s_1, s_2, s_3 \dots\dots s_m$.

Alteremos el órden de los factores de modo que la serie $r_1, r_2, r_3 \dots\dots r_m$ se presente en órden natural: podrémos conseguirlo evidentemente por ε' cambios binarios efectuados de derecha á izquierda, es decir, en sentido contrario á como se cuentan las inversiones. En efecto, en la serie

A B C..... M N P Q R S

dirémos:

Si R y S no presentan inversion, se conservan como actualmente se hallan, si no, se invierten, y con esto no se alteran las inversiones de todos los elementos A B C ... Q respecto al grupo R S;

Si Q y R presentan una inversion, se invierte, si no se conserva en su órden, y otro tanto podria decir de Q y S, despues de efectuado el cambio anterior, en lo cual no se alteran las inversiones de los factores A B C ... P respecto al grupo Q R S;

Y así sucesivamente.

De aquí resultan tantos cambios en los elementos a_{r_1, s_1} ... como inversiones hay en los primeros índices, es decir, ε'. Y como en la serie de los segundos índices hay ε'' inversiones, y á ε' cambios binarios corresponden ε' cambios de signo, el definitivo del término será $(-1)^{\varepsilon'' + \varepsilon'} = (-1)^{\varepsilon}$.

De aquí se deduce que pues la expresion (1) designa toda la parte de P en que entra el producto $a_{r_1, s_1} a_{r_2, s_2}$ .... a_{r_m, s_m}, la derivada *emésima* por relacion á estos elementos será $(-1)^{\varepsilon}$H, es decir,

$$\frac{d^m P}{d a_{r_1, s_1} \, d a_{r_2, s_2} \, d a_{r_3, s_3} \, ... \, d a_{r_m, s_m}} = (-1)^{\varepsilon} H \qquad (2),$$

ó de otro modo:

Si los elementos de una determinante son independientes entre sí, la derivada emésima, *formada sucesivamente respecto á* m *elementos pertenecientes á horizontales y verticales diversas, equivale al complemento algebraico de su pro-*

ducto tomado con su signo ó con otro contrario, segun que el producto de dichos elementos, considerado como algebraico, lleva el signo más *ó el signo* ménos.

72. De aquí se deduce que toda la parte $(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_m,s_m}$ H de la determinante P que contiene el producto $a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_m,s_m}$, puede expresarse sustituyendo por $(-1)^{\varepsilon}$ H su valor, de este modo

$$a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_m,s_m} \frac{d^m P}{d\,a_{r_1,s_1}\, d\,a_{r_2,s_2}\, d\,a_{r_3,s_3} \ldots\ldots d\,a_{r_m,s_m}}$$

73. Permutando en el producto (A) los primeros ó los segundos índices, abstraccion hecha del signo, se obtienen siempre términos de la misma menor y que por lo tanto tendrán el mismo complemento algebraico. Cambiemos tan sólo dos índices, por ejemplo, r_1 y r_2: el producto (A) se convierte en

$$a_{r_2,s_1} a_{r_1,s_2} a_{r_3,s_3} \ldots\ldots a_{r_m,s_m} \qquad (B),$$

que es de signo contrario al (A), puesto que las inversiones de la serie $s_1\, s_2 \ldots\ldots s_m$ son las mismas, y en la primera serie $r_1\, r_2 \ldots\ldots r_m$ se han permutado dos elementos. Toda la parte de P que contenga el producto (B) vendrá dada por la expresion

$$-(-1)^{\varepsilon} a_{r_1,s_1} a_{r_2,s_2} a_{r_3,s_3} \ldots\ldots a_{r_m,s_m} \text{ H},$$

de donde se deduce

$$\frac{d\,P}{d\,a_{r_2,s_1}\, d\,a_{r_1,s_2}\, d\,a_{r_3,s_3} \ldots\ldots d\,a_{r_m,s_m}} = -(-1)^{\varepsilon} \text{ H}.$$

Comparando la ecuacion precedente con la (2), se obtiene :

$$\frac{d^m P}{da_{r_1,s_1}\, da_{r_2,s_2}\, da_{r_3,s_3} \ldots da_{r_m,s_m}} = -\frac{d^m P}{da_{r_2,s_1}\, da_{r_1,s_2}\, da_{r_3,s_3} \ldots da_{r_m,s_m}}.$$

Esto prueba que dos derivadas *emésimas* de la determinante P son iguales, pero de signo contrario, si los denominadores de los símbolos que las representan sólo difieren por la permutacion de dos índices contiguos de la primera ó de la segunda serie.

74. Supongamos que $r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_m$ así como $s_1\, s_2\, s_3 \ldots s_m$, son dos series de números crecientes: en esta hipótesis tendrémos $\varepsilon = o$ y la fórmula (2) se reduce á

$$\frac{d^m P}{d\,a_{r_1,s_1}\; d\,a_{r_2,s_2} \;\ldots\ldots\; d\,a_{r_m,s_m}} = \mathrm{H}.$$

Así, en esta hipótesis, la derivada *emésima* de P equivale al complemento algebraico del producto de los elementos que figuran en el denominador del símbolo que la representa, ó de otro modo, al complemento algebraico de la *menor* formada por las horizontales y verticales que pasan por los factores de dicho producto, cuyo producto es en este caso el principal de la determinante menor (núm. 27). De aquí el que el complemento algebraico de una determinante menor de grado *m* se designe con el símbolo que representa la *emésima* derivada de la determinante primitiva, tomada dicha derivada respecto á los elementos principales de la menor: el signo del complemento está definido por la suma de todos los índices de los elementos que figuran en el denominador del símbolo (núm. 29), y será + ó —. segun sea par ó impar dicha suma.

Ejemplo:

Complemento algebraico de

$$\begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{d\,P}{d\,a_{2,1}\; d\,a_{3,3}} = -\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,4} & a_{1,5} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,5} & \ldots\ldots & a_{4,n} \\ a_{5,2} & a_{5,4} & a_{5,5} & \ldots\ldots & a_{5,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,4} & a_{n,5} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

75. Si suponemos que todos los elementos de una determinante son independientes entre sí, y nos proponemos hallar la diferencial total, recordando que la diferencial total de una funcion es igual á la suma de las diferenciales parciales, podrémos establecer el siguiente teorema:

La diferencial total de una determinante cuyos elementos son variables é independientes entre sí, equivale á la suma de los productos de las diferenciales de todos sus elementos por los respectivos complementos algebraicos.

Para obtener fácilmente esta diferencial total, se puede formar un polinomio con el desarrollo abreviado de la determinante, segun los elementos, ó de todas las horizontales, ó de todas las verticales; es decir, n desarrollos escritos unos á continuacion ó bajo los otros, y ordenado cada desarrollo segun los elementos de una línea distinta, y sustituir en este desarrollo total cada elemento $a_{r,s}$ por su diferencial $d\,a_{r,s}$.

Para hallar, pues, la diferencial total de P escribirémos el polinomio

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}\,A_{1,1} + a_{1,2}\,A_{1,2} + a_{1,3}\,A_{1,3} \,\ldots\ldots\, a_{1,n}\,A_{1,n}\\
a_{2,1}\,A_{2,1} + a_{2,2}\,A_{2,2} + a_{2,3}\,A_{2,3} \,\ldots\ldots\, a_{2,n}\,A_{2,n}\\
a_{3,1}\,A_{3,1} + a_{3,2}\,A_{3,2} + a_{3,3}\,A_{3,3} \,\ldots\ldots\, a_{3,n}\,A_{3,n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{n,1}\,A_{n,1} + a_{n,2}\,A_{n,2} + a_{n,3}\,A_{n,3} \,\ldots\ldots\, a_{n,n}\,A_{n,n}
\end{array}$$

y sustituyendo á los elementos de la determinante sus diferenciales,

$$\begin{array}{rl}
d\,P = & A_{1,1}\,d\,a_{1,1} + A_{1,2}\,d\,a_{1,2} + A_{1,3}\,d\,a_{1,3} \,\ldots\ldots\, A_{1,n}\,d\,a_{1,n}\\
& A_{2,1}\,d\,a_{2,1} + A_{2,2}\,d\,a_{2,2} + A_{2,3}\,d\,a_{2,3} \,\ldots\ldots\, A_{2,n}\,d\,a_{2,n}\\
& A_{3,1}\,d\,a_{3,1} + A_{3,2}\,d\,a_{3,2} + A_{3,3}\,d\,a_{3,3} \,\ldots\ldots\, A_{3,n}\,d\,a_{3,n}\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& A_{n,1}\,d\,a_{n,1} + A_{n,2}\,d\,a_{n,2} + A_{n,3}\,d\,a_{n,3} \,\ldots\ldots\, A_{n,n}\,d\,a_{n,n}
\end{array}$$

Ahora bien, cada horizontal es el resultado de sustituir en el desarrollo de P á los elementos de una horizontal sus diferenciales; pero como el desarrollo no es, en rigor, otra cosa que la misma determinante, podrémos escribir la matriz que la representa, efectuando en ella la sustitucion indicada, y tendrémos:

$$d\,\mathrm{P} = \begin{vmatrix} d\,a_{1,1} & d\,a_{1,2} & \ldots\ldots & d\,a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ d\,a_{2,1} & d\,a_{2,2} & \ldots\ldots & d\,a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ d\,a_{3,1} & d\,a_{3,2} & \ldots\ldots & d\,a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \ldots\ldots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d\,a_{n,1} & d\,a_{n,2} & \ldots\ldots & d\,a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

76. Si los elementos de P son funciones de una misma variable x, la derivada de P vendrá dada por la fórmula

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,x} = \mathrm{A}_{1,1}\frac{d\,a_{1,1}}{d\,x} + \mathrm{A}_{1,2}\frac{d\,a_{1,2}}{d\,x} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_{1,n}\frac{d\,a_{1,n}}{d\,x}$$
$$+ \mathrm{A}_{2,1}\frac{d\,a_{2,1}}{d\,x} + \mathrm{A}_{2,2}\frac{d\,a_{2,2}}{d\,x} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_{2,n}\frac{d\,a_{2,n}}{d\,x}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \mathrm{A}_{n,1}\frac{d\,a_{n,1}}{d\,x} + \mathrm{A}_{n,2}\frac{d\,a_{n,2}}{d\,x} + \ldots\ldots + \mathrm{A}_{n,n}\frac{d\,a_{n,n}}{d\,x} =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{d\,a_{1,1}}{d\,x} & \frac{d\,a_{1,2}}{d\,x} & \ldots\ldots & \frac{d\,a_{1,n}}{d\,x} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ \frac{d\,a_{2,1}}{d\,x} & \frac{d\,a_{2,2}}{d\,x} & \ldots\ldots & \frac{d\,a_{2,n}}{d\,x} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \frac{d\,a_{3,1}}{d\,x} & \frac{d\,a_{3,2}}{d\,x} & \ldots\ldots & \frac{d\,a_{3,n}}{d\,x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \ldots\ldots + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d\,a_{n,1}}{d\,x} & \frac{d\,a_{n,2}}{d\,x} & \ldots\ldots & \frac{d\,a_{n,n}}{d\,x} \end{vmatrix},$$

que puede traducirse en teorema de este modo:

Si los elementos de una determinante son funciones de una misma variable, su derivada será igual á la suma de los productos que se obtienen, multiplicando la derivada de cada elemento por su complemento algebraico;

O bien á la suma de determinantes que se derivan de la propuesta sustituyendo á cada línea horizontal de elementos sus derivadas.

77. Examinemos ahora un caso particular del cual se hacen importantes aplicaciones.

Sean

$$y_1, \; y_2, \; y_3, \; \cdots\cdots \; y_n$$

funciones cualesquiera de una variable x, é indiquemos en general sus r.$^{\text{mas}}$ derivadas por un segundo subíndice en esta forma:

$$y_{1,r} \; y_{2,r} \; y_{3,r} \; \cdots\cdots \; y_{n,r} \, .$$

Formemos ahora la determinante

$$X = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots\cdots & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & y_{3,n-1} & \cdots\cdots & y_{n,n-1} \end{vmatrix},$$

en la cual los elementos de cada horizontal son las primeras derivadas de los elementos de la línea precedente.

Tomando la derivada de X, por relacion á x y aplicando la fórmula del número anterior, tendrémos:

$$\frac{dX}{dx} = \begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots\cdots & y_{n,1} \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots\cdots & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & y_{3,n-1} & \cdots\cdots & y_{n,n-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_n \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,n-1} & y_{2,n-1} & y_{3,n-1} & \cdots\cdots & y_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots\cdots \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots\cdots & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots\cdots & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots\cdots & y_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,n} & y_{2,n} & y_{3,n} & \cdots\cdots & y_{n,n} \end{vmatrix},$$

pero todas las determinantes, excepto la última, tienen dos horizontales iguales: la primera, las dos primeras, la segunda, la segunda y tercera, y así sucesivamente; luego todas, ménos la última, serán nulas, y tendrémos :

$$\frac{dX}{dx} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & \cdots & y_{n,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & \cdots & y_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{1,n} & y_{2,n} & y_{3,n} & \cdots & y_{n,n} \end{vmatrix};$$

de suerte que para obtener la derivada de la determinante X, basta cambiar los elementos de la última horizontal en sus derivadas.

§ VIII.

Transformacion de determinantes.

PRIMERA TRANSFORMACION.

DESCOMPOSICION DE DETERMINANTES EN OTRAS CUYOS ELEMENTOS PRINCIPALES SEAN NULOS.

78. La parte de una determinante en que no entran algunos de sus elementos no es otra cosa que el resultado de anular en dicha determinante los elementos de que se trata, pues entrando como factores anulan todos los términos en que se hallan, y sólo resta la parte independiente.

Observemos ahora :

1.° Que en el desarrollo de una determinante *hay términos en los que no figuran los elementos principales:* basta para obtenerlos permutar en el término principal $a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3} \ldots\ldots a_{n,n}$ los segundos índices, dejando invariables los primeros, de modo que ninguno ocupe su posicion inicial, porque, en efecto, de este modo ningun elemento tendrá sus dos índices iguales.

2.° Que asimismo hay términos en que entra *solo uno de los elementos principales.*

Dejando invariable uno de los elementos $a_{r,r}$ del término principal, y permutando una serie de subíndices en los restantes de modo que ninguno conserve su posicion inicial, se hallan todos los términos que contienen un solo elemento principal, el $a_{r,r}$: haciendo variar r desde 1 á n se hallarán todos los términos comprendidos en este grupo.

3.° Que análogamente existen términos que contienen los elementos principales combinados dos á dos, tres á tres, etc.

4.° Que, por último, hay un término formado del producto de todos ellos.

Y obsérvese que no podrán existir términos que contengan $n-1$ de los elementos principales, porque como el elemento restante que completa los n factores que debe tener todo término debe pertenecer á una horizontal y á una vertical distintas de las que pasan por los $n-1$ elementos principales ya empleados, dicho elemento será el único elemento principal que resta, con lo cual el producto contendrá, no $n-1$, sino n elementos principales.

Esto supuesto, designemos en general por P_r el conjunto de todos los términos de la determinante P, en los que se hallan los elementos principales combinados r á r; de suerte que P_0 expresará todos los en que no entran los elementos principales; P_1 los que únicamente contienen un elemento principal cada uno; P_2 aquellos en cada uno de los cuales entran dos elementos principales, y así en adelante. Como estos grupos son esencialmente distintos, y todos juntos constituyen la determinante, tendrémos, recordando que P_{n-1} es nulo,

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 \ldots\ldots + P_{n-2} + P_n.$$

Determinemos ahora la expresion de cada término.

1.° P_0 es el resultado de anular en la determinante todos los elementos principales; así, pues,

$$P_o = \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

2.° El conjunto de todos los términos de P en que entra el *primer elemento principal* $a_{1,1}$ es igual al producto de dicho término $a_{1,1}$, por su complemento algebraico ú ordinario, pues ambos son iguales en este caso, toda vez que $1+1$ es número par; es decir, $a_{1,1}\,A_{1,1}$.

Pero en este complemento es preciso tomar tan sólo la parte independiente de los elementos principales $a_{2,2}\,a_{3,3}\ldots$ $\ldots a_{n,n}$, pues si consideráramos en $A_{1,1}$ términos que contuviesen uno, dos ó más elementos principales, su producto por $a_{1,1}$ contendria dos, tres ó más elementos principales, y éstos son términos que no pertenecen al grupo que consideramos. Así, pues, debemos tomar de $A_{1,1}$ la parte independiente de los elementos principales, lo cual se consigue anulando éstos, y resultará para el grupo de términos en que entra $a_{1,1}$:

$$a_{1,1} \begin{vmatrix} 0 & a_{2,3} & a_{2,4} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,2} & 0 & a_{3,4} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & 0 & \ldots\ldots & a_{4,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,2} & a_{n,3} & a_{n,4} & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Otro tanto pudiéramos repetir para los demas elementos principales; y por consiguiente P_1 es igual á la suma de los productos de todos los elementos principales por sus respectivos complementos, en los que se anulan todos los elementos principales que contendrian.

3.° Probariamos del mismo modo que P_2 es la suma de todos los productos binarios de los elementos principales, multiplicado cada uno por su complemento despues de haber anulado en éste todos los elementos principales que contiene.

Así continuariamos hasta P_{n-2}: P_{n-1} es nulo; y finalmente, $P_n = a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots\ldots a_{n,n}$.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & b & c \\ a' & o & c' \\ a'' & b'' & o \end{vmatrix} + a \begin{vmatrix} o & c' \\ b'' & o \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} o & c \\ a'' & o \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} o & b \\ a' & o \end{vmatrix} + a\, b'\, c''.$$

SEGUNDA TRANSFORMACION.

DESARROLLO DE UNA DETERMINANTE SEGUN LAS POTENCIAS DE LA PARTE COMUN Á TODOS LOS ELEMENTOS PRINCIPALES.

79. Sea la determinante

$$X = \begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+x & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+x & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n}+x \end{vmatrix}.$$

Es evidente que al desarrollo de X se le podrá dar la forma

$$X = x^n + S_1\, x^{n-1} + S_2\, x^{n-2} + \ldots\ldots S_r\, x^{n-r} + \ldots\ldots S_{n-1}\, x + S_n.$$

puesto que el conjunto de términos que no contenga elementos principales será independiente de x; los que contengan dichos elementos uno á uno, dos á dos, tres á tres, etcétera, serán polinomios de primero, segundo, tercer grado en x, etc.; y que, por último, el término principal será $(a_{1,1}+x)\,(a_{2,2}+x) \ldots\ldots (a_{n,n}+x)$ polinomio del grado n, cuya potencia superior en x será x^n. Así, pues, X, suma de una cantidad independiente de x, y de polinomios en x, en general completos, de los grados 1, 2, ... n, será, segun hemos supuesto, un polinomio del grado n.^{mo}, cuyo primer coeficiente será la unidad.

Determinemos ahora los coeficientes S_1, S_2, S_3 ..... S_n.

En cuanto á S_n, como es el resultado de hacer $x = o$ en la determinante, es claro que su valor será la nueva determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Para determinar en general S_r, coeficiente de x^{n-r}, observarémos que el producto de cualquier menor principal del grado $n-r$ por su complemento algebraico es una parte de la determinante X (núm. 32): si de esta menor tomamos únicamente el término x^{n-r} y del complemento algebraico el término independiente de x, que será el resultado de sustituir $x=o$ en dicho complemento, con lo cual quedará reducido á ser una menor principal de grado r de la determinante P, este producto será una parte del término $x^{n-r}\ S_r$, y otro tanto podriamos repetir para todas las menores del grado $n-r$. Fácil es ahora probar:

1.° Que todos los términos de S_r así obtenidos son distintos.

2.° Que no puede haber ninguno más que los hallados por este método.

El primer punto es evidente, porque los diferentes menores principales de P son distintas entre sí; y en cuanto al segundo observarémos que toda potencia x^{n-r} procederá del producto de $n-r$ de los factores $a_{1,1}+x$, $a_{2,2}+x$, $a_{3,3}+x$ ..... $a_{n,n}+x$, y por lo tanto estará comprendida en una de las menores principales del grado $n-r$ que hemos tenido en cuenta.

En resúmen, S_r es igual á la suma de todas las menores principales de grado r de P, es decir, de la determinante que resta, haciendo $x=o$ en X: así S_1 será la suma de todas las menores principales de P de primer grado, es decir, $a_{1,1}+a_{2,2}+a_{3,3}+$ ..... $a_{n,n}$, suma de todos sus elementos principales; S_2 será el conjunto de todas sus menores de segundo, y así sucesivamente.

Ejemplo :

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c \\ a' & b'+x & c' \\ a'' & b'' & c''+x \end{vmatrix} = x^3 + S_1 x^2 + S_2 x + S_3;$$

siendo

$$S_1 = a + b' + c''; \; S_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}; \; S_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

TERCERA TRANSFORMACION.

DESARROLLO DE UNA DETERMINANTE SEGUN LOS PRODUCTOS DE LOS ELEMENTOS DE DOS LÍNEAS DE NOMBRE DIVERSO.

80. Se sabe que en general multiplicando m elementos $a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_m,s_m}$ de una determinante P, correspondientes á horizontales y verticales distintas por su complemento algebraico H′, el producto es una parte de dicha determinante P (número 34) ; pero áun puede agregarse que este producto será la única parte de P en que entrarán á la vez los m elementos de que se trata.

En efecto, si desarrollamos P segun las menores de grado m comprendidas en la matriz de m horizontales que contiene dichos m elementos, sólo en una menor estarán comprendidos, y esta menor tendrá por factor H′ : tomando en ella únicamente el término $a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2}\, a_{r_3,s_3} \ldots\ldots a_{r_m,s_m}$, este producto por su complemento algebraico H′, será la única parte de P en que entrarán los expresados elementos.

De aquí resulta que si se multiplica el producto de dos elementos pertenecientes á dos líneas de nombre diverso de una determinante P, el elemento comun exclusive, por su complemento algebraico, el resultado será *toda la parte* de P en que entran como factores ambos elementos.

Sean, para fijar las ideas, r y s los números de órden de las dos líneas, horizontal la primera y vertical la segunda, que se consideran.

Segun el sistema de formacion de las determinantes, en cada término monomio entra necesariamente un elemento de la horizontal r y otro elemento de la vertical s, sean r y s cuales fueren. Esto es consecuencia precisa de que tanto en los primeros como en los segundos índices se hallan necesariamente todos los números desde 1 á n, y por consiguiente r y s. Luego si escribimos todos los grupos de la determinante P que contienen como factores todas las combinaciones binarias de los elementos de ambas líneas, tendrémos la determinante completa, exceptuando el término $a_{r,s}$, comun á los dos; y nótese, ademas, que siendo esencialmente distintos dichos productos binarios, estos grupos serán tambien distintos y no podrá haber repeticion de términos.

De aquí resulta:

Que si en una determinante, al producto de cada elemento de una línea por cada uno de los de otra de nombre diverso, exceptuando el elemento comun, se le multiplica por su complemento algebraico, y á la suma de estos productos se le agrega el del elemento comun por su complemento algebraico tambien, el resultado será la misma determinante propuesta.

Siendo r y s los números de órden de ambas líneas, y S la suma de productos binarios de sus elementos por los complementos algebraicos correspondientes, tendrémos

$$P = a_{r,s}\, A_{r,s} + S:$$

y si representamos por i y k dos números cualesquiera de la serie 1, 2, 3 ..... n, pero con la precisa condicion que i no adquiera nunca el valor r, ni k el s, $a_{r,k}\ a_{i,s}$ será el producto de dos elementos cualesquiera, pertenecientes el primero á la horizontal r, el segundo á la vertical s, y distintos ambos del elemento $a_{r,s}$, comun á ambas líneas.

El coeficiente de $a_{r,k}\,a_{i,s}$ en S es (núm. 72) $\dfrac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,k}\,d\,a_{i,s}}$; pero se sabe (núm. 73) que

$$\frac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,k}\,d\,a_{i,s}} = -\frac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}};$$

luego podemos considerar á $-\dfrac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}}$ como coeficiente de $a_{r,k}\,a_{i,s}$.

Ahora bien, $\dfrac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}}$ (núm. 72) es el coeficiente de $a_{r,s}\,a_{i,k}$ en P, y como en la parte $a_{r,s}\,a_{i,k}\dfrac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}}$ se halla el factor $a_{r,s}$, estará contenida en $a_{r,s}\,\mathrm{A}_{r,s}$; de suerte que sólo resta hallar en $\mathrm{A}_{r,s}$ el coeficiente de $a_{i,k}$ para obtener otra expresion de $\dfrac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}}$. Por último, el coeficiente de $a_{i,k}$ en $\mathrm{A}_{r,s}$ no es otra cosa que el complemento algebraico de dicho elemento $a_{i,k}$ en la expresada determinante $\mathrm{A}_{r,s}$; designando, pues, por $\alpha_{i,k}$ este complemento, tendrémos :

$$\frac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}\,d\,a_{i,k}} = \alpha_{i,k},$$

y por lo tanto,

$$\frac{d^2\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,k}\,d\,a_{i,s}} = -\,\alpha_{i,k}.$$

Podrémos expresar, segun lo dicho, por

$$-\,a_{r,k}\,a_{i,s}\,\alpha_{i,k}$$

el término general de S, y haciendo variar los índices i y k desde 1 á n, excluyendo $i=r$ para los valores de i, y $k=s$ para los de s, obtendrémos todos los términos de S ; así, pues,

$$\mathrm{S} = -\,\Sigma_{i,k}\,a_{r,k}\,a_{i,s}\,\alpha_{i,k}$$

y

$$P = a_{r,s}\,A_{r,s} - \Sigma_{i,k}\,a_{r,k}\,a_{i,s}\,\alpha_{i,k},$$

en cuya fórmula debe recordarse: 1.º, que $\alpha_{i,k}$ expresa el complemento algebraico del elemento $a_{i,k}$, pero no tomado en la determinante P, sino en la determinante $A_{r,s}$; 2.º, que i y k reciben los valores

$$i = 1, 2, 3 \ldots\ldots r-1,\ r+1 \ldots\ldots n,\quad k = 1, 2, 3 \ldots\ldots s-1,\ s+1 \ldots\ldots n.$$

Ejemplo:

$$P = \begin{vmatrix} o & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}.$$

Apliquemos el método á la primera horizontal y á la primera vertical:

$$P = o - \Sigma_{i,k}\,a_{1,k}\,a_{i,1}\,\alpha_{i,k}$$

$$i = 2, 3, 4\,;\ k = 2, 3, 4$$

$$P = -\left\{\begin{array}{l} a_{1,2}\,a_{2,1}\,\alpha_{2,2} + a_{1,3}\,a_{2,1}\,\alpha_{2,3} + a_{1,4}\,a_{2,1}\,\alpha_{2,4} \\ a_{1,2}\,a_{3,1}\,\alpha_{3,2} + a_{1,3}\,a_{3,1}\,\alpha_{3,3} + a_{1,4}\,a_{3,1}\,\alpha_{3,4} \\ a_{1,2}\,a_{4,1}\,\alpha_{4,2} + a_{1,3}\,a_{4,1}\,\alpha_{4,3} + a_{1,4}\,a_{4,1}\,\alpha_{4,4} \end{array}\right.$$

En esta fórmula debemos sustituir los valores de $\alpha_{2,2}$, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{3,2}$, etc., que se deducirán de la determinante

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix};$$

así

$$\alpha_{2,2} = \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix};\quad \alpha_{2,3} = -\begin{vmatrix} a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix};\ \text{etc.}$$

81. Como los índices de las horizontales y los de las verticales son superiores en una unidad á los que les corresponderian por el lugar que ocupan en la matriz $A_{1,1}$, resulta que el elemento $a_{i,k}$ se halla en la horizontal $i-1$ y

en la vertical $k - 1$; así su verdadera característica, que es la que da signo al complemento algebraico, sería $i - 1 + k - 1 = i + k - 2$; mas como el signo de $(-1)^{i+k-2}$ no se altera por suprimir un número par en el exponente, el signo del complemento dependerá sólo de la suma $i + k$ de los índices del elemento $a_{i,k}$ (núm. 30).

CUARTA TRANSFORMACION.

TRANSFORMACION DEL PRODUCTO DE DOS DETERMINANTES.

82. Puede formularse esta transformacion de este modo:

El producto de dos determinantes de grado n *puede expresarse por una suma de productos, formado cada uno por dos determinantes tambien del grado* n. *Los dos factores de cada producto son el resultado de cambiar en las dos determinantes propuestas una matriz de* m *líneas de la primera por otra de* m *líneas de la segunda: el sistema completo de productos se obtendrá efectuando dicho cambio entre una matriz invariable de una de las determinantes y todas las matrices de* m *líneas de la otra.*

Sean las dos determinantes de grado n

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}; \quad Q = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,3} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix},$$

y supongamos que la r.^{ma} matriz de m verticales de P se cambia por las sucesivas matrices de m verticales de Q: si designamos por $P_{r,1}\ P_{r,2}\ P_{r,3} \ldots$ el resultado de sustituir en la determinante P á su r.^{ma} matriz la primera, segunda, tercera ..... de Q; y por $Q_{1,r}\ Q_{2,r}\ Q_{3,r} \ldots$ el resultado de sustituir en Q á las matrices sucesivas de m líneas la r.^{ma} de P, el teorema anterior se expresará por la fórmula

$$PQ = P_{r,1}Q_{1,r} + P_{r,2}Q_{2,r} + P_{r,3}Q_{3,r} + \ldots \quad (1).$$

Considerando en primer lugar el caso $m = 1$ se deberá cambiar la r.ma vertical de P por cada vertical de Q y suponiendo, sólo para fijar las ideas, $r = 1$, es decir, que se cambia la primera vertical de P por todas las de Q, tendrémos:

$$P_{r,1} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad Q_{1,r} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,n} \\ a_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$P_{r,2} = \begin{vmatrix} b_{1,2} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ b_{2,2} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad Q_{2,r} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & a_{1,1} & b_{1,3} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & a_{2,1} & b_{2,3} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

$$P_{r,3} = \begin{vmatrix} b_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ b_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \qquad Q_{3,r} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & a_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & a_{2,1} & \ldots & b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix},$$

etc., etc.

Desarrollando estas determinantes segun los elementos de las líneas que se han cambiado, tendrémos los dos sistemas de relaciones

$$(2) \quad \begin{cases} P_{r,1} = b_{1,1} A_{1,1} + b_{2,1} A_{2,1} + b_{3,1} A_{3,1} + \ldots ; \\ P_{r,2} = b_{1,2} A_{1,1} + b_{2,2} A_{2,1} + b_{3,2} A_{3,1} + \ldots ; \\ P_{r,3} = b_{1,3} A_{1,1} + b_{2,3} A_{2,1} + b_{3,3} A_{3,1} + \ldots ; \\ \ldots \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{1,r} &= a_{1,1} B_{1,1} + a_{2,1} B_{2,1} + a_{3,1} B_{3,1} + \ldots \\ Q_{2,r} &= a_{1,1} B_{1,2} + a_{2,1} B_{2,2} + a_{3,1} B_{3,2} + \ldots \\ Q_{3,r} &= a_{1,1} B_{1,3} + a_{2,1} B_{2,3} + a_{3,1} B_{3,3} + \ldots \\ & \ldots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Esto supuesto, si se multiplican los polinomios del sistema (2) por los correspondientes del sistema (3), es decir, $P_{r,1}$ por $Q_{1,r}$; $P_{r,2}$ por $Q_{2,r}$; y así sucesivamente, la suma de estos productos será el valor del segundo miembro de la ecuacion (1). Ahora bien, en cada uno de estos productos y en la suma total debemos distinguir dos clases de términos:

1.° Los que resultan de multiplicar términos que ocupan en los polinomios P y Q los mismos lugares.

2.º Los que se obtienen multiplicando términos que ocupan distinto lugar.

Consideremos en general el término $b_{i,1}$ $A_{i,1}$ de $P_{r,1}$ y el $a_{i,1}$ $B_{i,1}$ de $Q_{1,r}$: tendrémos el producto

$$a_{i,1}\, b_{i,1}\, A_{i,1}\, B_{i,1}\,;$$

considerando análogamente los productos del índice i en las segundas, terceras, etc., líneas; reuniendo todos estos resultados y sacando en todos ellos $a_{i,1}$ $A_{i,1}$, factor comun, tendrémos

$$a_{i,1}\, A_{i,1} \left[b_{i,1}\, B_{i,1} + b_{i,2}\, B_{i,2} + b_{i,3}\, B_{i,3} + \ldots..\right],$$

expresion que puede considerarse como el tipo generador de todos los términos de la primera clase, porque de él se derivan inmediatamente dando á i todos los valores 1, 2, ... n; mas para cada uno de estos valores la cantidad comprendida entre paréntesis es siempre la misma é igual á la determinante Q, sin más diferencia que aparecer ordenado por los términos de la primera, segunda ó de la n.ª horizontal; luego el conjunto de todos los grupos análogos al $a_{i,1}$ $A_{i,1}$ Q será

$$\left(a_{1,1}\, A_{1,1} + a_{2,1}\, A_{2,1} + a_{3,1}\, A_{3,1} + \ldots..\right)\; Q.$$

Finalmente, observando que el paréntesis precedente es igual á P, podrémos establecer que :

El conjunto de términos de la primera clase es igual á P Q *en la suma de productos* (1).

Respecto á los términos de segunda clase, considerando la suma de los que provienen de multiplicar los i.^{mos} de los polinomios (2) por los K.^{mos} de los (3), se tiene la expresion

$$a_{k,1}\, A_{i,1} \left(b_{i,1}\, B_{k,1} + b_{i,2}\, B_{k,2} + b_{i,3}\, B_{k,3} + \ldots..\right),$$

de la que se deducen todos los términos que consideramos sustituyendo por i,k todas las combinaciones binarias de los números 1, 2, 3 ..... n; pero todas estas sumas (número 55) son nulas, luego el segundo grupo de términos es nulo tambien, y en último análisis el segundo miembro de la ecuacion (1) es igual á P Q, al ménos en el caso particular que acabamos de examinar.

La demostracion en el caso general es absolutamente la misma con sólo modificar convenientemente la notacion.

Designando por $h_{1,r}\ h_{2,r}\ h_{3,r}$ ..... las determinantes *ordenadas* de la r.ma matriz de m verticales (núm.) de la determinante P y por $H_{1,r}\ H_{2,r}\ H_{3,r}$ ..... sus complementos algebraicos; designando asimismo por $k_{1,r}\ k_{2,r}\ k_{3,r}$ ..... las sucesivas determinantes de la r.ma matriz de m verticales de Q, y por $K_{1,r}\ K_{2,r}\ K_{3,r}$ ..... sus respectivos complementos algebraicos; y desarrollando las determinantes modificadas $P_{r,1}$, $P_{r,2}$, $P_{r,3}$ ..... $Q_{1,r}$, $Q_{2,r}$, $Q_{3,r}$ segun las menores comprendidas en las matrices modificadas, tendrémos estos dos grupos:

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} P_{r,1} = k_{1,1} H_{1,r} + k_{2,1} H_{2,r} + k_{3,1} H_{3,r} + \ldots ; \\ P_{r,2} = k_{1,2} H_{1,r} + k_{2,2} H_{2,r} + k_{3,2} H_{3,r} + \ldots ; \\ P_{r,3} = k_{1,3} H_{1,r} + k_{2,2} H_{2,r} + k_{3,3} H_{3,r} + \ldots ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{1,r} = h_{1,r} K_{1,1} + h_{2,r} K_{2,1} + h_{3,r} K_{3,1} + \ldots \\ Q_{2,r} = h_{1,r} K_{1,2} + h_{2,r} K_{2,2} + h_{3,r} K_{3,2} + \ldots \\ Q_{3,r} = h_{1,r} K_{1,3} + h_{2,r} K_{2,3} + h_{3,r} K_{3,3} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\quad (5).$$

Aplicando á estos dos grupos palabra por palabra lo que hemos dicho respecto á los (2) y (3), veriamos:

Primero. Que la suma de todos los productos de términos que ocupan el mismo lugar en P y en Q, es para el índice i

$$h_{i,r}\, H_{i,r} \left[k_{i,1}\, K_{i,1} + k_{i,2}\, K_{i,2} + k_{i,3}\, K_{i,3} + \ldots\right],$$

ó bien

$$h_{i,r}\, H_{i,r} \times Q.$$

Segundo. Que haciendo variar el índice i desde **1** á n, y agregando los resultados, se obtiene

$$\left(h_{1,r}\, H_{1,r} + h_{2,r}\, H_{2,r} + h_{3,r}\, H_{3,r} + \ldots\right) Q = P \times Q.$$

Tercero. Que combinando verticales de (4) y (5) correspondientes á distintos índices i, j se obtienen resultados nulos

$$h_{i,r}\, H_{j,r} \left[k_{j,1}\, K_{i,1} + k_{j,2}\, K_{i,2} + k_{j,3}\, K_{i,3} + \ldots\ldots\right] = o.$$

Cuarto. Que, por consiguiente, la suma de los productos (1) del segundo miembro es igual á P Q.

Presentemos algunos ejemplos:

Sea como primer ejemplo el producto

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix};$$

cambiando la primera vertical de $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ por todas las verticales de $\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$, y todas las verticales de ésta por la primera de aquélla, resultará:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & b \\ x' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & y \\ a' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b \\ y' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & a \\ x' & a' \end{vmatrix};$$

cambiando la segunda vertical de la primera determinante por todas las de la segunda, y recíprocamente

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ a' & x' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & y \\ b' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ a' & y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & b \\ x' & b' \end{vmatrix}.$$

Cambiando, finalmente, las horizontales:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x' & y' \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ x' & y' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ x' & y' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

II ejemplo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & b & c \\ x' & b' & c' \\ x'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & y & z \\ a' & y' & z' \\ a'' & y'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b & c \\ y' & b' & c' \\ y'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & a & z \\ x' & a' & z' \\ x'' & a'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & b & c \\ z' & b' & c' \\ z'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & a \\ x' & y' & a' \\ x'' & y'' & a'' \end{vmatrix}.$$

83. Del teorema precedente se deduce este otro:

Si dadas dos determinantes de igual grado P *y* Q, *se forma una primera serie de determinantes* $P_{r,1}$, $P_{r,2}$ $P_{r,3}$ ..... *sustituyendo siempre á la* r.^{ma} *matriz de* m *líneas paralelas de* P *las matrices ordenadas, ya de* m *horizontales, ya de* m *verticales de* Q; *si se forma igualmente una segunda serie de determinantes* $Q_{1,s}$, $Q_{2,s}$, $Q_{3,s}$ ..... *por la sustitucion á las matrices ordenadas de* Q *compuestas de* m *líneas de la matriz* s.^{ma} *de* P *distinta de la* r.^{ma}; *la suma de los productos de cada término de la primera serie por el correspondiente de la segunda es nula. Es decir:*

$$P_{r,1} \times Q_{1,s} + P_{r,2} \times Q_{2,s} + P_{r,3} \times Q_{3,s} + \ldots\ldots = o.$$

En efecto, esta transformacion equivale á aplicar el teorema precedente á dos determinantes, de las cuales la primera tiene la matriz r.^{ma} de m líneas igual á la matriz s.^{ma}, en cuyo caso dos líneas por lo ménos son nulas, es nula dicha primera determinante y es nulo el producto.

Por ejemplo, sean las dos determinantes

$$P = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Si se cambia la primera vertical de P por todas las de Q, y estas últimas, no ya por la primera de P, como supone el teorema del núm. **82**, sino por la segunda, tendrémos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} x & b & c \\ x' & b' & c' \\ x'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b & y & z \\ b' & y' & z' \\ b'' & y'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & b & c \\ y' & b' & c' \\ y'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & b & z \\ x' & b' & z' \\ x'' & b'' & z'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} z & b & c \\ z' & b' & c' \\ z'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & b \\ x' & y' & b' \\ x'' & y'' & b'' \end{vmatrix} = o.$$

Porque es lo mismo que aplicar el teorema principal al producto

$$\begin{vmatrix} b & b & c \\ b' & b' & c' \\ b'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

§ IX.

Determinantes recíprocas.

84. Si en una determinante se cambia cada elemento por su complemento algebraico, se tiene una determinante á la cual se da el nombre de *recíproca* de la primitiva : representando por R la recíproca de P, y empleando la notacion ya explicada, tendrémos :

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}, \qquad R = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Ahora bien, si se multiplica una línea de P por la del mismo nombre y homóloga de R, el producto es igual á P; si ambas líneas no son homólogas el producto es nulo, y por lo tanto, multiplicando P por R, cada elemento principal de la determinante producto será igual á P, y todos los demas nulos; es decir,

$$PR = \begin{vmatrix} P & o & o & o & \dots & o \\ o & P & o & o & \dots & o \\ o & o & P & o & \dots & o \\ o & o & o & P & \dots & o \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ o & o & o & o & \dots & P \end{vmatrix} = P^n, \text{ de donde } R = P^{n-1}.$$

De aquí resulta que la determinante recíproca de otra primitiva del grado n equivale á la potencia del grado $n - 1$ de dicha primitiva. Si la determinante primitiva es nula, nula será la recíproca.

85. Hé aquí una propiedad de gran interes en las aplicaciones :

En toda determinante recíproca cada menor del grado m *equivale al producto del complemento algebraico de su homóloga en la primitiva por la potencia* m — 1 *de dicha determinante primitiva.*

Sea la determinante dada

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

y principiemos por demostrar el teorema para el caso en que se considere la menor principal de las primeras m horizontales y de las primeras m verticales; es decir,

$$R_m = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,m} \end{vmatrix}.$$

Su homóloga en la primitiva será:

$$P_m = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix};$$

y el complemento ordinario de P_m será:

$$P'_m = \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \dots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \dots & a_{m+2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

R_m puede escribirse de este modo:

$$R_m = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,m} & A_{1,m+1} & A_{1,m+2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,m} & A_{2,m+1} & A_{2,m+2} & \dots & A_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{m,1} & A_{m,2} & \dots & A_{m,m} & A_{m,m+1} & A_{m,m+2} & \dots & A_{m,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix};$$

y multiplicando por horizontales P por R_m, y tomando á P por multiplicador, resultará:

$$P\,R_m = \begin{vmatrix} P & o & o & \dots & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & \dots & a_{1,n} \\ o & P & o & \dots & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & \dots & a_{2,n} \\ o & o & P & \dots & a_{3,m+1} & a_{3,m+2} & \dots & a_{3,n} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ o & o & o & \dots\; P & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & \dots & a_{m,n} \\ o & o & o & \dots\; o & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & & & & & & & \dots \\ o & o & o & \dots\; o & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

que puede escribirse de este modo:

$$P\,R_m = P^m \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & \dots & a_{m+1,n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = P^m\,P'_m,$$

y dividiendo por P

$$R_m = P'_m\,P^{m-1},$$

que es precisamente lo que deseábamos demostrar para este caso.

Nada más fácil ahora que pasar al caso general.

Comencemos por transformar la determinante P de modo que aparezcan en primer lugar y en órden directo las m horizontales y las m verticales que concurren á formar la menor P_m homóloga de la R_m de la determinante recíproca.

El valor numérico de la determinante P no habrá variado: su signo será el que corresponda á $(-1)^{\varkappa}$, siendo $\varkappa$ la característica de dicha menor. Llamando Π á la nueva determinante, tendrémos

$$\Pi = (-1)^{\varkappa} P.$$

De este modo la menor P_m homóloga de R_m y su complemento P'_m son menores principales de Π.

Transformemos del mismo modo R, y la menor R_m aparecerá como menor principal de las m primeras horizontales y verticales.

Aplicando á las determinantes así transformadas el método que acabamos de desarrollar, tendrémos:

$$\Pi\,R_m = P'_m\,P^m;$$

y sustituyendo por Π su valor, y dividiendo por P

$$(-1)^{\kappa} R_m = P_m P'^{m-1},$$

ó bien

$$R_m = (-1)^{\kappa} P'_m P^{m-1}.$$

Ejemplos :

I. Supongamos $m = 2$

$$\begin{vmatrix} A_{r,s} & A_{r,s'} \\ A_{r',s} & A_{r',s'} \end{vmatrix} = A_{r,s} A_{r',s'} - A_{r,s'} A_{r',s} = \frac{d^2 P}{d a_{r,s}\, d a_{r',s'}} P,$$

ó bien

$$\frac{dP}{d a_{r,s}} \times \frac{dP}{d a_{r',s'}} - \frac{dP}{d a_{r,s'}} \times \frac{dP}{d a_{r',s}} = \frac{d^2 P}{d a_{r,s}\, d a_{r',s'}} P.$$

II. Supongamos $m = 3$

$$\begin{vmatrix} A_{r,s} & A_{r,s'} & A_{r,s''} \\ A_{r',s} & A_{r',s'} & A_{r',s''} \\ A_{r'',s} & A_{r'',s'} & A_{r'',s''} \end{vmatrix} = \frac{d^3 P}{d a_{r,s}\, d a_{r',s'}\, d a_{r'',s''}} P^2.$$

III. Sea $n = 5$

$$\begin{vmatrix} A_{3,2} & A_{3,4} \\ A_{5,2} & A_{5,4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,5} \end{vmatrix} P; \quad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,4} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix} P^2.$$

Para conocer el signo del segundo miembro basta observar que en el primer caso la suma $1+2+4+1+3+5=16$ de los subíndices de la permutacion principal $a_{1,1}\, a_{2,3}\, a_{4,5}$, es decir, la característica de la menor complementaria es par; y en el segundo, $4+5+3+5=17$, es impar: por esta razon en el primer ejemplo hemos puesto el signo +, y el — en el segundo.

86. Conviene notar que en la hipótesis $m = 1$ el teorema anterior equivale á decir que *cada elemento de la determinante recíproca es el complemento algebraico de su ho-*

mólogo en la determinante primitiva, que es precisamente la definicion de la determinante recíproca.

87. Como en una determinante de grado n el complemento de una menor de grado m es otra del grado $n - m$, tendrémos este nuevo enunciado del teorema :

En la determinante recíproca de otra primitiva del grado n *el complemento algebraico de cualquier menor del grado* m *equivale á la homóloga de esta menor por la potencia* n — m — 1 *de la primitiva.*

Si $m = 1$, la última proposicion puede enunciarse de este modo :

El complemento algebraico de un elemento de la determinante recíproca equivale al producto del elemento homólogo en la primitiva por la potencia n — 2 *de ésta.*

Es decir,

$$\frac{d\,\mathrm{R}}{d\,\mathrm{A}_{r,s}} = a_{r,s}\,\mathrm{P}^{n-2} \qquad (4).$$

88. En la teoría de las determinantes recíprocas es caso digno de atencion aquel en que la determinante primitiva es igual á 1, porque en esta hipótesis entre la primitiva y la recíproca hay perfecta reciprocidad.

Tenemos en primer lugar

$$\mathrm{R} = \mathrm{P}^{n-1} = 1.$$

Ademas,

$$\mathrm{R}_m = (-1)^{x}\,\mathrm{P}'_m \times \mathrm{P}^{m-1} = (-1)^{x}\,\mathrm{P}'_m.$$

Por último, designando por R'_m el complemento ordinario de R_m, se tiene (núm. 87)

$$\mathrm{R}'_m = (-1)^{x}\,\mathrm{P}_m \times \mathrm{P}^{m-1} = (-1)^{x}\,\mathrm{P}_m,$$

ó bien

$$\mathrm{P}_m = (-1)^{x}\,\mathrm{R}'_m.$$

Es decir, que toda menor de la recíproca es el complemento algebraico de la menor homóloga en la primitiva, y toda menor de la primitiva es el complemento algebraico de la homóloga en la recíproca.

Cuando m = 1, *los elementos de la primitiva son los complementos algebraicos de los elementos análogos en la recíproca, y por lo tanto,* P *es recíproca de* R *como* R *lo es de* P.

Tendrémos, pues,

$$A_{r,s} = \frac{dP}{d\,a_{r,s}} \text{ y } a_{r,s} = \frac{dP}{d\,A_{r,s}}.$$

89. Un nuevo caso que debe estudiarse es cuando la determinante primitiva es nula. Entónces, como la recíproca R está dada por el valor

$$R = P^{n-1},$$

tendrémos

$$R = o;$$

y como una menor cualquiera R_m tiene por expresion

$$R_m = (-1)^x P'_m \times P^{m-1}$$

para todos los valores $m > 1$

$$R = o.$$

Apliquemos esta propiedad á las menóres comprendidas en la matriz de la recíproca, formada dicha matriz por la r.ma y s.ma horizontal. Resultará :

$$\begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,2} \\ A_{s,1} & A_{s,2} \end{vmatrix} = o; \begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,3} \\ A_{s,1} & A_{s,3} \end{vmatrix} = o; \begin{vmatrix} A_{r,1} & A_{r,4} \\ A_{s,1} & A_{s,4} \end{vmatrix} = o \ldots\ldots$$

ó bien

$$A_{r,1}\,A_{s,2} = A_{r,2}\,A_{s,1};\ A_{r,1}\,A_{s,3} = A_{r,3}\,A_{s,1};\ A_{r,1}\,A_{s,4} = A_{s,1}\,A_{r,4};\ldots\ldots$$

de donde

$$\frac{A_{r,1}}{A_{s,1}} = \frac{A_{r,2}}{A_{s,2}} = \frac{A_{r,3}}{A_{s,3}} = \frac{A_{r,4}}{A_{s,4}} = \ldots\ldots$$

lo cual demuestra que :

Si una determinante es nula, los elementos de cualquier línea de su recíproca son proporcionales á los elementos de otra línea del mismo nombre.

Ó de otro modo:

Si una determinante es nula, los complementos algebraicos de los elementos de una línea cualquiera son proporcionales á los complementos algebraicos de los elementos de otra línea del mismo nombre.

90. Sean P y Q dos determinantes del grado n; P′ y Q′ sus recíprocas, y formemos los productos

$$K = P\,Q\,,\; K' = P'Q'.$$

Puesto que

$$P' = P^{n-1}\,;\; Q' = Q^{n-1},$$

tendrémos

$$K' = (P\,Q)^{n-1} = K^{n-1}.$$

Esto demuestra que el producto K′ de dos recíprocas es igual en *valor numérico* á la recíproca del producto P Q; pero esto no demuestra todavía que K′ sea precisamente una funcion algebraica igual á la determinante recíproca de P Q; es decir, que sea una determinante del grado n, cuyos términos sean los complementos algebraicos de los elementos de la determinante que resulta de multiplicar P por Q.

Importa, pues, demostrar que esta circunstancia se verifica en efecto, con tal que las multiplicaciones de P por Q y de P′ por Q′ se verifiquen de la misma manera.

Expresemos las determinantes P, Q, K, P′, Q′, K′ por las notaciones

$$P = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \,\ldots\ldots\, a_{n,n}\,;\; P' = \Sigma \pm A_{1,1}\, A_{2,2} \,\ldots\ldots\, A_{n,n}$$
$$Q = \Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \,\ldots\ldots\, b_{n,n}\,;\; Q' = \Sigma \pm B_{1,1}\, B_{2,2} \,\ldots\ldots\, B_{n,n}$$
$$K = \Sigma \pm c_{1,1}\, c_{2,2} \,\ldots\ldots\, c_{n,n}\,;\; K' = \Sigma \pm \gamma_{1,1}\, \gamma_{2,2} \,\ldots\ldots\, \gamma_{n,n}$$

y suponiendo que las multiplicaciones se efectúan por horizontales

$$c_{r,s} = a_{r,1}\, b_{s,1} + a_{r,2}\, b_{s,2} + a_{r,3}\, b_{s,3} + \ldots\ldots\, a_{r,n}\, b_{s,n}\,;$$
$$\gamma_{r,s} = A_{r,1}\, B_{s,1} + A_{r,2}\, B_{s,2} + A_{r,3}\, B_{s,3} + \ldots\ldots\, A_{r,n}\, B_{s,n}\,;$$

y es preciso probar que $\gamma_{r,s}$, que es en K′ el homólogo de $c_{r,s}$, en K, representa el complemento algebraico de dicho término $c_{r,s}$.

Pero como se sabe que el complemento algebraico de un término cualquiera $c_{r,s}$ de un producto es igual á la suma de los productos de los complementos algebraicos de los diferentes términos de la r horizontal del multiplicador por los de los términos de la s.^ma^ horizontal del multiplicando; resulta que $\gamma_{r,s}$ es precisamente el complemento algebraico de $c_{r,s}$.

Sustituyendo á la notacion γ la C

$$K = \Sigma \pm C_{1,1}\, C_{2,2}\, C_{3,3} \ldots\ldots C_{n,n}.$$

De aquí se deduce que:

Si se multiplican de la misma manera dos determinantes y sus recíprocas, el segundo producto es la determinante recíproca del primero.

Ó de otro modo:

La recíproca de un producto es el producto de las recíprocas.

§ X.

Determinantes simétricas, semisimétricas y disimétricas.

91. Ademas de las determinantes *simétricas*, en las que cada elemento es igual al conjugado, debemos distinguir las determinantes *semi-simétricas* y *disimétricas*.

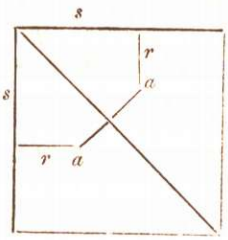
Se dice que una determinante es *semi-simétrica* (gobbo-simétrica), si *cada* elemento es igual y de signo contrario al conjugado, y ademas los elementos principales son nulos.

Y se da el nombre de disimétrica si cada elemento no principal es igual y de signo contrario al conjugado.

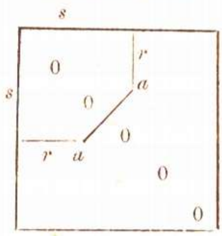
Así en las determinantes simétricas dos líneas conjugadas son iguales; en las semi-simétricas son iguales y de signo contrario; y otro tanto se verifica en las disimétricas, hecha abstraccion de los elementos principales.

Las tres figuras siguientes indican estas tres especies de determinantes.

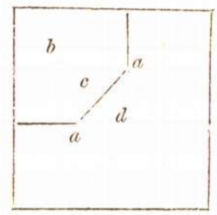
Determinantes simétricas.



Semi-simétricas.



Disimétricas.



Estas tres clases distintas pueden expresarse por el símbolo general

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots\cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots\cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

con tal que se suponga sucesivamente,

en las *determinantes simétricas*. . $a_{r,s} =\ \ a_{s,r}$ para todos los valores de r y s;
en las *semi-simétricas*. . . . . . . $a_{r,s} = - a_{s,r}$, y $a_{r,r} = o$ por lo tanto, para todos los valores de r y s;
y en las *disimétricas*. . . . . $a_{r,s} = - a_{s,r}$ con tal que r y s sean desiguales.

92. Pasemos ahora á exponer algunas propiedades notables de estas tres clases de determinantes.

Y observemos ante todo que *las principales menores* de todas ellas *son de la misma especie que las primitivas*, á saber: ***simétricas en las primeras**, **semi-simétricas en las segundas**, y **disimétricas en las terceras***.

DETERMINANTES SIMÉTRICAS.

93. Si en una determinante simétrica se consideran dos *menores conjugadas*, es decir, tales que las verticales

que componen la segunda tengan los mismos números de órden que las horizontales de la primera, y las horizontales de aquélla los mismos números de órden aún que las verticales de ésta; ó todavía más claro, que constituyan figuras simétricas por relacion á la diagonal principal, *es evidente que ambas menores serán iguales, puesto que para pasar de una á otra basta cambiar las horizontales en verticales, y éstas en aquéllas, lo cual no altera su valor. Resulta tambien que los complementos ordinarios, — que son menores de la misma clase que las primeras, — serán tambien iguales, y que áun lo serán los complementos algebraicos, puesto que ambas características serán iguales, como formadas por los mismos números, sin más cambio que el sustituir á los primeros índices los segundos, y recíprocamente.*

94. Se deduce como caso particular de esta proposicion, que en la determinante simétrica dos elementos conjugados serán complementos algebraicos de otros dos elementos conjugados de la propuesta, y por lo tanto iguales.

Así, cuando $a_{r,s} = a_{s,r}$ para todos los valores de r y s se tiene

$$A_{r,s} = A_{s,r},$$

es decir, que

La recíproca de una determinante simétrica es tambien simétrica.

95. Sabemos que una determinante P puede desarrollarse en esta forma, segun los productos binarios de dos líneas de distinto nombre:

$$P = a_{r,s}\, A_{r,s} - \Sigma_{i,k}\, a_{r,k}\, a_{i,s}\, \alpha_{i,k}$$

en la que $a_{r,s}$ representa el elemento comun;

$A_{r,s}$ el complemento algebraico de $a_{r,s}$;

$a_{r,k}$ y $a_{i,s}$ dos elementos de ambas líneas, que suponemos en la r.ma horizontal y en la s.ma vertical;

$\alpha_{i,k}$ el complemento algebraico de $a_{i,k}$, pero tomado, no en la determinante P, sino en la $A_{r,s}$.

Apliquemos este teorema á dos líneas conjugadas, cuyo elemento comun será, por lo tanto, $a_{r,r}$; tendrémos, haciendo $r=s$

$$P=a_{r,r}\,A_{r,r}-\Sigma_{i,k}\,a_{r,k}\,a_{i,r}\,\alpha_{i,k}$$

en donde $\alpha_{i,k}$ denota el complemento algebraico de $a_{i,k}$ en la determinante $A_{r,r}$, y ademas los índices i, k deben tomar todos los valores **1**, **2**, 3..... n, ménos el valor r.

Supongamos ahora que P es simétrica, y sustituyamos $a_{i,r}=a_{r,i}$, tendrémos

$$P=a_{r,r}\,A_{r,r}-\Sigma_{i,k}\,a_{r,i}\,a_{r,k}\,\alpha_{i,k} \qquad (1).$$

Entre los términos comprendidos bajo el signo Σ debemos distinguir dos clases. Comprende la primera los términos que proceden de valores iguales de i y k; y la segunda, los que corresponden á valores desiguales.

En cuanto á los primeros, tendrémos evidentemente, que en conjunto podrá representarse por $\Sigma_i\,a^2_{r,i}\,\alpha_{i,i}$, en donde i podrá tomar todos los valores ménos r.

Respecto á los segundos, observarémos que dos á dos son iguales, porque

$$a_{r,i}\,a_{r,k}\,\alpha_{i,k} \quad \text{y} \quad a_{r,k}\,a_{r,i}\,\alpha_{k,i}$$

sólo difieren en $\alpha_{i,k}$, $\alpha_{k,i}$; pero como ambas determinantes son complementos algebraicos en $A_{r,r}$ de $a_{i,k}$, $a_{k,i}$, que son á su vez elementos conjugados; y como ademas $A_{r,r}$ menor principal de P es simétrica, resulta

$$\alpha_{i,k}=\alpha_{k,i}\,.$$

De aquí resulta que el conjunto de términos de la segunda clase podrá escribirse de este modo,

$$2\,\Sigma_{i,k}\,a_{r,i}\,a_{r,k}\,\alpha_{i,k}$$

en donde i, k podrán tomar todas las *combinaciones* binarias de

$$1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots r-1,\ r+1\ldots\ldots n.$$

Nótese que en la fórmula primera i y k podian recibir todos los valores comprendidos en esta serie, de suerte que eran grupos aceptables, por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} i=5 & k=7 \\ i=7 & k=5 \end{array}$$

al paso que en la última fórmula ambos sistemas no son distintos, sino *uno solo;* por eso decimos *combinaciones.*

Tendrémos, pues, para el desarrollo de una funcion simétrica,

$$P = a_{r,r} A_{r,r} - \Sigma_i a^2_{r,i} \alpha_{i,i} - 2 \Sigma_{i,k} a_{r,i} a_{r,k} \alpha_{i,k} \tag{2}$$

1.^{er} Ejemplo:

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

sea $r=1$: tendrémos, para i, en la primera Σ, $i=2,3$; y para i, k, en la segunda Σ, $\frac{i}{k} \mid \frac{2}{3}$

$$P = a_{11} A_{11} - (a^2_{12} \alpha_{22} + a^2_{13} \alpha_{33}) - 2 (a_{12} a_{13} \alpha_{23});$$

pero ademas,

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}$$

y puesto que $a_{23} = a_{32}$,

$$A_{11} = a_{22} a_{33} - a^2_{23}.$$

Finalmente,

$$\alpha_{22} = a_{33};\ \alpha_{33} = a_{22};\ \alpha_{2,3} = -a_{32} = -a_{23};$$

luégo

$$P = a_{11} (a_{22} a_{33} - a^2_{23}) - (a^2_{12} a_{33} + a^2_{13} a_{22}) + 2 (a_{12} a_{13} a_{23}),$$

ú ordenando

$$P = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + 2\, a_{12}\, a_{12}\, a_{23} - (a_{11}\, a_{23}^2 + a_{22}\, a_{13}^2 + a_{33}\, a_{12}^2).$$

96. 2.° Ejemplo. Consideremos como segundo ejemplo la determinante simétrica

$$U = \begin{vmatrix} u & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots\ldots & u_n \\ u_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ u_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ u_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ u_n & a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

que, suprimiendo la primera horizontal y la primera vertical, se reduce á la determinante tipo P.

Es claro que en este caso las fórmulas (1) y (2) se reducen á

$$U = u\,P - \Sigma_{i,k}\, u_i\, u_k\, A_{i,k} \qquad (3)$$

$$U = u\,P - \Sigma_i\, u_i^2\, A_{i,i} - 2\, \Sigma_{i,k}\, u_i\, u_k\, A_{i,k} \qquad (4)$$

representando $A_{i,k}$ el complemento algebraico del elemento $a_{i,k}$ tomado en la determinante P, y extendiéndose las sumas á todos los valores 1, 2 ..... n de i y k; pero en la última suma de (4), los valores de i,k son las combinaciones binarias de dichos números.

Cuando en la determinante U se tenga $u = o$, las dos últimas fórmulas se reducen á

$$U = -\Sigma_{i,k}\, u_i u_k\, A_{i,k} \qquad (5)$$

$$U = -\Sigma_i\, u_i^2\, A_{i,i} - 2\, \Sigma_{i,k}\, u_i\, u_k\, A_{i,k} \qquad (6)$$

Aplicando la fórmula (6) á la determinante

$$U = \begin{vmatrix} o & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ u_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

y observando que los valores de i en la primera sigma son 1, 2, 3, y en la segunda los sistemas distintos son

$$i=1,\ k=2;\ i=1,\ k=3;\ i=2,\ k=3,$$

tendrémos

$$U=-(u_1^2 A_{1,1}+u_2^2 A_{2,2}+u_3^2 A_{3,3})-2(u_1 u_2 A_{1,2}+u_1 u_3 A_{1,3}+u_2 u_3 A_{2,3})$$

y sólo resta sustituir por los términos en A sus valores deducidos de

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

97. Como casos particulares de los ejemplos precedentes, hallarémos las siguientes determinantes:

$$\text{I} \qquad \begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & o \end{vmatrix} = 2\,abc$$

En efecto, tomando la primera horizontal y la primera vertical, el término correspondiente á *cero* desaparece.

La primera *sigma* comprende el cuadrado de a por el complemento algebraico de a_{22} (fórmula 2) en

$$\begin{vmatrix} o & c \\ c & o \end{vmatrix}$$

que es cero; y ademas el cuadrado de b, que tambien desaparece.

La *segunda sigma* comprende un solo término, que es ab, por el complemento de $a_{2,3}$, que es $-c$; por lo tanto,

$$\begin{vmatrix} o & a & b \\ a & o & c \\ b & c & o \end{vmatrix} = -2\,(ab \times -c) = 2\,abc.$$

$$\text{II}\quad \begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & o & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ a & o & c & b \\ b & c & o & a \\ c & b & a & o \end{vmatrix} = o-(a^2\,\alpha_{22}+b^2\,\alpha_{33}+c^2\,\alpha_{44})-2\,(ab\,\alpha_{2,3}+ac\,\alpha_{2,4}+bc\,\alpha_{3,4})$$

$$=-(a^2\times-a^2+b^2\times-b^2+c^2\times-c^2)-2\,(ab\times ab+ac\times ac+bc\times bc)$$

$$=a^4+b^4+c^4-2\,a^2\,b^2-2\,a^2\,c^2-2\,b^2\,c^2$$

$$\begin{vmatrix} o & 1 & 1 & 1 \\ 1 & o & c & b \\ 1 & c & o & a \\ 1 & b & a & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} o & \sqrt{a} & \sqrt{b} & \sqrt{c} \\ \sqrt{a} & o & \sqrt{c} & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & \sqrt{c} & o & \sqrt{a} \\ \sqrt{c} & \sqrt{b} & \sqrt{a} & o \end{vmatrix} = a^2+b^2+c^2-2\,ab-2\,ac-2\,bc.$$

98. La derivada de una determinante simétrica P respecto á un elemento cualquiera $a_{r,s}$, deberá tomarse, observando que hay dos elementos iguales: el $a_{r,s}$ y el $a_{s,r}$, de suerte que la variable entra dos veces: es decir,

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}} = \frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}} + \frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{s,r}} \times \frac{d\,a_{s,r}}{d\,a_{r,s}}\,;$$

pero

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}} = \mathrm{A}_{r,s}\,;\quad \frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{s,r}} = \mathrm{A}_{s,r}\,;\quad \text{y}\quad \frac{d\,a_{s,r}}{d\,a_{r,s}} = 1\,;$$

luego

$$\frac{d\,\mathrm{P}}{d\,a_{r,s}} = \mathrm{A}_{r,s} + \mathrm{A}_{s,r} = 2\,\mathrm{A}_{r,s}\,;$$

por lo tanto,

La derivada de una determinante simétrica respecto á un elemento cualquiera, es igual al doble del complemento algebraico del mismo elemento.

Exceptúanse los elementos principales.

DETERMINANTES SEMI-SIMÉTRICAS.

99. Hemos dicho que en dos menores conjugadas de una determinante semi-simétrica, las sucesivas horizontales de la una son iguales á las verticales de la otra, pero de

signo contrario, y de aquí se deduce que serán iguales, mudando el signo á todas las líneas de un mismo nombre en una de las menores. Ahora bien, una determinante de grado par no se altera cuando se cambian los signos á todos sus elementos, y sólo cambian el signo, pero no el valor numérico, cuando es de grado impar; luego,

En una determinante semi-simétrica, dos menores conjugadas son iguales si son de grado par, é iguales y de signo contrario, si son de grado impar.

100. De aquí resulta como caso particular, que,

Los complementos ordinarios de dos elementos conjugados de una determinante semi-simétrica, son iguales si la primitiva es de grado impar; y son iguales y de signo contrario, si aquélla fuese de grado par.

Otro tanto puede decirse de los complementos algebraicos, porque como en $a_{r,s}$ y $a_{s,r}$ la característica es la misma, $r+s$, ambos complementos algebraicos serán á la vez iguales á los ordinarios ó de signo contrario.

101. Suponiendo que P sea semi-simétrica, indicarémos con la letra π, la en que se convierte cambiando el signo á todas las líneas de un mismo nombre. De aquí resulta evidentemente que las horizontales de π serán idénticas á las verticales de P, y por lo tanto,

$$P = \pi.$$

Pero si P es de grado impar, se sabe que este cambio da una determinante igual y de signo contrario á la primitiva; es decir,

$$P = -\pi,$$

y las dos últimas ecuaciones no pueden verificarse á la vez sin que se tenga

$$P = o.$$

De aquí resultan las siguientes proposiciones:

I. *Cada determinante semi-simétrica de grado impar es nula.*

II. *En toda determinante semi-simétrica, las menores principales de grado impar (que son determinantes semi-simétricas de grado impar), son nulas tambien.*

III. *En las semi-simétricas de grado par, los complementos de cada elemento principal (que son menores principales impares), son nulas.*

102. De aquí se deduce que si en la determinante P se tiene para todos los valores de r y s

$$a_{r,s} = -a_{s,r}; \quad a_{r,r} = o,$$

si P es de grado par, tendrémos,

$$A_{r,s} = -A_{s,r}; \quad A_{r,r} = o,$$

y si P es de grado impar, solamente

$$A_{r,s} = A_{s,r};$$

por lo tanto,

La determinante recíproca de otra semi-simétrica de grado par, es tambien semi-simétrica.

Si la primitiva es de grado impar, su recíproca es simétrica y nula como la primitiva.

103. Siendo nula y simétrica la recíproca de una determinante semi-simétrica de grado impar, cada menor principal de dicha recíproca y de grado superior al primero, será nula, porque se tiene

$$R_m = P'_m (-1)^\varepsilon \times P^{m-1},$$

y aquí, $P = o$.

Considerando en particular una menor principal de 2.° grado, tendrémos,

$$\begin{vmatrix} A_{r,r} & A_{r,s} \\ A_{s,r} & A_{s,s} \end{vmatrix} = o$$

pero $A_{r,s} = A_{s,r}$, luego

$$A^2_{r,s} = A_{r,r} A_{s,s},$$

y por lo tanto,

$$A_{r,s} = \sqrt{A_{r,r}\,A_{s,s}}$$

Dando á s diferentes valores,

$$A_{r,1} = \sqrt{A_{1,1}\,A_{r,r}}\ ;\ A_{r,2} = \sqrt{A_{2,2}\,A_{r,r}}\ ;\ A_{r,3} = \sqrt{A_{3,3}\,A_{r,r}}\ ;\ A_{r,4} = \sqrt{A_{4,4}\,A_{r,r}}\ ;\ldots A_{r,s} = \sqrt{A_{s,s}A_{r,r}}$$

de donde

$$A_{r,1} : A_{r,2} : A_{r,3} \ldots\ldots A_{r,n} = \sqrt{A_{1,1}} : \sqrt{A_{2,2}} : \sqrt{A_{3,3}} : \sqrt{A_{4,4}} \ldots\ldots \sqrt{A_{n,n}}$$

y de aquí el siguiente teorema:

Los sucesivos elementos de una línea cualquiera de la recíproca de una determinante semi-simétrica impar, son proporcionales á las raíces cuadradas de los sucesivos elementos principales.

El signo de uno de estos radicales que es arbitrario, determina todos los demas signos.

104. Las determinantes semi-simétricas de *grado par* gozan de la notable propiedad de ser cuadrados perfectos.

Esta propiedad es evidente en las de 2.° grado, porque se tiene

$$\begin{vmatrix} o & a \\ -a & o \end{vmatrix} = a^2$$

pero puede demostrarse en general.

Sea P una determinante semi-simétrica y par.

R su recíproca, que será tambien semi-simétrica, porque los complementos algebraicos de dos elementos conjugados de P, son menores impares, cuyos elementos son iguales y de signo contrario, es decir, que son dichas menores iguales y de signos contrarios, y ademas los complementos de los elementos principales son determinantes semi-simétricas impares, y por lo tanto nulas.

R_2 una menor principal de segundo grado de R, y por lo tanto semi-simétrica, y P'_2 el complemento ordinario en P de P_2, homólogo este último de R_2.

Tendrémos, segun el (N. 85),

$$R_2 = (-1)^{\varepsilon} P'_2 P^{2-1} = P'_2 P,$$

puesto que siendo P'_2 principal, los primeros y segundos índices son iguales, y ε es par.

Ahora bien, si las determinantes pares semi-simétricas hasta el grado n inclusive son cuadrados perfectos, tambien lo serán las del grado $n+2$.

Sea P una de grado $n+2$.

En efecto, en la ecuacion

$$R_2 = P'_2 P,$$

R_2 es una determinante par y semi-simétrica, luego es un cuadrado perfecto; por la tanto, P'_2 P lo es tambien; pero el factor P'_2 es una determinante par semi-simétrica y del grado n, luego es tambien un cuadrado perfecto. Representando ρ^2 la primera y π^2 la segunda, tendrémos,

$$\rho^2 = \pi^2 P,$$

de donde

$$P = \left(\frac{\rho}{\pi}\right)^2$$

luego P es un cuadrado perfecto.

Pero las de segundo grado lo son, luego lo son las de cuarto, las de sexto, y en general las del grado n.

En resúmen:

Toda determinante semi-simétrica de grado par, es el cuadrado de una funcion entera y racional de sus elementos.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} o & x & y & z \\ -x & o & c & b \\ -y & -c & o & a \\ -z & -b & -a & o \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & c & b \\ -y & o & a \\ -z & -a & o \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} -x & o & b \\ -y & -c & a \\ -z & -b & o \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} -x & o & c \\ -y & -c & o \\ -z & -b & -a \end{vmatrix} =$$

$$-x(-x \times a^2 - c \times az + b \times ay) + y\left(-x \times ab + b(by - cz)\right) - z\left(-x \times + ac + c(yb - cz)\right)$$
$$= a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - 2\,abxy + 2\,acyz - 2\,bcyz = (ax - by + cz)^2$$

$$\begin{vmatrix} o & x & -y & z \\ -x & o & c & b \\ y & -c & o & a \\ -z & -b & -a & o \end{vmatrix} = (ax + by + cz)^2$$

$$\begin{vmatrix} o & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & o & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & o & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & o \end{vmatrix} = (a_{1,2}\, a_{3,4} - a_{1,3}\, a_{2,4} + a_{1,4}\, a_{2,3})^2 = (a_{1,2}\, a_{3,4} + a_{1,3}\, a_{4,2} + a_{1,4}\, a_{2,3})^2$$

Nótese que en el último ejemplo, todo término negativo puede cambiarse en positivo alterando los índices de un factor, puesto que en general, $a_{r,s} = - a_{s,r}$.

105. *Otra demostracion del mismo teorema, segun Baltzer.* — Sabemos que en toda la determinante se tiene

$$P = a_{ii}\, A_{ii} - \Sigma_{r,s}\, a_{r,i}\, a_{i,s}\, \alpha_{r,s}$$

variando r y s entre 1 y n excepto el valor i, y expresando $\alpha_{r,s}$ el complemento algebraico de $a_{r,s}$ en A_{ii}, de suerte que $\alpha_{r,s}$ es una determinante menor del grado $n - 2$, que procede de suprimir en P la r.^{ma} y la i.^{ma} horizontales, y las verticales s é i.

Puesto que P es semi-simétrica de grado par, se tiene $A_{i,i} = o$, y ademas $a_{r,i} = - a_{i,r}$; pero entiéndase que aunque $A_{i,i}$ es nula, queda como forma algebraica para deducir de ella los valores de α.

Tendrémos, pues,

$$P = \Sigma_{r,s}\, a_{i,r}\, a_{i,s}\, \alpha_{r,s}.$$

Pero P es semi-simétrica de grado par, y $A_{i,i}$ será semi-simétrica de grado impar, por lo tanto, nula, y nulos sus menores principales.

De donde resulta (N. 103)

$$\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r} = \sqrt{\alpha_{rr}\, \alpha_{ss}}\ :$$

por lo tanto,

$$P = \Sigma_{r,s}\, a_{i,r}\, a_{is} \sqrt{\alpha_{rr}\, \alpha_{ss}}.$$

En esta fórmula i tiene un valor constante, y r,s, es decir, cada uno de ellos, toman todos los valores de la serie

$$1 . 2 \ldots\ldots i-1 , i+1 \ldots\ldots n,$$

por lo tanto, á cada valor de r tendrémos un grupo

$$a_{i,r}\sqrt{\alpha_{rr}}\left(a_{i,1}\sqrt{\alpha_{1,1}} + a_{i,2}\sqrt{\alpha_{2,2}} + a_{i,3}\sqrt{\alpha_{3,3}} + \cdots\cdots\cdots a_{1,n}\sqrt{\alpha_{n,n}}\right)$$

$$= a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\,\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}}$$

variando s por la serie $1 , 2 \ldots\ldots i-1 , i+1 \ldots\ldots n$.

Para otro valor de r tendrémos otra expresion análoga, y sumando resultará,

$$\mathrm{P} = a_{i,1}\sqrt{\alpha_{1,1}}\,\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}} + a_{i,2}\sqrt{\alpha_{2,2}}\,\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}} + a_{i,3}\sqrt{\alpha_{3,3}}\,\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}} + \cdots\cdots$$

$$= \left(a_{i,1}\sqrt{\alpha_{1,1}} + a_{i,2}\sqrt{\alpha_{2,2}} + a_{i,3}\sqrt{\alpha_{3,3}} + \ldots\ldots a_{i,n}\sqrt{\alpha_{n,n}}\right)\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}}$$

$$= \left(\Sigma_r\, a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\right)\left(\Sigma_s\, a_{i,s}\sqrt{\alpha_{s,s}}\right)$$

y como ambos factores son idénticos en la forma, y los índices pasan por las mismas series, resulta que son iguales: es decir,

$$\mathrm{P} = \left(\Sigma_r\, a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\right)^2,$$

ó bien

$$\sqrt{\mathrm{P}} = \Sigma_r\, a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}\,;$$

ó sea

$$\sqrt{\mathrm{P}} = a_{i,1}\sqrt{\alpha_{1,1}} + a_{i,2}\sqrt{\alpha_{2,2}} + a_{i,3}\sqrt{\alpha_{3,3}} + \cdots\cdots\cdots a_{i,i-1}\sqrt{\alpha_{i-1,\,i-1}} +$$

$$a_{i,i+1}\sqrt{\alpha_{i+1,\,i+1}} + \cdots\cdots\cdots a_{i,n}\sqrt{\alpha_{n,n}} \qquad (\alpha)$$

Vemos segun la última fórmula, que $\sqrt{\mathrm{P}}$ se compone de una suma de $n-1$ términos (falta en efecto el i) de la forma $a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}$, en que $\alpha_{r,r}$ representa una determinante semi-simétrica del grado $n-2$, puesto que $n-1$ era el grado de $\mathrm{A}_{i,i}$.

Si aplicamos á cada radical $\sqrt{\alpha_{r,r}}$ el mismo método que á $\sqrt{P}$, lo podrémos expresar por una suma de $n-3$ términos cada uno de los que se compondrá de un factor racional y de un radical de segundo grado, sobre una determinante semi-simétrica del grado $n-4$. Sustituyendo en $\sqrt{P}$, tendrémos esta última cantidad desarrollada en una suma de $(n-1)(n-3)$ términos (puesto que cada término de (α) ha dado orígen á $(n-3)$): cada término se compondrá de dos factores racionales y de un radical de segundo grado sobre una determinante semi-simétrica del grado $n-6$.

Continuando de este modo llegarémos á un desarrollo compuesto de $(n-1)(n-3)(n-5) \ldots\ldots 3 . 1$ términos, y cada término se compondrá de dos partes ó factores, el primero racional, respecto á los términos de la determinante P; el segundo, que será la raíz cuadrada de una determinante de segundo grado, pero toda determinante de segundo grado es un cuadrado perfecto; luego $\sqrt{P}$ es racional.

Observemos para completar este punto:

1.° Que al efectuar la serie de desarrollos anteriormente explicados, en cada uno los factores racionales de los diferentes términos son elementos de la determinante P. Así en $\sqrt{P}$ son $a_{i,1}$, $a_{i,2} \ldots\ldots$; en $\sqrt{\alpha_{r,r}}$ serán elementos de $\alpha_{r,r}$, pero $\alpha_{r,r}$ está formada de una parte de P, luego sus elementos lo son de esta última, y así sucesivamente.

2.° Que el grado de α va bajando segun la serie.

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \ldots\ldots,\ 4,\ 2 \qquad (n)$$

y á cada término corresponde una descomposicion y un factor, luego en cada término definitivo de $\sqrt{P}$ habrá tantos factores como términos pares hay en la serie n, que son $\frac{n}{2}$.

3.° La potencia de cada elemento de la determinante P, es la primera como se ve en la fórmula (α).

4.° Los subíndices de cada elemento de $\sqrt{P}$, tanto los primeros como los segundos, son todos distintos. En efecto, consideremos un término de $\sqrt{P}$, por ejemplo, el $a_{i,r}\sqrt{\alpha_{r,r}}$. La determinante $\alpha_{r,r}$ no contiene términos de la horizontal ni de la vertical que pasan por $a_{i,i}$, puesto que forma parte de $A_{i,i}$, luego no contiene el subíndice i, pero es el complemento algebraico de $a_{r,r}$ en $A_{i,i}$, luego tampoco contiene ningun término de la r.^ma^ horizontal ni de la r.^ma^ vertical. En resúmen, en $\sqrt{\alpha_{rr}}$ no se puede presentar ningun término con los subíndices i, r. Otro tanto podriamos decir del desarrollo de $\sqrt{\alpha_{rr}}$.

5.° Puesto que cada término de $\sqrt{P}$ contiene $\frac{n}{2}$ factores y todos los n subíndices son distintos, resulta que estos subíndices son permutaciones diversas de 1, 2, 3..... n.

En resúmen: $\sqrt{P}$ es una funcion racional y entera de los elementos de P; cada término es el producto de $\frac{n}{2}$ elementos; el número de términos es $(n-1)(n-3)\ldots\ldots 3, 1$ y en cada término entra una permutacion de los números 1, 2, 3 ..... n.

105. *Propiedades de* $\sqrt{P}$.—La propiedad característica consiste en que muda de signo sin mudar de valor, cuando se cambian entre sí *dos índices*.

Representemos por H la raíz de P, y sea H_1 el resultado de cambiar r por s, y s por r. H_1^2 será el valor de la determinante que resulta de cambiar en P, r y s; pero esta permutacion no altera el valor de P ni su signo, porque esto equivale á cambiar las r.^ma^ y s.^ma^ horizontales, así como las r.^ma^ y s.^ma^ verticales, luego

$$H^2 = H_1^2.$$

De aquí resulta que H y H_1 no pueden diferir en valor, cuando más diferirán en signo, y para averiguarlo basta comparar un término de la primera con el correspondiente de la segunda.

Sea $a_{r,s}\,h$ el conjunto de todos los términos de H que tienen por factor el elemento $a_{r,s}$: los índices de todos los elementos que entran en h, sabemos que son distintos de r y s, luego la permutacion de estos índices no altera la cantidad h, de suerte que tendrémos,

$$\text{en H} \;\ldots\ldots\; a_{r,s}\,h$$
$$\text{en H}_1 \;\ldots\ldots\; a_{s,r}\,h = -\,a_{r,s}\,h;$$

por lo tanto, H y H_1 tienen signos contrarios, es decir,

$$H = -H_1$$

Por otra parte, si hacemos $r = s$, las cantidades H y H_1 son iguales, luego en este caso, $H = o$.

Resulta, pues, el siguiente teorema:

La raíz de la determinante P *semi-simétrica y de grado par, muda de signo y no de valor, si se cambian entre sí dos subíndices, y se anula si se hacen iguales.*

107. *Escribiendo arbitrariamente un producto de* $\frac{n}{2}$ *elementos de la determinante* P, *si los subíndices son todos desiguales, este producto es siempre un término de la raíz.*

En efecto, sean los $\frac{n}{2}$ elementos

$$a_{t,u}\, a_{v,x} \,\ldots\ldots\, a_{y,z} \qquad (a)$$

en que $t, u, v, x \ldots\ldots y, z$, son una permutacion de 1, 2, 3 ..... n.

Multipliquemos este producto por el que se obtiene permutando cada dos subíndices;

$$a_{u,t}\, a_{x,v} \,\ldots\ldots\, a_{z,y} \qquad (a')$$

y tendrémos,

$$a_{t,u}\, a_{u,t}\, a_{v,x}\, a_{x,v} \,\ldots\ldots\, a_{y,z}\, a_{z,y} \qquad (a'').$$

Este producto, aparte del signo, pertenece á la determinante P, puesto que la serie de los primeros índices t, u,

v, x ..... y, z en a'' es una permutacion de $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, y la serie $u, t, x, v, \ldots\ldots z, y$ en a', tambien es una permutacion de la misma serie.

Veamos ahora qué signo debe llevar (a'') como término de P.

El signo estará dado por una cierta potencia de (-1) que tratamos de determinar.

Sea ε el número de inversiones de la serie de los primeros índices

$$t, u, v, x \ldots\ldots y, z.$$

Los segundos índices se obtienen por $\frac{n}{2}$ permutaciones binarias u y t, v y x, ... y y z; y como á cada permutacion corresponde un cambio de signo, tendrémos para el exponente de (-1), primero ε, despues ε correspondiente á la segunda serie si fuese igual á la primera, y por último, $(-1)^{\frac{n}{2}}$ por las $\frac{n}{2}$ permutaciones; de suerte que resultará,

$$(-1)^{\varepsilon+\varepsilon+\frac{n}{2}} = (-1)^{2\varepsilon+\frac{n}{2}} = (-1)^{\frac{n}{2}}.$$

En resúmen,

$$(-1)^{\frac{n}{2}} a_{t,u}\, a_{u,t}\, a_{v,x}\, a_{x,v} \ldots\ldots a_{y,z}\, a_{z,y}$$

es un término de P. Sustituyendo $a_{u,t} = -a_{t,u}$; $a_{x,v} = -a_{v,x} \ldots$ $a_{z,y} = -a_{y,z}$, se convertirá en

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \times (-1)^{\frac{n}{2}} (a_{t,u}\, a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z})^2 = (a_{t,u}\, a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z})^2,$$

y por lo tanto, dicho término de P es el cuadrado de $a_{t,u}$ $a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z}$; luego este producto es un término de la raíz.

108. Esta última propiedad permite formar inmediatamente y de muchas maneras un término de la raíz de la determinante P, con lo cual es cierto que no se obtiene más que un término, pero verémos bien pronto que una vez

formado arbitrariamente este término, puede deducirse de él, por un método sencillísimo, la expresion completa de la raíz.

Dicho término se distingue con el nombre de ***término principal de la raíz***, y la raíz se representa por el símbolo

$$(a_{t,u}\ a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z}),$$

ó más sencillamente,

$$(t, u, v, x \ldots\ldots y, z).$$

Para evitar ambigüedades, tomarémos este término como *positivo*, de suerte que $(t, u, v, x \ldots\ldots y, z)$ significa la raíz de la determinante formada por las horizontales y verticales

$$t, u, v, x \ldots\ldots y, z,$$

y cuyo primer término es

$$+ a_{t,u}\ a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z}.$$

Desde luégo se deduce de la propiedad explicada en el N. 106 que si en este símbolo se cambian dos índices entre sí, el nuevo símbolo representará la misma raíz con signo contrario: así,

$$(t, u, v, x \ldots\ldots y, z) = -(u, t, v, x \ldots\ldots y, z) = (u, t, x, v \ldots\ldots y, z) = \ldots\ldots.$$

En general, las expresiones de la raíz correspondientes á dos símbolos con dos diversas permutaciones, son siempre iguales en valor absoluto, pero son del mismo signo ó de signo contrario, segun que las dos permutaciones son de la misma ó de distinta clase, es decir, segun que el número total de inversiones es par ú impar.

Si el producto

$$a_{t,u}\ a_{v,x} \ldots\ldots a_{y,z}$$

comprende un número de factores inferior á $\frac{n}{2}$, pero par, es fácil ver que en tal caso dicho producto es un término de la raíz de la principal menor de P, formada por las horizontales definidas por los números de órden $t, u, v, x \ldots\ldots y, z$, y el símbolo de esta raíz será como precedentemente

$$(t, u, v, x \ldots\ldots y, z).$$

109. *Construccion de la raíz de la determinante* P. Representemos la raíz de P por el símbolo

$$(1, 2, 3 \ldots\ldots n),$$

y apliquemos la siguiente regla:

1.° Saquemos fuera del símbolo los dos primeros índices 1, 2 como subíndices de a, y formemos el primer término de dicha raíz,

$$a_{1,2}\,(3, 4, 5 \ldots\ldots n),$$

en el que el paréntesis es la raíz de la determinante semi-simétrica del grado $n-2$, que resulta de suprimir las dos primeras horizontales y las dos primeras verticales en P.

2.° Dejando invariable el primero de los dos subíndices de $a_{1,2}$, cambiemos el segundo por todos los índices 3, 4, 5 ..... n que hay dentro del paréntesis; pero entendiéndose que cada vez que el primer número del paréntesis pasa como segundo subíndice de a, el segundo subíndice al cual sustituye, se coloca en el último puesto del paréntesis.

De este modo tendrémos, y en esto consiste el teorema

$$(1, 2, 3, 4 \ldots\ldots n) = a_{1,2}\,(3, 4, 5 \ldots\ldots n) + a_{1,3}\,(4, 5 \ldots\ldots n, 2) + a_{1,4}\,(5, \ldots\ldots n, 2, 3) + \ldots\ldots$$
$$a_{1,n}\,\big(2, 3, 4, 5 \ldots\ldots (n-1)\big) \qquad (1)$$

Dem. Observemos ante todo que el desarrollo de $\sqrt{\mathrm{P}}$ (N. 105) para $i=1$, toma la forma

$$\sqrt{\mathrm{P}} = a_{1,2}\sqrt{\alpha_{2,2}} + a_{1,3}\sqrt{\alpha_{3,3}} + a_{1,4}\sqrt{\alpha_{4,4}} + a_{1,5}\sqrt{\alpha_{5,5}} + \cdots a_{1,n}\sqrt{\alpha_{n,n}} \quad (2)$$

y es evidente que los términos de esta serie no difieren en valor absoluto de los de los (1), porque en general

$(r, r+1, \cdots\cdots n, 2, 3, \cdots\cdots r-2)$ ó bien $(2, 3, 4\cdots\cdots r-2, r, r+1\cdots\cdots n)$

y

$$\sqrt{\alpha_{r,r}},$$

expresan la raíz de la determinante formada, suprimiendo la primera horizontal y la primera vertical, y ademas la r.ma horizontal y la r.ma vertical de P.

Estudiemos ahora los signos.

La expresion (2) representa una raíz de P, pero es necesario para ello que tomemos para $\pm\sqrt{\alpha_{r,r}\,\alpha_{s,s}}$ un signo tal, que resulte idéntica á $\alpha_{r,s}$ ó á $\alpha_{s,r}$, puesto que en esto se funda la demostracion del núm. 105, y así pudimos convertir

$$\Sigma_{r,s}\, a_{i,r}\, a_{i,s}\, \alpha_{r,s}$$

en un cuadrado. De suerte que los signos de $\sqrt{\alpha_{3,3}}\,\sqrt{\alpha_{4,4}}\cdots\cdots$ $\sqrt{\alpha_{n,n}}$ están perfectamente determinados, dado el signo de $\sqrt{\alpha_{2,2}}$, por la relacion general

$$\sqrt{\alpha_{r,r}}\,\sqrt{\alpha_{s,s}} = \alpha_{r,s} \qquad (3)$$

es decir, por la serie de relaciones

$$\sqrt{\alpha_{2,2}}\,\sqrt{\alpha_{3,3}} = \alpha_{2,3};\ \sqrt{\alpha_{2,2}}\,\sqrt{\alpha_{4,4}} = \alpha_{2,4};\ \sqrt{\alpha_{2,2}}\,\sqrt{\alpha_{5,5}} = \alpha_{2,5}\cdots\cdots$$

En efecto, $\alpha_{2,3}$, $\alpha_{2,4}$, $\alpha_{2,5}\cdots\cdots$ son determinantes perfectamente definidas en magnitud y signo, luego si fijamos el de $\sqrt{\alpha_{2,2}}$, quedarán determinados los de

$$\sqrt{\alpha_{33}}\,\sqrt{\alpha_{44}}\cdots\cdots\sqrt{\alpha_{nn}}.$$

De aquí resulta que si los símbolos de la ecuacion (1) se determinan de manera que satisfagan á la misma relacion, la serie de los signos de los símbolos (1) será la misma ó completamente contraria á la de las radicales de la (2), y en uno y otro caso la ecuacion (1) será exacta.

Todo queda reducido á demostrar que los símbolos

$(3, 4, 5, \cdots\cdots n)$; $(4, 5, \cdots\cdots n, 2)$; $(5 \cdots\cdots n, 2, 3)\cdots\cdots$

satisfacen á la condicion (3), es decir, que se tiene en general

$$[(r+1, r+2, \dots n, 2, 3 \dots r-1)] \times [(s+1, s+2, \dots n, 2, 3 \dots s-1)] = \alpha_{r,s}$$

ó abreviadamente,

$$R \times S = \alpha_{r,s},$$

lo cual es fácil, porque R y S son polinomios perfectamente definidos; $\alpha_{r,s}$ es una determinante tambien definida sin ambigüedad, y ademas los valores absolutos de R. S y $\alpha_{r,s}$ son los mismos.

Para asegurarse si existe ó no igualdad en cuanto á los signos, basta comparar dos términos iguales.

Comencemos por hacer directas las permutaciones de R y S.

Desde $r+1$ hasta $n = r + (n-r)$, hay $n-r$ índices, todos superiores á los $2, 3 \dots\dots r-1 = 1 + (r-2)$, que son en número $r-2$, luego hay $(n-r)(r-2)$ inversiones, y tendrémos

$$\begin{aligned} R &= (-1)^{(n-r)(r-2)} (2, 3 \dots\dots r-1, r+1, \dots\dots n) \\ &= (-1)^{nr-r^2-2(n-r)} (2, 3 \dots\dots r-1, r+1, \dots\dots n), \end{aligned}$$

ó suprimiendo nr y $2(n-r)$, que son números pares, y observando que r^2 y r son á la vez pares ó impares

$$R = (-1)^r (2, 3 \dots\dots r-1, r+1 \dots\dots n) \qquad (4)$$

del mismo modo

$$S = (-1)^s 2, 3 \dots\dots s-1, s+1 \dots\dots n) \qquad (5)$$

Introduzcamos todavía otra modificacion en las expresiones (4) y (5):

Traslademos el índice s en la primera y el r en la segunda al último lugar.

Despues de s hay en (4), suponiendo $r < s$ los términos

$$s+1, s+2 \dots\dots n = s + (n-s),$$

es decir, $n - s$ todos superiores al s, luego esta modificacion introducirá el factor $(-1)^{n-s}$, y tendrémos

$$R = (-1)^{r-s+n} (2, 3 \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots s-1, s+1 \ldots\ldots n, s).$$

Análogamente en (5), despues del índice r hay los

$$r+1, r+2 \ldots\ldots s-1, s+1, \ldots\ldots n = r + (n-r)$$

que serian en número $n - r$ si estuviera completa la serie; pero como falta s, serán

$$n - r - 1,$$

y deberémos afectar al segundo miembro de (5) del factor $(-1)^{n-r-1}$, resultando por consiguiente,

$$S = (-1)^{s+n-r-1} (2, 3, \ldots\ldots s-1, s+1 \ldots\ldots r-1, r+1, \ldots\ldots n, s).$$

Suprimiendo de los exponentes de las dos últimas ecuaciones el número par n, tendrémos,

$$R = (-1)^{r-s} (2, 3 \ldots\ldots s-1, s+1, \ldots\ldots r-1, r+1, \ldots\ldots n, s) \quad (6)$$
$$S = (-1)^{s-r-1} (2, 3 \ldots\ldots s-1, s+1, \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots n, r) \quad (7).$$

Multiplicando los términos principales de (6) y (7), resultará para un término de R S

$$(-1)^{r-s} a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\, n-1}\, a_{n,s} \times (-1)^{s-r-1} a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\, n-1}\, a_{n,r}$$

ó bien

$$-a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\, n-1}\, a_{n,s}\, a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\, n-1}\, a_{n,r}.$$

Si en vez de los términos del segundo factor ponemos sus conjugados

$$a_{2,3} = -a_{3,2}\,;\ a_{4,5} = -a_{5,4} \ldots\ldots a_{n,r} = -a_{r,n},$$

observando que el número de estos términos es

$$\frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1,$$

puesto que en los primeros índices faltan 1 y r, y en los segundos 1 y s, es decir, 4 índices, y que los $2n-4$ índices se agrupan dos á dos, lo cual da $n-2$ para el número total de factores, ó $\frac{n}{2}-1$ para la mitad, tendrémos

un término de R S

$$= -(-1)^{\frac{n}{2}-1} a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\,n-1}\, a_{n,s}\, a_{3,2}\, a_{5,4} \ldots\ldots a_{n-1,\,n-2}\, a_{r,n}$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} a_{2,3}\, a_{4,5} \ldots\ldots a_{n-2,\,n-1}\, a_{n,s}\, a_{3,2}\, a_{5,4} \ldots\ldots a_{n-1,\,n-2}\, a_{r,n} \qquad (t)$$

Veamos ahora los índices que faltan en la primera y segunda serie.

En $\quad 2, 3 \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots s-1, s+1 \ldots\ldots n, s$

agrupados *dos* á *dos* para convertirse en subíndices de a, falta evidentemente de la serie completa,

1 en los primeros y segundos;

r en los primeros y segundos tambien;

y s en los primeros, pero no en los segundos, porque hay el término $a_{n,s}$.

En

$$2, 3, \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots s-1, s+1 \ldots\ldots n, r$$

permutados dos á dos,

$$3, 2 \mid 5, 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ldots\ldots \mid r, n \mid$$

y divididos en grupos binarios como subíndices de a, faltan

1 en los primeros y segundos;

s en los primeros y segundos;

y r solamente en los segundos.

De aquí resulta qne en la serie de los primeros términos de (t) existirán todos los números naturales $1, 2 \ldots\ldots n$ ménos 1 y s, y en la serie de los segundos faltarán asimismo 1 y r.

En resúmen (t) es, prescindiendo del signo, un término de una determinante deducida de P suprimiendo la primera horizontal, la primera vertical, la horizontal s y la vertical r; luego es un término de la determinante $\alpha_{s,r}$ del grado $(n-2)$, ó tambien de la determinante $\alpha_{r,s}$ pues que son iguales ambas.

Veamos ahora el signo que al término

$$a_{2,3}\, a_{3,2}\, a_{4,5}\, a_{5,4} \cdots\cdots a_{n-2,\, n-1}\, a_{n-1,\, n-2}\, a_{n,s}\, a_{r,n} \qquad (t')$$

le corresponde como término de $\alpha_{r,s}$.

$\alpha_{r,s}$ es el complemento algebraico de $a_{r,s}$ en $A_{1,1}$, luego será el producto de $(-1)^{r+s}$, por la determinante formada con las horizontales

$$2, 3, \cdots\cdots s-1, s+1 \cdots\cdots n-1, n$$

y con las verticales

$$2, 3, \cdots\cdots r-1, r+1 \cdots\cdots n-1, n.$$

Veamos qué signo corresponde á las permutaciones

$$2, 3, 4, 5 \cdots\cdots n-2, n-1, n, r$$

$$3, 2, 5, 4 \cdots\cdots n-1, n-2, s, n.$$

En la primera, como hemos visto, hay

$$n-r-1$$

inversiones, lo cual da el factor

$$(-1)^{n-r-1}.$$

A la segunda podemos pasar de la

$$2, 3, 4, 5 \cdots\cdots s-1, s, s+1 \cdots\cdots n-2, n-1, n.$$

1.° Prescindiendo de s y n con lo cual quedaran $n-2$ índices, y permutando cada dos contiguos, lo cual da tantas permutaciones como pares de índices, es decir, $\frac{n}{2}-2$.

2.° Trayendo s al penúltimo lugar. Pero despues de s hay los términos

$$s+1, s+2, \cdots\cdots n-2, n-1 = s+(n-s-1)$$

es decir, $n-s-1$, luego esta traslacion de s aumentará $n-s-1$ inversiones.

En resúmen, las inversiones del término t' como término de la determinante contenida en $\alpha_{r,s}$, son

$$n-r-1+\frac{n}{2}-2+n-s-1=2n-4+\frac{n}{2}-r-s,$$

ó suprimiendo los números pares $\frac{n}{2}-r-s$.

Y el signo del término como perteneciente á el complemento algebraico $\alpha_{r,s}$

$$(-1)^{r+s}\times(-1)^{\frac{n}{2}-r-s}=(-1)^{\frac{n}{2}}.$$

Resulta, pues, que el término

$$(-1)^{\frac{n}{2}} a_{2,3}\, a_{3,2}\times a_{4,5}\, a_{5,4}\times\cdots\cdots\times a_{n-2,\,n-1}\, a_{n-1,\,n-2}\times a_{n,s}\, a_{r,n}$$

es igual en valor y en signo al correspondiente de $\alpha_{r,s}$, y por lo tanto, los símbolos de (1) satisfacen á la condicion (5) como $\sqrt{\alpha_{r,r}}$....., ó de otro modo, las expresiones (1) y (2) son iguales, y del mismo signo ó iguales y de signo contrario, en ambos casos (1) es raíz de P.

Repitiendo un procedimiento análogo respecto á los coeficientes del segundo miembro de dicha fórmula, la expresion de la raíz de la determinante P quedará desarrollada en una suma de productos de dos elementos multiplicados por las raíces de las determinantes semi-simétricas de grado $n-4$, hasta llegar de este modo á la expresion de $\sqrt{P}$ en funcion de sus elementos.

Ejemplos:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \begin{aligned} &=(1,2,3,4)^2=\left[a_{12}(3,4)+a_{13}(4,2)+a_{14}(2,3)\right]^2 \\ &=\left[a_{1\cdot2}\, a_{3\cdot4}+a_{1\cdot3}\, a_{4\cdot2}+a_{1\cdot4}\, a_{2\cdot3}\right]^2 \end{aligned}$$

Es claro que los elementos $a_{1,1}\; a_{2,2}\; a_{3,3}\; a_{4,4}$ son todos nulos.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} & a_{3,6} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & a_{5,6} \end{vmatrix} = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^2 = a_{1,2}(3, 4, 5, 6) + a_{1,3}(4, 5, 6, 2)$$
$$+ a_{1,4}(5, 6, 2, 3) + a_{1,5}(6, 2, 3, 4) + a_{1,6}(2, 3, 4, 5)$$
$$= \left\{\begin{array}{l} \quad a_{1,2}\left[a_{3,4}(5, 6) + a_{3,5}(6, 4) + a_{3,6}(4, 5)\right] \\ + a_{1,3}\left[a_{4,5}(6, 2) + a_{4,6}(2, 5) + a_{4,2}(5, 6)\right] \\ + a_{1,4}\left[a_{5,6}(2, 3) + a_{5,2}(3, 6) + a_{5,3}(6, 2)\right] \\ + a_{1,5}\left[a_{6,2}(3, 4) + a_{6,3}(4, 2) + a_{6,4}(2, 3)\right] \\ + a_{1,6}\left[a_{2,3}(4, 5) + a_{2,4}(5, 3) + a_{2,5}(3, 4)\right] \end{array}\right\}^2$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \quad a_{1,2}(a_{3,4}\,a_{5,6} + a_{3,5}\,a_{6,4} + a_{3,6}\,a_{4,5}) + a_{1,3}(a_{4,5}\,a_{6,2} + a_{4,6}\,a_{2,5} + a_{4,2}\,a_{5,6}) \\ + a_{1,4}(a_{5,6}\,a_{2,3} + a_{5,2}\,a_{3,6} + a_{5,3}\,a_{6,2}) + a_{1,5}(a_{6,2}\,a_{3,4} + a_{6,3}\,a_{4,2} + a_{6,4}\,a_{2,3}) \\ + a_{1,6}(a_{2,3}\,a_{4,5} + a_{2,4}\,a_{5,3} + a_{2,5}\,a_{3,4}) \end{array}\right\}^2$$

110. *Derivada de una determinante semi-simétrica.* — La derivada de una determinante semi-simétrica respecto á un elemento $a_{r,s}$, será, observando que hay otro elemento funcion de este, $a_{s,r} = - a_{r,s}$

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right) = \frac{dP}{da_{r,s}} + \frac{dP}{da_{s,r}}\,\frac{da_{s,r}}{da_{r,s}} = A_{r,s} - A_{s,r}.$$

Ahora bien, si P es de grado impar, $A_{r,s}$ y $A_{s,r}$ son de grado par, y por lo tanto iguales, luego

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right) = o.$$

Si P es de grado par, $A_{r,s}$ y $A_{s,r}$ son de grado impar, y por consiguiente iguales y de signo contrario; es decir,

$$A_{r,s} = - A_{s,r},$$

por lo tanto,

$$\left(\frac{dP}{da_{r,s}}\right) = 2\,A_{r,s}.$$

De aquí que :

La derivada de una determinante semi-simétrica respecto á un elemento cualquiera, es nula *si la determinante es de grado impar; y si es de grado par dicha determinante, la derivada es dupla del complemento algebraico del mismo elemento.*

111. Derivando la ecuacion idéntica

$$P = \left(\sqrt{P}\right)^2$$

relativamente á un elemento $a_{r,s}$, se tiene

$$\frac{dP}{da_{r,s}} = 2\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,s}},$$

pero si P es semi-simétrica de grado par, el primer miembro equivale á 2 $A_{r,s}$, y resulta

$$A_{r,s} = \sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,s}}.$$

Por otra parte se sabe que

$$P = a_{r,1}\,A_{r,1} + a_{r,2}\,A_{r,2} + a_{r,3}\,A_{r,3} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\,A_{r,n},$$
$$o = a_{r,1}\,A_{s,1} + a_{r,2}\,A_{s,2} + a_{r,3}\,A_{s,3} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\,A_{s,n},$$

y en virtud de la relación precedente

$$P = a_{r,1}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,1}} + a_{r,2}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,2}} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,n}}$$
$$o = a_{r,1}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,1}} + a_{r,2}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,2}} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\sqrt{P}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,n}}$$

ó bien

$$\sqrt{P} = a_{r,1}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,1}} + a_{r,2}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,2}} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{r,n}}$$
$$o = a_{r,1}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,1}} + a_{r,2}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,2}} + \cdots\cdots\cdots a_{r,n}\,\frac{d\sqrt{P}}{da_{s,n}}.$$

De aquí se deduce el siguiente teorema:

En toda determinante semi-simétrica de grado par, la suma de los productos de los elementos de cada línea por la derivada de la raíz respecto al mismo elemento, equivale á dicha raíz.

Y la suma de los productos de los elementos de cualquier *línea, por las derivadas de la raíz respecto á los elementos correspondientes de otra línea del mismo nombre, es nula.*

112. Suponiendo que se toma por símbolo de $\sqrt{P}$, $(r, 1, 2, 3 \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots n)$, tendrémos

$$\sqrt{P} = (r, 1, 2, 3 \ldots\ldots r-1, r+1 \ldots\ldots n) = a_{r,1}(2, 3 \ldots r-1, r+1 \ldots\ldots n)$$
$$+ a_{r,2}(3, 4 \ldots r-1, r+1 \ldots n, 1) + \cdots\cdots + a_{r,s}(s+1, \ldots n, 1, 2 \ldots s-1) + \cdots\cdots$$

y comparando este valor con el anterior,

$$\frac{d\sqrt{P}}{d\,a_{r,s}} = (s+1, \ldots\ldots n, 1, 2, \ldots\ldots s-1).$$

DETERMINANTES DISIMÉTRICAS.

113. Si se descompone una determinante en otras, en las que sean nulos los elementos principales (N. 78), es claro que las determinantes que resultan serán todas disimétricas.

Sin embargo, prescindiendo del caso general, sólo nos fijarémos en el que los elementos principales son todos iguales, es decir,

$$a_{1,1} = a_{2,2} = a_{3,3} \cdots\cdots\cdots a_{n,n} = x.$$

Representando por P_o el resultado de hacer $x = o$, y por $\Sigma\, P_{o,r}$ la suma de todas las menores principales de grado r de P_o, tendrémos,

$$P = x^n + x^{n-1}\,\Sigma P_{o,1} + x^{n-2}\,\Sigma P_{o,2} + \cdots\cdots x^2\,\Sigma P_{o,n-2} + x\,\Sigma P_{o,n-1}\, P_o;$$

pero como todas las determinantes que figuran en el segundo miembro son semi-simétricas, y toda determinante semi-simétrica de grado impar es nula, tendrémos,

$$\Sigma P_{o,1} = o,\ \Sigma P_{o,3} = o,\ \Sigma P_{o,s} = o.$$

Si n es par,

$$P = x^n + x^{n-2}\,\Sigma\, P_{o,2} + x^{n-4}\,\Sigma\, P_{o,4} + \cdots\cdots x^2\,\Sigma\, P_{o,\,n-2} + P_o\,;$$

si es impar,

$$P = x^n + x^{n-2}\,\Sigma\, P_{o,2} + x^{n-4}\,\Sigma\, P_{o,4} + \cdots\cdots + x^3\,\Sigma\, P_{o,\,n-3} + x\,\Sigma\, P_{o,\,n-1}\,;$$

y en el uno y el otro caso las determinantes que entran en los segundos miembros, son cuadrados perfectos.

Respecto á la primera fórmula, todos los términos del segundo miembro están compuestos de cuadrados perfectos, que siempre serán positivos, sea cual fuere el signo de x. De aquí resulta, que,

Una determinante disimétrica de grado par en la que todos los elementos principales son iguales, puede siempre desarrollarse en una suma de cuadrados, y es por lo tanto esencialmente positiva.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ -a & x & d & e \\ -b & -d & x & f \\ -c & -e & -f & x \end{vmatrix} = x^4 + x^3 \times o + x^2\,(f^2 + e^2 + d^2 + c^2 + b^2 + a^2) + \left| \begin{vmatrix} o & d & e \\ -d & o & f \\ -e & -f & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & b & c \\ b & o & f \\ -c & -f & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & a & c \\ -a & o & e \\ -c & -e & o \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} o & a & b \\ -a & o & d \\ -b & -d & o \end{vmatrix} \right| x + \begin{vmatrix} o & a & b & c \\ -a & o & d & e \\ -b & -d & o & f \\ -c & -e & -f & o \end{vmatrix}$$

$$= x^4 + x^2\,(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) + (af - be + cd)^2$$

Si $x = 1$, se tendrá,

para n par. . . $P = 1 + \Sigma\, P_{o,2} + \Sigma\, P_{o,4} + \cdots\cdots + \Sigma\, P_{o,\,n-2} + P_o\,;$

para n impar. . $P = 1 + \Sigma\, P_{o,2} + \Sigma\, P_{o,4} + \cdots\cdots + \Sigma\, P_{o,\,n-3} + \Sigma\, P_{o,\,n-1}.$

De aquí el siguiente teorema:

Toda determinante disimétrica de cualquier grado, en que

los elementos principales son todos iguales á **1**, *puede desarrollarse en una suma de cuadrados, y es, por lo tanto, una cantidad positiva.*

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$$

§ XI.

Matrices y determinantes de dos escalas.

114. *Definiciones.*—Cuando algunos de los primeros ó últimos elementos de una línea de una matriz sean nulos por hipótesis, llamarémos elemento *inicial*, y elemento *final* de la línea, al primero ó al último de aquellos que tienen valor efectivo.

Esto supuesto, si en una matriz hay r sucesivas horizontales dispuestas de tal modo, que sus elementos iniciales correspondan á sucesivas verticales, dirémos que forman un *sistema de escala*, que será *directa* si el número de los elementos nulos que preceden al elemento inicial crece de una horizontal á otra, é *inversa* en el caso contrario.

Si ademas los elementos efectivos de cada horizontal son los términos de una misma serie, dirémos que forman una *escala de grado* r, *directa ó inversa;* y se da el nombre á la serie, de *serie generatriz* de la escala.

Así, en cada una de las matrices,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 \ldots\ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots \\ 0_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

se tiene una escala de grado r relativa á la serie a_0, a_1, a_2... directa en la matriz primera, é inversa en la segunda.

Si los términos de la serie generatriz son, como en estos ejemplos, representados por una letra con índices crecientes en órden natural, indicarémos la serie ó la escala de grado r, por el símbolo (a_0), es decir, cerrando en un paréntesis el primer término de la serie; y si se quiere además tener á la vista el grado de la escala, se escribe $(a_0)\, r$.

Una escala es *completa* si el elemento inicial de la primera ó de la última horizontal, segun que sea directa ó inversa la escala, pertenece á la primera vertical de la matriz. En los demas casos, la escala es incompleta; pero á ménos que no se advierta lo contrario, entenderémos siempre que se trata de escalas completas.

Es claro que en la escala de grado r, el elemento inicial de la última horizontal, si la escala es directa, ó de la primera si es inversa, pertenece á la r.$^{\text{ma}}$ vertical de la matriz, y está precedido de $r - 1$ elementos nulos.

Así en una matriz que contenga solamente una escala de grado r, es decir, r horizontales; y en la que la serie generatriz está formada de k términos, el número de verticales será $k + r - 1$.

En efecto: supongamos para fijar las ideas que la escala es directa: ántes del elemento inicial de la última horizontal hay $r - 1$ términos nulos, y despues los k términos de la serie generatriz, luego el número total es $k + r - 1$.

Su forma general será, suponiendo $r = 4$, $k = 6$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

y el número de verticales $k + r - 1 = 6 + 4 - 1 = 9$.

115. Tambien tendrémos que considerar matrices de dos escalas construidas de este modo.

Sean dos series generatrices:

1.ª serie..... $a_0\, a_1\, a_2 \,\ldots\ldots\, a_\varepsilon\, a_{\varepsilon+1}\, a_{\varepsilon+2} \,\ldots\ldots\, a_m = a_{\varepsilon+n}$

2.ª serie.................. $b_0\, b_1\;\; b_2 \,\ldots\ldots\, b_n$

en las que, puesto que se corresponden a_ε y b_0 el número de términos desde b_0 á b_n, será el mismo que desde a_ε á a_m, y por lo tanto, $m = \varepsilon + n$ ó $\varepsilon = m - n$.

Esto supuesto, formemos una matriz de doble escala (a_0) y (b_0); la primera superior y directa de cualquier grado r, la segunda inferior é inversa de grado s, pero de modo que los elementos de la última horizontal de la escala superior á contar de a_ε hasta a_m, estén verticalmente alineados con todos los elementos de la primera horizontal que corresponde á la escala inferior, á contar del b_0 hasta el b_n, y colocando b_0 bajo a_ε.

De aquí resulta que el grado s de la escala inferior no es arbitrario. Es evidente que el número de horizontales será igual al de elementos que hay en la última horizontal de la escala superior desde a_0 hasta a_ε inclusive, que son $\varepsilon + 1$, mas el número de elementos nulos que preceden á a_0 que son $r - 1$, toda vez que la escala superior es de grado r.

Tendrémos, pues,

$$s = (\varepsilon + 1) + (r - 1) = \varepsilon + r = r + m - n \qquad (1).$$

He aquí el tipo general de dicha matriz á doble escala:

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
a_0 & a_1 & \dots a_{r-2} & a_{r-1} & a_r & \dots a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & a_s & \dots a_{r+s-1} & \dots \\
o & a_0 & \dots a_{r-3} & a_{r-2} & a_{r-1} & \dots a_{s-4} & a_{s-3} & a_{s-2} & a_{s-1} & \dots a_{r+s-2} & \dots \\
\hdashline
o & o & \dots a_0 & a_1 & a_2 & \dots a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & a_{\varepsilon+2} & \dots a_{s+1} & \dots \\
o & o & \dots o & a_0 & a_1 & \dots a_{\varepsilon-2} & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & \dots a_s & \dots \\
o & o & \dots o & o & o & \dots o & o & b_0 & b_1 & \dots b_r & \dots \\
o & o & \dots o & o & o & \dots o & b_0 & b_1 & b_2 & \dots b_{r+1} & \dots \\
o & o & \dots o & o & o & \dots b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots b_{r+2} & \dots \\
\hdashline
o & b_0 & \dots b_{r-3} & b_{r-2} & b_{r-1} & \dots b_{s-4} & b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & \dots b_{r+s-2} & \dots \\
b_0 & b_1 & \dots b_{r-2} & b_{r-1} & b_r & \dots b_{s-3} & b_{s-2} & b_{s-1} & b_s & \dots b_{r+s-1} & \dots
\end{array}\right|$$

Para completar la inteligencia de lo que precede, harémos algunas observaciones.

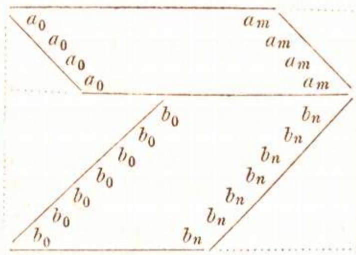
I. Miéntras $\varepsilon > o$ ó $m > n$, el grado de la matriz superior será menor que el de la inferior, y serán iguales cuando $\varepsilon = o$ ó $m = n$.

II. Cuando la matriz se prolonga hasta el fin de las dos series generatrices $(a_0 \ldots)$ $(b_0 \ldots)$ los elementos finales de las horizontales de cada escala están evidentemente dispuestos en escala y formando una línea oblícua paralela á las iniciales, y debe notarse que el último elemento a_m de la última horizontal de la escala superior, y el último b_n de la primera horizontal de la inferior, estarán ambas en la última vertical de la matriz.

La forma general será esta:

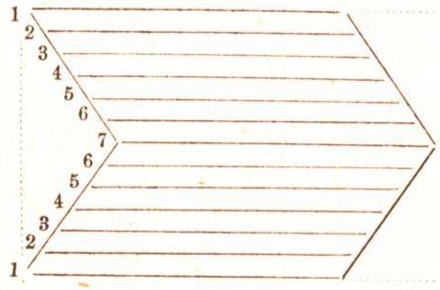
$$\left|\begin{array}{l}
a_0 \; a_1 \ldots\ldots\ldots a_m \quad o \;\ldots o \\
o \;\; a_0 \ldots\ldots\ldots a_{m-1} \; a_m \ldots o \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
o \;\; o \;\; o \;\; a_0 \ldots a_\varepsilon \qquad\quad a_m \\
o \;\; o \;\; o \ldots\ldots b_0 \ldots\ldots\ldots b_n \\
o \;\; o \;\; o \ldots b_0 \ldots\ldots\ldots b_n \;\; o
\end{array}\right|$$

ó sea

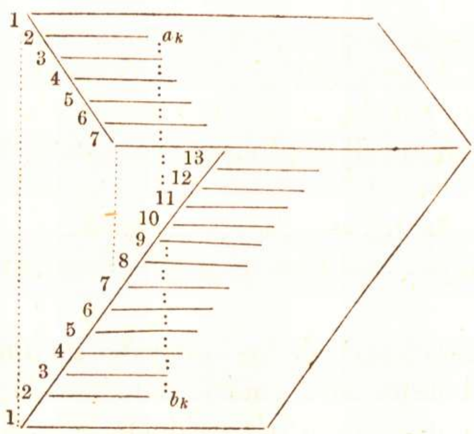


III. El número total de las verticales de una matriz completa es igual al que se formaria sólo con la escala superior, ó sólo con la inferior; es decir, $r + m$ ó $s + n$, de donde $r + m = s + n$, que tambien se deduce de la relacion (1).

116. En toda matriz de dos escalas llamamos *asociadas* á dos horizontales equidistantes de los extremos: así la primera será asociada de la última, la segunda de la penúltima, etc. De aquí resulta, que si $r = s$, es decir, si las dos escalas son de grados iguales, á cada horizontal de la una corresponde otra de la segunda, porque se presentan en esta forma:



pero si r y s difieren en ε, á cada una de las ε horizontales superiores de la escala inferior, no corresponderá ninguna en la superior.



En la figura precedente suponemos $r=7$ y $s=13$, y vemos, que en efecto, $13-7=6$, horizontales de la ma triz inferior señaladas con los números 8, 9, 10, 11, 12, 13, no tienen asociada en la matriz superior.

Es evidente que en dos horizontales asociadas de la matriz de doble escala (a_0) (b_0), los elementos iniciales a_0, b_0 como otros dos cualesquiera, pero correspondientes, a_k b_k, y afectados de los mismos índices, están sobre una vertical.

117. Consideremos diferentes matrices á doble escala (a_0) (b_0), en la que la diferencia de los grados sea constante, y el grado de la superior pase por la serie de valores 1, 2, 3, ..., tendrémos:

1.ª Matriz.	*Grado de la superior*	$r = 1$	1.^{er} órden.
	Grado de la inferior	$s = r + \varepsilon = 1 + \varepsilon$	
2.ª Matriz.	*Grado de la superior*	$r = 2$	2.° órden.
	Grado de la inferior	$s = r + \varepsilon = 2 + \varepsilon$	
3.ª Matriz.	*Grado de la superior*	$r = 3$	3.^{er} órden.
	Grado de la inferior	$s = 3 + \varepsilon$	

....

Distinguirémos estas diversas matrices por *órdenes*, diciendo, 1.^{er} órden, 2.° órden, etc., y es claro que el *órden* de una matriz será el grado r de la superior.

118. Dada una matriz de p horizontales y q verticales, y suponiendo $q > p$, si combinamos las primeras $p - 1$ verticales con cada una de las restantes, tendrémos una serie de $q - p + 1$ determinantes, que llamarémos *sistema de determinantes sucesivas* de la matriz, y á la primera le darémos el nombre de *principal*. Así, pues, la matriz principal será la formada con las p primeras verticales, y diferirá de las restantes sólo por la última vertical.

Por ejemplo, la matriz de tres horizontales y cinco verticales

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a' & b' & c' & d' & e' \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'' \end{vmatrix}$$

da un sistema de tres sucesivas determinantes

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & d \\ a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & e \\ a' & b' & e' \\ a'' & b'' & e'' \end{vmatrix}$$

la primera de las cuales es la determinante principal, y la segunda y tercera son las determinantes que proceden de cambiar sucesivamente en aquella la última vertical por la cuarta y la quinta de la matriz propuesta.

Si $p > q$, la matriz no da orígen á ninguna determinante:

Si $p=q$, la matriz es cuadrada y sólo dará una determinante.

119. Representemos por N_r el número de sucesivas determinantes de la matriz á dos escalas (a_0) (b_0) de los grados r y s; en este caso tendrémos evidentemente $p=r+s$, $q=n+s$, y por lo tanto,

$$N_r=q-p+1=n+s-r-s+1=n-r+1.$$

De aquí se deduce que el *número* de determinantes sucesivas en las matrices de 1.$^{\text{o}}$, 2.$^{\text{o}}$, 3.$^{\text{er}}$ órden, etc., será, sustituyendo en N_r por r, 1, 2, 3..... n

$$N_1=n;\ N_2=n-1;\ N_3=n-2.....\ N_{n-1}=2;\ N_n=1.$$

En la matriz del órden $n+1$, el número de horizontales supera en una unidad al de verticales, y es imposible deducir de ella ninguna determinante.

En el sistema de sucesivas determinantes de una matriz de doble escala (a_0) (b_0), la determinante principal se distingue de las otras en que los índices de aquella proceden en todas las horizontales por órden natural y no interrumpido hasta el último, miéntras que en las demas se interrumpe la continuidad de dichos índices al pasar de la penúltima á la última.

Es evidente, segun esto, que si á los índices de todos los elementos de la última vertical de la determinante principal se les aumenta en una unidad, se obtendrá la segunda determinante del sistema; si se les aumenta dos, la tercera; si tres, la cuarta, y en general aumentándoles $p-1$ unidades, se obtiene la p determinante de la matriz.

Es importante observar que en la última vertical de la determinante principal, el primero y el último elemento tienen por índice $r+s-1$; porque, en efecto, el número de horizontales es $r+s$, luego el número de verticales es $r+s$ tambien, pero los índices de las series

$$\begin{matrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots\ldots \end{matrix}$$

principian por o, luego el término $r+s$ tendrá por índice $r+s-1$.

La matriz del núm. 115 termina precisamente en esta vertical, y sólo comprende la matriz cuadrada de la primera determinante del sistema.

Conviene tener presente que los dos elementos de esta última vertical que pertenecen respectivamente á la última horizontal de la escala superior y á la primera de la inferior, es decir, a_s y b_r tienen por índices r y s, es decir, inversamente los grados de ambas escalas.

En efecto, restando de $r+s$, que es el número de elementos de cada horizontal, $r-1$ que son los *ceros* que preceden á a_0, quedan $(r+s)-(r-1)=s+1$ términos para la serie $a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ldots$, y como principian los subíndices por *cero*, el subíndice del término $s+1$ será s.

Otro tanto podriamos decir de la primera horizontal de la escala inferior.

120. Para indicar de un modo conciso la matriz de doble escala (a_0), (b_0) y de los grados r, s, se emplea la notacion

$$\begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}$$

y agregando á este símbolo los subíndices 0, 1, 2, 3..... $n-$r, indicarémos la determinante principal, la segunda, la tercera, y finalmente, la $n-r+1$. Tendrémos, pues,

$$\begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_0, \quad \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_1, \quad \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_2, \quad \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_3 \ldots\ldots \begin{vmatrix} (a_0)_r \\ (b_0)_s \end{vmatrix}_{n-r}$$

Otras veces, y esto será lo más comun, indicarémos la matriz con una sola letra, y le pondrémos por índice el número de órden correspondiente, que será igual, como ya sabemos, al grado de la escala superior, y para expresar una cualquiera de las determinantes del sistema un segundo índice que exprese el órden de la determinante disminuido en una unidad.

Así, 1.° M_r expresa una matriz en que la escala superior tiene r horizontales, y la inferior $r+\varepsilon$, y no debemos olvidar que ε es una cantidad siempre constante.

2.° $M_{r,0}$ será la matriz de la determinante principal.

3.° $M_{r,1}$; $M_{r,2}$; $M_{r,3}$;..... las sucesivas determinantes derivadas del sistema M.

En general, si M y N expresan dos matrices distintas que tengan un mismo número de determinantes; pero tales, que la primera de M sea igual á la primera de N; la segunda á la segunda, y así todas las restantes, escribirémos

$$M = N,$$

ecuacion múltiple que se resuelve en tantas ecuaciones parciales

$$M_{r,0} = N_{r',0};\ M_{r,1} = N_{r',1};\ M_{r,2} = N_{r',2} \ldots\ldots M_{r,\ n-r} = N_{r',\ n'-r'}$$

como determinantes hay en cada matriz.

Claro es que deberá tenerse

$$n - r = n' - r'.$$

121. Respecto á las sucesivas determinantes de *cualquier matriz*, debemos notar lo siguiente:

I. Si agregamos á una horizontal de la matriz, ó restamos de ella otra horizontal, las determinantes sucesivas no cambiarán de valor.

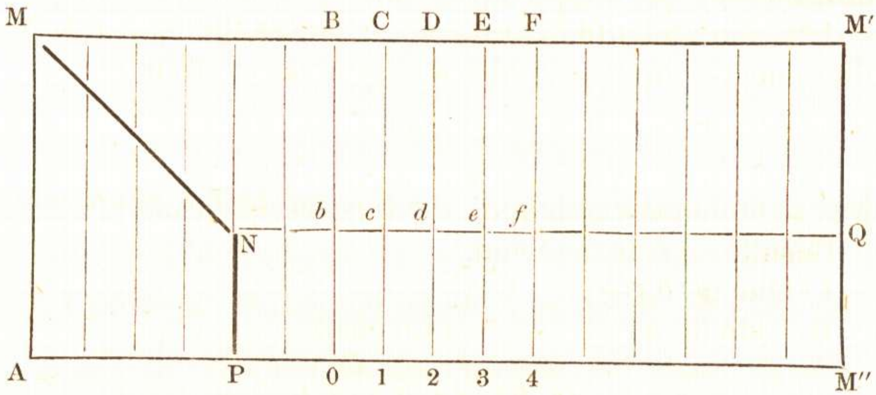
En efecto, esto equivale á efectuar la misma operacion con cada determinante, lo cual no altera su valor.

II. Si se multiplica una horizontal por cualquier cantidad arbitraria, las sucesivas determinantes quedarán multiplicadas por esta cantidad, y si con várias horizontales se efectua una operacion análoga, las determinantes sucesivas quedarán multiplicadas por el producto de todas ellas.

La razon es la misma que la dada en el caso precedente.

III. Si las primeras r horizontales forman un sistema de escala directa, y ademas son nulos todos los elementos restantes de las primeras r verticales, las determinantes sucesivas serán divisibles por el producto de los elementos iniciales de las r primeras horizontales, y las cuocientes serán las sucesivas determinantes de las matrices que se forman de la dada, suprimiendo las r primeras horizontales y las r primeras verticales.

El tipo de las matrices que consideramos es el siguiente:



AMM′M″ representa la matriz.

MNQM′ el espacio cubierto por las r primeras horizontales que en este caso son 5.

AMNP el espacio cubierto por los elementos *nulos* de las r primeras verticales.

En el sistema de matrices sucesivas

AMBO sería la principal,

AMC1 la segunda que se obtendria sustituyendo á la vertical *cero* la *uno*.

AMD2 la tercera que se hallaria análogamente cambiando la vertical *cero* por la 2.

....

Segun el teorema 1.°, las determinantes sucesivas son divisibles por el producto de los elementos segun la línea MN, lo cual es evidente, y 2.°, los cuocientes sucesivos son las determinantes que se forman en la matriz NQM″P por el mismo sistema que en la dada.

Todos estos teoremas son evidentes.

IV. Recíprocamente, si á una matriz se agregan r primeras horizontales y r primeras verticales, de modo que formen un sistema de escala directa, y que sean nulos todos los demas elementos, las sucesivas determinantes de la nueva matriz serán iguales á las de las primeras multiplicadas por el producto de los elementos iniciales de las r horizontales que se han agregado.

122. En adelante expresarémos por el símbolo $(a_r\, b_s)$ la diferencia de dos mononomios $a_r\, b_s$ y $b_r\, a_s$, es decir,

$$(a_r\, b_s) = a_r\, b_s - b_r\, a_s,$$

que se obtienen cambiando a por b y recíprocamente.

Resulta de esta notacion:

I. Que $(a_r\, b_r) = o$.

II. Que $(a_r\, b_s) = -(a_s\, b_r)$. En efecto,

$$(a_r\, b_s) = a_r\, b_s - a_s\, b_r$$

y

$$(a_s\, b_r) = a_s\, b_r - a_r\, b_s.$$

III. Que suponiendo $r > s$, la expresion

$$(a_r\, b_s) + (a_{r\ 1}\, b_{s-1}) + \ldots\ldots (a_{s-1}\, b_{r\ 1}) + (a_s\, b_r)$$

en la que r crece en órden natural de r á s, y s decrece de s á r, es nula.

En efecto, los términos á igual distancia de los extremos son iguales y de signo contrario, y por lo tanto se destruyen.

Ademas, si en la serie hay un número par de términos, la suma es evidentemente nula, porque á cada término corresponde otro, y si el número es impar, el del centro será $a_{\frac{s+r}{2}}\, b_{\frac{s+r}{2}}$, y por consiguiente nulo, toda vez que los subíndices son iguales.

Esto supuesto, para hacer evidente una transformacion importante de las matrices á dos escalas, distinguirémos dos casos.

1.$^{\text{er}}$ Caso.

Transformacion de las matrices á dos escalas de grados iguales.

123. Suponiendo que las series generatrices de las dos escalas sean

$$a_0 \; a_1 \; a_2 \ldots\ldots a_n \qquad (a_0)$$

$$b_0 \; b_1 \; b_2 \ldots\ldots b_n \qquad (b_0)$$

tendrémos para la matriz del r.$^{\text{mo}}$ órden el siguiente tipo que representarémos por D_r.

$$\begin{array}{l l l}
\text{A} & \text{A}' & \text{A}'' \\
 & & \\
\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l|l}
a_0 \ldots a_{r-p} \ldots a_{r-2}\, a_{r-1} & a_r \;\; a_{r-1} \ldots a_{r+q-1} \ldots a_{r+s-p} \ldots 0 \quad 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \ldots a_0 \ldots\ldots a_{p-2}\, a_{p-1} & a_p \;\; a_{p+1} \ldots a_{p+q-1} \ldots a_s \ldots\ldots\ldots 0 \quad 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \ldots 0 \;\ldots\ldots a_0 \quad a_1 & a_2 \;\; a_3 \ldots\ldots a_{q-1} \ldots\ldots a_{s-p+2} \ldots a_n \quad 0 \\
0 \ldots 0 \;\ldots\ldots 0 \quad a_0 & a_1 \;\; a_2 \ldots\ldots a_q \ldots\ldots\ldots a_{s-p+1} \ldots a_{n-1} \;\; a_n \\
0 \ldots 0 \;\ldots\ldots 0 \quad b_0 & b_1 \;\; b_2 \ldots\ldots b_q \ldots\ldots\ldots b_{s-p+1} \ldots b_{n-1} \;\; b_n \\
0 \ldots 0 \;\ldots\ldots b_0 \ldots b_1 & b_2 \;\; b_3 \ldots\ldots b_{q-1} \ldots\ldots b_{s-p+2} \ldots b_n \quad 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 \ldots b_0 \ldots\ldots b_{p-2}\, b_{p-1} & b_p \;\; b_{p-1} \ldots b_{p+q-1} \ldots b_s \ldots\ldots\ldots 0 \quad 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_0 \ldots b_{r-p} \ldots b_{r-2}\, b_{r-1} & b_r \;\; b_{r+1} \ldots b_{r+q+1} \ldots b_{r+s-p} \ldots 0 \quad 0
\end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l l l}
\text{B} & \text{B}' & \text{B}''
\end{array}$$

Debemos hacer, ántes de pasar adelante, las siguientes observaciones:

1.° La matriz es completa y se compone de r horizontales superiores relativas á a y otras r inferiores relativas á b.

2.° El número de verticales será $r+n$: hemos separado por una línea vertical las r primeras verticales de las restantes.

3.° Hemos puesto en evidencia las siguientes *horizontales*. La *primera* de la escala superior; la $r-p+1$ de la escala superior contando por arriba, ó sea la $p.^{ma}$ contando desde abajo: las dos últimas de la escala superior: las homólogas en la escala inferior.

4.° Hemos puesto asimismo en evidencia todas las verticales que pasan por los elementos comunes á las horizontales indicadas y á la línea de elementos principales: es decir, la *primera* vertical: la $r-p+1$ á contar de la izquierda, ó sea la p contando de la vertical intermedia: las verticales $r-1$ y r. Ademas, 1.° las dos verticales que siguen á la línea vertical A′ B′; 2.°, la vertical $r+q$ ó sea la q á contar de dicha vertical A′ B′; 3.°, la vertical $s-p+1$ á contar de AB, ó sea $n-s+p$ á contar de la A″ B″.

Someterémos ahora la matriz dada á la siguiente transformacion.

«Dejando *invariable la escala superior*, multiplicarémos »todas las horizontales de la *inferior* por a_0; despues agre»garémos á cada una todas las que le preceden en dicha »escala contadas de abajo á arriba, multiplicadas respecti»vamente por a_1, a_2, a_3....., y de la suma restarémos todas »las líneas asociadas en la escala superior, multiplicadas »por b_0, b_1, b_2.....»

Representemos por D′ la nueva matriz, y como se halla constituida del mismo modo que la primitiva D_r por $2r$ horizontales y $n+r$ verticales, suprimiendo las r primeras horizontales y las r primeras verticales, obtendrémos una matriz de r horizontales y n verticales, que designarémos por Δ_r y con el nombre de matriz *reducida* de la matriz á doble escala D_r.

Esto supuesto, nos proponemos demostrar que:

Las sucesivas determinantes de D_r, *son ordenadamente iguales á las sucesivas determinantes de la reducida* Δ_r.

Es desde luégo evidente: 1.°, que al agregar á una línea horizontal otras várias multiplicadas por constantes, no se alteran las determinantes sucesivas; 2.°, que la multiplicacion de todos los elementos de la escala inferior por a_0, equivale á multiplicar cada determinante por $(a_0)^r$, de suerte que tendrémos, la igualdad simbólica y compleja

$$D' = a_0^r D_r;$$

3.°, que los elementos nulos que preceden á los elementos iniciales en todas las horizontales, serán nulos en D′ como en D_r; 4.°, que, por último, si designamos por c un elemento de D′, resultado de transformar el elemento b_s que corresponde á la $r+s-p+1$ vertical y á la $r-p+1$ horizontal [1] contando desde la última inferior, tendrémos que c será igual á $b_s \times a_0$; *más* los elementos b_{s-1}, b_{s-2} ..... b_{s-p+1} de su vertical multiplicados por a_1, a_2, a_3 .....; *ménos* los productos de a_s, a_{s-1}, a_{s-2} ..... a_{s-p+1} asociados de b_s, b_{s-1}, b_{s-2} ..... por b_0, b_1, b_2, b_3 ....., es decir,

$$c = b_s a_0 + (a_1 b_{s-1} + a_2 b_{s-2} + a_3 b_{s-3} + \cdots a_{p-1} b_{s-p+1})$$
$$- (b_0 a_s + b_1 a_{s-1} + b_2 a_{s-2} + b_3 a_{s-3} + \cdots b_{p-1} b_{s-p+1})$$

ó segunda notacion admitida

$$c = (a_0 b_s) + (a_1 b_{s-1}) + (a_2 b_{s-2}) + \cdots + (a_{p-1} a_{s-p+1}).$$

Debemos ahora distinguir dos casos: Si el elemento b_s que consideramos y cuya transformada en D′ hemos hallado pertenece á una vertical situada entre A′ B′ y A″ B″, por ejemplo:

---

(1) Si queremos referir b_s á orígenes más sencillos, dirémos que pertenece á la r.ma horizontal á contar de la primera de la escala inferior, y la $s-p+1$ vertical, á contar de A′ B′. Resulta, en efecto, que al pasar de la *primera* horizontal á la p.ma todos los índices de una vertical, aumentan una *unidad* por cada puesto que se avanza, es decir, $p-1$ unidades, por lo tanto, $s-p+1$ se reduce á $s-p+1+p-1=s$.

Podria resolverse aún el problema inverso: á saber. Sabiendo que b_s pertenece á la p.a horizontal ¿á qué vertical corresponde?

$$\begin{array}{c}
a_{r+s-p} \\
\vdots \\
a_s \\
\vdots \\
a_{s-p+2} \\
a_{s-p+1} \\
b_{s-p+1} \\
b_{s-p+2} \\
\vdots \\
b_s \\
\vdots \\
b_{r+s-p}
\end{array}$$

existirán todos los elementos superiores á b_s hasta a_s, y el valor (c) será tal como lo hemos expresado; pero si dicho elemento b_s pertenece á la parte comprendida entre A B y A′ B′, su vertical no será completa: por ejemplo, tendrémos, si b_s está en la vertical p.ma á contar de A′ B′,

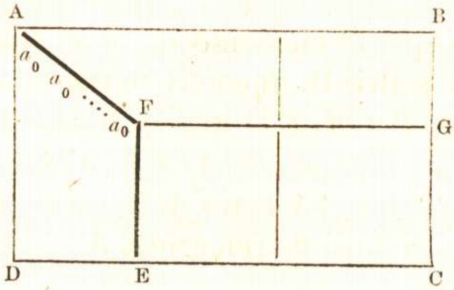
$$\begin{array}{ccc}
 & a_{r-p} & \\
 & \vdots & \\
 & a_s & \\
 & a_{s-1} & \\
 & \vdots & \\
 & a_2 & \\
 & a_1 & \\
 & a_0 & \\
 & 0 & \\
 & 0 & \\
 & 0 & \\
x & \vdots & x \\
\hline
\hline
y & 0 & y \\
 & 0 & \\
 & 0 & \\
 & b_0 & \\
 & b_1 & \\
 & b_2 & \\
 & \vdots & \\
 & b_{s-1} & \\
 & b_s & \\
 & \vdots & \\
 & b_{r-p} &
\end{array}$$

en cuya vertical faltan todos los elementos desde b_0 hasta la primera línea de la escala inferior xx, y todos los asociados desde xx hasta a_s, de suerte que la serie (c) estará incompleta, y sólo tendrémos,

$$c = (a_0\, b_s) + (a_1\, b_{s-1}) + (a_2\, b_{s-2}) + \cdots\cdots (a_s\, b_0),$$

cantidad que es idénticamente nula.

De aquí se deduce que todos los elementos c de la matriz D′ comprendidos en las r primeras verticales y en las últimas r horizontales, son nulos; pero tambien lo son todas las de la escala superior correspondientes á las r primeras verticales hasta la diagonal principal, luego la matriz D′ es de la forma:



De aquí resulta que todas las determinantes sucesivas del sistema serán iguales á $a_0^r \times$ determinantes sucesivas de EFGC. Es decir,

$$D' = a_0^r\, \Delta_r\,;$$

pero

$$D' = a_0^r\, D_r\,,$$

luego

$$D_r = \Delta_r\,,$$

lo que demuestra, segun habiamos indicado, que las sucesivas determinantes de la matriz á doble escala D_r, equivalen á las de la reducida Δ_r.

124. De este modo hemos reducido las determinantes de la matriz primitiva á otras de grado mitad, lo que ya es muy importante para el cálculo numérico; pero áun debemos agregar que la reducida Δ_r puede construirse por un método mucho más rápido que el que resulta de la transformacion.

Sea la reducida

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} c_{1,1} & c_{1,1} & c_{1,3} & \cdots\cdots & c_{1,q} & \cdots\cdots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots\cdots & c_{2,q} & \cdots\cdots & c_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p,1} & c_{p,2} & c_{p,3} & \cdots\cdots & c_{p,q} & \cdots\cdots & c_{p,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{r,1} & c_{r,2} & c_{r,3} & \cdots\cdots & c_{r,q} & \cdots\cdots & c_{r,n} \end{array}\right|$$

y observemos que el elemento $c_{p,q}$ es el transformado del elemento de la matriz D_r que pertenecia á la p.ma horizontal de la escala inferior, y la q.ma vertical contada desde A′ B′, ó á la $\overline{r+p}^{\text{ma}}$ contada desde A B, es decir, al elemento b_{p+q-1}. En efecto, los elementos de la vertical de la izquierda inmediata á la línea de referencia A′ B′, son

$$\begin{array}{r|l} & A' \\ b_0 & \\ b_1 & \\ b_2 & \\ \vdots & \\ b_{p-1} & b_p\ b_{p+1} \cdots\cdots\cdots b_{p+q-1} \\ & B' \end{array}$$

y el de la horizontal p.ma será b_{p-1}: pero los índices aumentan de unidad en unidad, luego el que ocupe el lugar q á contar de A′ B′, será b_{p-1+q} ó b_{p+q-1}. Tendrémos, pues, segunda ley de formacion,

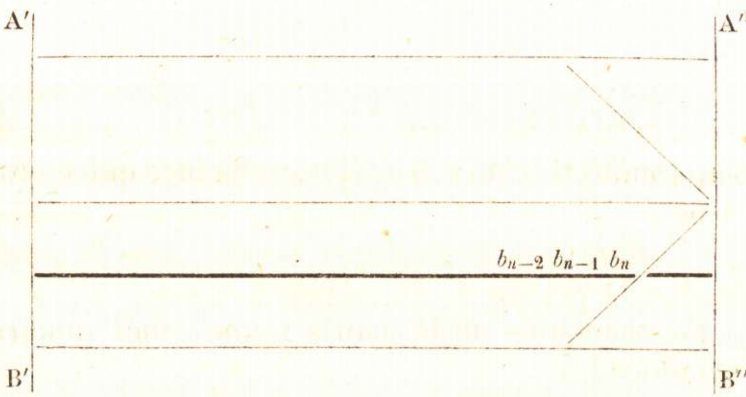
$$c_{p,q} = (a_0\, b_{p+q-1}) + (a_1\, b_{p\;q-2}) + (a_2\, b_{p+q-3}) + \cdots\cdots (a_{p-1}\, b_q);$$

para formar el último término $(a_{p-1}\, b_q)$, basta recordar que en la parte de vertical de que se trata, sólo hay p términos, y los factores a_0, a_1, a_2..... será por lo tanto en número p, y el último a_{p-1}. Ademas, los subíndices de los términos simbólicos de c_{p-q} suman siempre $p+q-1$, luego si el primer factor es a_{p-1}, el segundo será b_q.

Sustituyendo en esta fórmula por p y q todos los números $1, 2, 3 \ldots\ldots n$, obtendrémos todos los elementos de la matriz Δ_r.

Hemos dicho que el número de términos que entran en el valor general de $c_{p,q}$ es p, pero este número es menor en los siguientes casos:

I. Observemos que la parte de la matriz D_r comprendida entre A′ B′ y A″ B″ es de esta forma:



y todos los elementos b, cuyos índices sobre una horizontal son superiores á n, son nulos, luego siempre que $p+q-1>n$ varios términos de $c_{p,q}$ desde $(a_0\, b_{p+q-1})$ hasta aquel en que entra b_n, serán nulos.

II. Si $p>q$, la fórmula de $c_{p,q}$ se podrá escribir poniendo en evidencia la $p-q+1$ últimos términos,

$$c_{p,q} = (a_0\, b_{p+q-1}) + (a_1\, b_{p+q-1}) + \qquad + \Big[(a_q\, b_{p-1}) + (a_{q+1}\, b_{p-2}) \ldots\ldots$$
$$(a_{p-2}\, b_{q+1}) + (a_{p-1}\, b_{q+1})\Big]$$

pero toda la cantidad comprendida en el corchete es nula, luego

$$c_{p,q} = (a_0\, b_{p+q-1}) + \cdots\cdots (a_{q-1}\, b_p).$$

De aquí podemos deducir una regla general importante. Si $p > q$ la fórmula termina en $a_{q-1}\, b_p$:

Si $p < q$ la fórmula general da para último término $a_{p-1} b_q$; luego *el valor de* $c_{p,q}$ *puede siempre interrumpirse en el término en que* b *lleve el mayor de los dos índices de* $c_{p,q}$, con lo cual se evitan reducciones.

Segun esto, tendrémos en resúmen para $c_{p,q}$,

$$\text{si } p > q \cdots\cdots\cdots c_{p,q} = (a_0\, b_{p+p-1}) + \cdots\cdots\cdots + (a_{q-1}\, b_p) \qquad \text{(I)}$$

$$\text{si } p < q \cdots\cdots\cdots c_{p,q} = (a_0\, b_{p+q-1}) + \cdots\cdots\cdots + (a_{p-1}\, b_q) \qquad \text{(II)}$$

y para $c_{q,p}$

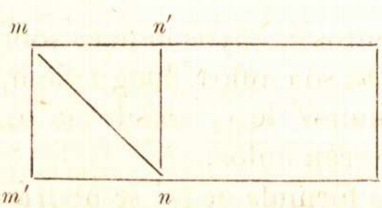
$$\text{si } p > q \cdots\cdots\cdots c_{p,q} = (a_0\, b_{q+p-1}) + \cdots\cdots\cdots + (a_{q-1}\, b_p) \qquad \text{(I')}$$

$$\text{si } p < q \cdots\cdots\cdots c_{q,p} = (a_0\, b_{q+1-1}) + \cdots\cdots\cdots + (a_{p-1}\, b_q) \qquad \text{(II')}$$

Comparando (I) y (I'); (II) y (II'), se deduce que en todos los casos

$$c_{p,q} = c_{q,p}.$$

Así los elementos de la matriz Δ_r que están simétricamente colocados



respecto á mn, son iguales, y la determinante principal $\Delta_{r,0}$, es decir, $mm'\,nn'$ es simétrica.

125. Suprimiendo en la matriz D_r las dos líneas horizontales extremas, se obtiene una matriz del órden $r - 1$, y esto equivale á suprimir en Δ_r la última horizontal inferior. En general, suprimiendo en

Δ_r la última, las dos últimas, las tres últimas, etc., horizontales, se obtienen las matrices Δ_{r-1}; Δ_{r-2}; Δ_{r-3} .....

De aquí se deduce que para tener el sistema completo de *reducidas* de las matrices á dos escalas de todos los órdenes desde el 1.° al n.^{mo}, basta construir la reducida de la matriz de doble escala del órden n, que es el más elevado; es decir, Δ_n, reducida de la matriz cuadrada D_n, y que será cuadrada tambien; y tomando la primera, las dos primeras, tres primeras líneas, etc., de Δ_n se tendrán Δ_1, Δ_2, Δ_3, ... reducidas de D_1, D_2, D_3.....

Que la matriz del órden n es la más elevada, puede demostrarse fácilmente, observando que en las matrices que consideramos el número de horizontales, ha de ser inferior ó á lo más, iguales al de verticales; luego,

$$2r \leqq r + n \quad \text{de donde} \quad r \leqq n.$$

En el caso límite $r = n$, el número de horizontales es $2n$, y este mismo es el de verticales, la matriz es, por lo tanto, cuadrada.

126. Puesto que la matriz Δ_n es cuadrada, y además (N. **124**) simétrica, bastará construir el sistema triangular siguiente:

A C

$$\left|\begin{array}{ccccccccc}
c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,p-1} & c_{1,p} & c_{1,p+1} & \cdots & c_{1,n-1} & c_{1,n} \\
 & c_{2,2} & \cdots & c_{2,p-1} & c_{2,p} & c_{2,p+1} & \cdots & c_{2,n-1} & c_{2,n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & c_{p-1,p-1} & c_{p-1,p} & c_{p-1,p+1} & \cdots & c_{p-1,n-1} & c_{p-1,n} \\
 & & & & c_{p,p} & c_{p,p+1} & \cdots & c_{p,n-1} & c_{p,n} \\
 & & & & & c_{p+1,p+1} & \cdots & c_{p+1,n-1} & c_{p+1,n} \\
 & & & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & c_{n-1,n-1} & c_{n-1,n} \\
 & & & & & & & & c_{n,n}
\end{array}\right|$$

B

en el que A B es un eje de simetría, y todos los elementos no escritos son iguales á la simétrica de la escala triangular.

Basta, pues, construir dicha escala.

En los elementos escritos debe notarse, que respecto á cada horizontal, — y lo que digamos de una se dice de todas, — en el primer elemento, los dos índices son iguales, y quedando invariable el primero, crece el segundo; por ejemplo:

$$c_{p,p}\ c_{p,p+1}\ c_{p,p+2} \ldots\ldots c_{p,n},$$

luego por regla general, nunca el segundo índice de la mitad ABC de la matriz, es superior al primero.

Así, cuando $c_{p,q}$ representa un elemento de la parte ABC, siempre

$$q > \text{ó al ménos} = p$$

por lo tanto,

$$c_{p,q} = (a_0\, b_{p+q-1}) + (a_1\, b_{p+q-2}) + (a_{p+q-3}) \ldots (a_{p-2}\, b_{q+1}) + (a_{p-1}\, b_q)$$

La expresion de $c_{p-1,q+1}$ será

$$c_{p-1,q+1} = (a_0\, b_{p+q-1}) + \ldots\ldots (a_{p-2}\, b_{q+1}),$$

por lo tanto,

$$c_{p,q} = c_{p-1,q+1} + (a_{p-1}\, b_q).$$

Dando en esta fórmula á q los valores

$$q = p \ldots\ldots = p+1 \ldots\ldots = p+2 \ldots\ldots n,$$

obtendrémos todos los elementos de la p.$^{\text{ma}}$ horizontal,

$$\begin{array}{lllll}
c_{p,p} & = c_{p-1,p+1} & + & (a_{p-1}\, b_p &) \\
c_{p,p+1} & = c_{p-1,p+2} & + & (a_{p-1}\, b_{p+1}) & \\
c_{p,p+2} & = c_{p-1,p+3} & + & (a_{p-1}\, b_{p+2}) & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \\
c_{p,n-1} & = c_{p-1,n} & + & (a_{p-1}\, b_{n-1}) & \\
c_{p,n} & = 0 & + & (a_{p-1}\, b_n &)
\end{array}$$

Observarémos respecto á los valores precedentes:

1.° Que en la última ecuacion, el elemento $c_{p-1,n+1}$ no existe, y por esta razon escribimos *cero*. Ademas, á este resultado puede llegarse directamente observando que en

$$c_{p,n} = (a_0\, b_{p+n-1}) + (a_0\, b_{p+n-2}) + \ldots\ldots (a_{p-1}\, b_n)$$

todos los términos ménos el último deben suprimirse segun la primera regla del (núm. 124).

2.° Los primeros términos de los segundos miembros, son los elementos de la horizontal $(p-1)$; de manera que por las fórmulas obtenidas, se expresan los elementos de una horizontal en funcion de los correspondientes de la superior, á comenzar por el tercero. En efecto dichas horizontales se hallan en esta posicion:

$$\begin{array}{llllll} c_{p-1,p-1} & c_{p-1,p} & c_{p-1,p+1} & c_{p-1,p+2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & c_{p-1,n} & \\ & c_{p,p} & c_{p,p+2} & c_{p,n-2} \ldots\ldots\ldots & c_{p,n-1} & c_{p,n} \end{array}$$

3.° Que la serie de los últimos términos son las matrices sucesivas de la matriz bilineal

$$\left| \begin{array}{l} a_0\, a_1\, a_2 \ldots\ldots a_{p-1}\, a_p\, a_{p+1} \ldots\ldots a_{n-1}\, a_n \\ b_0\, b_1\, b_2 \ldots\ldots b_{p-1}\, b_p\, b_{p+1} \ldots\ldots b_{u-1}\, b_n \end{array} \right|$$

formada con las series generatrices de las dos escalas, á contar de la p.ma vertical; á saber,

$$\left| \begin{array}{ll} a_{p-1} & a_p \\ b_{p-1} & b_p \end{array} \right| , \left| \begin{array}{ll} a_{p-1} & a_{p+1} \\ b_{p-1} & b_{p+1} \end{array} \right| , \left| \begin{array}{ll} a_{p-1} & a_{p+2} \\ b_{p-1} & b_{p+2} \end{array} \right| , \ldots\ldots \left| \begin{array}{ll} a_{p-1} & a_n \\ b_{p-1} & b_n \end{array} \right|$$

ó bien

$$(a_{p-1}\, b_p - b_{p-1}\, a_p) \ldots\ldots (a_{p-1}\, b_n - b_{p-1}\, a_n)$$

y segun la notacion adoptada,

$$(a_{p-1}\, b_p) \ldots\ldots (a_{p-1}\, b_n).$$

De aquí resulta que *los sucesivos elementos de la p.ma ho-*

rizontal, son iguales á los de la p — 1, *á comenzar por el tercero, aumentados respectivamente de las sucesivas determinantes de la matriz bilineal que se forma con las series generatrices de ambas escalas, á contar de la p.*^{ma}

Vemos, segun lo expuesto, que las diversas horizontales de un sistema triangular se deducen fácilmente unas de otras, y que basta hallar la primera para obtener las restantes; pero los elementos

$$c_{1,1}\ c_{1,2}\ c_{1,3}\ \ldots\ldots\ c_{1,p}\ c_{1,p+1}\ \ldots\ldots\ c_{1,n-1}\ c_{1,n}$$

se determinan fácilmente. Por ejemplo, $c_{1,p}$

$$c_{1,p} = (a_0\, b_{p+1-1}) = (a_0\, b_p)$$

luego

$$c_{1,1} = (a_0\, b_1)\,;\ c_{1,2} = (a_0\, b_2)\,;\ c_{1,3} = (a_0\, b_3)\ \ldots\ldots\ c_{1,n} = (a_0\, b_n)$$

que son las determinantes sucesivas de la matriz bilineal de las series generatrices.

Ejemplos. I. Sea la matriz cuadrada de *tercer orden*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o & o \\ o & a & b & c & d & o \\ o & o & a & b & c & d \\ o & o & t & n & v & x \\ o & t & n & v & x & o \\ t & n & v & x & o & o \end{vmatrix}$$

La matriz bilineal de las series generatrices, es

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ t & n & v & x \end{vmatrix}$$

de donde se deduce la primera horizontal de la matriz reducida

$$an - bt;\ av - ct;\ ax - dt \qquad \text{(primera horizóntal).}$$

Para obtener la segunda horizontal de la escala triangular, formarémos las matrices cuadradas sucesivas de la bilineal precedente contando desde la segunda

$$bv - cu;\ bx - du,$$

y agregándolas en este órden

$$\begin{array}{lll} an - bt & av - ct & ax - dt \\ & bv - cn & bx - dx \end{array}$$

tendrémos la segunda horizontal

$$\begin{array}{ll} ax - dt & bx - du \\ + bv - cu & \end{array} \qquad \text{(segunda horizontal).}$$

Por último, formando las matrices sucesivas de la bilineal, á contar de la tercera, tendrémos

$$cx - dv,$$

y sumando á la segunda horizontal en este órden, á contar del tercer elemento,

$$\begin{array}{lll} av - dt & bx - dx & \\ + bv - cv & & \\ & & cx - dv \end{array}$$

tendrémos

$$cx - dv \qquad \text{(tercera horizontal).}$$

Resulta, pues, la matriz triangular

$$\left|\begin{array}{lll} au - bt & av - ct & ax - dt \\ & \left.\begin{array}{r} ax - dt \\ + bv - cu \end{array}\right\} & bx - du \\ & & cx - dv \end{array}\right|$$

y la matriz completa

$$\begin{vmatrix} au-bt & av-ct & ax-dt \\ av-ct & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ bv-cu \end{matrix}\right\} & bx-du \\ ax-dt & bx-du & cx-dv \end{vmatrix}$$

Tendrémos, pues,

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o & o \\ o & a & b & c & d & o \\ o & o & a & b & c & d \\ o & o & t & u & v & x \\ o & t & u & v & x & o \\ t & u & v & x & o & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} au-bt & av-ct & ax-dt \\ av-ct & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ bv-cu \end{matrix}\right\} & bx-du \\ ax-dt & bx-du & vx-dv \end{vmatrix}$$

Como ambas matrices son cuadradas, el *sistema* en general se reduce á *una sola*, y la igualdad anterior puede entenderse que significa *igualdad de dos determinantes*.

II. Sea la matriz de segundo órden

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ o & t & n & v & x \\ t & n & v & x & o \end{vmatrix}$$

que procede de la anterior suprimiendo las horizontales extremas, tendrémos, suprimiendo la última horizontal de la matriz reducida de tercer órden

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & o \\ o & a & b & c & d \\ o & t & n & v & x \\ t & n & v & x & o \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} an-bt & av-ct & ax-dt \\ av-ct & \left.\begin{matrix} ax-dt \\ +bv-cn \end{matrix}\right\} & bx-dn \end{vmatrix}$$

III. Sea, por último, la matriz de primer órden

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ t & n & v & x \end{vmatrix}$$

tendrémos, suprimiendo la última horizontal de la reducida

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ t & n & v & x \end{vmatrix} = |an - bt \quad av - ct \quad ax - dt|$$

resultado evidente.

2.º Caso.

Transformacion de las matrices de dobles escalas de grados desiguales.

127. Este segundo caso puede reducirse inmediatamente al primero.

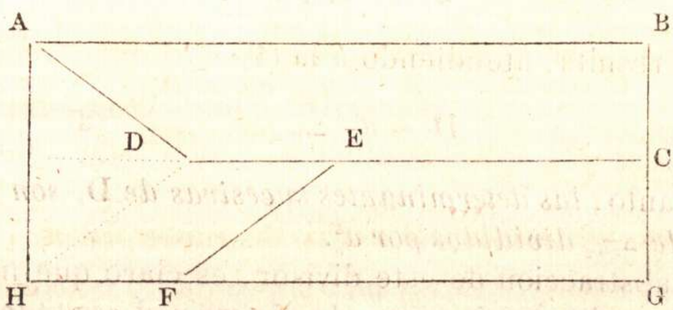
Designemos por D_r una matriz de dos escalas de los grados r y $r + \varepsilon$, cuyas series generatrices son

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \ldots\ldots a_\varepsilon \quad a_{\varepsilon+1} \ldots\ldots a_m \qquad (a_0)$$
$$b_\varepsilon \quad b_{\varepsilon+1} \ldots\ldots b_m \qquad (b_\varepsilon)$$

Fácil es igualar las dos escalas: agreguemos ε horizontales á la superior, y designando por $D'_{r+\varepsilon}$ la nueva matriz, tendrémos,

$$D'_{r+\varepsilon} = a^\varepsilon D_r \qquad (1)$$

la nueva matriz $D'_{r+\varepsilon}$ será de esta forma.



De A B á DC hay $r + \varepsilon$ horizontales: de HG á DC otras

$r+\varepsilon$; pero en el espacio HDEF no hay elementos, de suerte que la escala inferior es incompleta, pero puede completarse agregando los elementos

$$b_0\ b_1\ b_2 \ldots\ldots b_{\varepsilon-1}$$

á cada horizontal; siempre miremos á dichos elementos como nulos; la matriz $D'_{r+\varepsilon}$ será, pues, de esta forma:

$$\left|\begin{array}{l} a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_m\ 0 \ldots\ldots 0 \\ 0\ a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_m \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0 \ldots a_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_m \\ 0\ 0 \ldots b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_m \ldots\ldots 0 \\ b_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b_m\ 0 \ldots\ldots 0 \end{array}\right|$$

La nueva matriz $D'_{r+\varepsilon}$ puede ser considerada como una matriz de dos escalas de grados iguales y completa, relativa á las dos series (a_0) y (b_0), por lo tanto podrémos aplicarle la transformacion del número 123, salvo anular en la última fórmula los elementos $b_0\, b_1 \ldots\ldots b_{\varepsilon-1}$.

Representando por $\Delta_{r+\varepsilon}$ la reducida de las $r+\varepsilon$ horizontales que se obtienen en esta hipótesis, tendrémos la igualdad múltiple

$$D'_{r+\varepsilon} = \Delta_{r+\varepsilon},$$

de la cual resulta, atendiendo á la (1)

$$D_r = a_0^\varepsilon\ \Delta_{r+\varepsilon} \qquad (2)$$

y por lo tanto, *las determinantes sucesivas de* D_r *son iguales á las de* $\Delta_{r+\varepsilon}$ *divididos por* a_0^ε.

Hecha abstraccion de este divisor, es claro que no hay ninguna otra diferencia entre el *primero* y el *segundo caso*, y que áun la matriz cuadrada $\Delta_{n+\varepsilon}$ ó Δ_m, reducida de la D_n

es una reducida cuadrada y simétrica que se construye por la matriz bilineal

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_{\varepsilon-1} & a_\varepsilon & a_{\varepsilon+1} & \ldots\ldots & a_m \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_\varepsilon & b_{\varepsilon+1} & \ldots\ldots & b_m \end{vmatrix}$$

y de la cual se deducen las demas reducidas suprimiendo horizontales.

1.° $D'_{r+\varepsilon}$ será una matriz cuadrada cuando el número ε de horizontales y verticales que se agregan sea tal que

$$m + r + \varepsilon = 2\,(r + \varepsilon,$$

es decir, cuando

$$\varepsilon = m - r \quad \text{ó bien cuando} \quad r = m - \varepsilon.$$

En las reducidas $\Delta_{r+\varepsilon} = \Delta_m$ que serán cuadradas, deberémos hacer iguales á cero las cantidades

$$b_0\ b_1\ b_2\ \ldots\ldots\ b_{m-r}.$$

2.° Suprimiendo las horizontales extremas de $D'_{r+\varepsilon}$, que vale tanto como suprimir la última horizontal de $\Delta_{r+\varepsilon}$, obtendrémos la reducida $\Delta_{r+\varepsilon-1}$ de D_{r-1}. En efecto, para convertir la matriz de grado $r - 1$ de dos escalas desiguales en otra $D'_{r+\varepsilon-1}$ de escalas iguales, es preciso agregar ε horizontales y otras tantas verticales, con lo cual se convierte en una matriz de escalas iguales, y en la que cada escala tiene $r - 1 + \varepsilon$, es decir, tantas como quedan suprimiendo las dos horizontales extremas.

En las determinantes definitivas hay que igualar á cero

$$b_0\ b_1\ b_2\ \ldots\ldots\ b_\varepsilon.$$

Lo mismo diriamos para las matrices de los grados $r-2$, $r-3$ ....

En resúmen,

Reducidas de las matrices á doble escala de los grados $1, 2, 3 \ldots\ldots r$ = matrices $\Delta_{\varepsilon+1}$, $\Delta_{\varepsilon+2} \ldots\ldots \Delta_{\varepsilon+r}$, es decir, matrices formadas con las $\varepsilon+1$ horizontales de la matriz cuadrada general, ó con las $\varepsilon+2$, $\varepsilon+3$, y en general con las $\varepsilon+r$.

128. De la ecuacion (2) se deduce, que las sucesivas determinantes de la reducida $\Delta_{r+\varepsilon}$, son exactamente divisibles por a_0^ε. Veamos ahora cómo podemos desembarazarnos de este factor.

Basta para ello *no aplicar* la transformacion del número 123 mas que á las r horizontales inferiores de la matriz $D'_{r+\varepsilon}$.

En efecto, de este modo, en vez de multiplicar la matriz por $a^{\varepsilon+r}$, sólo se multiplica por a^r, luego el resultado $\Delta'_{r+\varepsilon}$ será igual á $\Delta_{r+\varepsilon}$ dividido por a^ε, es decir, que será igual á D_r; tendrémos, pues,

$$D_r = D'_{r+\varepsilon}.$$

Ademas, el resto de la transformacion *es posible*, porque si bien sólo se anuláran las r primeras verticales en virtud de dicha transformacion y no las ε siguientes, éstas tienen sus elementos nulos á partir de la diagonal, puesto que estos elementos son los términos de la serie

$$b_0 \; b_1 \; b_2 \ldots\ldots b_\varepsilon,$$

que son todos iguales á cero.

Esto equivale á cambiar en las ε primeras horizontales de $\Delta_{r+\varepsilon}$ en una escala inversa (b_ε), puesto que dichas horizontales nó cambian de valor en toda la transformacion, y el elemento primero de la ε^{ma} horizontal pasa á la primera vertical.

129. Ejemplos. I. Sea la matriz á dos escalas desiguales y de segundo órden, en la que ε vale 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & o \\ o & a & b & c & d & e & f \\ o & o & o & o & t & u & v \\ o & o & o & t & u & v & o \\ o & o & t & u & v & o & o \\ o & t & u & v & o & o & o \\ t & u & v & o & o & o & o \end{vmatrix}$$

Formemos la matriz bilineal

$$\begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ o & o & o & t & u & v \end{matrix}$$

La primera línea del sistema triangular será

$$o \quad o \quad at \quad au \quad av$$

y de ella se deduce (núm.   )

$$\begin{vmatrix} o & o & at & au & av \\ & at & au+bt & av+bu & bv \\ & & av+bu+ct & bv+cu & cv \\ & & & cv+du-et & dv-ft \\ & & & & ev-uf \end{vmatrix}$$

Completando esta matriz por el principio de simetría:

$$\begin{vmatrix} o & o & at & au & av \\ o & at & au+bt & av+bu & bv \\ at & av+bt & av+bu+ct & bv+cu & cv \\ au & av+bu & bv+cu & cu+du-et & dv-ft \\ av & bv & cu & dv-ft & ev-fu \end{vmatrix}$$

La determinante de esta matriz dividida por a^5, será equivalente á la de la propuesta; basta para ello sustituir á las tres primeras horizontales esta escala,

$$\begin{matrix} & & t & u & v \\ & t & u & v & o \\ t & u & v & o & o \end{matrix}$$

y tendrémos por último:

$$\begin{vmatrix} o & o & t & u & v \\ o & t & u & v & o \\ t & u & v & o & o \\ au & av+bu & bv+cu & cv+du-et & dv-ft \\ av & bv & cv & dv-ft & cv-fu \end{vmatrix}$$

II. Sea la matriz de primer órden correspondiente á $\varepsilon = 3$

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ o & o & o & t & u & v \\ o & o & t & u & v & o \\ o & t & u & v & o & o \\ t & u & v & o & o & o \end{vmatrix}$$

Basta para obtener la reducida correspondiente, suprimir en la del ejemplo anterior la última horizontal, y hallarémos de este modo

$$\begin{vmatrix} o & o & t & u & v \\ o & t & u & v & o \\ t & u & v & o & o \\ au & av+bu & bv+cu & cv+du-et & dv-ft \\ av & bv & cv & dv-ft & cv-fu \end{vmatrix}$$

Las dos determinantes sucesivas que de aquí se deducen son equivalentes á las dos que se derivan de la propuesta.

FIN.

ÍNDICE.

Páginas.

§ I.—Inversiones en las permutaciones. 243
§ II.—Consideraciones generales sobre los cuadros generadores ó matrices. 257
§ III.—Primeras nociones sobre las determinantes.—Determinantes menores y complementarias. 269
§ IV.—Propiedades generales de las determinantes.. 292
§ V.—Descomposicion de determinantes en suma de productos de menores complementarias. 321
§ VI.—Multiplicacion de determinantes. 329
§ VII.—Derivadas y diferenciales de las determinantes. 334
§ VIII.—Transformacion de determinantes. 362
PRIMERA TRANSFORMACION. — Descomposicion de determinantes en otras cuyos elementos principales sean nulos. . . . . . . Id.
SEGUNDA TRANSFORMACION.— Desarrollo de una determinante segun las potencias de la parte comun á todos los elementos principales.. 365
TERCERA TRANSFORMACION.—Desarrollo de una determinante segun los productos de los elementos de dos líneas de nombre diverso. 367
CUARTA TRANSFORMACION.—Transformacion del producto de dos determinantes.. 371
§ IX.—Determinantes recíprocas. 377
§ X.—Determinantes simétricas, semisimétricas y disimétricas. . . 384
DETERMINANTES SIMÉTRICAS. 385
DETERMINANTES SEMISIMÉTRICAS.. 391
DETERMINANTES DISIMÉTRICAS. 412
§ XI.—Matrices y determinantes de dos escalas.. 414
PRIMER CASO.— Transformacion de las matrices á dos escalas de grados iguales. 425
SEGUNDO CASO.— Transformacion de las materias de dobles escalas de grados desiguales.. 439

FIN DEL ÍNDICE.