COMPENDIO
DE
MATEMÁTICAS
PURAS Y MISTAS

POR

D. JOSEF MARIANO VALLEJO,
del Consejo de S. M. su Secretario, Director del Gabinete Geográfico de la primera Secretaría de Estado, ex-Catedrático de Matemáticas del Real Seminario de Nobles de Madrid, individuo de la Real Sociedad económica Matritense, y de otros establecimientos científicos.

TOMO II.

VALENCIA:
En la Imprenta de Estévan.
1819.

PRÓLOGO.

Aunque en este Compendio nos hemos propuesto el presentar una sucinta idea de todos los tratados matemáticos, no por eso hemos omitido diligencia alguna que pueda contribuir para que en el menor volúmen posible, contenga el mayor número de verdades útiles. En su coordinacion hemos procurado seguir siempre un método rigoroso y exacto, para que no se interrumpa la cadena de los conocimientos que comprende. Y aunque el cálculo infinitesimal se esplica en él con toda exactitud y precision, y con un grado de sencillez estraordinario, sin embargo, con el fin de hacer esta obrita mas útil á todo jénero de personas, hemos procurado no hacer uso de dicho cálculo en los tratados Físico-Matemáticos.

ERRATAS DE ESTE TOMO.

Pág.	*Lín.*	*Dice.*	*Debe decir.*
29	del título	seccionds	secciones.
79	12	ecuacian	ecuacion.
85	1	$='A\mathrm{d}x;$	$='A\mathrm{d}x';$
91	5	$+ax\mathrm{d}^{x}$ *	$+ax\mathrm{d}x.$
91	9	$2\sqrt{}^{cx}(a-$	$2\sqrt{cx}(a-$
130	1	du	$\mathrm{d}x$
151	10	y R,	y R',
162	17	domostrar	demostrar.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO.

Pág.

Aplicacion del Álgebra á la Geometría........ 1
Determinacion de los puntos y rectas sobre un plano.. 9
De los puntos y de la línea recta considerados en el espacio.................................. 15
De las secciones cónicas.............................. 19
Del círculo.. 24
De la elipse.. 28
De la parábola... 36
De la hipérbola.. 39
De las funciones.. 44
Idea jeneral de las series y de los números figurados.. 46
Del método de los límites............................ 53
Del cálculo de las diferencias..................... 58
DEL CÁLCULO DIFERENCIAL...................... 63
De las diferenciales segundas, terceras, &c. 78
Aplicacion del cálculo diferencial al desarrollo de las funciones algebráicas en series... 80
Aplicacion del cálculo diferencial á las diferencias finitas.. 84
De la diferenciacion de las funciones trascendentes, y de su desarrollo en series......... 86
De la diferenciacion de cualesquiera ecuaciones de dos variables.................................. 96
Aplicacion del cálculo diferencial para determinar los máximos y mínimos de las funciones de una sola variable........................ 99

De los valores que toman en ciertos casos los coeficientes diferenciales, y de las espresiones que se convierten en $\frac{0}{0}$............... 105
Aplicacion del cálculo diferencial á la teoría de las líneas curvas......................... 109
De los coeficientes diferenciales de las superficies curvilíneas, de las superficies de los cuerpos de revolucion, y de los volúmenes de estos.. 120
DEL CÁLCULO INTEGRAL. *De la integracion de las funciones racionales de una sola variable*.. 123
De la integracion de las funciones irracionales... 130
De la integracion de las diferenciales binomias... 131
De la integracion de las funciones logarítmicas y esponenciales......................... 134
Aplicacion del cálculo integral á la cuadratura de las curvas, y á su rectificacion; á la cuadratura de las superficies curvas, y á la valuacion de los volúmenes que comprenden.. 139
MECÁNICA. *Nociones preliminares*........... 146
ESTÁTICA. *Del equilibrio de un punto material. Proposiciones generales acerca de la composicion y descomposicion de las fuerzas*... 147
Composicion de las fuerzas que concurren en un punto.. 154
Composicion y equilibrio de las fuerzas paralelas... 155
De los momentos.................................... 159

De la pesantez, y del modo de hallar los centros de gravedad 162
De las máquinas 168
Del equilibrio en la maroma 169
De la palanca, balanza y romana 173
De la polea ó garrucha, y de las tróculas y polipastros 176
Del torno, de las ruedas dentadas, del cric ó gato, y de la cábria 179
Del plano inclinado 182
De la rosca 183
De la cuña 186
Del rozamiento 187
DINÁMICA. *Del movimiento uniforme* 188
Del movimiento uniformemente acelerado y retardado 189
Del movimiento de los cuerpos sobre planos inclinados 195
Del movimiento de los proyectiles en el vacío. 198
Del movimiento de un cuerpo en una curva vertical, y de las oscilaciones de los péndulos 203
De las fuerzas centrales 208
De la inercia y choque de los cuerpos 210
HIDROSTÁTICA 215
HIDRODINÁMICA 220
AFINITOLOGÍA 226
CRISTALOGRAFÍA 230
CAPILAROLOGÍA 237
PIROLOGÍA 241
Capacidad de los cuerpos para el calórico ... 251
ELECTROLOGÍA 259
MAGNETOLOGÍA 268

Neumatología.. 274
Gasología... 284
Higrometría... 294
Anemología.. 296
Acústica... 299
Óptica.. 305
Meteorología... 313
Astronomía.. 319
De las estrellas fijas.............................. 320
De los planetas...................................... 326
Del Sol.. 329
De Mercurio.. 334
De Vénus... 334
De la Tierra.. 335
De la Tierra considerada astronómicamente. 336
De la Tierra considerada físicamente, ó con mas propiedad, geognósticamente.......... 250
De la Tierra considerada políticamente...... 354
De la temperatura de la Tierra.............. 355
De Marte.. 356
De Júpiter.. 356
De Saturno... 357
De Urano... 357
De Vesta, Juno, Pálas y Céres............... 358
De los planetas secundarios, ó de los satélites de los planetas primarios.............. 358
De los cometas...................................... 363
De los eclipses..................................... 363
Arte conjetural, ó teoría de las probabilidades.. 365

APLICACION DEL ÁLGEBRA

Á LA GEOMETRÍA.

1 La definicion del Algebra y el conocimiento que hemos dado de ella, manifiestan que su carácter esencial es la *generalidad*; y el de la Geometría, que presenta á los sentidos los objetos de las ideas en que se ocupa, es *la claridad.* Así, cuando para generalizar alguna verdad geométrica se hace uso del Álgebra, se dice que *se aplica el Álgebra á la Geometría*; y cuando para hacer sensible algun resultado algebráico se hace uso de la Geometría, *se aplica la Geometría al Álgebra.* Por lo cual bájo el nombre de aplicacion del Álgebra á la Geometría se entiende *el uso que se hace de estas dos ciencias, ya sea para resolver alguna cuestion perteneciente á una de ellas, ya para resolver otra cualquiera.*

2 La aplicacion del Álgebra á la Geometría tiene dos partes, á saber: *manifestar cómo se pueden costruir por Geometría los resultados de la análisis*; y *cómo se pueden traducir analíticamente las cuestiones de Geometría.*

3 Principiarémos por la primera costruyendo las ecuaciones determinadas de primero y segundo grado.

Sea la ecuacion propuesta $x=a+b-c$:
costruir esta ecuacion, ú otra cualquiera, es hallar una línea que esprese el valor de x. Para esto se tirará una línea indefinida DC (fig. 1); desde uno cualquiera A de sus puntos, se tomará hácia la derecha una parte AB igual con la cantidad a; desde B tambien hácia la derecha, se tomará otra parte $BC=b$; y desde C hácia la izquierda se tomará $CE=c$, y será
$AE=AB+BC-CE$;
y sustituyendo sus valores a, b, c, será $AE=a+b-c$; pero ántes teníamos $x=a+b-c$, luego $AE=x$;

luego se ha hallado una línea que espresa el valor de x.

Es indiferente el tomar estas partes hácia la derecha ó hácia la izquierda del punto que se elige, que se llama *punto de oríjen*; pero lo que es esencial es, que si las cantidades positivas se toman de izquierda á derecha, las negativas se deben tomar de derecha á izquierda, ó al contrario; y si las primeras se toman de abajo arriba, las segundas se tomarán de arriba abajo.

Esc. Si se tuviese $c=a+b$, el valor de x seria cero, y la costruccion se reduciria á solo el punto A; pero si fuese $c>a+b$, el valor de x seria negativo, y la costruccion daria para x la línea AE′ negativa, ó $x=a+b-c=\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{CE}'=-\mathrm{AE}'$.

4 Sea ahora $x=\frac{ab}{c}$: para costruirla tirarémos (I. 324) á arbitrio dos rectas AV, AZ (fig. 2) que formen un ángulo cualquiera VAZ; en uno de sus lados se tomará una parte $\mathrm{AE}=c$; en el mismo lado se tomará otra parte $\mathrm{AC}=a$; en el otro lado se tomará una parte $\mathrm{AD}=b$; se unirá el estremo E de la primera con el estremo D de la tercera por medio de una recta ED, y por el estremo C de la segunda se tirará la CB paralela á DE, y la parte AB que corte en el otro lado será el valor de x.

En efecto, los triángulos AED, ACB, son semejantes (I. 328) y dan

$$\mathrm{AE}:\mathrm{AC}::\mathrm{AD}:\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}=\frac{ab}{c}=x,$$

que era lo que se pedia.

5 Si la ecuacion por costruir fuese $x=\frac{a^2}{c}=\frac{aa}{c}$, se reduciria la operacion (I. 324 esc.) á encontrar una tercera proporcional á las dos cantidades c y a.

6 Sea la ecuacion $x=\frac{ab+db}{c+d}$ ó $x=\frac{(a+d)b}{c+d}$,

(porque en el numerador es comun la cantidad b); luego hallando una cuarta proporcional á $c+d$, b y $a+d$, se tendrá lo que se pide.

Si fuese $x=\frac{a^2-b^2}{c}$ ó (I. § 116 esc.) $x=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$, hallando una cuarta proporcional á c, $a+b$ y $a-b$, se tendria el valor de x.

7 Toda ecuacion en que la incógnita esté representada por un quebrado, se puede costruir con el auxilio de las cuartas y terceras proporcionales. Para esto se descompondrá el numerador y denominador en tantos factores como dimensiones tengan, y se pondrá por factor una letra igual con la unidad tantas veces como se necesite en uno de los términos, para que resulte el número de dimensiones del numerador una unidad mas que el del denominador.

8 Si la ecuacion por costruir fuese $x=\frac{abc}{de}$, la resolveríamos en factores de este modo $x=\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$; donde se ve que hallando primero una cuarta proporcional á las cantidades d, a, b, y llamándola m, seria $m=\frac{ab}{d}$, lo que daria $x=\frac{m\times c}{e}$; y hallando ahora una cuarta proporcional á e, m y c, se tendria el valor de x.

9 Sea la ecuacion que se quiere costruir $x=\frac{b^4}{a}$; como al denominador le faltan dos dimensiones para tener una ménos que el numerador, espresarémos la unidad por una letra cualquiera tal como c; y como toda potencia de la unidad es igual con ella misma, multiplicando el denominador por c^2, que es lo que se necesita para que en él haya una dimension ménos que

en el numerador, se tendrá $x=\frac{b^4}{c^2\times a}=\frac{b^2}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$;

y estaria reducido á encontrar primero una tercera proporcional á c y b, que llamándola m daria

$$x=m\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}.$$

Hallando ahora una cuarta proporcional á c, m y b, y llamándola n, será $x=n\times\frac{b}{a}$.

Y hallando por último una cuarta proporcional á a, n y b, se tendrá una línea que espresará el valor de x.

10 Si la ecuacion fuese $x=\frac{a}{b^2d^2}$, multiplicaríamos el numerador a por la cuarta potencia de $c=1$, lo que daria $x=\frac{ac^4}{b^2d^2}=\frac{ac}{b}\times\frac{c}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}$;

y se costruiria como la espresion anterior.

11 Pasemos á costruir los radicales de 2.º grado.

Sea $x=\sqrt{ab}$;

tírese una línea indefinida AB (fig. 3); tómese en ella una parte $AC=a$; á continuacion de ella tómese otra $CB=b$; trácese sobre AB como diámetro un semicírculo ADB, y en el punto C levántese la perpendicular DC; lo que (I. 333) dará $AC:DC::DC:CB$, de donde $DC^2=AC\times CB=ab$, y $DC=\sqrt{ab}=x$, que era lo que se pedia.

12 Si fuese la ecuacion $x=\sqrt{abc}$, en que debajo del radical hay tres dimensiones, se pondria por denominador á la cantidad que hay debajo del radical una letra d igual con la unidad, y seria $x=\sqrt{\frac{abc}{d}}=\sqrt{\frac{ab\times c}{d}}$;

se hallaria primero una cuarta proporcional á d, a y b, y llamándola m se tendria $x=\sqrt{mc}$; que quedaria costruida (11) hallando una media proporcional entre m y c.

13 Si se tuviese $x=\sqrt{a}$, se multiplicaria la cantidad que está debajo del radical por la unidad, espresada por la letra b, y seria $x=\sqrt{ab}$, y estaria reducida al caso primero.

14 Cuando la cantidad que está debajo del radical es un polinomio, se puede costruir por dos métodos: ó por una media proporcional, ó con el auxilio del triángulo rectángulo.

Así, si se quiere costruir $x=\sqrt{a^2+2bc-\frac{mnd}{p}}$,

se hará $2bc=ak$, $\frac{mnd}{p}=ah$; de donde $k=\frac{2bc}{a}=\frac{2b\times c}{a}$; que se costruirá hallando una cuarta proporcional á a, al duplo de la línea b, y á c; y $h=\frac{mnd}{ap}=\frac{mn}{a}\times\frac{d}{p}$; que se costruirá por lo dicho ántes (8). Sustituyendo en vez de $2bc$ y $\frac{mnd}{p}$ sus valores en la propuesta se convertirá en $x=\sqrt{a^2+ak-ah}=\sqrt{a(a+k-h)}$, lo que reduce la operacion á hallar una media proporcional entre a y $a+k-h$.

15 Si la ecuacion por costruir fuese $x=\sqrt{a^2+b^2}$, se haria $b^2=am$ y seria

$$x=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+am}=\sqrt{a(a+m)},$$

cuya operacion está reducida al caso de ántes.

Si se quiere costruir por el triángulo rectángulo, se formará un ángulo recto VAZ (fig. 4); en uno de los lados AV se tomará una parte $AB=a$, y en el otro AZ otra parte $AC=b$; por los estremos B y C de estas líneas se tirará la BC, que será igual con x. En efecto, por ser rectángulo el triángulo ABC, dará

$$BC^2=AB^2+AC^2=a^2+b^2 \text{ y } BC=\sqrt{a^2+b^2}=x.$$

16 Para costruir la ecuacion $x=\sqrt{a^2-b^2}$ en el supuesto de ser $a^2>b^2$,
sobre la línea $AB=a$ (fig. 5) como diámetro, se trazará una semicircunferencia ACB; desde uno de sus estremos B se colocará por cuerda la $BC=b$; y tirando desde el otro estremo A al punto C la CA, esta será el valor de x; porque el triángulo ACB rectángulo en C, da $AC^2=AB^2-BC^2=a^2-b^2$,
de donde $AC=\sqrt{a^2-b^2}=x$, que era lo que se pedia.

Esc. 1.° Se ha costruido este radical en el supuesto de ser $a^2>b^2$, ó $a>b$; porque de otro modo seria imaginario y no se podria costruir.

Esc. 2.° *Otra costruccion del mismo radical.* Fórmese el ángulo recto VAZ (fig. 4); en uno de sus lados AZ tómese una parte $AC=b$; haciendo centro en C y con un radio $CB=a$, determínese el punto B de interseccion con el lado AV, y la parte AB será el valor de x que se pide; porque

$$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{a^2-b^2}=x.$$

17 Si el radical fuese polimonio, como

$$x=\sqrt{ab+c^2+ef-gh},$$

lo primero haríamos $ab=m^2$, $ef=n^2$, y $gh=p^2$, que dan $m=\sqrt{ab}$, $n=\sqrt{ef}$, y $p=\sqrt{gh}$;
y el radical se convertiria en $x=\sqrt{m^2+c^2+n^2-p^2}$; ahora, con dos líneas m y c se formará un triángulo rectángulo BAC (fig. 6), y se tendrá

$$BC^2=AB^2+AC^2=m^2+c^2;$$

y llamando q á la hipotenusa BC, y sustituyendo en el radical q^2 en vez de su igual m^2+c^2, resultará

$$x=\sqrt{q^2+n^2-p^2}.$$

Ahora, en el estremo C de esta hipotenusa se levantará la perpendicular $CD=n$, y tirando la DB que llamarémos r, será

$$BD^2=r^2=BC^2+CD^2=q^2+n^2, \text{ y } x=\sqrt{r^2-p^2}.$$

Ahora, como el cuadrado que sigue es negativo, sobre BD como diámetro se trazará un semicírculo BFD; desde D se tomará una cuerda $DF=p$, y uniendo el punto F con el B, se tendrá la $BF=x$; porque

$$BF^2=BD^2-DF^2=BC^2+CD^2-DF^2=$$
$$AB^2+AC^2+CD^2-DF^2=m^2+c^2+n^2-p^2,$$

$$\text{y } BF=\sqrt{m^2+c^2+n^2-p^2}=\sqrt{ab+c^2+ef-gh}=x,$$

que era lo que se pedia.

18 Sea ahora la ecuacion de 2.° grado $x^2+px=q$, resolviéndola (I. 168) será $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$, que separando los valores de x, da

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q} \\ x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q} \end{cases}.$$

Para hallar estos valores de x se costruirá primero el radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$;

pero como q no tiene mas de una dimension, se multiplicará por la unidad espresada v. g. por a, y el radical se convertirá en $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+aq}$;

y haciendo $aq=m^2$, que da $m=\sqrt{aq}$,

el radical será $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+m^2}$;

por consiguiente formando un triángulo rectángulo ABC (fig. 7) en que uno de los catetos CA sea igual $\frac{1}{2}p$, y el otro $CB=m$, se tendrá

$$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2+m^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+m^2};$$

ahora, tomando desde B hácia la izquierda una parte

$BO=CA=\frac{1}{2}p$, será $AO=AB-BO=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+m^2}-\frac{1}{2}p$, que es el primer valor de x.

Para costruir el segundo se tomará desde A hácia la izquierda una parte $AM=\frac{1}{2}p$, y desde M tambien hácia la izquierda otra parte $MN=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}=AB$; y se tendrá $AN=-AM-MN=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$.

Esc. Si q fuese negativa se costruiria el radical por lo dicho (16).

19 Para manifestar el modo de cifrar en ecuaciones las cuestiones de Geometría, resolverémos el siguiente problema.

Dado un triángulo ABC (fig. 8), *tirar paralelamente á uno de sus lados, tal como AC, una línea DE que sea igual á una recta dada MN.*

Res. y *Dem.* Como el triángulo es dado, quiere decir que son conocidos sus lados y todos sus datos; por lo cual haciendo $AB=c$, $AC=b$, y la recta dada $MN=n$, todo estará en determinar en el lado AB el punto D por donde se ha de tirar la paralela que se pide. Luego tomando por incógnita la parte AD que espresarémos por x, será $BD=c-x$, y los triángulos BAC, BDE, semejantes (I. § 328), darán $AB:AC::BD:DE$ ó $c:b::c-x:n$, que da $cn=bc-bx$, y despejando x se tendrá $x=\frac{bc-nc}{b}=\frac{c(b-n)}{b}$; cuyo valor manifiesta que la distancia AD debe ser una cuarta proporcional á b, c y $b-n$.

Este valor se podria costruir (4) en un paraje cualquiera, y colocándole despues desde A hácia B, se tendria determinado el punto D que se busca; pero en esta clase de cuestiones es mas elegante el hacer la costruccion en la misma figura que se da. Para esto, de la recta $AC=b$ se quitará una parte $CF=n$, y tirando por F una paralela al lado BC, esta determinará en el lado AB el punto pedido, de manera que AD será el valor de x.

En efecto, la semejanza de los triángulos ABC, AFD (I. § 328) da AC:AB::AF:AD,

$$\text{ó } b:c::b-n:x=\frac{c(b-n)}{b}.$$

Si la línea MN fuese mayor que AC, no se podria tirar en lo interior del triángulo ABC, sino que seria necesario prolongar los lados AB, BC, y el problema deberia decir *por la prolongacion de uno de sus lados &c.* en vez de *por uno de sus lados &c.* En este caso el punto que se pide seria el D′, el cual estaria por la parte inferior del punto A, como lo da á conocer el cálculo y la costruccion.

En efecto, si se tiene M′N′>AC, resultará $n>b$; entónces el factor $b-n$, que será negativo, hará que lo sea el valor de x, y por consiguiente que se debe tomar (3) desde A hácia abajo; y como haciendo la costruccion en la misma figura la línea $b-n$ será (3 esc.) la AF′ negativa, la recta F′D′ tirada por el punto F′ paralelamente á BC no podrá encontrar sino la prolongacion de BA en el punto D′.

20 Tambien suceden aquí casos análogos á los que hemos espuesto (I. 236); esto es, que muchas veces se enuncia como problema una proposicion que en realidad es teorema.

Determinacion de los puntos y rectas sobre un plano.

21 Para fijar la posicion de un punto M (fig. 9) sobre un plano, lo primero que se hace es tirar dos rectas indefinidas Xx, Zz, que formen un ángulo cualquiera, que para mayor sencillez le supondrémos constantemente recto. En seguida se tiran desde dicho punto dos rectas MP, MQ, respectivamente paralelas á Zz, Xx; y en conociendo estas distancias se tendrá determinada la posicion del punto M; pues al mismo tiempo que dista de la recta AX la magnitud MP, se sabe que dista de la otra recta AZ la magnitud MQ, y no hay otro punto que pueda cumplir con estas condiciones sino el M.

Igualmente el punto M quedará determinado por las rectas M′P′, M′Q′; el M″ por las M″P″, M″Q″; y el M‴ por las M‴P‴, M‴Q‴.

22 Esto supuesto, las líneas MQ, M′Q′, &c. ó sus iguales AP, AP′, &c. se llaman *abscisas*; y la línea X*x* en que se cuentan, se llama *eje de las abscisas*. Las líneas MP, M′P′, &c. ó sus iguales AQ, AQ′, &c. se llaman *ordenadas*; y la línea Z*z* en que se cuentan, se llama *eje de las ordenadas*.

Las abscisas y ordenadas juntas se llaman *coordenadas*, y entónces las X*x*, Z*z*, se llaman *ejes de las coordenadas*; el punto A desde donde se cuentan las coordenadas, se llama el *punto de oríjen*.

23 Representemos en general las abscisas por x, y por z las ordenadas; y como el punto puede ser el M, ó M′, M″, M‴, es necesario dar á las x, z, el signo conveniente para saber en cual de los ángulos ZAX, XA*z*, *z*A*x*, *x*AZ, se halla el punto que se quiere fijar. Por lo cual todas las abscisas que se cuenten desde A hácia la derecha, las llamarémos *positivas*, y las que vayan hácia la izquierda se llamarán *negativas*; y todas las ordenadas que se cuenten desde A hácia arriba serán *positivas*, y las que desde A hácia abajo serán *negativas*. Así, en el ángulo ZAX serán las coordenadas positivas; en el ángulo XA*z* serán las abscisas positivas y las ordenadas negativas; en el *z*A*x*, todo negativo; y en el *x*AZ serán abscisas negativas y ordenadas positivas. Luego si habiendo medido las longitudes AP, MP, se encuentra AP$=a$, PM$=b$, para fijar el punto M se tendrán las ecuaciones $x=a$, $z=b$.

Las ecuaciones del punto M′ serán $x=a$, $z=-b$; las del M″ serán $x=-a$, $z=-b$; y las del M‴ serán $x=-a$, $z=b$.

24 Si permaneciendo una misma la abscisa AP, disminuye la ordenada MP, el punto M se aproximará al eje AX; si PM ó b llega á ser cero, el punto M caerá en P sobre el mismo eje de las abscisas, y *sus ecuaciones serán* $x=a$, $z=0$.

Si permaneciendo una misma la ordenada PM, la abscisa AP disminuye, el punto M se aproximará al eje AZ, con el cual coincidirá si AP ó a llega á ser cero, lo que da $x=0$, $z=b$, que son *las ecuaciones de un punto Q en el eje de las ordenadas.*

En fin, si la abscisa AP y la ordenada PM llegan á ser cero á un mismo tiempo, el punto M que debe hallarse en ambos ejes, será su punto de interseccion, y por lo mismo caerá sobre el punto A que es *el oríjen de las coordenadas*, cuyas ecuaciones serán $x=0$, $z=0$.

Donde se ve que suponiendo á las variables x y z todos los valores positivos y negativos posibles, desde cero hasta el infinito, se puede fijar la posicion de todos los puntos del plano en que se hallan los ejes.

25 Todo lo dicho hasta aquí equivale á la solucion general de este problema: *dado un punto en un plano hallar las ecuaciones que le determinan.* Tratemos ahora de resolver el inverso, á saber: *dadas las ecuaciones* $x=a$, $z=b$, *hallar el punto M* (fig. 9) *que determinan.*

Para esto, considerando la primera como si existiese sola, conviene á todos los puntos cuya abscisa es igual con a. Pero si suponemos $AP=a$, todos los puntos de la línea PM prolongada indefinidamente satisfarán á esta condicion; luego *la ecuacion* $x=a$ *pertenece á una recta PM paralela al eje de las ordenadas.*

Del mismo modo, *la ecuacion* $z=b$ *conviene á todos los puntos de una línea QM paralela al eje de las abscisas.*

Si se verifican á un tiempo las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$, la primera corresponderá á un punto de una paralela al eje de las ordenadas, y la segunda á uno de una paralela al eje de las abscisas; luego si el punto que determinan se ha de hallar al mismo tiempo en estas dos rectas, será su punto de interseccion, que es la traduccion literal de la costruccion geométrica que sirvió para encontrar dichas ecuaciones.

26 Como la ecuacion $x=a$ representa una recta paralela al eje de las ordenadas, segun sea a positiva ó negativa, esta recta se hallará á la derecha ó á la izquierda del eje de las ordenadas; y si a es nula, coincidirá con este eje; de manera *que la ecuacion del eje de las ordenadas es* $x=0$.

Igualmente, segun sea b positiva ó negativa, la recta cuya ecuacion es $z=b$ estará por la parte de arriba ó por la de abajo del eje de las abscisas; y si b es nula coincidirá con este eje, cuya ecuacion será $z=0$.

En fin, si se verifican á un tiempo las dos ecuaciones $x=0$, $z=0$,
como la primera conviene al eje de las ordenadas, y la segunda al de las abscisas, el sistema de dichas ecuaciones determinará su punto de interseccion, que es el oríjen A de las coordenadas; luego *las ecuaciones del punto de oríjen* son $x=0$, $z=0$, que es lo mismo que hallámos ántes.

27 Generalizando este resultado se ve que si todos los puntos de una línea recta ó curva, son tales que existe la misma relacion entre las coordenadas de cada uno de ellos, la ecuacion entre x y z que esprese esta relacion, debe caracterizar á esta línea, y por lo mismo se llama *ecuacion de dicha línea.* Recíprocamente, siendo dada la ecuacion, se deduce de ella la naturaleza de la línea; porque si se quieren encontrar aquellos puntos que corresponden á una abscisa determinada, bastará sustituir por x este valor en la ecuacion; esta no contendrá ya mas incógnita que la z, y dará los valores correspondientes de las ordenadas, las cuales se colocarán con relacion al eje de las abscisas, conforme al signo de que estén afectas. Igualmente, siendo dada z, la ecuacion manifestará los valores correspondientes de x.

28 Con estos conocimientos pasemos á resolver algunos problemas; y sea el primero

Dada una recta BM (fig. 10) *hallar su ecuacion.*

Res. y Dem. Tírense primero los ejes rectangu-

lares AX, AZ; despues se medirá la distancia AA′, que se conoce por ser dada la recta y los ejes, y se hará $AA'=b$;
por la misma razon es conocido el ángulo MBA que forma dicha recta con el eje de las abscisas, y cuya tangente trigonométrica representarémos por a; tírense las coordenadas AP, PM, de un punto cualquiera M, y por el punto A′ la A′Q paralela al eje de las abscisas, con lo cual será el ángulo

$$MBA=MA'Q, \text{ y } A'Q=AP=x,$$

$$MQ=MP-PQ=MP-AA'=z-b;$$

ahora, el triángulo rectángulo MA′Q dará (I. § 465)

$$R:\text{tang.}MA'Q::A'Q:QM \text{ ó } 1:a::x:z-b;$$

de donde sale $z=ax+b$ para la ecuacion pedida.

En efecto, esta misma relacion se verificará entre todos los puntos de la recta BM; pues tirando las coordenadas AP′, P′M′, que representarémos por x', z', el triángulo A′Q′M′ dará $1:a::x':z'-b$, de donde sale $z'=ax'+b$, que es la misma de ántes.

29 Esta ecuacion es la mas general de la línea recta, siendo rectangulares los ejes, y contiene dos indeterminadas a, b (que varían de una recta á otra, y son constantes para una misma recta), porque para fijar la posicion de una recta se necesitan dos condiciones; las x y z son variables que van fijando sucesivamente todos los puntos de la recta.

30 Tambien conviene dicha ecuacion á los puntos como el m que están por debajo del eje; para lo cual se dan á x todos los valores que se quieran positivos y negativos, y se van sacando los correspondientes de z. Ademas, segun los valores que se dén á a, la recta tomará otras tantas posiciones respecto del eje de las abscisas.

31 Segun sea la b positiva ó negativa, la recta cortará al eje de las ordenadas mas arriba ó mas abajo del punto de oríjen; y si se supone $b=0$, la recta BM que debe cortar al eje de ordenadas á ninguna distancia del oríjen, pasará por él y será la AN, cuya ecuacion será $z=ax$.

32 Si en la ecuacion $z=ax+b$, se hace $x=0$, dará $z=b$, que es el valor de AA′, y determina la distancia del oríjen á que corta la recta al eje de las ordenadas; y haciendo $z=0$, dará $x=-\frac{b}{a}$, que es la distancia negativa AB á que dicha recta corta al eje de las abscisas.

33 Recíprocamente, si dada la ecuacion $z=ax+b$, se quiere trazar la recta que representa, se principiará por tirar los ejes AX, AZ; despues se hará $x=0$, y se tendrá $z=b$, que determina el punto A′; en seguida se hará $z=0$, y se tendrá $x=-\frac{b}{a}$, que determina el punto B; y tirando una recta por estos dos puntos, será la línea pedida. Tambien se puede determinar dicha línea por cualesquiera otras dos condiciones.

34 Prob. 2.º *Hallar la ecuacion de una recta que pase por dos puntos M, M′* (fig. 11), *cuyas coordenadas se conocen.*

Res. y *Dem.* Bájense desde dichos puntos perpendiculares al eje de las abscisas, con lo que se tendrán las coordenadas de cada uno de estos puntos; llamándolas x', z'; x'', z'', y teniendo presente que la ecuacion de la recta en general es $z=ax+b$, esta deberá quedar satisfecha sustituyendo en ella en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo cual se tendrá

$z'=ax'+b$ (A) para el punto M,

y $z''=ax''+b$ (B) para el M′.

Despejando en estas dos ecuaciones las indeterminadas a y b, y sustituyendo sus valores en la ecuacion $z=ax+b$ (C), se tendrá la de la recta sujeta á las condiciones del problema. Este despejo se hace con mucha sencillez, restando la ecuacion (B) de la (A), lo que dará $z'-z''=a\,(x'-x'')$, y $a=\frac{z'-z''}{x'-x''}$ (D);

restando la (A) de la (C) se tendrá $z-z'=a(x-x')$ (E); y sustituyendo en esta el valor (D) de a se tendrá

$$z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x'),$$

que es la ecuacion de la recta buscada.

35 Prob. 3.° *Hallar la distancia de dos puntos M, M' (fig. 11) cuyas coordenadas se conocen.*

Res. y Dem. Sean x', z', las coordenadas del primero, y x'', z'' las del segundo; concíbase la MQ paralela al eje de las abscisas, y llamemos D la distancia MM' que se pide; hecho esto, el triángulo MQM' rectángulo en Q dará $MM'=\sqrt{MQ^2+M'Q^2}$; pero $MQ=PP'=AP'-AP=x''-x'$, y $M'Q=P'M'-P'Q=P'M'-PM=z''-z'$; luego sustituyendo estos valores, se tendrá

$$D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2},$$

que es lo que se pedia.

Esc. Si el punto M estuviese en el oríjen, sus coordenadas x', z', serian nulas, y la distancia del punto de oríjen A (fig. 12) á un punto cualquiera M' del plano, vendrá espresada por $D=\sqrt{x''^2+z''^2}$; lo que tambien se confirma por el triángulo AP'M' rectángulo en P', que da $AM'=\sqrt{AP'^2+P'M'^2}$.

De los puntos y de la línea recta considerados en el espacio.

36 Hasta ahora hemos considerado los puntos y rectas situados sobre un mismo plano; ahora vamos á considerarlos en el *espacio*. Para dar una idea justa de lo que nos proponemos, se debe saber que por espacio se entiende la *estension indefinida del universo donde se conciben colocados todos los cuerpos*. Para poder fijar la posicion relativa de cualesquiera puntos, se conciben tres planos indefinidos ZAX, XAU, ZAU (fig. 13), que se corten de un modo cualquiera,

que para mayor sencillez los supondrémos rectangulares; y un punto M queda determinado cuando se conocen las distancias respectivas MM′, MM″, MM‴, á cada uno de dichos planos. Estos forman en A un ángulo sólido, semejante al que forman en un rincon de una sala dos paredes de ella y el suelo: y prolongados indefinidamente formarán ocho ángulos sólidos, que comprenderán todos los puntos que se quieran del espacio, así como los cuatro ángulos que forman los ejes rectangulares (23) comprenden todos los puntos situados sobre un plano. Los planos ZAX, XAU, ZAU, á que se refieren los puntos del espacio, se llaman *planos coordenados*; las líneas MM′, MM″, MM‴, ó sus iguales (I. § 375) AR, AQ, AP, se llaman las coordenadas del punto M; las líneas AU, AZ, AX, sobre que se cuentan las coordenadas, se llaman *ejes de las coordenadas*; y el punto A es el oríjen. Las coordenadas que como AR se cuentan en el eje AU, se representan por u, y la línea AU se llama *eje de las u*; las AQ que se cuentan en la AZ, se representan por z, y la AZ es el *eje de las z*; y la línea AX es el *eje de las x*.

El plano ZAX, se llama *plano de las xz*; el XAU, *plano de las xu*; y el ZAU será *el de las zu*.

Los puntos M′, M″, M‴, en que las perpendiculares MM′, &c. encuentran á los planos ZAX, &c. se llaman las *proyecciones* del punto M.

37 Esto entendido, si habiendo medido las tres distancias AP, AQ, AR, se halla $x=a$, $z=b$, $u=c$, estas serán *las ecuaciones del punto M*; y combinando los signos se determinará el ángulo en que se halla dicho punto.

Si se supone $c=o$, se tendrá $x=a$, $z=b$, $u=o$, que determinan un punto M′ en el plano de las xz; $x=a$, $z=o$, $u=c$, determinarán un punto M″ en el plano de las xu; $x=o$, $z=b$, $u=c$, determinan un punto M‴ en el plano de las zu; $x=a$, $z=o$, $u=o$, determinan un punto P en el eje de las x; $x=o$, $z=b$, $u=o$, determinan un punto Q en el eje de las z; $x=o$,

$z=0$, $u=c$, determinan un punto R en el eje de las u; y finalmente, $x=0$, $z=0$, $u=0$, son las ecuaciones del punto de oríjen A.

38 Pasemos ahora á la resolucion de algunas cuestiones.

1.ª *Dada una recta MN* (fig. 14) *en el espacio, hallar las ecuaciones que la determinan.*

Res. y *Dem.* Para resolver este problema advertirémos que así como un punto queda determinado por la interseccion de dos rectas (25), del mismo modo una recta queda determinada por la interseccion de dos planos; ademas se llama *proyeccion* de una recta sobre un plano, la interseccion de este plano con otro (que se llama *plano proyectante*), que le es perpendicular y pasa por dicha recta. Así, la recta M′N′ es la proyeccion de la recta MN en el plano de las xz; la M″N″ es la proyeccion de la misma recta MN sobre el plano de las xu; y la recta MN queda ya determinada por la interseccion de los planos proyectantes MN′, MN″.

Ahora, como la recta es dada, tambien se conocerán sus proyecciones M′N′, M″N″, cuyas ecuaciones son $z=ax+b$, $u=a'x+b'$, en que a, a', espresan las tangentes trigonométricas de los ángulos que dichas proyecciones forman con el eje de las x; y b, b', espresan la distancia á que dichas proyecciones cortan á los ejes de las z y de las u; y como conociendo estas proyecciones y tirando por ellas planos perpendiculares á los coordenados, su interseccion determinará la recta MN en el espacio, resulta que las ecuaciones de esta serán

$$z=ax+b\,,\quad u=a'x+b'.$$

Si la recta pasase por el oríjen, seria $b=0$, $b'=0$, y sus ecuaciones se convertirian en $z=ax$, $u=a'x$.

39 2.ª *Hallar las ecuaciones de una recta que pase por dos puntos dados en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x', z', u', las coordenadas del primer punto; x'', z'', u'', las del segundo; y tendrémos que las ecuaciones $z=ax+b$, $u=a'x+b'$, de una recta en general, deberán quedar satisfechas, si dicha recta ha de pasar por estos puntos, sustituyendo en ellas en vez de las coordenadas generales, las particulares de estos puntos; por lo que se tendrá:

$$\left.\begin{cases} z'=a\,x'+b \\ u'=a'x'+b' \end{cases}\right\}\text{(m) para el primer punto,}$$

$$\text{y}\left.\begin{cases} z''=a\,x''+b \\ u''=a'x''+b' \end{cases}\right\}\text{(n) para el segundo.}$$

Estas cuatro ecuaciones harán conocer las cuatro indeterminadas a, b, a', b'; y sustituyendo sus valores en las generales se tendrán las de la recta pedida. Para hacer el despejo y sustitucion con facilidad, restarémos las (n) de las (m), lo que dará

$$\left.\begin{array}{l} z'-z''=a\,(x'-x'') \\ u'-u''=a'(x'-x'') \end{array}\right\},$$

de donde sale $a=\dfrac{z'-z''}{x'-x''}$, $a'=\dfrac{u'-u''}{x'-x''}$; restando las (m) de las generales se tendrá

$$\left.\begin{cases} z-z'=a\,(x-x') \\ u-u'=a'(x-x') \end{cases}\right\};$$

y sustituyendo en estas los valores de a, a', se tendrá

$$z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x'),\ u-u'=\frac{u'-u''}{x'-x''}(x-x'),$$

que son las ecuaciones de la línea pedida.

40 3.ª *Hallar la distancia de dos puntos M, m (fig. 15), cuyas coordenadas se conocen en el espacio.*

Res. y *Dem.* Sean x'', z'', u'', las coordenadas del primero, y x', z', u', las del segundo; concíbase la mQ paralela al plano de las xz; y llamando D la distancia Mm que se pide, se tendrá

$$D=\sqrt{\mathrm{Q}m^2+\mathrm{MQ}^2}\ \text{(A)};$$

pero $\mathrm{MQ}=\mathrm{MM}'-\mathrm{M}'\mathrm{Q}=\mathrm{MM}'-mm'=u''-u'$ (B); y como $m\mathrm{Q}=m'\mathrm{M}'$, y tirando la $m'\mathrm{Q}'$ paralela al eje de las x, será perpendicular (I.280) á PM', el triángulo rectángulo $m'\mathrm{M}'\mathrm{Q}'$ dará $\mathrm{M}'m'^2=m'\mathrm{Q}'^2+\mathrm{M}'\mathrm{Q}'^2$ (C);

pero $m'Q'=Pp=AP-Ap=x''-x'$,
$M'Q'=M'P-PQ'=M'P-m'p=z''-z'$;
luego la ecuacion (C) se convertirá
en $M'm'^2=(x''-x')^2+(z''-z')^2$;
luego sustituyendo en la ecuacion (A) el valor de $M'm'^2$ en vez de su igual Qm^2, y en vez de MQ su valor (B), la espresion (A) de la distancia pedida se convertirá en $D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2+(u''-u')^2}$.

Esc. Si el punto m estuviese en el oríjen A, sus coordenadas x', z', u', serian nulas, y la distancia del punto de oríjen A (fig. 16) á otro cualquiera M del espacio, vendria espresada por $D=\sqrt{x''^2+z''^2+u''^2}$; lo que tambien se deduce de los triángulos rectángulos AM'M, AM'P.

De las secciones cónicas.

41 Hemos visto (28) que la ecuacion $z=ax+b$, representa en general la naturaleza de la línea recta; por lo cual dicha ecuacion se llama *lineal*, y la recta *línea de primer órden.*

Cuando la relacion entre las coordenadas de una línea viene espresada por una ecuacion de segundo grado, la línea se llama de *segundo órden*; y cuando la ecuacion es de tercer grado, la línea es de *tercer órden* &c. &c. &c.

Las líneas de segundo órden se llaman *secciones cónicas*, porque resultan de cortar un cono (que para mayor sencillez supondrémos recto) por un plano en diferentes posiciones.

42 Supongamos que se tiene el cono recto CAB (fig. 17) prolongado indefinidamente por ambos lados del vértice C, y que se corte por el plano MN paralelo á la base; con lo cual la seccion EFGH será un círculo (I. 416). Si el plano secante se inclinase un poco (fig. 18), la seccion EFGH que resulta, tambien es cerrada, y se llama *elipse*. Si el plano secante fuese paralelo al lado BB' (fig. 19), la seccion EFG

se estenderá al infinito, y se llama *parábola*. Si el plano MN (fig. 20) continuase inclinándose un poco mas, encontraria á la arista BB′ hácia el otro lado B′ del vértice, la seccion EFG, E′F′G′, se estiende indefinidamente por ambos lados del vértice, y se llama *hipérbola*. Si el plano secante pasase por el eje, la seccion estaria representada por las dos rectas AA′, BB′. Si el plano fuese tangente á la superficie del cono, la seccion seria una línea recta AA′. Finalmente, si el plano secante pasase por el vértice C (fig. 17) sin encontrar á las generatrices AA′, BB′, la seccion resultaria ser el mismo punto C. De consiguiente, las secciones cónicas son siete, á saber: el *punto*, *una línea recta*, *dos rectas*, *el círculo*, *la elipse*, *la parábola* y *la hipérbola*.

43 Veamos, pues, como podemos sacar una ecuacion que convenga á todas en general. Para esto sea el cono recto CBD (fig. 21) en que se haya dado la seccion AMO por un plano cualquiera; concíbase por el eje CK del cono un plano CDB perpendicular al plano secante (el cual tambien lo será á la base del cono (I. 378)); cuya interseccion AO se llama *eje* de la seccion cónica. Por un punto cualquiera p de este eje, concíbase un plano paralelo á la base DB; y tendrémos que la interseccion de este plano con el cono será el círculo GMF, y su interseccion con la seccion AMO será la recta pM, la cual es perpendicular (I. 378 cor.) al plano CDB; y por consiguiente lo es á las dos rectas FG y AO, que pasan por su pie.

Por ser dado el cono, se conocerá el ángulo OCA que forman sus dos lados, que representarémos por β; la inclinacion CAO del plano secante tambien es conocida porque está á nuestro arbitrio, y la llamarémos α; igualmente es dada la distancia CA del vértice C del cono al punto A de la seccion, que tambien se llama *vértice* de la seccion, y dicha distancia CA la llamarémos c. Ahora, considerando el oríjen de las coordenadas en el vértice A de la seccion, las líneas Ap, pM, serán las coordenadas del punto M, y todo está reducido á encontrar una relacion entre Ap y pM, ó entre x y z y las cantidades α, β y c que son conocidas. Para conseguir esto se tiene que la Mp perpendicular al diámetro FG dará (I. § 333)

$$pM^2 = Fp \times pG \text{ ó } z^2 = Fp \times pG;$$

así, sólo falta determinar las espresiones algebráicas de Fp, pG, en valores de las partes Op, Ap, del eje de la seccion, y de los demas datos conocidos. Para esto, en el triángulo AFp, se conoce el ángulo en F que es complemento de hCF$=\frac{1}{2}\beta$ en el triángulo FCh; tambien se conoce el ángulo en A$=\pi-\alpha$; luego (I. 468) tendrémos

$$\text{sen.A}=\text{sen.}(\pi-\alpha)=(\text{I.§ 459 cor.})\ \text{sen.}\alpha:\text{sen.F}=\cos.\tfrac{1}{2}\beta::$$

$$Fp:Ap=x, \text{ de donde sale } Fp=x\times\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\ (A).$$

En el triángulo pOG se conoce el ángulo en

$$O=\pi-\alpha-\beta,$$

el ángulo en $G=\pi-CGF=\pi-(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\beta)=\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\beta$, y por la misma razon nos dará

$$\text{sen.}(\pi-\alpha-\beta)=\text{sen.}(\alpha+\beta):pG::\text{sen.}(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\beta)=$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}\beta:Op=AO-x,$$

que da $pG=\dfrac{\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\times(AO-x)$ (B);

del triángulo ACO se saca

$$\text{sen.O}=\text{sen.}(\alpha+\beta):AC=c::\text{sen.C}=\text{sen.}\beta:AO=\frac{c\times\text{sen.}\beta}{\text{se.}(\alpha+\beta)};$$

y sustituyendo en (B) se tendrá

$$pG=\frac{\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{c\times\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}-x\right)\ (C).$$

Luego sustituyendo en la ecuacion $z^2=Fp\times pG$, los valores (A), (C), resultará

$$z^2=\frac{x\text{sen.}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\times\frac{\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\left(\frac{c\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}-x\right)=$$

$$\frac{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\left(\frac{c\,\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}x-x^2\right)\ (\text{M});$$

la cual, reduciendo en el paréntesis el entero á la especie del quebrado, y suprimiendo el factor comun sen.$(\alpha+\beta)$, se puede poner tambien bájo esta forma:

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(cx\,\text{sen.}\beta-x^2\,\text{sen.}(\alpha+\beta))\ (\text{M}'),$$

que será la ecuacion pedida.

44 Para obtener todas las secciones del cono, basta ir dando al plano secante diferentes posiciones, ó lo que es lo mismo, hacer girar la recta AO al rededor del punto A; y dando á las indeterminadas sen.α, c, cos.$\frac{1}{2}\beta$ &c. los valores respectivos á estas posiciones, la ecuacion (M) irá correspondiendo á cada seccion.

45 1.° Supongamos en primer lugar el plano secante paralelo á la base, en cuyo caso la seccion AMO es (42) un círculo; en este caso (I. 289) será $2\alpha+\beta=\pi$ (porque el triángulo CAO será isósceles), lo que dará

$$\alpha+\beta=\pi-\alpha,$$

y sen.$(\alpha+\beta)$=sen.$(\pi-\alpha)$= (I. § 459 cor.) sen.α;
tambien será $\beta=\pi-2\alpha$, y $\frac{1}{2}\beta=\frac{1}{2}\pi-\alpha$,
lo que da sen.β=sen.2α= (I. § 460 cor.) 2sen.αcos.α,
y cos.$\frac{1}{2}\beta$=cos.$(\frac{1}{2}\pi-\alpha)$=sen.α, ó cos.$\frac{1}{2}\beta^2$=sen.α^2;
y sustituyendo en (M) se tendrá

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha\,\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}\alpha^2}\left(\frac{c\times 2\,\text{sen.}\alpha\cos.\alpha}{\text{sen.}\alpha}x-x^2\right)=$$

$2cx\cos.\alpha-x^2$ (N) para la ecuacion del círculo.

46 2.° Sea ahora $\alpha+\beta<\pi$; y como esto es lo mismo que decir que el ángulo que forma la generatriz CB con la CA, junto con el CAO que forma la AO ó el plano secante con la misma CA, valen ménos que dos rectos, dichas líneas CO, AO (I. § 287) se encontrarán, ó lo que es lo mismo, el plano secante encontrará á las generatrices del cono á un mismo lado del vértice; en este caso la seccion es una curva cerrada, que se llama *elipse*, cuya ecuacion es la misma (M),

que es la que hemos deducido en este supuesto.

47 3.º Si fuese $\alpha+\beta=\pi$, las líneas CO, AO no se encontrarian (I. 283), ó lo que es lo mismo, el plano secante no encontraria jamas á la generatriz BC por serle paralela; la curva EFG (fig. 19) se estiende al infinito, y se llama *parábola*; en este caso será

$\text{sen.}(\alpha+\beta)=0$, $\text{sen.}\alpha=\text{sen.}(\pi-\beta)=$ (I. § 459 cor.)

$\text{sen.}\beta=$ (I. § 460 cor.) $2\text{sen.}\frac{1}{2}\beta\cos.\frac{1}{2}\beta$;

y sustituyendo en (M′), la ecuacion para la parábola será

$$z^2=\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}\beta\cos.\frac{1}{2}\beta}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2.}\times cx\times 2\text{sen.}\frac{1}{2}\beta\cos.\frac{1}{2}\beta=4cx\text{sen.}\frac{1}{2}\beta^2 \text{(O)}.$$

48 4.º Cuando $\alpha+\beta>\pi$, el plano secante encuentra á la superficie cónica á uno y otro lado del cúspide del cono; la curva (fig. 22) tiene dos ramas MAN, LO′Q, de curvatura opuesta que se estienden al infinito, y se llama *hipérbola*. Para que la ecuacion (M) convenga á esta curva, basta observar que la línea AO (fig. 21) ahora es AO′, y los triángulos que ahora hemos de considerar son los AO′C, O′Gp, ApF; el primero nos dará el ángulo en

$$O'=\pi-CAO'-ACO'=\pi-(\pi-\alpha)-(\pi-\beta)=$$
$$\pi-\pi+\alpha-\pi+\beta=-\pi+\alpha+\beta=-(\pi-\alpha-\beta);$$

de consiguiente (I. 456 y 459 cor.) se tendrá

$$\text{sen.}O'=\text{sen.}-(\pi-\alpha-\beta)=-\text{sen.}(\alpha+\beta);$$

y como todo lo demas es lo mismo, resulta que sólo con mudar el signo á $\text{sen.}(\alpha+\beta)$, ó lo que viene á ser lo mismo, al término $-x^2$ que hay dentro del paréntesis, la ecuacion será

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\left(\frac{c\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}x+x^2\right) \text{(P)}.$$

49 Las alteraciones de β y c, ó lo que es lo mismo, el hacer variar las dimensiones del cono y la distancia AC (fig. 21), no causan ninguna alteracion en todas las posiciones del plano que acabamos de considerar.

Nunca se puede suponer $\beta=0$, ó $=\pi$, porque en este caso no habria cono. Si se hace $c=0$, el plano secante pasa por el vértice; entónces la interseccion es un *punto* si $\alpha+\beta<\pi$; una recta si $\alpha+\beta=\pi$, en cuyo caso el plano secante es tangente del cono; y dos rectas si $\alpha+\beta>\pi$.

Luego si en la ecuacion (M) se hace $c=0$, y sucesivamente sen.$(\alpha+\beta)$ positivo, nulo y negativo, se tendrá

$$z^2=-\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}x^2 \text{ (Q)}; \; z^2=0, \text{ ó } z=0 \text{ (R)},$$

$$z^2=\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}\beta^2}x^2 \text{ (S)}.$$

La (Q) no puede quedar satisfecha sino en el caso de $x=0$, que da $z=0$; por consiguiente sólo conviene á un punto (26) que es el vértice del cono; la (R), que para cualquier valor de x da $z=0$, es la ecuacion de una recta que es el mismo eje de las x; finalmente, la (S) que se puede poner bájo la forma $z^2=a^2x^2$, que da $z=\pm ax$, representa dos rectas.

Luego en general, cualquiera que sea el cono y la posicion del plano secante, la ecuacion (M) representa las siete secciones cónicas que enunciámos al principio; si $c=0$, se tienen las tres secciones que pasan por el vértice; y cuando c tiene un valor cualquiera, representa un *círculo*, una *elipse*, una *parábola*, ó una *hipérbola*, segun que el coeficiente de x^2 es la unidad negativa, es negativo teniendo un valor cualquiera, es nulo ó es positivo.

Pasemos ahora á considerar cada una de estas curvas, y á deducir de las ecuaciones que las representan sus principales propiedades.

Del círculo.

50 Cortando un cono recto con un plano paralelo á la base, sabemos (42) que la seccion que resulta es un círculo, y hemos deducido (45) para su ecuacion $z^2=2cx\cos.\alpha-x^2$.

Haciendo $c\cos.\alpha = a$, dicha ecuacion se convertirá en $z^2 = 2ax - x^2$ (A).

Para obtener los puntos en que corta al eje de las x, harémos $z=0$ que da $x=0$, y $x=2a$; por consiguiente le corta en el oríjen B (fig. 23), y en B′ á una distancia del oríjen espresada por $2a$. Si hacemos $x=0$, resulta $z=0$; por consiguiente la curva sólo corta al eje de las ordenadas en el punto B.

Esta misma ecuacion no puede subsistir sino miéntras la x es positiva y menor que $2a$; lo que prueba que la curva sólo se estiende entre los puntos B, B′, y que es reentrante, que es una de las propiedades del círculo.

51 Si en la ecuacion $z^2 = 2ax - x^2 = (2a - x)x$, sustituimos valores espresados por líneas, á saber, $z = \text{MP}$, $x = \text{BP}$ y $\text{BB}' = 2a$, será

$$\text{PM}^2 = \text{BP} \times (\text{BB}' - \text{BP}) = \text{BP} \times \text{B}'\text{P},$$

que da $\text{BP} : \text{PM} :: \text{PM} : \text{B}'\text{P}$;

luego la curva es tal, que la *perpendicular bajada desde un punto* M *al eje* (ó diámetro), *es media proporcional entre los segmentos del diámetro*; que es otra propiedad del círculo (I. 333).

52 Si se tiran las cuerdas BM, B′M, los triángulos rectángulos BPM, B′PM, darán

$$\text{BM}^2 = \text{BP}^2 + \text{PM}^2,\ \text{B}'\text{M}^2 = \text{B}'\text{P}^2 + \text{PM}^2;$$

que sumándolas darán

$$\text{BM}^2 + \text{B}'\text{M}^2 = \text{BP}^2 + \text{PM}^2 + \text{B}'\text{P}^2 + \text{PM}^2 = \text{BP}^2 + 2\text{PM}^2 + \text{B}'\text{P}^2;$$

y como $\text{PM}^2 = \text{BP} \times \text{B}'\text{P}$, será

$$\text{BM}^2 + \text{B}'\text{M}^2 = \text{BP}^2 + 2\text{BP} \times \text{B}'\text{P} + \text{B}'\text{P}^2 = (\text{BP} + \text{B}'\text{P})^2 = \text{BB}'^2;$$

es decir, que el triángulo BMB′ es tal que el cuadrado de un lado es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos; luego el ángulo en M (I. 335 esc. 2.°) es recto, que es otra propiedad del círculo demostrada (I. 304 cor. 3.°).

53 Si trasladamos el oríjen á A, medio de la línea BB′, la nueva abscisa AP que llamarémos x', será $x' = \text{BP} - \text{AB} = x - a$, que da $x = a + x'$;

luego sustituyendo $a+x'$ en vez de x en la ecuacion (A), se tendrá $z^2=2a(a+x')-(a+x')^2=$

$$2a^2+2ax'-a^2-2ax'-x'^2=a^2-x'^2,$$

que es la ecuacion de la curva considerando el oríjen en A.

Quitando el acento á la x, y trasladando, será $a^2=z^2+x^2$, que da $a=\sqrt{z^2+x^2}$;

que espresa (35 esc.) la distancia de un punto cualquiera del plano al oríjen A; y como esta distancia a es constante, resulta que *todos los puntos de la curva están equidistantes de un mismo punto*, *que es la propiedad esencial de la circunferencia del círculo.*

54 Hasta aquí hemos considerado el círculo como seccion cónica, y la ecuacion general de estas nos ha dado sus principales propiedades; ahora vamos á resolver la cuestion inversa, á saber, *dado el círculo deducir su ecuacion.*

Sea mMm' (fig. 24) un círculo cuyo centro está en C; tírense arbitrariamente los ejes AX, AZ de las coordenadas; en primer lugar fijarémos la posicion del centro, llamando a y b sus coordenadas AE, EC; desde un punto cualquiera M de la curva, se bajará la ordenada $PM=z$, con lo que su abscisa será $AP=x$; y tirando el radio $CM=r$, correspondiente al mismo punto, el triángulo rectángulo CGM, dará $CM^2=CG^2+GM^2$;

pero $CM=r$, $CG=CF-FG=AE-AP=a-x$;

$$GM=MP-PG=PM-EC=z-b;$$

luego sustituyendo estos valores, se tendrá

$r^2=(a-x)^2+(z-b)^2=a^2-2ax+x^2+z^2-2bz+b^2$ (A).

55 Esta ecuacion es la mas general del círculo. Si se supone $b=0$, esto es, que el eje de las abscisas se ha trasladado á la Fm que pasa por el centro, la ecuacion será en este caso $r^2=a^2-2ax+x^2+z^2$ (B).

Si se hace $a=0$, ó lo que es lo mismo, si se traslada el eje de las ordenadas á la EC que pasa por el centro, la ecuacion del círculo será

$$r^2=x^2+z^2-2bz+b^2 \text{ (C)}.$$

Si en la ecuacion (B) se hace $a=r$, esto es, que el eje de ordenadas sea la línea mn, la ecuacion será $r^2=r^2-2rx+x^2+z^2$, que da $z^2=2rx-x^2$ (D), que es la misma que obtuvimos ántes (50).

Si en la misma ecuacion (B) se hace $a=0$, ó se supone que el oríjen de las coordenadas sea el centro, la ecuacion será $r^2=x^2+z^2$ ó $z^2=r^2-x^2$ (E), que es tambien la misma de ántes (53).

56 Cualquiera de las ecuaciones del círculo que hemos sacado, es suficiente para costruir esta curva por puntos.

Así, tomarémos por ejemplo la ecuacion (D) en que observamos que hay una cantidad constante $2r$, y que por consiguiente variando este valor variará tambien la curva, es decir, será mayor, menor &c.; por lo que la determinarémos á arbitrio, suponiendo $2r=AB$ (fig. 25); y concibiéndola dividida en un número cualquiera de partes, tal como 10, representando por 1 el valor de cada una de estas partes, se convertirá la ecuacion en $z^2=10x-x^2$, que da $z=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Supongamos ahora la abscisa $x=0$, y tendrémos $z=\pm 0$, que indica que el punto de oríjen A ha de ser un punto de la curva; suponiendo la abscisa $x=1$, esto es, igual con la distancia que hay desde el oríjen hasta el punto 1, será

$$z=\pm\sqrt{10\times1-1^2}=\pm\sqrt{10-1}=\pm\sqrt{9}=\pm3;$$

que dice que en el punto 1 se levante una perpendicular ú ordenada 1M, igual á tres veces la distancia A1; y como á una misma abscisa corresponde otro valor igual negativo de la ordenada, tambien se bajará desde el mismo punto 1 una perpendicular igual con 3, tal como $1m$.

Suponiendo $x=2$, resulta

$$z=\pm\sqrt{20-4}=\pm\sqrt{16}=\pm4;$$

por lo que tomando dos ordenadas, la una positiva y la otra negativa, iguales con 4, los puntos M′, m', corresponderán á la curva.

Haciendo $x=3$ resulta

$$z=\pm\sqrt{30-9}=\pm\sqrt{21}=\pm 4,5;$$

que tomando ordenadas de esta magnitud, se tendrán los puntos M'', m''.

Haciendo $x=4$, resulta

$$z=\pm\sqrt{40-16}=\pm\sqrt{24}=\pm 4,8;$$

que tomando las ordenadas $4M'''$, $4m'''$, de esta magnitud, los puntos M''', m''', corresponderán á la curva. Suponiendo $x=5$, será $z=\pm\sqrt{50-25}=\pm\sqrt{25}=\pm 5$; por lo que tomando las ordenadas de esta magnitud, se tendrán los puntos M^{IV}, m^{IV}.

Haciendo $x=6, 7, 8, 9, 10$, resultan para z los mismos valores que ántes se obtuvieron para $x=4, 3, 2, 1, 0$.

Haciendo $x=11$, resulta $z=\pm\sqrt{110-121}=\pm\sqrt{-11}$; valor imaginario, que indica que mas allá del punto B no hay curva.

Esc. Al trazar una curva por puntos, no sólo se han de dar á la abscisa valores positivos, hasta que resulten ordenadas imaginarias, ó se vea que crecen indefinidamente, sino que tambien se le han de dar todos los valores negativos que puedan satisfacer á su ecuacion. Así, ahora supondrémos $x=-1$, lo que da

$$z=\pm\sqrt{-10-1}=\pm\sqrt{-11};$$

valor tambien imaginario, el cual indica que no hay curva mas á la izquierda del punto de oríjen A; por lo que haciendo pasar ahora una curva por los puntos M, M', M'', &c. m, m', m'', *&c.* esta será la circunferencia del círculo, y quedará trazada con toda exactitud.

De la elipse.

57 Cortando un cono, cuyo ángulo 6 de las generatrices, junto con la inclinacion del plano secante, sean menores que π, hemos obtenido una curva cerrada que hemos llamado *elipse*, cuya ecuacion es

$$z^2 = \frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\left(\frac{c\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}x - x^2\right);$$

y como (§ 43) $\frac{c\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}$ es igual al eje AO (fig. 21), ó al BB′ (fig. 26), representando este por $2a$, la ecuacion de la elipse será $z^2 = \frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax - x^2) =$

$$\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2} \times x(2a - x) \text{ (A).}$$

Donde vemos que la x no puede ser negativa, ni mayor que $2a$; porque entónces seria la z imaginaria.

Para obtener los puntos en que la curva corta al eje de las ordenadas, se hará $x=0$, que da $z=0$; por consiguiente sólo la corta en el oríjen B de las coordenadas.

Haciendo $z=0$, resulta $x=0$, $x=2a$; que manifiesta que la curva corta al eje de las abscisas en el oríjen B, y en el punto B′, distante del oríjen la magnitud $2a$.

Si se hace la x negativa ó $>2a$, la z será imaginaria; lo que manifiesta que la curva está comprendida entre los puntos B, B′.

58 Sacando el valor general de z, será

$$z = \pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax - x^2)};$$

que manifiesta, que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales y de signo contrario; ó lo que es lo mismo, que la elipse se estiende igualmente hácia uno y otro lado del eje de las abscisas.

El primer factor es constante, y el otro $2ax - x^2$ va creciendo al mismo tiempo que lo hace x, hasta que esta tiene un valor $=a$: y para valores mayores que a, va disminuyendo $2ax - x^2$; luego la ordenada z va creciendo hasta $x=a$, y despues va disminuyendo hasta $x=2a$, que da $z=0$.

59 Hagamos $x=BA=a$, y se tendrá

$$z=\pm\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}=\pm CA=\pm b,$$

representando por b la mayor ordenada CA de la elipse; y elevando al cuadrado, será

$$b^2=\frac{a^2}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\times\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta),\text{ que da}$$

$$\frac{b^2}{a^2}=\frac{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2};$$

luego sustituyendo en vez de este segundo miembro el primero en la ecuacion (57, A) de la elipse, se convertirá en $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$ (M).

60 En general, hemos dado el nombre de eje á la línea $BB'=2a$; pero en la elipse la BB' se llama *primer eje* ó *eje mayor*, la línea CC' se llama el *segundo eje* ó *eje menor*; y el punto A en que se cruzan los ejes, se llama *centro* de la elipse.

Si trasladamos el oríjen á A, y representamos por x' la abscisa $AP=BP-AB=x-a$, que da $x=a+x'$, sustituyendo este valor en la ecuacion (M), se tendrá

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2a(a+x')-(a+x')^2)=$$

$$\frac{b^2}{a^2}(2a^2+2ax'-a^2-2ax'-x'^2)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2),$$

ó suprimiendo el acento, será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ (N),

que es la ecuacion de la elipse referida á sus ejes y á su centro.

61 Se llama *parámetro* de un eje á una tercera proporcional á dicho eje y al otro; así, llamando p el

parámetro del eje mayor, será $2a:2b::2b:p=\frac{2b^2}{a}$;

que dividiendo por $2a$ sale $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$,

cuyo valor sustituido en las ecuaciones (M), (N), las

convertirá en $z^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2)$(P), $z^2=\frac{p}{2a}(a^2-x^2)$(Q),

que *son las ecuaciones de la elipse con relacion al parámetro.*

62 Si trasladamos el oríjen al punto C, cuyas coordenadas respecto del oríjen B son $x'=a$, $z'=b$, y llamamos Z á las nuevas abscisas contadas en el eje CC′, y X á las ordenadas, que ahora se contarán en el eje BB′ (por ser paralelo al que se podria tirar por C), tendrémos que la abscisa Z=CQ, correspondiente al punto M, será igual á CA—AQ=CA—PM, ó $Z=b-z$, que da $z=b-Z$; y la nueva ordenada será

X=QM=AP=BP—AB$=x-a$, que da $x=X+a$; sustituyendo estos valores en la ecuacion (M) de la

curva, y despejando X^2, se tendrá $X^2=\frac{a^2}{b^2}(2bZ-Z^2)$,

y si ahora mudamos la X en z, y la Z en x, la ecua-

cion anterior se convertirá en $z^2=\frac{a^2}{b^2}(2bx-x^2)$,

que es la ecuacion de la curva referida al vértice C; pero cuando se haga uso de ella, se deberá tener presente que se han mudado los ejes; esto es, que el eje mayor que ántes era eje de abscisas, ahora lo es de ordenadas; y el segundo, que era eje de ordenadas, ahora es el de las abscisas.

63 Si consideramos dos puntos M, M′, cuyas coordenadas AP, PM, AP′, P′M′, sean x, z, x', z',

tendrémos $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, $z'^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2)$;

y formando proporcion con estas dos ecuaciones será

$$z^2 : z'^2 :: \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) : \frac{b^2}{a^2}(a^2-x'^2) :: a^2-x^2 : a^2-x'^2 ::$$

$$(a+x)(a-x) : (a+x')(a-x') :: BP \times B'P : BP' \times B'P';$$

luego los *cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las abscisas*, entendiéndose en general por abscisas las partes en que queda dividido el eje por las ordenadas. Así, la abscisa del punto M, considerando el oríjen en A, es la AP; considerando el oríjen en B es BP, &c. y las abscisas del mismo punto son BP, B'P.

64 Toda línea mAM tirada por el centro y que termina con sus estremos en el perímetro de la elipse, se llama *diámetro*, y *todos los diámetros están divididos en el centro en dos partes iguales*.

Porque si á derecha é izquierda del punto de oríjen A, se toman las abscisas AP, Ap iguales, la ecuacion de la curva dará iguales las ordenadas MP, mp; luego si unimos los puntos M, m con el centro A, los triángulos Amp, AMP, serán iguales (I. 260), y darán $mA=MA$, y los ángulos $mAp=MAP$; y añadiendo MAp, será $mAp+pAM=MAP+pAM=\pi$; por lo que (I. 256) las dos rectas mA, MA, no formarán sino una sola y misma línea, la cual será un diámetro, y quedará dividido en dos partes iguales en A.

65 Si desde el centro A (fig. 27) con un radio $AB=a$, se describe una circunferencia de círculo, y consideramos que la abscisa x es comun para la elipse y el círculo, la ecuacion de este será (§ 53) $Z^2=a^2-x^2$;

y la de la elipse será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$;

y poniendo en vez de a^2-x^2 su valor Z^2, se tendrá

en general $z=\frac{b}{a}\times Z$;

y segun sea $b <$ ó $> a$, así será $z <$ ó $> Z$;
por consiguiente si desde el centro de la elipse y con

los semiejes, se describen dos circunferencias de círculo, la elipse comprenderá á la mas pequeña, y estará comprendida por la mayor.

De aquí se sigue que *el primer eje de la elipse es mayor que todos los diámetros, y el segundo menor.*

66 Si en virtud de la relacion precedente, se quieren encontrar las coordenadas de la elipse, cuando se conocen las del círculo descrito sobre uno de sus ejes, basta disminuir ó aumentar estas últimas en la relacion de b á a. Esta propiedad nos va á servir para *describir una elipse por puntos, cuando se conocen los dos ejes.*

Desde el punto A como centro, y con los radios AB, AC, iguales á los dos semiejes a y b, se describirán dos circunferencias de círculo; despues se tirará un radio cualquiera ANM; se bajará desde el punto M una perpendicular MP sobre el eje BB′; y tirando despues NQ paralela á AB′, el punto Q lo será de la elipse; porque los triángulos semejantes AMP,

$$\text{NMQ, dan } AM:AN::MP:QP=\frac{AN}{AM}\times MP=\frac{b}{a}\times MP.$$

Haciendo lo mismo para cada punto, se tendrá (65) costruida la elipse.

67 Se llaman *focus* de la elipse á los puntos F, F′ (fig. 28) situados sobre el eje BB′, y tales que la doble ordenada que corresponde á ellos, es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$ del eje mayor.

Para determinarlos, en la ecuacion de la elipse

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2), \text{ se hará } z=\frac{b^2}{a},$$

lo que dará $\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, ó dividiendo por $\frac{b^2}{a^2}$, será $b^2=a^2-x^2$, de donde $x^2=a^2-b^2$; y representando por c el valor conocido que resulta para x, tendrémos $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm c$.

Para costruir estos valores de x, desde el estremo del eje menor como centro, con un radio igual al semieje mayor (16 esc. 2.°) se describirá una circunferencia de círculo, y los puntos F, F′, en que encuentre al eje BB′, serán los focus; porque el triángulo ACF da $AF=\sqrt{CF^2-CA^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.

68 La distancia AF del centro á los focus, que hemos señalado por c, se llama *escentricidad* de la elipse, y las dos rectas FM, F′M, que desde un punto cualquiera M se tiran á los focus, se llaman *radios vectores.*

Para hallar los valores de estos, considerarémos los triángulos rectángulos FPM, F′PM, que dan, el primero $FM^2=PM^2+FP^2=z^2+(c+x)^2$; poniendo en vez de z^2 su valor (N, 60), y a^2-b^2 en vez de c^2, reduciendo el entero á la especie del quebrado y simplificando, tendrémos

$$FM^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+(c^2=a^2-b^2)+2cx+x^2=$$

$$\frac{a^2b^2-b^2x^2+a^4-a^2b^2+2a^2cx+a^2x^2}{a^2}=$$

$$\frac{a^4+2a^2cx+((a^2-b^2)=c^2)x^2}{a^2}=\left(\frac{a^2+cx}{a}\right)^2$$

lo que da $FM=a+\frac{cx}{a}$;

del mismo modo, considerando el segundo, se halla

$$F'M=a-\frac{cx}{a}.$$

Sumando estas dos espresiones resulta $FM+F'M=2a$, cuya ecuacion nos dice que *la suma de los radios vectores tirados á un mismo punto de la elipse es igual con el eje mayor.*

69 De aquí resulta un nuevo método para describir una elipse, cuando se conoce su eje mayor BB′ y la posicion de los focus F, F′; para esto, se tomará desde el punto B una longitud cualquiera BK sobre el eje BB′; desde el punto F como centro con un radio FM=BK, se describirá un arco de círculo; desde el punto F′ como centro y con un radio F′M=B′K, se describirá otro arco de círculo; su punto de interseccion M corresponderá á la elipse; y procediendo del mismo modo se tendrán los puntos que se deseen.

Esc. Es ventajoso describir los arcos de círculo á un mismo tiempo por la parte de arriba y por la de abajo del eje; pues por este medio se encuentran á cada operacion dos puntos de la elipse.

70 Si se dan conocidos los dos ejes, se determinan los focus (67), y despues se procede á la costruccion; pero si la elipse ha de ser muy grande, *se fijan en los focus los estremos de un hilo, igual en longitud al eje mayor, y estirándole bien por medio de un lapicero, se hace girar este, y va describiendo la elipse por un movimiento continuo.*

Esc. Recíprocamente, partiendo de la propiedad de ser la suma de los radios vectores igual al eje mayor, se puede deducir la ecuacion de la elipse y todas sus propiedades.

71 Ya se sabe (I. 297 y 441) lo que en general se llama *tangente*; pero en las secciones cónicas se llama en particular tangente á la parte MT de la tangente tT, comprendida entre el punto de contacto M, y el punto T en que corta al eje de las abscisas; y se llama *subtangente* á la parte PT del eje de las abscisas, comprendida entre el punto T y el P, pie de la ordenada correspondiente al punto de contacto. Se llama *normal*, á la línea MN perpendicular á la tangente en el punto de contacto; y *subnormal*, es la parte PN interceptada por la normal y la ordenada PM del punto de contacto. De dos diámetros Mm, $M'm'$ (fig. 29) se dice que son *conjugados*, cuando

el uno $M'm'$, es paralelo á la tangente que pasa por el estremo del otro.

Esc. Se puede deducir una ecuacion de la curva referida á sus diámetros; y tambien se podrian hallar espresiones analíticas de las líneas que hemos dicho ántes; pero esto último lo dejamos para otro lugar.

De la parábola.

72 Cortando un cono recto con un plano paralelo á una de las generatrices, ha resultado una curva infinita, que hemos llamado *parábola*, y hemos obtenido para su ecuacion $z^2=4cx\times\text{sen.}\frac{1}{2}\beta^2$; y haciendo la cantidad constante $4c\text{sen.}\frac{1}{2}\beta^2=p$, la ecuacion de la parábola será $z^2=px$.

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, hagamos $z=0$ y resultará $x=0$; es decir, que esto tiene lugar en un solo punto, que es el oríjen de las coordenadas.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que corte al eje de las z; y como esta suposicion da $z=0$, manifiesta que esto no se verifica sino en el oríjen. Así, la curva no tiene mas de un punto comun con el eje de las x y de las z, que es el oríjen de las coordenadas.

73 Resolviendo su ecuacion con relacion á z, sale

$$z=\pm\sqrt{px}.$$

Estos dos valores iguales y de signo contrario, manifiestan que *la curva se estiende igualmente por la parte superior é inferior del eje de las* x.

74 Para todos los valores negativos de x resulta z imaginaria, pues que p es una cantidad positiva; luego la curva no se estiende por el lado de las abscisas negativas, y está limitada en este sentido por el eje de las z.

Y como los valores de z son tanto mayores cuanto mayor es x, la curva se estiende indefinidamente por este lado del eje de las x, y tiene la forma mAM que representa la (fig. 30).

75 Como por la ecuacion precedente, la relacion del cuadrado de la ordenada á la abscisa es la misma para todos los puntos de la curva, respecto de otras coordenadas X, Z, se tendrá $Z^2=pX$, lo que da $Z^2:z^2::pX:px::X:x$; cuya proporcion manifiesta que *en la parábola los cuadrados de las ordenadas son entre sí como las abscisas correspondientes.*

La línea indefinida AX se llama el *eje* de la parábola, y A es su vértice.

76 Para describir la parábola, se tomará sobre el eje de las x, partiendo del oríjen, una distancia AB, igual con p, que se llama *parámetro* de la parábola. Despues haciendo centro en un punto cualquiera C, tomado en el mismo eje, y con un radio igual á CB, se describirá una circunferencia de círculo. En el punto P estremo de su diámetro se elevará la perpendicular PM, y en ella se tomará una parte MP=QA, con lo que se tendrá el punto M, que corresponderá á la parábola.

En efecto, por esta costruccion se tiene (I. § 333) $AQ^2=AB\times AP$, de donde $PM^2=AQ^2=p\times AP=px$; tomando la $Pm=PM$, se tendrá el punto m por la parte inferior; y del mismo modo se costruirán cuantos puntos se necesiten. Esta parábola se suele llamar la *vulgar* ó *apoloniana.*

77 Se llama *focus* de la parábola á un punto F (fig. 31) situado sobre el eje de las x, tal que la doble ordenada que le corresponde, es igual con el parámetro de la curva.

Para determinarle se hará $z=\frac{1}{2}p$ en la ecuacion de la parábola, lo que da $\frac{1}{4}p^2=px$, de donde $x=\frac{1}{4}p$; que espresa la abscisa pedida. Así, en la parábola *la distancia del focus al vértice A de la curva, es igual á la cuarta parte del parámetro.*

78 Si se busca la distancia FM de un punto cualquiera de la parábola al focus, se tendrá

$$FM^2=PM^2+FP^2=z^2+(x-\tfrac{1}{4}p)^2=$$
$$px+x^2-\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2=x^2+\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2=(x+\tfrac{1}{4}p)^2;$$

que estrayendo la raiz cuadrada sale $FM=x+\frac{1}{4}p$.

Luego la distancia de un punto cualquiera de la parábola al focus, es igual á la abscisa de este punto, mas la distancia del focus al vértice de la curva. Por consiguiente, si se toma á la izquierda de A una magnitud $BA=\frac{1}{4}p$, y por B se concibe la BL perpendicular al eje AX, como toda línea ML tirada desde un punto cualquiera de la curva, será igual con su paralela $PB=AP+BA=x+\frac{1}{4}p$, tendrémos que los puntos de la parábola están á igual distancia del focus que de una línea BL tirada perpendicularmente á su eje, y á una distancia del vértice igual $\frac{1}{4}p$, cuya línea se llama *directriz*.

79 De aquí resulta un medio de trazar la parábola cuando es conocido el parámetro p. Para esto, de una y otra parte del punto A se tomarán en el eje AX las longitudes $AB=AF=\frac{1}{4}p$, y el punto F será su focus. Por un punto cualquiera P del eje se levantará una perpendicular indefinida PM; despues tomando la distancia BP, desde el punto F como centro y con esta distancia por radio, se describirá un arco de círculo que corte á la recta PM en dos puntos M, m, los cuales corresponderán á la parábola. Porque de este modo resulta $FM=AP+AB=x+\frac{1}{4}p$.

80 Tambien se puede en virtud de la misma propiedad describir la parábola por un movimiento continuo.

Para esto se ajusta á la directriz BL una escuadra móvil EQR (fig. 32); despues tomando un hilo de una longitud igual á QE, se fijará uno de sus estremos en E, y el otro en el focus F de la parábola; se estenderá despues el hilo por medio de un lapicero que se tendrá siempre bien unido al canto QE; y haciendo andar la escuadra á lo largo de la directriz, el lapicero girará á lo largo de QE y describirá la parábola.

En efecto, como el hilo es igual con la longitud de la regla QE, se tendrá $FM+ME=QM+ME$, que quitando la parte comun ME, da $QM=MF$.

81 En la parábola, como en la elipse, se llama

tangente á la MT (fig. 33), *subtangente* á la PT, *normal* á la MN, *subnormal* á la PN, y *diámetro* es toda línea ME paralela al eje de la parábola.

De la hipérbola.

82 Cortando un cono, cuyo ángulo β de las generatrices, junto con la inclinacion α del plano secante, sean mayores que π, hemos obtenido una curva ilimitada por ambos lados del vértice del cono; la hemos llamado hipérbola, y nos resultó (48) para su ecuacion $z^2 = \frac{\text{sen}.\alpha \times \text{sen}.(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\left(\frac{c\,\text{sen}.\beta}{\text{sen}.(\alpha+\beta)}x + x^2\right)$;

y como en este caso $\frac{c\,\text{sen}.\beta}{\text{sen}.(\alpha+\beta)}$ es igual á la línea AO′ (fig. 22) ó á la BB′ (fig. 34), representando esta por $2a$, la ecuacion de la hipérbola será

$$z^2 = \frac{\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax + x^2) \text{ (A).}$$

Para tener los puntos en que corta al eje de las x harémos $z=0$, lo que da $x=0$, y $x=-2a$; es decir, que esto se verifica en dos puntos diferentes B, B′, de los cuales el uno es el mismo oríjen de las coordenadas, y el otro está situado del lado de las abscisas negativas á una distancia $2a$ del mismo oríjen.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que la curva corta al eje de las z, cuya suposicion da $z=0$; es decir, que esto sólo se verifica en el oríjen de las coordenadas.

83 Resolviendo la ecuacion con relacion á z, se tendrá $z = \pm\sqrt{\frac{\text{sen}.\alpha\,\text{sen}.(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(2ax + x^2)}$;

que manifiesta que á cada abscisa corresponden dos ordenadas iguales y de signo contrario, ó lo que es lo mismo, que la curva se estiende igualmente hácia uno y otro lado del eje de las x. En esta ecuacion se ve que cuanto mayor sea x positiva, tanto mayor será el valor de z, y por consiguiente la *rama MBm se estiende al infinito*. Si se hace negativa la x, se convertirá la ecuacion en

$$z=\pm\sqrt{\frac{\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}(x^2-2ax)};$$

valor imaginario, miéntras sea $x<2a$; nulo cuando $x=2a$; y real y cada vez mayor, conforme va siendo la x negativa mayor que $2a$; es decir, que desde el punto B′ á la izquierda, la curva $M'B'm'$ se estiende tambien al infinito. Si buscamos la ordenada correspondiente á $x=a$, se obtendrá

$$z=\pm\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{-\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}=\text{(I. § 136)}$$

$$\pm\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}(\alpha+\beta)}\times\sqrt{-1}=\pm b\sqrt{-1},$$

(llamando b la parte real $\frac{a}{\cos.\frac{1}{2}\beta}\sqrt{\text{sen.}\alpha\text{sen.}(\alpha+\beta)}$)

que elevando al cuadrado este valor será

$$b^2=\frac{a^2}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2}\times\text{se.}\alpha\text{se.}(\alpha+\beta),\ \text{que da}\ \frac{b^2}{a^2}=\frac{\text{se.}\alpha\text{se.}(\alpha+\beta)}{\cos.\frac{1}{2}\beta^2};$$

luego sustituyendo en vez de este segundo miembro el primero en la ecuacion (A, 82) de la hipérbola, se convertirá en $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$ (B).

84 La línea $BB'=2a$ se llama *eje primero* de la hipérbola, y la línea $bb'=2b$, se llama el *segundo eje*; y el punto A en que se cruzan los ejes, se llama *centro*.

85 Si trasladamos el oríjen al centro A, representamos por x' la abscisa $AP=AB+BP=a+x$ (que da $x=x'-a$) y sustituimos este valor en la ecuacion

(B, 83) se tendrá $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2a(x'-a)+(x'-a)^2)=$

$$\frac{b^2}{a^2}(2ax'-2a^2+x'^2-2ax'+a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2),$$

ó suprimiendo el acento será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ (C),

que es la *ecuacion de la hipérbola referida á sus ejes y á su centro.*

86 Se llama *parámetro* de un eje á una tercera proporcional á dicho eje y al otro; así, llamando p el parámetro del eje primero, se tendrá

$$2a:2b::2b:p=\frac{2b^2}{a},$$

que dividiendo por $2a$ sale $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$;

cuyo valor sustituido en las ecuaciones anteriores (B), (C), las convertirá en

$$z^2=\frac{p}{2a}(2ax+x^2)\ \text{(D)},\quad z^2=\frac{p}{2a}(x^2-a^2)\ \text{(E)},$$

que son las ecuaciones de la hipérbola con relacion al parámetro.

87 Si consideramos dos puntos cuyas coordenadas sean x, z, x', z', tendrémos

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad z'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'^2-a^2);$$

que formando proporcion y simplificando será
$z^2:z'^2::x^2-a^2:x'^2-a^2::(x+a)(x-a):(x'+a)(x'-a)$;
que manifiesta que *los cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las abscisas*, llamandose aquí *abscisas* las distancias BP, B'P, del pie de la ordenada á los dos vértices B, B' de la curva.

88 Toda línea MM', que pasa por el centro y ter-

mina en la curva, se llama *diámetro*; y se demuestra del mismo modo que en la elipse, que *todos los diámetros están divididos en el centro en dos partes iguales.*

89 Es muy importante observar que la ecuacion de la hipérbola, y todas sus propiedades, son las mismas que las de la elipse, mudando en esta b en $b\sqrt{-1}$ ó b^2 en $-b^2$.

90 Si suponemos $b=a$, la ecuacion de la hipérbola será $z^2=x^2-a^2$, en cuyo caso se llama hipérbola *equilátera*.

91 Los *focus* de la hipérbola son los puntos F, F′ (fig. 35) situados en la prolongacion del eje BB′, tales que la doble ordenada que les corresponde, es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$.

Para determinarlos, harémos $z=\frac{b^2}{a}$ en la ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, lo que da $\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, que dividiendo ambos miembros por $\frac{b^2}{a^2}$ se reduce á $b^2=x^2-a^2$, ó $x^2=a^2+b^2$, que da $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$; valor que se costruye del modo siguiente:

En uno de los estremos del primer eje se eleva una perpendicular BE igual al semieje segundo. Desde el centro A con un radio AE, se describirá una circunferencia de círculo que cortará al eje de las abscisas en dos puntos F, F′, que serán los focus de la hipérbola; porque $AF=AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{a^2+b^2}$.

92 Si desde el punto M de la hipérbola se tiran los radios vectores FM, F′M, á los focus, y se hace

$$\sqrt{a^2+b^2}=c,$$

se tendrá $FM^2=MP^2+FP^2=MP^2+(AP-AF)^2=$

$$z^2+(x-c)^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)+x^2-2cx+c^2;$$

de donde se saca de un modo análogo al espuesto (68)

para la elipse, $FM=\frac{cx}{a}-a$, y $F'M=\frac{cx}{a}+a$;

y restando estos valores tendrémos $F'M-FM=2a$, es decir, que *en la hipérbola la diferencia de los radios vectores tirados á un mismo punto, es igual al eje primero.*

93 Esta propiedad da una costruccion para la hipérbola análoga á la que hemos hallado para costruir la elipse, y es la siguiente.

Desde el focus F, como centro, con un radio cualquiera BO, se describirá un arco de círculo; desde el otro focus F′, como centro, con un radio $B'O=BB'+BO$, se describirá otro arco de círculo, y los puntos como el M en que corte al precedente, pertenecerán á la hipérbola; porque segun esta costruccion siempre se tendrá $F'M-FM=BB'=2a$.

Señalando el punto correspondiente por la parte inferior, y haciendo lo mismo al otro lado del oríjen, se tendrá la segunda rama de la curva.

94 En virtud de la misma propiedad se puede describir tambien la hipérbola por un movimiento continuo.

Para esto se fija en el focus F′ una regla F′M que pueda girar al rededor de este punto. Al estremo Q y en el otro focus F está fijo un hilo FMQ tal que $F'MQ-FMQ=BB'$, que quitando la parte comun QM hace que $F'M-FM=BB'$; haciendo girar despues un lapicero á lo largo del hilo, se le obliga á aplicarse siempre contra la regla que gira al rededor del punto F′, y el lapicero por este procedimiento describe la hipérbola que se quiere.

95 La hipérbola, como la elipse, tiene *diámetros conjugados*, tiene *tangente*, *subtangente*, *normal* y *subnormal*; y ademas se pueden tirar por el

centro unas líneas tales como AL, AL′ (fig. 36) que aunque continuamente se van acercando á la curva, jamas la llegan á encontrar; por cuya razon dichas líneas AL, AL′, se llaman *asíntotas*.

De las funciones.

96 Se llama *funcion* á toda cantidad ó espresion, cuyo valor depende del de una variable. Así, en toda ecuacion indeterminada la variable del primer miembro es funcion de la del segundo, y al contrario; y las ordenadas son funciones de las abscisas, &c.

Las funciones se dividen en *reales* y *aparentes*. Se llaman reales aquellas en que para cada valor de la variable resulta uno nuevo para la funcion, tales son $z=a+2x$, $z=ax+\sqrt{a^2-x^2}$, &c.;
y se llaman aparentes aquellas cuyo valor es constante, cualquiera que sea el que tome la variable, tales son $z=x^0$, $z=1^x$, &c. que siempre son iguales con la unidad.

Tambien se dividen en *algebráicas* y *trascendentes*; algebráicas son aquellas en que las variables están enlazadas con las constantes, sólo por adicion, sustraccion, &c. sin entrar en ellas líneas trigonométricas, logaritmos, &c.; pues cuando entran estas cantidades se llaman trascendentes.

Las funciones algebráicas se dividen en *racionales* é *irracionales*; racionales son las que no envuelven ningun radical; é irracionales las que contienen la variable debajo de algun radical.

Estas se dividen en *esplícitas* é *implícitas*; esplícitas son aquellas en que ya se halla el radical, como en $z=a+\sqrt{ax-x^2}$;
implícitas son las que no le contienen hasta despues de resuelta la ecuacion, como $z^2=2ax-x^2$, que da

$$z=\pm\sqrt{2ax-x^2}.$$

Tambien se dividen las funciones en *enteras*, que son cuando la variable no tiene esponente negativo ni se halla por divisor; y *quebradas*, que son cuando la variable tiene esponentes negativos ó se halla por divisor.

Si el esponente de la variable en el numerador es menor que en el denominador, la funcion es *genuina*; y si al contrario, es *espuria*.

Tambien se dividen en *uniformes*, *biformes*, *triformes*,... *multiformes*, segun resulta para la funcion uno, dos, tres,... muchos valores, para cada uno de la variable.

97 Tambien hay funciones de dos ó mas variables, como $z^2 = axu + bx^2 + cx + mu + nu^2$, en las cuales se puede considerar la x como constante y la u como variable, y al contrario: ó se puede hacer variar á las dos á un mismo tiempo, y ver los valores que resultan en cada uno de estos casos para la funcion; y como variando x, no hay precision de que varíe u al mismo tiempo, ó al contrario, por esta razon la funcion z^2 se dice que es de dos variables *independientes*.

Para indicar que una cantidad es funcion de otra, se pone delante de la variable una f ó F, ó φ; así, $z = \text{f}.x$, $z = \text{F}.x$, $z = \varphi.x$, dan á entender que z es funcion de x, y se leen *z igual funcion x*; *z igual funcion grande x*, *&c*. Cuando se quiere indicar la funcion de una cantidad ya compuesta de la variable, se encierra dentro de un paréntesis; así, $z = \text{f}.(x^2)$, $z = \text{f}.(a+bx)$ &c, espresan funciones de x^2 y de $a+bx$, &c.; y para señalar la funcion de dos ó mas variables independientes, se escribe $z = \text{f}.(x,u)$, $z = \text{f}.(x,u,t)$ &c., &c.

98 *Cuando el primer miembro de una ecuacion es una funcion, y el segundo una trasformacion suya, si todo lo que hay en el segundo miembro se pasa al primero, todos los coeficientes de las diferentes potencias de la variable serán cero.*

En efecto, sea $z = \text{f}.x$, y supongamos que esta ecuacion se trasforme en otra que no contenga radicales ni divisores; vamos á demostrar que pasando al primer miembro todo lo que pueda haber en el segundo, la funcion vendrá á tener esta forma:

$$a+bx+cx^2+dx^3+\&c.=0,$$

y será $a=0$, $b=0$, $c=0$, $d=0$, &c.

Para convencernos de esto, observarémos que no habiendo ya radicales ni divisores, lo mas que podrá suceder es que haya un término donde no se halle x, otro donde esté elevada á la primera potencia, otro donde se encuentre á la segunda, y así sucesivamente; luego tendrá la forma que le hemos dado; pero esta ecuacion se debe verificar, cualquiera que sea el valor de x: ó permaneciendo indeterminado dicho valor, ningun término se debe destruir ni por los que le preceden ni por los que le siguen; luego cada uno de ellos será nulo por sí mismo; y como la x debe ser una cantidad cualquiera, resulta que el coeficiente es el que deberá ser cero en cada término.

99 De esta proposicion resulta que si se tiene una ecuacion de esta forma

$$a+bx+cx^2+\&c.=A+Bx+Cx^2+\&c.$$

los coeficientes de los términos homólogos serán iguales en cada miembro, y será $A=a$, $B=b$, $C=c$, &c. porque si trasladamos todos los términos del segundo miembro al primero, y resolvemos en factores, será

$$(a-A)+(b-B)x+(c-C)x^2+\&c.=0;$$

que en virtud de lo acabado de demostrar, se tendrá

$$a-A=0,\ b-B=0,\ c-C=0,\ \&c.=0;$$

que dan $a=A$, $b=B$, $c=C$, &c.

Idea general de las series y de los números figurados.

100 Cuando en los cálculos ocurren funciones quebradas, irracionales ó trascendentes, es sumamente complicado el hallar sus valores respectivos por las operaciones ordinarias del Álgebra. Para hacer los cálculos con alguna espedicion y de un modo uniforme, se han inventado las *series*, entendiéndose por serie un *polinomio de infinitos términos*, *por medio del cual se espresa el valor de una cantidad*

que no le tiene cabal. Cuando los esponentes de la variable en los términos de la serie son positivos y van creciendo, ó negativos y van menguando, la serie se llama *ascendente*; cuando son positivos y van menguando, ó negativos y van creciendo, se llama *descendente*; cuando dando valores particulares á la variable, los términos van disminuyendo, la serie se llama *convergente*; y cuando van creciendo, la serie se llama *divergente*.

101 Cuando una serie es tal que un término cualquiera depende por una ley constante de alguno ó algunos de los que le preceden, se llama *recurrente*; si depende de uno, se llama recurrente *de primer órden*; si de dos, *de segundo órden*; si de tres, *de tercero*, &c.; la ley por medio de la cual se halla un término en valores de los que le preceden, se llama *escala de relacion*.

Se dice que las series son *aritméticas* de primer órden, cuando restando cada término del que le sigue, dan todos una misma diferencia; por lo que toda progresion aritmética es una serie aritmética de primer órden; cuando de ejecutar estas restas se orijina una progresion aritmética, se dice que la serie *tiene constantes sus segundas diferencias*, y que es de *segundo órden*; del mismo modo se dice que son del *tercero*, cuando las terceras diferencias son constantes; y en general del *órden n* cuando son constantes las diferencias del órden n.

102 Hay métodos generales para desenvolver en serie todo género de funciones; pero como el cálculo diferencial nos suministrará medios mucho mas sencillos, sólo darémos aquí una idea muy sucinta.

Para esto, sea $\frac{a}{a-x}$ la espresion que se quiere desenvolver en serie; lo primero supondrémos que la serie en que ha de quedar desenvuelta sea

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.$$

donde los coeficientes A, B, C, &c. son cantidades indeterminadas, y no contienen á la x. Antes de suponer la forma de la serie, se deben hacer algunas reflexiones, para ver: 1.º *si tendrá el término constante* A, lo que se conoce si haciendo $x=0$, resulta la funcion igual á una cantidad conocida; 2.º *si se deberá hallar la variable en el denominador*, lo que se conoce si haciendo la variable igual cero, resulta la funcion infinita; y 3.º *si se deberá ordenar la serie por las potencias sucesivas, ó por las pares ó las ímpares*, &c.

Así, como haciendo $x=0$ en la funcion propuesta, resulta $\frac{a}{a-x}=\frac{a}{a}=1$, la serie deberá tener término constante A, que en este caso valdrá 1; por lo que tendrémos

$$\frac{a}{a-x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c. \quad (M).$$

Si esta serie es el valor de la funcion propuesta, quitando el denominador se tendrá

$$\begin{aligned} a=Aa&+Bax+Cax^2+Dax^3+\&c. \\ &-Ax-Bx^2-Cx^3-\&c. \end{aligned}$$

Ahora, igualando (99) los coeficientes de los términos homólogos en ambos miembros, y observando que por no estar la x en el primer miembro, todos los coeficientes de las potencias de x en el segundo serán cero, se tendrá esta serie de ecuaciones.

$$a=Aa,\ Ba-A=0,\ Ca-B=0,\ Da-C=0,$$

que dan $A=1$, $B=\frac{A}{a}=\frac{1}{a}$, $C=\frac{B}{a}=\frac{1}{a^2}$, $D=\frac{1}{a^3}$, y así sucesivamente seria $E=\frac{1}{a^4}$, $F=\frac{1}{a^5}$, &c.

luego sustituyendo estos valores en la serie (M), se tendrá $\frac{a}{a-x}=1+\frac{1}{a}x+\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{a^3}x^3+\&c.=$

$$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{a^5}+\&c\ldots\frac{x^{n-1}}{a^{n-1}} \text{ (N)}.$$

Esc. Si observamos la ley de los esponentes, y su valor respecto del lugar que ocupan los términos, verémos que el esponente es una unidad menor que el lugar que ocupa; así, en el término que ocupa el tercer lugar los esponentes son $2=3-1$; luego en el término que ocupe el lugar n, los esponentes serán $n-1$, como se ve en el término (N), que por esta razon se llama *término general de la serie.*

103 Si la funcion fuese $\frac{a}{\alpha+\beta x}$, la haríamos igual con $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+\&c.$ porque hay término constante, y no se debe hallar la variable en el denominador; y será

$$\frac{a}{\alpha+\beta x}=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+\&c.$$

que quitando el denominador será

$$\begin{aligned} a=A\alpha&+B\alpha x+C\alpha x^2+D\alpha x^3+\&c. \\ &+\beta Ax+\beta Bx^2+\beta Cx^3+\&c. \end{aligned}$$

que igualando los coeficientes de los términos homólogos en ambos miembros, resulta $a=A\alpha$, de donde se saca $A=\frac{a}{\alpha}$; $\alpha B+\beta A=0$,

de donde $B=-\frac{\beta A}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times A=-\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{a}{\alpha}=-\frac{\beta a}{\alpha^2}$;

$\alpha C+\beta B=0$,

que da $C=-\frac{\beta B}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}B=-\frac{\beta}{\alpha}\times-\frac{\beta a}{\alpha^2}=\frac{\beta^2 a}{\alpha^3}$;

$\alpha D+\beta C=0$,

que da $D=-\frac{\beta C}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times C=-\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\beta^2 a}{\alpha^3}=-\frac{\beta^3 a}{\alpha^4}$;

lo que manifiesta que si el coeficiente de un término cualquiera se llama P y el del siguiente Q, se tendrá para determinar este la ecuacion $\alpha Q+\beta P=0$, de donde se saca $Q=-\frac{\beta P}{\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}\times P$; que manifiesta la escala de relacion. Comparando los esponentes de β, α, x, con el lugar que ocupa cada término en la serie, y llamando n el lugar que dicho término ocupa, será $\pm\frac{\beta^{n-1}a}{\alpha^{n}}x^{n-1}$ la espresion del término general, tomando el signo $+$ cuando n es ímpar, y el $-$ cuando n sea par; y por último se tendrá $\frac{a}{\alpha+\beta x}=\frac{a}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha^2}x+\frac{a\beta^2}{\alpha^3}x^2-\frac{a\beta^3}{\alpha^4}x^3$.......

104 Si la funcion fuese $\frac{a}{b-x^2}$, ántes de desenvolverla, veríamos que debe tener término constante; y como la variable x sólo se halla elevada á la segunda potencia, es de inferir que la serie no tendrá potencias ímpares de la variable; por lo que ordenándola por las potencias pares se tendrá

$$\frac{a}{b-x^2}=A+Bx^2+Cx^4+Dx^6+Ex^8+\&c.$$

que da $a=Ab+Bbx^2+Cbx^4+Dbx^6+Ebx^8+\&c.$
$\quad -Ax^2-Bx^4-Cx^6-Dx^8-\&c.$

que igualando los coeficientes, resultará

$Ab=a$, de donde sale $A=\frac{a}{b}$;

$Bb-A=0$, ... $B=\frac{A}{b}=\frac{a}{b^2}$;

$Cb-B=0$, ... $C=\frac{B}{b}=\frac{a}{b^3}$,

$$Db - C = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots D = \frac{C}{b} = \frac{a}{b^4};$$

&c. .... &c.

y sustituyendo se tendrá

$$\frac{a}{b-x^2} = \frac{a}{b} + \frac{a}{b^2}x^2 + \frac{a}{b^3}x^4 + \frac{a}{b^4}x^6 \ldots + \frac{a}{b^n}x^{2n-2}.$$

105 Toda serie que es el desarrollo de una funcion, debe ser convergente ó no nos hace al caso para nada; porque como el objeto con que se desenvuelve una funcion en serie, es el formarse una idea de una cantidad, cuyo valor no se percibe con claridad, es necesario que tomando un cierto número de términos de la serie, se tengan valores aproximados de aquella cantidad ó funcion, lo cual no puede verificarse si la serie es divergente; porque como los términos que se dejen en esta, van siendo mayores y son en número infinito, siempre valdrán mucho mas que los que se tomen. Pero el ser convergente una serie sólo se conoce cuando á la variable se le dan valores particulares. Así es, que si en la serie ascendente anterior, x^2 es menor que b, la serie será convergente; pero cuando x^2 sea mayor que b, la serie será divergente, y entónces no se puede decir que hemos resuelto el problema, á no ser que encontremos la serie descendente que sea convergente cuando $x^2 > b$. Esto se consigue ordenando la funcion de diverso modo, esto es, al contrario de ántes; así, en vez de la funcion $\frac{a}{b-x^2}$ supondrémos que se nos ha dado $\frac{a}{-x^2+b}$, que es lo mismo, y la variable se hubiera hallado en el denominador.

106 Si la funcion fuese $\sqrt{a^2-x^2}$, haciendo las mismas observaciones de ántes la haríamos igual con la serie $A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \&c.$

y elevando ambos miembros al cuadrado se tendrá

$$\begin{aligned}a^2-x^2=A^2+2ABx^2+2ACx^4+2ADx^6+2AEx^8+\&c\\ +B^2x^4+2BCx^6+2BDx^8+\&c\\ +C^2x^8+\&c\end{aligned}$$

de donde sale $A^2=a^2$, $2AB=-1$, $2AC+B^2=0$,
$2AD+2BC=0$, $2AE+2BD+C^2=0$, &c.
que dan $A=\pm a$,

$$B=-\frac{1}{2A}=\mp\frac{1}{2a},$$

$$C=-\frac{B^2}{2A}=\mp\frac{1}{8a^3},\ D=-\frac{BC}{A}=\mp\frac{1}{16a^5},\ \&c.$$

y sustituyendo en la serie será

$$\sqrt{a^2-x^2}=\pm a\mp\frac{x^2}{2a}\mp\frac{x^4}{8a^3}\mp\frac{x^6}{16a^5}\mp\&c.$$

de aquí resultan dos series, una tomando los signos superiores, y otra tomando los inferiores; lo que en efecto debia verificarse, á causa de que el radical debe tener dos valores.

107 Se llaman series de *números figurados*, aquellas en que las unidades de cada uno de sus términos, se pueden disponer de manera que representen una figura de Geometría.

Se llaman números de *primer órden* á las simples unidades 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c.

Números de *segundo órden* á los naturales
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c.
que se forman por la adicion de los de primero.

Números de *tercer órden*, que se llaman *triangulares*, á los que se forman por la adicion de los naturales, y son 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, &c.

Números de *cuarto órden* ó *piramidales*, aquellos que se forman por la adicion de los triangulares, y son 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, &c.

Números de *quinto órden* á los que se forman por la adicion de los precedentes, y son
1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, 330, 495, &c.

Números de *sesto*, de *séptimo*, de *octavo*, &c. órden, á aquellos que se forman por la adicion de los precedentes, y son 1, 6, 21, 56, &c.; 1, 7, 28, 84, &c.; 1, 8, 36, 120, &c., y así al infinito.

108 Como las unidades de los números del tercer órden, se pueden colocar en forma de triángulo equilátero; y los del cuarto en forma de pirámide triangular, se les dió por estension á todas estas series de números el nombre de *series de números figurados*. Los números triangulares resultan de sumar los términos de una progresion aritmética, cuyo primer término es 1 y la razon 1; y como las unidades de los números que resulten de sumar los términos de una progresion aritmética, cuyo primer término es 1 y la razon 2, se podrán disponer en forma de cuadrado: y la de los formados por la suma de los términos de otra progresion, cuyo primer término fuese 1 y la razon 3, se podrán disponer en forma de pentágonos regulares: y en general las de los formados por la suma de los términos de una progresion, cuyo primer término es la unidad y la razon d, se podrán colocar de manera que formen un polígono regular de $d+2$ lados, se les ha dado á todas estas series de números los nombres de *números polígonos*.

Del método de los límites.

109 Queda dicho (I. 232) lo que se entiende por *límite* de una cantidad variable, y que los límites generales de las cantidades son 0 é ∞; pero tambien hemos visto que hay límites particulares, como (I. 345 cor.) la circunferencia, que es límite de los perímetros de los polígonos; el círculo lo es de la superficie de los mismos polígonos &c.

Del mismo modo, aunque los límites generales de las funciones son tambien 0 é ∞, los tienen tambien particulares; lo cual sucede cuando una funcion en su forma actual, ó en otra que se le puede dar, se compone de una parte constante, y de otra variable, que acercándose á su límite cero, hace que la parte constante sea el límite de dicha funcion.

110 Sea por ejemplo a una cantidad constante, y x y z dos variables que decrecen continuamente acercándose al límite cero, en cuyo caso a será límite de $a+x$ y $a-z$; pues le corresponden las dos ideas del límite (I. 232).

111 Hay funciones que reconocen dos límites determinados: uno para cuando la variable decrece acercándose á su límite o, y otro para cuando crece acercándose continuamente al límite $\frac{1}{0}$;

tal es esta $\frac{a+bx}{c+ex}$.

En efecto, cuando x se va acercando á su límite o, la espresion se acerca á $\frac{a}{c}$, sin que jamas pueda llegar á serle igual; luego $\frac{a}{c}$ será su límite.

Para indagar el límite cuando x crece, dividirémos los dos términos de la funcion por x, y se convertirá en $\frac{b+\frac{a}{x}}{e+\frac{c}{x}}$, la cual se acercará á $\frac{b}{e}$, tanto mas cuanto x se acerque mas á $\frac{1}{0}$ ó ∞; de manera que la diferencia entre dichas cantidades podrá ser menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea; y por lo mismo $\frac{b}{e}$ será el límite de la funcion propuesta.

112 *En toda serie ordenada por las potencias de una sola variable, se le puede dar á esta un valor*

tal que un término cualquiera sea mayor que la suma de todos los que le siguen.

En efecto, sea la serie $Ax^m+Bx^n+Cx^p+\&c.$ todo está reducido á probar que á x se le puede dar un valor tal que cada término sea mas de dos veces menor que el antecedente; porque hemos visto (I. 205 esc. 1.°) que en la serie

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\&c.$$

Cada término es igual á la suma de todos los que le siguen; y como aquí cada término es la mitad del anterior, se sigue que si en este supuesto un término cualquiera es igual á la suma de todos los que le siguen, cuando uno cualquiera sea menor que la mitad del anterior, un término cualquiera será mayor que la suma de los que le siguen. Luego todo está reducido á probar que se puede dar á x un valor tal que $\frac{Ax^m}{2}>Bx^n$, $\frac{Bx^n}{2}>Cx^p$, $\frac{Cx^p}{2}>\&c.$

1.° Sea la serie ascendente, esto es, $m<n<p<\&c.$; como el caso ménos favorable es aquel en que los coeficientes A, B, C, &c. van creciendo, lo demostrarémos en este caso, y ademas supondrémos que la relacion de dichos coeficientes sea variable. Representemos por Px^r y por Qx^{r+s} los dos términos consecutivos en que se encuentre la mayor relacion de los coeficientes; y así, será necesario dar á x un valor tal que se tenga $\frac{Px^r}{2}>Qx^{r+s}$;

y quedando satisfecha esta circunstancia, se tendrá demostrado lo que se desea; luego sólo falta indagar *si existe un número que cumple con esta condicion, y en caso de que esto se verifique, determinarle.*

Para esto, dividirémos esta desigualdad por x^r, que da $\frac{P}{2}>Qx^s$ ó $Qx^s<\frac{P}{2}$;

y dividiendo por Q se tendrá $x^s<\frac{P}{2Q}$, ó estrayendo la raiz s nos resultará $x<\sqrt[s]{\frac{P}{2Q}}$.

Pero P y Q son dos cantidades dadas y constantes; luego $\frac{P}{2Q}$ y su raiz s, tambien serán cantidades constantes, que podrémos determinar; y como por pequeña que sea esta cantidad, podemos concebir en x otro valor menor (I. 229 cor.), resulta que siempre se podrá dar á x un valor que cumpla con la circunstancia de ser $\frac{Px^r}{2}>Qx^{r+s}$,

ó que *un término cualquiera sea mayor que la suma de todos los que le siguen.*

2.° Sea ahora descendente la serie, esto es, supongamos que $m>n>p>$&c., y que los dos términos consecutivos en que la relacion sea mayor, sean Px^{r+s} y Qx^r;

todo estará reducido á probar que $\frac{Px^{r+s}}{2}>Qx^r$;

y como dividiendo por x^r tenemos $\frac{Px^s}{2}>Q$,

de donde $x^s>\frac{2Q}{P}$, ó $x>\sqrt[s]{\frac{2Q}{P}}$,

resulta que dando á x un valor mayor que $\sqrt[s]{\frac{2Q}{P}}$

cumplirá con la circunstancia pedida; pero P y Q son cantidades finitas, luego la espresion $\frac{2Q}{P}$ tambien lo será, y su raiz s; y como siempre podemos concebir en x un valor mayor que cualquier otra cantidad dada, resulta que se le podrá dar uno tal que cada término de la serie sea mayor que la suma de todos los que le siguen. Luego *el primero será mayor que la suma de todos los demas*. L. Q. D. D.

Esc. Si los esponentes de los términos consecutivos, sólo se diferenciasen en la unidad, ó lo que es lo mismo, si se supone $s=1$, el valor de x en el primer caso seria cualquiera que fuese menor que $\frac{P}{2Q}$, y en el segundo seria cualquiera que fuese mayor que $\frac{2Q}{P}$; porque el radical tendria por esponente la unidad, y daria por raiz la misma cantidad que tiene debajo.

113 *Si se tienen dos funciones* F.x, f.x, *de una misma variable* x, *el límite de la relacion de estas funciones será el mismo que la relacion de los límites.*

En efecto, si la relacion la espresamos por $\varphi.x$, se tendrá $\frac{\mathrm{F}.x}{\mathrm{f}.x}=\varphi.x$; ahora, cada una de estas funciones llegará á su límite, cuando la variable x llegue al suyo que supondrémos ser a, y tendrémos $\frac{\mathrm{F}.a}{\mathrm{f}.a}=\varphi.a$; pero $\mathrm{F}.a=$lím. de $\mathrm{F}.x$, $\mathrm{f}.a=$lím. de $\mathrm{f}.x$, y $\varphi.a=$lím. de $\varphi.x$, luego $\frac{\text{lím. de F}.x}{\text{lím. de f}.x}=$lím. de $\varphi.x$, que espresa la proposicion enunciada.

Como $\mathrm{F}.x$ es una cantidad variable, la podrémos señalar con z, y por la misma razon podrémos suponer $\mathrm{f}.x=y$, y $\varphi.x=u$, lo que dará $\frac{z}{y}=u$, de donde

$\frac{\text{límit. de } z}{\text{lím. de } y} = \text{lím. de } u$; que espresa que *el límite de la relacion de dos cantidades variables, es lo mismo que la relacion de los límites de dichas cantidades.*

Del cálculo de las diferencias.

114 Vamos ahora á determinar el incremento ó decremento que sobreviene á una funcion, cuando crece ó mengua la variable de que depende; y para fijar las ideas observarémos que si una variable x aumenta ó disminuye, y se llega á convertir en $x \pm k$, la cantidad indeterminada k, que es la que ha causado su aumento ó diminucion, se llama el *incremento*, la *diferencia finita*, ó simplemente la *diferencia* de x. Del mismo modo, si variando z llega á ser $z \pm h$, la cantidad indeterminada h se llama la *diferencia* de z: cuyas diferencias serán positivas ó negativas, segun x y z hayan aumentado ó disminuido. Pero como muchas veces se ofrece considerar en una misma cuestion las diferencias de muchas variables y de sus funciones, á fin de espresarlas con uniformidad, y saber el oríjen x ó z de dichas diferencias, se hace uso de un signo general Δ, que es la delta griega, anteponiéndola á la variable cuya diferencia se quiere espresar; así, en lugar de $\pm k$ se escribe $\pm \Delta x$, y $\pm \Delta z$ en lugar de $\pm h$, y se leen *diferencia* x, *diferencia* z.

Las varias potencias $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3$, $(\Delta x)^4$, &c. de la diferencia de una variable x, se espresan por Δx^2, Δx^3, Δx^4, &c.; y para que estas espresiones no se tomen por las diferencias respectivas de x^2, x^3, x^4, &c. se denotan estas por $\Delta . x^2$, $\Delta . x^3$, $\Delta . x^4$, &c.

115 Entendido esto, pasemos á resolver este problema.

Dada la diferencia de una variable, hallar la de la funcion.

Res. y *Dem.* Sustitúyase en la funcion en vez de la variable, la variable mas ó ménos su diferencia; de esto réstese la funcion primitiva, y se tendrá la diferencia de dicha funcion.

En efecto, sea $z=f.x$; si en vez de x sustituimos $x\pm\Delta x$, la funcion z variará y se convertirá en z'; luego se tendrá $z'=f.(x\pm\Delta x)$;
y si de esta ecuacion restamos la primera, hallarémos el incremento de dicha funcion, que será

$$z'-z=f.(x\pm\Delta x)-f.x;$$

pero como z, al variar x, ha padecido por precision un incremento ó decremento, resulta que z' será igual á $z+\Delta z$; luego el primer miembro se convertirá en

$$z'-z=z+\Delta z-z=\Delta z;$$

por lo cual tendrémos $\Delta z=f.(x\pm\Delta x)-f.x$, ó poniendo $f.x$ en vez de z, será $\Delta f.x=f.(x\pm\Delta x)-f.x$ (M).

116 Si una constante afecta á una funcion por via de suma ó de resta, desaparecerá de la diferencia; porque si fuese $z=f.x\pm a$, como las cantidades constantes no aumentan ni disminuyen en un mismo cálculo, se tendrá $z'=f.(x\pm\Delta x)\pm a$, de donde
$\Delta z=z'-z=f.(x\pm\Delta x)\pm a-f.x\mp a=f.(x\pm\Delta x)-f.x$, porque $\pm a$ y $\mp a$ quedan destruidas.

Si la constante afecta á la funcion por via de multiplicacion ó division, esta constante afectará del mismo modo á su diferencia; porque si se tiene

$$z=\frac{a}{b}f.x \text{ será } z'=\frac{a}{b}f.(x\pm\Delta x),$$

$$\text{y } \Delta z=z'-z=\frac{a}{b}f.(x\pm\Delta x)-\frac{a}{b}f.x=$$

$$\frac{a}{b}(f.(x\pm\Delta x)-f.x)=\frac{a}{b}\Delta f.x.$$

Ahora, dividiendo la ecuacion (M) por Δx, será

$$\frac{\Delta f.x}{\Delta x}=\frac{f.(x\pm\Delta x)-f.x}{\Delta x}\text{(N)},$$

que espresa *la relacion que tiene la diferencia de la funcion con la de la variable.*

117 Cuando se tienen muchas funciones enlazadas por via de suma ó resta, la diferencia total es igual al conjunto de las diferencias de cada funcion componente.

Porque si tenemos $z=\mathrm{f}.x+\mathrm{F}.x-\varphi.x$, será $z'=\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)+\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)$, y $z'-z=\Delta z=$
$\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)+\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\varphi.(x\pm\Delta x)-\mathrm{f}.x-\mathrm{F}.x+\varphi.x$; pero $\mathrm{f}.(x\pm\Delta x)-\mathrm{f}.x=\Delta\mathrm{f}.x$, $\mathrm{F}.(x\pm\Delta x)-\mathrm{F}.x=\Delta\mathrm{F}.x$, y $-\varphi.(x\pm\Delta x)+\varphi.x=-(\varphi.(x\pm\Delta x)-\varphi.x)=-\Delta\varphi.x$; luego se tendrá $\Delta z=\Delta\mathrm{f}.x+\Delta\mathrm{F}.x-\Delta\varphi.x$.

118 Como el cálculo diferencial, que pronto darémos á conocer, nos suministra un método general y sencillo para hallar la diferencia de una funcion, no resolverémos aquí sino el ejemplo siguiente.

Sea $z=ax^3+bx+c$, y se tendrá

$$z'=a(x\pm\Delta x)^3+b(x\pm\Delta x)+c=$$
$$ax^3\pm 3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3+bx\pm b\Delta x+c;$$

luego $\Delta z=z'-z=ax^3\pm 3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3+bx\pm b\Delta x+c-ax^3-bx-c=\pm 3ax^2\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3\pm b\Delta x=\pm(3ax^2+b)\Delta x+3ax\Delta x^2\pm a\Delta x^3$; ó considerando sólo el signo $+$, que es lo que harémos de aquí en adelante, será

$$\Delta z=(3ax^2+b)\Delta x+3ax\Delta x^2+a\Delta x^3.$$

119 Pasemos ya á las funciones de dos variables independientes, y sea $z=\mathrm{f}.(x, u)$; donde vemos que z puede variar por tres causas: 1.ª por la variacion sola de x, cuando se trasforma en $x+\Delta x$; 2.ª porque u sola sea la que varíe, y se convierta en $u+\Delta u$; 3.ª variando ambas x y u. En el primero y segundo caso las diferencias que resultan de z se llaman *diferencias parciales*, y se espresan respectivamente por $\frac{\Delta z}{\Delta x}\Delta x$, $\frac{\Delta z}{\Delta u}\Delta u$; en el tercer caso resultará la diferencia Δz que se llama diferencia *total*, ó simplemente la diferencia de la funcion.

Como en los dos primeros casos sólo varía en la funcion z una de las cantidades x ó u, su diferencia se hallará en virtud del problema antecedente; y por lo que toca al tercero, llamando z' á la funcion $f.(x+\Delta x, u+\Delta u)$ que resulta sustituyendo $x+\Delta x$ por x, y $u+\Delta u$ por u, la diferencia de z ó Δz será

$$z'-z=f.(x+\Delta x, u+\Delta u)-f.(x, u).$$

Del mismo modo tendríamos que si fuese

$$z=f.(x, u, r, t), \text{ resultaria}$$

$$\Delta z=f.(x+\Delta x, u+\Delta u, r+\Delta r, t+\Delta t)-f.(x, u, r, t).$$

120 Si entre las variables hubiese una relacion espresada por $V=f.(x, z)=0$, en este caso, x seria funcion de z, y recíprocamente z funcion de x; de donde se sigue que si x varía y se trasforma en $x+\Delta x$ la z variará necesariamente y se convertirá en $z+\Delta z$; y estos nuevos valores de x y de z, deberán necesariamente satisfacer á la ecuacion $V=f.(x, z)=0$,

y tendrémos $V'=f.(x+\Delta x, z+\Delta z)=0$;

luego $V'-V=\Delta V=f.(x+\Delta x, z+\Delta z)-f.(x, z)=0$,

ó $\Delta V=0$;

cuya ecuacion espresa la relacion entre Δx y Δz; de donde inferimos que esta relacion se hallará tomando la diferencia de V como si las variables x y z fuesen independientes, y haciendo luego $\Delta V=0$.

121 El mismo método se seguirá en las funciones de mas variables; y así pasarémos á las diferencias de un órden superior.

Con la mira de dar á conocer cómo se orijinan estas diferencias, supondrémos que haciendo variar sucesivamente una funcion de una ó mas variables, que llamarémos z, sean z', z'', z''', z^{IV}, &c. los valores consecutivos de z cuando aumenta: y $'z$, $''z$, $'''z$, ^{IV}z, &c. cuando disminuye; de manera que

$$\&c.\ {}^{IV}z,\ {}'''z,\ {}''z,\ {}'z,\ z,\ z',\ z'',\ z''',\ z^{IV},\ \&c.$$

forme una serie de términos sucesivos.

En virtud de esta consideracion y de lo espuesto (115), tendrémos $z'-z=\Delta z$; $z''-z'=\Delta z'$;

$$z'''-z''=\Delta z''; \ z^{IV}-z'''=\Delta z''', \ \&c.; \ z-{}'z=\Delta {}'z;$$

$$'z-{}''z=\Delta {}''z; \ {}''z-{}'''z=\Delta {}'''z; \ {}'''z-{}^{IV}z=\Delta {}^{IV}z, \&c.$$

Ahora, $\Delta z'-\Delta z$ será por la misma razon la diferencia de Δz, y se tendrá $\Delta z'-\Delta z=\Delta.\Delta z$.

La diferencia de la diferencia de una funcion z de una ó muchas variables, se llama *diferencia segunda* de z, y se representa por $\Delta^2 z$, cuya espresion no se debe confundir con ninguna de estas $\Delta.z^2$, Δz^2; pues $\Delta.z^2$ indica la diferencia del cuadrado de z, la Δz^2 indica el cuadrado de la diferencia, y $\Delta^2 z$ indica, como acabamos de decir, la diferencia de la diferencia de z.

Por consiguiente tendrémos

$$\Delta z' - \Delta z = \Delta^2 z, \text{ ó } \Delta z' = \Delta z + \Delta^2 z;$$
$$\Delta z'' - \Delta z' = \Delta^2 z', \text{ ó } \Delta z'' = \Delta z' + \Delta^2 z';$$
$$\Delta z''' - \Delta z'' = \Delta^2 z'', \text{ ó } \Delta z''' = \Delta z'' + \Delta^2 z'';$$
$$\Delta z^{\text{iv}} - \Delta z''' = \Delta^2 z''', \text{ ó } \Delta z^{\text{iv}} = \Delta z''' + \Delta^2 z''', \&c.$$
$$\Delta z - \Delta' z = \Delta^{2'} z, \text{ ó } \Delta z = \Delta' z + \Delta^{2'} z;$$
$$\Delta' z - \Delta'' z = \Delta^{2''} z, \text{ ó } \Delta' z = \Delta'' z + \Delta^{2''} z;$$
$$\Delta'' z - \Delta''' z = \Delta^{2'''} z, \text{ ó } \Delta'' z = \Delta''' z + \Delta^{2'''} z, \&c.$$

La diferencia segunda de la diferencia de z se llama la diferencia *tercera* de z, y se denota por $\Delta^3 z$, y en general la diferencia n por $\Delta^n z$.

122 Si z fuese funcion de una sola variable x, hallaríamos z' sustituyendo $x' = x + \Delta x$ en lugar de x; $\Delta z'$, sustituyendo $x' = x + \Delta x$ en vez de x en Δz, y $\Delta x' = \Delta(x + \Delta x) = \Delta x + \Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta^2 x' = \Delta^2(x + \Delta x) = \Delta^2 x + \Delta^3 x$, por $\Delta^2 x$, &c.

123 Si en una funcion z de dos variables independientes x y u, sustituimos $x + \Delta x$ en lugar de x, y $u + \Delta u$ en vez de u, resultará z'; sustituyendo $x + \Delta x$ por x en Δz, $u + \Delta u$ por u, $\Delta x + \Delta^2 x$ por Δx, y $\Delta u + \Delta^2 u$ por Δu, resultará $\Delta z'$; si sustituímos $x + \Delta x$ en vez de x en $\Delta^2 z$, $u + \Delta u$ en vez de u, $\Delta x + \Delta^2 x$ en lugar de Δx, $\Delta u + \Delta^2 u$ en lugar de Δu, $\Delta^2 x + \Delta^3 x$ en lugar de $\Delta^2 x$, y $\Delta^2 u + \Delta^3 u$ en vez de $\Delta^2 u$, resultará $\Delta^2 z'$, y así en adelante.

Con la mira de simplificar los cálculos se suele suponer que una de las cantidades variables varía uniformemente, ó lo que es lo mismo, que su diferencia primera es constante; y esta sirve de término de comparacion al cual se refieren las diferencias de las demas cantidades.

Nosotros supondrémos Δx constante, y nos propondrémos hallar las diferencias segunda, tercera &c. de una funcion cualquiera de x.

124 Sea $z=ax^2$,
y tendrémos $z'=a(x+\Delta x)^2=ax^2+2ax\Delta x+a\Delta x^2$;
lo que dará $\Delta z=z'-z=2ax\Delta x+a\Delta x^2$.

Sustituyendo $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá
$\Delta z'=2a(x+\Delta x)\Delta x+a\Delta x^2=2ax\Delta x+2a\Delta x^2+a\Delta x^2$;
lo que dará $\Delta^2 z=\Delta z'-\Delta z=2a\Delta x^2$.

Esta segunda diferencia es constante, y de consiguiente la tercera será cero. Este egemplo, aunque sencillo, manifiesta el método que se deberá seguir para hallar las diferencias sucesivas, si las tuviese la funcion, y aun cuando esta fuese de dos variables.

Del cálculo diferencial.

125 Hemos visto (116) el modo de hallar la relacion de la diferencia ó incremento de la funcion con la diferencia ó incremento de la variable; y ahora debemos advertir que entre la funcion primitiva y el límite de esta relacion, hay una dependencia que determina la una cantidad por medio de la otra; y todos los medios que la análisis indeterminada nos ofrece para conseguir este fin, están comprendidos en el tratado que se conoce en general con el nombre de *cálculo infinitesimal*.

Este precioso cálculo tiene dos partes: la primera, que se denomina *cálculo diferencial*, trata de hallar, dada la funcion, el límite de la relacion de su incremento con el de la variable ó variables que entran en ella; la segunda trata de determinar la funcion, cuando se da conocido el límite de la relacion de su incremento con el de la variable, y se llama *cálculo integral*: que por consiguiente es el inverso del diferencial.

126 Para esponer los principios de este portentoso cálculo, demostrarémos en primer lugar el siguiente

Teor. *Si siendo* $z=f.x$, *se sustituye* $x+k$ *en vez* *de* x, *señalando* k *una cantidad cualquiera positiva ó negativa, se convertirá* z *en* z′, *y tendrá esta forma* $z'=f.x+Ak+Bk^2+Ck^3+Dk^4+Ek^5+\&c.$ *siendo* A, B, C, D, &c. *funciones cualesquiera de* x, *pero independientes de* k.

Este teorema quedará demostrado, si manifestamos que la cantidad k sólo se puede hallar con esponente entero y positivo; lo que se conseguirá demostrando que no puede ser el esponente en ningun término ni negativo ni fraccionario, y que ademas debe haber un término independiente de k que es la funcion primitiva. Para esto, observarémos en primer lugar que si en el desarrollo de una funcion se sustituye en vez de la variable de que depende, un valor particular, debe resultar el mismo valor que daria la funcion ántes de desenvolverse; pues de otro modo no seria la funcion igual con su desarrollo; y como haciendo $k=o$, $z'=f.(x+k)$ se convierte en $z=f.x$, se sigue que el desarrollo de $z'=f.(x+k)$, cualquiera que sea la forma que tenga, se debe reducir á $z=f.x$ cuando $k=o$; por lo cual se hallará este término en la serie, sin estar afecto de la cantidad k, el cual dirémos que es el primer término del desarrollo. Ahora, el desarrollo de $f.(x+k)$ no puede tener ningun término de la forma $\frac{M}{k^n}$ ó en que el esponente de k sea negativo; porque entónces cuando k fuese igual con cero, este término seria infinito, y por consiguiente lo seria tambien $f.(x+k)$; pero como en este caso se convierte en $f.x$, que no puede ser infinita sino en valores particulares de x, no puede haber ningun término que tenga dicha forma.

Tampoco puede tener esponentes fraccionarios, ó lo que es lo mismo radicales, á ménos que no se den á x valores particulares. Porque los radicales de k no podrán provenir sino de los radicales comprendidos en $f.x$, y la sustitucion de $x+k$ en vez de x no podrá aumentar ni disminuir el número de ellos, ni mudar su naturaleza miéntras que x y k permanezcan indeterminadas. Por otra parte queda indicado (I. 168 cor.) que todo radical tiene tantos valores diferentes, como unidades hay en su esponente; y por consiguiente toda funcion irracional tiene tantos valores diferentes como combinaciones se pueden hacer con los diferentes valores de los radicales que encierra; luego si el desarrollo de la funcion f.$(x+k)$ contuviese un término de la forma $Mk^{\frac{m}{n}}=M\sqrt[n]{k^m}$, la funcion f.$x$ seria necesariamente irracional, y tendria por consiguiente un cierto número de valores diferentes, el cual seria el mismo para la funcion f.$(x+k)$ que para su desarrollo. Pero estando este desarrollo representado por la serie

$$\text{f.}x+Ak+Bk^2+Ck^3+\ldots+M\sqrt[n]{k^m}+\&c.$$

cada valor de f.x se combinaria con cada uno de los valores del radical $M\sqrt[n]{k^m}$, de manera que el desarrollo de la funcion f.$(x+k)$ tendria mas valores diferentes que la misma funcion no desenvuelta: lo que es absurdo. Luego tendrá la forma que hemos dicho en el teorema.

127 Si de la ecuacion

$$z'=\text{f.}x+Ak+Bk^2+Ck^3+\ \&c.$$

se resta la primitiva $z=$f.x, y ponemos Δx en vez de k, se tendrá

$$z'-z=\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+\&c. \text{ (M)},$$

que espresa el incremento ó diferencia de una funcion cuando á la variable le sobreviene el incremento Δx.

128 Dividiendo esta ecuacion por Δx, se tendrá la relacion de los incrementos espresada por

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=A+B\Delta x+C\Delta x^2+D\Delta x^3+\&c.$$

Aquí vemos que la relacion de los incrementos de la funcion y de la variable, se compone de dos partes: la una independiente de dichos incrementos que es A, y la otra que está afecta de Δx, ó que depende del incremento de la variable. Si se supone que Δx vaya disminuyendo, el resultado se aproximará sin cesar á A, sin que jamas pueda serle igual, sino en el caso de $\Delta x=0$; luego (I. § 232) A es el límite de dicha relacion, y se tendrá lím. de $\frac{\Delta z}{\Delta x}=A$;

pero como este límite se saca suponiendo $\Delta x=0$, y en este caso la ecuacion anterior (M) da $\Delta z=0$, el límite de $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ se convierte en $\frac{0}{0}$: y no se aniquila, puesto que es igual con A; y como esta relacion no nos dice si el 0 de arriba proviene del límite del incremento ó diferencia de la funcion ó del de la variable, es indispensable elejir un signo para espresar el límite 0 de la diferencia ó incremento Δz, y el de la Δx.

Este signo es una d antepuesta á la funcion ó variable; y así, dz espresará el límite de la diferencia de la funcion z, y dx el límite de la diferencia de la variable x; pero es indispensable tener presente que el valor absoluto de dz, dx, y en general de cualquiera variable precedida de la característica d, siempre es cero; y sólo representa una cantidad cuando está señalada la relacion entre dos de estas espresiones; así, en el ejemplo antecedente, tendrémos $\frac{dz}{dx}=A$;

que se lee *diferencial* z *partido diferencial* x *igual* A.

129 Aunque dz, dx &c. no son cantidades, se pueden ejecutar con estos símbolos las mismas operaciones que con las cantidades mismas.

Para probarlo, en la ecuacion

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta x^2+C\Delta x^3+D\Delta x^4+ \&c.$$

hallarémos la relacion de la diferencia de la variable con la de la funcion, y será

$$\frac{\Delta x}{\Delta z}=\frac{1}{A+B\Delta x+C\Delta x^2+\ \&c.}$$

cuyo límite es $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{A}$; pero $A=\frac{dz}{dx}$, luego $\frac{dx}{dz}=\frac{1}{\frac{dz}{dx}}$.

Resultado que manifiesta que $\frac{dx}{dz}$ se puede sacar por la regla de dividir un entero por un quebrado.

Sea ahora u una funcion cualquiera de x, y z una funcion cualquiera de u, con lo cual tendrémos (§ 127)

$$\begin{cases} \Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta x^2 + C\,\Delta x^3 + \&c. \ \text{(a)} \\ \text{y } \Delta z = A'\Delta u + B'\Delta u^2 + C'\Delta u^3 + \&c. \ \text{(b)} \end{cases}$$

y sustituyendo en esta última espresion en vez de Δu, Δu^2 &c. sus valores sacados de la primera, será

$$\begin{aligned} \Delta z = A'A\Delta x + B\,A'\,\Delta x^2 &+ \&c. \\ + B'A^2\Delta x^2 &+ \&c. \end{aligned}$$

de donde sale

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta x} = A'A + A'B\,\Delta x &+ \&c. \\ + B'A^2\,\Delta x &+ \&c. \end{aligned}$$

y pasando á los límites resultará $\frac{dz}{dx}=A'A$;

pero de las ecuaciones (a, b) se saca $A'=\frac{dz}{du}$, $A=\frac{du}{dx}$,

luego se tendrá $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{du}\times\frac{du}{dx}$;

ecuacion que manifiesta que la du se puede suprimir en el numerador y en el denominador, como si fuesen cantidades.

130 De donde se deduce que si se quita el denominador dx en la espresion $\frac{dz}{dx}=A$,

se tendrá $dz=A\,dx$.

Y como de ella depende el valor de la relacion entre dichos límites, se dice que $A\mathrm{d}x$ es la *diferencial* de la funcion; y da á conocer que es el primer término de la diferencia, sólo con poner en vez de Δx su límite $\mathrm{d}x$; y como la espresion $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=A$ es lo que multiplica á la diferencial de la variable en la de la funcion, se ha dado á $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, ó á lo que representa, el nombre de *coeficiente diferencial*. De donde se deduce que el límite de la relacion de los incrementos, ó el coeficiente diferencial, se obtendrá *dividiendo la diferencial de la funcion por la de la variable*; y recíprocamente, se obtendrá la diferencial de la funcion *multiplicando el límite de la relacion de los incrementos, ó el coeficiente diferencial, por la diferencial de la variable.*

Luego segun todo lo espuesto, el cálculo diferencial *es aquel ramo de la análisis indeterminada, que enseña á determinar el límite de la relacion de los incrementos simultáneos de una funcion y de la variable ó variables de que depende.*

131 Aunque se puede tomar por evidente que *dos funciones iguales tienen diferenciales iguales*, no ostante, como es una de las proposiciones fundamentales, harémos palpable su verdad.

En efecto, si dos funciones son iguales (cualquiera que sea el valor de su variable) sus desarrollos ordenados por las potencias de esta variable ó de su incremento, deben ser idénticos; pues de otro modo podria resultar alguna ecuacion que determinase cualquiera de dichas cantidades; por consiguiente si se tiene $u=z=\mathrm{f}.x$, es necesario que sustituyendo $x\pm\Delta x$ en vez de x, y desenvolviendo, se tenga

$$u+A\,\Delta x+B\,\Delta x^2+C\,\Delta x^3+\&c.=$$
$$z+A'\Delta x+B'\Delta x^2+C'\Delta x^3+\&c.$$

cualquiera que sea el valor de Δx; luego se tendrá

$A\Delta x = A'\Delta x$; ó pasando á los límites $Adx = A'dx$; y como Adx es la diferencial du de u, y $A'dx$ la dz de z, se tendrá $du = dz$.

Esc. La inversa de esta proposicion en general no es verdadera; y se caeria en error si siempre se asegurase que *dos diferenciales iguales pertenecen á funciones iguales.*

En efecto, si se tiene $u = a + \frac{b}{c} f.x$, llamando u' á lo que resulta de sustituir $x + \Delta x$ en vez de x, se tendrá $u' = a + \frac{b}{c} f.(x + \Delta x)$; y restando de esta ecuacion la anterior, resultará

$$u' - u = a + \frac{b}{c} f.(x + \Delta x) - a - \frac{b}{c} f.x,$$

ó $\Delta u = \frac{b}{c}(f.(x + \Delta x) - f.x)$;

y como lo que hay dentro del paréntesis es $\Delta f.x$, será

$$\Delta u = \frac{b}{c} \Delta f.x;$$

y pasando á los límites se tendrá $du = \frac{b}{c} \times df.x$; resultado en el que no queda ningun vestijio de la constante a.

Luego la diferencial $\frac{b}{c} \times df.x$ pertenece igualmente á $a + \frac{b}{c} f.x$ que á $\frac{b}{c} f.x$: y conviene generalmente á los diferentes casos que presenta la funcion $a + \frac{b}{c} f.x$, cuando se dan á a todos los valores posibles.

Donde se ve que al diferenciar una funcion cualquiera, todas las constantes combinadas sólo por via de adicion ó de sustraccion desaparecen; y las que están por via de multiplicacion ó division quedan afectando á las diferenciales, del mismo modo que afectaban á las variables.

132 Cuando dos cantidades z y x están unidas por una dependencia mutua, se puede decir igualmente que z es funcion de x, ó x funcion de z, segun se quiera mirar á z como determinada por medio de x, ó á x como determinada por medio de z; el coeficiente diferencial tambien se puede mirar bájo cada uno de estos dos aspectos.

Cuando se tiene $\mathrm{d}z = A\mathrm{d}x$, se deduc $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = A$,

si se considera la z como determinada por x:

y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{A}$, cuando se supone x determinada por z;

en este caso último la diferencial de x es

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{A}\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}z}{A}.$$

133 Apliquemos lo que precede á la diferenciacion de las funciones algebráicas, y consideremos primeramente el caso en que se tienen muchas cantidades dependientes de x reunidas por via de suma ó resta, como la espresion $z = u + v - w$, donde u, v y w, sean funciones de x. Segun lo espuesto (117) se tendrá $\Delta z = \Delta u + \Delta v - \Delta w$; pero como u, v y w, son funciones de x, sus diferencias estarán espresadas (127) por $A\Delta x + B\Delta x^2 + \&c.$,

$$A'\Delta x + B'\Delta x^2 + \&c.,\ A''\Delta x + B''\Delta x^2 + \&c.;$$

por lo cual se tendrá $\Delta z = A\Delta x + B\Delta x^2 + \&c. +$

$$A'\Delta x + B'\Delta x^2 + \&c. - A''\Delta x - B''\Delta x^2 - \&c.$$

y hallando la relacion resultará

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = A + B\Delta x + \&c. + A' + B'\Delta x + \&c. - A'' - \&c.$$

ó pasando al límite, será $\frac{dz}{dx}=A+A'-A''$;

y quitando el divisor tendrémos

$$dz=Adx+A'dx-A''dx;$$

pero Adx, $A'dx$, $A''dx$, son las diferenciales que corresponden á cada una de las funciones u, v, w, ó du, dv, dw; luego se tendrá

$$dz=d.(u+v-w)=du+dv-dw;$$

es decir, que *la diferencial de una funcion de* x *compuesta de muchos términos, se tendrá tomando la diferencial de cada término con el signo de que esté afecto dicho término.*

134 Entendido esto, pasarémos al producto de dos funciones de una misma variable. Sea $z=ut$, donde u y t son funciones de x, ó lo que es lo mismo, $u=f.x$, $t=f.x$, lo que dará (§ 127)

$$\begin{aligned} z'=u't'&=(u+A\,\Delta x+B\,\Delta x^2+\&c.)(t+A'\Delta x+\&c.)\\ &=ut+At\,\Delta x+Bt\,\Delta x^2+\&c.\\ &\quad+A'u\Delta x+A'A\Delta x^2+\&c.\\ &\quad+B'u\,\Delta x^2+\&c. \end{aligned}$$

y restando de esto $z=ut$, será

$$\begin{aligned} \Delta z=z'-z=\ &At\Delta x+Bt\,\Delta x^2+\&c.\\ &+A'u\Delta x+A'A\Delta x^2+\&c.\\ &+B'u\,\Delta x^2+\&c. \end{aligned}$$

ó hallando la relacion se tendrá

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta x}=\ &A\,t+B\,t\,\Delta x+\&c.\\ &+A'u+A'A\Delta x+\&c.\\ &+B'u\,\Delta x+\&c. \end{aligned}$$

y pasando á los límites, resultará $\frac{dz}{dx}=At+A'u$;

ó quitando el divisor tendrémos

$$dz=Atdx+A'udx=t\times Adx+u\times A'dx;$$

pero Adx es (130) la diferencial du de u, y $A'dx$ es la diferencial dt de t; luego tendrémos

$$dz=d.ut=t\times du+u\times dt;$$

lo que nos espresa *que la diferencial del producto de dos funciones, es igual á la suma de los productos de cada una multiplicada por la diferencial de la otra*; y como siendo u, t funciones de x, las podemos considerar en general como variables, resulta que cuando se tiene una funcion que es el producto de dos variables, para hallar su diferencial, *se multiplicará cada una por la diferencial de la otra*, *y se reunirán estos productos*.

135 Si quisiéramos comparar la diferencial de una funcion con la misma funcion, dividiríamos los dos miembros de la ecuacion $\mathrm{d}.ut=u\mathrm{d}t+t\mathrm{d}u$ por la funcion primitiva ut, y tendríamos $\frac{\mathrm{d}.ut}{ut}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}$; lo que nos suministra otra nueva é importante verdad, á saber, que *la relacion de la diferencial de una funcion de dos variables con la misma funcion, es igual á la suma de las relaciones que tiene la diferencial de cada variable con la misma variable*; la cual nos conducirá á la espresion de la diferencial de un producto compuesto de tantos factores como se quiera; porque si tuviéramos $z=urs$,

haciendo $rs=t$ seria $z=ut$ y $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}t}{t}$;

pero como $\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{\mathrm{d}.rs}{rs}=\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}$ y $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}.urs}{urs}$

tendrémos $\frac{\mathrm{d}.urs}{urs}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}$;

del mismo modo se hallaria que siendo $z=ursty\ldots$

se tendria $\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{\mathrm{d}.ursty\ldots}{ursty\ldots}=\frac{\mathrm{d}u}{u}+\frac{\mathrm{d}r}{r}+\frac{\mathrm{d}s}{s}+\frac{\mathrm{d}t}{t}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\ldots$

y si ahora quitamos el denominador, se tendrá

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}.ursty\ldots=rsty\ldots\mathrm{d}u+usty\ldots\mathrm{d}r+urty\ldots\mathrm{d}s+ursy\ldots\mathrm{d}t+urst\ldots\mathrm{d}y+\&c.$$

que nos dice que cualquiera que sea el número de variables de una funcion, *la diferencial de su producto será igual á la suma de los productos de la diferencial de cada una de ellas por el producto de las demas.*

136 Si la funcion z estuviese representada por el quebrado $\frac{u}{t}$, tendríamos $\frac{u}{t}=z$, de donde $u=zt$, y $du=zdt+tdz$; de donde despejando dz, sacarémos $dz=\frac{du}{t}-\frac{zdt}{t}$; y sustituyendo en lugar de z su valor $\frac{u}{t}$, resultará

$$dz=d.\frac{u}{t}=\frac{du}{t}-\frac{\frac{u}{t}}{t}dt=\frac{du}{t}-\frac{udt}{t^2}=\frac{tdu-udt}{t^2};$$

de donde se sigue que *la diferencial de un quebrado es igual al denominador multiplicado por la diferencial del numerador, ménos el numerador por la diferencial del denominador, dividido todo por el cuadrado del denominador.*

Si el numerador es constante y la funcion es $z=\frac{a}{t}$, harémos $u=a$; y como a no tiene diferencial por ser constante, el término $tdu=tda=t\times 0=0$ desaparecerá de la espresion anterior, y será $dz=d.\frac{a}{t}=-\frac{adt}{t^2}$; que nos dice que *la diferencial de un quebrado cuyo numerador es constante, es igual al numerador tomado con un signo contrario, multiplicado por la diferencial del denominador, y dividido por el cuadrado del denominador.*

137 Para hallar la diferencial de la funcion $z=x^n$, supondrémos primero que n sea un número entero y

positivo, y por lo mismo z será el producto de un número n de factores iguales á x; por lo que (135) será

$$\frac{dz}{z}=\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{d.xxxxx.....}{xxxxx.....}=\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+\frac{dx}{x}+....$$

y como siendo n el número de los factores del primer miembro, el segundo tambien se compone de tantos términos como unidades hay en n, y todos estos son iguales á $\frac{dx}{x}$, se tendrá $\frac{dz}{z}=\frac{d.x^n}{x^n}=\frac{ndx}{x}$,

ó quitando el divisor será $dz=d.x^n=\frac{nx^n dx}{x}=nx^{n-1}dx$.

138 Si suponemos ahora que la funcion sea $z=x^{\frac{p}{q}}$ siendo p y q números enteros y positivos, elevando á la potencia q tendrémos $z^q=x^p$, de donde $d.z^q=d.x^p$; pero siendo p y q números enteros y positivos, se tendrá por lo acabado de demostrar,

$d.z^q=qz^{q-1}dz$, y $d.x^p=px^{p-1}dx$;

luego resultará $qz^{q-1}dz=px^{p-1}dx$,

y despejando dz será $dz=\frac{px^{p-1}dx}{qz^{q-1}}=\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{\left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{q-1}}=$

$$\frac{p}{q}\times\frac{x^{p-1}dx}{x^{p-\frac{p}{q}}}=\frac{p}{q}x^{p-1-p+\frac{p}{q}}dx=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx,$$

que es lo mismo que ántes, suponiendo $n=\frac{p}{q}$.

139 En fin, si fuese negativo el esponente y le representásemos por $-n$, se tendria $z=x^{-n}=\frac{1}{x^n}$,

de donde observando lo espuesto (136) se saca

$$dz = d.x^{-n} = d.\frac{1}{x^n} = \frac{-d.x^n}{x^{2n}} = -\frac{d.x^n}{x^{2n}};$$

y como por lo que precede $d.x^n = nx^{n-1}dx$,

resultará $dz = d.x^{-n} = -\frac{nx^{n-1}dx}{x^{2n}} =$

$$-nx^{n-1-2n}dx = -nx^{-n-1}dx.$$

De esta enumeracion de casos en que puede hallarse el esponente n, resulta que para diferenciar una potencia cualquiera de una cantidad variable ó de una funcion, *se multiplicará por su esponente*, *se disminuirá despues el esponente en una unidad*, *y el resultado se multiplicará por la diferencial de la variable ó de la funcion.*

140 Vamos á aplicar estas reglas á algunos casos para ejercicio de los principiantes.

1.° Sea $z = ax^5 - bx^4 + c$;

por lo espuesto (133) tendrémos

$$dz = d.ax^5 - d.bx^4 + d.c = 5ax^4dx - 4bx^3dx;$$

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx} = 5ax^4 - 4bx^3$.

2.° Sea ahora $z = ax + bx\sqrt{x} - \frac{c}{x^2}$;

tomando separadamente la diferencial de cada término, la del primero es adx: el segundo puesto bájo la forma $bx^{\frac{3}{2}}$

da $d.bx^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}bx^{\frac{3}{2}-1}dx = \frac{3}{2}bx^{\frac{1}{2}}dx = \frac{3}{2}b\sqrt{x} \times dx$;

la del tercero $\frac{c}{x^2}$ es (§ 136) $-\frac{2cxdx}{x^4} = -\frac{2cdx}{x^3}$;

y reuniendo los resultados parciales, se tendrá

$$dz = adx + \frac{3}{2}b\sqrt{x} \times dx + \frac{2cdx}{x^3} = \left(a + \frac{3}{2}b\sqrt{x} + \frac{2c}{x^3}\right)dx;$$

y el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=a+\frac{3}{2}b\sqrt{x}+\frac{2c}{x^3}$.

3.° Sea ahora $z=(a-bx^m)^n$.
Para aplicar á ella la regla (139) se considerará el binomio $a-bx^m$ como una funcion particular u, de modo que será $z=u^n$; y observando que la diferencial de u^n es $nu^{n-1}du$, se concluirá

$$dz=n(a-bx^m)^{n-1}d.(a-bx^m);$$

y como
$d.(a-bx^m)=d.-bx^m=-bd.x^m=-mbx^{m-1}dx$,
resulta $dz=n(a-bx^m)^{n-1}\times-mbx^{m-1}dx=$
$-nmbx^{m-1}\times(a-bx^m)^{n-1}dx$.

4.° Si fuese $z=\sqrt{ax-bx^2+cx^3}$, se mirará este trinomio como una funcion particular u; y como la diferencial de $\sqrt{u}$ ó de $u^{\frac{1}{2}}$,

es $\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1}du=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}du=\frac{du}{2\sqrt{u}}$ (A),

resultará $dz=d.u^{\frac{1}{2}}=\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{d.(ax-bx^2+cx^3)}{2\sqrt{ax-bx^2+cx^3}}=$

$$\frac{adx-2bxdx+3cx^2dx}{2\sqrt{ax-bx^2+cx^3}}.$$

141 El resultado (A) de la diferenciacion del radical $\sqrt{u}$, manifiesta que *la diferencial de un radical de segundo grado se obtiene dividiendo la de la cantidad que se encuentra debajo del signo radical por el duplo del radical.*

142 Cuando se tiene una ecuacion entre tres variables, es necesario fijar los valores de dos cualesquiera de estas para determinar la tercera, que por consiguiente es una funcion de las otras dos.

Si se tiene por ejemplo la ecuacion $x^2+u^2+z^2=a^2$, no se podrá obtener z sin haber señalado de antemano valores á x y á u; pero conviene observar que no estando las cantidades x y u enlazadas por ninguna relacion, la segunda puede permanecer la misma aunque la primera haya mudado, y recíprocamente. De donde resulta que el valor de z puede variar: 1.° en consecuencia de una mudanza que haya sobrevenido á x ó á u solamente: y 2.° por el concurso de estas dos circunstancias. Como en el primer caso la cantidad u ó la x se considera como constante, la ecuacion propuesta viene á ser en realidad una ecuacion de dos variables; así, cuando x sola varía, se tiene diferenciando y dividiendo por 2, que

$$x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z=0, \text{ ó } x+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0;$$

y cuando u varía, será $u\mathrm{d}u+z\mathrm{d}z=0$, ó $u+z\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=0$.

Luego se tiene sucesivamente

$$\mathrm{d}z=-\frac{x\mathrm{d}x}{z},\ \mathrm{d}z=-\frac{u\mathrm{d}u}{z};$$

donde se debe advertir que la primera de estas diferenciales es relativa á la variabilidad particular de x, y la segunda á la de u; lo que se espresa diciendo que la una es *la diferencial parcial* relativa á x, y la otra *la diferencial parcial* relativa á u.

Los coeficientes diferenciales análogos son:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{z},\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=-\frac{u}{z}.$$

143 En general cuando se trata de una funcion de muchas variables, se debe tener presente que en $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}$, la espresion $\mathrm{d}z$ es la diferencial parcial relativa á u; más para mayor claridad se señala la diferencial parcial de z con relacion á x por $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$, y con relacion á u por $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}u$.

De las diferenciales segundas, terceras, &c.

144 Siendo el coeficiente diferencial una nueva funcion de x, se puede someter á la diferenciacion, y dar para el límite de la relacion de su incremento con el de la variable x, un nuevo coeficiente diferencial que será tambien una funcion de x. Haciendo suceder así unas diferenciales á otras, se deduce de la funcion propuesta una serie de límites ó de coeficientes diferenciales, que se distinguen en órdenes, segun el número de diferenciaciones que se han hecho para obtenerlos.

Así es, que siendo $z=\text{f}.x$, si al primer coeficiente diferencial le llamamos A, tendrémos $\frac{\text{d}z}{\text{d}x}=A$; y como A es funcion de x que se deriva de $\text{f}.x$, la llamarémos $\text{f}.'x$; y siendo $A=\text{f}.'x$, será susceptible de diferenciacion, y el coeficiente diferencial será $\frac{\text{d}A}{\text{d}x}$; que si le llamamos B, como ha de espresar otra funcion de x, que se deriva de $\text{f}.'x$ del mismo modo que $\text{f}.'x$ de $\text{f}.x$, se tendrá $B=\text{f}.''x$,

y su coeficiente diferencial será $\frac{\text{d}B}{\text{d}x}=C=\text{f}.'''x$, &c.

Así, A ó $\text{f}.'x$ representará el coeficiente diferencial de primer órden de la funcion propuesta, ó la *funcion primera* como la llama Lagrange; B el de la funcion A, ó el coeficiente diferencial de segundo órden de la funcion propuesta $\text{f}.x$, &c.; y se debe observar que los coeficientes B, C &c. se sacan de las diferenciales sucesivas de $\text{d}z$, tomadas en el supuesto de ser $\text{d}x$ constante. Estas diferenciales se señalan de este modo: $\text{d}(\text{d}z)=\text{d}.\text{d}z=\text{d}^2z$, $\text{d}(\text{d}^2z)=\text{d}^3z$, &c.

El esponente que afecta á la característica d, indica una operacion repetida, y no una potencia de la letra d, que jamas se considera aquí como cantidad, sino como un signo.

Esto supuesto, las ecuaciones

$$\frac{dz}{dx}=A,\quad \frac{dA}{dx}=B,\quad \frac{dB}{dx}=C, \text{ \&c.}$$

darán $dz=Adx$, $dA=Bdx$, $dB=Cdx$, &c.

Diferenciando de nuevo la primera sin hacer variar á dx, se convertirá en $d^2z=d.Adx=dAdx$; y poniendo en vez de dA su valor sacado de la segunda, se tendrá $d^2z=Bdxdx=Bdx^2$, de donde $B=\frac{d^2z}{dx^2}$; diferenciando de nuevo la ecuacian $d^2z=Bdx^2$, en el mismo supuesto de ser dx constante, se hallará

$$d^3z=d.Bdx^2=dBdx^2;$$

y como por la tercera ecuacion $dB=Cdx$, será

$$d^3z=Cdxdx^2=Cdx^3, \text{ ó } C=\frac{d^3z}{dx^3};$$

luego se tendrá $A=\frac{dz}{dx}$, $B=\frac{d^2z}{dx^2}$, $C=\frac{d^3z}{dx^3}$, &c.

145 Sea la funcion propuesta $z=ax^n$, y se tendrá $dz=d.ax^n=nax^{n-1}dx$; y suponiendo constantes á n y dx en esta ecuacion diferencial, si volvemos á diferenciar será $d^2z=d^2.ax^n=$

$$d.d.ax^n=d.nax^{n-1}dx=nadx\times d.x^{n-1}=$$

$$nadx(n-1)x^{n-2}dx=n(n-1)\times ax^{n-2}dx^2;$$

y del mismo modo se encontrará

$$d^3z=d^3.ax^n=n(n-1)(n-2)ax^{n-3}dx^3,$$

$$d^4z=d^4.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4}dx^4,$$

$$d^5z=d^5.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)ax^{n-5}dx^5;$$

y los coeficientes diferenciales tendrán los valores siguientes:

$$\frac{dz}{dx}=nax^{n-1},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)ax^{n-2},$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)ax^{n-3},$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=n(n-1)(n-2)(n-3)ax^{n-4},$$

&c.

Donde se advierte que en el caso de ser n un número entero positivo, la funcion $z=ax^n$ tendrá un número limitado de diferenciales, y la mas elevada será $d^nz=d^n.ax^n=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)....1adx^n$, espresion que por ser constante no es susceptible de mas diferenciacion; luego se tendrá para el último coeficiente diferencial $\frac{d^nz}{dx^n}=n(n-1)(n-2)(n-3)...1a$, es decir una cantidad constante.

Aplicacion del cálculo diferencial al desarrollo de las funciones algebráicas en series.

146 La teoría que acabamos de esponer, nos va á facilitar un medio muy simple para desenvolver en serie segun las potencias enteras de x, toda funcion suya que sea susceptible de esta forma, y cuyos coeficientes diferenciales sucesivos se puedan encontrar.

Sea $z=f.x$ esta funcion; y como por el supuesto se quiere trasformar en una serie ordenada por las potencias enteras de x, se tendrá

$$z=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\&c. \text{ (m)},$$

y hallando los valores de los coeficientes diferenciales,

será $\frac{dz}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+$&c.

$\frac{d^2z}{dx^2}=2C+2\times3Dx+3\times4Ex^2+$&c.

$\frac{d^3z}{dx^3}=2\times3D+2\times3\times4Ex+$&c.

$\frac{d^4z}{dx^4}=2\times3\times4E+$&c.

&c.

Como las cantidades A, B, C, D, &c. son independientes de x, resulta que el valor que tengan para uno particular de x, ese tendrán para todos; luego sus valores los podrémos determinar haciendo $x=0$; y como haciendo $x=0$, el desarrollo de la funcion primitiva se convierte en A, tenemos que el primer coeficiente A es igual á aquello en que se convierte la funcion primitiva, haciendo en ella la variable igual 0; y si llamamos A', A'', A''', A^{IV}, &c á aquello en que se convierten los coeficientes diferenciales

$$\frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^3z}{dx^3},\ \frac{d^4z}{dx^4},\ \text{\&c.}$$

en este mismo supuesto, se tendrá que haciendo $x=0$ en los valores que acabamos de sacar, será $A'=B$; $A''=1\times2C$; $A'''=1\times2\times3D$; $A^{IV}=1\times2\times3\times4E$, &c.

que dan $B=\frac{1}{1}A'$; $C=\frac{1}{1\times2}A''$; $D=\frac{1}{1\times2\times3}A'''$ &c.

Luego si sustituimos estos valores en la ecuacion (m) resultará

$$z=\text{f}.x=A+\frac{1}{1}A'x+\frac{1}{1\times2}A''x^2+\frac{1}{1\times2\times3}A'''x^3+\text{\&c.}\ (\text{n}).$$

Luego para desenvolver en serie una funcion cualquiera de una variable x, podemos dar esta regla: *supóngase* x=o *en la funcion primitiva, y se tendrá el primer término de la serie; hállese el primer coeficiente diferencial, supóngase en él la variable igual cero, pártase por uno y se tendrá el coeficiente de* x; *y en general para hallar el coeficiente del término donde la variable esté afecta del esponente* n, *hállese el coeficiente diferencial del órden* n, *supóngase en él la variable* x=o, *pártase esto por el producto* 1×2×3×4×5...n, *y se tendrá el coeficiente de* x^n *en el desarrollo de la funcion.*

147 Si tomamos por ejemplo la funcion $z=(a+x)^n$, tendrémos que hacer $x=0$ para encontrar A, y resultará $A=a^n$; hallando el primer coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=n(a+x)^{n-1}$;

y como para sacar el valor de A' es preciso hacer $x=0$, será $A'=na^{n-1}$;

el segundo coeficiente diferencial será

$$\frac{d^2z}{dx^2}=n(n-1)(a+x)^{n-2},$$

que haciendo $x=0$ se convertirá en $A''=n(n-1)a^{n-2}$;

el tercer coeficiente diferencial será

$$\frac{d^3z}{dx^3}=n(n-1)(n-2)(a+x)^{n-3},$$

que haciendo $x=0$ se convertirá en

$$A'''=n(n-1)(n-2)a^{n-3};$$

hallando del mismo modo los demas coeficientes diferenciales, y haciendo en ellos $x=0$, resultará

$$A^{iv}=n(n-1)(n-2)(n-3)a^{n-4},$$
$$A^{v}=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)a^{n-5},$$
&c.

Luego sustituyendo estos valores en la ecuacion (n,146) se convertirá en $z=(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}x+$

$$\frac{n(n-1)}{1\times2}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}a^{n-3}x^3+\&c.$$

Esta fórmula que se conoce con el nombre de *binomio de Neuton*, manifiesta de un modo general las reglas deducidas por analogía (I. 166) y sólo para cuando el esponente era entero; pero como los principios de la diferenciacion los hemos espuesto para todos los valores del esponente, sin suponer el desarrollo del binomio $(a+x)^n$, podemos mirarle ahora como demostrado para todos los casos en que el esponente es entero ó fraccionario, positivo ó negativo.

148 Sea en segundo lugar $z=\frac{a}{a-x}$;

y hallando los coeficientes diferenciales, teniendo presente lo espuesto (136) resultará

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-a\times-1}{(a-x)^2}=\frac{a}{(a-x)^2};\ \frac{d^2z}{dx^2}=\frac{-a\times-2(a-x)}{(a-x)^4}=\frac{2a}{(a-x)^3};$$

$$\frac{d^3z}{dx^3}=\frac{2\times3a}{(a-x)^4};\ \frac{d^4z}{dx^4}=\frac{2\times3\times4a}{(a-x)^5};\ \frac{d^5z}{dx^5}=\frac{2\times3\times4\times5a}{(a-x)^6};\ \&c.$$

Haciendo $x=0$ en la funcion y coeficientes diferenciales, se tendrá sucesivamente

$$A=\frac{a}{a}=1;\ A'=\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a};$$

$$A''=\frac{2a}{a^3}=\frac{2}{a^2};\ A'''=\frac{2\times3a}{a^4}=\frac{2\times3}{a^3};\ A^{\prime v}=\frac{2\times3\times4}{a^4};\ \&c.$$

y sustituyendo en la fórmula (n § 146) y simplificando, se tendrá $z=\frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+\&c.$ que es el mismo resultado que hallámos por otro método (102).

149 Sea por último $z=\sqrt{a+x}=(a+x)^{\frac{1}{2}}$; y tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2(a+x)^{\frac{1}{2}}};\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\frac{1}{4(a+x)^{\frac{3}{2}}};\ \frac{d^3z}{dx^3}=\frac{3}{8(a+x)^{\frac{5}{2}}};\ \&c.$$

y haciendo $x=0$ se tendrá

$$A=a^{\frac{1}{2}},\ A'=\frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}},\ A''=-\frac{1}{4a^{\frac{3}{2}}};\ A'''=\frac{3}{8a^{\frac{5}{2}}};\ \&c.$$

Luego $z=a^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}}-\frac{x^2}{8a^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^3}{16a^{\frac{5}{2}}}-\&c.$

Aplicacion del cálculo diferencial á las diferencias finitas.

150 Hemos visto (126) la forma que tiene el desarrollo de una funcion, cuando en vez de la variable x de que depende, se sustituye $x+\Delta x$ ó $x+k$; y como allí no hemos dado á conocer un método general para determinar A, B, C, &c. inmediatamente, dada la funcion, vamos ahora á manifestarle; pero ántes observarémos que al desenvolver la funcion $z'=f.(x+k)$ la hemos considerado como si fuese una funcion de k, y con relacion á ella la hemos ordenado; luego z' tendrá (§ 146) esta forma

$$z'=A+\frac{A'}{1}k+\frac{A''}{1\times2}k^2+\frac{A'''}{1\times2\times3}k^3+\frac{A^{IV}}{1\times2\times3\times4}k^4+\&c.$$

donde las indeterminadas A, A', &c. representan el valor que toman $z'=f.(x+k)$, $\frac{dz'}{dk}$, $\frac{d^2z'}{dk^2}$, $\frac{d^3z'}{dk^3}$, &c. cuando en estas espresiones se hace $k=0$; pero haciendo $k=0$, la funcion $z'=f.(x+k)$ se convierte en $f.x$, esto es, en z. Por otra parte, los coeficientes diferenciales mirando á k como variable y á x como constante, son los mismos que los que se hallarian considerando á x como variable y á k como constante; porque si suponemos $x'=x+k$, la funcion z' se compondrá de x' del mismo modo que la funcion z

se componia de x; de donde se concluirá $dz'='Adx$; siendo $'A$ una funcion de x', y $dx'=d.(x+k)$; si sólo se hace variar á k, se tendrá

$$dx'=dk,\ dz'='Adk,\ y\ \frac{dz'}{dk}='A;$$

no haciendo variar sino x, se tendrá

$$dx'=dx,\ dz'='Adx\ y\ \frac{dz'}{dx}='A,\ \text{luego}\ \frac{dz'}{dk}=\frac{dz'}{dx}.$$

Como la funcion $'A$ es una funcion de x, se tendrá aun $\frac{d'A}{dk}=\frac{d'A}{dx}$, de donde $\frac{d^2z'}{dk^2}=\frac{d^2z'}{dx^2}$,

y en general $\frac{d^nz'}{dk^n}=\frac{d^nz'}{dx^n}$.

Esto supuesto, cuando $k=0$, z' se convierte en z, y resultará $A'=\frac{dz}{dx}$, $A''=\frac{d^2z}{dx^2}$, $A'''=\frac{d^3z}{dx^3}$, &c.

$$y\ z'=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.\ (p).$$

151 Esta fórmula, que se conoce con el nombre de *teorema de Tailor*, se debe mirar como la base del cálculo diferencial.

Si sustituimos en ella Δx en vez de k, y hallamos la diferencia de la funcion, tendrémos

$$z'-z=\Delta z=\frac{dz}{dx}\times\frac{\Delta x}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{\Delta x^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{\Delta x^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

que podrá servir de fórmula para hallar inmediatamente las diferencias finitas de las funciones, como vamos á manifestar, aplicándola á algunos ejemplos.

1.° Sea $z=ax^3+bx+c$, y tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=3ax^2+b,\ \frac{d^2z}{dx^2}=2\times3ax,\ \frac{d^3z}{dx^3}=2\times3a,\ \frac{d^4z}{dx^4}=0,\ \&c.$$

luego $\Delta z = (3ax^2+b)\dfrac{\Delta x}{1} + 2\times 3ax\dfrac{\Delta x^2}{1\times 2} + 2\times 3a\dfrac{\Delta x^3}{1\times 2\times 3} =$

$$(3ax^2+b)\Delta x + 3ax\Delta x^2 + a\Delta x^3,$$

que es lo mismo que hallámos ántes (118).

2°. Sea $z = ax^4 + 2bx^2 - cx$, y tendrémos

$$\frac{dz}{dx} = 4ax^3 + 4bx - c,\quad \frac{d^2z}{dx^2} = 12ax^2 + 4b,\quad \frac{d^3z}{dx^3} = 24ax,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4} = 24a,\quad \frac{d^5z}{dx^5} = 0,\ \&c.$$

sustituyendo y simplificando, nos resultará

$$\Delta z = (4ax^3 + 4bx - c)\Delta x + (6ax^2 + 2b)\Delta x^2 + 4ax\Delta x^3 + a\Delta x^4.$$

De la diferenciacion de las funciones trascendentes, y de su desarrollo en series.

152 La funcion mas simple de las trascendentes es $z = a^x$. Cuando se sustituye en ella $x+\Delta x$ en vez de x, se tendrá $z' = a^{x+\Delta x}$;
y restando de esta ecuacion la primitiva será

$$\Delta z = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x \times a^{\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Para desenvolver la espresion $a^{\Delta x}$ de modo que no se halle Δx por esponente, harémos $a = 1+c$, y (147) tendrémos

$$a^{\Delta x} = (1+c)^{\Delta x} = 1 + \frac{\Delta x}{1}\times c + \frac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1\times 2}\times c^2 + \&c.$$

de donde $a^{\Delta x} - 1 = \dfrac{\Delta x}{1}\times c + \dfrac{\Delta x(\Delta x - 1)}{1\times 2}\times c^2 + \&c.$

que ordenando con relacion á Δx se convierte en

$$a^{\Delta x} - 1 = \Delta x\left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{2} + \frac{c^3}{3}\ \&c.\right) + \&c.$$

poniendo en vez de c su valor $a-1$, nos resultará

$$a^{\Delta x}-1=\Delta x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.\right)+\&c.$$

y sustituyendo este valor en el de Δz, se tendrá

$$\Delta z=\Delta.a^x=a^x\left(\Delta x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\&c.\right)+\Delta x^2(\&c.)\right);$$

y hallando la relacion será

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=a^x\left(\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\&c.\right)+\Delta x(\&c.)\right);$$

y pasando á los límites tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=a^x\left(\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.\right);$$

ó llamando k á la cantidad constante

$$\frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\&c.$$

será por último $dz=d.a^x=ka^x dx$.

153 Si continuamos diferenciando considerando constante á dx, será $d^2z=d^2.a^x=d.d.a^x=$

$$d.ka^x dx=kdxd.a^x=kdx\times ka^x dx=k^2a^x dx^2;$$

y del mismo modo hallaríamos que

$$d^3z=d^3.a^x=k^3a^x dx^3; \text{ y que } d^n.a^x=k^na^x dx^n;$$

de donde se sigue que

$$\frac{dz}{dx}=ka^x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=k^2a^x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=k^3a^x,\ldots\ldots\frac{d^nz}{dx^n}=k^na^x;$$

y como haciendo $x=0$, la funcion y sus coeficientes diferenciales se convierten en

$$A=1,\ A'=k,\ A''=k^2,\ A'''=k^3,\ \&c.$$

se tendrá (§146) $a^x=1+\frac{k}{1}x+\frac{k^2}{1\times2}x^2+\frac{k^3}{1\times2\times3}x^3+\&c.$

Donde se ve que hemos llegado al desarrollo de la funcion a^x, el cual nos servirá para conocer el oríjen de la cantidad representada por k.

Si ahora suponemos $x=1$, nos resultará

$$a=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\times2}+\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Esta ecuacion no es á propósito para hacer conocer á a por medio de k, sino cuando esta cantidad es pequeña; por lo mismo buscarémos el valor que debe tener a cuando $k=1$, y llámandole e, será

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{1\times2\times3\times4}+\&c.$$

Continuando esta serie y valuando los términos en decimales se hallará $e=2,71828\ 18284\ 59045$ &c.

154 Esto supuesto, pues que este valor corresponde á $k=1$, se sigue que

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

y que igualmente $e^k=1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1\times2}+\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$

luego se tendrá $e^k=a$. Ahora, si por una y otra parte se toman los logaritmos, se obtendrá $k\log.e=\log.a$,

ó $k=\frac{\log.a}{\log.e}$ y de consiguiente $d.a^x=ka^x dx=\frac{\log.a}{\log.e}a^x dx$;

y si consideramos que estos logaritmos se toman en el sistema cuya base sea a, que (I. 206) dará $\log.a=1$,

se tendrá $k=\frac{1}{\log.e}$, y $d.a^x=\frac{1}{\log.e}a^x dx$.

Si tomásemos los logaritmos en el sistema cuya base fuese e, los cuales señalarémos con sola la inicial l, seria $l.e=1$, y se tendria $d.a^x=a^x dx\times l.a$ (m).

155 Ahora podemos hallar fácilmente la diferencial de toda funcion logarítmica. En efecto, si se llama a la base del sistema, z el número y x el logaritmo, se tendrá (I. 207) la ecuacion $z=a^x$; y tomando las diferenciales de ambos miembros en-

contrarémos $dz=ka^x dx=kz dx$,

de donde se sacará $dx=\frac{dz}{kz}=\frac{dz}{ka^x}$;

ó poniendo en vez de x su espresion log.z, en vez de a^x su valor z, y en vez de k su valor $\frac{1}{\log.e}$ (§154), se tendrá $d.\log.z=\log.e\frac{dz}{z}$ (m).

El número e es la base del sistema de logaritmos que se llaman *neperianos*; y como estos ocurren con mucha frecuencia en los cálculos, y á ellos se han de referir los de los demas sistemas, por eso los hemos señalado sólo con la característica l; así, con relacion á este sistema tendrémos $l.e=1$,

$d.a^x=a^x dx l.a$ y $d.l.z=\frac{dz}{z}$ (n).

156 Si queremos comparar los logaritmos de un mismo número z en dos distintos sistemas, el uno cuya base sea e y el otro cuya base sea a, se tendrá $z=e^{l.z}$ y $z=a^{\log.z}$; donde sale $e^{l.z}=a^{\log.z}$; y tomando los logaritmos de ambos miembros en el sistema cuya base sea a, se tendrá

$$\log.e^{l.z}=\log.a^{\log.z},$$

ó $l.z\times\log.e=\log.z\times\log.a=\log.z$ (p), por ser $\log.a=1$.

Ahora, como todos los sistemas de logaritmos se refieren al de Néper, se llama *módulo* al número log.e, por el cual se debe multiplicar un logaritmo neperiano para pasar al logaritmo del mismo número en otro sistema. Así, para determinar el módulo correspondiente á un sistema cualquiera, no hay mas que hallar el logaritmo de $e=2,71828182$ &c. en dicho sistema; y como el logaritmo de este número en el sistema tabular cuya base es 10, está representado por 0,4342948 &c.,

resulta que este es el módulo del sistema tabular.

Luego si llamamos M á dicho módulo, tendrémos (ec.p) $\log.z=M\times l.z$, y (ec.m) $d.\log.z=M\times\frac{dz}{z}$ (q).

La espresion (q) quiere decir que *la diferencial del logaritmo de un número es igual al producto del módulo por el cociente de la diferencial del número partida por el mismo número*; y (155 ec. m) si es en el sistema de Néper en que $\log.e=1$, *la diferencial del logaritmo de un número es igual á la diferencial del número partida por el mismo número.*

157 Si se quisiese pasar de aquí al desarrollo de x en z, ó del logaritmo en potencias del número, se hallaria que las cantidades $x, \frac{dx}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}$, &c. eran infinitas en el supuesto de $z=a^x=0$, y se concluiria que siendo z el número no se podria desenvolver x en una serie de esta forma $x=A+Bz+Cz^2+Dz^3+$&c.

No sucederia lo mismo si en vez de representar el número por z, le representáramos por un binomio $1+u$; porque entónces seria $1+u=a^x$, que en el sistema cuya base es a, da $x=\log.(1+u)$, y diferenciando será

$$\frac{dx}{du}=M\times\frac{1}{1+u},\ \frac{d^2x}{du^2}=M\frac{1}{(1+u)^2},\ \frac{d^3x}{du^3}=M\frac{2}{(1+u)^3},\ \&$$

que haciendo $u=0$, sustituyendo los valores que resulten en la espresion ((n) 146), y sacando fuera de un paréntesis el factor M, se tendrá

$$\log.(1+u)=M(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\&c.);$$

y suponiendo $M=1$, se tendrá el logaritmo neperiano de $1+u$, que será $l.(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+$&c.

158 Vamos á aplicar estos principios á algunos

ejemplos de diferenciacion, en el supuesto de que los logaritmos sean neperianos.

1.º Sea $z = \mathrm{l}.\dfrac{ax}{b-x}$;

que haciendo $\dfrac{ax}{b-x} = u$ se tendrá $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$;

pero $\mathrm{d}u = \dfrac{a(b-x)\mathrm{d}x + ax\mathrm{d}x}{(b-x)^2} = \dfrac{ab\mathrm{d}x}{(b-x)^2}$;

luego $\mathrm{d}z = \dfrac{\mathrm{d}u}{u} = \dfrac{ab\mathrm{d}x}{(b-x)^2} : \dfrac{ax}{b-x} = \dfrac{b\mathrm{d}x}{x(b-x)}$.

2.º Sea $z = \mathrm{l}.(a - bx + \sqrt{cx})$, y tendrémos

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}.(a-bx+\sqrt{cx})}{a-bx+\sqrt{cx}} = \frac{-b\mathrm{d}x + \dfrac{c\mathrm{d}x}{2\sqrt{cx}}}{a-bx+\sqrt{cx}} = \frac{(c - 2b\sqrt{cx})\mathrm{d}x}{2\sqrt{cx}(a-bx+\sqrt{cx})}.$$

159 La consideracion de los logaritmos facilita mucho la diferenciacion de las funciones esponenciales, cuando son complicadas.

1.º Sea por ejemplo $z = u^t$, siendo t y u dos funciones cualesquiera de x; tomando el logaritmo de cada miembro se tendrá $\mathrm{l}.z = t\mathrm{l}.u$;

y diferenciando despues, será $\dfrac{\mathrm{d}z}{z} = t\dfrac{\mathrm{d}u}{u} + \mathrm{l}.u \times \mathrm{d}t$,

de donde $\mathrm{d}z = z(t\dfrac{\mathrm{d}u}{u} + \mathrm{l}.u\mathrm{d}t)$, ó $\mathrm{d}.u^t = u^t(t\dfrac{\mathrm{d}u}{u} + \mathrm{l}.u\mathrm{d}t)$.

2.º Sea $z = a^{b^x}$; haciendo $b^x = t$, se tendrá $z = a^t$; y (154 ec. m) será $\mathrm{d}z = a^t\mathrm{d}t \times \mathrm{l}.a$;

y como $dt = d.b^x = b^x dx l.b$, resulta $dz = a^{b^x} b^x dx l.al.b$.

160 Pasemos ahora á las funciones circulares, y supongamos que se tenga primero $z = \text{sen}.x$; sustituyendo $x + \Delta x$ en vez de x, será

$z' = \text{sen}.(x + \Delta x) = $ (I.§460) $\text{sen}.x \cos.\Delta x + \text{sen}.\Delta x \cos.x$, de donde se saca para la diferencia

$z' - z = \Delta z = \Delta.\text{sen}.x = \text{sen}.x \cos.\Delta x + \text{sen}.\Delta x \cos.x -$

$\text{sen}.x = \text{sen}.x(\cos.\Delta x - 1) + \cos.x \,\text{sen}.\Delta x$.

Y tomando la relacion será

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \text{sen}.x \frac{\cos.\Delta x - 1}{\Delta x} + \cos.x \frac{\text{sen}.\Delta x}{\Delta x} =$$

$$- \text{sen}.x \frac{1 - \cos.\Delta x}{\Delta x} + \cos x \frac{\text{sen}.\Delta x}{\Delta x};$$

y como $\text{se}.\Delta x^2 = 1 - \cos.\Delta x^2 = (1 + \cos.\Delta x)(1 - \text{co}.\Delta x)$ sacando de aquí el valor de $1 - \cos.\Delta x$, será

$$1 - \cos.\Delta x = \frac{\text{sen}.\Delta x^2}{1 + \cos.\Delta x};$$

luego sustituyendo arriba este valor se tendrá

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = - \frac{\text{sen}.x}{\Delta x} \times \frac{\text{sen}.\Delta x^2}{1 + \cos.\Delta x} + \cos.x \times \frac{\text{sen}.\Delta x}{\Delta x} =$$

$$\left(- \text{sen}.x \times \frac{\text{sen}.\Delta x}{1 + \cos.\Delta x} + \cos.x\right) \frac{\text{sen}.\Delta x}{\Delta x};$$

y para pasar á los límites buscarémos en lo que se convierten los dos factores del segundo miembro cuando el incremento Δx se desvanece.

En este caso $\text{sen}.\Delta x = 0$, $\cos.\Delta x = 1$, y el primer factor se reduce á $\cos.x$.

El factor $\frac{\text{sen}.\Delta x}{\Delta x}$ se acerca sin cesar á la unidad, porque de $\text{tang}.A = \frac{\text{sen}.A}{\cos.A}$, se deduce $\frac{\text{sen}.A}{\text{tang}.A} = \cos.A$;

y pues que $\cos.A=1$ cuando $A=0$, la unidad será el límite de la relacion entre el seno y la tangente cuando el arco se desvanece; pero siendo el arco menor que la tangente y mayor que el seno, se sigue que con mayor razon su relacion con el seno se acerca sin cesar á la unidad; luego se tendrá en virtud de todo esto

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d.\mathrm{sen}.x}{dx}=\cos.x,\ \text{ó}\ dz=d.\mathrm{sen}.x=\cos.x dx.$$

161 Obtenida la diferencial del seno, las otras se deducen de ella con facilidad; porque se tiene

1.° $\mathrm{Cos}.x=\mathrm{sen}.(\frac{1}{2}\pi-x)$, $d.\cos.x=d.\mathrm{sen}.(\frac{1}{2}\pi-x)$; y como por lo que precede $d.\mathrm{sen}.(\frac{1}{2}\pi-x)=$

$$d.(\tfrac{1}{2}\pi-x)\cos.(\tfrac{1}{2}\pi-x)=-dx.\cos.(\tfrac{1}{2}\pi-x),$$

y (I. § 459 cor.) $\cos.(\frac{1}{2}\pi-x)=\mathrm{sen}.x$, será

$$d.\cos.x=-dx\,\mathrm{sen}.x.$$

2.° Siendo $\mathrm{tang}.x=\frac{\mathrm{sen}.x}{\cos.x}$, tendrémos (§ 136)

$$d.\mathrm{tang}.x=\frac{\cos.x d.\mathrm{sen}.x-\mathrm{sen}.x d.\cos.x}{\cos.x^2}=$$

$$\frac{\cos.x dx \cos.x-\mathrm{sen}.x\times-dx\,\mathrm{sen}.x}{\cos.x^2}=\frac{\mathrm{co}.x^2dx+\mathrm{se}.x^2dx}{\cos.x^2}=$$

$$\frac{(\cos.x^2+\mathrm{sen}.x^2)dx}{\cos.x^2}=\frac{dx}{\cos.x^2}.$$

3.° Como $\cot.x=\frac{1}{\mathrm{tang}.x}$, será

$$d.\cot.x=\frac{-\frac{dx}{\cos.x^2}}{\mathrm{tang}.x^2}=-\frac{\frac{dx}{\cos.x^2}}{\frac{\mathrm{sen}.x^2}{\cos.x^2}}=-\frac{dx}{\mathrm{sen}.x^2}.$$

4.º Como $\mathrm{sec}.x = \frac{1}{\cos.x}$, será

$$\mathrm{d.sec}.x = \frac{-\mathrm{d.cos}.x}{\cos.x^2} = \frac{\mathrm{sen}.x\mathrm{d}x}{\cos.x^2} =$$

$$\frac{\mathrm{sen}.x}{\cos.x} \times \frac{1}{\cos.x}\mathrm{d}x = \mathrm{tang}.x\mathrm{sec}.x\mathrm{d}x.$$

5.º Como $\mathrm{cosec}.x = \frac{1}{\mathrm{sen}.x}$, será

$$\mathrm{d.cosec}.x = -\frac{\mathrm{d.se}.x}{\mathrm{sen}.x^2} = -\frac{\cos.x\mathrm{d}x}{\mathrm{sen}.x^2} = -\mathrm{cot}.x\mathrm{cosec}.x\mathrm{d}x.$$

162 Tambien el arco es funcion de las líneas trigonométricas; por lo que vamos á buscar su diferencial bájo este punto de vista. Para esto, sea x la funcion propuesta, y z la variable de que depende, y tendrémos (160) que la ecuacion $\mathrm{d.sen}.x = \mathrm{d}x\cos.x$, á causa de $\mathrm{sen}.x = z$, y $\cos.x = \sqrt{1-z^2}$,

da $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\sqrt{1-z^2}$, y por consiguiente $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}$;

que es *la diferencial del arco espresada por el seno y por su diferencial.*

Para espresarla por su coseno, partirémos de la ecuacion $\mathrm{d.cos}.x = -\mathrm{d}x\mathrm{sen}.x$;

que haciendo $\cos.x = z$, da $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{sen}.x} = -\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1-z^2}}$.

Sea $\mathrm{tang}.x = z$; la ecuacion $\mathrm{d.tang}.x = \frac{\mathrm{d}x}{\cos.x^2}$

da $\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}x}{\cos.x^2}$, y $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z\cos.x^2$;

y como (I. § 445 esc.) $\cos.x^2 = \frac{1}{1+\mathrm{tang}.x^2} = \frac{1}{1+z^2}$, poniendo este valor en el de dx, resultará $dx=\frac{dz}{1+z^2}$; de donde se puede concluir que *la diferencial del arco es igual á la diferencial de la tangente dividida por el cuadrado de la secante*; porque $\sqrt{1+z^2}$ espresa la secante cuando z es la tangente.

163 Por medio de las diferenciales que acabamos de obtener, se pueden desenvolver en serie las principales funciones circulares.

Para $z=\text{sen}.x$, se tiene

$$\frac{dz}{dx}=\text{co}.x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\text{se}.x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=-\text{co}.x,\ \frac{d^4z}{dx^4}=\text{se}.x\ \&c.$$

que haciendo $x=0$, será

$A=0$, $A'=1$, $A''=0$, $A'''=-1$, $A^{IV}=0$, $A^{V}=1$ &c.

de donde (146) se concluirá

$$z=\text{sen}.x=x-\frac{x^3}{1\times2\times3}+\frac{x^5}{1\times2\times3\times4\times5}\ \&c.$$

que es *el valor del seno espresado por el arco.*

Para $z=\cos.x$, tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^2z}{dx^2}=-\cos.x,\ \frac{d^3z}{dx^3}=\text{sen}.x,$$

$$\frac{d^4z}{dx^4}=\cos.x,\ \frac{d^5z}{dx^5}=-\text{sen}.x,\ \frac{d^6z}{dx^6}=-\cos.x;\ \&c.$$

que haciendo $x=0$, resulta $A=1$, $A'=0$, $A''=-1$,

$A'''=0$, $A^{IV}=1$, $A^{V}=0$, $A^{VI}=-1$, &c.

$$\text{y}\ \cos.x=1-\frac{x^2}{1\times2}+\frac{x^4}{1\times2\times3\times4}-\frac{x^6}{1\times2\times3\times4\times5\times6}+\&c.$$

Del mismo modo se pueden hallar todas las demas líneas trigonométricas en valores de sus arcos, y el de estos espresados por las líneas; pero aquí sólo hallarémos el del arco espresado por su seno.

Para esto, sea z el arco y x el seno correspondiente, y tendrémos (§ 162) $dz = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

lo que dará $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{d^3z}{dx^3} =$

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{d^4z}{dx^4} = \frac{3\times 3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\times 5x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^5z}{dx^5} = \frac{3\times 3}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{25\times\times 9x^2}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{3\times 5\times 7x^4}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}; \text{ \&c.}$$

de donde haciendo $x=0$, y teniendo presente que entónces es tambien $z=0$, resultará

$A=0$, $A'=1$, $A''=0$, $A'''=1$, $A^{\prime v}=0$, $A^{v}=3\times 3$ &c.;

y por lo mismo será $z = x + \frac{x^3}{1\times 2\times 3} + \frac{3\times 3x^5}{1\times 2\times 3\times 4\times 5} + \text{\&c.}$

De la diferenciacion de cualesquiera ecuaciones de dos variables.

164 Hasta aquí sólo hemos diferenciado ecuaciones separadas, es decir, ecuaciones en que la variable se hallaba sola en un miembro y la funcion en el otro; tales son las ecuaciones de la forma $Z=X$, siendo Z una funcion de z, y X una funcion de x; pero en el mayor número de ecuaciones que se encuentran en las investigaciones analíticas, la variable y la funcion se hallan mezcladas ó combinadas entre sí.

Cuando se tiene una ecuacion cualquiera $V=0$, entre x y z, su efecto es determinar z por medio de x, ó x por medio de z, de manera que una de estas cantidades es funcion de la otra. Si concebimos que se haya determinado z por medio de x, sustituyendo la espresion de z en V, esta se convertirá en una funcion de x sola; pero compuesta de términos que se destruirán independientemente de ningun valor particular de x, pues que este valor debia permanecer indeterminado. De donde se sigue que la cantidad V se debe mirar implícitamente como una funcion de x, que es nula para todos los valores que puede recibir esta variable, y que por consiguiente su diferencial debe ser nula tambien; luego en este caso la diferencial de z se deberá tomar considerándola como funcion de x, lo que hará que tenga esta forma $\mathrm{d}z=A\mathrm{d}x$; por lo cual si se toma la diferencial de V bájo este aspecto, y se la iguala con cero, se tendrá la ecuacion que debe determinar á A en esta hipótesis.

Aclaremos esto por medio de un ejemplo.

Sea la ecuacion $z^2-2mxz+x^2-a^2=0$;
si en ella se sustituye en vez de z su valor

$$mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2},$$

sacado de la misma ecuacion, se convertirá en una funcion de x sola, cuyos términos todos se destruirán; así, su diferencial bájo esta forma será igual con cero. Pero diferenciando el primer miembro en el supuesto de ser z funcion de x, se tendrá

$$2z\mathrm{d}z-2mx\mathrm{d}z-2mz\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}x=0,$$

ó suprimiendo el factor comun 2 será

$$z\mathrm{d}z-mx\mathrm{d}z-mz\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x=0 \text{ (M)},$$

ó $(z-mx)\mathrm{d}z-(mz-x)\mathrm{d}x=0$,

que da $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=A=\frac{mz-x}{z-mx}$ (N);

y sustituyendo en este valor de A el de z, será

$$A=\frac{-x+m^2x\pm m\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}{\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=$$

$$m\pm\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}};$$

resultado idéntico al que se deduciria de la ecuacion separada $z=mx\pm\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}$, que (140) daria

$$\frac{dz}{dx}=m\pm\frac{-2x+2m^2x}{+2\sqrt{a^2-x^2+m^2x^2}}=m\pm\frac{-x+m^2x}{\sqrt{a^2-x^2-m^2x^2}}.$$

165 Aplicando el mismo razonamiento á la ecuacion $(z-mx)A-mz+x=0$, que se deduce de la (N), considerando en ella á z y A como funciones de x, resulta la ecuacion $(dz-mdx)A+(z-mx)dA-mdz+dx=0$; y haciendo $dz=Adx$, y $dA=Bdx$, y dividiendo por dx, resultará $(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0$; ecuacion que da la relacion que el coeficiente diferencial del segundo órden B, ó $\frac{d^2z}{dx^2}$ debe tener con el de primer órden A ó $\frac{dz}{dx}$, y con las variables z y x.

Continuando diferenciando de la misma manera, se formaria la ecuacion de que dependiese el coeficiente diferencial de tercer órden, y así en adelante.

Si se atiende á que $B=\frac{d^2z}{dx^2}$, y que $d^2z=d.(dz)$, se reconocerá que la ecuacion

$$(A-m)A+(z-mx)B-mA+1=0,$$

se deduce desde luego de la ecuacion (M), cuando se diferencia haciendo variar en ella dz como una funcion de x, y dividiendo despues por dx^2. En efecto, diferenciando y reduciendo se tiene

$$dz^2+zd^2z-2mdxdz-mxd^2z+dx^2=0 \text{ (P)};$$

y reduciendo y dividiendo por dx^2 será

$$\frac{dz^2}{dx^2}-2m\frac{dz}{dx}+(z-mx)\frac{d^2z}{dx^2}+1=0;$$

ecuacion que cuando se muda en ella

$$\frac{dz}{dx} \text{ en } A \text{ y } \frac{d^2z}{dx^2} \text{ en } B,$$

se trasforma en la que hemos obtenido ántes para determinar B.

En general, hacer variar las cantidades $A, B, C,$ &c. como funciones de x, es tomar las diferenciales de las espresiones equivalentes $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}$ &c.; en una palabra, es considerar á dz, d^2z &c. como funciones de x.

La ecuacion (M) es *la diferencial primera de la propuesta*; la ecuacion (P) es *su diferencial segunda*, &c. y segun la observacion hecha ántes, *las diferenciales de una ecuacion primitiva propuesta, se deducen las unas de las otras por la diferenciacion, considerando á* z, *dz*, d^2z &c. *como funciones de* x.

Se pasa á las ecuaciones que dan los coeficientes diferenciales, observando que estos coeficientes son

$$\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \&c.$$

ó haciendo $dz=Adx$, $d^2z=Bdx^2$, &c.
por estas últimas sustituciones las diferenciales desaparecen, y sólo quedan en los resultados las funciones $A, B, C,$ &c. absolutamente independientes de x.

Aplicacion del cálculo diferencial para determinar los máximos y mínimos de las funciones de una sola variable.

166 Segun la idea que hemos dado de la funcion, siempre que varíe la variable debe variar la funcion; y como hay muchas funciones que tienen ciertos límites, aunque sus variables reciban todos los valores posibles, es interesante saber en cuántas y en qué ocasiones varía la ley de los incrementos ó decrementos de la funcion, sin variar los de la variable.

En efecto, cuando la variable de que depende una funcion propuesta, pasa sucesivamente por todos los grados de magnitud, sucede algunas veces que la serie de los valores que recibe esta funcion, es al principio creciente y se convierte despues en decreciente; entónces hay en dicha serie uno de estos valores que sobrepuja á los que le anteceden y siguen inmediatamente. Si al contrario, la serie de los valores de la funcion propuesta es al principio decreciente, y se convierte despues en creciente, se encontrará necesariamente uno que será menor que los que le anteceden y siguen inmediatamente.

El término en que el incremento de una funcion se detiene, se llama *máximo*; y aquel en que deja de decrecer, *mínimo*.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $z=2+10x-x^2$, en la cual observarémos
que si $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$, &c.
resulta $z=2, 11, 18, 23, 26, 27, 26$, &c.
donde vemos que cuando $x=5$, resulta para z un valor máximo que es 27, el cual es mayor que los que le preceden y siguen inmediatamente.

Si la ecuacion fuese $z=13-4x+x^2$,
se tendria que haciendo $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$, &c.
resultaria $z=13,\ 10,\ 9,\ 10,\ 13$, &c.
donde vemos que cuando $x=2$ corresponde á z el mínimo 9, que es menor que el que le precede y sigue inmediatamente.

167 Toda funcion que crece ó decrece sin cesar, cuando su variable crece ó decrece, no es susceptible de máximo ni mínimo, pues que á un valor cualquiera sucede siempre uno mayor ó menor.

El carácter esencial del máximo consiste en que los valores que le preceden y siguen inmediatamente, sean menores; el mínimo, al contrario, debe ser menor que los valores que le preceden y siguen inmediatamente.

Se dice *inmediatamente*, porque sucede con frecuencia que una funcion tiene valores que sobrepujan á su máximo, ó que son menores que su mínimo, ó en fin que tiene muchos máximos y mínimos desiguales entre sí; todo lo cual se concibe bien, porque si despues de haber crecido ó decrecido esta funcion, vuelve á crecer de nuevo indefinidamente, acabará por sobrepujar al máximo que tuvo al principio.

En vez de suponer que crece indefinidamente, podemos concebir que decrezca despues de un cierto término, y de aquí nacerá un nuevo máximo que podrá ser diferente del primero; de donde se puede inferir lo que debe suceder cuando estas mudanzas se repiten.

168 Para aplicar el cálculo diferencial á la investigacion de los máximos ó mínimos, se practicará lo siguiente: *hállese el primer coeficiente diferencial, é iguálese con cero; hállense los valores de la variable que satisfacen á esta ecuacion; y si hay máximo ó mínimo, será en alguno de estos valores de la variable.*

Hállense despues los coeficientes diferenciales siguientes; sustitúyase en ellos en vez de la variable cada valor de los que se hallaron en la igualacion á cero del primer coeficiente diferencial; cada valor de estos que reduzca á cero un número impar de coeficientes diferenciales, será un máximo ó un mínimo: será máximo, si el primer coeficiente que no desaparece, tiene el signo negativo; y será mínimo, si tiene el signo positivo. Si la sustitucion de estos valores reduce á cero un número par de coeficientes diferenciales, la funcion propuesta no tendrá máximo ni mínimo.

Sea, por ejemplo, la funcion $z=2+10x-x^2$,

cuyo coeficiente diferencial es $\dfrac{dz}{dx}=10-2x$,

que igualándole con cero da $10-2x=0$,
de donde $x=\frac{10}{2}=5$;
hállese el segundo coeficiente diferencial, y se tendrá

$$\frac{d^2z}{dx^2}=-2;$$

como es independiente de x, no se reducirá á cero por ningun valor que tenga esta variable; luego habiendo sólo desaparecido un coeficiente diferencial, inferimos que cuando $x=5$ hay máximo ó mínimo; y como el primer coeficiente que no desaparece es una cantidad negativa, inferimos que dicho valor es máximo, como debia verificarse (166).

Sea en segundo lugar $z=13-4x+x^2$;

y hallando el coeficiente diferencial será $\frac{dz}{dx}=-4+2x$; que igualado con cero da $x=2$; volviendo á diferenciar será $\frac{d^2z}{dx^2}=2$; cuyo valor constante y positivo, manifiesta que la funcion tiene un mínimo correspondiente á $x=2$, como hallámos ántes (166).

169 Percibida ya la práctica de la regla, vamos á examinar analíticamente la cuestion, para deducirla.

Para esto, sea z una funcion cualquiera de x, y supongamos que x haya llegado al valor que da el máximo ó mínimo de esta funcion; en este caso, se infiere de las ideas del máximo y mínimo, que si se buscan los valores de z correspondientes á $x-k$ y á $x+k$, se deben obtener en ambos supuestos, resultados menores que el máximo, ó mayores que el mínimo.

Espresando por $'z$ el valor de z que corresponde á $x-k$, y por z' el que corresponde á $x+k$, se tendrá (150) por el teorema de Tailor

$$'z=z-\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

$$z'=z+\frac{dz}{dx}\times\frac{k}{1}+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\&c.$$

Y como k puede ser tan pequeña que un término cualquiera sea mayor (112) que la suma de todos los que le siguen, resulta que el término $\frac{dz}{dx}\times k$ podrá cumplir con esta condicion; entónces z será mayor que el primer valor $'z$, y menor que el segundo z'; luego la funcion propuesta no será ni máximo ni mínimo, miéntras que $\frac{dz}{dx}\times k$ no sea nulo. Pero un término no puede ser cero sino lo es alguno de sus factores; y como k no puede ser cero, porque le suponemos un valor determinado, aunque pequeño, se deduce que $\frac{dz}{dx}$ será el que deba ser cero. Luego siendo indispensable que $\frac{dz}{dx}=0$, para que haya un valor máximo ó mínimo, se tendrá entónces

$$'z=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\text{ \&c.}$$

$$z'=z+\frac{d^2z}{dx^2}\times\frac{k^2}{1\times2}+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}\text{ \&c.}$$

y en este caso sí se podrá tener á un mismo tiempo $z<'z$ y $z<z'$, que seria siempre que $\frac{d^2z}{dx^2}$ fuese positivo; $z>'z$, $z>z'$, cuando fuese $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativo; el primer caso daria para z un mínimo, y el segundo un máximo. De donde inferimos que para encontrar cuándo una funcion z debe tener un máximo ó un mínimo (porque en ambos casos los da una misma ecuacion), es necesario buscar la espresion del primer coeficiente diferencial é igualarla á cero, que es la primera parte de la regla.

170 Hemos dicho que para que haya máximo ó mínimo es indispensable que $\frac{dz}{dx}$ sea igual con cero; pero no por esto se debe inferir que siempre que $\frac{dz}{dx}=0$, deba haber máximo ó mínimo. En efecto, si el valor de x que hace nulo el valor de $\frac{dz}{dx}$, hiciese

desvanecer al mismo tiempo $\frac{d^2z}{dx^2}$, sin que $\frac{d^3z}{dx^3}$ desapareciese, se tendria

$$'z=z-\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}-\&c.$$

$$z'=z+\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\&c.$$

y como $\frac{d^3z}{dx^3}\times\frac{k^3}{1\times2\times3}$ podria llegar á ser mayor que la suma de todos los términos que siguen, no habria entónces entre las tres cantidades $'z$, z, z', la subordinacion que conviene al máximo ó al mínimo; pues la media z seria mayor que la una de las estremas, y menor que la otra.

Pero si se tuviese tambien $\frac{d^3z}{dx^3}=0$, resultaria

$$'z=z+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}-\frac{d^5z}{dx^5}\times\frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\&c.$$

$$z'=z+\frac{d^4z}{dx^4}\times\frac{k^4}{1\times2\times3\times4}+\frac{d^5z}{dx^5}\times\frac{k^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\&c.$$

en donde las condiciones del máximo ó del mínimo quedarian aun satisfechas, y daria á conocer el signo de $\frac{d^4z}{dx^4}$ cuál de los dos debia tener lugar.

Del mismo modo se haria ver que en general no puede haber máximo ó mínimo, sino cuando el primero de los coeficientes diferenciales que no desaparece es de un órden par; y si este coeficiente es negativo, la funcion será máximo: y si positivo, mínimo, lo que completa la regla que hemos dado ántes.

171 La teoría de los máximos y mínimos se apli-

ca á todo género de cuestiones; pero como la determinacion se hace siempre por un mismo método, sólo nos detendrémos en la siguiente.

Dividir una cantidad a *en dos partes, tales que su producto sea el máximo de todos los productos semejantes que se podrian formar.*

Sea x una de las partes de a, con lo que la otra será $a-x$; y representando por z el producto cuyo máximo se busca, se tendrá $z=x(a-x)=ax-x^2$; de donde sale $\frac{dz}{dx}=a-2x$, que igualado á cero da $x=\frac{1}{2}a$; volviendo á diferenciar será $\frac{d^2z}{dx^2}=-2$; cuyo valor constante y negativo, manifiesta que el producto es un máximo cuando $x=\frac{1}{2}a$, ó cuando las partes en que se descompone la a son iguales; que es lo mismo que dedujimos en otro lugar (I. 170).

De aquí resulta que si a fuese el semiperímetro de un rectángulo, y se quisiese que este fuese un máximo, no habria mas que costruir un cuadrado, cuyo lado fuese igual á la mitad de a; luego *el cuadrado es el máximo de todos los cuadriláteros isoperímetros.*

Luego *el triángulo rectángulo isósceles, es el mayor de todos los triángulos que se pueden formar cuando se conoce lo que han de componer juntos sus dos catetos*; porque si llamamos t el triángulo, b la base y a la altura, se tendrá $t=\frac{1}{2}ab$, cuyo producto es un máximo cuando $a=b$.

De los valores que toman en ciertos casos los coeficientes diferenciales, y de las espresiones que se convierten en $\frac{0}{0}$.

172 Si se buscase el máximo ó el mínimo de la funcion $az=\sqrt{a^2x^2-x^4}$ por ejemplo, se deduciria de ella $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}}$;

que haciéndole igual con cero daria $x=0$ y $\frac{dz}{dx}=\frac{0}{0}$.

Sin embargo, con un poco de atencion se verá que el numerador y denominador de la fraccion $\frac{a^2x-2x^3}{a\sqrt{a^2x^2-x^4}}$ no se desvanece á un mismo tiempo sino porque están afectos del factor comun x.

Si se suprime en ambos, se hallará $\frac{dz}{dx}=\frac{a^2-2x^2}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, que en el supuesto de ser $x=0$, da

$$\frac{dz}{dx}=\frac{a^2}{a\sqrt{a^2}}=\frac{a^2}{\pm a^2}=\pm 1.$$

En general, si se hace $x=a$ en una espresion de esta forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, se convertirá en $\frac{0}{0}$; pero su verdadero valor debe ser nulo, finito ó infinito, segun se tenga $m>n$, $m=n$, $m<n$, porque borrando los factores comunes al numerador y denominador, se hallará

$\frac{P(x-a)^{m-n}}{Q}$ en el primer caso;

$\frac{P}{Q}$ en el segundo; y $\frac{P}{Q(x-a)^{n-m}}$ en el tercero;

en el supuesto de que las cantidades P y Q no sean nulas ni infinitas por la suposicion de $x=a$.

Luego cuando se tiene una espresion cualquiera bájo la forma $\frac{0}{0}$, es necesario para conocer su verdadera significacion, desprenderla de los factores comunes á su numerador y denominador. La diferenciacion suministra este medio con mucha sencillez.

La diferencial de la espresion $P(x-a)$, en que P es

una funcion cualquiera de x, pero independiente del factor $(x-a)$, es $(x-a)dP+Pdx$,
que no se desvanece ya cuando $x=a$.

Si se diferenciase dos veces la funcion $P(x-a)^2$, se hallaria $(x-a)^2dP+2P(x-a)dx$,
$(x-a)^2d^2P+2(x-a)dPdx+2(x-a)dxdP+2Pdx^2=$
$(x-a)^2d^2P+4(x-a)dPdx+2Pdx^2$;
y como P no contiene á $x-a$, la diferencial segunda se reducirá á su último término; continuando del mismo modo deduciríamos que todas las diferenciales de una espresion de la forma $P(x-a)^m$, hasta la del órden $m-1$ inclusive, se desvanecen en el supuesto de $x=a$, cuando m es un número entero: y que entónces la diferencial del órden m se reduce á $1\times2\times3...mPdx^m$; luego el factor $(x-a)^m$ desaparece despues de m diferenciaciones.

Sea por ejemplo la funcion $x^3-ax^2-a^2x+a^3$, que se desvanece en el supuesto de $x=a$; su diferencial primera se desvanece tambien en esta hipótesis, pero no su diferencial segunda que es $(6x-2a)dx^2$, la cual se encuentra ya libre del factor $(x-a)$; y pues que ha sido necesario para esto diferenciar dos veces de seguida, se debe concluir que es de la forma $P(x-a)^2$; lo que en efecto se verifica, pues que

$$x^3-ax^2-a^2x+a^3=(x+a)(x-a)^2.$$

173 Aplicando lo que precede á la fraccion $\dfrac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$, se verá que diferenciando muchas veces de seguida su numerador y denominador, quedarán libres á un mismo tiempo del factor $(x-a)$ si $m=n$.

Si el numerador es el primero que da un resultado que no se desvanece, será una prueba de que el factor $x-a$ se encuentra elevado en él á una potencia menor que en el denominador, y por consiguiente la fraccion propuesta será infinita; si al contrario es el denominador, la fraccion propuesta será nula. Luego podrémos establecer que *para obtener el verdadero va-*

lor de una fraccion que se convierte en $\frac{0}{0}$, cuando se da á x un valor particular, es necesario diferenciar separadamente su numerador y su denominador, hasta que se encuentre para uno ú otro un resultado que no se desvanezca; la funcion propuesta será infinita en el primer caso, nula en el segundo, y tendrá un valor finito, si se hallan á un mismo tiempo dos resultados que no se aniquilan.

Algunos ejemplos aclararán esto suficientemente.

1.° La fórmula $\frac{x^n-1}{x-1}$, que espresa la suma de la progresion geométrica $\div\div 1:x:x^2:x^3:x^4:x^5:x^6:$&c. se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=1$; sin embargo, esta suma en la progresion geométrica $\div\div 1:1:1:1:$&c. á que nos conduce dicho supuesto, tiene un valor determinado é igual con n, que la regla precedente nos va á suministrar tambien. En efecto, despues de haber diferenciado el numerador y el denominador de la espresion $\frac{x^n-1}{x-1}$,

se halla $\frac{nx^{n-1}dx}{dx}=nx^{n-1}=n$ cuando $x=1$.

174 Aunque no se ve inmediatamente cómo es posible dar la forma $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ á la funcion trascendente $\frac{a^x-b^x}{x}$, que se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=0$, no ostante se le puede aplicar la regla; y despues de haber diferenciado su numerador y denominador, se encuentra $a^x \text{l}.a-b^x \text{l}.b$; que sustituyendo cero en vez de x se convierte en $\text{l}.a-\text{l}.b$, que espresa el valor buscado.

Lo mismo sucede con la espresion $\frac{1-\text{sen}.x+\cos.x}{\text{sen}.x+\cos.x-1}$, que se convierte en $\frac{0}{0}$ cuando $x=\frac{1}{2}\pi$; pero diferenciando su numerador y denominador, se tendrá

$$\frac{-\cos.xdx-\text{sen}.xdx}{\cos.xdx-\text{sen}.xdx}=\frac{-\cos.x-\text{sen}.x}{\cos.x-\text{sen}.x}=1,$$

que es el valor de dicha espresion cuando $x=\frac{1}{2}\pi$.

Aplicacion del cálculo diferencial á la teoría de las líneas curvas.

175 En la descripcion de una línea se observa que todos los puntos se suceden los unos á los otros sin interrupcion ninguna, lo cual constituye lo que llamamos *ley de continuidad.*

En el cálculo se puede hacer que los valores de las funciones, se vayan acercando á esta ley todo lo que se quiera, dando á las variables de que dependen los valores correspondientes. Esta analogía, aunque algo imperfecta, entre la descripcion de las líneas y la marcha del cálculo, dió oríjen al cálculo diferencial.

Las consideraciones geométricas prueban de un modo muy exacto, que la relacion de los incrementos de una funcion y los de su variable, es en general susceptible de límites.

176 *Toda funcion de una variable se puede representar por la ordenada de una curva, de la que esta variable es la abscisa*; porque si vamos dando valores particulares á la abscisa, y tomamos estas partes á lo largo de una línea, y en los estremos se levantan líneas paralelas entre sí, de la magnitud que espresa la funcion en cada caso, tendrémos costruida una curva, cuya ecuacion sea la igualacion de la funcion propuesta con una variable. Ahora, *la relacion de la ordenada de la curva con su subtangente corresponde al coeficiente diferencial de la funcion.* En efecto, si en una curva CD (fig. 37) se tira por dos puntos M y M′ una secante MM′, prolongada hasta que encuentre en S al eje AB de las abscisas, y se tiran despues las ordenadas PM, P′M′, y la recta MQ paralela

á AB, los triángulos semejantes MQM′ y PMS, darán

PM:PS::M′Q:MQ (m), de donde $\frac{PS}{PM}=\frac{MQ}{M'Q}=\frac{\Delta x}{\Delta z}$;

y pasando á los límites se tendrá

$$\text{lím. de } \frac{PS}{PM}=\text{lím. de } \frac{\Delta x}{\Delta z};$$

pero el límite del primer miembro es $\frac{PT}{PM}=\frac{\text{subt.}}{z}$,

porque á medida que el punto M′ se aproxima al punto M, se acerca el S al T, y por consiguiente la subsecante PS á la subtangente PT; y como (129) el límite del segundo miembro es

$$\frac{dx}{dz}, \text{ será } \frac{\text{subt.}}{z}=\frac{dx}{dz} \text{ ó subt.}=z\times\frac{dx}{dz},$$

que es la fórmula general que determina la subtangente de una curva cualquiera; y nos dice *que debemos hallar el valor del coeficiente diferencial* $\frac{dx}{dz}$, *de la abscisa con relacion á la ordenada; multiplicarle por el valor de la ordenada, y este será el valor de la subtangente.*

177 Cuando se dan á la abscisa valores sucesivos, las ordenadas que corresponden á estos valores, determinan en la curva puntos, que se pueden considerar como vértices de los ángulos de un polígono inscrito en esta curva.

Si se toman, por ejemplo, sobre el eje de las abscisas los puntos P, P′, P″ (fig. 38), distantes entre sí una misma cantidad k, se tendrá

$$AP=x,\ AP'=x+k,\ AP''=x+2k,\ \&c.$$

y si se levantan las ordenadas correspondientes PM, P′M′, P″M″, &c. y se unen los puntos M, M′, M″, &c. por cuerdas, se formará el polígono MM′M″ &c. que se diferenciará tanto ménos de la curva propuesta, cuanto mas próximos se hallen entre sí los puntos M, M′, M″, &c.; pero al mismo tiempo el número de sus lados aumentará cada vez mas, pues que la distancia PP′ estará contenida un número de veces mayor en la abscisa determinada AP. Por lo que la curva CD será el *límite* de todos estos polígonos, y por consiguiente las propiedades que convengan á este límite convendrán á la curva propuesta.

Donde debemos advertir que si en lo sucesivo consideramos alguna curva como *un polígono de infinitos lados*, se ha de entender que esta es una espresion abreviada de que *el polígono es tal que la diferencia entre él y su límite*, *que es la curva*, *es menor que cualquier cantidad dada.*

178 De la (prop. III, 176) se saca tambiem

$$\frac{PM}{PS}=\frac{M'Q}{MQ}=\frac{\Delta z}{\Delta x};$$

y pasando á los límites será $\frac{PM}{PT}=\frac{dz}{dx}$;

ahora, por ser el triángulo PMT (fig. 37) rectángulo en P, la relacion $\frac{PM}{PT}$ espresa la tangente del ángulo PTM; luego $\frac{dz}{dx}$ *es la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente de una curva en un punto cualquiera forma con el eje de las abscisas.*

El mismo triángulo PMT da la magnitud de la tangente ó

$$MT=\sqrt{PM^2+PT^2}=\sqrt{z^2+\frac{z^2dx^2}{dz^2}}=z\sqrt{1+\frac{dx^2}{dz^2}}.$$

179 Si suponemos que MR sea *normal* de la curva, el triángulo TMR será rectángulo en M; y como desde M tenemos bajada la perpendicular MP, resultará que los triángulos TPM, PMR serán semejantes (I. 332) y darán

$$PT:PM::PM:PR=\frac{PM^2}{PT}=\frac{z^2}{\frac{zdx}{dz}}=\frac{zdz}{dx},$$

que es *el valor de la subnormal de toda curva.*

El triángulo PMR, rectángulo en P, da para la normal

$$MR=\sqrt{PM^2+PR^2}=\sqrt{z^2+\frac{z^2dz^2}{dx^2}}=z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}.$$

180 Vamos á aplicar esta teoría á la investigacion de las subtangentes, tangentes, normales y subnormales de las secciones cónicas.

Consideremos primero que la curva AMM′ (fig. 39) sea un círculo, cuya ecuacion es $z^2=2ax-x^2$,

que da $\frac{dz}{dx}=\frac{2a-2x}{2z}=\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$.

De donde para la subtangente PT se saca

$$\text{subt.}=z\frac{dx}{dz}=\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}.$$

Si se hace $x=a$, resulta infinita la subtangente, y por lo mismo la tangente no encuentra al eje de las abscisas, y le es paralela; y como esto corresponde á $x=a$, que da $z=\pm a$, se deduce que *la tangente tirada por el estremo de la ordenada que pasa por el centro*, *es paralela al eje de las abscisas*; lo que debe verificarse así, pues en este caso la tangente y el eje de las abscisas son perpendiculares á la ordenada ó al radio.

Para la normal, tendrémos

$$\text{norm.}=z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=z\sqrt{1+\frac{(a-x)^2}{2ax-x^2}}=$$

$$z\sqrt{\frac{2ax-x^2+a^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}}=z\sqrt{\frac{a^2}{2ax-x^2}}=$$

$$\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2ax-x^2}}=\pm\sqrt{a^2}=\pm a;$$

que manifiesta que *la normal del círculo es constantemente igual al radio*; lo que tambien es conforme con lo demostrado (I. 299).

181 Sea ahora la curva una elipse, cuya ecuacion es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$, que da $\frac{dz}{dx}=\frac{b^2(2a-2x)}{2a^2z}=$

$$\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a-x}{z}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a-x}{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{b}{a}\times\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

de donde sale

$$PT=z\frac{dx}{dz}=\frac{b}{a}\times\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{a}{b}\times\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}=\frac{2ax-x^2}{a-x}.$$

Este valor tambien es infinito en el supuesto de $x=a$; y como en este caso la ecuacion de la curva da $z=\pm b$, se sigue que *la tangente de la elipse en los estremos del eje menor, es paralela al eje mayor*. Lo propio sucede respectivamente en los estremos del eje mayor, que entónces *la tangente es paralela al eje menor*.

La subnormal será

$$PR=z\frac{dz}{dx}=\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}\times\frac{b}{a}\times\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}=\frac{b^2}{a^2}(a-x).$$

Si $x=a$ resulta $PR=0$ como debe verificarse; pues en este caso la misma ordenada viene á ser la normal, y de consiguiente no hay distancia ninguna desde su pie al de la ordenada.

182 Supongamos ahora que la rama de la curva AMM′ corresponde á una parábola, cuya ecuacion es

$$z^2=px,\text{ que da }\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2z}=\frac{p}{2\sqrt{px}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}};$$

de donde sacarémos para el valor de la subtangente

$$PT = z\frac{dx}{dz} = \sqrt{px} \times 2\sqrt{\frac{x}{p}} = 2\sqrt{\frac{px^2}{p}} = 2\sqrt{x^2} = 2x;$$

que quiere decir, que *en la parábola la subtangente es siempre igual al duplo de la abscisa correspondiente al punto de contacto.*

La subnormal será

$$PR = z\frac{dz}{dx} = \sqrt{px} \times \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2x}{x}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{p^2} = \tfrac{1}{2}p;$$

que manifiesta que *en la parábola la subnormal es constante é igual á la mitad del parámetro.*

183 Supongamos ahora que la misma rama de curva corresponda á una hipérbola, cuya ecuacion es

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2),$$

que da

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{2a+2x}{2z} = \frac{b^2}{a^2} \times \frac{a+x}{\frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{b}{a} \times \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}};$$

lo que da para la subtangente

$$PT = \frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2} \times \frac{a}{b} \times \frac{\sqrt{2ax+x^2}}{a+x} = \frac{2ax+x^2}{a+x};$$

y para la subnormal tendrémos

$$PR = z\frac{dz}{dx} = \frac{b}{a}\sqrt{2ax+x^2} \times \frac{b}{a} \times \frac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{b^2}{a^2}(a+x).$$

184 Consideremos por último la ecuacion general

$$z^2 = \frac{p}{2a} \times (2ax \pm x^2),$$

que representa todas las secciones cónicas, á saber: un círculo cuando $p = 2a$ y se toma el signo —, que entónces se convierte en $z^2 = 2ax - x^2$; una elipse cuando se toma el signo inferior; una hipérbola cuando se toma el superior; y una parábola cuando se supone $2a=\infty$; pues haciendo las operaciones indicadas se

tiene $z^2=px\pm\frac{px^2}{2a}$;

y siendo $2a=\infty$, desaparece el segundo término y se convierte la ecuacion en $z^2=px$.

Esto supuesto, diferenciando será

$$\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2a}\times\frac{2a\pm 2x}{2z}=\frac{p}{2a}\times\frac{a\pm x}{\sqrt{\frac{p}{2a}(2ax\pm x^2)}}=$$

$$\sqrt{\frac{p}{2a}}\times\frac{a\pm x}{\sqrt{2ax\pm x^2}};$$

de donde sustituyendo y simplificando, sale

$$\text{PT}=z\frac{dx}{dz}=\frac{2ax\pm x^2}{a\pm x},\text{ y PR}=z\frac{dz}{dx}=\frac{p}{2a}(a\pm x).$$

185 Con estas fórmulas es sumamente sencillo *el tirar tangentes á las curvas*. En efecto, dado el punto de contacto, por medio de sus coordenadas se calculará la subtangente; y tirando por el estremo de esta y el punto de contacto una línea, esta será la tangente; y la perpendicular á esta en el punto de contacto será la normal. Tambien se puede calcular la subnormal, tirar despues la normal, y la perpendicular á esta en el punto de contacto será la tangente. Si se diese desde luego la subtangente ó subnormal, y se buscase el punto de contacto para tirar la tangente, se sustituiria en su ecuacion el valor dado, se despejaria la abscisa, y se tiraria la ordenada para obtener el punto de contacto.

186 Siendo el arco MeM′ (fig. 37) mayor que la cuerda MM′, la razon $\frac{\text{M}e\text{M}'}{\text{MQ}}$ de la diferencia del arco CM á la diferencia de la abscisa correspondiente

AP, será mayor que la razon $\frac{MM'}{MQ}$ de la cuerda MM' á MQ, ó que su igual $\frac{MS}{PS}$, á causa de los triángulos semejantes MM'Q, MPS; pero cuanto mas se acerque el punto M' á M, tanto mas la cuerda MM' se acercará á confundirse con el arco MeM'; por consiguiente tanto mas la primera $\frac{MeM'}{MQ}$ de estas razones se acercará á la segunda $\frac{MS}{PS}$, de manera que su diferencia llegará á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea; de donde concluirémos que el límite $\frac{MT}{PT}$ de la segunda de estas razones, será igual al de la primera; luego *la razon* $\frac{MT}{PT}$ *de la tangente á la subtangente de un punto cualquiera M de una curva, es el límite de la razon* $\frac{MeM'}{MQ}$ *de la diferencia del arco CM á la diferencia de la abscisa correspondiente.*

De donde se infiere que si llamamos A al arco de una curva cualquiera CD, será $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$; pero los triángulos semejantes TPM, MPR, dan $\frac{MT}{PT}=\frac{RM}{MP}=$(§ 179) $\frac{z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}}{z}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$;

luego $\frac{dA}{dx}=\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$, y $dA=dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=\sqrt{dx^2+dz^2}$.

Dividiendo la ecuacion $\frac{dA}{dx}=\frac{MT}{PT}$ por la $\frac{dz}{dx}=\frac{PM}{PT}$, que sacámos (178), se tendrá

$$\frac{\frac{dA}{dx}}{\frac{dz}{dx}}=\frac{\frac{MT}{PT}}{\frac{PM}{PT}}, \text{ ó } \frac{dA}{dz}=\frac{MT}{PM}=\frac{MR}{PR};$$

esto es, *la razon de la tangente con la ordenada*, ó *de la normal con la subnormal de una línea curva, es el límite de la razon de la diferencia del arco á la diferencia de la ordenada.*

187 Hemos dicho (95) que por el centro de la hipérbola se pueden tirar unas líneas, en tal disposicion que la curva se va acercando continuamente hácia ellas, y jamas las puede encontrar, y que estas líneas se llaman *asíntotas*, que es lo mismo que si dijésemos *tangentes al infinito.*

Allí hemos omitido el determinarlas, porque los métodos son complicados, y lo dejámos para hacerlo por el cálculo diferencial, que las determina con la mayor facilidad.

188 En efecto, si la curva AC (fig. 40) tiene una asíntota BF, á medida que las coordenadas x, z, aumentan, los puntos T, L, donde la tangente MT encuentra á sus ejes, se acercan continuamente á sus límites respectivos B, E, sin que jamas puedan confundirse con ellos. Por consiguiente para conocer si una curva, cuya ecuacion es dada, tiene alguna asíntota, y en caso que la tenga determinar su posicion, *se determinarán los valores de AT, y AL, en valores de* x ó z *por medio de la ecuacion de la curva; y si haciendo* x ó z$=\infty$, *resultan los límites finitos AB, AE,*

la recta BE que pase por ellos, será una asíntota de la curva AC.

Así, lo primero que harémos será hallar los valores de AT, AL, para lo cual tendrémos

$$AT = PT - AP = \frac{zdx}{dz} - x;$$

y para AL los triángulos semejantes TAL, TPM, darán $TP:PM::TA:AL = \frac{PM \times TA}{TP} =$

$$\frac{z(z\frac{dx}{dz} - x)}{z\frac{dx}{dz}} = z - \frac{x}{\frac{dx}{dz}} = z - \frac{xdz}{dx}.$$

De manera que si espresamos la primera por A, y la segunda por B, los valores que tomen estas cantidades en cada caso particular, determinarán dos puntos por donde se tirarán las rectas que serán asíntotas de la curva.

189 Ejemplo: sea la curva una hipérbola ordinaria.

Suponiendo en A el oríjen de las coordenadas, y llamando a al primer semieje y b al segundo, tendrémos $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, $\frac{dz}{dx} = \frac{b^2(a+x)}{a^2 z}$;

$$\frac{zdx}{dz} = \frac{a^2z^2}{b^2(a+x)} = \frac{2ax+x^2}{a+x}, \quad \frac{xdz}{dx} = \frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z};$$

por lo que

$$A = z\frac{dx}{dz} - x = \frac{2ax+x^2}{a+x} - x = \frac{ax}{a+x} = \frac{a}{\frac{a}{x}+1};$$

$$B = z - x\frac{dz}{dx} = z - \frac{b^2(ax+x^2)}{a^2z} = \frac{a^2z^2 - b^2(ax+x^2)}{a^2z} =$$

$$\frac{2ab^2x+b^2x^2-b^2ax-b^2x^2}{\pm ab\sqrt{2ax+x^2}}=\frac{bx}{\pm\sqrt{2ax+x^2}}=\pm\frac{b}{\sqrt{\frac{2a}{x}+1}};$$

que haciendo x infinita, resultan los límites $A=a$ y $B=\pm b$; de donde inferimos que *la hipérbola CAC' tiene dos asíntotas BF, BF', que parten del centro B, y encuentran al eje de las ordenadas en los puntos E, E': el uno encima y el otro debajo del eje de las abscisas, á una distancia del punto de oríjen igual al segundo semieje* b.

190 Si el oríjen de las coordenadas estuviese en el centro seria (§ 85) $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2x^2}{a^2}-b^2$,

$$\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x}{a^2z},\quad x\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x^2}{a^2z},\quad z\frac{dx}{dz}=\frac{a^2z^2}{b^2x},$$

$$z\frac{dx}{dz}-x=A=\frac{a^2z^2-b^2x^2}{b^2x}=\frac{b^2x^2-a^2b^2-b^2x^2}{b^2x}=-\frac{a^2}{x},$$

$$B=z-\frac{xdz}{dx}=\frac{a^2z^2-b^2x^2}{a^2z}=\mp\frac{ab}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

y haciendo x infinita resultará $A=0$, $B=\mp 0$; por consiguiente la curva propuesta tiene dos asíntotas, que pasan por el oríjen B, la una encima y la otra debajo del eje BD.

Pero como estos dos valores sólo determinan el centro, y aun se necesita otro punto para fijar la posicion de la asíntota, harémos x infinita en la espresion $\frac{dz}{dx}$, que es (178) la tangente trigonométrica del ángulo MTD, y resultará la del FBD que la asíntota forma con el eje de las abscisas. Por lo que sustituyendo el valor de z en el del coeficiente diferencial,

tendrémos $\frac{dz}{dx}=\frac{b^2x}{a^2z}=\frac{b^2x}{a^2x\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}=\pm$

$$\frac{b}{a\sqrt{x^2-a^2}}=\pm\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}};$$

y haciendo $x=\infty$, resulta la tangente del ángulo FBD$=\pm\frac{b}{a}$; tomando, pues, las líneas AE, AE′, iguales al segundo semieje b, la rectas BE, BE′, serán las asíntotas de la hipérbola CAC′.

191 Los puntos que se llaman singulares en las curvas, como igualmente la curvatura de estas en cada uno de sus puntos, se determina tambien facilísimamente por medio del cálculo diferencial.

De los coeficientes diferenciales de las superficies curvilíneas, de las superficies de los cuerpos de revolucion, y de los volúmenes de estos.

192 Hasta aquí hemos encontrado los coeficientes diferenciales de una funcion cualquiera de x; ahora, como en una curva tal como la AF (fig. 41), es funcion de la abscisa no sólo la ordenada PM, sino tambien el arco AM, la superficie AMP, la superficie y el volúmen del cuerpo que orijinaria AMP al jirar al rededor de AP: vamos á encontrar sus coeficientes diferenciales. De las dos primeras ya los tenemos (178 y 186); y así, pasarémos á los de las tres últimas.

Para esto llamarémos s á la superficie AMP, y concibiendo que la abscisa AP$=x$ se convierte en

AP′$=x'=x+\Delta x$,

entónces $z=$PM se convertirá en $z'=$P′M′$=z+\Delta z$, y la superficie APM representada por s, se convertirá en

$$s'=AP'M'=APM+PMeM'P'=s+\Delta s,$$

y Δs será igual á $AP'M'-APM=PMeM'P'$;

pero al paso que Δx disminuye, el trapecio rectilíneo PMM'P' se va acercando á Δs, de manera que podrémos hacer que la diferencia entre dicho trapecio y el espacio mistilíneo igual con Δs, llegue á ser menor que cualquier cantidad dada; y como (I. 356) el trapecio $PMM'P'=PP'\times\frac{(PM+P'M')}{2}=\Delta x\times\left(\frac{z+z'}{2}\right)=$

$\Delta x\times\frac{(2z+\Delta z)}{2}=\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$, resulta que $\Delta x\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)$ se puede acercar á Δs tanto como se quiera; ó dividiendo por Δx, tendrémos que $z+\frac{1}{2}\Delta z$ se podrá acercar tanto como se quiera á $\frac{\Delta s}{\Delta x}$; luego los límites de estas dos espresiones serán iguales; pero el límite de

$$z+\tfrac{1}{2}\Delta z \text{ es } z, \text{ y el de } \frac{\Delta s}{\Delta x} \text{ es } \frac{ds}{dx},$$

luego se tendrá $z=\frac{ds}{dx}$, ó $ds=zdx$;

cuyo resultado manifiesta que *el coeficiente diferencial de la superficie APM, considerada como funcion de la abscisa AP, es igual con la ordenada.*

193 Si suponemos que la curva AMF dé una vuelta al rededor del eje AC de las abscisas, y espresamos por s la superficie que describe el arco AM, la descrita por el arco MeM' será la diferencia de s, y la cuerda MM' describirá un cono truncado, cuya superficie, llamando π á la razon del diámetro á la circunferencia, es (I.§421) $2\pi\left(\frac{MP+M'P'}{2}\right)\times MM'=$

$$2\pi\left(\frac{2z+\Delta z}{2}\right)\sqrt{MQ^2+M'Q^2}=$$

$$2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\times\sqrt{\Delta x^2+\Delta z^2};$$

y pasando á la relacion será

$$\frac{\text{Sup. de trozo orij. por } MM'}{\Delta x}=2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}.$$

Esto supuesto, si consideramos la superficie s como funcion de la abscisa x, echarémos de ver que cuanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite, tanto mas se acercará la superficie descrita por la cuerda MM' á la superficie Δs descrita por el arco MeM', ó la espresion $2\pi\left(z+\frac{\Delta z}{2}\right)\times\sqrt{1+\frac{\Delta z^2}{\Delta x^2}}$ á la $\frac{\Delta s}{\Delta x}$, y que la diferencia de estas dos podrá llegar á ser menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea; de donde concluirémos que *el límite*

$$2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$$

de la primera será igual al límite $\frac{ds}{dx}$ *de la segunda*;

por lo cual será $\frac{ds}{dx}=2\pi z\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}$,

y $ds=2\pi z dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2}.$

194 Si llamamos v la funcion de x que espresa el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio APM, en su revolucion al rededor del eje AC, el volúmen del cuerpo engendrado por el espacio $PMeM'P'$ terminado por el arco MeM', será Δv, y el cono truncado engendrado por el trapecio $PMM'P'$ será igual (I. 423 esc.) á

$$\pi(\mathrm{PM}^2+\mathrm{PM}\times\mathrm{P'M'}+\mathrm{P'M'}^2)\frac{\mathrm{PP'}}{3}=\pi(z^2+zz'+z'^2)\frac{\Delta x}{3}=$$

$$\pi(z^2+z(z+\Delta z)+(z+\Delta z)^2)\frac{\Delta x}{3}=$$

$$\pi(3z^2+3z\Delta z+\Delta z^2)\frac{\Delta x}{3}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right)\Delta x;$$

y pasando á la relacion se tendrá

$$\frac{\text{vol. orij. por trapecio PMM'P'}}{\Delta x}=\pi\left(z^2+z\Delta z+\frac{\Delta z^2}{3}\right);$$

pero esta relacion se aproximará tanto mas á $\frac{\Delta v}{\Delta x}$, cuanto mas se acerquen Δx y Δz á su límite cero, de modo que su diferencia puede llegar á ser menor que cualquier cantidad por pequeña que sea; luego sus límites serán iguales; y por consiguiente $\frac{dv}{dx}=\pi z^2$, esto es, *igual á la superficie del círculo que describe la ordenada PM en su movimiento de revolucion*; y la diferencial dv del volúmen será $dv=\pi z^2dx$.

DEL CÁLCULO INTEGRAL.

De la integracion de las funciones racionales de una sola variable.

195 El cálculo integral tiene por objeto, segun hemos manifestado (125), *el determinar la funcion primitiva, dado el límite de la relacion entre el incremento de la funcion y el de la variable.* De donde se deduce que siendo inverso del cálculo diferencial, las reglas que se dén para integrar, han de ser las opuestas á las que se dieron para diferenciar.

La esposicion de los principios de este cálculo, presenta divisiones análogas á las que nos ofreció el cálculo diferencial; y así como, tratando de este, aplicámos primero las reglas de diferenciar á las funciones esplícitas, tambien principiarémos estas investigaciones por el caso en que el coeficiente diferencial de la funcion que se busca, se da inmediatamente en valores de las variables independientes. Cuando el coeficiente diferencial de primer órden de una funcion de x, viene espresado en valores de x, se tiene

$\frac{dz}{dx}=X$, ó $dz=Xdx$, siendo $X=f.x$; luego la funcion buscada es aquella cuya diferencial es Xdx, y se indica poniéndole una S ántes, con la cual quisieron dar á conocer los primeros inventores del cálculo, que la funcion equivalia á la suma de las diferenciales. Así, z será igual á $S.Xdx$; y se ve que la característica S es la opuesta á la d. Para hallar esta funcion, es necesario invertir las reglas de la diferenciacion; más á fin de proceder con método, tratarémos sucesivamente de las diferentes formas que puede tener la funcion dada X, y que clasificarémos en funciones racionales, en funciones irracionales, y en funciones trascendentes, de este modo.

$$\text{Funciones racionales}\left\{\begin{array}{l} A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\&c. \\[2ex] \dfrac{A\,x^m+B\,x^n+C\,x^p+\&c.}{A'x^{m'}+B'x^{n'}+C'x^{p'}+\&c.}=\dfrac{U}{V} \end{array}\right.$$

Funciones irracionales $U\times V^{\frac{m}{n}}$;

Funciones trascendentes $F.(U,l.V)$, $F.(U,\text{sen}.V)$, &c.

196 Supongamos que el coeficiente diferencial $\frac{dz}{dx}$ esté representado por el monomio Ax^m, y tendrémos

$$\frac{dz}{dx}=Ax^m, \text{ de donde } dz=Ax^m dx;$$

pero cuando tratámos de diferenciar un monomio en que la variable estaba elevada á potencias, dijimos que *se multiplicaba el esponente de la potencia por el mismo monomio, disminuyendo el esponente en una unidad, y multiplicándolo todo por la diferencial de la variable*; luego aquí deberémos establecer las reglas en un órden inverso, diciendo: *suprímase la diferencial, auméntese una unidad al esponente, y pártase esto por el esponente que afectaba á la variable despues de aumentado en una unidad*; en virtud de cuya regla tendrémos que siendo $\frac{dz}{dx}=Ax^m$, ó $dz=Ax^m dx$, será $z=S.Ax^m dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$.

Tomando casos particulares se tendrá, que si $dz=4ax^3dx$, se deduce $z=\frac{4ax^4}{4}=ax^4$; si $dz=5bx^9dx$, será $z=\frac{5bx^{10}}{10}=\frac{bx^{10}}{2}$, &c.

197 Tambien podríamos deducir de cada regla del cálculo diferencial, otra contraria en el integral; pero ahora sólo notarémos que, pues la diferencial de una funcion era la misma que la de la funcion acompañada de una constante por via de suma ó de resta, no sabemos si la integral de $Ax^m dx$, es

$$\frac{Ax^{m+1}}{m+1} \text{ ó es } \frac{Ax^{m+1}}{m+1}+B,$$

siendo B una constante cualquiera; y por lo mismo debemos dejar nuestra misma duda espresada, añadiendo á la integral que da el cálculo una constante indeterminada que señalarémos con la inicial C; y dirémos que $S.Ax^m dx=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C$.

Esta constante se llama *constante arbitraria*, porque cuando no hay ninguna circunstancia que la determine, la podemos elejir á arbitrio. La integral que da el cálculo, junta con la constante arbitraria, se llama *integral completa*.

198 Cuando se quiere integrar una espresion, se debe dejar indeterminada la constante; y si se pide que la determinemos, á lo que se suele llamar *completar la integral*, entónces se debe pedir la condicion.

Así, supongamos que se pida completar la integral $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$, de manera que sea igual con b cuando $x=a$; entónces sustituirémos a en vez de x en la espresion $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C$, igualarémos esto con b, y de esta ecuacion despejarémos C; de modo que será

$$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+C=b\text{, lo que da } C=b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1};$$

por lo que en este caso se tendrá

$$\text{S}.Ax^m\text{d}x=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+b-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}.$$

199 Ahora, cuando el cálculo integral se aplica á alguna cuestion, entónces esta misma debe suministrar la condicion con que se ha de determinar la constante, de manera que el resultado no convenga sino á dicha cuestion. Para esto, lo que se necesita es conocer un valor absoluto de la integral; pues restando de él la integral que da el cálculo, tendrémos el valor de la constante; el valor absoluto que se puede conocer en cualquier cuestion es *saber qué valor tiene la variable cuando la integral que espresa lo que indagamos, se reduce á cero*; y por lo mismo vamos á manifestar qué forma tiene entónces la constante.

200 Supongamos que P sea la integral que da el cálculo, y tendrémos que $P+C$ será la integral

completa; supongamos ahora que sustituyendo en P el valor de la variable que ha de reducir á cero la integral completa, se convierte en Q, y se tendrá $Q+C=0$, lo que da $C=0-Q=-Q$; de donde se deduce que en este caso se completa la integral *añadiendo á la que da el cálculo, lo que resulta de sustituir en la misma que da el cálculo el valor de la variable que reduce la integral completa á cero, y tomando todo esto con un signo contrario.*

Así, si nos propusiéramos integrar la espresion (197) de manera que la integral completa se redujese á cero cuando $x=a$, tendríamos

$$\frac{Aa^{m+1}}{m+1}+C=0, \text{ de donde } C=-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}, \text{ lo que da}$$

$$z=\text{S}.Ax^m\text{d}x=\frac{Ax^{m+1}}{m+1}-\frac{Aa^{m+1}}{m+1}=$$

$$\frac{A(x^{m+1}-a^{m+1})}{m+1}\ (\text{M}).$$

Si la quisiéramos completar de manera que se redujese á cero cuando $x=0$, tendríamos $\frac{A0^{m+1}}{m+1}+C=0$, de donde $C=0$; lo que nos dice que *cuando la integral completa es cero al mismo tiempo que la variable, no hay término constante en la funcion.*

De aquí en adelante quedará indeterminada la constante, á no ser que alguna investigacion particular conduzca á lo contrario.

201 Ántes de pasar mas adelante conviene examinar un caso particular en que el valor de la espresion (M) se convierte en $\frac{0}{0}$, que es aquel en que $m=-1$; porque entónces se tiene

$$z=\frac{A(x^0-a^0)}{0}=\frac{A(1-1)}{0}=\frac{0}{0}.$$

Para encontrar su verdadero valor es necesario recurrir á la regla (173); y como hemos hecho ver (174) que $\frac{a^x - b^x}{x}$ se reducia á $\text{l}.a - \text{l}.b$ en la suposicion de $x=0$, tendrémos que en el ejemplo actual, mudando las letras convenientemente, será

$$z = A(\text{l}.x - \text{l}.a);$$

pero cuando $m=-1$, se tiene $\text{d}z = Ax^{-1}\text{d}x$;

luego $dz = \frac{A\text{d}x}{x}$, da $z = A(\text{l}.x - \text{l}.a)$, ó $z = A\text{l}.x + C$.

Lo mismo se hubiera deducido de lo dicho (156) pues se tiene $\text{d}.\text{l}x = \frac{\text{d}x}{x}$; y manifiesta que *siempre que el numerador de una fraccion sea la diferencial del denominador, esta fraccion tiene por integral al logaritmo del denominador.*

202 La escepcion que presenta aquí la regla (200) proviene de la imposibilidad de espresar la trascendente $\text{l}.x$ por un número finito de términos algebráicos.

Toda la dificultad de la integracion de las funciones de una sola variable, consiste en la investigacion de las trasformaciones, propias para reducir las funciones propuestas á uno ó muchos monomios, á que se pueda aplicar la regla antecedente.

Luego si se tuviese $\text{d}z = ax^m\text{d}x + bx^n\text{d}x + cx^p\text{d}x$, hallaríamos inmediatamente (§ 196)

$$z = \frac{ax^{m+1}}{m+1} + \frac{bx^{n+1}}{n+1} + \frac{cx^{p+1}}{p+1} + C,$$

no añadiendo mas de una constante arbitraria, porque si añadiésemos una para cada monomio, juntas equivaldrian á una sola igual á su suma. En general, pues que hemos visto (133) que

$$\text{d}.(u+v-w) = \text{d}u + \text{d}v - \text{d}w,$$

se debe concluir que

$$\text{S}.(\text{d}u + \text{d}v - \text{d}w) = \text{S}.\text{d}u + \text{S}.\text{d}v - \text{S}.\text{d}w;$$

y que $\text{S}.(P\text{d}x + Q\text{d}x - R\text{d}x) = \text{S}.P\text{d}x + \text{S}.Q\text{d}x - \text{S}.R\text{d}x$.

203 Hagamos notar desde ahora una consecuencia que nos será muy útil en adelante, y es que integrando separadamente cada término de

$\mathrm{d}.ut=u\mathrm{d}t+t\mathrm{d}u$ (§ 134), da $ut=\mathrm{S}.u\mathrm{d}t+\mathrm{S}.t\mathrm{d}u$;

lo que establece una relacion entre las funciones primitivas de las diferenciales $u\mathrm{d}t$, $t\mathrm{d}u$, de modo que siendo conocida la una, la otra lo es tambien, porque se tiene $\mathrm{S}.u\mathrm{d}t=ut-\mathrm{S}.t\mathrm{d}u$;

la diferencial $\mathrm{d}.\frac{u}{t}=\frac{\mathrm{d}u}{t}-u\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ (§ 136),

dará igualmente $\frac{u}{t}=\mathrm{S}.\frac{\mathrm{d}u}{t}-\mathrm{S}.\frac{u\mathrm{d}t}{t^2}$,

de donde se sacará $\mathrm{S}.u\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-\frac{u}{t}+\mathrm{S}.\frac{\mathrm{d}u}{t}$.

204 De que $\mathrm{d}.au=a\mathrm{d}u$ (§ 131),

se sigue que $\mathrm{S}.aX\mathrm{d}x=a\mathrm{S}.X\mathrm{d}x$,

es decir, que se puede hacer salir del signo S la constante a.

Si nos propusiésemos $\mathrm{d}z=(ax+b)^m\mathrm{d}x$, efectuaríamos la potencia indicada, é integraríamos cada monomio que resultase de esta operacion; pero conviene observar que se puede llegar al resultado sin efectuar el desarrollo; para esto basta hacer $ax+b=u$,

lo que da $x=\frac{u-b}{a}$, y $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{a}$;

y sustituyéndole en la espresion de $\mathrm{d}z$, se convertirá

en $\mathrm{d}z=\frac{u^m\mathrm{d}u}{a}$, y por consiguiente $z=\frac{u^{m+1}}{a(m+1)}$;

y poniendo ahora en vez de u su valor, se tendrá

$$z=\frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}+C.$$

205 Pasemos ahora á las funciones fraccionarias; y con el objeto de principiar por el caso mas senci-

llo, supongamos que se tenga $dz=\frac{Ax^m dx}{(ax+b)^n}$;

haciendo $ax+b=u$ se halla $x=\frac{u-b}{a}$, $dx=\frac{du}{a}$;

y por consiguiente

$$dz=\frac{A\left(\frac{u-b}{a}\right)^m\times\frac{du}{a}}{u^n}=\frac{A(u-b)^m du}{a^{m+1}u^n},$$

desenvolviendo la potencia $(u-b)^m$, multiplicando el resultado por du, y dividiendo despues por u^n, se tendrá una serie de monomios que podrémos integrar por la regla dada (196).

Tomemos por ejemplo el caso en que $m=3$ y $n=2$,

y resultará $dz=\frac{A(u-b)^3 du}{a^4u^2}=$

$$\frac{A}{a^4}(udu-3bdu+3b^2u^{-1}du-b^3u^{-2}du);$$

aplicando á cada uno de estos monomios la regla general, resultará $z=\frac{A}{a^4}\left(\frac{u^2}{2}-3bu+3b^2 l.u+b^3u^{-1}\right)+C$;

y poniendo en vez de u su valor, se tendrá por último

$$z=\frac{A}{a^4}(\tfrac{1}{2}(ax+b)^2-3b(ax+b)+$$

$$3b^2 l.(ax+b)+b^3(ax+b)^{-1})+C.$$

De la integracion de las funciones irracionales.

206 Las funciones irracionales se deben considerar como integradas, siempre que por medio de alguna trasformacion se hayan hecho racionales, ó al ménos, cuando se han reducido á series de monomios irracionales; porque entónces se les puede aplicar inmediatamente las reglas precedentes.

Propongámonos por ejemplo la espresion

$$dz=\frac{(1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2})dx}{1+\sqrt[3]{x}};$$

aquí advertirémos que si en vez de x se sustituye una cantidad que tenga raiz cuadrada y cúbica exacta, entónces se convertirá en una funcion racional; luego si hacemos $x=u^6$, resultará $dx=6u^5du$,

$$\sqrt{x}=\sqrt{u^6}=u^3,\ \sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{u^{12}}=u^4,\ \sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{u^6}=u^2;$$

lo que da $dz=\frac{(1+u^3-u^4)}{1+u^2}\times 6u^5du=-6du\times\frac{u^9-u^8-u^5}{1+u^2}$;

que haciendo la division hasta donde se pueda, se tendrá

$$dz=-6\left(u^7du-u^6du-u^5du+u^4du-u^2du+du-\frac{du}{1+u^2}\right)$$

cuya integral teniendo presente (162) que

$$S.\frac{du}{1+u^2}=\text{arco (cuya tangente}=u),$$

es $z=-6\left(\frac{u^8}{8}-\frac{u^7}{7}-\frac{u^6}{6}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+u-\text{arc.(tang.}=u)\right)+C$;

y sustituyendo ahora en vez de u su valor $\sqrt[6]{x}$,

se tendrá $z=-\frac{6}{8}x\sqrt[6]{x^2}+\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+$

$$2\sqrt[6]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\text{arc.(tang.}=\sqrt[6]{x})+C.$$

De la integracion de las diferenciales binomias.

207 Bájo el nombre de *diferenciales binomias* se comprenden todas las que son susceptibles de la for-

ma siguiente: $dz = Kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$;
en la cual podemos suponer que m y n son números enteros sin disminuir su generalidad, y por consiguiente todo está en averiguar en qué casos se podrá hacer racional la diferencial $dz = Kx^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$; para esto harémos $a+bx^n = u^q$, lo que dará

$$(a+bx^n)^{\frac{p}{q}} = u^p,\ x^n = \frac{u^q - a}{b},\ x = \left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$x^m = \left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}$$

diferenciando esta espresion se tendrá

$$mx^{m-1}dx = \frac{m}{n}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} \times \frac{qu^{q-1}du}{b},$$

$$\text{ó } x^{m-1}dx = \frac{1}{nb}qu^{q-1}du\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1};$$

lo que dará $dz = K\times\frac{q}{nb}u^{p+q-1}\left(\frac{u^q-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} du$ (N).

Donde se ve que *esta espresion será racional siempre que $\frac{m}{n}$ sea un número entero, y por consiguiente en este caso se podrá integrar*; pues la podrémos desenvolver en una serie de monomios integrables cada uno de por sí.

Así, si queremos integrar la espresion

$$dz = 8x^9dx(a+bx^5)^{\frac{2}{3}},$$

como aquí seria $m=10$ y $n=5$, resultaria $\frac{10}{5}=2$, número entero; luego esta fórmula seria integrable exactamente; y como aquí $K=8$, $p=2$, $q=3$, y $u=a+bx^5$, haciendo las sustituciones en la fórmula (N), será

$$dz=8\times\frac{3}{5b}u^{5-1}\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^{\frac{10}{5}-1}du=\frac{24}{5b}u^4\left(\frac{u^3-a}{b}\right)^1du=$$

$$\frac{24}{5b^2}(u^7-au^4)du=\frac{24}{5b^2}(u^7du-au^4du),$$

lo que da

$$z=\frac{24}{5b^2}S.(u^7du-au^4du)=\frac{24}{5b^2}\left(\frac{u^8}{8}-\frac{au^5}{5}\right)+C=$$

$$\frac{24}{5b^2}u^5\times\left(\frac{u^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+C=$$

$$\frac{24}{5b^2}(a+bx^5)^5\times\left(\frac{(a+bx^5)^3}{8}-\frac{a}{5}\right)+C=$$

$$\frac{24}{40b^2}(a+bx^5)^8-\frac{24a}{25b^2}(a+bx^5)^5+C.$$

208 Pues que no siempre es posible integrar la fórmula $S.x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, la idea que se presenta al principio, es tratar de reducirla á los casos mas simples, valiéndonos de la observacion que hicimos (203) acerca de que $S.udt=ut-S.tdu$; porque si se descompone la cantidad

$$x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$$

en dos factores, de los cuales el uno le representemos por dt y el otro por u, se hará depender la integracion de la fórmula anterior de la de $S.udt$, que en algunas ocasiones será mas simple que la propuesta.

De la integracion de las cantidades logarítmicas y esponenciales.

209 Supongamos la fórmula $dz = Pdx(l.x)^n$, en la cual P sea una funcion algebráica de x, y tendrémos (203), que

$$z = S.Pdx(l.x)^n = (l.x)^n S.Pdx - S.d.(l.x)^n \times S.Pdx;$$

y como P es una funcion algebráica de x, resultará que la $S.Pdx$ será exacta, y si la llamamos N tendrémos que $S.Pdx = N$;

y como por otra parte $d.(l.x)^n = n(l.x)^{n-1} \times \frac{dx}{x}$, sustituyendo estos valores en la espresion de z será

$$z = N(l.x)^n - nS.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-1}N.$$

Ahora, como N es una funcion algebráica, tendrémos que la integral de $N\frac{dx}{x}$ tambien será algebráica, y llamándola M resultará que como

$$d.(l.x)^{n-1} = (n-1)\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2},$$

la misma advertencia nos dará

$$S.\frac{dx}{x}N(l.x)^{n-1} = M(l.x)^{n-1} - (n-1)S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M,$$

luego $z = S.Pdx(l.x)^n = N(l.x)^n - nM(l.x)^{n-1} +$

$$n(n-1) \times S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M.$$

Pero si llamamos L la integral de $\frac{dx}{x}M$, la misma observacion nos dará

$$S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-2}M = L(l.x)^{n-2} - (n-2)S.(l.x)^{n-3}\frac{dx}{x}L;$$

luego $z=S.Pdx(l.x)^n=N(l.x)^n-nM(l.x)^{n-1}+$

$$n(n-1)L(l.x)^{n-2}-n(n-1)(n-2)S.\frac{dx}{x}(l.x)^{n-3}L.$$

210 Donde se ve que continuando del mismo modo, cuando n sea un número entero, como se le han de ir quitando sucesivamente unidades, llegarémos al fin á un factor $n-n$, el cual siendo cero hará desaparecer el último término que se halle afecto de la integral; y como todas las funciones N, M, L, &c. son algebráicas, resulta que la funcion $dz=Pdx(l.x)^n$ tiene integral algebráica, siempre que n sea un número entero. Sea, por ejemplo, $dz=x^m dx(l.x)^2$, y tendrémos

$$1.^o \quad S.x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}=N;$$

$$2.^o \quad S.N\frac{dx}{x}=S.\frac{x^{m+1}}{m+1}\times\frac{dx}{x}=S.\frac{x^m}{m+1}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}=M;$$

$$3.^o \quad S.M\frac{dx}{x}=S.\frac{x^m}{(m+1)^2}dx=\frac{x^{m+1}}{(m+1)^3}=L;$$

y como el término que deberia seguir, tendria por coeficiente $n-2=2-2$, que en nuestro caso es cero, se sigue que ya no hay mas términos, y resultará que

$$z=S.x^m dx(l.x)^2=N(l.x)^2-2M(l.x)+$$

$$2\times1\times L(l.x)^0=x^{m+1}\left(\frac{(l.x)^2}{m+1}-\frac{2(l.x)}{(m+1)^2}+\frac{2}{(m+1)^3}\right)+C.$$

211 Pasemos ahora á la integracion de las funciones esponenciales; más primero notarémos que siendo U una funcion algebráica de a^x, la integracion de $dz=Udx$ no presentaria ninguna dificultad; pues que haciendo $a^x=u$ tendríamos $xl.a=l.u$,

de donde $x=\frac{l.u}{l.a}$, $dx=\frac{du}{ul.a}$;

y sustituyendo estos valores se convertiria dz en una diferencial algebráica con relacion á la variable u.

Así, si tuviéramos $dz=\frac{a^x dx}{\sqrt{1+a^{nx}}}$,

haciendo las sustituciones resultaria

$$dz=\frac{udu}{ul.a\sqrt{1+u^n}}=\frac{du}{l.a\sqrt{1+u^n}}.$$

212 Si la ecuacion diferencial propuesta fuese $dz=Pa^x dx$, se la descompondria en dos factores de este modo $a^x dx \times P$;
y siendo (§ 154) $d.a^x=l.a\times a^x dx$, resultará que

$$a^x=S.l.a\times a^x dx=l.aS.a^x dx, \text{ y } S.a^x dx=\frac{a^x}{l.a};$$

por lo cual tendrémos

$$z=\frac{1}{l.a}Pa^x-\frac{1}{l.a}S.a^x dP \text{ (O) \&c.}$$

Haciendo $dP=Qdx$, $dQ=Rdx$, $dR=Tdx$, y continuando la reduccion de ántes, se hallará esta serie $z=S.Pa^x dx=$

$$\frac{1}{l.a}Pa^x-\frac{1}{(l.a)^2}Qa^x+\frac{1}{(l.a)^3}Ra^x\ldots\pm\frac{1}{(l.a)^n}S.Ua^x dx;$$

donde el signo + corresponde si el término ocupa un lugar ímpar, y el — si ocupa un lugar par.

213 La aplicacion de esta fórmula conducirá á la integral exacta, siempre que P sea una funcion racional y entera; porque entónces el número de las cantidades $Q=\frac{dP}{dx}$, $R=\frac{dQ}{dx}$, $T=\frac{dR}{dx}$, &c. será limitado, y la última U será constante; y por consiguiente $S.Ua^x dx$ se mudará en

$$US.a^x dx=U\times\frac{a^x}{l.a}+C.$$

Sea por ejemplo $P=x^n$, siendo n un número entero y positivo; con lo cual se tendrá $\mathrm{d}P=nx^{n-1}\mathrm{d}x$; y la ecuacion (O) se convertirá en

$$z=\mathrm{S}.a^x x^n \mathrm{d}x=\frac{a^x x^n}{\mathrm{l}.a}-\frac{n}{\mathrm{l}.a}\mathrm{S}.a^x x^{n-1}\mathrm{d}x;$$

y continuando la operacion se hallará
$Q=nx^{n-1}$, $R=n(n-1)x^{n-2}$, $T=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$, de donde

$$z=\mathrm{S}.a^x x^n \mathrm{d}x=a^x\left(\frac{x^n}{\mathrm{l}.a}-\frac{nx^{n-1}}{(\mathrm{l}.a)^2}+\frac{n(n-1)}{(\mathrm{l}.a)^3}\times x^{n-2}-\right.$$
$$\left.\frac{n(n-1)(n-2)}{(\mathrm{l}.a)^4}\times x^{n-3}\ldots\pm\frac{n(n-1)\ldots\ldots.1}{(\mathrm{l}.a)^{n-1}}\right)+C.$$

De la integracion de las funciones circulares.

214 Supongamos la espresion
$z=\mathrm{S}.X\mathrm{d}x\times\mathrm{arc.}(\mathrm{sen.}=x)$;
si se integra al principio el factor $X\mathrm{d}x$, observando (162) que $\mathrm{d.arc.}(\mathrm{sen.}=x)=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$,
y haciendo $\mathrm{S}.X\mathrm{d}x=U$, se tendrá

$$\mathrm{S}.X\mathrm{d}x\times\mathrm{arc.}(\mathrm{sen.}=x)=U\times\mathrm{arc.}(\mathrm{sen.}=x)-\mathrm{S}.\frac{U\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};$$

luego la integracion de la fórmula propuesta, se referirá á una funcion algebráica si U lo es.

Como

$$\mathrm{d.arc.}(\mathrm{cos.}=x)=-\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\text{y } \mathrm{d.arc.}(\mathrm{tang.}=x)=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},$$

se tendrá obrando del mismo modo que ántes, que

$$S.Xdx\times arc.(\cos.=x)=U\times arc.(\cos.=x)+S.\frac{Udx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$é\ S.Xdx\times arc.(\tan.=x)=U\times arc.(\tan.=x)-S.\frac{Udx}{1+x^2};$$

y la integracion de estas fórmulas no dependerá sino de una funcion algebráica, siempre que U lo sea.

215 Para hacer alguna aplicacion, sea z un arco, y x su tangente, y por lo dicho (162) tendrémos

$$dz=\frac{dx}{1+x^2}=dx\times\frac{1}{1+x^2}=dx(1-x^2+x^4-x^6+x^8 \&c.)=$$

$$dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+x^8dx-x^{10}dx+x^{12}dx\mp\&c.$$

é integrando (196) nos resultará

$$z=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}\mp\&c.$$

donde tendrémos el arco espresado en valores de su tangente, y no le ponemos constante, porque el arco es cero cuando lo es su tangente.

Del mismo modo se puede hallar el arco en valores de todas las líneas trigonométricas, y estas en valores de su arco; pero aquí no nos detendrémos en esto, y sólo darémos una idea del modo de rectificar la circunferencia por medio de la fórmula anterior.

Para esto, observarémos que $\text{sen.}30°=\frac{1}{2}$,

y $\cos.30°=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$;

y como $\text{tang.}=\frac{\text{sen.}}{\cos.}$, será $\text{tang.}30°=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$;

luego sustituyendo este valor en la espresion anterior, nos resultará arco de $30°=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\times3\sqrt{3}}+$

$$\frac{1}{5\times3^2\sqrt{3}}-\frac{1}{7\times3^3\sqrt{3}}+\frac{1}{9\times3^4\sqrt{3}}-\frac{1}{11\times3^5\sqrt{3}}+\&c.;$$

y como la semicircunferencia equivale á seis veces el arco de 30°, multiplicando por 6, sacando el factor comun $\frac{6}{\sqrt{3}}$, y simplificando por $\sqrt{3}$, será

$$\text{semi } C=2\sqrt{3}\times\left(1-\frac{1}{3\times3}+\frac{1}{5\times3^2}-\frac{1}{7\times3^3}+\frac{1}{9\times3^4}-\&c\right);$$

calculando 72 términos de esta serie, y haciendo las operaciones necesarias, hemos hallado en nuestro tratado elemental (tom. II. § 647), que

$$\text{semi } C=3{,}14159265358979323846264338\text{c}.$$

Este valor está sacado en el supuesto de ser el radio la unidad; por lo cual si tomamos ahora el diámetro por unidad, este mismo valor será el de toda la circunferencia, la cual será

$$C=3{,}14159265358979323846264338\text{c}.$$

que es el valor de que hemos hecho uso en la Geometría elemental.

Aplicacion del cálculo integral á la cuadratura de las curvas, y á su rectificacion; á la cuadratura de las superficies curvas, y á la valuacion de los volúmenes que comprenden.

216 Puesto que la diferencial del espacio comprendido entre las coordenadas de una curva y el arco correspondiente, está representada (192) por zdx, y que z es una funcion de la abscisa x, que podrémos representar por X, resulta que el problema general de la cuadratura de las curvas, se reduce á la integracion de la diferencial Xdx.

Vamos, pues, á hacer aplicacion á las curvas que hemos considerado. Sea en primer lugar el círculo (fig. 42) cuya ecuacion considerando el oríjen en a, es $z^2=2ax-x^2$, ó $z=\pm\sqrt{2ax-x^2}$;

luego (192) la diferencial del segmento aPN será

$$dx\sqrt{2ax-x^2}=dx(2ax-x^2)^{\frac{1}{2}}=dx\times x^{\frac{1}{2}}(2a-x)^{\frac{1}{2}};$$

pero desenvolviendo (146) en serie $(2a-x)^{\frac{1}{2}}$, se tiene

$$(2a-x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2a}-\frac{x}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^2}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}}-\&c.$$

luego $dx\sqrt{2ax-x^2}=x^{\frac{1}{2}}dx(2a-x)^{\frac{1}{2}}=$

$$x^{\frac{1}{2}}dx\left(\sqrt{2a}-\frac{x}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^2}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^3}{64a^2\sqrt{2a}}-\&c.\right)=$$

$$x^{\frac{1}{2}}dx\sqrt{2a}-\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{5}{2}}dx}{16a\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}dx}{64a^2\sqrt{2a}}-\&c.;$$

é integrando será $S.dx\sqrt{2ax-x^2}=\frac{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{2a}}{3}-$

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{7}{2}}}{56a\sqrt{2a}}-\frac{x^{\frac{9}{2}}}{288a^2\sqrt{2a}}-\&c.$$

Haciendo $x=a$, se tendrá que el cuadrante de círculo $aEC=\frac{2a^2}{3}\sqrt{2}-\frac{a^2}{5\sqrt{2}}-\frac{a^2}{56\sqrt{2}}-\frac{a^2}{288\sqrt{2}}-\&c.$ multiplicando el primer término arriba y abajo por $\sqrt{2}$, y sacando fuera de un paréntesis el factor $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$ que resulta comun, se tendrá

$$aEC=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{56}-\frac{1}{288}-\&c.\right);$$

multiplicando por 4 ambos miembros, y simplificando el segundo por $\sqrt{2}$, se tendrá

Sup. de círc.$^o=a^2\times 2\sqrt{2}\times(\frac{4}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{56}-\frac{1}{288}-\&c.)=\pi a^2$, representando por π el factor numérico $2\sqrt{2}(\frac{4}{3}-\&c.)$ el cual despues de calcular un número suficiente de términos, viene á ser el 3,14159 &c. que hemos hallado ántes (215).

217 Siendo la ordenada de la elipse $\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}$, el segmento elíptico aMP será igual á

$$\frac{b}{a}\times\text{S.d}x\sqrt{2ax-x^2};$$

y como es nulo al mismo tiempo que el segmento circular aPN se tendrá

$$a\text{PM}:a\text{PN}::\frac{b}{a}\text{S.d}x\sqrt{2ax-x^2}:\text{S.d}x\sqrt{2ax-x^2}::b:a.$$

Si cada parte del segmento elíptico guarda con el homólogo circular esta razon, toda la elipse guardará con el círculo la misma razon; porque en primer lugar tendrémos que

cuad.^{te} elíptico BCa: cuad.^{te} circular aEC$::b:a$;
y cuadruplicando los términos de la primera razon, se tendrá superf. de elipse : superficie de círculo$::b:a$; de donde superf. de elipse $=\frac{b}{a}\times$ superf. de círc.(cuyo radio $=a$)$=\frac{b}{a}\times 3{,}141$ &c.$\times a^2=3{,}141$ &c.$\times ab$.

Pero esta espresion es la de un círculo cuyo radio sea medio proporcional entre a y b; porque entónces el cuadrado de dicho radio será $=ab$; luego *la superficie de la elipse es igual á la de un círculo, cuyo radio sea medio proporcional geométrico entre los dos semiejes de la elipse.*

218 Sea ahora la parábola MAm (fig. 43), cuya ecuacion es $z=\sqrt{px}$; por consiguiente la diferencial del espacio APM será $z\text{d}x=\text{d}x\sqrt{px}=p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\text{d}x$; é integrando será $\text{S.}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\text{d}x=p^{\frac{1}{2}}\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}x$; y poniendo z en vez de $p^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$, resulta que la espresion de la superficie del segmento parabólico ACMP

será $\frac{2}{3}xz$; ó lo que es lo mismo *las dos terceras partes del rectángulo APMD de las coordenadas AP, PM.* Lo que manifiesta que la parábola es una curva cuadrable: propiedad que no tiene el círculo ni ninguna otra seccion cónica.

219 La hipérbola considerando el oríjen en el vértice tiene por ecuacion $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$, y por lo mismo será (fig. 42) $AQR = \frac{b}{a} S.dx\sqrt{2ax + x^2}$, que tambien podríamos integrar por un método análogo al espuesto (216).

220 La diferencial del arco de una curva, referida á coordenadas perpendiculares entre sí, está espresada (186) por $\sqrt{dx^2 + dz^2}$; luego si sustituimos en ella en vez de dz^2 su valor, sacado de la ecuacion diferencial de la curva propuesta, tomará la forma Xdx, y su integral dará la longitud de esta curva. Pedir la longitud del arco de una curva, es pedir su *rectificacion*; porque la solucion de este problema cuando se obtiene exactamente, nos conduce á determinar una línea recta que sea igual en longitud al arco de que se trata.

Así, como llamando a el radio de un círculo, la diferencial del arco es $\frac{adx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, cuando se supone el oríjen en el centro, y $\frac{adx}{\sqrt{2ax - x^2}}$, cuando se le supone en la circunferencia; y bájo cualquiera de estas formas que se considere, no se puede obtener su integral sino por aproximacion, se sigue que la circunferencia no es rectificable.

221 Pásemos á la elipse, y tomemos por ecuacion de esta curva $z^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$;

la diferencial de su arco (186) será $dx\frac{\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, cuyo valor aproximado podríamos hallar por series.

222 Pasemos á la parábola, cuya ecuacion es $z^2=px$; la diferencial de su arco será

$$dx\sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}}=dx\sqrt{1+\frac{p^2}{4z^2}}=dx\sqrt{1+\frac{p^2}{4px}}=$$

$$dx\sqrt{\frac{4x+p}{4x}}=\tfrac{1}{2}dx\sqrt{4+\frac{p}{x}}=\tfrac{1}{2}dx\left(4+\frac{p}{x}\right)^{\frac{1}{2}},$$

cuyo valor aproximado se sacará por series.

223 Siendo la ecuacion de la hipérbola

$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, se tiene $\frac{dx\sqrt{(a^2+b^2)x^2-a^4}}{a\sqrt{x^2-a^2}}$

para la diferencial de su arco, cuya integral aproximada se podrá hallar por series.

224 Las primeras superficies curvas que han considerado los Geómetras, han sido las de revolucion; porque las diferenciales de sus superficies y de los volúmenes que comprenden, tienen una espresion mas simple que sus análogas entre las superficies curvas en general.

Cuando la curva que jira es una seccion cónica, se orijina un cuerpo á que se da el nombre de *conoide*; si es parábola, se llama *conoide parabólico* ó *paraboloide*; si elipse, se llama *conoide elíptico* ó *elipsoide*; cuando la semielipse jira al rededor del eje mayor, resulta el elipsoide *prolongado*, y cuando al rededor del menor el *aplanado*. El elipsoide, de cualquier clase que sea, recibe tambien el nombre de *esferoide*; finalmente, cuando la seccion cónica que jira es una hipérbola, recibe el nombre de *conoide hiperbólico* ó *hiperboloide*.

225 Con el objeto de hacer aplicacion de las fórmulas (193 y 194), nos propondrémos hallar la su-

perficie y volúmen del paraboloide engendrado por el arco AM (fig. 44) al rededor del eje AP; y tendrémos que como la ecuacion de la parábola es $z^2=px$,

da $x=\frac{z^2}{p}$, y $dx=\frac{2zdz}{p}$;

cuyo valor sustituido en el radical de la espresion

$$ds=2\pi z\sqrt{dx^2+dz^2},$$

é integrando, dará superf. de paraboloide=

$$S.2\pi\times z\sqrt{\frac{4z^2dz^2}{p^2}+dz^2}=S.\frac{2\pi zdz}{p}\sqrt{4z^2+p^2};$$

para integrar esta espresion harémos $p^2+4z^2=u^2$, que diferenciando da $8zdz=2udu$, de donde dividiendo por 4 sale $2zdz=\frac{1}{2}udu$; y haciendo las sustituciones correspondientes en la espresion anterior, se convertirá en

$$S.\frac{\pi udu}{2p}\times(u^2)^{\frac{1}{2}}=S.\frac{\pi u^2du}{2p}=\frac{\pi u^3}{6p}+C;$$

que sustituyendo en vez de u su valor $(p^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}$,

se convierte en $\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}+C$;

y determinando la constante, de manera que se reduzca la integral á o cuando $z=0$, se tendrá

$$C=-\frac{\pi p^3}{6p}=-\frac{\pi p^2}{6};$$

por lo que

$$\text{superf. de paraboloide}=\frac{\pi(p^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}{6p}-\frac{\pi p^2}{6}.$$

Si nos propusiéramos hallar el volúmen del mismo paraboloide, sustituiríamos en la espresion

$$dv=\pi z^2dx,$$

en vez de z^2 su valor px, é integraríamos; lo que daria volúm. de paraboloide $=S.\pi z^2dx=S.\pi pxdx=$

$$\frac{\pi px^2}{2}=\frac{\pi px\times x}{2}=\pi z^2\times\frac{x}{2}=\text{círculo LRMS}\times\frac{AP}{2}=$$

$\frac{1}{2}$cilindro LNQM.

226 Para hallar el volúmen del elipsoide, sustituirémos en la misma espresion en vez de z^2 su valor $\frac{b^2}{a^2}\times(2ax-x^2)$, y tendrémos que el volúmen del cuerpo que engendrá el segmento de elipse APM (fig. 45), estará representado por

$$S.\frac{\pi b^2}{a^2}(2ax-x^2)dx=\frac{\pi b^2}{a^2}\left(ax^2-\frac{x^3}{3}\right)+C;$$

que como dicho cuerpo se reduce á o cuando $x=o$, la constante es cero; luego si suponemos ahora que $x=2a$, resultará para el elipsoide prolongado ACBD, la espresion $\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a\times 4a^2-\frac{8a^3}{3}\right)=\pi\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{12a^3-8a^3}{3}\right)$

$$=\pi\frac{b^2}{a^2}\times\frac{4a^3}{3}=\frac{4\pi b^2a}{3}.$$

227 Para hallar el volúmen del elipsoide aplanado, deberémos considerar que la semielipse CAD jira al rededor del eje menor CD, cuya ecuacion respecto de este eje (62) es $z^2=\frac{a^2}{b^2}(2bx-x^2)$;

que procediendo de un modo análogo al precedente, y haciendo $x=2b$ para tener el de todo el elipsoide, nos resultará vol. de elipsoide aplanado $=\frac{4}{3}\pi a^2b$.

Ahora, si con este valor y el anterior formamos proporcion, tendrémos

Elips. prol.:Elips. apl.$::\frac{4}{3}\pi ab^2:\frac{4}{3}\pi a^2b::b:a$;

que quiere decir, que *el elipsoide aplanado es mayor que el prolongado, en la misma razon que el semieje mayor es mayor que el semieje menor.*

228 Cuando $a=b$, el cuerpo propuesto se convierte en una esfera, y la espresion de su volúmen es

$$\tfrac{4}{3}\pi a^3=\tfrac{4}{3}\times 3,14\&c.\times a^3=4,1887\ \&c.\times a^3,$$

que no se diferencia del hallado (I. 435 cor.) sino en que allí se espresa en valores del diámetro, y aquí lo está en valores del radio.

MECÁNICA.

Nociones preliminares.

229 Se dice que un cuerpo *está en movimiento*, cuando pasa sucesivamente por diferentes partes del espacio; y que *está en reposo*, cuando permanece constantemente en un mismo sitio.

230 *Ningun cuerpo puede pasar por sí mismo del reposo al movimiento, ni del movimiento al reposo*; cuya proposicion, conocida con el nombre de *ley de inercia*, es un hecho que la esperiencia ha acreditado en todos tiempos.

Toda causa, cualquiera que sea su naturaleza, que sea capaz de imprimir movimiento á un cuerpo, ó de alterar el que ya tuviese, se llama *fuerza* ó *potencia*; y se llama *direccion* de la fuerza á la recta que dicha fuerza obligaria á describir al punto ó cuerpo á que estuviese aplicada, si obrase por sí sola.

231 Como un punto ó cuerpo no puede ir por muchos caminos á un mismo tiempo, resulta que cuando muchas fuerzas aplicadas á un punto ó á un cuerpo, se destruyen mutuamente, el cuerpo no puede tener movimiento alguno, y se dice que dichas fuerzas *se equilibran* ó *están en equilibrio*. Sino se destruyen, *el cuerpo seguirá una cierta direccion, como si sólo obedeciese á una fuerza*. Al conjunto de fuerzas que obran sobre un cuerpo, se llama *sistema* de fuerzas; y *resultante* ó *derivada* del sistema, á la fuerza única que resulta de todas las demas, que entónces reciben el nombre de *componentes*.

232 Se llama *Mecánica* la ciencia del movimiento

y equilibrio de los cuerpos: se divide en *Estática*, *Dinámica*, *Hidrostática* é *Hidrodinámica*; la primera trata del equilibrio de los cuerpos sólidos; la segunda de su movimiento; la tercera trata del equilibrio de los fluidos; y la cuarta de su movimiento.

La Mecánica considerada sólo teóricamente, se caracteriza con el nombre de *Mecánica racional*, y tiene por objeto el determinar en general todas las leyes del equilibrio y movimiento de los cuerpos; y cuando tiene por objeto aplicar inmediatamente estas leyes á los usos de la sociedad, se le caracteriza con el nombre de *Mecánica práctica*.

233 En una fuerza hay que considerar particularmente su *direccion* y su *intensidad*. Las direcciones se representan por líneas rectas; en estas se toman unas magnitudes proporcionales á las fuerzas, y representan sus intensidades; y en el cálculo se espresan por las letras P, Q, S, &c.

ESTÁTICA.

Del equilibrio de un punto material.

Proposiciones generales acerca de la composicion y descomposicion de las fuerzas.

234 En la Mecánica hay que resolver con mucha frecuencia el problema *de la composicion* de las fuerzas, y el *de su descomposicion*. El primero consiste en hallar la resultante de un sistema dado de fuerzas; y en el segundo se trata de hallar dos ó mas fuerzas, cuyo efecto sea el mismo que el de una dada. La resolucion del segundo problema se deduce de las circunstancias del primero. Se dice que dos fuerzas son *iguales* cuando producen efectos iguales; por consiguiente, *si dos fuerzas iguales se aplican á un mismo punto en sentidos contrarios, se equilibran.*

235 *Si dos fuerzas desiguales* P, Q, *se aplican á*

un mismo punto en sentidos contrarios, la accion sobre este punto, ó la resultante de dichas fuerzas, es igual á su diferencia. Porque la menor destruirá en la mayor una parte igual con ella, y de consiguiente el movimiento del punto sólo dependerá del esceso que la mayor lleve á la menor.

236 *Si dos ó mas fuerzas* P, Q, &c. *obran sobre un punto en la direccion de una misma recta, y en el mismo sentido, el efecto sobre dicho punto será el mismo que el de una fuerza igual á* P+Q+&c. Porque todas cospiran á mover el punto de un mismo modo.

237 *Si un número cualquiera de fuerzas obran sobre un punto en la direccion de una misma recta, y en la opuesta de su prolongacion, la resultante de todas será igual á la suma de las que obran en un sentido, ménos la suma de las que obran en el sentido contrario: ó mas general, la resultante es igual á la suma algebráica de todas ellas.* Esto es una consecuencia de las dos proposiciones anteriores.

238 *Cuando muchas fuerzas que obran sobre un mismo punto, se equilibran, cada una de ellas se puede considerar como igual y directamente opuesta á la resultante de todas las otras.*

En efecto, si las fuerzas P, Q, S, T (fig. 46), obran sobre el punto m y se equilibran, aplicando al sistema una fuerza T' igual y contraria á T, las fuerzas T y T' se equilibrarán (234), y sólo quedarán de todo el sistema las tres fuerzas P, Q, S.

Por otra parte, el conjunto de las cuatro fuerzas P, Q, S, T, se halla en equilibrio por el supuesto; luego tenemos aquí cinco fuerzas P, Q, S, T, T', tales que la T se equilibra con las tres P, Q, S, y con la T'; luego T' produce el mismo efecto que las tres P, Q, S, y por lo tanto será su resultante; y como T' es igual y directamente opuesta á T, resulta que T es igual y directamente opuesta á la resultante de las demas. L. Q. D. D.

239 *Un sistema de fuerzas no se altera, aunque se suponga que se agrega otro que por sí mismo se*

equilibra; pues este no podrá producir ningun efecto sobre el anterior.

240 *Cuando una fuerza obra sobre un punto* m (fig. 47), *se puede suponer que su accion está aplicada en el punto P, ó en cualquier otro Q de su direccion, con tal que este segundo esté invariablemente unido al primero.*

Porque si en la direccion de *m*P, aplicamos dos fuerzas *Q*, *S*, iguales entre sí y con *P*, y que obren en sentido contrario la una de la otra, estas dos fuerzas no alterarán el efecto de la primera *P*, ó lo que es lo mismo, se podrá suponer que el efecto de la fuerza *P* es el mismo que el del sistema de las tres *P*, *Q*, *S*; y como $P=S$, y obran en sentido contrario, se destruirán; luego sólo quedará del sistema la fuerza *Q*, que es igual con *P*, cuya accion se ha trasladado al punto Q, donde producirá el mismo efecto, pues estos puntos conservan siempre la misma posicion.

241 *Cuando dos fuerzas forman un ángulo, la direccion de su resultante pasará por dicho ángulo.*

Porque si las dos fuerzas *P* y Q (fig. 48), obran sobre el punto *m* formando el ángulo P*m*Q, el efecto de la fuerza *Q*, si obrase por sí sola, estaria reducido á hacer pasar el punto *m* hácia Q, por la parte inferior de la P*m*P′: y el efecto de la fuerza *P* tratará de hacerle pasar desde *m* á *P* por la parte superior de la Q*m*Q′; luego para que el punto *m* obedezca á las dos fuerzas, será preciso que pase por dentro del ángulo P*m*Q, que es la parte del plano que se halla inferior á la línea P*m*P′ y superior á la Q*m*Q′.

242 *Cuando dos fuerzas obran sobre un punto formando un ángulo cualquiera, su resultante sigue la direccion de la diagonal del paralelogramo costruido sobre dichas dos fuerzas.*

Aquí pueden ocurrir dos casos, á saber: que las fuerzas sean iguales ó desiguales.

1.° Si las dos fuerzas *m*C, *m*B (fig. 49), son iguales, y obran sobre el punto *m*, su resultante dividirá en dos partes iguales el ángulo C*m*B; pues no hay ninguna razon para que se incline mas hácia la fuerza mC que hácia la mB; luego seguirá la diagonal mD del rombo mBDC.

2.º Si la fuerza mB (fig.50), crece y se convierte en mF=2mB, costruyendo el segundo paralelogramo DBFG, tendrémos que si el punto m se hallase solicitado solamente de las fuerzas mC, mB, seguiria la diagonal mD del rombo mCDB; á esta resultante mD ó á sus componentes mB, mC, se les pueden sustituir sus iguales CD, BD, que obren en la direccion de C hácia D, y de B hácia D, esto es, que obren empujando al punto D. Ahora, la fuerza BD que impele al punto D, produce el mismo efecto que si tirase del punto B; y acompañada de la fuerza BF=BD, producirá la resultante BG, y se podrá sustituir por ellas; luego las tres fuerzas CD, BD, BF, ó sus iguales mB, mC, BF, las tenemos reducidas á las dos CD, y BG. Pero el punto de aplicacion de la CD se puede suponer (240) que es el punto G, que está invariablemente unido al punto D; luego este punto se hallará solicitado de la accion simultánea de las dos fuerzas CD, BG, ó de las tres CD, BD, BF, ó de sus iguales mB, mC, BF; luego el punto G es un punto de la resultante del sistema de estas tres fuerzas; y como (236) las mB, BF, equivalen á una sola igual á su suma mF, se sigue que la resultante de las dos fuerzas mC, mF, pasa por el punto G; pero ella parte del punto m, luego quedará determinada por los puntos m, G, ó lo que es lo mismo, seguirá la diagonal mG del paralelogramo mCGF.

Del mismo modo se demuestra cuando la mB se convierte sucesivamente en 3mB, 4mB,...$n\times m$B; y como se repetiria la misma demostracion cuando permaneciese constante la mB, y la mC fuese valiendo sucesivamente 2mC, 3mC, 4mC,...$m\times m$C, resulta que cualesquiera que sean las magnitudes de las fuerzas mC, mB, su derivada seguirá siempre la diagonal del paralelogramo formado sobre dichas fuerzas.

243 *La magnitud de la resultante de dos fuerzas cualesquiera* P y Q, ó m*C*, m*B* (fig. 51), *está representada por la diagonal del paralelogramo costruido sobre estas fuerzas.*

Para demostrarlo, observarémos que pues las fuerzas *P* y *Q* equivalen á una que pase por la direccion *m*R, para que haya equilibrio será preciso introducir una nueva fuerza *R'*, que destruya á la resultante, la cual deberá ser igual con ella y directamente opuesta (234); y pues que las tres fuerzas *P*, *Q* y *R'*, se equilibran, podrémos suponer (238) que la fuerza *Q* se equilibre con las *P* y *R'*, y la resultante de estas dos pasará por la prolongacion *m*Q' de Q*m*, y estará representada por *m*F=*m*B; pero aquí la componente *P* es dada de magnitud y direccion; de la otra componente *R'* sólo se conoce su direccion; y la resultante *Q'* es conocida en magnitud y direccion, pues ha de ser igual con *m*B; luego sólo nos falta determinar la magnitud de la componente *m*R'. Para esto, unirémos los puntos F y C, y tirarémos por F la FG paralela á *m*C; y digo que *m*G será la magnitud de la componente *R'*. Porque sino lo fuese, seria mayor ó menor; y si supusiéramos que estaba representada por *m*G'<*m*G, costruyendo sobre *m*C y *m*G' un paralelogramo, su diagonal *m*F' espresaria la direccion de la resultante de las fuerzas *P* y *R'*; pero esta resultante debe pasar por la direccion *m*F, prolongacion de *m*B; luego deberia pasar por dos parajes distintos á un mismo tiempo, lo que es absurdo; luego no se puede suponer que *m*G'<*m*G represente á la fuerza *R'*.

Del mismo modo se demuestra que *m*G''>*m*G no puede representar á *R'*; luego no pudiendo esta fuerza estar representada por una recta menor ni mayor que *m*G, lo estará por la misma *m*G. Pero *m*G=*m*D por la igualdad de los triángulos *m*BD y *m*FG (I. 261), luego la magnitud de la resultante *R* está representada por *m*D, diagonal del paralelogramo *m*BDC.

Esc. Recíprocamente, *toda fuerza* R *se puede descomponer en otras dos cualesquiera* P, Q: para lo cual no hay mas que costruir sobre la recta dada como diagonal un paralelogramo cualquiera; y los lados que formen el ángulo de uno de los estremos de la fuerza dada, serán las magnitudes y direcciones de las fuerzas que se piden. Aquí puede observarse de paso, que este problema es indeterminado; porque (I. 314) una recta puede ser diagonal de muchos paralelogramos.

244 *La resultante* R *de dos fuerzas* P *y* Q (fig. 52), *se puede espresar por medio de estas fuerzas y del ángulo que forman.*

Si tiramos desde D la DG perpendicular á mQ, y llamamos α al ángulo PmQ, el triángulo rectángulo BDG, y el oblicuángulo mBD, dan (464 esc. y 335)

$$DG = BD\,\text{sen.}\,DBG = mC\,\text{sen.}\,PmQ = P\,\text{sen.}\,\alpha,$$

$$BG = BD\cos.\,DBG = mC\cos.\,PmQ = P\cos.\,\alpha,$$

y $mD^2 = BD^2 + mB^2 + 2mB \times BG$;

que poniendo en vez de mD, BD, mB y BG, sus valores, se tendrá $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.\alpha$.

Cor. El triángulo mDB da (I. § 468)

$$BD : mB : mD :: \text{sen.}\,BmD : \text{sen.}\,mDB : \text{sen.}\,mBD;$$

pero $\text{sen.}\,mDB = \text{sen.}\,PmR$,

y (I. § 459 cor.) $\text{sen.}\,mBD = \text{sen.}\,PmQ$.

Luego si sustituimos estos valores, y en vez de las líneas BD, mB, mD, las fuerzas P, Q, R, que representan, tendrémos

$$P : Q : R :: \text{sen.}\,QmR : \text{sen.}\,PmR : \text{sen.}\,PmQ;$$

que nos dice, que *las tres fuerzas* P, Q, R, *de las que una es resultante de las otras, son entre sí como el seno del ángulo que forman las otras dos.*

245 *La resultante de tres fuerzas* P, Q, S, *aplicadas á un mismo punto, y cuyas direcciones no se hallan en un mismo plano, está representada en magnitud y direccion, por la diagonal del paralelepípedo costruido sobre las partes de las direcciones de estas fuerzas que espresan sus magnitudes respectivas.*

Sean mB, mC y mD (fig. 53), las magnitudes respectivas de las fuerzas P, Q, S, y $mBCDF$ el paralelepípedo costruido sobre estas rectas. La resultante r de las dos fuerzas P y Q, está representada por la diagonal mE del paralelogramo mBEC; y á causa de que EF es igual y paralela con mD, la figura mEFD es un paralelogramo. Luego la diagonal mF de este paralelogramo, ó del paralelepípedo, representará la resultante de estas dos fuerzas r y S, ó de las tres P, Q, S.

Cor. Si las fuerzas P, Q, S, son rectangulares, se tendrá $\begin{cases} r^2=P^2+Q^2, \\ \text{y } R^2=r^2+S^2=P^2+Q^2+S^2. \end{cases}$

246 Recíprocamente, *una fuerza* R *aplicada en un punto* m, *siempre se puede descomponer en otras tres, respectivamente paralelas á tres ejes ó rectas tiradas por un mismo punto del espacio.*

Porque si se toma mF para que represente la fuerza R, y por el punto m se tiran tres rectas mP, mQ, mS, paralelas á los ejes dados, estas rectas determinarán tres planos PmQ, PmS, QmS; y haciendo pasar despues por el punto F tres planos respectivamente paralelos á estos, se formará un paralelepípedo del que mF será la diagonal, y cuyas aristas mB, mC, mD, contiguas al punto m, serán las componentes buscadas.

Si el paralelepípedo es rectángulo, y se une el punto F con los B, C, D, el triángulo mBF rectángulo en B, dará mB$=m$Fcos.BmF;
el mCF rectángulo en C, dará mC$=m$Fcos.CmF;
y el mFD rectángulo en D, dará mD$=m$Fcos.DmF;
y espresando por α, β, γ, los ángulos BmF, CmF y DmF, que forma la diagonal mF con las aristas mB, mC, mD á que llamarémos P, Q, S, y R á la resultante mF, las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$P=R\cos.\alpha\,,\ Q=R\cos.\beta \text{ y } S=R\cos.\gamma;$$

donde se ve que *la accion de una fuerza* R, *estimada segun una direccion dada, se halla multiplicando esta fuerza por el coseno del ángulo que forma su direccion con la direccion dada.*

Sumando los cuadrados de estas tres ecuaciones, y resolviendo en factores el segundo miembro, resulta $P^2+Q^2+S^2=R^2(\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2)$;
y como en este caso (245 cor.) $R^2=P^2+Q^2+S^2$, simplificando se tendrá $\cos.\alpha^2+\cos.\beta^2+\cos.\gamma^2=1$.

Composicion de las fuerzas que concurren en un punto.

247 *Para determinar la resultante de un número cualquiera de fuerzas aplicadas á un mismo punto, y situadas ó no en un mismo plano*, se halla primero la resultante de dos de estas fuerzas; despues se compondrá esta resultante con una tercera fuerza; luego, se hallará la resultante de esta segunda resultante y de otra fuerza; y así se continuará hasta haber hallado la resultante de todas; con lo cual se habrá reducido todo el sistema á una sola fuerza, que en el caso de equilibrio será cero.

Supongamos que dichas fuerzas estén representadas por las líneas mA, mA$'$, mA$''$, mA$'''$, &c. (fig. 54), que parten desde el punto de aplicacion m. Por el punto A tiremos una línea AB, igual y paralela con mA$'$; por B tiremos la BC, igual y paralela con mA$''$; y así sucesivamente. Con lo cual formarémos una porcion de polígono, cuyo número de lados será igual al de las fuerzas dadas; y uniendo el estremo de su último lado con el punto m, por medio de una recta, esta será la resultante buscada.

En efecto, la línea mB es la resultante de las fuerzas mA y mA$'$; pues tirando la A$'$B resulta el paralelogramo mABA$'$, cuya diagonal es mB, y cuyos lados mA, mA$'$ son las dos fuerzas que hemos considerado. Por la misma razon la mC es la resultante de las fuerzas mB y mA$''$, ó de las tres mA, mA$'$, mA$''$; y así sucesivamente.

248 Ahora, si por el punto m tiramos una línea cualquiera mX, y desde los puntos A, B, C, D, se tiran á esta línea las perpendiculares AE, BF, CG, DH, se tendrá $m\mathrm{H}=m\mathrm{E}+\mathrm{EF}+\mathrm{FG}+\mathrm{GH}$;
pero mH es la proyeccion de la resultante mD sobre el eje arbitrario mX, ó es la magnitud de dicha resultante, estimada en la direccion de dicho eje: y mE, EF, FG, GH, son las magnitudes de las componentes estimadas en la direccion del mismo eje; luego

la magnitud de la resultante de un número cualquiera de fuerzas que obran sobre un punto libre, estimada en la direccion de un eje cualquiera tirado por dicho punto, es igual á la suma de las componentes estimadas en la direccion del mismo eje.

Composicion y equilibrio de las fuerzas paralelas.

249 *La resultante de dos fuerzas paralelas, que obran en el mismo sentido, es paralela á la direccion de estas fuerzas é igual á su suma; y las distancias de la direccion de esta resultante á las de las componentes, son inversamente proporcionales á estas fuerzas.*

Sean P y Q dos fuerzas paralelas, representadas por AM, BY (fig. 55), y que se hallen aplicadas á la recta inflexible AB; si á esta aplicamos las fuerzas AH, BK, iguales y contrarias, no se alterará el valor de la resultante (239). Esto supuesto, costruyamos los paralelogramos AHLM, BKNY, y tendrémos que la resultante de las fuerzas P y Q, será la misma que la de las fuerzas AL, BN. Ahora, por ser las AM, BY paralelas, resultará (I. 284) que los ángulos

$$MAB+YBA=\pi\text{, luego } LAB+ABN>\pi,$$

y por lo mismo los $BAE+ABE<\pi$;

luego las dos fuerzas AL, BN concurrirán (I. 287) en un punto por la parte superior de la AB, tal como E; si concebimos aplicadas estas dos fuerzas (240) en el punto de concurso E, y representadas por las EZ=AL y EV=BN, tiramos la recta EC paralela á las AM, BY, y costruimos los paralelogramos EGZT, y EDVO, tendrémos descompuestas cada una de las EZ, EV en otras dos, á saber, la EZ en las EG, ET, y la EV en las ED, EO; y la resultante de las dos fuerzas P y Q será aun la misma que la de las cuatro fuerzas EG, ED, ET y EO; pero las dos primeras son iguales y contrarias, luego se destruirán, y sólo quedarán para formar la resultante las dos fuerzas ET y EO, que obran en el mismo sentido en la direccion de EC, y que por consiguiente se reducen á una sola igual á su suma (236); luego R=ET+EO; y como ET=AM=P, y EO=BY=Q, resulta R=P+Q (1).

Ahora, los triángulos EZT y EAC son semejantes (I. 328), y por lo mismo dan ET:EC::ZT:AC; y los EOV y ECB nos dan tambien EC:EO::CB:OV; multiplicando estas dos proporciones, y simplificando, se tendrá ET:EO::BC:AC;
y siendo ET=AM=P, y EO=BY=Q,
sustituyendo resultará P:Q::BC:AC;
con lo cual quedan demostradas las dos partes de la proposicion.

250 Componiendo esta proporcion será

$$P+Q:P::BC+AC:BC;$$

ó poniendo en vez de P+Q su igual R, y en lugar de BC+AC su igual AB, tendrémos R:P::AB:BC; y comparando con el consecuente será R:Q::AB:AC; y como alternando estas dos proporciones tendrán una razon comun, podrémos poner R:AB::P:BC::Q:AC; ó (I. § 185) R:P:Q::AB:BC:AC.

Pero si por un punto cualquiera de una de las fuerzas, ó de su resultante, se tira una recta *mon*, de cualquier modo que sea, que encuentre á las fuerzas ó á sus prolongaciones, se verificará siempre (I. 320 cor. 2.º) que AB:BC:AC::*mn*:*no*:*mo*;
luego podrémos poner (I. § 184, 2.ª cor.)

$$R:P:Q::mn:no:mo;$$

donde se ve, que *si se cortan las direcciones de dos fuerzas paralelas y de su resultante, por una recta cualquiera, cada una de estas fuerzas podrá estar representada por la parte de esta recta interceptada por las otras dos.*

251 La anterior serie de razones iguales nos da las tres proporciones siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} R:P::mn:no\text{, que da } R\times no=P\times mn \quad (2)\\ R:Q::mn:mo\text{, que da } R\times mo=Q\times mn \quad (3)\\ P:Q::no:mo\text{, que da } P\times mo=Q\times no \quad (4)\end{array}\right\}$$

Con estas tres ecuaciones y con la (ec. 1), tenemos lo suficiente para resolver completamente el problema de la composicion de dos fuerzas paralelas que obren en una misma direccion.

En efecto, la (ec. 1) da la magnitud de la resultante R, y cualquiera de las dos (ecs. 2 y 3) determina el punto o por donde debe pasar; la (ec. 2) da

$$no=\frac{P\times mn}{R}\text{, y la (ec. 3) da } mo=\frac{Q\times mn}{R};$$

$$\text{ó } no=\frac{P\times mn}{P+Q}\ (5),\ mo=\frac{Q\times mn}{P+Q}\ (6).$$

Si fuese $P=Q$, resultaria $no=\frac{1}{2}mn=mo$; que quiere decir, que *la resultante de dos fuerzas paralelas é iguales, pasa por el punto medio de la recta que une sus puntos de aplicacion.*

252 Si la fuerza Q obrase en sentido contrario de la P, se deberia mudar su signo, con lo cual las fórmulas anteriores se convertirian en

$$R=P-Q\ (7),\ no=\frac{P\times mn}{P-Q}\ (8),\ mo=\frac{-Q\times mn}{P-Q}\ (9).$$

Si $P>Q$, la mo será negativa, ó lo que es lo mismo, se deberá contar desde m hácia la izquierda, y la resultante obrará en el mismo sentido que P.

Pero si $P<Q$, la mo será positiva y mayor que mn (pues será igual á la misma mn multiplicada por un quebrado impropio), ó la resultante tendrá su punto de aplicacion á la derecha de n, y obrará en el mismo sentido que la fuerza Q, que en este caso debe ser de B hácia arriba.

253 *La resultante de muchas fuerzas paralelas* P, P′, P″, &c. (fig. 56), *ya estén ó no en un mismo plano, es igual á la suma de estas fuerzas, dándoles signos convenientes.*

Porque siendo paralelas las fuerzas P y P', su resultante R' es paralela á estas fuerzas, y se tiene $R'=P+P'$; y siendo R' y P'' paralelas á P, son paralelas entre sí; luego su resultante R'' es paralela á estas fuerzas, y se tiene $R''=R'+P''$ ó $R''=P+P'+P''$, y así sucesivamente. Si la fuerza P'' obrase en direccion opuesta á las P y P', al hallar la resultante de R' y P'', tendríamos $R''=R'-P''=P+P'-P''$, que es la suma algebráica de P, P' y $-P''$.

Cor. Luego si espresamos por R la resultante de un número cualquiera de fuerzas P, P', P'', P''', P^{iv} &c., de las cuales supondrémos que las tres primeras obran en una misma direccion, y las restantes en direcciones contrarias, tendrémos

$$R=P+P'+P''-P'''-P^{iv} \text{ \&c. } (10).$$

Esc. Para encontrar el punto de aplicacion de la resultante, se unirán los puntos de aplicacion de P y P' por una recta, la cual se dividirá (I.323 esc.) en dos partes que estén en razon inversa de dichas fuerzas; despues se unirá este punto de aplicacion con el de P'', y se dividirá la línea que los una en razon inversa de $R'=P+P'$ y de P''; y así se procederá hasta encontrar el punto de aplicacion de todas.

254 *Si las fuerzas dadas, permaneciendo siempre paralelas y aplicadas á los mismos puntos, jiran al rededor de su punto de aplicacion, la resultante no mudará de punto de aplicacion ni de intensidad; y su direccion será paralela á la nueva direccion de las fuerzas.*

Sean las tres fuerzas P, P', P'', dirijidas segun las rectas mA, m'A$'$, m''A$''$ (fig. 57); sea nB la direccion de la resultante r de las fuerzas P, P', y será $r=P+P'$; sea n'B$'$ la direccion de la resultante R de las fuerzas $P+P'=r$ y de P'', y observarémos que la figura supone que P'' obra en sentido contrario al de P y P', y que ademas se tenga $P''>P+P'$. Ahora, si las fuerzas P, P', P'', jiran al rededor de sus puntos de aplicacion m, m', m'', y toman las nuevas direcciones paralelas ma, $m'a'$, $m''a''$, tendrémos que la resultante de las fuerzas P, P', encontrará á la recta mm' en el mismo punto n que ántes; pues la posicion de este punto sólo depende (249 y 252) de la relacion de las componentes y de la distancia de sus puntos de aplicacion. Por la misma razon la resultante

R encontrará siempre á la prolongacion de la recta nm'' en el mismo punto n'; luego la resultante, que debe ser igual á la suma algebráica de las componentes, y paralela á ellas (249), no alterará su magnitud absoluta, y deberá jirar al rededor de su punto de aplicacion, del mismo modo que lo hayan hecho las componentes. L. Q. D. D.

De los momentos.

255 Se llama *momento* de una fuerza al producto de esta fuerza por la distancia de su direccion á un punto fijo; ó por la distancia de su punto de aplicacion á una línea ó á un plano dado de posicion.

El momento de la resultante de dos fuerzas paralelas, con relacion á un punto cualquiera del mismo plano de las fuerzas, es igual á la suma de los momentos de dichas fuerzas.

Porque si desde un punto A (fig. 58) tomado en el plano de las fuerzas paralelas P y Q, tiramos la recta An perpendicular á las direcciones de estas fuerzas y de su resultante R, el punto de aplicacion de esta resultante debe estar situado de manera que se tenga (ecs. 1 y 4) $R=P+Q$, y $P\times mo=Q\times no$;
pero $mo=\text{A}o-\text{A}m$, y $on=\text{A}n-\text{A}o$;
luego sustituyendo estos valores se tendrá

$$P\times(\text{A}o-\text{A}m)=Q\times(\text{A}n-\text{A}o);$$

que ejecutando las operaciones, trasladando los términos negativos á los miembros opuestos, y resolviendo en factores el primer miembro, dará

$$(P+Q)\times\text{A}o=P\times\text{A}m+Q\times\text{A}n,\ \text{ó}\ R\times\text{A}o=P\times\text{A}m+Q\times\text{A}n.$$

Pero $R\times\text{A}o$ es el momento de la resultante, con relacion al punto A; $P\times\text{A}m$ y $Q\times\text{A}n$ son los momentos de las componentes con relacion al mismo punto; luego la ecuacion anterior manifiesta L. Q. D. D.

Esc. Para mayor sencillez espresarémos las distancias Am, An y Ao, por p, q, r, y tendrémos

$$Rr=Pp+Qq\ (11).$$

256 *Si una de estas fuerzas obrase en sentido con-*

trario al de la otra, se deberia mudar su signo; y tambien se mudaria el signo de su distancia al punto A, si la direccion de estas fuerzas estuviese situada al otro lado de dicho punto.

Ahora, si se tira la AL, las partes Ao, Am, An, serán proporcionales á las AH, AK, AL; luego en vez de aquellas se podrán sustituir estas en la (ec. 11) sin alterar la igualdad; pues esto equivale á multiplicar todos sus términos por una misma cantidad; de donde se deduce que *no hay una precision de que la recta An sea perpendicular á las direcciones de las fuerzas*. Basta sólo que las corte de un modo cualquiera.

257 *El momento de la resultante de dos fuerzas paralelas, con relacion á una recta que se halle en el mismo plano que las componentes, es igual á la suma de los momentos de las componentes con relacion á la misma recta.*

Dem. Sean P y Q dos fuerzas paralelas, y R su resultante, cuyos puntos de aplicacion m, n y o, se hallen en la recta mn; y supongamos que se quieran hallar los momentos de estas fuerzas con relacion á la recta AL, que se halla en el mismo plano que las fuerzas; para esto, tirarémos desde los puntos m, n y o las mM, nN, oO, perpendiculares á la AL, y resultará (255) que $P\times$Mm será el momento de la fuerza P, con relacion á la recta AL; y $Q\times n$N y $R\times o$O serán los momentos de la fuerza Q y de la resultante R.

Entendido esto, concibamos prolongada la mon hasta que encuentre á la recta dada AL en un punto tal como A, y tendrémos (ec. 11)

$$R\times \mathrm{A}o = P\times \mathrm{A}m + Q\times \mathrm{A}n;$$

y como (256) en vez de Ao, Am, An, podrémos sustituir sus proporcionales Oo, Mm, nN, tendrémos

$$R\times o\mathrm{O} = P\times m\mathrm{M} + Q\times n\mathrm{N} \quad (12).$$

Pero $R\times o$O es el momento de la resultante, tomado con relacion á la recta AL; y como $P\times m$M y $Q\times n$N, son los de las componentes P y Q, resulta que la (ec. 12) espresa L. Q. D. D.

258 *El momento de la resultante de un número*

cualquiera de fuerzas paralelas, con relacion á una recta que se halle en el mismo plano que las componentes, es igual á la suma de los momentos de las componentes con relacion á la misma recta.

Supongamos un número cualquiera de fuerzas P, Q, S, T, *&c.*; si desde el punto de aplicacion tiramos á la recta con relacion á la cual se cuentan los momentos, líneas paralelas entre sí, sean ó no perpendiculares á dicha línea, y las espresamos por p, q, s, t, *&c.* tendrémos que si espresamos por Y la resultante de P y Q, y por y la línea que desde su punto de aplicacion se tire paralela á las p, q, se verificará que

$$Yy=Pp+Qq.$$

Si llamamos Y' la resultante Y y de S, é y' la recta que desde su punto de aplicacion se tire á la línea con relacion á la cual se cuentan los momentos, se tendrá $Y'y'=Yy+Ss=Pp+Qq+Ss$;
y como lo mismo demostraríamos de todas las demas, se sigue que llamando R la resultante de todas, y r la línea que se tire desde su punto de aplicacion á la línea con relacion á la cual se cuentan los momentos, se verificará que $Rr=Pp+Qq+Ss+Tt+\&c.$ (13), que espresa L. Q. D. D.

Si el punto de aplicacion de la resultante se halla en la línea con relacion á la cual se determinan los momentos, la distancia r será cero; y la ecuacion anterior se convertirá en $Pp+Qq+Ss+Tt+\&c.=0$ (14).

259 *El momento de la resultante de muchas fuerzas paralelas, no situadas en un mismo plano, con relacion á un plano paralelo á las direcciones de estas fuerzas, es igual á la suma de los momentos de dichas fuerzas.*

Sean MN y ML (fig. 59) dos planos, el uno paralelo y el otro perpendicular á las direcciones de las fuerzas paralelas P, Q, S, *&c.* La interseccion MA de estos planos será una línea recta que se hallará en el plano ML. Sea V la resultante de las fuerzas P y Q; R la de las S y V; y supongamos que las direcciones de las fuerzas P, Q, V, S y R, encuentren al plano

ML respectivamente en los puntos C, D, E, G y F.

Tiremos desde estos puntos perpendiculares sobre MA, interseccion comun de los planos MN, ML; y como las dos fuerzas P y Q y su resultante se hallarán en un mismo plano, los tres puntos D, E, C, en que encuentren al ML estarán en una línea recta DEC, que prolongarémos hasta que encuentre en un punto cualquiera B á la MA, ó al plano MN.

Esto supuesto, hallándose el punto B en el plano de las fuerzas P y Q, se tiene (255) con relacion á este punto $V\times BE = P\times BC + Q\times BD$;
pero á las tres distancias BE, BC y BD, se les puede sustituir (256) las perpendiculares EK, CH y DY, que les son proporcionales; luego la ecuacion anterior se convertirá en $V\times EK = P\times CH + Q\times DY$ (15).

Espresando por R la resultante de las fuerzas V y S, tendrémos por lo acabado de domostrar

$$R\times FO = V\times EK + S\times Gg \ (16);$$

y poniendo en vez de $V\times EK$ el valor anterior, se tendrá

$$R\times FO = P\times CH + Q\times DY + S\times Gg.$$

Ahora, aunque el punto de aplicacion m de la fuerza P, se halle mas abajo del plano ML, la perpendicular que desde él se tire al plano MN, y que espresarémos por p, será igual con la CH; por la misma razon, si llamamos q, s, r, á las perpendiculares al plano MN, tiradas desde los puntos de aplicacion m', m'', de las componentes Q y S, y cualquier punto de la resultante R, que se podrá tomar por punto de aplicacion, se tendrá siempre $DY = q$, $Gg = s$, $FO = r$;
y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, se tendrá $Rr = Pp + Qq + Ss$;
y como se demostraria lo mismo si hubiese mas fuerzas T, &c. resulta en general, que cuando las fuerzas son paralelas se tiene $Rr = Pp + Qq + Ss + Tt + \&c.$ (17), que espresa L. Q. D. D.

De la pesantez, y del modo de hallar los centros de gravedad.

260 La *pesantez ó gravedad*, es la fuerza con que

todos los cuerpos, abandonados á ellos mismos, se precipitan hácia la tierra en direcciones perpendiculares á su superficie. Su intensidad no es la misma en todos los puntos de la superficie terrestre; se sabe por esperiencia que *crece proporcionalmente al cuadrado del seno de la latitud, desde el ecuador donde es la menor hasta el polo donde es la mayor*. Se ha reconocido ademas que *disminuye en razon inversa del cuadrado de la distancia del cuerpo pesado al centro de la tierra, á medida que se eleva sobre la misma vertical*. Sin embargo, se puede suponer que todas las partes materiales de un cuerpo intentan descender con la misma fuerza en direcciones paralelas.

261 La resultante de todas estas fuerzas se llama *peso* del cuerpo, y es igual á la gravedad de uno de sus puntos materiales multiplicada por el número de ellos; y como el conjunto de puntos materiales de un cuerpo constituye lo que llamamos su *masa*, resulta que el *peso de un cuerpo es proporcional á su masa*.

No es lo mismo gravedad que peso de un cuerpo; la gravedad es una propiedad general, que del mismo modo conviene á un cuerpo que á su mas mínima molécula; y el peso le constituye la reunion de todas las moléculas.

De donde resulta que *el peso de un cuerpo homojéneo es proporcional á su volúmen*; y *dos cuerpos homojéneos, equivalentes en volúmen, son iguales en peso*. Todo lo cual está confirmado por la esperiencia, como igualmente que *los cuerpos heterojéneos no tienen el mismo peso en volúmenes iguales*.

262 Los cuerpos se dice que son mas ó ménos *densos*, segun contengan en igual volúmen un número mayor ó menor de partes materiales igualmente pesadas. De donde se deduce que la *densidad* relativa de dos cuerpos, es la relacion de sus pesos en igual volúmen. Á lo que pesa un cuerpo en un volúmen dado, se llama tambien *peso específico*; y como en un volúmen dado pesará mas el cuerpo que tenga mayor

densidad, resulta que *los pesos específicos son proporcionales á las densidades*; y que *si el volúmen del cuerpo es igual á la unidad*, *entónces el peso específico es igual á la densidad*; cuya proposicion puede servir de base para formar tablas de los pesos específicos de diversos cuerpos, tanto sólidos como fluidos.

263 Si llamamos D la densidad de un cuerpo, V el volúmen, y M su masa, será $M=VD$ (18).

Espresando por letras minúsculas las cantidades análogas con relacion á otro cuerpo, será $m=dv$ (19); y formando proporcion resultará $M:m::DV:dv$ (20); que quiere decir, que *las masas de dos cuerpos cualesquiera están en razon compuesta de la de sus volúmenes y densidades.*

Suponiendo $D=d$, y despues $V=v$, se hallará que *las masas, á igualdad de densidades, son como sus volúmenes*; *y á igualdad de volúmenes, son como sus densidades.*

Multiplicando estremos y medios (prop. 20), tendrémos $M\times dv=m\times DV$, que da $D:d::Mv:mV$ (21); que quiere decir, que en general *las densidades de dos cuerpos están en razon compuesta de la directa de las masas, y de la inversa de los volúmenes.*

Esc. El peso de los cuerpos no varía en un mismo paraje de la tierra, ó á una misma latitud; por lo cual llamando P el peso absoluto y M la masa de un cuerpo, teniendo presente lo dicho (261), nos resultará $P=M$; pero como la fuerza de la gravedad de cada molécula varía de un paraje á otro (260), y el peso es la resultante de todas estas fuerzas, si queremos que la ecuacion anterior esprese el peso absoluto de los cuerpos, en cualquier parte que estos se consideren, será necesario modificarla, multiplicándola por la fuerza que en aquel paraje tenga la gravedad; que llamándola g, la ecuacion anterior se convertirá en $P=Mg$; y sustituyendo en vez de M su valor (ec.18), se tendrá $P=VDg$.

Donde P es el peso del cuerpo, V su volúmen, D su densidad, y g es la fuerza de la gravedad en aquel punto ó sitio en que se considera el cuerpo.

Ahora, en un mismo paraje, ó á latitudes iguales, se podrá suponer $g=1$, y el peso del cuerpo vendrá espresado por el volúmen multiplicado por la densidad ó peso específico, y se tendrá $P=VD$.

264 Pues que todos los puntos de un cuerpo están solicitados por fuerzas paralelas, se sigue que si se le hace tomar sucesivamente diversas posiciones con relacion á la direccion de estas fuerzas, su resultante pasará constantemente (254) por un cierto punto de este cuerpo.

Este punto se llama *centro de gravedad*. Su propiedad característica, en los cuerpos sólidos, consiste en que si se supone fijo dicho punto, el cuerpo á que pertenece, permanece en equilibrio en todas las posiciones posibles al rededor de este punto; porque en todas estas posiciones la resultante de las fuerzas aplicadas á los puntos del cuerpo, viene á pasar por el punto fijo.

265 Luego el centro de gravedad se puede considerar como el punto de aplicacion de la resultante de muchas fuerzas paralelas; y atendiendo á lo espuesto (251) tendrémos que *el centro de gravedad de dos pesos iguales, es el punto medio de la recta que une sus centros de gravedad*. De donde resulta que *el centro de gravedad de todo cuerpo homojéneo es su centro de figura, si es que tiene este último*; porque en este caso se podrá descomponer el peso total del cuerpo en un número de pares de pesos iguales, opuestos y equidistantes del centro de figura.

Luego 1.° *el centro de gravedad de una recta homojénea está en su punto medio*; 2.° *el del perímetro, ó área de un paralelogramo, está en la interseccion de sus diagonales*; 3.° *el de una circunferencia, ó de un círculo, está en su centro*; 4.° *el de la superficie ó volúmen de una esfera está en su centro &c.*

266 *El centro de gravedad de la superficie de un triángulo se halla en la interseccion de dos rectas, que partiendo de dos cualesquiera de sus ángulos,*

dividan en dos partes iguales sus lados opuestos.

En efecto, si en el triángulo ABC (fig. 60), se tiran las AL, CO á los puntos L, O, medios de los lados BC, AB, y le concebimos compuesto de elementos paralelos á la línea BC, el centro de gravedad de cada elemento se hallará (265) en su punto medio, esto es, se hallará en la línea AL; luego el centro de gravedad del sistema de dichos elementos estará tambien en la recta AL. Por una razon análoga este centro de gravedad se debe hallar en la recta CO; luego se hallará en el punto G, interseccion de estas dos rectas, que es L. Q. D. D.

Y como (I. 336) el punto G está situado de manera que $AG=\frac{2}{3}AL$, se deduce que sólo con tirar la AL y tomar desde el vértice sus dos terceras partes, quedará determinado el punto G.

267 *Para hallar el centro de gravedad de un polígono cualquiera, se descompondrá en triángulos; se buscarán sus centros particulares de gravedad; y considerando cada uno de ellos como punto de aplicacion de una fuerza paralela, igual en magnitud á la superficie del triángulo, se buscará* (253 esc.) *el punto de aplicacion de la resultante de todas ellas,* el cual será el centro de gravedad que se busca (265).

268 La base sobre que insiste un cuerpo cualquiera, se llama *base de sustentacion*; y se concibe fácilmente que un cuerpo estará tanto mas firme cuanto mayor sea su base de sustentacion; y que si esta es regular, el cuerpo estará en su *máximo* de estabilidad, cuando la vertical tirada por su centro de gravedad pase por el centro de la base. Así, la columna AB (fig. 61) cuyo centro de gravedad está en medio de su eje, está en su máximo de estabilidad; pero esta misma columna se mantendrá sin caer, aunque tenga una posicion oblicua A′B′, siempre que la vertical tirada por el centro de gravedad caiga dentro de la base. Estando en esta posicion se podrá aumentar la masa por el lado de A′B′ de tal modo que la vertical pase por el centro de la base, en cuyo

caso el conjunto de la columna y del peso añadido estaria en su mayor estabilidad.

Se cree que las *torres de Bolonia* y *Pisa*, que están inclinadas al horizonte, y parece que amenazan ruina, han sido construidas espresamente de esta manera; y que en cada una de ellas se combinó de tal modo la disposicion de las partes, que la vertical tirada por su centro de gravedad pasa por el centro de la base.

269 El centro de gravedad del cuerpo humano se halla hácia el medio de la parte inferior de la cavidad, que se llama la *gran pélvis*.

Para que *un hombre esté en equilibrio sobre sus pies*, es necesario que la direccion de su centro de gravedad pase por la base de sustentacion, que determina la posicion de sus pies. Un hombre que se tiene de pie verticalmente está en equilibrio; y está tanto mas firme, cuanto mayor latitud tiene la base de sustentacion.

Un hombre que tiene sus pies unidos por sus talones, estando estos en línea recta y las puntas muy abiertas, tiene muy poca estabilidad; porque al menor movimiento la vertical sale fuera de esta pequeña base; no puede inclinarse hácia adelante, á ménos que no lleve al mismo tiempo hácia atras la parte posterior de su cuerpo, para hacer que la vertical caiga dentro de su base. Un hombre que tiene sus pies uno delante de otro en una misma recta, está en el *mínimo* de estabilidad lateral; los volatineros adquieren sin embargo el hábito de mantenerse con seguridad en esta posicion.

Cuando un hombre está sentado, le es imposible levantarse, manteniendo su cuerpo verticalmente sobre su asiento; porque en este caso su centro de gravedad está sobre el asiento, y cae fuera de la base formada por sus pies; se ve, pues, obligado á inclinarse hácia delante, para hacer que su centro de gravedad pase por esta base.

Un hombre que lleva un fardo á las espaldas, se *ve precisado á inclinarse adelante*; porque el fardo y él, forman un sistema, cuyo centro de gravedad pasaria mas allá de su base, si se mantuviese verticalmente.

Un hombre que lleva un fardo en sus brazos, se *ve por la misma razon en la necesidad de inclinarse hácia atras.*

Los diversos movimientos que hacemos naturalmente con los brazos, para sostenernos cuando tropezamos, no tienen otro objeto que el procurar que la direccion del centro de gravedad pase por la base formada por los pies. Esta es la razon por que los volatineros emplean el *balancin* durante sus juegos, ó hacen movimientos con los brazos; y resulta que está mas diestro el que sin llevar balancin se mueve ménos, ó el que no hace ningun movimiento.

270 De lo dicho resulta que la posicion en que el soldado tendria mas estabilidad, seria aquella en que formase con sus pies un ángulo recto PAQ (fig. 62); porque entónces concibiendo unidos los estremos P y Q de los pies, su base de sustentacion estaria representada por el triángulo rectángulo isósceles PAQ, que segun hemos visto (171) es un máximo. Y el soldado estaria igualmente firme, formando con sus pies un ángulo obtuso RAQ, ó uno agudo SAQ de igual complemento; pues en ambos casos las bases de sustentacion serian dos triángulos equivalentes ARQ, ASQ; pero como el soldado es un hombre que viene del campo, y no está acostumbrado á estas posiciones, por esta razon previene muy acertadamente la táctica, que el ángulo que han de formar los pies del recluta sea un poquito ménos que el recto ó escuadra.

De las máquinas.

271 Se llaman *máquinas*, los medios que se emplean para hacer que las fuerzas obren sobre puntos que se hallan fuera de su direccion. La fuerza que se aplica á la máquina se llama *potencia*; y el cuerpo

que la potencia debe poner en equilibrio, es la *resistencia*. Las máquinas se dividen en *simples* y *compuestas*: las primeras son siete, á saber: *la cuerda ó máquina funicular*, *la palanca*, *la polea ó garrucha*, *el torno*, *el plano inclinado*, *la rosca* y *la cuña*. Las compuestas resultan de la combinacion de las simples, y pueden ser muy variadas.

Del equilibrio en la maroma.

272 Se llama *maroma ó máquina funicular*, á aquella en que sólo se emplean cuerdas para sostener pesos, ó para contrarestar muchas fuerzas.

En lo que vamos á decir supondrémos las cuerdas sin gravedad y reducidas á sus ejes, los que en este caso serán unas líneas perfectamente flexibles é inestensibles.

Sean AT, AF, AP (fig. 63), tres cuerdas unidas por medio de un nudo A; sea T un punto fijo donde está atada la AT, F una fuerza ó potencia aplicada á la AF, que ha de mantener en equilibrio el peso P, que está colgado de la AP, y propongámonos *hallar las condiciones del equilibrio.*

Para esto, descompondrémos la fuerza AF, que representarémos por AB, en otras dos, la una AL en la direccion del cordon AT, y la otra AM directamente opuesta al peso, lo que exije que las tres cuerdas estén en un mismo plano. Ahora, la fuerza AL quedará destruida por la resistencia del punto fijo, y representará la presion ejercida sobre dicho punto, ó lo que es lo mismo, esta será la tension T de la cuerda AT; y la fuerza AM será la que deberá ser igual al peso en el caso del equilibrio; luego se tendrá

$$F:P:T::\mathrm{AB}:\mathrm{AM}:\mathrm{AL};$$

pero (244) en este caso cada fuerza está espresada por el seno del ángulo que forman las direcciones de las otras dos; luego las condiciones del equilibrio vendrán espresadas por $F:P:T::\mathrm{sen.TAP}:\mathrm{sen.TAF}:\mathrm{sen.FAP}$.

273 Si la cuerda TAF (fig. 64) pasa por un ani-

llo ó sortija A, atada al estremo de la cuerda AP, para que haya equilibrio se necesitará ademas que *la direccion del peso* P *divida en dos partes iguales el ángulo TAF*; porque como en este caso la direccion del peso está igualmente inclinada respecto de las dos cuerdas AT, AF, no hay ninguna razon para que la sortija corra hácia ningun lado; de donde resulta que las dos cuerdas AT, AF, estarán igualmente tirantes y se tendrá $F:P::\text{sen.TAP}=\text{sen.}\frac{1}{2}\text{TAF}:\text{sen.TAF}::$ (I. § 460 cor.)

$\text{sen.}\frac{1}{2}\text{TAF}:2\text{sen.}\frac{1}{2}\text{TAF}\cos.\frac{1}{2}\text{TAF}::1:2\cos.\frac{1}{2}\text{TAF}.$

274 Ahora, si dados dos puntos fijos T, F (fig. 65), y la longitud de una cuerda TAF, atada á dichos dos puntos, se quisiera *determinar el punto A en que se detendria el peso* P, *colgado de una sortija que puede correr libremente por la cuerda*: por los puntos T, F, se tirarian las verticales TG, FH; y haciendo centro en los mismos puntos con un radio igual á la longitud de la cuerda, se determinarian en las verticales los puntos N, G; y el punto de interseccion A de las líneas TN, FG, seria el que se pedia.

Porque tirando las horizontales NM, GH, los triángulos rectángulos TMN, FGH, ademas de tener las hipotenusas iguales, por ser iguales á la cuerda, tienen iguales los catetos MN, GH; luego (I. 273 cor. 2.º) serán iguales, y nos darán el ángulo en T igual al en F; pero el ángulo en T=TNF, por alternos internos; luego el ángulo en F=TNF; por lo que el triángulo NAF es isósceles, y dará AN=AF; ahora, el ángulo TAQ=TNF por correspondientes; el QAF=GFN, por alternos internos; luego el ángulo TAQ=QAF; luego el punto A, determinado de este modo, es tal que la direccion del peso *P* divide en dos partes iguales el ángulo TAF; luego este será el punto donde se detendrá la sortija. L. Q. D. D.

275 Ahora observarémos que cuando el peso ó fuerza *P* mantiene en equilibrio á la sortija, podemos mirar el punto de la sortija que está en contacto con la cuerda, como si fuese un punto fijo al cual están aplicadas las dos potencias T, F, que se contrarestan;

de donde se deduce que cuando dos fuerzas tiran de los estremos de una cuerda, que está sujeta á un punto fijo, *la presion sobre este punto divide en dos partes iguales el ángulo formado por las dos partes de la cuerda*, las cuales están entónces igualmente tirantes.

276 Luego cuando dos fuerzas se equilibran, por medio de una cuerda que pasa por la convexidad de un polígono ó de una curva cualquiera, *la presion sobre el vértice de cada ángulo le divide en dos partes iguales; todas las partes de la cuerda se hallan igualmente tirantes, y las dos fuerzas son iguales.*

277 Supongamos ahora muchos nudos unidos entre sí por medio de las cuerdas AB, BC, &c (fig. 66), y tirados por las fuerzas P, Q, R, S, T; y supongamos que en el caso de equilibrio se quiera *averiguar la relacion entre dos fuerzas cualesquiera del sistema*, v. g. entre P y T.

Para esto, tendrémos que como el sistema se supone en equilibrio, y en cada nudo A, B, C, &c. sólo están reunidas tres cuerdas, señalando por t, t', las tensiones respectivas de las AB, BC, y los ángulos por las letras minúsculas que tienen en los arcos, tendrémos (273) estas tres proporciones

$P:t::\text{sen}.a:\text{sen}.b$, $t:t'::\text{sen}.c:\text{sen}.d$, $t':T::\text{sen}.e:\text{sen}.f$,

que multiplicadas ordenadamente (I. 191) dan

$$P:T::\text{sen}.a\text{sen}.c\text{sen}.e:\text{sen}.b\text{sen}.d\text{sen}.f,$$

que manifiesta la relacion pedida.

278 Si las fuerzas Q, R, S (fig. 67), fuesen unos pesos, el polígono PABCT y ellos estarian en un mismo plano vertical; porque el plano vertical PAQB y el ABRC, tienen comun la recta AB que no es vertical; por una razon semejante el plano ABRC y el BCST son uno mismo, y así sucesivamente si hubiese mas.

Ahora, los ángulos a, d, y los c, f, &c. tienen un mismo seno, por ser suplementos los unos de los otros; luego simplificando la proporcion anterior, se tendrá

$$P:T::\text{sen}.e:\text{sen}.b.$$

Pero si por el punto de concurso z de las dos fuerzas P, T, se tira la vertical zx, resultará el ángulo

$g=zCS$ por alternos internos, y por consiguiente

$$\text{sen}.g=\text{sen}.zCS=\text{sen}.SCT=\text{sen}.e,$$

y el ángulo $h=zAQ$ y $\text{sen}.h=\text{sen}.zAQ=\text{sen}.b$; y sustituyendo en vez de sen.e y sen.b sus iguales en la proporcion anterior, se tendrá $P:T::\text{sen}.g:\text{sen}.h$.

Y como las fuerzas P, T, están en la razon de los senos de los ángulos que forma la otra con una tercera xz, resulta (244) que *la vertical xz es la direccion de la resultante de las dos fuerzas* P, T; y por consiguiente tambien lo será de los pesos Q, R, S, &c. que cargan las cuerdas y contrarestan las fuerzas P, T.

279 Una cuerda pesada se puede considerar como un hilo cargado de una multitud de pequeños pesos distribuidos en todos sus puntos, y por consiguiente este hilo formará un polígono de tantos lados como pesos pequeños haya; y concibiendo que los pesos vayan disminuyendo, lo irán haciendo igualmente los lados del polígono; y en llegando á su límite, el polígono se convertirá en una curva que toda ella estará en el plano vertical, en que se hallen las dos potencias aplicadas á sus estremos en direcciones tangentes á esta curva: y si por el punto de concurso de estas dos tangentes se hace pasar una recta vertical, esta comprenderá el centro de gravedad de la cuerda, y será la direccion de la resultante de las dos fuerzas ó presiones que cargan sobre los dos puntos de apoyo; las cuales estarán en razon inversa de los senos de los ángulos que sus direcciones forman con la vertical.

Luego si una potencia obra sobre un cuerpo ó una máquina, por medio de una cuerda pesada, y en una direccion que no sea vertical, la cuerda no comunicará toda la accion de la potencia, sino en el caso de que la vertical tirada por el punto de concurso de las tangentes en los estremos de la curva descrita por la cuerda, divida en dos partes iguales el ángulo formado por dichas tangentes.

280 *Una cuerda pesada no puede jamas estar exactamente tirante, sino en una direccion vertical.*

Porque descomponiendo el peso de la cuerda en dos fuerzas, directamente opuestas á las dos potencias que la tienen tirante y la mantienen en equilibrio, dicho peso está representado (244) por el seno del ángulo que forman las dos potencias; y como el peso de la cuerda no puede jamas ser nulo, se sigue que el seno siempre tendrá algun valor, y por consiguiente nunca el ángulo podrá llegar á valer dos rectos.

De la palanca, balanza y romana.

281 La *palanca* es una vara ó barra inflexible, recta ó curva, cuyo movimiento ha de ser de rotacion al rededor de un punto fijo, que se llama *punto de apoyo*, *hipomoclio*, ó simplemente *apoyo*.

En la palanca (fig. 68) hay tres cosas que considerar, á saber: la potencia ó fuerza P, la resistencia ó peso R, y el apoyo C; cuando el apoyo está entre la fuerza y el peso, la palanca es de *primera especie*; cuando el apoyo está en el estremo C (fig. 69), y el peso R está entre el apoyo y la potencia, la palanca se llama de *segunda especie*; y cuando estando el apoyo en el estremo, la potencia se halla entre el peso y el apoyo, la palanca es de *tercera especie* (fig. 70).

282 Para hallar las condiciones del equilibrio en cada una de estas especies de palanca, supongamos que P (fig. 71) sea una potencia que sostiene el peso R por medio de la palanca AB, cuyo punto de apoyo está en C. Supongamos la potencia P aplicada en el punto K, donde su direccion encuentra á la vertical tirada por el centro de gravedad del peso R; tírese la recta KC al punto de apoyo; tómese la parte KH para representar la potencia P, y sobre ella como diagonal y las direcciones KD, KC, costrúyase el paralelogramo DHEK.

Ahora, en vez de la fuerza P se podrán sustituir (243 esc.) las dos KE, KD; y como la KE quedará destruida por la resistencia del apoyo, y la KD está directamente opuesta al peso R, deberá serle igual en el caso del equilibrio. Tómese ahora KG=KD, y tírese la GE; de donde resultará por ser KG igual y paralela á HE, que la figura KHEG será un paralelogramo; luego KE que es la carga del apoyo, es al mismo tiempo la resultante de las dos fuerzas P, R; y en virtud de lo espuesto (244) será

$$P:R::\text{sen.CKR}:\text{sen.CKP}.$$

Pero si desde el punto C tiramos las CL, CM, perpendiculares á las direcciones de las fuerzas R y P, resulta que estas espresarán los senos de los ángulos CKR, CKP, con relacion al mismo radio CK; luego se tendrá $P:R::\text{CL}:\text{CM}$;
lo que manifiesta que *la potencia y resistencia están en razon inversa de las distancias de sus direcciones al punto de apoyo.*

Como toda fuerza se puede considerar aplicada en cualquier punto de su direccion, podrémos suponer que P obra en M, y R en L, y en vez de la palanca recta ACB podrémos considerar la *palanca angular* LCM que produce el mismo efecto.

283 La proporcion $P:R::\text{CL}:\text{CM}$,
es lo mismo que $\text{KH}:\text{KG}=\text{HE}::\text{CL}:\text{CM}$,
y manifiesta que las dos líneas KH, HE, son proporcionales á las CL, CM. Ahora, como los ángulos M, L, del cuadrilátero CMKL son rectos, el ángulo K será suplemento del C; pero el ángulo K es tambien suplemento del ángulo KHE; luego el ángulo C=KHE; luego si se tira la ML, los triángulos CML, KHE, serán semejantes (I. 330), y darán HE:KE::CM:ML; y llamando C la carga del apoyo, se tendrá

$$R:C:\text{CM}::\text{ML}, \text{ ó } P:R:C::\text{CL}:\text{CM}:\text{ML};$$

lo que manifiesta que la potencia, el peso y carga del apoyo, se pueden espresar respectivamente por los lados CL, CM, ML, del triángulo CML.

284 Si la palanca es recta (fig. 68), y las direcciones PB, RA, de la potencia y peso son paralelas, entónces en vez de las perpendiculares Cr, Cp, se podrán sustituir las oblicuas ó *brazos de palanca* AC, CB, que les son proporcionales (I. 331); por lo que en este caso *la potencia y peso están en razon inversa*

de sus brazos de palanca. Así, para que la potencia esté favorecida, se deberá procurar que su brazo de palanca BC sea mayor que el brazo CA; si los brazos son iguales, la potencia y peso deberán ser iguales; y si el brazo de palanca de la potencia fuese menor que el del peso, se necesitaria siempre una potencia mayor que el peso que se queria equilibrar.

285 *En la palanca de segunda especie* (fig. 69), *siempre está favorecida la potencia*; porque el brazo de palanca CD á que se aplica la potencia, siempre será mayor que el CB á que se aplica la resistencia; y si la distancia de esta al punto de apoyo fuese nula, tambien lo deberia ser la fuerza, como en efecto debe verificarse; porque entónces el peso está sostenido por el apoyo y no por la potencia.

276 Por estas mismas razones, *en la palanca de tercera especie* (fig. 70), *siempre está perjudicada la potencia.* Por lo cual sólo se aplica con ventaja en los telares, donde las resistencias son pequeñas, y con facilidad las puede poner en movimiento el tejedor con sus pies.

287 En la palanca hemos prescindido de su peso; si se quiere atender á él, se le deberá considerar como una fuerza aplicada verticalmente á su centro de gravedad, y considerar su momento como si fuera una verdadera fuerza.

288 Se llama *balanza ó peso de cruz*, á una palanca de primera especie de brazos iguales, que sirve para pesar las mercancías; la palanca AB (fig. 72), se llama la *cruz*; en su punto medio E está atravesada por un eje perpendicular que se llama *fiel*, y entra en los ojos de las armas EM, que se llama la *alcoba*, y es la que sostiene la máquina; el fiel termina por la parte inferior en un corte mas ó ménos agudo, segun se destine la balanza para pesar en pequeño ó en grande; por entre las armas pasa una *lengüeta* xz perpendicular á la palanca, la cual cuando queda dentro de la alcoba manifiesta que la palanca está horizontal; de los estremos A, B, de la palanca

cuelgan por medio de tres cordones dos platillos C, D; en el uno v. g. en C, se colocan las pesas conocidas de á *libra*, *dos libras*, *media libra &c.*, y en el otro se va echando el género ó mercancía hasta que se equilibra con la pesa; y la lengüeta con su desvío hácia la derecha ó hácia la izquierda, ó quedando en la alcoba, manifiesta que falta género, que *está corrido*, como se dice vulgarmente, ó que está en caja ó en fiel.

289 La *romana* (fig. 73) tambien es una palanca AB de primera especie, y sólo se diferencia de la balanza en que el fiel E está inmediato á uno de sus estremos; en el estremo A hay un garfio C donde se cuelga el peso *R*, y á lo largo del brazo mayor, que está con las divisiones de *arrobas*, *libras &c.* segun la magnitud de la romana, corre por medio de una argolla un peso constante *P*, que se llama *pilon*; y la division en que se pone el pilon para que la romana quede en caja, ó un poco corrida (que es como se acostumbra) señala el número de arrobas, libras &c. que pesa el género *R*.

Comunmente tienen dos divisiones las romanas: la una correspondiente á la posicion que tiene ahora, que se llama *por lo mayor*; y la otra cuando se cuelga la romana del garfio *k*, que se llama *por lo menor.*

De la polea ó garrucha, y de las tróculas y polipastros.

290 Se llama *polea ó garrucha*, á un cilindro poco grueso, en cuya superficie esterior hay una especie de *garganta* ó *carril* que se llama *cajera*, por donde pasa una cuerda, á cuyos estremos se aplican la potencia y la resistencia.

El eje de la polea sale un poco por ambos lados de la superficie de las dos caras, y se apoya en un armazon CO (fig. 74), de modo que pueda jirar con toda libertad.

Se puede hacer uso de la polea de dos distintos modos: ó estando fijo el centro, como se ve (fig. 74), en cuyo caso la polea es *fija ó inmóvil*, y la potencia y resistencia obran en direcciones tangentes á la polea; ó se aplica la resistencia al centro de la polea, y la potencia á un estremo de la cuerda cuyo otro estremo está fijo, y se llama *polea móvil*, que está representada por la (fig. 75).

291 Para averiguar las condiciones de equilibrio en la polea fija, tirarémos los radios Cp, Cr (fig. 74); y como podemos suponer (240) que P obra en p y R en r, la palanca angular pCr, dará (§ 282) $P:R::\mathrm{C}r:\mathrm{C}p$; y como $\mathrm{C}r=\mathrm{C}p$, por radios, se tendrá $P=R$; luego *en la polea fija, para que haya equilibrio, es necesario que la potencia sea igual á la resistencia*; más á pesar de esto nos proporciona la ventaja de poder variar la direccion de la fuerza que se ha de emplear.

292 Para averiguar la carga que sufre el centro C, observarémos que debe ser la resultante de las dos fuerzas P y R; y como estas son iguales, la direccion de su resultante, que debe pasar por el punto de concurso O de las RrO, PpO y por el punto fijo C, para que pueda ser destruida por él, dividirá (273) en dos partes iguales al ángulo POR; luego si espresamos dicha resultante por R', tendrémos (§ 244)

$$P:R'::\mathrm{sen.COR}:\mathrm{sen.POR};$$

pero si se tira la cuerda pr, será el ángulo $\mathrm{COR}=\mathrm{C}rp$, por ser ambos complementos del rCO; y como por ser rectos los ángulos CpO, CrO, el ángulo pOr es (I.310) suplemento del pCr, resultará (I. § 459 cor.)

$$\mathrm{sen.}p\mathrm{O}r=\mathrm{sen.}p\mathrm{C}r;$$

luego $P:R'::\mathrm{sen.C}rp:\mathrm{sen.}p\mathrm{C}r::\mathrm{C}p:pr$;
esto es, *la potencia es á la presion que sufre el centro fijo, como el radio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el cordon.*

293 Para determinar las condiciones de equilibrio en la polea móvil (fig. 75), observarémos que siendo P la potencia y R el peso, tenemos que en el caso de equilibrio representa aquí R lo que en la polea fija espresaba la carga ó presion que sufria el centro de

la polea; por lo que la condicion de equilibrio será

$$P:R::CS:SO;$$

esto es, que *en la polea móvil la potencia es á la resistencia, como el radio de la polea es á la cuerda del arco que abraza el cordon.*

294 Si los cordones (fig. 76) son paralelos, la cuerda SO será el diámetro, y la proporcion anterior dará $R=2P$; de modo que *una fuerza dada* P *se equilibra con una doble* R.

Si el arco SDO (fig. 75) fuese la sesta parte de la circunferencia, la cuerda SO seria igual al radio CS, y la potencia resultaria igual con la resistencia; si este arco disminuyese, la fuerza P seria mayor que la resistencia R, de manera que la máquina perjudicaria á la potencia.

295 Conociendo la relacion de la potencia á la resistencia en la polea móvil, es fácil hallar esta relacion en una combinacion cualquiera de estos dos géneros de poleas. Y cuando tienen la disposicion que manifiesta la (fig. 77) se deduce que la potencia P es á la resistencia R, como el producto de los radios AB, A′B′, A″B″, de las poleas, es al producto de las cuerdas de los arcos BC, B′C′, B″C″,

ó $P:R::AB\times A'B'\times A''B'':BC\times B'C'\times B''C''$.

296 Una reunion cualquiera de poleas fijas ó móviles, forman lo que se llama *tróculas*, *polipastros* ó *aparejos*. La que está representada en la (fig. 78) es la mas ventajosa para la potencia.

La trócula (fig. 79) está formada de tres poleas fijas á unas mismas armas OV, y de otras armas móviles AK que tienen fijas á ellas otras tantas poleas. Una misma cuerda las abraza á todas pasando alternativamente de una polea de las armas fijas á una de las armas móviles; esta cuerda está unida por su estremo á las armas fijas; la potencia P se aplica al otro estremo; la resistencia ó peso R está fijo á las armas móviles; y en este peso R se debe comprender el peso de estas mismas armas y el de las cuerdas que las unen á las poleas fijas.

Para determinar la relacion entre P y R en el caso de equilibrio, observarémos que pues los cordones EB, F′C, &c. forman parte de una misma cuerda, deben sufrir todos la misma tension en el sentido de su longitud; porque es imposible que una cuerda esté desigualmente estendida en sus diferentes partes si ha de estar en equilibrio. Luego si se descompone la fuerza R en otras tantas fuerzas paralelas é iguales como cordones hay empleados en sostener este peso, es decir, en seis fuerzas dirijidas segun los cordones EB, F′C, E′B′, F″C′, &c. estas componentes iguales espresarán las tensiones de estos cordones.

Así, cada uno de estos seis cordones es tirado en el sentido de la pesantez por una fuerza igual $\frac{1}{6}R$, de modo que el cordon EB está en el mismo caso que si se suspendiese en su estremo inferior un peso igual á $\frac{1}{6}R$; pero el mismo cordon está tirado en sentido contrario por la fuerza P; luego se tiene para el equilibrio $P=\frac{1}{6}R$, ó $R=6P$.

Por consiguiente la potencia P se equilibra con una resistencia igual á $6P$. Ahora, en cualquier otra trócula dispuesta de la misma manera, y que no se diferencie de esta sino por el número de las poleas, deducirémos por un procedimiento semejante, que *la potencia es á la resistencia en el caso de equilibrio, como la unidad es al número de cordones que terminan en las poleas de las armas móviles, y que se pueden considerar como empleados en sostener la resistencia.*

Del torno, de las ruedas dentadas, del cric ó gato, y de la cábria.

297 Se llama *torno* en general á una rueda atravesada perpendicularmente por un cilindro, cuyos estremos descansan sobre dos apoyos C y G (fig. 80); en esta máquina una potencia P aplicada en una direccion tangente á la circunferencia de la rueda, se lleva tras sí á dicha circunferencia y al cilindro que está sólidamente unido á ella; y obligándoles á dar

vueltas al rededor del eje del cilindro, es causa de que se vayan arrollando sucesivamente al rededor del cilindro las diferentes partes de la maroma DQ, á la cual está atado el peso que se quiere elevar ó acercar al cilindro.

En algunas ocasiones no se hace uso de rueda para hacer que dé vueltas el cilindro, sino que se colocan perpendicularmente á su eje unas palancas E á que se aplica la potencia, y produce el mismo efecto que la rueda, siendo mas fácil su trasporte. En otras lleva el cilindro en sus dos estremos unas cigüeñas P', á las cuales se aplica para el mismo fin la potencia ó fuerza motriz; y en otras se ponen unos dientes a, a para mover la rueda.

298 En cualquiera de estas disposiciones se puede colocar, combinando su accion con una ó muchas poleas móviles, para levantar pesos, como se ve en la (fig. 81), suponiendo que la polea L represente la seccion de un torno.

Cuando el eje del cilindro está en situacion vertical, recibe el nombre de *argüe ó cabrestante*, como el de la (fig. 82).

299 En esta máquina (figs. 80 y 82) se verifica para el equilibrio, que *la potencia es á la resistencia, como el radio del cilindro es al de la rueda.*

Porque si concebimos la potencia P aplicada en K, y el peso R en D, como el eje del cilindro es fijo, podemos considerar la seccion perpendicular al eje que pasa por D trasladada al punto G; y en este caso tendrémos en G una palanca en la que la potencia está aplicada á una distancia del punto de apoyo, que es un punto del eje, igual con el radio de la rueda que espresarémos por R', y la resistencia obrará á una distancia del punto de apoyo igual al radio del cilindro que espresarémos por r; luego (282) se tendrá

$P:R::r:R'$, que es L. Q. D. D.

300 Cuando se combina el torno con un aparejo, trócula ó polipastro, resulta la máquina (fig. 83), que se llama *cábria*, la cual se emplea para levantar ma-

sas considerables, como cañones, &c. cuyas condiciones de equilibrio son: que *la potencia sea á la resistencia, como el radio del eje del torno es á tantas veces el radio de la rueda, como cordones terminan en las poleas móviles.*

Luego aumentando el número de cordones ó el radio de la rueda, ó disminuyendo el del cilindro, se puede aumentar todo lo que se quiera la ventaja de la potencia.

301 En un sistema de tornos colocados como representa la (fig. 84), la potencia *P* aplicada á la rueda AD, hace mover al cilindro BC que comunica el movimiento á una rueda A′D′, por una cuerda BA′. Esta rueda A′D′ hace mover al cilindro C′B′, al cual está unida una cuerda B′A″, y así sucesivamente hasta el último cilindro, que está cargado con la resistencia *R*. Las condiciones del equilibrio son

$$P:R::OB\times O'B'\times O''B'':OA\times O'A'\times O''A''.$$

Esto es, *la potencia es á la resistencia, como el producto de los radios de los cilindros es al producto de los radios de las ruedas.*

302 Se llama *rueda dentada* á un cilindro móvil al rededor de un eje, y en cuya superficie tiene unos *filetes ó dientes*; estos engranan ó engargantan en los que se forman del mismo modo sobre otra rueda dentada &c. Sobre el eje de cada rueda dentada se adapta ordinariamente otra, que forma cuerpo con ella y cuyo diámetro es menor; esta rueda menor se llama *piñon*, y á sus dientes *alas*. De donde se deduce que un sistema de ruedas dentadas (fig. 85), no viene á ser otra cosa que un conjunto de tornos como el anterior; y los piñones representan los cilindros de la combinacion precedente. Por lo que se deduce, que *en las ruedas dentadas la potencia es á la resistencia, como el producto de los radios de los piñones es al de los radios de las ruedas.*

303 El *cric ó gato* es una máquina que se refiere al torno, y que no se diferencia esencialmente de él. Consiste en una barra AB (fig.86), guarnecida de

dientes en una de sus caras, y móvil en el sentido de su longitud; los dientes de esta barra engranan con los de un piñon E, que se hace jirar sobre un eje por medio de un manubrio CM; los dientes del piñon llevan consígo á los de la barra, y hacen subir al peso que se coloca sobre la cabeza A de esta barra, ó se suspende en su estremo inferior B; este peso es la resistencia; la potencia está aplicada al estremo M de la *cigüeña ó manubrio*; y suponiendo su direccion MC tangente á la circunferencia que describe este estremo, es necesario para el equilibrio que *la potencia sea á la resistencia, como el radio del piñon es al radio de la cigüeña.*

Del plano inclinado.

304 El *plano inclinado* se llama así porque forma un ángulo con el horizonte; sirve para sostener un cuerpo poniéndole en equilibrio con otras fuerzas.

Para manifestar su uso, supongamos que se tenga un cuerpo M (fig. 87), cuyo peso R le considerarémos reunido en su centro de gravedad G. Para que este cuerpo pueda estar en equilibrio por una fuerza P, sobre un plano inclinado, es necesario que las fuerzas R y P tengan una resultante que se destruya por el plano inclinado, lo que en primer lugar exije que dichas fuerzas se hallen en un mismo plano (278); y siendo R una vertical que pasa por el centro de gravedad, el plano RMP será tambien vertical, y contendrá el centro de gravedad G. Por lo que la primera condicion de equilibrio es que la direccion GP de la fuerza P debe estar en un plano vertical, que pase por el centro de gravedad del cuerpo.

La segunda condicion es que la resultante GN de las fuerzas R y P sea destruida por la resistencia del plano inclinado; luego para que esto se verifique deberá dicha recta ser perpendicular al plano inclinado, y encontrarle en uno de sus puntos.

305 Quedando satisfechas estas dos condiciones,

supongamos que sea M un cuerpo que se equilibre con una fuerza *P* sobre un plano inclinado. Concibamos espresado su peso por la GR, y descompongamos esta fuerza en otras dos, la una GN perpendicular al plano inclinado, y la otra GL que obre en la direccion de la potencia *P*, y (244 cor.) tendrémos

$P:R::\text{sen.RGN}:\text{sen.NGL}.$

Aquí observarémos que siendo el ángulo RGN constante, pues las direcciones GN y GR son dadas, la potencia quedará mas favorecida cuando el ángulo NGL tenga el mayor seno, que será cuando sea recto, en cuyo caso la direccion GP de la potencia será paralela al plano inclinado; y como entónces el triángulo LGR será semejante al ABC, por ser ambos rectángulos, el uno en L y el otro en B, y tener el ángulo RGL igual (I. 288) con el ACB, será

$P:R::GL:GR::BC:AC;$

que quiere decir, que cuando la potencia es paralela á la longitud del plano, se verifica que *la potencia es á la resistencia, como la altura del plano es á su longitud.*

En el mismo caso tendrémos $GN:GR::AB:AC$, que quiere decir, que *la presion que sufre el plano inclinado es á la resistencia ó peso del cuerpo, como la base del plano es á su longitud.*

Esc. Si llamamos α al ángulo $BAC=LRG$, el triángulo rectángulo GLR nos dará (I. 464 esc.) $GL=RG\times\text{sen.}LRG=R\text{sen.}\alpha$, y $LR=GN=R\cos.\alpha$.

306 Si la direccion de la potencia fuese paralela (fig. 88) á la base del plano, se tendria

$P:R::GL:GR::BC:AB,$

que quiere decir, que *la potencia es á la resistencia, como la altura del plano inclinado es á su base.*

De la rosca.

307 Se llama *rosca* á un cilindro recto, rodeado de un prisma triangular ó paralelográmico, que por una de sus caras está unido al cilindro, y es tal que

en cualquier punto forma un mismo ángulo con la generatriz del cilindro.

Se llama *paso de la rosca* (fig. 89) el intervalo ó distancia AB entre dos filetes consecutivos, medido paralelamente al eje de la rosca.

Si sobre AB se costruye un triángulo ABM, rectángulo en B, cuyo lado BM sea igual á la circunferencia del cilindro, y suponemos que este triángulo se arrolle al cilindro, el punto M vendrá á parar al punto B, la hipotenusa AM despues de arrollada se convertirá en AEB, y conservará constantemente la misma inclinacion sobre AB y sus paralelas, y será la posicion del filete sobre la superficie del cilindro; el filete siguiente tendrá la misma inclinacion, con tal que sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo exactamente igual con el anterior, y así sucesivamente.

308 Luego 1.° *todos los pasos de una rosca bien construida son iguales.*

2.° *Un punto pesado en equilibrio sobre el filete de la rosca, se puede considerar como sostenido sobre un plano inclinado, cuya altura sea el paso de la rosca, y la base la circunferencia del cilindro.*

3.° Cuando una línea curva tiene la forma de la AEB, se llama *espiral*; y como el filete de la rosca es un sólido que tiene esta figura, se sigue que *dicho filete se puede considerar como compuesto de tantas espirales paralelas entre sí como puntos tiene la seccion del filete*: suponiendo que cada espiral rodea á un cilindro cuyo radio es la distancia de dicha espiral al eje de la rosca.

La rosca entra en un sólido *t* llamado *tuerca*, que en su interior tiene unas concavidades iguales y dispuestas del mismo modo que el filete de la rosca; de manera que se puede considerar la tuerca como el *molde* ó *matriz* del filete de la rosca. La potencia se aplica á una palanca que atraviesa el cilindro de la rosca ó el sólido de la tuerca.

309 Para el equilibrio *la potencia es al peso con que está cargada la tuerca, como el paso de la rosca*

es á la circunferencia que describe la potencia.

Porque estando la rosca fija y vertical, la tuerca abandonada á su gravedad y prescindiendo del rozamiento, descenderia recorriendo todos los filetes inferiores de la rosca, y una potencia horizontal P aplicada á la tuerca podria muy bien oponerse ó contrarestar este movimiento. Suponiendo ahora el peso R (fig. 90) con que está cargada la tuerca, descompuesto en tantos pequeños pesos r como puntos de la tuerca apoyan sobre el filete de la rosca: concibamos la fuerza P descompuesta en otras tantas horizontales como pesos pequeños hay; y sea p la fuerza elemental que se debe equilibrar con el peso r colocado en A; tírese por el eje una horizontal LAD, que pase por el punto A, y supongamos que la fuerza P obre perpendicularmente á LD; imaginemos ademas que el peso r esté sostenido al principio por una fuerza s paralela á p; llamemos A la altura ó paso de la tuerca, y r', R', las distancias LA, LD. Ahora, puesto que la fuerza horizontal s sostiene el peso r, por medio de un plano inclinado cuya altura es A y la base es la circunferencia que tiene r' por radio, se tiene (§ 305)

$$s:r::A:2\pi r'.$$

Pero considerando LAD como una palanca cuyo apoyo está en L, y observando que la fuerza p, obrando en D debe producir el mismo efecto que la s que obra en A, se tiene $p:s::r':R'$.

Multiplicando estas dos proporciones, se tendrá

$$p:r::A:2\pi R';$$

y multiplicando los dos términos de la primera razon por el número de los pesos, se convertirán respectivamente en P, R, y la proporcion será $P:R::A:2\pi R'$, que es L. Q. D. D.

310 Si la rueda de un torno es dentada (fig. 91), y sus dientes engranan en los filetes de una rosca, á la que una potencia P procura poner en movimiento por medio de una cigüeña, se tendrá la máquina que se llama *tornillo sin fin*; y para determinar la relacion de la potencia al peso se observará lo siguiente.

1º. *La potencia es á la resistencia que un diente de la rueda opone al filete de la rosca, como el paso de esta es á la circunferencia que describe la potencia.*

2.º *La resistencia del diente de la rueda es al peso* R *que se ha de levantar ó sostener, como el radio del cilindro es al radio de la rueda*; y multiplicando estas proporciones se deduce que *la potencia es al peso, como el producto del paso de la rosca por el radio del cilindro es al producto de la circunferencia de la cigüeña por el radio de la rueda.*

De la cuña.

311 La *cuña* (fig. 92) es un prisma, cuyas bases son triángulos que por lo regular son isósceles; la cara correspondiente al lado desigual del triángulo, que generalmente es menor que los otros, se llama *cabeza de la cuña*; la arista opuesta á la cabeza se llama *corte*, por el cual se introduce en el cuerpo que se quiere dividir.

Sea ABC el perfil de la cuña, ó una seccion causada por un plano perpendicular á sus aristas, y que pase por la direccion de la potencia P (que comunmente obra por medio de un mazo), aplicada perpendicularmente á AB. Descomponiendo la fuerza en otras dos X, Z, respectivamente perpendiculares á los lados AC, BC, se tendrá (244 cor.)

$$P:X:Z::\text{sen.XO}Z:\text{sen.PO}Z:\text{sen.POX};$$

pero (I. 459 cor.) en vez de estos senos se pueden sustituir los de los ángulos C, B, A, que son sus suplementos, ó (I. 468) los lados opuestos á estos en el triángulo ABC; luego la serie de razones iguales anterior se convertirá en $P:X:Z::\text{AB}:\text{AC}:\text{BC}$.

312 Descomponiendo la fuerza Z en otras dos, la una perpendicular y la otra L paralela á la cabeza de la cuña, se tendrá (§ 244 cor.)

$$Z:L::\text{sen.MOL}=1:\text{sen.MO}Z=\text{sen.PO}Z::1:\text{sen.B};$$

y como tirando la CK perpendicular á la cabeza de la cuña, se tiene $1:\text{sen.B}::\text{CB}:\text{CK}$,

será $Z:L::\text{CB}:\text{CK}$.

Pero ántes teníamos $P:Z::AB:BC$,
luego multiplicando estas dos proporciones y simplificando, será $P:L::AB:CK$.

Igualmente, por ser $AC=AB$, respecto de L' se encontraria $P:L'::AB:CK$;
luego tendrémos $P:L:L'::AB:CK:CK$,
que da $P:L+L'::AB:2CK$;
lo que manifiesta que *la fuerza es al efecto que produce en el cuerpo que se ha de bajar, como la base del triángulo isósceles es al duplo de su altura.*

Del rozamiento.

313 Se llama *rozamiento* la resistencia que se esperimenta al querer hacer resbalar un cuerpo sobre otro. Esta resistencia proviene de la naturaleza de los cuerpos, que por ser *porosos* tienen sus superficies sembradas de hoyos y eminencias; y cuando un cuerpo descansa sobre otro, se introducen las partes salientes del uno en las entrantes del otro; por consiguiente para que un cuerpo resbale sobre otro, será necesario desprender estas desigualdades, doblarlas ó romperlas; y la fuerza que se debe emplear para este efecto se llama *rozamiento.*

Como el rozamiento depende de la naturaleza de las superficies en contacto, y las cuerdas necesitan de una cierta fuerza para doblarse, á la cual se da el nombre de *rijidez*, y por otra parte nunca se hallan las máquinas construidas con la perfeccion que se necesita, resulta que no se puede determinar exactamente por reglas generales. Así es, que en este punto nos debemos atener á la esperiencia, la cual enseña que el *rozamiento disminuye, pulimentando bien las superficies y cerrando los poros con materias grasas*; que *el rozamiento de dos cuerpos de una misma materia es mas considerable que cuando son de materias heterojéneas*; lo cual proviene, sin duda, de que en los cuerpos homojéneos deben encontrar mas facilidad las partes salientes en introducirse en las entrantes; que *el rozamiento es el mismo, cualquiera que sea la superficie de contacto* (con tal de que no se aproxime demasiado á ser una arista ó esquina); y últimamente que *el rozamiento es proporcional á la presion hasta cierto punto.*

DINÁMICA.

Del movimiento uniforme.

314 En general se llama *movimiento* (intr.) la traslacion de un cuerpo de un lugar del espacio á otro; si el movimiento se refiere á puntos fijos del espacio, se llama *absolùto*; y si se refiere á puntos que no están fijos, se llama *relativo*. Este puede ser tal que el cuerpo que le tenga, con relacion á otro, puede estar inmóvil en el espacio; por ejemplo, un hombre que en un navío anduviese de proa á popa lo mismo que el navío andaba de popa á proa, estaria en reposo en el espacio, al paso que estaba en movimiento respecto del navío y de la gente que estuviese dentro.

Cuando el movimiento de un cuerpo es tal que en tiempos iguales anda espacios iguales, se llama *uniforme*; cuando no, se llama en general *variado*. Se llama *velocidad* de un cuerpo el espacio que corre en una unidad de tiempo, v. g. en un segundo, en un minuto, en una hora &c.

315 *Cuando un cuerpo está en reposo, debe perseverar en este estado á ménos que una causa estraña no le saque de él.* Porque en sí no tiene nada que le induzca á tomar un estado con preferencia á otro.

Recíprocamente, *un cuerpo en movimiento y abandonado á sí mismo, debe conservar constantemente la misma velocidad.* Porque en sí no tiene ninguna cosa que le pueda detener; ademas *debe moverse en línea recta*, porque él de suyo ni apetece el movimiento ni el reposo, y por consiguiente tampoco hay ninguna razon para que él por sí mismo se separe de la recta que une el punto que él ocupa en un instante con el que ocupa en el instante siguiente.

316 El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es el hacerle correr un cierto espacio durante un tiempo cualquiera. En este efecto se han de considerar dos cosas, á saber: la masa del cuerpo y la velocidad con que se quiera que vaya; y como del mismo modo que crezca ó mengüe cualquiera de ellas, será tanto mayor ó menor el efecto, y por consiguiente la fuerza que se debe emplear, resulta que *dicho efecto se podrá medir por la masa del cuerpo multiplicada por la velocidad*, cuyo producto se llama *cantidad de movimiento.*

Como la velocidad es proporcional á la fuerza, resulta que la composicion de las velocidades comunicadas á un cuerpo, se debe hacer del mismo modo que la de las fuerzas aplicadas á dicho cuerpo.

317 *El espacio corrido por un cuerpo con movimiento uniforme, es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo.*

Porque si se repite el espacio corrido en la unidad de tiempo, ó lo que es lo mismo la velocidad, tantas veces como unidades de tiempo hay en la duracion del movimiento, resultará el espacio total corrido.

Luego llamando E el espacio corrido, V la velocidad, y T el tiempo, se tendrá $E=VT$ (22).

Llamando e el espacio corrido por otro cuerpo, v su velocidad, y t el tiempo, se tendrá $e=vt$.

Con estas dos ecuaciones se pueden formar, y se deben formar, todas las proporciones análogas á las espuestas (263), para deducir de la traduccion de cada una la razon de los espacios, tiempos y velocidades, en los diferentes casos en que puedan hallarse las cantidades que entran en ellas.

Del movimiento uniformemente acelerado y retardado.

318 Para que el movimiento sea variado es indispensable que una fuerza cualquiera obre conti-

nuamente en el cuerpo; esta fuerza se llama *aceleratriz*, si su efecto es aumentar el movimiento; y *retardatriz*, cuando le disminuye. Si la fuerza aceleratriz ó retardatriz es constante, es decir, que en tiempos iguales le haga adquirir ó perder cantidades de movimiento iguales, el movimiento se llama *uniformemente acelerado ó uniformemente retardado*.

319 Sea g la fuerza aceleratriz, ó el grado de velocidad que ella comunica al móvil en cada instante, ó lo que es lo mismo, el espacio que el móvil anda en cada instante; k el tiempo que obra la fuerza aceleratriz, valuado en instantes bastante pequeños, para que en su duracion se pueda considerar el movimiento como uniforme; t el mismo tiempo valuado en segundos; y n el número de instantes contenidos en un segundo; por manera que se tenga

$$\frac{k}{n} \text{ instantes} = t \text{ segundos, ó } k \text{ instantes} = nt \text{ instantes.}$$

Esto supuesto, la velocidad adquirida por el móvil al fin del primer instante será g; al cabo del segundo instante será $2g$, esto es, la que tenia ya del primero, y la que adquirió en el segundo; al fin del tercero será $3g$;.... y al cabo del instante k será kg; ó dividiendo por n para reducir el tiempo á segundos, poniendo t para espresarlos, y llamando v esta velocidad adquirida, que se llama *velocidad final*, se tendrá $v = \frac{k}{n} g = tg$ (23);

es decir, que si al cabo del tiempo t dejase de obrar la fuerza aceleratriz, *el móvil caminaria con una velocidad igual á la misma fuerza aceleratriz multiplicada por el tiempo que obra.*

De donde podríamos deducir, espresando por v', g', t', las cantidades correspondientes á otro movimiento, que *en los movimientos acelerados las velocidades son como las fuerzas aceleratrices multiplicadas por los tiempos.*

320 Ahora, el espacio total corrido por el cuerpo con este movimiento, será igual á la suma de todos los espacios parciales corridos en cada instante, ó lo que es lo mismo, será la suma de esta progresion aritmética $\div g.2g.3g.4g.5g......kg$, cuyo número de términos es k; luego su suma (I. 200) será $(g+kg)\times\frac{1}{2}k$.

Más para que el movimiento se pueda mirar como uniforme en cada instante, es necesario que la velocidad g sea muy pequeña, y que k sea muy grande; luego suponiendo que ambas lleguen á sus límites respectivos, el primer término g del paréntesis desaparecerá, y el segundo kg será una cantidad finita (I. 235) y determinada; por consiguiente la espresion anterior del espacio, llamándole e, se convertirá en $e=\frac{1}{2}gk^2$;
ó poniendo en vez de k^2 su igual t^2 valuado en segundos, será $e=\frac{1}{2}gt^2$ (24);
que quiere decir, que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, es igual á la mitad de la fuerza aceleratriz multiplicada por el cuadrado del tiempo que dura el movimiento.*

321 Por la (ec. 23) se tiene $v=gt$;
y poniendo este valor en la (ec. 24) será $e=\frac{1}{2}vt$(25);
es decir, que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, tambien es igual á la mitad de la velocidad final multiplicada por el tiempo.*

Llamando e' otro espacio, v' la velocidad, y t' el tiempo, se tendrá $e'=\frac{1}{2}v't'$;
y formando proporcion, será $e:e'::\frac{1}{2}vt:\frac{1}{2}v't'::vt:v't'$;
que manifiesta que *los espacios están en razon compuesta de las velocidades y tiempos.*

Si $e=e'$, será $vt=v't'$, que da $v:v'::t':t$;
que nos dice, que *á igualdad de espacios las velocidades están en razon inversa de los tiempos.*

Pero si el móvil hubiera principiado á caminar con movimiento uniforme, con la velocidad v y durante el mismo tiempo t, hubiera andado (317) un espacio e espresado por vt, que es duplo de $\frac{1}{2}vt$;

luego de estas dos ecuaciones resulta que *el espacio corrido con movimiento uniformemente acelerado, es la mitad del que correria el móvil en el mismo tiempo, con movimiento uniforme y con la velocidad final adquirida en el movimiento acelerado.*

322 Despejando la t (ec. 23) y sustituyendo en la (ec. 25), se tendrá el espacio espresado en valores de la velocidad, el cual será $e=\frac{v^2}{2g}$ (26), que da $v=\sqrt{2eg}$ (26*).

Si ántes de principiar á obrar la fuerza aceleratriz, tuviese el móvil una velocidad cualquiera v', las (ecs. 23 y 24) se convertirian en $\begin{cases} v=v'+gt, \\ e=v't+\frac{1}{2}gt^2; \end{cases}$ despejando t en la primera y sustituyendo su valor en la segunda, se tendrá $e=\frac{v^2-v'^2}{2g}$ (27).

323 Estas ecuaciones se han deducido en el supuesto de que la velocidad v' se haya comunicado en el mismo sentido de la aceleracion; pero si la fuerza aceleratriz obra en sentido contrario, entónces el movimiento será uniformemente retardado, y sus condiciones vendrán espresadas por estas ecuaciones:

$v=v'-gt$ (28), $e=v't-\frac{1}{2}gt^2$ (29), $e=\frac{v'^2-v^2}{2g}$ (30).

Llamando b el valor de e (ec. 24) correspondiente á $t=1$, y despejando g, se tendrá $g=2b$; es decir, que *la fuerza aceleratriz tiene por medida el duplo del espacio corrido en el primer segundo.*

324 Las (ecs. 23, 24 y 26) manifiestan: la primera, que *la velocidad de un móvil, sometido á la accion de una fuerza aceleratriz constante, es proporcional al tiempo*; y las otras dos, que *el espacio corrido por dicho móvil, está en razon duplicada del tiempo ó de la velocidad adquirida.*

325 *Los espacios corridos en los segundos suce-*

sivos de la duracion del movimiento uniformemente acelerado, son entre sí como los números impares.

En efecto, el espacio corrido en t segundos es igual (ec. 24) á $\frac{1}{2}gt^2$;
el corrido en $(t-1)$ segundos será $\frac{1}{2}g(t-1)^2$;
restando este valor del anterior, y llamando E la resta, se tendrá $E=\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{2}g(t-1)^2=\frac{1}{2}g(2t-1)$;
que es la espresion del espacio corrido en un solo segundo. Haciendo sucesivamente $t=1$, $t=2$, &c.
y llamando E', E'', E''', E^{IV}, &c. los valores que va tomando E en estos supuestos, se tendrá
$E'=\frac{1}{2}g\times 1$, $E''=\frac{1}{2}g\times 3$, $E'''=\frac{1}{2}g\times 5$, $E^{IV}=\frac{1}{2}g\times 7$, &c.
que formando una serie de razones iguales y simplificando por $\frac{1}{2}g$, se tendrá
$E':E'':E''':E^{IV}$:&c.::1:3:5:7:&c. que es L. Q. D. D.

326 El movimiento vertical ó descenso de los cuerpos, es uniformemente acelerado; porque la gravedad obra continuamente sobre ellos; y como la fuerza de la gravedad no es la misma en todos los puntos de la tierra ni en todas las alturas, es necesario determinarla para cada paraje en particular.

Así es, que en Madrid, atendiendo á su altura sobre el nivel del mar, y á su latitud, he encontrado (*) ser de 35,1 pies españoles (**) por segundo, cuyo valor será el que se debe sustituir en vez de g en las

(*) *Nota del § 162 del Tomo 3.º P. 1.ª del Tratado elemental. Tambien determiné en dicha nota que la fuerza de la gravedad á la latitud de 45° era de* 35,18986 *pies españoles, y que como para hallar la fuerza de la gravedad á una latitud cualquiera, se necesita multiplicar esta por el factor* 1—0,002837cos.2l,
la fórmula para hallar la gravedad á una latitud cualquiera espresada por l, *era*
$$35,18986(1-0,002837\cos.2l).$$
(**) *Creemos oportuno advertir que todas las medidas y pesos de que hagamos uso en lo sucesivo, serán castellanas, á ménos que en algunos casos no se esprese lo contrario, por la denominacion que acompañe.*

(ecs. 24 y 23) cuando se quiera saber lo que debe caer un cuerpo en un tiempo dado, ó el tiempo que deberá tardar en caer de una altura conocida.

Por ejemplo, si quiero saber cuánta será la altura de que cae un cuerpo, en cuyo descenso emplea 13 segundos, multiplicaré $\frac{1}{2}g=17,55$ por $13^2=169=t^2$, y tendré que la altura pedida será 2965,95 pies.

Y si se quisiera saber el tiempo que tardaria un cuerpo en caer de una altura de 1421,55 pies, se sustituiria este valor en la ecuacion $e=17,55t^2$, en vez de e; y despejando la t, se tendria

$$e=\sqrt{\frac{1421,55}{17,55}}=\sqrt{81}=9,$$

que son los segundos que dicho cuerpo tardaria en bajar de la altura dada.

327 Las (ecs. 28, 29 y 30) sirven para determinar las circunstancias del movimiento de un cuerpo, arrojado verticalmente de abajo á arriba con la velocidad v'. Por ejemplo, si quiero saber el momento en que deja de subir un cuerpo, arrojado con una velocidad v' de 97 pies por segundo, haré $v=0$ en la (ec. 28), y despejando t tendré $t=\frac{v'}{g}=\frac{97}{35,1}=2,76$ segundos; que manifiesta que el cuerpo dejará de subir á los 2,76 segundos de haberle arrojado.

Y si en este mismo supuesto se quiere saber la altura á que habrá subido, en la (ec. 30) se hará $v=0$, y se tendrá $e=\frac{97^2}{70,2}=\frac{9409}{70,2}=134,03$, que son los pies á que subirá el cuerpo.

Si algun valor de t hace negativo al de v ó al de e, el resultado indicará que al cabo de dicho tiempo el cuerpo vuelve á caer con esta velocidad, ó que ha bajado mas abajo del punto de proyeccion una cantidad igual al resultado que se haya obtenido.

Del movimiento de los cuerpos sobre planos inclinados.

328 Para determinar las condiciones del movimiento de un cuerpo abandonado á sí mismo en un plano inclinado al horizonte, se considera su gravedad g á cada instante descompuesta en dos fuerzas aceleratrices, la una perpendicular y la otra paralela al plano; llamando α la inclinacion del plano, la primera de ellas tendrá (305 esc.) por valor $g\cos.\alpha$, la cual al mismo tiempo que es destruida por la resistencia del plano, espresa la presion que ejerce el cuerpo sobre él; y la segunda, á la cual obedece el móvil en un todo, tiene constantemente por valor $g\text{sen}.\alpha$; luego el movimiento de este cuerpo es uniformemente acelerado.

329 Luego si queremos obtener las condiciones de este movimiento, no habrá mas que modificar las (ecs. 23, 24 y 26) poniendo en vez de g el valor $g\text{sen}.\alpha$; y el movimiento de un cuerpo que desciende á lo largo de un plano inclinado, estará determinado por las ecuaciones siguientes:

$$v = gt\text{sen}.\alpha \ (31),\quad e = \tfrac{1}{2}gt^2\text{sen}.\alpha \ (32),\quad e = \frac{v^2}{2\,g\text{sen}.\alpha} (33).$$

Haciendo en las (ecs. 28, 29 y 30) las mismas sustituciones, el movimiento de un cuerpo que sube á lo largo de un plano inclinado, en virtud de una velocidad v' comunicada al cuerpo paralelamente al plano, vendrá espresado por las tres ecuaciones siguientes:

$$v = v' - gt\text{sen}.\alpha \ (34),\quad e = v't - \tfrac{1}{2}gt^2\text{sen}.\alpha \ (35),$$

$$e = \frac{v'^2 - v^2}{2g\text{sen}.\alpha} \ (36).$$

Haciendo $v=0$ en las (ecs. 34 y 36), dará: la una el tiempo al cabo del cual dejará el cuerpo de subir; y la otra, el espacio total que andará el cuerpo á lo largo del plano. Todas las circunstancias de este movimiento son las mismas que las de los cuerpos que caen libremente, con sólo la modificacion que se acaba de hacer.

330 Si el plano fuese horizontal y opusiese constantemente al cuerpo una resistencia r, las circunstancias del movimiento vendrian espresadas por las ecuaciones siguientes:

$$v=v'-rt,\ e=v't-\tfrac{1}{2}rt^2,\ e=\frac{v'^2-v^2}{2r};$$

de donde se sacará haciendo $v=0$, el tiempo al cabo del cual se estingue la velocidad, y el espacio total corrido por el cuerpo.

331 *Un cuerpo que ha corrido la longitud de un plano inclinado, ha adquirido la misma velocidad que si hubiera caido libremente una cantidad igual á la altura de dicho plano.*

Porque si llamamos a la altura del plano, y l su longitud, la (ec. 26) nos dará para la velocidad adquirida por el cuerpo que ha andado el espacio ó altura a, la espresion $v=\sqrt{2ag}$;
y la (ec. 33) dará para la velocidad del cuerpo que ha corrido el espacio ó longitud l del plano, este valor $v=\sqrt{2gl\text{sen.}\alpha}$;
y como (I. § 464 esc.) $l\text{sen.}\alpha=a$,
sustituyendo en la ecuacion anterior se convertirá en $\sqrt{2ag}$, que es la misma que nos dió la (ec. 26); luego las velocidades adquiridas por los dos cuerpos son iguales. L. Q. D. D.

Cor. De aquí se sigue que si llamamos v' la velocidad adquirida por otro cuerpo á lo largo de otro plano inclinado, cuya altura sea a', se tendrá $v'=\sqrt{2a'g}$;
y formando proporcion, y simplificando por $\sqrt{2g}$, resultará $v:v'::\sqrt{a}:\sqrt{a'}$;
que quiere decir, que *las velocidades adquiridas á lo largo de dos planos inclinados, son como las raices cuadradas de las alturas de los mismos planos.*

332 *Dos cuerpos que parten á la vez del vértice comun de dos planos inclinados para correrlos, llegan*

al mismo tiempo á los puntos en que encuentran á dichos planos las perpendiculares que se les tire desde un mismo punto de su comun altura.

Sean t, t' los tiempos empleados en correr los espacios AB, AC (fig. 93), determinados por las perpendiculares DB, DC; sean α, α' las inclinaciones de los planos AM, AN; con lo cual la (ec. 32) nos dará

$$AB=\tfrac{1}{2}gt^2\text{sen.}\alpha,\ AC=\tfrac{1}{2}gt'^2\text{sen.}\alpha';$$

pero (I. § 464, esc.) $\begin{cases} AB=AD\cos.BAD=AD\text{sen.}\alpha, \\ AC=AD\cos.CAD=AD\text{sen.}\alpha'; \end{cases}$

luego las dos ecuaciones anteriores serán lo mismo que estas $AD\text{sen.}\alpha=\frac{1}{2}gt^2\text{sen.}\alpha$, $AD\text{sen.}\alpha'=\frac{1}{2}gt'^2\text{sen.}\alpha'$; que dan un mismo valor para t y t', y por consiguiente $t=t'$, que es L. Q. D. D.

Si sobre AD como diámetro se describe una circunferencia, esta pasará por los vértices de los ángulos rectos ABD, ACD; de donde se deduce que todas las cuerdas de un círculo tiradas desde el estremo del diámetro vertical, son corridas en un mismo tiempo por un cuerpo; y este tiempo es tambien el mismo que emplearia el cuerpo en correr todo el diámetro.

333 *Los tiempos empleados por dos cuerpos en correr las longitudes de dos planos inclinados, son entre sí como las longitudes divididas por las raices cuadradas de las alturas.*

Porque conservando las mismas denominaciones, si en la (ec. 32) ponemos sucesivamente l, l', en vez de e, y $\frac{a}{l}$, $\frac{a'}{l'}$ en vez de sen.α, despejando los tiempos t, t', dará $t=\frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2}ag}}$, $t'=\frac{l'}{\sqrt{\frac{1}{2}a'g}}$;

que formando proporcion y simplificando por $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}g}}$,

será $t:t'::\frac{l}{\sqrt{a}}:\frac{l'}{\sqrt{a'}}$, que es L. Q. D. D.

Del movimiento de los proyectiles en el vacío.

334 Se llama *proyectil* todo cuerpo arrojado en una direccion cualquiera, y que al mismo tiempo obedece á la gravedad.

335 *El espacio que anda un proyectil es una curva plana y vertical.*

En efecto, supongamos un punto material lanzado desde el punto A (fig. 94) en la direccion AC, y que AB sea el espacio que siguiendo esta direccion correria en el primer instante en virtud de la fuerza ó velocidad de proyeccion sola; y sea la vertical AP lo que la gravedad haria bajar al cuerpo durante el mismo instante. Costruyendo un paralelogramo sobre AB, AP, el proyectil se hallará (242 y 243) al fin del primer instante en el estremo L de la diagonal de dicho paralelogramo; en el segundo instante, el proyectil sin la accion de la gravedad correria en la prolongacion de la diagonal un espacio LD=AL; y combinando esta fuerza con la accion vertical LQ de la gravedad en el mismo tiempo, el proyectil se hallará al cabo del segundo instante en el estremo O de la diagonal LO del paralelogramo costruido sobre las líneas LD, LQ; y lo mismo sucederá en los instantes siguientes. Ahora, suponiendo que los instantes vayan disminuyendo hasta llegar á su límite, tambien lo irán haciendo las diagonales, y su conjunto que formaba un polígono, vendrá á constituir una curva; y como cada paralelogramo tiene dos lados contiguos en el plano vertical del anterior, resulta que la curva descrita por el proyectil está toda en un mismo plano vertical. L. Q. D. D.

336 Esta curva se llama *trayectoria*. Para determinar su ecuacion respecto de la línea horizontal AC (fig. 95), sea α el ángulo de proyeccion KAC, que forma con la horizontal la direccion en que ha sido arrojado el proyectil, v la velocidad comunicada, a la altura $\frac{v^2}{2g}$ debida á esta velocidad, AMC la curva

descrita, M el lugar del proyectil al cabo de un tiempo cualquiera t, y x, z las coordenadas rectangulares AP, PM.

Concibamos que en el momento en que se lanza el proyectil su velocidad esté descompuesta en otras dos, la una horizontal, cuyo valor (305 esc.) será $v\cos.\alpha$, y la otra vertical espresada por $v\text{sen}.\alpha$. En virtud de la primera, el espacio AP$=x$ habrá sido corrido con movimiento uniforme, y (317) se tendrá

$x=vt\cos.\alpha$ (37);

y como PM es la altura á que un cuerpo puede subir en el tiempo t con la velocidad $v\text{sen}.\alpha$, la (ec. 28) nos dará $z=vt\text{sen}.\alpha-\frac{1}{2}gt^2$ (38).

Sustituyendo en esta en vez de t su valor (ec.37) $\frac{x}{v\cos.\alpha}$, se tendrá $z=\frac{vx\text{sen}.\alpha}{v\cos.\alpha}-\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v^2\cos.\alpha^2}$; quitando el divisor, sustituyendo despues en vez de v^2 su valor $2ag$, y dividiendo por g toda la ecuacion, resultará $4az\cos.\alpha^2=4ax\text{sen}.\alpha\cos.\alpha-x^2$ (39), que es la ecuacion de la trayectoria.

337 Resolviéndola con relacion á x, se tendrá (I. § 168) $x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha\pm\sqrt{4a\cos.\alpha^2(a\text{sen}.\alpha^2-z)}$, cuyo valor manifiesta: primero, que *la curva es simétrica respecto de un eje vertical ED, distante del orijen A la cantidad AE*$=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha$; y por cada valor de z da dos para x, cuyos estremos distan igualmente de este eje.

2.° Que *para el máximo valor de* x, *ó el alcance AC correspondiente á* z=o, *se tiene*

$AC=4a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha=$(I. § 460, 3.ª)$2a\text{sen}.2\alpha$.

3.° Que *la máxima elevacion del proyectil ó el máximo valor de z, permaneciendo* x *real, es* $a\text{sen}.\alpha^2$. Este valor que corresponde á $x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha=$AE, está representado por ED$=a\text{sen}.\alpha^2$.

El valor $4a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha$ de AC, permanece el mismo aunque en vez de α se sustituya $\frac{1}{2}\pi-\alpha$ ó su complemento; lo que manifiesta que *los alcances serán los mismos con dos ángulos que sean complemento el uno* *del otro, ó equidistantes de* $45°$; esto es, el mismo alcance se tendrá con un ángulo de elevacion de $37°$, que con uno de 53.

El otro valor $2a\text{sen}.2\alpha$ de la misma AC, hace ver que *permaneciendo una misma la carga de pólvora, es mayor el alcance cuando el ángulo de proyeccion* α *es la mitad de uno recto ó es de* $45°$; pues entónces $\text{sen}.2\alpha=1$, que es el mayor seno; y llamando P á dicho alcance bájo este ángulo, se tendrá $P=2a$; sustituyendo este valor en el de AC, todas las amplitudes con una misma carga quedarán referidas á la amplitud P, y serán dadas por la ecuacion

$$AC=P\text{sen}.2\alpha.$$

338 Si se quiere conocer la naturaleza de la curva ADC, refiriendo sus puntos al eje vertical DE, se hará $MQ=z'$, $DQ=x'$, y se tendrá

$$x=2a\text{sen}.\alpha\cos.\alpha-z' \text{ y } z=a\text{sen}.\alpha^2-x';$$

sustituyendo estos valores en la (ec. 39) y simplificando, se convertirá en $z'^2=4ax'\cos.\alpha^2$; lüego (72) la curva es una parábola cuyo parámetro relativo al eje DE es $4a\cos.\alpha^2$.

339 Para hallar el ángulo de proyeccion que se debe emplear para dar en un punto cuya posicion es conocida, se dividirá la (ec. 39) por $\cos.\alpha^2$; despues

se sustituirá $\text{tang}.\alpha$ en vez de $\dfrac{\text{sen}.\alpha}{\cos.\alpha}$,

y $\sec.\alpha^2$ ó $1+\text{tang}.\alpha^2$ en vez de $\dfrac{1}{\cos.\alpha^2}$,

y se tendrá $\text{tang}.\alpha=\dfrac{2a\pm\sqrt{4a^2-4az-x^2}}{x}$.

Esta fórmula manifiesta que miéntras x^2+4az sea menor que $4a^2$, se podrá dar en el punto que se quisiere con dos direcciones diferentes. Si el punto está en el horizonte se hará $z=0$; y si está inferior al horizonte se hará z negativa.

El tiempo que el proyectil emplea en llegar al blanco se hallará por la (ec. 37), sustituyendo en vez de x la distancia horizontal de la batería al blanco, y por v la velocidad *inicial*, que es aquella con que es arrojado el cuerpo.

340 Se llama *línea de puntería* el rayo visual (fig. 96) que enrasa la parte superior de la culata y el punto mas elevado del brocal.

El cañon siempre está mas reforzado de metal en la recámara que hácia la boca; por consiguiente cuando la línea de puntería natural está dirijida al blanco, el eje de la pieza se halla elevado sobre la línea de puntería una cierta cantidad, que se llama *ángulo de puntería.*

341 Si se concibe la velocidad inicial del proyectil como descompuesta en otras dos, la una horizontal y la otra vertical, la primera será la misma durante todo el alcance del tiro, y la vertical irá disminuyendo continuamente en razon de la gravedad, y vendrá á ser nula durante el corto instante en que el movimiento sea horizontal, desde el cual instante en adelante será negativa; donde se ve que el proyectil que arroja la pieza cortará al principio la línea de puntería al subir: y al descender la volverá á encontrar una segunda vez en el punto M. La distancia AM de este punto á la boca de la pieza, es lo que se llama *alcance de punto en blanco*; y cuando el blanco es el punto M, es herido como si el proyectil hubiese corrido la recta AM.

Luego *para dar en el blanco es necesario que el proyectil, considerado como sin gravedad, y llegado á la vertical del blanco, se eleve en ella por la parte superior á este blanco, la misma cantidad que la gravedad hace descender al proyectil en el mismo tiempo que emplea en llegar á la vertical*, que es justamente lo que se verifica en el punto en blanco M. Pero si el objeto está mas distante que el punto en blanco y á la misma altura que este, el proyectil pasará por la parte inferior á él; luego para darle *será necesario apuntar mas alto ó por elevacion.*

Si el objeto estuviese mas inmediato que el alcance de punto en blanco, *se deberia hacer la puntería un poco mas baja.*

342 Con estos conocimientos se pueden resolver varios problemas relativos á este punto; pero como la resistencia del aire, calidad de la pólvora, estado de la atmósfera &c. alteran considerablemente los resultados, se ha procurado conocer por esperimentos la velocidad que una cierta carga de pólvora puede imprimir á un proyectil de un peso conocido, tirando á una pequeña distancia sobre un péndulo de gran peso, y observando la cuerda del arco que un punto determinado de dicho péndulo ha corrido en virtud del choque de la bala.

El resultado de los esperimentos ha sido que hasta una carga igual á la mitad del peso de la bala, las velocidades comunicadas eran entre sí como las raices cuadradas de las cargas de pólvora, divididas por las raices cuadradas de los pesos de las balas. Así, para conocer la velocidad que recibirá una bala de cañon, basta saber que una bala de á 24 con una carga igual á la tercera parte de su peso, es arrojada con una velocidad de 420 á 430 varas por segundo.

Tambien se ha observado que los alcances de una misma pieza, bájo un mismo ángulo, crecen como las raices cuartas de las cargas.

La misma esperiencia ha hecho conocer que los alcances de punto en blanco de las piezas cargadas con la tercera parte del peso de su bala, para las piezas de sitio de á 24, 16, 12, 8, 4,
son..................840, 760, 720, 670, 620, varas.

Para las de campaña de á 12, 8, 4,
son......................................570, 550, 530, varas.

Que el alcance de punto en blanco del fusil es de 210 á 220 varas, y su alcance total de 360 á 380.

Luego *si el objeto está á la distancia de punto en blanco del arma, se deberá apuntar á él mismo.*

Si la distancia del objeto escede al alcance de punto en blanco, es necesario tirar por elevacion; y la certeza del tiro siempre dependerá de la práctica del artillero, y de su mayor ó menor destreza en calcular á simple vista la distancia del objeto á la pieza, para graduar la elevacion por que deberá tirar.

Si la distancia del objeto es menor que el alcance de punto en blanco, se apunta dos varas mas abajo que el objeto, si está á una distancia de 200 varas; y una vara mas abajo, si está á la distancia de 400.

Hemos visto que el alcance de punto en blanco del fusil es de 220 varas, y su alcance total de 380. Si entre estas dos distancias se hubiese de tirar á un objeto de 2 á 3 varas de altura, *se podrá hacer la puntería á la parte superior de dicho objeto*; si el objeto está á mas de 380 varas de distancia, *se deberá hacer la puntería un poco mas arriba*; *y si el objeto está á ménos de 220 varas, se deberá apuntar un poco mas abajo.*

Del movimiento de un cuerpo en una curva vertical, y de las oscilaciones de los péndulos.

343 *Si un punto (que por ahora concebirémos sin gravedad) corre los lados sucesivos de un polígono, á su encuentro con cada lado pierde una parte de su velocidad actual, igual al producto de esta velocidad por el senoverso del ángulo que forma el lado de que sale el punto con el lado en que entra.*

Porque considerando cada lado como un plano inclinado, y llamando α el ángulo que forman dos de ellos, v la velocidad que el cuerpo tiene en el momento que entra en el segundo lado, resulta que si se concibe su velocidad descompuesta en otras dos, la una perpendicular y la otra paralela á este segundo lado, la primera de estas velocidades será destruida por dicho lado: y la segunda, que será con la que el cuerpo correrá el segundo lado, será igual (305 esc.) $v\cos.\alpha$; luego la velocidad perdida será igual á

$$v-v\cos.\alpha=v(1-\cos.\alpha)=v\,\text{sen. ver.}\,\alpha,$$

que es L. Q. D. D.

344 Ahora, teniendo presente lo dicho (I. 442 cor.), si concebimos que el ángulo α vaya menguando hasta llegar á su límite cero (en cuyo caso los lados del polígono lo harán igualmente, y constituirán una curva cualquiera) entónces su seno y tambien su senoverso habrán llegado á ser menores que cualquier cantidad dada; por consiguiente la velocidad perdida en el encuentro de cada lado, lo será del mismo modo; y por lo mismo el cuerpo correrá todos los lados de este polígono, ó de una curva, con la velocidad primitiva v.

345 Consideremos ahora (figs. 97 y 98) una curva vertical como el límite de un polígono, cuyos lados AB, BC, CD, &c. los podrémos mirar como otros tantos planos inclinados, y prolónguense las BC, CD &c. hasta la horizontal HK; de donde resultará que un punto pesado, abandonado en A sobre el plano AB, al correr este plano adquirirá la misma velocidad (331) que si hubiera corrido el EB; y como al pasar al plano BC no pierde (344) ninguna velocidad, podemos suponer que el tránsito se verifica del plano EB al BC, que es su prolongacion; entónces al llegar al punto C tendrá la misma velocidad que si hubiese corrido EC. Del mismo modo se demostrará que este punto tendrá en D la misma velocidad que si hubiese corrido el plano HD, ó la vertical GD; luego *un cuerpo pesado que desciende por una curva en virtud de su gravedad, tiene en un punto cualquiera la misma velocidad que si hubiese caido de una altura igual á la del arco corrido, y su movimiento es independiente de la naturaleza de la curva.*

Cuando el cuerpo haya pasado del punto en que la tangente á la curva es horizontal, la gravedad le irá quitando los mismos grados de velocidad que le habia comunicado al descender por los lados correspondientes; de donde se sigue que no dejará de subir hasta que esté elevado en la rama KT á la misma altura que aquella de que habia bajado en la primera; despues volverá á bajar esta segunda rama para subir en la primera hasta el punto de donde partió al principio, y así sucesivamente. El espacio ATK se llama una *oscilacion*, y el AT es una *semioscilacion*.

Si las dos ramas de la curva ATK son simétricas respecto de la vertical TD, todos sus elementos correspondientes serán iguales, y serán corridos con una misma velocidad; por consiguiente los tiempos empleados en describirlos serán iguales.

346 *Si la curva ATK* (fig. 99) *es un círculo, las velocidades adquiridas en T por dos cuerpos pesados que hayan corrido los arcos AT, MT, serán entre sí como las cuerdas AT, MT de dichos arcos*; porque estas velocidades son (331 cor.) como las raices cuadradas de las alturas TO, TP, y estas raices son (I. 333 cor. 2.º) como las cuerdas AT, MT.

347 Si se tratase de hacer adquirir á un cuerpo una velocidad dada v, *se sustituiria este valor en la fórmula* $\frac{v^2}{2g}$, *y resultaria la altura pedida*; si la representamos por TP, se tirará por el punto P una horizontal MP, y el punto M en que encuentre á la curva, será el punto de donde debe partir el cuerpo para tener en T la velocidad dada v.

348 Se llama *péndulo* en general un hilo ó varilla sujeto á un punto C (fig. 100), del cual cuelgan uno ó muchos cuerpos pesados. Si sólo cuelga un peso B se llama *péndulo simple*; y si hubiese otro ó mas por la parte superior ó inferior al punto B, se llamaria *compuesto*. Aquí sólo tratarémos del simple.

Si el péndulo se separa de la vertical hasta haber llegado á A por ejemplo, y se le abandona á sí mismo, entónces en virtud de la gravedad bajará hasta el punto B, donde habrá adquirido una velocidad con la cual subirá hasta A′, á igual altura de donde habia bajado. Porque descomponiendo á cada instante su gravedad en dos fuerzas, la una en la direccion del hilo, y la otra perpendicular á esta direccion, la primera quedará destruida por el punto fijo C, y la otra será la que hará mover al péndulo del mismo modo que si bajase por una curva vertical.

349 Considerando un círculo como el límite de todo polígono, *uno cualquiera de los lados de este polígono, al acercarse á su límite, es igual al producto de su proyeccion sobre el diámetro que pasa por el oríjen, por la relacion del radio del círculo á la ordenada correspondiente á dicho lado.*

En efecto, sea MM′ (fig. 101) uno de estos lados; tírese el radio CM, y la línea MO paralela al diámetro AB, y tendrémos que el triángulo MM′O en su límite, se podrá considerar como rectilíneo, en cuyo caso será semejante al CPM, por tener sus lados perpendiculares, y tendrémos:

$$MP:MO::CM:MM'=\frac{MO\times CM}{MP}(40);$$

que traducida manifiesta L. Q. D. D.

350 *Si llamamos* r *la longitud del péndulo, ó el radio del arco que describe,* g *la gravedad,* π *la relacion de la circunferencia al diámetro, y* t *el tiempo que emplea un péndulo simple en una oscilacion de un arco muy pequeño de círculo, se tendrá próximamente* $t=\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}$.

Supongamos que el péndulo haya partido de B (fig. 102) y llegado á m, y que sea v la velocidad que ha adquirido en este punto. Tírense la horizontal BD, las ordenadas sumamente próximas mp, $m'p'$, y descríbase sobre AK como diámetro la circunferencia AnKo; hágase A$p=x$, $pm=z$, el pequeño lado $mm'=s$; su proyeccion $pp'=s'$, la altura de la oscilacion AK$=a$, y en fin sea t el tiempo que emplea el péndulo en correr mm', y T el tiempo de la oscilacion entera.

En primer lugar tendrémos (§ 331) $v=\sqrt{2gx}$; ahora, la pequeñez del lado mm' permite suponer que está corrido uniformemente con la velocidad v, y por consiguiente $t=\frac{mm'}{v}=$(ec. 40)$\frac{r\times s'}{z\sqrt{2gx}}$.

Pero como a es el senoverso de un arco BK que le suponemos muy pequeño, se podrá reputar que z es media proporcional entre $a-x$ y $2r$, lo que da

$$z=\sqrt{2r(a-x)};$$

y por consiguiente sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, se tendrá $t=\frac{r\times s'}{\sqrt{2gx}\sqrt{2r(a-x)}}=$

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\times\frac{\frac{1}{2}s'}{\sqrt{x(a-x)}}=\frac{\sqrt{r}}{a\sqrt{g}}\times\frac{\frac{1}{2}as'}{\sqrt{x(a-x)}}=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\times\frac{nn'}{a};$$

y como hallarémos un resultado semejante para todos los lados que componen el arco BmK, resulta que la duracion de la caida por este arco ó $\frac{1}{2}T$ será igual á

$$\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\times\frac{\mathrm{A}n\mathrm{K}}{a};\text{ que da } T=\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}\times\frac{\mathrm{A}n\mathrm{Ko}}{\mathrm{AK}}=\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}},$$

que es L. Q. D. D.

Cor. Como el valor de T es independiente de $a=$AK, se sigue que *las oscilaciones en pequeñas porciones de la circunferencia, son sensiblemente* isócronas *ó de una misma duracion.*

351 La duracion T' de la oscilacion de otro péndulo cuya longitud sea r', en un lugar donde la gravedad sea g', estará igualmente espresada por

$$T'=\pi\frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{g'}},$$

que da en general $T:T'::\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{g}}:\pi\frac{\sqrt{r'}}{\sqrt{g'}}::\sqrt{r}\sqrt{g'}:\sqrt{r'}\sqrt{g}$;

lo que manifiesta que *los tiempos de las oscilaciones están en razon compuesta directa de las raices cuadradas de las longitudes de los péndulos, é inversa de la gravedad.*

Si $r=r'$, ó es uno mismo el péndulo que oscila en diferentes lugares, simplificando la proporcion anterior se tendrá $T:T'::\sqrt{g'}:\sqrt{g}$.

Si los péndulos oscilan en un mismo lugar, ó á latitudes iguales, será $g=g'$, y la proporcion se convertirá en $T:T'::\sqrt{r}:\sqrt{r'}$, ó $T':T::\sqrt{r'}:\sqrt{r}$ (41).

En fin, si $T=T'$, ó los tiempos de las oscilaciones son iguales, en dos péndulos que oscilan en dos lugares diferentes, la proporcion anterior dará $\sqrt{r}\sqrt{g'}=\sqrt{r'}\sqrt{g}$ ó $rg'=r'g$, que da $g:g'::r:r'$.

352 *Los números de oscilaciones que dos péndulos diferentes pueden hacer en un mismo tiempo y en un mismo lugar, están en razon inversa de las raices cuadradas de las longitudes de los péndulos.*

Porque conservando las mismas denominaciones de ántes, y llamando n, n' los números respectivos de oscilaciones que dichos péndulos pueden hacer en un mismo tiempo k, se tendrá

$k=nT=n'T'$, que da $n:n'::T':T$;

pero (prop. 41) $T':T::\sqrt{r'}:\sqrt{r}$,

luego $n:n'::\sqrt{r'}:\sqrt{r}$, que es L. Q. D. D.

De las fuerzas centrales.

353 Como el movimiento de los cuerpos abandonados á ellos mismos debe verificarse en línea recta (315), inferimos que si un cuerpo puesto en movimiento describe una curva cualquiera, ha de estar sujeto á la accion de dos fuerzas: la una, que le atraiga hácia el centro de la curva, que por esta razon se llama *fuerza centrípeta*; y la otra, que le obligue á separarse del mismo centro, que toma el nombre de *centrífuga*. Estas dos fuerzas se conocen con el nombre general de *fuerzas centrales*; y vamos á demostrar que *si un cuerpo M* (fig. 103) *atraido continuamente hácia un punto fijo C por una fuerza constante* φ, *y arrojado en una direccion MB perpendicular á CM, describe una circunferencia de círculo al rededor del punto C, la fuerza centrípeta* φ *es á la gravedad*, como

la altura debida á la velocidad de proyeccion es á la mitad del radio CM.

En efecto, llamando v la velocidad de proyeccion en la direccion MB, y r el radio CM, el móvil sin la accion de la fuerza centrípeta caminaria por MB, en el tiempo sumamente pequeño t, un espacio $MN=vt$, separándose del centro C una cantidad LN, que próximamente la podrémos mirar como igual á MG; luego si el móvil permanece en la circunferencia, ha debido ser atraido por la fuerza φ una cantidad igual (ec. 24) á $MG=\frac{1}{2}\varphi t^2$.

Pero por la naturaleza del círculo $MG=\frac{ML^2}{2r}$;

y como por suponer el tiempo t muy pequeño, la diferencia entre LM y MN será menor que cualquier cantidad dada, poniendo esta en vez de aquella, será

$MG=\frac{MN^2}{2r}=\frac{v^2t^2}{2r}$; luego igualando los dos valores de MG, resultará $\varphi=\frac{v^2}{r}$ (42).

Ahora, llamando a la altura debida á la velocidad v, el valor de φ se convertirá (ec. 26 *) en

$\varphi=\frac{2ag}{r}$, que da $\varphi:g::a:\frac{1}{2}r$.

En lo que acabamos de decir no hemos considerado realmente mas que la unidad de masa; pero si se multiplican los dos primeros términos de la proporcion anterior por la masa del móvil, dicha proporcion se podrá enunciar así:

La fuerza centrípeta del cuerpo, si está libre, ó su fuerza centrífuga, si está sujeto al punto C por medio de un hilo, es al peso de dicho cuerpo, como la altura debida á la velocidad v *es á la mitad del radio CM.*

Donde se ve que si φ y r permanecen constantes, tambien será constante la velocidad v.

354 Multiplicando los dos miembros de la (ec. 42) por la masa m del móvil, y señalando por F la fuerza centrífuga correspondiente á esta masa, se tendrá

$$F=\frac{mv^2}{r}.$$

Esta fórmula manifiesta, que *á masas iguales las fuerzas centrífugas de dos cuerpos son entre sí como los cuadrados de las velocidades divididos por los radios de las circunferencias descritas*; luego si F' es la fuerza de otro cuerpo que circula con la velocidad v', en una circunferencia cuyo radio sea r', se tendrá $F:F'::\frac{v^2}{r}:\frac{v'^2}{r'}$.

Sean T, T', las duraciones de las revoluciones de los dos móviles; y puesto que $v=\frac{2\pi r}{T}$, $v'=\frac{2\pi r'}{T'}$, será $F:F'::\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2\times\frac{1}{r}:\left(\frac{2\pi r'}{T'}\right)^2\times\frac{1}{r'}::\frac{r}{T^2}:\frac{r'}{T'^2}$ (43).

Si $T=T'$, será $F:F'::r:r'$;
y si se tuviese $T^2:T'^2::r^3:r'^3$, como sucede en los movimientos de los cuerpos celestes, la (prop. 43) se convertiria en $F:F'::\frac{r}{r^3}:\frac{r'}{r'^3}::r'^2:r^2$.

De la inercia y choque de los cuerpos.

355 Se llama *inercia* la propiedad general de que gozan los cuerpos, en virtud de la cual les es *enteramente* indiferente el mudar de estado; así es, que un cuerpo en reposo ó en movimiento permaneceria eternamente en él, á ménos que una causa estraña no le sacase de él ó le hiciese mudar de estado. Esta propiedad se manifiesta en todas direcciones, y no proviene de la gravedad, puesto que á un cuerpo que cae

se le puede hacer descender con mas velocidad que la que le comunica la gravedad; y á un cuerpo que está en un plano horizontal se le puede hacer que camine en cualquier direccion, y la gravedad sólo obra por líneas verticales.

Ahora, para hacer pasar á un cuerpo del estado de reposo al de movimiento, será necesario emplear una fuerza mas ó ménos grande, segun sea su cantidad de materia, ó lo que es lo mismo, *para hacer mudar de estado á un cuerpo, será necesario una fuerza proporcional á su masa y al movimiento que se haya de producir ó destruir.*

356 Esto supuesto, se llaman *cuerpos duros* aquellos cuya forma no se puede alterar con cualquier fuerza que esteriormente se les aplique; *cuerpos blandos*, aquellos en que se verifica lo contrario; y *cuerpos elásticos*, aquellos que pueden ser comprimidos, y tienen la propiedad de volver á recobrar su primitiva forma, con los mismos grados de fuerza que la habian perdido.

Se llama *choque* en los cuerpos, el golpe que dan uno contra otro de un modo cualquiera; si se verifica en la direccion de la recta que une sus centros de gravedad, se llama *directo*; y cuando no, *oblicuo*.

357 *Si dos cuerpos duros de iguales masas, se chocan en sentidos contrarios con velocidades iguales, deben permanecer en reposo despues del choque.*

Porque como las masas y velocidades son iguales, tambien lo serán (316) las cantidades de movimiento; pero los dos cuerpos se chocan en direccion opuesta, luego quedará destruido el movimiento del uno por el del otro; luego quedarán en reposo. L. Q. D. D.

358 *Si dos cuerpos duros se chocan en sentidos contrarios, y se equilibran, tienen cantidades de movimiento iguales.*

Porque suponiendo la masa de uno de ellos reducida á un punto material, ó á una parte alícuota de la del otro, cada punto del segundo cuerpo deberá destruir en el punto único del primero una velocidad igual á la del segundo cuerpo; luego la fuerza del primer cuerpo debe equivaler á la de un punto material animado de una velocidad igual al producto de la velocidad del segundo multiplicada por el número de sus puntos materiales iguales al primero, ó lo que es lo mismo, por su masa.

Por un razonamiento análogo se deducirá que á la fuerza del segundo cuerpo se puede sustituir la de un punto material, animado de una velocidad igual al producto de la velocidad del primer cuerpo por su masa; luego se puede reducir el choque al de dos puntos materiales iguales, cuyas velocidades encontradas sean respectivamente iguales á estos productos. Luego en el caso de equilibrio estos productos ó cantidades de movimiento serán iguales. L. Q. D. D.

359 *La velocidad de los cuerpos duros, despues del choque, es igual á la suma de sus cantidades de movimiento ántes del choque, dividida por la suma de sus masas.*

Para demostrarlo, supongamos que los cuerpos caminan en un mismo sentido, y que M sea la masa del chocante, y V su velocidad ántes del choque; sea M' la masa del cuerpo chocado, y V' su velocidad tambien ántes del choque. Ahora debemos observar que el choque no cesa hasta que el cuerpo chocado tiene tanta velocidad como le queda al chocante, pues hasta este momento siempre le irá empujando; por consiguiente cuando cesa el choque, los dos cuerpos caminan unidos con unas velocidades iguales, que son las que conservan despues del choque.

Llamando x esta velocidad comun, se podrá considerar al chocante, en el instante del choque, como que tiene las dos velocidades x, $V-x$, en el sentido del choque; igualmente, el chocado, en el mismo instante, se podrá considerar con las dos velocidades x en el sentido de la velocidad del chocante, y $x-V'$ en sentido contrario, pues la diferencia de estas dos velocidades es V' en el sentido del chocante.

Pero los cuerpos sólo deben conservar la velocidad comun x; luego deberán equilibrarse con las otras velocidades, y por lo dicho ántes se tendrá

$$M:M'::x-V':V-x;$$

de donde sale $x=\frac{MV+M'V'}{M+M'}$, que es L. Q. D. D.

Esc. Si el chocado hubiera caminado ántes del choque en sentido contrario del chocante, esto es, del que tiene mayor cantidad de movimiento, se habria deducido para la velocidad comun $x=\frac{MV-M'V'}{M+M'}$.

Si el chocado está en reposo ántes del choque, se deberá hacer $V'=0$, y resultará $x=\frac{MV}{M+M'}$;

Quitando el divisor del primer valor de x, se tendrá $Mx+M'x=MV+M'V'$;
lo que manifiesta que *la suma de las cantidades de movimiento despues del choque es la misma que ántes.*

360 Si el choque se verifica entre dos cuerpos elásticos, y se quiere hallar su velocidad despues del choque, *del duplo de la velocidad que tendrian despues del choque, sino fuesen elásticos, se restará la que cada uno tenia ántes del choque.*

Porque miéntras que los cuerpos se comprimen, la distribucion de las fuerzas se verifica como en el choque de los cuerpos duros; de donde resulta que si llamamos x la velocidad que los cuerpos tendrian en este caso, $V-x$ será la velocidad perdida por el chocante durante la compresion; pero por la naturaleza de los cuerpos elásticos la reaccion de su resorte es igual y contraria á la fuerza con que ha sido comprimido; luego $V-x$ será tambien la velocidad perdida por la reaccion; de suerte que la velocidad total perdida por el chocante será $2V-2x$; restando esta velocidad perdida de la velocidad V, que tenia el chocante ántes del choque, se tendrá $2x-V$, que es la velocidad del chocante despues del choque.

La velocidad que el chocado gana durante la compresion es $x-V'$; y como la reaccion del resorte le hace ganar otro tanto, la velocidad total adquirida por el chocado durante el choque será $2x-2V'$; sumando esta velocidad ganada con la V' que tenia ántes del choque, se tendrá $2x-V'$ para la velocidad del chocado despues del choque. Este resultado y el anterior manifiestan la verdad que asegurámos; y debe advertirse que en este último la velocidad V' puede ser nula ó negativa, segun el cuerpo chocado esté en reposo ó vaya en direccion contraria.

361 *En el choque de los cuerpos elásticos la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de su velocidad, despues del choque, es igual á la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de su velocidad ántes del choque*, como lo manifiesta la siguiente ecuacion $M(2x-V)^2+M'(2x-V')^2=$

$$4x^2(M+M')-4x(MV+M'V')+MV^2+M'V'^2=$$

$$4\left(\frac{MV+M'V'}{M+M'}\right)^2(M+M')-4\frac{MV+M'V'}{M+M'}(MV+M'V')+$$

$$MV^2+M'V'^2=MV^2+M'V'^2,$$

porque los dos primeros términos se destruyen.

362 Se entiende por *fuerza viva* de un cuerpo, el producto de su masa por el cuadrado de su velocidad; así, en el choque de los cuerpos perfectamente elásticos, *la suma de las fuerzas vivas es la misma ántes y despues del choque*.

363 *La velocidad con que los cuerpos elásticos se separan despues del choque, es igual á la velocidad con que se aproximan ántes del choque.*

Porque si los cuerpos caminan en un mismo sentido ántes del choque, la velocidad con que el chocante se aproxima al chocado es $V-V'$; pero la velocidad con que el chocado se separa del chocante despues del choque es

$$2x-V'-(2x-V)=V-V';$$

luego estas velocidades son iguales. L. Q. D. D.

HIDROSTÁTICA.

364 Se llama *masa fluida* una reunion de partículas materiales de una suma tenuidad, y dotadas de una perfecta movilidad en toda clase de direcciones ó sentidos.

Se distinguen, aunque no con toda propiedad, dos especies de fluidos, á saber: *fluidos incompresibles*, que son aquellos que no se pueden reducir á menor volúmen por mas que se los comprima, como el agua y la mayor parte de los licores; y fluidos *compresibles ó elásticos*, como el aire y los diferentes gases.

Si una masa fluida llena enteramente un vaso cerrado por todas partes, y haciendo en dicho vaso dos aberturas iguales se les aplican por medio de dos émbolos dos presiones iguales, manifiesta la esperiencia que *los émbolos quedan en equilibrio*; lo que prueba que el fluido trasmite enteramente y en todos sentidos la presion aplicada á uno de los émbolos.

Luego si una de las aberturas es mayor que la otra, la presion aplicada al émbolo menor se trasmitirá plenamente sobre cada parte de la base del mayor igual á la del menor; de modo que para que haya equilibrio, las presiones aplicadas á los dos émbolos deberán estar en razon inversa de las bases de los mismos émbolos.

Cuando una masa fluida comprimida está en equilibrio, la presion que cada molécula contigua á la superficie del vaso, ó á la de un cuerpo introducido en el fluido, ejerce sobre dicha superficie, *es perpendicular á la misma superficie*; pues de otro modo no seria la presion enteramente destruida por la resistencia de la superficie, y por consiguiente faltaria el equilibrio, que es contra el supuesto.

365 *Si las moléculas de un fluido contenido en un vaso abierto, se hallan solicitadas por sola la gravedad, y la superficie del fluido está á nivel, toda la masa fluida está en equilibrio.*

Porque como la gravedad de una cualquiera de las moléculas de la superficie, es entónces perpendicular á dicha superficie, la molécula no tiene ninguna tendencia al movimiento hácia ningun lado de la superficie; y como sucede lo mismo respecto de todas las moléculas de las capas paralelas á la primera, resulta la proposicion.

Luego *las superficies de un mismo fluido contenido en un tubo recurvo, y que se hallen en equilibrio, están en una misma superficie de nivel ú horizontal*; cuya proposicion es el fundamento de la nivelacion con el nivel de agua.

366 *La presion que en todos sentidos sufre una molécula cualquiera de un fluido que está en equilibrio dentro de un vaso, es igual al peso de una columna vertical del mismo fluido, cuya altura sea la distancia que hay desde la molécula hasta la superficie superior del fluido.*

Porque en primer lugar esta molécula se halla igualmente comprimida por todas partes; pues sino, se moveria hácia aquel lado hácia donde esperimentase menor presion. En segundo lugar, concibiendo que toda la masa fluida, escepto esta columna, se llega á conjelar, sin mudar de lugar ni volúmen, la molécula sufrirá todavía la misma presion; y como en este caso sostiene todo el peso de la columna que ha quedado fluida, resulta L. Q. D. D.

367 *La presion que un fluido ejerce sobre una superficie plana cualquiera, es igual al producto de dicha superficie por la distancia de su centro de gravedad al plano de nivel, y por el peso específico del fluido.*

Porque concibiendo la superficie dividida en una infinidad de superficies muy pequeñas, todos los puntos de cada una se podrán considerar como equidistantes del plano de nivel; y puesto que cada punto está comprimido, perpendicularmente á la superficie, por una fuerza igual al peso de una columna de fluido de una altura espresada por la distancia de dicho punto á la superficie de nivel, resulta que cada una de estas pequeñas superficies esperimenta una presion igual al peso de un prisma de fluido que tuviese por base á dicha superficie, y por altura la distancia de la misma superficie al plano de nivel; pero el peso de este prisma es igual (263 esc.) al producto de su base por su altura (que da su volúmen) multiplicado por el peso específico del fluido; luego la presion total es igual á la suma de los productos de las pequeñas superficies multiplicadas cada una por su distancia al plano de nivel y por el peso específico del fluido. Y como por las propiedades del centro de gravedad, esta suma de productos es igual á la superficie entera multiplicada por la distancia de su centro de gravedad al plano de nivel, resulta L. Q. D. D.

Cor. Luego si el fondo de un vaso lleno de un fluido cualquiera es horizontal, *la presion sobre dicho fondo será igual, menor ó mayor que el peso del fluido contenido en el vaso, segun que este vaso sea cilíndrico, ó sea ancho, ó estrecho de boca*; esto es, segun tenga la figura de un trozo de cono descansando sobre la base menor, ó sobre la mayor.

368 *Cuando un cuerpo está sumerjido en un fluido pierde una parte de su peso, espresada por el peso de un volúmen igual de fluido.*

Concibamos en medio de la masa fluida (fig. 104) un paralelepípedo *cg*; y tendrémos (367) que la presion que sufre la cara lateral *abdc* estará representada por una columna fluida, cuya base es la misma cara, y la altura la distancia de su centro de gravedad al nivel del fluido; la cara opuesta *fgih* sufre una presion igual, pero en sentido contrario; por lo que estas dós presiones se destruyen, y no producen ningun movimiento; y lo mismo sucederá á las otras dos caras laterales opuestas *achf*, *bdig*. Ahora, la cara superior *abgf* sufre la presion de la columna fluida de que ella es la base, y cuya altura es *mn*. La cara inferior sufre una presion que se ejerce de abajo á arriba, espresada por una columna de fluido cuya base es la misma *cdih* y cuya altura es *pn*; pero si de esta se quita la presion superior que trata de hacerle descender, sólo quedará una presion, que se ejercerá de abajo á arriba, y estará espresada por una columna fluida cuya base es *cdih*, y *pm* la altura; y como esto forma el volúmen del paralelepípedo *cg*, resulta que el cuerpo está solicitado de abajo á arriba por un esfuerzo igual al peso del volúmen fluido que él desaloja; luego este peso ménos tendrá el cuerpo, que es L. Q. D. D.

369 Luego si señalamos por P el peso específico del cuerpo, por V su volúmen, y por p el peso específico del fluido, resulta que el peso del cuerpo dentro del fluido estará representado por

$$PV-pV=V(P-p).$$

Si $P=p$, el cuerpo permanecerá en equilibrio en cualquier parte del fluido que se le coloque.

Si $p<P$, el cuerpo descenderá hasta el fondo del vaso, con una fuerza igual al esceso de su peso sobre el del fluido desalojado. Y si $p>P$, el cuerpo se elevará y saldrá del fluido, hasta que el volúmen v de la parte sumerjida sea tal que se verifique que

$$PV-pv=0, \text{ ó } PV=pv \ (44).$$

370 Si llamamos V el volúmen de un cuerpo, cuyo peso específico P esceda los de diferentes fluidos que espresarémos por p, p', p'', &c. y le introducimos sucesivamente en dichos fluidos, resulta que pV, $p'V$, $p''V$, &c. serán las pérdidas respectivas de peso del cuerpo en estos fluidos. Ahora, de estos valores se sacan estas proporciones $pV:PV::p:P$, $pV:p'V::p:p'$,&c.

La primera servirá para *determinar el peso específico del cuerpo, por medio del del fluido y de la pérdida de peso del cuerpo en el fluido.*

La segunda *hará conocer el peso específico* p′ *de un líquido cualquiera, por medio del* p *de otro líquido y de las pérdidas de peso de un mismo cuerpo en los dos líquidos.*

Tambien se puede espresar el peso específico de un líquido por medio de una ampolleta lastreada, en cuya parte superior hay un platillo donde se van echando diferentes pesas; se sumerje la ampolleta en el líquido cuyo peso específico se conoce, y despues en el otro cuyo peso específico se quiere conocer; y cargando ó descargando el platillo con las pesas, se hace que el volúmen v de la parte sumerjida sea uno mismo; ó en otros términos: se añaden ó quitan pesas al platillo hasta que la ampolleta se introduce hasta un mismo punto en ambos líquidos; hecho esto, si q y $q \pm k$ son los pesos con que se ha cargado el platillo, y p, p' los pesos específicos de los dos líquidos, se tendrá $q = pv$, $q \pm k = p'v$; lo que dará $q : q \pm k :: p : p'$.

371 El instrumento que se emplea en esta operacion se llama *areómetro*.

Si se quiere conocer el peso específico de un cuerpo mas lijero que el líquido en que se le quiere sumerjir, se atará á dicho cuerpo otro bastante pesado para que el sistema de los dos se pueda sumerjir enteramente; se observará la pérdida de peso del sistema en el fluido; de esta se restará la pérdida de peso del cuerpo añadido, y la resta será el esceso del fluido sobre el primer cuerpo, es decir, el producto del peso específico del fluido por el volúmen de dicho cuerpo; y dividiendo la resta por dicho cuerpo, se tendrá la relacion del peso específico del fluido al del cuerpo. Los físicos han formado tablas de los pesos específicos de diferentes sustancias, habiendo tomado por término de comparacion ó por unidad de medida, el *pie cúbico de agua destilada*, considerada en el vacío y á la temperatura de cerca de 4° sobre cero del termómetro centígrado. Estas tablas pueden verse en mi mecánica práctica (pág. 24 y siguientes); y aquí sólo advertirémos que en estos principios están fundados los diferentes esperimentos que se hacen echando en una vasija diferentes líquidos ó fluidos que no pueden mezclarse, y en los cuales no se verifica el equilibrio hasta que los de menor peso específico van quedando encima, como sucede cuando se echa aceite y agua en un vaso, ó en un plato &c.; y si los líquidos son tales que se mezclan como sucede con el vino y el agua, en echando primero el agua y luego el vino, de modo que caiga suavemente por medio de una corteza de pan ó un papel, el vino permanece arriba y el agua abajo. Ademas, en la misma mecánica práctica (§ 44) se manifiesta que un pie cúbico de agua destilada pesa 47 libras.

HIDRODINÁMICA.

372 La *Hidrodinámica trata del movimiento de los fluidos*; y su aplicacion al arte de conducir las aguas y de hacerlas servir para mover las máquinas, se llama *Hidráulica.*

La esperiencia prueba que si se tiene una vasija ABCD (fig. 105) llena de agua ó de cualquier otro fluido, y cuyo fondo BC sea horizontal, y tenga en él una abertura cualquiera que se llama *luz* ú *orificio*, se verifica: 1.° *que todas las moléculas, comprimiéndose mutuamente, tienen una tendencia hácia el orificio*; 2.° *que dichas moléculas descienden con velocidades sensiblemente verticales é iguales, las de una misma capa horizontal, hasta que han llegado á una cierta distancia del fondo*; 3.° *que á pesar de la tendencia de las moléculas hácia el orificio, la superficie del líquido permanece siempre sensiblemente horizontal, al ménos hasta una pequeña distancia del orificio*; 4.° *que lo mismo sucede cuando el fluido sale por una abertura lateral* pq (fig. 106), es decir, que *todas las moléculas descienden al principio verticalmente, despues se dirijen hácia el orificio, y la superficie superior del fluido permanece siempre sensiblemente horizontal.*

373 Esto supuesto, *si un fluido corre por un tubo ó vaso cualquiera que permanece constantemente lleno, las velocidades en diferentes secciones serán inversamente como las áreas de las secciones.*

Porque como el tubo ó el vaso siempre está igualmente lleno, la misma cantidad de fluido pasará por cada seccion en el mismo tiempo; pues de lo contrario quedarian algunos huecos, lo que es contra el supuesto, y no seria posible en manera alguna, á causa de la gran movilidad de las moléculas del fluido. Pero si espresamos por S una seccion cualquiera, y por V la velocidad que tiene el fluido al pasar por dicha seccion, tendrémos que en la unidad de tiempo pasará por dicha seccion una cantidad de fluido espresada por SV; por la misma razon, si llamamos s la superficie de otra seccion cualquiera, y v la velocidad, resultará que en la misma unidad de tiempo pasará por dicha seccion una cantidad de fluido espresada por sv; y como estas cantidades de fluido han de ser iguales, se tendrá $SV=sv$, de donde $V:v::s:S$, que espresa L. Q. D. D.

374 *Cuando un fluido sale por un pequeño orificio en el fondo de una vasija, que permanece constantemente llena, ó en que el nivel del fluido se halla siempre á una altura constante sobre el orificio, la velocidad del fluido que sale será igual á la que un cuerpo pesado adquiriria cayendo libremente de la altura del fluido sobre el orificio.*

Sea ABCD (fig. 107) una vasija que esté llena de un fluido hasta el nivel EL; concibamos que en el fondo BC haya una abertura ú orificio pq, que supondrémos ser muy pequeño en comparacion del fondo BC; y tendrémos que $kpql$ será la columna de fluido que descansa directamente sobre la abertura. Supongamos que $mnqp$ sea la capa de fluido inmediatamente contigua al orificio; espresemos por v la velocidad que un cuerpo pesado adquiriria cayendo libremente de la altura nq; y suponiendo que la capa $mnqp$ caiga como un cuerpo pesado de la altura nq, al llegar el punto n á q habrá adquirido dicha capa por un movimiento acelerado una velocidad v que será (ec. 26 *) igual $\sqrt{2g\times nq}$;

de modo que se tendrá $v=\sqrt{2g\times nq}$ (45).

Y como la fuerza motriz en este caso está reducida á sólo el peso de dicha capa, si la espresamos por f, por K el área del orificio, y por D la densidad del fluido, se tendrá (§ 263 esc.) $f = K \times nq \times D$.

Pero suponiendo que cargue sobre el orificio toda la columna fluida $klqp$, al principio del movimiento, la capa $mnqp$ se ve comprimida é impelida por el peso de toda la columna $klqp$, y ademas principia á obrar en ella la gravedad; de modo que el espacio nq le andará con un movimiento acelerado, y la causa ó fuerza motriz de este movimiento, será el peso de toda la columna $klqp$; de modo que llamando F á dicha fuerza motriz será (§ 263 esc.) $F = K \times lq \times D$; y formando proporcion con esta ecuacion y la anterior, tendrémos $F:f::K \times lq \times D:K \times nq \times D::lq:nq$ (46).

Ahora, espresando por v la velocidad con que se hallará la capa $mnqp$ al llegar el punto n á q, impelida por la presion de la columna $klqp$ y de su propia gravedad, tendrémos que como á igualdad de espacios en los movimientos acelerados, las velocidades (321) están en razon inversa de los tiempos, si llamamos t el tiempo que emplea el punto n en pasar al q, cuando la capa $mnqp$ se mueve á impulso solo de su peso, y T el que emplea dicho punto n en pasar á q, cuando la capa $mnqp$ se mueve por la presion de toda la columna $klqp$ y por la gravedad, tendrémos

$$V:v::t:T, \text{ que da } T = \frac{vt}{V} \text{ (47).}$$

Por otra parte sabemos (319) que en los movimientos acelerados las velocidades están en razon compuesta de las fuerzas motrices y de los tiempos; luego tendrémos tambien $V:v::FT:ft$,

$$\text{que da } Vft = vFT = (\text{ec. } 47)\, vF \times \frac{vt}{V} = \frac{v^2Ft}{V};$$

que quitando el divisor y suprimiendo la t que resulta comun, se tendrá $V^2f = v^2F$;
y poniendo en proporcion será

$$V^2:v^2::F:f::(\text{prop. } 46)\, lq:nq,$$

$$\text{que da } V^2 = \frac{v^2 \times lq}{nq} = (\text{ec. } 45)\frac{2g \times nq \times lq}{nq} = 2g \times lq;$$

y por último si espresamos por h la altura lq del fluido sobre el orificio, se tendrá $V=\sqrt{2g\times lq}=\sqrt{2gh}$; ecuacion que en virtud de lo espuesto (ec. 26 *) demuestra la proposicion.

375 Del mismo modo se demostraria que *si el orificio se halla en uno de los lados, y es muy pequeño en comparacion del fondo, el fluido saldrá con una velocidad debida á la altura del fluido sobre el fondo del vaso, ó mas exactamente, con una velocidad debida á la altura de la superficie del fluido sobre el centro de presion del orificio.*

376 De aquí resulta que *la cantidad ó volúmen de fluido que sale en un tiempo cualquiera, y que se llama el* gasto del orificio, *es igual á un cilindro ó prisma, cuya base es el área del orificio, y su altura el espacio corrido en este tiempo con la velocidad adquirida cayendo de la altura del fluido.* De manera que si espresamos por Q dicho gasto, y por E el espacio corrido con dicha velocidad, tendrémos que pues K es el área del orificio, será $Q=KE$;
pero permaneciendo constantemente lleno el vaso, sale siempre el fluido por el orificio con la misma velocidad; luego en cada unidad de tiempo saldrá una misma cantidad de fluido; y como V es la velocidad ó el espacio andado en la unidad de tiempo, respecto á que en cada unidad ha de correr un espacio igual, en el número T de unidades saldrá VT;
luego si sustituimos VT en vez de E en el valor de Q, será $Q=KVT$;
y poniendo en vez de V su valor $\sqrt{2gh}$, será por último $Q=KT\sqrt{2gh}$ (48).

Ecuacion por cuyo medio conocerémos una de las cuatro cantidades Q, K, h ó T, cuando se nos dén conocidas las otras tres; pues la g espresa la gravedad que es dada para cada paraje de la tierra, y en Madrid (326) es 35,1 pies.

377 Hemos dicho (372, 2.°) que todas las moléculas de una misma capa horizontal de fluido des-

cienden con velocidades sensiblemente verticales é iguales, hasta que han llegado á una cierta distancia del fondo; porque al llegar cerca del orificio las moléculas fluidas, toman direcciones converjentes hácia el orificio, lo cual produce una diminucion en la magnitud de la vena ó chorro, cuyo fenómeno se caracteriza con el nombre de *contraccion de la vena fluida*, y se verifica cualquiera que sea la posicion del orificio.

La esperiencia prueba que para que los resultados teóricos calculados por la (ec. 48) concuerden con los que dan los esperimentos, es necesario multiplicar el segundo miembro por 0,62, cuando el orificio está hecho en paredes delgadas; y por 0,81, cuando se adapta al orificio un tubo; de manera que se tiene $Q=0{,}62KT\sqrt{2gh}$ para el primer caso, y $Q=0{,}81KT\sqrt{2gh}$ para cuando se adapta al orificio un tubo adicional.

378 Cuando el vaso no permanece constantemente lleno, esto es, que va disminuyendo la altura del nivel del fluido sobre el orificio, á proporcion que va saliendo el fluido, entónces lo que mas nos interesa conocer es el tiempo que tardará la vasija en vaciarse; y para determinarle, supongamos que en la unidad de tiempo salga del vaso una cantidad de fluido espresada por *pqrs* (fig. 108), y tendrémos que *ps* espresará la velocidad con que sale, pues *ps* es el espacio que anda la superficie *pq* en la unidad de tiempo. En este mismo tiempo habrá bajado la superficie AD un cierto espacio que no conocemos, y que por lo mismo le espresarémos por x; y como este espacio le anda AD en la unidad de tiempo, representará la velocidad con que principia á bajar la superficie AD. Ahora, la cantidad de líquido *pqrs* ha de ser igual á la que falte del vaso; y como la superficie del fluido permanece siempre horizontal (372, 3.º), dicha cantidad de líquido estará representada, si la vasija es cilíndrica ó prismática,

por un pequeño cilindro ó prisma, que en la parte superior quedará vacío, cuya base será AD y x su altura; luego si A representa el área de la superficie superior AD, dicha cantidad de líquido estará espresada por Ax, y se tendrá $Ax=pqrs$;
ó espresando por K la superficie pq del orificio, y por v la altura ps, que es la velocidad con que el fluido principió á salir, será $Ax=Kv$, que da $x=\frac{Kv}{A}$;
y como x es tambien una velocidad, la espresarémos por V, y será $V=\frac{Kv}{A}$.

379 Pero la velocidad v con que principia á salir el fluido, es (ec. 45) $\sqrt{2g\times ha}$;
luego será $V=\frac{K\times\sqrt{2g\times ha}}{A}$ (49).

Y como al paso que se vacía el vaso disminuye la altura ha, resulta que irá disminuyendo v; luego el movimiento será uniformemente retardado; y como en este movimiento (ec. 25) el espacio $E=\frac{1}{2}Vt$, si queremos averiguar el tiempo en que la superficie AD llegará al fondo pq, que es cuando se habrá acabado de vaciar, supondrémos $E=ha$, lo que dará

$$ha=\tfrac{1}{2}Vt=(\text{ec. }49)\frac{t\times K\sqrt{2g\times ha}}{2A};$$

y despejando t será $t=\frac{2A\times ha}{K\sqrt{2g\times ha}}=\frac{2A\sqrt{ha}}{K\sqrt{2g}}$.

380 Para que esta fórmula concuerde con los resultados obtenidos en la práctica, se debe contar con el efecto de la contraccion de la vena fluida, y suponer que K espresa la superficie efectiva del orificio multiplicada por 0,62 cuando está en paredes delgadas, y por 0,81 cuando al orificio se le adapta un tubo.

AFINITOLOGIA.

381 *Afinitologia* es la ciencia que trata de aquella propiedad que tienen los cuerpos, en virtud de la cual sus moléculas se dirijen las unas á unirse con las otras.

Los antiguos reconocian como elementos al *aire*, *tierra*, *fuego* y *agua*, porque no los podian descomponer en otras sustancias mas simples; y suponian que de la combinacion de estos cuatro principios resultaban todos los cuerpos de la naturaleza. Pero los químicos modernos han demostrado que ninguna de estas sustancias es simple; en efecto, el aire se compone de otras dos que se llaman *oxíjeno* y *azoe*, en una proporcion tal que en 100 partes de aire en volúmen hay 21 de oxíjeno y 79 de azoe tambien en volúmen. Lo que comunmente se llama *tierra*, es bien conocido de todos que puede ser de diversa naturaleza, pues en general es una mezcla de varias sustancias, como son la cal, la arcilla &c. El *fuego* se compone de una sustancia, á la cual se le debe la propiedad de hacer visibles los objetos, y que se llama *lumínico*: y de otra que tiene la propiedad de escitar en nosotros la sensacion que llamamos *calor*, y por lo mismo al ajente que le produce se le caracteriza con el nombre de *calórico*. El *agua* se compone de dos sustancias que son *oxíjeno* é *hidrójeno*, en una proporcion tal que el volúmen del hidrójeno es doble del del oxíjeno, y en 100 partes de agua en peso hay 88 de oxíjeno y 12 de hidrójeno tambien en peso.

382 Los químicos consideran como *cuerpos simples*, *elementos ó principios elementales*, á aquellas sustancias que por los conocimientos actuales de la ciencia no se pueden descomponer; y en el dia el número de estas sustancias, no comprendiendo el radical presumido del ácido *fluórico*, que se caracteriza con el nombre de *fluorina ó tore*, asciende á 52. De

estas hay cuatro que son *imponderables*, es decir, que no se ha podido apreciar su peso hasta el dia, ni aun con las balanzas mas exactas, y son las siguientes: el *calórico*, el *fluido lumínico* ó *luminoso*; el fluido *eléctrico*, que es el que produce los rayos en las tempestades; y el fluido *magnético*, que es el que produce en lo que se llama *piedra iman*, la propiedad de dirijirse por un lado hácia el norte.

383 Los otros 48 cuerpos todos son ponderables; de estos hay 9 que no son metálicos, á saber: *oxíjeno*, *hidrójeno*, *bore*, *carbono*, *fósforo*, *azufre*, *iode*, *clore* y *azoe*. Los otros 39 son sustancias metálicas, es decir, que son opacas, muy brillantes, capaces de recibir un hermoso pulimento, buenos conductores del calórico y de la electricidad, susceptibles de combinarse con el oxíjeno, y de convertirse en unos óxides deleznables y sin lustre; puestos por el órden de afinidad que tienen con el oxíjeno, guardan próximamente este órden: *silicio*, *circonio*, *torinio*, *aluminio*, *itrio*, *glucinio*, *magnesio*, *calcio*, *estroncio*, *bario*, *sodio*, *potasio*, *manganesio*, *zinc*, *hierro*, *estaño*, *arsénico*, *molibdeno*, *cromo*, *tunsteno*, *colombio*, *antimonio*, *uranio*, *cerio*, *cobalto*, *titanio*, *bismuto*, *cobre*, *telurio*, *niquel*, *plomo*, *mercurio*, *osmio*, *plata*, *rodio*, *paladio*, *oro*, *platina* y el *iridio* (*).

384 Todos los demas cuerpos de la naturaleza constan de algunas de estas 52 sustancias simples, y

---

(*) *Estando ya imprimiéndose esta obra, D. Juan Mieg, célebre profesor de Física y Química en el Real Estudio de Palacio, bájo la direccion del Serenísimo Señor Infante D. Cárlos, ha tenido la bondad de manifestarme, que el químico Berzelius ha encontrado últimamente dos metales que se han caracterizado con los nombres de* selenio *y* litinio. *Igualmente he sabido que D. Donato García, profesor acreditado de Mineralogia en el Real Museo de ciencias, en las lecciones de este año ha dado tambien á conocer la existencia de dichos metales.*

por lo mismo se llaman *compuestos*. Si sólo constan de dos sustancias simples, se llaman *binarios*; si de tres, *ternarios*; y así sucesivamente. Las sustancias simples que entran en la composicion de un cuerpo, se dice que son sus *principios constitutivos*; y así, pues que el agua se compone de oxíjeno y de hidrójeno, resulta que estos son sus principios constitutivos; no se debe confundir lo que se entiende por principios constitutivos, con lo que se llama *molécula ó parte integrante* de un cuerpo, que es una parte del mismo cuerpo que tiene la misma naturaleza que él. Así, separando de un vaso que tiene agua una gota de ella, esta gota sea grande, sea pequeña, goza de las mismas propiedades que la demas agua que quedó en el vaso, y se compone de los mismos principios constitutivos, á saber, de oxíjeno y de hidrójeno, y en las mismas proporciones que el agua del mismo vaso; y por lo mismo se puede considerar como su molécula ó parte integrante. Pero cada uno de los principios constitutivos tiene propiedades que le son peculiares, que no son las del uno las mismas que las del otro, y son muy diferentes de las del compuesto *agua*. Así es, que tanto el oxíjeno como el hidrójeno son fluidos, y el agua es líquida; el oxíjeno es bueno para la respiracion, y el hidrójeno no se puede respirar en él, porque mata á los animales que le respiran; el oxíjeno es 15 veces mas pesado que el hidrójeno, y 706 veces ménos pesado que el agua.

385 Á la causa, de cualquier naturaleza que sea, por medio de la cual se combinan dos sustancias simples cuando se ponen en contacto, se le caracteriza con el nombre de *afinidad*; y se llama *cohesion* á la fuerza con que están unidas entre sí las moléculas integrantes.

Á lo que hemos llamado afinidad se le ha dado tambien el nombre de *atraccion molecular*; porque se ha notado una cierta analogía en el modo de obrar entre esta fuerza y la *atraccion celeste ó gravitacion universal*; pero con la diferencia de que la afinidad obra á distancias insensibles, ó sólo poniendo en contacto las sustancias, siendo así que la atraccion celeste se verifica á distancias muy considerables, y entre masas muy grandes.

386 Para determinar con exactitud las leyes de la afinidad entre las sustancias simples, se necesita atender á siete circunstancias: 1.ª *á la cantidad relativa de cada cuerpo de los que se ponen en contacto*; 2.ª *á si estos cuerpos son simples ó están combinados*; 3.ª *á la cohesion que tienen entre sí*; 4.ª *al calor á que se hallan espuestos*; 5.ª *á la cantidad y calidad del fluido eléctrico que tengan*; 6.ª *á su peso específico*; y 7.ª *á la presion que sufren*; pues segun varíe alguna ó algunas de estas circunstancias, variarán las leyes de la afinidad.

387 Los cuerpos nos ofrecen dos especies distintas de combinaciones; cuando tienen mucha afinidad no se combinan, sino en un cierto número de proporciones; y cuando tienen poca afinidad, parece que pueden combinarse de muchas maneras. En el primer caso, las propiedades del compuesto son muy diferentes de las que tienen las sustancias componentes; y en el segundo no se diferencian mucho; de este último género de combinaciones es la que resulta de echar azúcar ó sal en el agua; pues en el compuesto notamos las propiedades del agua y las de la sal ó azúcar; del primer género de combinaciones es la que resulta quemando en el aire libre el azufre, que es un cuerpo insípido é inodoro, pues se combina con el oxíjeno del aire y forma el ácido sulfúrico, que es un cuerpo cuyo sabor y olor son sumamente fuertes.

388 Se dice en todos los casos que un cuerpo está *saturado* de otro, cuando está combinado con toda la cantidad posible de él.

El determinar con exactitud la medida de la afinidad de las diversas sustancias, es sumamente difícil. Sin embargo, ya se ha dado un paso bastante ventajoso. Para formarnos idea de él debemos observar que los cuerpos simples *bore*, *carbono*, *fósforo*, *azufre*, *azoe é iode*, combinados en determinadas porciones con el oxíjeno, forman sustancias binarias que se llaman *ácidos*, y que tienen la propiedad de enrojecer los colores azules vejetales, tal como el de violeta; ciertas combinaciones del potasio y sodio con el oxíjeno, que se conocen con el nombre de potasa y de sosa, que se llaman en general *álcalis* ó *sustancias alcalinas*, tienen la propiedad de enverdecer los colores azules de los vejetales, como el de la *violeta*; combinándolos en ciertas proporciones resulta un compuesto que no muda ni el color del tornasol, ni el de la violeta.

En este estado se dice que el compuesto está formado de cantidades de ácido y de álcali, tales que se *neutralizan* ó se *saturan* recíprocamente; y como esta saturacion es un efecto inmediato de la afinidad de estos cuerpos, se puede considerar como la medida de esta misma afinidad; por lo que se puede decir que *las afinidades de los álcalis con los ácidos son proporcionales á las cantidades en que se necesitan combinar para saturarse*. De manera que si una parte de un álcali *A* necesita para su saturacion una parte del ácido *B*, dos partes del ácido *C* y tres del ácido *D*, las afinidades del álcali para con los ácidos *B*, *C*, *D*, guardarán la razon de 1:2:3.

389 En los mas de los casos el estado actual de la ciencia no se estiende á mas que á determinar cuál es, de dos, tres ó mas cuerpos, el que tiene mas afinidad para con el otro: para lo cual se emplean diferentes medios.

Yo creo que se deberia tener en consideracion ademas de todas las circunstancias indicadas (386), el tiempo que deben estar en contacto las sustancias para que se efectúe la combinacion.

CRISTALOGRAFÍA.

390 Si examinamos con atencion los cuerpos que nos rodean, hallarémos que se pueden dividir en dos

grandes clases: los unos gozan de *vida*, que consiste en nacer, crecer, tomar diferentes formas, reproducirse por órganos destinados para la generacion, dando oríjen á nuevos individuos de su misma especie, y á cierta época desaparecer, como son los vejetales y los animales, y se caracterizan con el nombre general de cuerpos *orgánicos*; los otros privados de todas las circunstancias que constituyen la vida, se caracterizan con el nombre de *cuerpos inorgánicos ó minerales*: tales son el aire, el agua, las piedras, los metales, &c.

391 Una piedra tal como el mármol, un metal como el hierro, una sal como el alumbre, un líquido como el agua, un fluido como el aire, y en una palabra todos los cuerpos que no se ven nacer, que no viven, y que no se reproducen, se forman y crecen de una manera enteramente diferente de aquella con que lo ejecutan los vejetales y animales.

Un mineral se forma por la reunion de moléculas semejantes entre sí, que componen una masa, y no sufren ninguna mudanza en su agregacion; y si aumenta de volúmen, se observa que nuevas capas se aplican á su superficie y le cubren por todas partes; y por esto se dice que crecen por *yustaposicion* ó *agregacion*.

392 Los vejetales y los animales crecen de muy diverso modo, pues las sustancias que concurren para su crecimiento, no se les parecen por lo regular en nada. Estas materias trasportadas por ellos en su interior ó puestas solamente en contacto con ellos, son recibidas en totalidad ó en parte, por conductos ú órganos que tienen la propiedad de modificarlas y de distribuirlas en todas las partes del animal ó vejetal, de *asimilarlas* á estas partes, de depositarlas allí y de concurrir así á su crecimiento; de manera que todo lo que contribuye para aumentar el volúmen de estos seres, proviene de su interior, y este modo de crecer se dice que es por *intussuscepcion*.

393 Los cuerpos inorgánicos simples, es decir,

aquellos que no resultan de la agregacion de muchas especies diferentes, están formados de moléculas ó partes infinitamente pequeñas, todas semejantes á la masa que componen; así es, que si en una barra de oro puro se desprende una partícula, de cualquer parte que se la tome, será en un todo semejante á la masa de oro de que formaba parte. Esta semejanza entre el todo y sus partes, no se encuentra en los animales ni en los vejetales. Las hojas no representan el árbol en pequeño, siendo así que un cubo de sal representa en pequeño una masa cúbica de la misma sal; por lo que se nota que en los cuerpos orgánicos hay *individuos*, es decir, hay seres compuestos de moléculas diferentes, que no se pueden dividir sin ser destruidos, miéntras que en los minerales no se ven individuos, sino solamente masas mas ó ménos gruesas, que pueden ser divididas casi al infinito en pequeñas partes similares, que tiene cada una las mismas propiedades que la masa de que han sido separadas.

394 Los minerales, y muy probablemente todas las sustancias inorgánicas, cualquiera que sea su oríjen (*), gozan de otra propiedad muy notable que es la de *cristalizar*, es decir, de tomar una forma poliédrica de ángulos constantes, cuando las circunstancias lo permiten; y la ciencia que trata de manifestar las leyes con que la naturaleza efectúa la cristalizacion, se llama *cristalografía*, ó segun algunos *cristalologia*.

395 Los cristales, que son los productos de la cristalizacion, son unos cuerpos terminados naturalmente por un cierto número de facetas planas y brillantes, como si hubiesen sido talladas y pulimentadas por un lapidario. Estas facetas forman entre sí ángulos, que son constantemente los mismos en los diversos pedazos de una misma variedad de cristal.

Para que la cristalizacion se pueda verificar, es

(*) *La esperma de ballena, que es de oríjen animal, y el alcanfor, la azúcar, &c. que son producciones vejetales, son susceptibles de cristalizar.*

necesario que los cuerpos estén reducidos á sus moléculas integrantes; y que estas moléculas estén bastante aproximadas, para que su atraccion recíproca sobrepuje á la atraccion que ejerce sobre ellas el cuerpo que las tiene divididas.

La separacion de las moléculas sólo puede ser producida por la accion del calórico, ó por la disolucion de un sólido, sea en un líquido, sea en un fluido elástico.

396 Cuando la atraccion de composicion (es decir, la que hay entre dos cuerpos de naturaleza diferente, como la que un líquido ejerce sobre las moléculas integrantes de un cuerpo, y en virtud del cual las tiene separadas), viene á cesar ó disminuir suficientemente por una causa cualquiera, las moléculas integrantes abandonadas á ellas mismas, se aproximan, se reunen simétricamente, y forman un cuerpo regular, que es lo que se llama *cristal*.

Así, cuando se pone sal ó azúcar en el agua, este líquido separa las moléculas integrantes de estas sustancias; se combina con ellas, y las hace invisibles formando un todo homojéneo, que es lo que se llama una *disolucion*.

Miéntras que el agua por su atraccion de composicion permanezca unida á estos cuerpos, sus moléculas permanecen separadas; pero si se disminuye por una fuerza cualquiera la accion química del agua sobre estas sustancias, por ejemplo, si se hace evaporar el agua, á medida que las moléculas integrantes de la sal ó de la azúcar, se aproximan, obedecen á su atraccion de agregacion ó fuerza de cohesion, se reunen simétricamente, y producen cristales de sal ó de azúcar.

397 De todo esto se deduce 1.º que la atraccion de composicion, ejercida por un líquido ó por un fluido sobre las moléculas de un cuerpo que está suspendido en él, se opone á la cristalizacion de este cuerpo; y que para que la cristalizacion llegue á verificarse, es indispensable que esta atraccion cese,

ó á lo ménos que disminuya suficientemente.

2.° Que las formas poliédricas y constantes de los cristales, se deben á la colocacion simétrica de sus moléculas integrantes: las cuales parece que tienen ellas mismas una forma poliédrica y constante. Ademas, para que la cristalizacion sea mas regular, se necesita que la masa del disolvente sea muy superior á la del cuerpo disuelto, y que se halle en reposo; pues si faltan estas condiciones no se obtiene sino una cristalizacion confusa.

398 En la cristalizacion se nota: 1.° que en el momento en que se efectúa, se desprende un calor muy sensible, debido á la aproximacion de las moléculas del cuerpo que cristaliza.

2.° Que un movimiento brusco, ó la presencia de un cuerpo estraño, decide la cristalizacion, y hace precipitar algunas veces un gran número de cristales.

3.° Que la luz es favorable á la cristalizacion, y que los cristales se depositan en mucho mayor número en la parte de los vasos que se encuentra opuesta á ella.

4.° Que los ángulos y las aristas parece que se forman los primeros.

5.° Que los cristales que se hallan en el fondo de un vaso, aumentan mas en el sentido horizontal que en el vertical.

6.° Que poniendo en un vaso largo y estrecho cristales á diferentes alturas en medio de un agua saturada, los cristales del fondo crecen mas velozmente que los de la superficie; y que hay un momento en que los del fondo crecen miéntras que los de la superficie se disuelven.

7.° Que los cuerpos simplemente fundidos mudan de volúmen, no sólo al cristalizar, sino aun algunos instantes ántes de que se verifique este fenómeno; la mayor parte, el mercurio entre otros, disminuyen de volúmen; el agua al contrario se dilata, no sólo al helarse, sino aun un poco ántes del momento de su conjelacion: lo que hace que el hielo es ménos pesado que el agua, á igualdad de volúmen.

399 Examinando con alguna atencion un gran número de cristales, se observa que una misma sustancia es susceptible de presentarse bájo formas muy diferentes, que parecen aun algunas veces no tener ninguna relacion entre sí.

Sin embargo, parece que las moléculas integrantes de un mismo cuerpo son todas de la misma forma, y por consiguiente que los sólidos variados que producen por su reunion, están todos compuestos de pequeños cristales semejantes á la molécula integrante de este cuerpo.

El gran paso que se ha dado en estos últimos tiempos en la cristalografía, es el determinar el modo con que se colocan las moléculas semejantes para formar cristales tan diferentes; cómo se disponen, por ejemplo, las moléculas romboidales del carbonate de cal ó espato calizo para producir ya romboides, ya prismas, &c.; y las moléculas cúbicas del sulfureto de hierro ó pirita marcial para producir cubos, octaedros, icosaedros &c.

400 No pudiéndose hacer *á priori* esta indagacion, se ha seguido el rumbo opuesto; y se ha observado que la mayor parte de los cristales se pueden dividir mecánicamente en el sentido de sus láminas. Esta division regular se efectúa ó por medio de la percusion, ó con el auxilio de un instrumento de acero que se introduce entre las láminas de los cristales, ó esponiéndolos á un grado de calor muy fuerte y echándolos despues repentinamente en agua muy fria, se consiguen en él ciertas grietas que facilitan la separacion de las láminas. Las caras que se obtienen de esta manera gozan de un pulimento natural, siendo así que por la fractura ordinaria se obtienen superficies irregulares y escabrosas.

Cuando las nuevas caras, que se descubren por esta division, no son paralelas á las del cristal sobre que se obra, se obtiene, continuándola hasta el punto necesario, otro cristal que es divisible paralelamente á todas las nuevas caras producidas por este medio, al cual se le llama el *núcleo* ó *la forma primitiva* de la especie de mineral á que pertenece. Y por las observaciones mas ingeniosas se ha llegado á descubrir que la figura de la forma primitiva ó de este núcleo es siempre una de las seis siguientes. Primero, el paralelepípedo; segundo, el prisma exaedro regular; tercero, el dodecaedro romboidal; cuarto, el octaedro; quinto, el tetraedro regular; y sesto, el dodecaedro bipiramidal ó terminado en dos pirámides.

401 Para cada una de estas formas hay una teoría matemática muy ingeniosa; y por los ángulos que forman los planos entre sí y demas circunstancias, se llega á determinar en un cristal cualquiera, cuál es la forma de su núcleo, la de su molécula integrante (que puede ser ó tetraedro regular, ó prisma triangular ó paralelepípedo) y el modo con que se ha formado el cristal.

Para la medicion de los ángulos que forman las caras de un cristal, se hace uso del instrumento (fig. 109) que se llama *goniómetro*, que quiere decir *medidor de ángulos*.

Consiste en un semicírculo graduado MTN, que tiene las dos piezas CB, CG, entre las cuales se coloca el ángulo del cristal que se quiere averiguar; y por medio de la pieza CA se ve en el limbo del instrumento el número de grados correspondiente al ángulo NCA, igual con el GCB, por opuesto al vértice, y por consiguiente igual con el que forman las caras del cristal á que se han aplicado las piezas CB, CG.

402 Como los cristales suelen estar en la matriz ó ganga en que se crian, y no conviene aislarlos, este instrumento tiene la disposicion conveniente para que las partes CG, CB, puedan acortarse cuando se necesite por medio de las correderas *Cn*, *Cr*; y ademas para que el cuadrante MT se pueda doblar hácia atras por medio de la pieza OC. Este instrumento ha recibido mejoras por Mr. Gillet; pero Mr. Charles hace uso en el dia para medir los ángulos de los cristales de un goniómetro fundado en la reflexion de la luz,

que es mas ventajoso, por cuanto tiene la disposicion necesaria para repetir los ángulos.

CAPILAROLOGIA.

403 Los fenómenos mas interesantes de la Física, son aquellos que nos dan algunas luces sobre la naturaleza de los cuerpos, y sobre las acciones recíprocas de sus partículas. Vamos á considerar ahora una clase de fenómenos de este género muy estensa y variada, y que es tanto mas importante cuanto ofrece la ventaja de poder ser sometida á un cálculo rigoroso.

Si se suspenden horizontalmente placas de vidrio, mármol, metal, &c. á uno de los platillos de una balanza, y despues de haberlos puesto en equilibrio con pesos, se les hace tocar á la superficie de un líquido, se nota que se adhieren á él con una cierta fuerza; porque ya no se pueden separar sino añadiendo mas peso en el otro platillo. Esta adhesion no es producida por la presion del aire, porque se verifica del mismo modo en el vacío; luego proviene de que las mismas moléculas del cuerpo sólido se unen á las partículas del líquido en virtud de una fuerza de afinidad. Pero tambien es notable, que se ejerce una accion de este género entre las partículas mismas del líquido, como se verifica por ejemplo en el caso de un disco de vidrio puesto sobre el agua ó sobre el alcool, que al retirarle lleva consígo una pequeña capa líquida que permanece adherida á él. Luego hablando con propiedad el cuerpo sólido no es el que se ha desprendido del líquido, sino que esta pequeña capa es la que se ha separado de las moléculas líquidas que estaban debajo de ella. La fuerza que es necesario emplear para desprenderla, es incomparablemente mas considerable que su propio peso, y por consiguiente este esceso de fuerza prueba necesariamente la existencia de una adhesion de la pequeña capa al resto de la masa líquida, é independiente de la pesantez.

404 En virtud de las nociones que hemos adqui-

rido ya sobre las atracciones recíprocas de las moléculas de los cuerpos, debemos presentir que la fuerza que se ejerce aquí es de la misma naturaleza que estas atracciones; y que no tendrá efecto sensible sino á distancias muy pequeñas, lo cual está demostrado por la esperiencia.

Cuando se sumerjen tubos de vidrio en el agua ó en el alcool, se observa que en ellos sube el líquido á mayor altura que se halla su nivel esterior; y estos fenómenos son producidos por la misma causa, aunque son diferentes en apariencia. Pero si el líquido por su naturaleza no es capaz de mojar el tubo, como se verifica cuando se sumerjen tubos de vidrio húmedos en el mercurio, ó tubos engrasados en el agua, se nota que el líquido se deprime en lo interior y se halla debajo del nivel esterior en vez de elevarse; y esto siempre tanto mas cuanto el tubo es mas estrecho. Tales son los fenómenos que los Físicos han llamado *capilares*, para espresar que el diámetro de los tubos que servian para producirlos, debia aproximarse á la finura de los cabellos; y á la ciencia que trata de manifestar todo lo que tiene relacion con ellos, se le caracteriza con el nombre de *Capilarologia*.

Para que el líquido suba en el tubo capilar, es preciso que la atraccion de la materia del tubo con el líquido, sea mayor que la que tienen entre sí las partículas del mismo líquido; luego si llamamos Q á la primera y q á la segunda, tendrémos que $Q-q$ espresará el esceso de la atraccion de la materia del tubo con el líquido, sobre la de las partes del líquido entre sí; este esceso estará medido por el peso del líquido que haya en el tubo sobre la línea del nivel esterior; y como si llamamos V el volúmen del líquido, D su densidad, g la fuerza de la gravedad, este peso estará representado (263 esc.) por DgV, tendrémos $DgV=Q-q$ (50).

405 Para determinar el volúmen de esta columna de líquido, observarémos que la parte superior del líquido en el tubo no es horizontal, sino que es cón-

cava ó convexa segun la naturaleza de cada líquido; en el agua y espíritu de vino es cóncava, y en el mercurio convexa; y esta parte cóncava es por lo regular una semiesfera como representa la (fig. 110), en la que NN es el nivel, y en S está representada la concavidad que presenta la parte superior, pues suponemos que el agua es el líquido de que se trata.

406 Entendido esto, para determinar el volúmen V del líquido, espresemos por a la altura SH, contada desde la línea de nivel hasta el punto mas bajo de la concavidad; y tendrémos que el volúmen del líquido se compondrá de un cilindro cuya base sea la del tubo y la altura la a, que llamando r el radio del tubo tendrá por espresion (I. 414 cor.) $\pi r^2 a$. La parte del líquido que está superior al punto S es igual (I. 435 esc. 1.°) á $\frac{\pi r^3}{3}$;

y tendrémos que $V = \pi r^2 a + \frac{\pi r^3}{3}$;

y sustituyendo este valor en la (ec. 50) será

$$gD\left(\pi r^2 a + \frac{\pi r^3}{3}\right) = Q - q.$$

407 Ahora, puesto que la accion de la atraccion que las paredes del tubo ejercen sobre el líquido no es sensible sino á distancias imperceptibles, se puede hacer abstraccion de la curvatura de estas paredes, y considerarlas como desenvueltas en un plano.

Entónces la fuerza Q será proporcional al ancho de este plano, ó lo que viene á ser lo mismo, al contorno de la base interior del tubo. Luego si espresamos por C este contorno, que es la circunferencia de la base del tubo, se tendrá $Q = mC$, siendo m un coeficiente constante, que podrá representar la intensidad de la atraccion de la materia del primer tubo sobre el fluido, en el caso en que las atracciones de los diferentes cuerpos fuesen espresadas por la misma funcion de la distancia, pero que en todos los casos espresa una cantidad que depende de la atraccion de la materia del tubo, y es independiente de su figura y de su tamaño. Del mismo modo se tendrá $q=nC$, espresando n con relacion á la atraccion de las partes del fluido entre sí, lo que acabamos de espresar por m con relacion á la atraccion del tubo sobre el fluido; luego se tendrá

$$gD\left(\pi r^2a+\frac{\pi r^3}{3}\right)=mC-nC=(m-n)C.$$

Y como C es la circunferencia de la base del tubo tendrá (I. 347) por espresion $2\pi r$; luego será

$$gD\left(\pi r^2a+\frac{\pi r^3}{3}\right)=(m-n)2\pi r;$$

que dividiendo por $gD\pi r$, da $r\left(a+\frac{r}{3}\right)=\frac{2(m-n)}{gD}$ (51).

408 Ahora, si comparamos entre sí dos tubos de la misma naturaleza sumerjidos en un mismo fluido, á una temperatura constante, las cantidades m, n, g y D, serán las mismas para estos tubos, y el segundo miembro (ec. 51) será constante. Representándole por A, será $r\left(a+\frac{r}{3}\right)=A$, de donde $a+\frac{r}{3}=\frac{A}{r}$.

409 Si el tubo es sumamente estrecho, la altura a de la columna líquida será muy grande en comparacion del radio de su base. En este caso, á ménos que los esperimentos no sean muy precisos, la pequeña cantidad $\frac{1}{3}r$ se confundirá con los errores de las observaciones, y se hallará que $a=\frac{A}{r}$;

que nos dice que *las alturas medias* a *son recíprocamente proporcionales á los diámetros interiores de los tubos*. Propiedad que los físicos habian ya anunciado hace mucho tiempo.

PIROLOGIA.

410 *Pirología* es la ciencia que trata del *fuego* ó del *calórico*, y de las modificaciones que por él sufren los cuerpos.

Si fijamos nuestra atencion sobre el conjunto de fenómenos físicos y químicos que se nos presentan, echarémos de ver que el ajente mas poderoso, el mas activo y el que se emplea mas generalmente en la naturaleza y en las artes, es el fuego. Nosotros sentimos á cada instante los efectos que produce sobre nuestros órganos, sea cuando los quema por un ardor demasiado grande, sea cuando los calienta suavemente en los rigores del invierno. Él calienta todas las sustancias; y sino las abrasa, las funde, las hace líquidas, las hace enrojecer, hervir, y las obliga á convertirse en vapores. Aun cuando parece que obra con ménos enerjía, él estiende las dimensiones de los cuerpos, muda su volúmen, y los modifica sin cesar en sus propiedades mas ocultas.

411 Aunque la palabra *fuego* lleva consígo la idea de *llama* y de *luz*, sin embargo, no es difícil concebir que todos los fenómenos que acabamos de describir, se pueden producir sin el concurso de estas dos circunstancias; porque si se funde plomo en una vasija de hierro por medio del fuego, este plomo que no estará inflamado y que no arrojará luz, vendrá á ser capaz de calentar otros cuerpos; hará fundir el hielo, el azufre y el estaño; inflamará la cera, hará hervir el agua y todos los otros líquidos, y los convertirá en vapor. Y pues que en este caso obra sobre estos cuerpos sin llama ni luz, podemos por medio de la abstraccion separar estas dos modificaciones del principio, cualquiera que él sea, que produce todos estos efectos; y para fijar invariablemente esta separacion, para designar aisladamente este principio, se le da el nombre particular de *calórico*.

412 Esto nos conduce á observar que la palabra

calor, en la cual se comprende ordinariamente la idea vaga de una causa, no espresa realmente sino la sensacion que el calórico produce sobre nuestros órganos, y por estension la que produce sobre órganos mas resistentes, ó aun sobre cuerpos no organizados.

413 Todos los cuerpos que se calientan sin mudar su naturaleza, se estienden en todos los sentidos, de manera que ocupan un volúmen mas considerable que el que ocupaban ántes; esta modificacion de los cuerpos se llama *dilatacion*, y todos los cuerpos, cualquiera que sea su naturaleza, son susceptibles de este efecto.

414 La dilatacion de los cuerpos sólidos, y con particularidad la de los metales, es muy pequeña sino están próximos al estado en que se funden. La dilatacion de los líquidos y fluidos es mucho mas considerable que la de los cuerpos sólidos en las mismas circunstancias. Midiendo con cuidado las dimensiones de los cuerpos, despues de haberlos espuesto á diversas temperaturas, se halla generalmente que si el fuego no ha alterado su naturaleza, ellos vuelven exactamente á las mismas dimensiones que tenian al principio, cualquiera que sea el número de veces que se les esponga á estas mudanzas alternativas. La arcilla y algunas otras sustancias, parecen al contrario que se contraen cuando se esponen al fuego despues de haberlas humedecido; pero entónces ellas no vuelven á tomar sus primeras dimensiones; lo que manifiesta que su contraccion es el efecto de secarse, ó de una combinacion mas íntima de sus elementos, y no de un efecto pasajero del calor.

415 Esta propiedad que todos los cuerpos poseen de dilatarse por efecto del calor, y de volver á las mismas dimensiones cuando se hallan en las mismas circunstancias, ofrece un medio muy simple y exacto para medir el calor, y es la base en que se funda la construccion de los instrumentos que sirven para este efecto, y que se llaman *termómetros*.

Estos se hacen de aire, de espíritu de vino, de mercurio, y de metales. El de aire fue el primero que se inventó por *Drebel*; pero fue el mas inexacto; los de espíritu de vino son mas á propósito para las temperaturas bajas, porque tarda mucho en helarse; los de mercurio son los mas adecuados para las temperaturas elevadas, porque el mercurio tarda mucho en hervir; más para los grados muy elevados de calor, como los que necesitan los metales para fundirse, se hace uso del de *metal con arcilla*.

Todo el artificio de un termómetro de espíritu de vino ó de mercurio, se reduce despues de tener el líquido dentro de un tubo con ciertas preparaciones, á introducirle en el hielo al derretirse, y á señalar o en este punto para la division que se llama de *Deluc* ó de *Reaumur*, y para el *centígrado*: y para la de *Fahrehneit* 32 en el mismo punto. Despues se coloca el mismo instrumento en el agua hirviendo, y se señala el punto á que sube el líquido; si la distancia ó espacio comprendido entre los dos puntos del hielo y del agua hirviendo, se divide en 80 partes iguales, que se llaman *grados*, se tiene la division de que usó *Reaumur*, y que se conserva todavía con su nombre; dividiendo esta distancia en 100 partes iguales, se tiene la division del termómetro *centígrado*; y dividiendo este espacio en 180 partes iguales, se tiene la division denominada de *Fahrehneit*. En todas las divisiones se señalan por la parte de abajo del hielo partes iguales, y en la division 32 por abajo del hielo se pone o en la de *Fahrehneit*, porque este punto fijo corresponde al frio producido por una mezcla de sal marina y nieve. El termómetro metálico de *Wedgwood* se reduce á una plancha de metal que tiene una canal cuya base es trapecial: se pone un cilindro de arcilla dentro de un crisol en el horno ó paraje, cuya temperatura elevada se quiere observar; se introduce por el paraje mas ancho de la canal; y como segun haya sufrido mas calor se habrá contraido mas, bajará mas en la canal y señalará mayor grado de calor. Todas estas dimensiones se reducen con facilidad las unas á las otras, observando que *cinco grados del termómetro centígrado equivalen á cuatro del de Reaumur, y á nueve del de Fahrehneit.* En el *pirómetro* de *Wedgwood* cada grado equivale á 72 del termómetro centígrado, y el 0 de dicho pirómetro corresponde al grado 598 del centígrado.

416 Se debe poner el mayor cuidado en la preparacion y graduacion de los termómetros; y ninguna precaucion estará demas para construir un instrumento, que aunque pequeño y de poca importancia en la apariencia, es de la mayor utilidad para los progresos de las ciencias naturales y exactas. Las indicaciones que nos da, son la base de toda la teoría del calor; él es el regulador de todas las operaciones químicas; el astrónomo le consulta á cada instante en sus observaciones, para calcular el desvío que los rayos luminosos, emanados de los astros, sufren atravesando la atmósfera que los rompe, y los encurva mas ó ménos segun su temperatura. Al termómetro se debe todo lo que se sabe sobre el calor animal, producido y mantenido por la respiracion; él es el que fija en cada paraje la temperatura media de la tierra y del clima; el que nos manifiesta el calor terrestre, que es constante en cada paraje y va disminuyendo de intensidad desde el ecuador hasta los polos, que permanecen constantemente helados; él tambien nos enseña que el calor decrece, á medida que uno se eleva en la atmósfera hácia la rejion de las nieves perpetuas, ó cuando uno se sumerje en los abismos de los mares, de donde resultan las mudanzas progresivas de la vejetacion á diversas alturas.

417 El calórico puede existir de dos modos en los cuerpos: ó combinado con ellos, en cuyo caso no causa efecto sobre el termómetro y se llama *latente*; ó *libre*, que es cuando se puede trasmitir á otros cuerpos, y causa efecto sobre el termómetro y sobre nuestros órganos. Para dar á conocer estas dos especies de calórico, supongamos que se tenga una libra de agua á 60 grados de *Reaumur* ó 75 del centígra-

do, y que se mezcle con otra libra de hielo á o grados; en este caso la esperiencia manifiesta que resultan dos libras de agua á la temperatura de o° ; de manera que aquellos 60 ó 75 grados de la libra de agua, se han gastado en fundir la libra de hielo y tenerla en estado de liquidez; al calor que necesita para esto una libra de hielo, que es 60° de la division de *Reaumur* ó 75° del centígrado, es á lo que se llama *calórico latente*; y al calor que se hallaba en la libra de agua que se hacia sensible al termómetro y á nuestros órganos, y que la ha abandonado para combinarse con el hielo, es á lo que se llama *calórico libre*.

418 Los primeros ensayos de *Lavoisier* y *Laplace*, que son los sabios que con mas acierto se han ocupado sobre la dilatacion de los sólidos, les dieron á conocer: 1.° *que un cuerpo que ha sido calentado desde el término de la conjelacion hasta el del agua hirviendo, y que se ha enfriado despues desde el agua hirviendo hasta la conjelacion, vuelve á tomar rigorosamente las mismas dimensiones.* 2.° *Que el vidrio y los metales sufren dilataciones sensiblemente proporcionales á la del mercurio*; de modo que *un número duplo de grados del termómetro da una dilatacion doble*; *un número de grados triplo*, *una dilatacion tripla*, &c.

El vidrio es tanto ménos dilatable cuanto ménos plomo contiene. La dilatabilidad del hierro varía mucho, segun los diferentes estados en que se halla; lo que confirma que el hierro que se emplea en las artes, no es un metal absolutamente idéntico. El estaño de las Indias es mucho mas dilatable que el de Cornouailles, y por consiguiente estas dos sustancias metálicas no son las mismas; el plomo es el mas dilatable de todos los metales. Para saber todos estos grados de dilatabilidad, sirve la siguiente

Tabla de las dilataciones lineales del vidrio y de los metales, en virtud de los esperimentos hechos en 1782 por Laplace y Lavoisier.

Una regla cuya longitud es 1,00000000 á la temperatura de la conjelacion, toma por cada grado del termómetro centígrado la.......................longitud

Vidrio de Saint-Gobain	1,00000891
Tubo de vidrio sin plomo	1,00000897
Flint-glass ingles	1,00000812
Vidrio de Francia con plomo	1,00000872
Cobre	1,00001717
Laton	1,00001879
Hierro dulce forjado	1,00001220
Hierro fundido pasado por la hilera	1,00001235
Acero no templado	1,00001079
Acero templado amarillo recocido hasta 30°	1,00001378
Acero templado amarillo recocido hasta 65°	1,00001239
Plomo	1,00002848
Estaño de las Indias ó de Malaca	1,00001938
Estaño de Falmouth	1,00002173
Plata de copela	1,00001909
Plata de ley de Paris	1,00001908
Oro de apartado	1,00001466
Oro de ley de Paris no recocido	1,00001552
Oro de ley de Paris recocido	1,00001514
Platina, segun Borda	1,00000857

El mercurio se dilata $\frac{1}{5412}$ de su volúmen tomado á 0° por cada grado del termómetro centígrado.

419 El conocimiento de la dilatacion de los cuerpos sólidos, y con particularidad de los metales, es sumamente útil en una infinidad de circunstancias que interesan á las ciencias y á las artes. Ahora vamos á manifestar el modo de determinar la dilatacion de la capacidad de una vasija, sólo por el conocimiento de la dilatacion de una de sus dimensiones: y vamos á

demostrar que *si la dilatacion lineal está espresada por* D, *entre las temperaturas que se observan, la dilatacion para la unidad de volúmen entre estas mismas temperaturas, estará espresada por* 3D; de manera que si V es el volúmen de la vasija tomado á la temperatura mas baja, su volúmen á la temperatura mas elevada será $V(1+3D)$.

En efecto, supongamos que V esprese un volúmen cualquiera homojéneo, que dilatándose por el calor se convierta en V'; él conservará una forma semejante en estos dos estados; y como los volúmenes de los cuerpos semejantes son (I. 435 esc. 2.º) como los cubos de los lados homólogos, si espresamos por l y l' estos lados, tendrémos $V':V::l'^3:l^3$, que da (I. § 183) $V'-V:V::l'^3-l^3:l^3$;

de donde $\dfrac{V'-V}{V}=\dfrac{l'^3-l^3}{l^3}=\dfrac{(l'-l)(l'^2+ll'+l^2)}{l^3}$.

Espresando por D la dilatacion $l'-l$, será $l'=l+D$; y sustituyendo este valor, y haciendo las reducciones convenientes, será $\dfrac{V'-V}{V}=\dfrac{D(3l^2+3lD+D^2)}{l^3}$.

Si la dilatacion D es muy pequeña en comparacion de l, como se verifica en todos los cuerpos sólidos, observados á temperaturas que distan mucho de su punto de fusion, la dilatacion $V'-V$ será tambien muy pequeña en comparacion de V, á causa del factor D que multiplica su valor en el segundo miembro de la ecuacion. Luego tendrémos un valor bastante aproximado, y del cual podrémos hacer uso en la mayor parte de los casos, tomando sólo el primer término de los que hay dentro del paréntesis, y resultará $\dfrac{V'-V}{V}=\dfrac{D\times 3l^2}{l^3}=\dfrac{3D}{l}=3\times\dfrac{D}{l}$.

Pero $\dfrac{V'-V}{V}$ es la dilatacion cúbica para la unidad lineal; luego se verifica que la dilatacion cúbica es tripla de la lineal, que está representada por $\frac{D}{l}$. Despejando V' en la ecuacion anterior, y poniendo $l'-l$ en vez de D, resulta $V'=V\left(1+3\times\frac{l'-l}{l}\right)$.

Pero en los cuerpos sólidos, miéntras la temperatura se halle comprendida entre el hielo y el agua hirviendo, la dilatacion lineal $l'-l$ se puede reputar proporcional al número de grados del termómetro contados desde cero. Luego si espresamos por V el volúmen del cuerpo á $0°$, por t el número de grados que se eleva la temperatura sobre este punto, y por k la dilatacion lineal para un grado, tendrémos que kt será la dilatacion lineal para el número t de grados. Luego se tendrá $V'=V(1+3kt)$,
ó simplemente $V'=V(1+Kt)$, haciendo $K=3k$.

420 Sino se conociese el volúmen primitivo V, se podria deducir de estas fórmulas cuando se hubiese observado el de V'; y se podria tambien encontrar la dilatacion que corresponde partiendo de otro cualquier volúmen. Porque representando por V' y V'' los volúmenes correspondientes á dos temperaturas t' y t'', se tendria igualmente

$$V'=V(1+Kt'),\ V''=V(1+Kt''),$$

siendo siempre V el volúmen primitivo á $0°$; eliminando V, se tiene $V''=\frac{V'(1+Kt'')}{1+Kt'}$;

espresion que efectuando la division indicada se puede poner bájo esta forma $V''=V'\left(1+\frac{K(t''-t')}{1+Kt'}\right)$.

Pero todos los cálculos que acabamos de hacer, suponen que la dilatacion cúbica K es bastante pequeña para que nos podamos limitar á la primera potencia de la fraccion que la espresa.

Luego debemos aun conservar aquí el mismo ór-

den de aproximacion, es decir, no tener en consideracion el término Kt' del denominador de la fraccion: lo que dará $V''=V'(1+K(t''-t'))$,
que es el mismo resultado que si la dilatacion se contase partiendo de la temperatura t' y del volúmen V', siempre con el mismo coeficiente.

Si quisiésemos valores mas aproximados, despreciaríamos sólo el último término en la espresion del (§ 419), ó no despreciaríamos ninguno de ellos; pero hasta el dia no se conoce ningun cuerpo que exija tanta aproximacion.

421 Por medio de la dilatacion de los diversos metales, se ha podido conseguir el que las péndolas de los relojes conserven la forma necesaria para que las oscilaciones sean iguales, cualquiera que sea la variacion de temperatura.

En efecto, cuando la varilla de una péndola se dilata por el calor, el péndulo es mas largo y las oscilaciones son (352) mas lentas; y sucede lo contrario cuando la temperatura baja. Para evitar este inconveniente se hace que las varillas se compongan de barras de diversos metales, por ejemplo, de cobre, acero, hierro, laton, platina, oro y plata, de los cuales los mas usuales son el hierro y el laton; y todos estos aparatos, que se llaman *compensadores*, se reducen en última análisis á hacer que suba una parte del peso del sistema, cuando la varilla se alarga, y á bajarle cuando se acorta; de suerte y en tal proporcion que estos efectos contrarios se compensen exactamente.

422 La dilatacion de los líquidos sigue la misma ley que la de los cuerpos sólidos y fluidos, al ménos miéntras no se acerquen al punto de hervir ó de conjelarse.

El agua que es el líquido cuya dilatacion se ha estudiado mas, no se condensa uniformemente al acercarse á la conjelacion. Su contraccion disminuye para cada grado, á medida que la temperatura desciende hácia el término de 4° del termómetro centígrado.

Mas abajo de este límite, si la temperatura baja, el volúmen del agua permanece algun tiempo constante, y despues se dilata en vez de contraerse. Luego hay un punto en que el volúmen del agua es menor que á cualquier otra temperatura; y entónces es cuando su densidad es mayor, es decir, que tiene mas masa bájo el mismo volúmen.

423 Hay sustancias que se dilatan al conjelarse como el agua, tales son el hierro fundido, el bismuto, el antimonio, y el azufre; otras al contrario se contraen cuando pasan al estado sólido, como son el mercurio y el aceite de olivo, que al conjelarse se contraen considerablemente. El mercurio conjelado tiene todos los caractéres de un verdadero metal sólido, se estiende bájo el martillo, y se parece en todo á una plata de bajilla que ha servido mucho tiempo.

El alcool se dilata 0,1254852 de su volúmen desde 0° hasta 80° del termómetro de *Reaumur*, ó 100° del centígrado.

La dilatacion del agua en los mismos límites es 0,046601 de su volúmen á 0°.

424 Generalizando estas ideas podemos establecer que no existe realmente *estado natural* de los cuerpos. La liquidez, la solidez, el estado de vapores, el estado áeriforme, no son sino accidentes ocasionados por la mayor ó menor temperatura. De manera que si nuestro planeta se alejase del sol, los líquidos y los gases podrian pasar al estado sólido; y si se acercase, podria suceder que los cuerpos mas sólidos se redujeran á líquidos, y aun á gases. Luego el principio del calor, de cualquier naturaleza que sea, separa las moléculas de los cuerpos cuando su enerjía aumenta, y las deja aproximar cuando se debilita. Estendiendo esta idea se ha concluido generalmente que este principio era la fuerza que mantenia las moléculas de los cuerpos en equilibrio contra el esfuerzo de su atraccion recíproca, que tiene una continua tendencia á unirlas; de modo que los cuerpos se pueden considerar como un conjunto de pequeñas partí-

culas, que se hallan continuamente en equilibrio entre dos fuerzas, á saber, la atraccion que trata de reunirlas, y un principio repulsivo, que será, si se quiere, el del calor que propende á desunirlas.

El estado sólido tendrá lugar cuando la atraccion sea dominante, y en este caso será necesario que la enerjía del principio repulsivo aumente para que las partes se desunan. Si esto sucede, llegará un término en que estas dos fuerzas serán iguales, y este será el estado líquido; en fin, si el principio repulsivo aumenta todavía, separará las moléculas materiales á tal punto, que sus atracciones mutuas dejarán de ser sensibles á la distancia en que se hallan colocadas; y entónces el cuerpo pasará al estado gaseoso.

425 Para acumular en un punto una cantidad de calórico muy grande, se hace uso de un instrumento que se llama *soplete*, que es muy útil para los plateros, los mineralojistas &c.; y ahora se acaba de inventar y perfeccionar un nuevo soplete, por el cual se funden casi instantáneamente la platina y todas las sustancias que hasta el dia no se podian fundir. Se reduce á condensar mucho una mezcla de siete partes de hidrójeno y tres de oxíjeno, y hacer que salga por un tubo capilar, y encendiendo dicha corriente, y dirijiéndola á cualquier sustancia, se consigue inmediatamente su fusion.

Capacidad de los cuerpos para el calórico.

426 En todo lo que hemos dicho sobre la propagacion y comunicacion del calor, sólo hemos considerado incrementos ó diminuciones de temperatura. Ahora nos dirijimos á dar á conocer las relaciones que existen entre estas variaciones y las cantidades absolutas de calórico absorvidas ó desprendidas por los cuerpos.

El medio mas directo para descubrir estas relaciones, consiste en hacer enfriar un mismo cuerpo sucesivamente de un cierto y determinado número de grados de calor, y emplear el calórico que se desprende de él en producir un mismo efecto siempre idéntico, y cuya repeticion pueda servir de medida. Se tiene esta ventaja en la fusion del hielo, pues se ha reconocido que el hielo fundente tiene una temperatura fija, y que todo el calor que se le comunica se emplea únicamente en fundirle. Luego si se quita á cada instante el agua que resulta, y se presenta incesantemente á la accion del calórico una nueva cantidad de hielo, el efecto será siempre idénticamente semejante á él mismo; y una cantidad doble ó triple de hielo fundido, exijirá una cantidad doble ó triple de calor; de modo que se valuará la proporcion de esta última que no se puede ver, palpar ni pesar, por la cantidad de hielo fundido que se puede pesar; y para poder realizar todo esto, se ha inventado un aparato que se llama *calorímetro*.

427 Si el cuerpo es sólido, y de tal naturaleza que no pueda mudar de estado desde la temperatura del hielo fundente hasta la de la *ebulicion* del agua (que es el estado repentino en que este cuerpo de líquido pasa á fluido), entónces habiéndole elevado á una temperatura cualquiera t, comprendida entre estos límites, y medida en grados del termómetro centígrado de mercurio, coloquémosle en el calorímetro y dejémosle enfriar hasta 0°. Cuando llegue á este estado, hallarémos que la cantidad de hielo que ha fundido, es proporcional al número t de grados. De manera que si ha fundido una libra enfriándose de 10° á 0°, fundirá dos enfriándose de 20° á 0°; tres de 30° á 0°; y así sucesivamente en toda la estension de la escala termométrica. Pero la constante que esprese esta proporcionalidad será diferente para diferentes cuerpos á igualdad de masa.

428 Para formarnos una idea clara de estos resultados, y desenvolver sus consecuencias con seguridad, tomemos por unidad de calórico la cantidad desconocida de este principio, que es necesaria para fundir una libra de hielo á 0°; despues represente-

mos por x el número total y desconocido de unidades iguales, que á la temperatura del hielo fundente están contenidas en cada libra de un cuerpo A de cualquier manera que este calórico subsista allí, esto es, ya se halle combinado y fijo en él, ó ya sea móvil y mudable con los otros cuerpos del espacio; ó en fin, ya se halle parcialmente en estos diversos estados. Si elevamos la temperatura de A hasta T grados del termómetro centígrado de mercurio, y le dejamos despues enfriar hasta 0° en el calorímetro, fundirá en él un cierto número de libras de hielo, que representarémos por N; y tendrémos que N espresará tambien la nueva cantidad de calórico que ha sido necesario introducir en el cuerpo, para elevar á T su temperatura.

Pero la esperiencia prueba que entre 0° y 100°, el número N es proporcional al número T de grados, al ménos cuando el cuerpo no muda de estado; luego si dividimos N por T, el cociente $\frac{N}{T}$ que llamarémos c, espresará entre estos límites el número de libras de hielo que el cuerpo puede fundir bajando un grado su temperatura; y este mismo cociente espresará tambien, en funcion de nuestra unidad primitiva, la cantidad de calórico necesaria para elevar ó bajar su temperatura un grado. En virtud de esto, para cualquier otra temperatura t, comprendida tambien entre los límites de la escala termométrica, tendrémos que $x+ct$ espresará la cantidad total del calórico contenido en A, y ct será el número de libras de hielo á 0° que puede fundir enfriándose hasta 0°. Si la masa del cuerpo, en vez de ser una libra fuese m, permaneciendo la misma su naturaleza, seria necesario considerarle como compuesto de m libras exactamente iguales á la precedente. Entónces la cantidad primitiva de calórico que contendria á 0°, seria mx; la que contendria á t grados, seria $mx+mct$; y mct espresaria el número de libras de hielo á 0°, que podria fundir enfriándose desde t° hasta 0° en el calorímetro.

429 En virtud de lo que hemos anunciado, se ve que el número c varía de una sustancia á otra; varía tambien para cada sustancia, cuando de sólida viene á ser líquida, ó de líquida pasa á aeriforme, y recíprocamente. Del mismo modo es verosímil que estas variaciones principien á ser sensibles ántes que se efectúe la mudanza de estado. Luego es necesario determinar el número c por la observacion en estas diversas circunstancias. Esto es lo que tratamos de hacer, y lo que se llama el *calórico específico de los cuerpos*.

430 Si el cuerpo es sólido, se toma una masa conocida m, se la eleva á una temperatura conocida t, y colocándole en el calorímetro, se pesa el número n de libras de hielo á 0° que ha fundido al enfriarse hasta 0°. Este número, siendo conocido, se tiene la ecuacion $mct=n$, de donde $c=\frac{n}{mt}$.

Es decir, que *dado el peso del hielo fundido por el cuerpo, se dividirá por el producto de su masa y del número de grados que espresaba primitivamente su temperatura, y el cociente es el calórico específico del cuerpo para la unidad de masa.*

Para aclarar esto con un ejemplo, elejirémos un esperimento hecho por M.M. Lavoisier y Laplace. Introdujeron en el calorímetro una masa de hierro batido, que pesaba 7,7070319 libras francesas, y cuya temperatura por medio de un baño de agua se habia elevado á 78° R; al cabo de 11 horas toda la masa se habia enfriado hasta 0°, y el calorímetro suministró 1,109795 libras de hielo fundido. Así, el calórico específico del hierro batido es

$$c=\frac{1,109795}{7,7070319\times78}=0,001841875.$$

Este valor de c es el mismo, cualquiera que sea la unidad de peso que se elija; porque la misma unidad se halla en el numerador y denominador de la fraccion que le espresa.

431 Para conocer el calórico específico de los líquidos, se les introduce en el calorímetro, colocándolos en vasos cuyo enfriamiento haya sido observado anteriormente, y cuyo calórico específico se haya determinado tambien. Llamemos m la masa del vaso, m' la del líquido; c, c' los calóricos específicos de cada una de estas sustancias; y en fin, t la temperatura comun á la cual se elevan. Si n es el número de libras de hielo fundido que su enfriamiento da, se tendrá que como mct espresará el hielo fundido por la masa del vaso, y $m'c't'$ la fundida por el líquido, será

$$mct+m'c't'=n; \text{ de donde } c'=\frac{n-mct}{m't'}.$$

Es decir, que *del peso total del hielo fundido por el todo, se quitará la cantidad que el vaso hubiera debido fundir por sí solo, y se dividirá la resta por el producto de la masa y de la temperatura del líquido.*

De este modo se ha encontrado que una libra de agua líquida elevada á la temperatura de $60^\circ R$ ó 75° centesimales, fundia precisamente una libra de hielo al enfriarse hasta 0°.

Por consiguiente, el calórico específico absoluto del agua, adoptando la division octojesimal, será $\frac{1}{60}=0{,}0166666\frac{2}{3}$; y si se adopta la division centesimal, será $\frac{1}{75}=0{,}0133333\frac{1}{3}$.

Si se dividen por uno de estos valores los caloricos específicos absolutos de otras sustancias, valuados en el uno ó en el otro sistema, se tendrán los calóricos específicos relativos, es decir, referidos al del agua tomado por unidad. Más para volver de estos valores á los resultados absolutos, es necesario siempre añadir á ellos el calórico específico del agua. Hé aquí algunos resultados de este género, dados por M.M. Lavoisier y Laplace, referidos á la division octojesimal.

Sustancias.	*Calor específico relativo.*
Agua comun	1,00000
Hierro batido	0,11051
Vidrio sin plomo	0,19290
Mercurio	0,02900
Óxide rojo de Mercurio	0,05011
Aceite de olivo	0,30961
Azufre	0,20850

432 El número 0,029 que en esta tabla corresponde al mercurio, indica que una masa de mercurio que se enfria un grado, abandona una cantidad de calórico suficiente para elevar á $0°,029$ la temperatura de una masa igual de agua.

Si se multiplican los números de esta tabla por $\frac{1}{75}=\frac{4}{300}$, que espresa el calórico específico absoluto del agua en grados centesimales, se tendrán las cantidades ponderables de hielo que la unidad de peso de estas sustancias puede fundir enfriándose un grado de esta misma division; y estos serian entónces los calóricos específicos absolutos de las sustancias espresadas en la tabla. Se ve que el mercurio tiene un calórico específico muy débil, pues para elevar 1° la temperatura de este metal es necesario sólo $\frac{29}{1000}$ de lo que exijiria una masa igual de agua en peso.

433 Muchos físicos, y particularmente *Deluc* y *Crawford*, han tratado de determinar los calóricos específicos de otro modo. Tomaban masas iguales a y b de un mismo líquido, elevadas á desiguales temperaturas; y mezclándolas rápidamente tomaban por la temperatura definitiva del todo la media aritmética entre las temperaturas de las dos masas. En efecto, si se suponen los calóricos específicos constantes en toda la escala termométrica, la cantidad total de calórico contenida en la primera masa a á la temperatura t será (§ 428) $mx+mct$, llamando m su masa, y c el calórico específico de la sustancia. Del mismo modo la cantidad de calórico contenida en la segunda masa á la temperatura t', será $mx+mct'$, y la suma será $2mx+mc(t+t')$.

Pero si T es la temperatura media de la mezcla, este resultado deberá tambien ser igual á $2mx+2mcT$, pues que la suma total de las masas será $2m$. Luego se deberá tener $2T=t+t'$, de donde $T=\frac{1}{2}(t+t')$.

Del mismo modo se podria efectuar la operacion con masas desiguales, con tal que fuesen siempre de la misma naturaleza. Porque espresándolas por m, m', las cantidades de calórico que contendrian, serian

$$mx+mct,\ m'x+m'ct';$$

lo que daria en la mezcla $(m+m')x+c(mt+m't')$; pero llamando siempre T la temperatura comun despues de la mezcla, este resultado se hallará tambien espresado por $(m+m')x+c(m+m')T$.

Luego seria necesario que se tuviese

$$(m+m')T=mt+m't',\ \text{que da}\ T=\frac{mt+m't'}{m+m'};$$

fórmula que se convierte en la precedente si $m=m'$.

El calorímetro puede tambien servir para determinar las cantidades de calórico desenvueltas por la combustion y la respiracion; pues no hay mas que quemar cuerpos ó hacer respirar animales en el calorímetro, y medir las cantidades del hielo fundido.

434 Cuando los cuerpos pasan del estado sólido al de líquido, absorven calórico; y al contrario, si del estado de liquidez pasan al de solidez, le abandonan ó desprenden.

Al pasar de líquidos á fluidos tambien absorven calórico, y al contrario le abandonan ó desprenden cuando pasan de fluidos á líquidos. El calórico desprendido por una libra de vapor acuoso al condensarse y tomar la forma líquida, es capaz de elevar 5,67195 libras de agua líquida, desde la temperatura del hielo fundente hasta la de la ebulicion, ó es capaz de fundir 7,5626 libras de hielo á 0°.

El calórico específico del aire á 32,73096 pulgadas de presion es 0,2669, tomando por unidad el del agua; el del hidrójeno 3,2936; el del ácido carbónico 0,2210; el del oxíjeno 0,2361; el del azoe 0,2754;

el del óxide de azoe 0,2369; el del hidrójeno percarbonado 0,4207; el del óxide de carbono 0,2884; y el del vapor acuoso 0,8470.

Cada uno de estos resultados espresa la elevacion de temperatura que una libra de cada gas produciria en una libra de agua líquida enfriándose un grado centesimal. Dividiéndolos por 75°, se tendrá el número de libras de hielo á 0° que este mismo enfriamiento podria fundir; y dividiéndolos por 100, se tendrá el número de libras de agua líquida que podria elevar de la temperatura del hielo fundente á la de la ebulicion. El vapor acuoso es uno de los ajentes mas poderosos de que hace uso la Mecánica para producir el movimiento en las máquinas; y el aparato que se emplea para ello, se llama *bomba de vapor*. Todo su mecanismo está reducido á que la fuerza elástica del vapor acuoso se desenvuelva por el calórico, y se precipite repentinamente por el enfriamiento. El efecto de las bombas de vapor se mide comparándole con el que pueden producir un cierto número de caballos de una fuerza media. La bomba de vapor mas poderosa se cree que es la que hay en las minas de Cornouailles, que produce el mismo efecto que 1010 caballos.

435 Una libra de carbon, segun los esperimentos de M.M. *Lavoisier* y *Laplace*, es capaz de producir un grado de calor suficiente para convertir en vapor acuoso cerca de 13 libras de agua que ya estuviese á la temperatura de la ebulicion; pero casi la mitad del calórico se pierde, ya en calentar los cuerpos que están próximos á los hornillos, y ya la atmósfera que le rodea; de manera que por un gran número de ensayos, hechos con las máquinas mas perfectas y con los hornillos mejor construidos, se ha encontrado que *una libra de carbon de madera sólo convierte en vapor 6 ó 7 libras de agua*; y que *una libra del mejor carbon de piedra nunca produce mas de 6.*

ELECTROLOGIA.

436 *Electrologia* es la ciencia que trata del *fluido eléctrico.* La palabra *electricidad* proviene de una palabra griega que significa *ámbar ó sucino*; porque en esta resina se encontró primeramente la propiedad de que *frotada producia los fenómenos eléctricos.*

La electricidad se escita en los cuerpos por modificaciones que se les hace sufrir pasajeramente, y son tanto mas singulares, cuanto sin añadir ni quitar á sus partículas ningun principio que se pueda palpar, pesar, ni tocar, ellas desenvuelven fuerzas muy poderosas, cuya influencia mecánica puede despues poner en movimiento cuerpos materiales. Los principales medios de producir la virtud eléctrica son el *rozamiento*, el *contacto* y el *calor*. Por ejemplo: si se toma una barra de lacre ó azufre, un tubo de vidrio, ó un pedazo de ámbar ó sucino, que no hayan sido tocadas estas sustancias en mucho tiempo, y se aproximan á algunas partículas de papel, paja ú otros cuerpecillos lijeros, estos no sufrirán ninguna impresion; pero si ántes de hacer esta prueba se frota con suavidad y viveza el tubo de vidrio, la barra de lacre ó el pedazo de ámbar, con una tela de lana ó una piel de gato bien seca, y se aproxima despues á pequeños cuerpos lijeros, se les ve á estos volar hácia dichas sustancias. Si despues de haberlos frotado, les aproximamos la mano ó la cara, se percibe á cierta distancia una sensacion igual á la que producirian telas de araña; y si se tocan con el dedo ó con una bola de metal, se oye el chasquido de una chispa que se lanza sobre el cuerpo que se le presenta. Este efecto se hace mas sensible, sustituyendo al tubo un grueso globo de vidrio ó de resina, ó un cilindro ó un platillo de vidrio que se estrecha por cojinetes fijos, y que se hace jirar circularmente por medio de un manubrio: este aparato es lo que se llama *máquina eléctrica*; las cuales se construyen en el dia, de modo que sus efectos son bastante intensos.

437 Todas las sustancias vítreas y resinosas producen estos fenómenos en diversos grados. Tambien se obtienen con telas de seda; pero no surten del todo su efecto con los metales. Si una barra metálica se tiene en una mano, y se frota con la otra con una piel de gato ó tela de lana, no da ninguna señal de electricidad; pero si la misma barra se fija á un tubo de vidrio ó de resina bien seca, y se frota con la piel de gato ó con una tela de lana, pero sin que le toque nada mas que el cuerpo con que se les frota, adquiere todas las propiedades eléctricas. El mismo efecto se consigue si se le sacude con una piel de gato despues de suspendida de cordones de seda, ó si para sujetarla se envuelve la mano con algunos dobleces de una tela de seda; pero en el momento en que se toque á la barra con el dedo ó con un pedazo cualquiera de metal, pierde enteramente sus propiedades.

Si el metal no adquiria al principio las propiedades eléctricas por el rozamiento, no era por no recibirlas, sino porque no puede conservarlas; pues que cuando las posee, se le quitan tocándole con el dedo ó con otro pedazo de metal. Así, cuando se tomaba en la mano para frotarle, la electricidad que se desenvolvia en él, debia perderse al mismo tiempo.

Pero se ha hecho sensible cuando el metal se suspende en el aire por apoyos de vidrio, de seda, ó de resina; luego esta es una prueba de que estas diversas sustancias resistian al paso de la electricidad; y en efecto, esta no se esparce rápidamente de un estremo á otro de una cinta de seda, de un tubo de vidrio, ó de resina; porque cuando estos cuerpos están electrizados por el rozamiento, si se les toca en un paraje, se despoja sólo esta parte de las propiedades eléctricas, y subsisten aun en todo el resto. Esta es la razon porque se pueden electrizar estos cuerpos por el rozamiento, teniéndolos en la mano por uno de sus estremos.

438 Por esta causa se dividen los cuerpos de la naturaleza en dos grandes clases, segun *trasmiten* ó

no *trasmiten* libremente la electricidad. Á los que la trasmiten ó le dan paso, se les caracteriza con el nombre de *conductores ó idioeléctricos*, y á los que no la trasmiten, se les llama *no conductores* ó *aneléctricos* ó cuerpos *aislantes*, porque sirven para aislar á los otros de toda comunicacion con los conductores.

El aire atmosférico es de la clase de los cuerpos *no conductores*; porque si él diese paso libre á la electricidad, ningun cuerpo que estuviese sumerjido en él podria producir fenómenos eléctricos durables; y se advierte que un tubo de vidrio ó de resina frotado, conserva sus propiedades eléctricas por mucho tiempo, aunque esté rodeado de aire. Al contrario, el agua es un buen conductor; pues si se moja con este líquido, ó sólo con su vapor, un tubo de vidrio ó de resina electrizado por rozamiento, pierde al instante toda su virtud. Tambien el vapor acuoso suspendido en el aire, altera las propiedades aislantes de este fluido.

No hay ninguna relacion constante entre el estado de los cuerpos y su facultad conductriz. Entre los cuerpos sólidos, los metales *trasmiten* perfectamente la electricidad; pero las gomas y las resinas secas no la trasmiten. Casi todos los líquidos son buenos conductores, y sin embargo el aceite es un conductor muy imperfecto. La cera fria y el sebo conducen mal la electricidad, y derretidas la conducen bien. La facultad conductriz se observa en los estados mas opuestos, por ejemplo, en la llama del alcool y en el hielo. La temperatura de los cuerpos parece no tener ninguna influencia sensible sobre las chispas eléctricas que emanan de ellos. Las que se sacan del hielo no son frias, y las que salen de un hierro enrojecido al fuego, no parece por esto que queman mas.

El aire y los gases secos, ademas de la propiedad aislante que poseen, parece que tienen la facultad de retener la electricidad en la superficie de los cuerpos por su fuerza de presion.

Los cuerpos se electrizan tambien por *comunicacion*, poniéndolos en contacto con los electrizados.

Se deben distinguir dos géneros de electricidades: la una análoga á la que desenvuelve el vidrio frotado por una tela de lana, y que se llama *electricidad vítrea*; y la otra semejante á la que ofrece la resina igualmente frotada con una tela de lana, la cual se llama *electricidad resinosa*; y se observa constantemente, que *los cuerpos cargados de electricidad de la misma naturaleza, se rechazan mutuamente*; y *los que están cargados de electricidad de naturaleza diferente, se atraen.*

439 La naturaleza de la electricidad desenvuelta por el rozamiento de un gran número de sustancias, no tiene nada de absoluto, y depende tanto de la especie del cuerpo frotante como de la del frotado. Por ejemplo, el vidrio pulido, frotado con una tela de lana, toma la electricidad vítrea; y frotado con una piel de gato adquiere la electricidad resinosa. La seda frotada con la resina toma la electricidad resinosa; y frotada con el vidrio pulimentado, toma la electricidad vítrea.

Lo mismo sucede á otras sustancias: notándose que no hay ninguna relacion aparente entre la naturaleza ó la constitucion de las sustancias, y la especie de electricidad que desenvuelven, siendo frotadas las unas con las otras; la sola ley general que se ha encontrado en estos fenómenos, es que *el cuerpo frotante y el frotado adquieren siempre electricidades diversas, la una resinosa y la otra vítrea.*

El rozamiento de los líquidos y de los fluidos contra los cuerpos sólidos desenvuelve tambien la electricidad. El rozamiento no es el único modo de desenvolver la electricidad, aunque sea el mas comun. Se desenvuelve al calentar los cuerpos, y al fundirse y al combinarse las unas sustancias con las otras.

Las fuerzas eléctricas siguen, como la atraccion celeste, la razon inversa de los cuadrados de las distancias.

440 Hay instrumentos por cuyo medio se miden las mas pequeñas cantidades de electricidad, y se

llaman *electróscopos*; consisten en suspender de un hilo de seda, tal como sale del capullo, de unas cuatro pulgadas de largo, una aguja de un pequeño hilo de goma laca, de lacre ó de cristal, de unas doce ó catorce líneas de largo, terminada en uno de sus estremos por un pequeño círculo de hojuela de oro ó de plata; si este aparato se electriza y se aproxima á otros cuerpos, se le ve oscilar; y por la naturaleza de estas oscilaciones se viene en conocimiento de las cantidades de electricidad.

En la naturaleza no existe probablemente sustancia perfectamente aislante, porque no se conoce ninguna que no propague al ménos sobre su superficie, una fuerte electricidad; el vidrio, el lacre, la misma goma laca la trasmiten de esta manera, difícilmente á la verdad, pero de un modo sensible.

Los principios de las dos electricidades existen naturalmente en todos los cuerpos conductores en un estado de combinacion que los neutraliza, y esto es lo que llamamos *el estado natural de los cuerpos*; y la que se acumula en algun cuerpo proviene de la tierra; por lo que se dice que *el globo terrestre es el depósito comun de la electricidad.*

Hay otras clases de *electróscopos*, que igualmente todos están fundados en el principio general de la repulsion que se ejerce entre cuerpos cargados de electricidades iguales; y su sensibilidad depende de la tenuidad y libertad de los cuerpos que se emplean para manifestar esta repulsion.

Los *electróscopos* se caracterizaban ántes con el nombre de *electrómetros*; pero esta denominacion es impropia, porque quiere decir *medida de electricidad*, y la palabra medida se debe reservar para los instrumentos cuyas divisiones miden inmediatamente los efectos á que se aplican, es decir, que son proporcionales á estos efectos; y esta proporcionalidad está bien léjos de existir en los electróscopos.

441 De todas las circunstancias que se verifican en los fenómenos eléctricos, se puede concluir con

suficiente fundamento que *cuando se frotan juntas las superficies de dos cuerpos, aquella cuyas partículas integrantes se separan ménos las unas de las otras, y hacen escursiones menores al rededor de sus posiciones naturales de equilibrio, parece que están mas dispuestas á tomar la electricidad vítrea*; y esta tendencia aumenta si la superficie sufre una compresion pasajera. Recíprocamente, *aquella de las dos superficies, cuyas partículas se hallan mas separadas, está mas dispuesta á tomar la electricidad resinosa.* Esta tendencia aumenta si la superficie sufre una verdadera dilatacion.

Miéntras mas fuerte es esta oposicion de circunstancias, mas enérjico es el desarrollo de la electricidad sobre las dos superficies. Se debilita á medida que su estado viene á ser mas semejante. Una igualdad perfecta, si pudiese existir, le haria nulo.

En general, cuando uno de los cuerpos frotados es un tejido de fibras animales ó vejetales, tal como una cinta de seda, una tela de lana ó un pedazo de papel seco, el mejor cuerpo con que se debe frotar, debe ser aquel sobre el cual estos tejidos sólo pueden producir una compresion general y pasajera. Tambien enseña la esperiencia que en este caso nada es preferible á una piel con su pelo.

Pero cuando las sustancias animales ó vejetales que se frotan, se dilatan ambas con el rozamiento, la especie de electricidad que toma cada una de ellas depende de lo que se prolonguen mas ó ménos sus poros; y entónces las mas lijeras modificaciones en el estado de la una ó de la otra pueden determinar resultados opuestos.

442 Se da el nombre de *condensador* á un aparato, por medio del cual se puede reunir una gran cantidad de electricidad, y está representado en la (fig. 111); se compone de dos platillos A y B, de materias que sean buenos conductores, y que están cubiertos por los parajes por donde se han de poner en contacto, con una simple capa de barniz resinoso

aplicada separadamente sobre cada platillo. El pie sólido de B es de metal, y se adapta sobre la superficie superior de A un mango aislante M de vidrio barnizado. Cuando se quiere hacer uso de él, se ponen los platillos el uno encima del otro; se toca al inferior B para hacerle comunicar con el suelo; despues se tocan los cuerpos electrizados con el boton *a* de un hilo metálico, unido fijamente al platillo superior A que se llama el platillo *colector*, porque en efecto él es el que toma la electricidad de los cuerpos á que se aplica.

Despues del contacto se pone el pie del condensador sobre una tabla sólida, y conservándole fijamente unido á ella, se quita el platillo colector y se prueba la electricidad de que se ha cargado.

Los aparatos que sirven para tomar la electricidad de un cuerpo y llevarla á otro, se llaman *electróforos*. El condensador y el electróforo están fundados sobre la accion eléctrica ejercida á cierta distancia.

443 Uno de los medios mas poderosos de acumular la electricidad es la *botella de Leiden*, que ha tomado este nombre de la ciudad en que *Musquembroeck* observó por primera vez sus propiedades.

Consiste en una botella ó frasco de vidrio, á cuyo esterior se adapta una cubierta delgada de metal, y cuyo interior está lleno de hojas metálicas, bien sea adaptadas á la misma botella, ó simplemente diseminadas. Una vara metálica que termina por fuera en un boton, pasa por el tapon de la botella y sirve para llevar la electricidad á lo interior.

Cuando se quiere acumular mucha electricidad, se forman botellas de Leiden con grandes jarros de vidrio, que se revisten de hojas metálicas sobre sus dos superficies, y se hacen comunicar todas las varas de estas mismas botellas con un mismo conductor metálico, por medio del cual se consigue su descarga simultánea; este aparato se llama *batería eléctrica*.

Desde que se descubrió la botella de Leiden y las baterías eléctricas, los efectos de la electricidad acumulada por estos aparatos, se hallaron tan semejantes á los del rayo, que se sospechó esta analogía. *Franklin* fue el primero que habiendo reconocido el poder de las puntas metálicas para descargar los cuerpos electrizados, concibió la posibilidad de emplear este medio para hacer sensibles los efectos de la electricidad atmosférica, y preservarse de sus esplosiones; de donde ha venido el uso de los *pararayos*, que consisten en una ó mas varas metálicas, que se ponen al lado de los edificios, profundizando bastante en el terreno y terminando en puntas; esta barra debe subir hasta mas arriba del edificio; y su efecto se reduce á que cuando una nube cargada de electricidad pasa por encima, la punta de la barra metálica sirve para descargar la nube de electricidad, y la conduce al depósito comun que es la tierra. Para que estén bien construidos los pararayos se necesitan dos circunstancias indispensables. La primera es, que *esté bien establecida la comunicacion con el suelo y entre las diversas barras metálicas de que se compone el aparato*. Sin esta precaucion seria inútil, y aun perjudicial. La segunda condicion es, que *las barras metálicas que sirven de conductores, no tengan ménos de una pulgada de diámetro*; porque si tuviesen ménos, podrian ser fundidas ó volatilizadas, como los hilos metálicos sometidos á la descarga que sale de las baterías eléctricas; y entónces no hallando paso abierto la electricidad restante, se escaparia con esplosion.

La punta de los pararayos debe ser de platina; porque es el metal que estando puro se funde y se oxida con mas dificultad.

Para que la comunicacion con el suelo esté bien establecida, es necesario que los mismos conductores se introduzcan en la tierra hasta que encuentren humedad; por lo que será muy bueno el que vayan á parar á algun depósito de agua; pero en todos los casos es necesario que esta prolongacion subterránea se separe del edificio que se quiere libertar.

Por medio de la electricidad se pueden volatilizar los metales, como sucede con el oro; y en el dia es uno de los ajentes mas poderosos que usa la Química, para la composicion y recomposicion de los cuerpos.

444 El desarrollo de la electricidad por el simple contacto, ofrece el contraste de un gran descubrimiento debido á la casualidad, y de un descubrimiento mayor aun, obtenido directamente y conducido á su último término de perfeccion por los esperimentos é investigaciones mas rigorosas.

Las primeras observaciones exactas de este género se hicieron en 1789. *Galvani*, profesor de Física en Bolonia, hacia investigaciones sobre la escitabilidad de los órganos musculares por la electricidad; empleaba en estas pruebas ranas muertas y desolladas, en que habia descubierto los nervios lumbares como representa la (fig. 112). Para poderlas manejar fácilmente, habia pasado en la porcion restante E de la columna dorsal un hilo de cobre encorvado. Por una casualidad suspendió un dia muchas ranas muertas por estos ganchos de cobre á un balcon de hierro; al instante sus pies y sus piernas, que se apoyaban tambien en parte sobre este hierro, entraron en convulsion espontánea, y el fenómeno se repitió tantas veces como se reiteró el contacto. *Galvani* percibió toda la importancia de este fenómeno; y *Volta* hizo despues muchas aplicaciones útiles.

445 Se puede hacer con mucha facilidad un esperimento, que es muy propio para manifestar la influencia del contacto de los metales heterojéneos sobre los órganos animales. Se toman dos piezas de metales diferentes (lo mejor es que el uno sea plata ó cobre, y el otro zinc); se pone una de estas piezas encima de la lengua, y la otra debajo, de modo que sobresalgan un poco hácia adelante. Miéntras que estas piezas no se toquen, no se recibe ninguna sensacion particular; pero cuando se ponen en contacto, se escita un sabor de todo punto análogo al del sulfate de hierro ó caparrosa.

Poniendo en contacto dos metales, por ejemplo el zinc y el cobre, encima de estos un cuerpo conductor como el agua salada, y despues los mismos metales, y así sucesivamente, se tiene la *pila* que se suele llamar *galvánica ó voltáica*, que es uno de los medios mas admirables, y de que se hace un uso muy continuo é importante en la Física, en la Química y en la Medicina. El mejor medio de formar esta pila es soldar dos planchas circulares, la una de zinc y la otra de cobre; se ponen siempre de manera que un mismo metal caiga debajo, y entre cada pieza se coloca un pedazo de paño ó bayeta mojado en agua salada; y por este medio se hacen unas descargas eléctricas tan considerables como el de las mas fuertes baterías eléctricas. El primer fenómeno químico que se efectuó en la pila, fue el de la descomposicion del agua, y despues se han descompuesto muchos cuerpos que ántes se consideraban como simples. La mayor batería y la mas fuerte que se conoce, es la que se halla en la Escuela Politécnica de Paris; contiene 600 pares de placas de á unas 15 pulgadas cuadradas; esta batería, y en general todas las que tienen grandes superficies, no están construidas en pila, sino puestas verticalmente y paralelas unas á otras en cajas horizontales de madera, cuyo interior está cubierto con un unto aislador. Las pilas compuestas de placas anchas, son capaces de producir cantidades de electricidad bastante considerables para inflamar muchas pulgadas de alambre, como lo han conseguido *Hachette*, y *Thenard*.

MAGNETOLOGIA.

446 Casi todos los minerales de hierro, en que este metal se halla poco oxidado, poseen la singular propiedad de atraer el hierro por una fuerza invisible. Muchas veces esta atraccion es tan débil, que es necesario emplear procedimientos muy delicados para descubrirla; pero en algunas ocasiones es tan enérjica, que eleva pesos considerables. Entónces el

mineral toma el nombre de *iman*, y el de *magnetismo* los fenómenos de atraccion que produce, llamándose *fluido magnético* la causa ó potencia que produce estos efectos, y *Magnetologia* la ciencia que trata de indagar sus propiedades.

Si se pasa un iman por encima de limaduras de hierro, y despues se le retira, se advierte que no se fijan igualmente á todos los puntos de su superficie, sino que se aumentan principalmente en dos partes opuestas N, S (fig. 113), en que se mantienen las limaduras erizadas.

Estos parajes se llaman los *polos* del iman; y cada polo, presentado á cierta distancia á las limaduras de hierro, las atrae. Si se suspende horizontalmente una pequeña aguja de hierro ó de acero á un hilo de lino, de seda ó de cualquier otra materia flexible, de modo que tenga plena libertad en sus movimientos, cada polo del iman la atrae del mismo modo, y podria hacerla oscilar al rededor de su centro.

Aunque los fenómenos magnéticos tienen cierta analogía con los eléctricos, no se puede suponer que proceden de la misma causa; pues el magnetismo se ejerce indiferentemente á traves de las sustancias conductoras ó no conductoras de la electricidad, y el aislamiento no es necesario en manera alguna.

447 Si la superficie polar A de un iman se pone sucesivamente en contacto con las superficies A' y B' de otro iman, se halla que atrae á la una de ellas, á B' por ejemplo, y rechaza á la A'. Recíprocamente, la superficie polar B del primer iman atrae á A' y rechaza á B'. Lo cual nos manifiesta que *hay dos especies de magnetismo*, *así como hay dos especies de electricidades*, *y cada uno de ellos domina en uno de los polos del iman.*

Se ha observado que frotando el hierro á un iman adquiere la misma propiedad; y de este modo se magnetizan las agujas de acero, que se suspenden luego sobre los estiletes, y se llaman *agujas magnéticas*, que tanta utilidad producen para la navegacion, por la importante propiedad que tienen de permanecer en un mismo plano, y de volver á él despues de algunas oscilaciones cuando se separan de él; este plano se llama *meridiano magnético*; y el ángulo que forma con el meridiano terrestre se llama *declinacion de la aguja.* En el año de 1804 determiné la declinacion de la aguja en Madrid, y hallé que era de 21° y 30′ al oeste.

Cuando se presenta uno de los polos de un iman á una aguja imantada, suspendida por su centro y equilibrada de manera que permanezca horizontal, los dos polos del iman obran á un mismo tiempo sobre la aguja; pero la accion del polo mas vecino es siempre la mayor. La aguja vuelve hácia el iman aquel polo que es atraido, y aleja de él aquel que es rechazado. Despues que ella ha tomado la posicion de equilibrio, si se separa algun tanto, vuelve á él por una serie de oscilaciones, del mismo modo que un péndulo separado de la vertical vuelve á ella por su pesantez. El globo terrestre obra sobre las agujas imantadas, como lo haria un verdadero iman: sea que deba esta facultad á la multitud de minas de hierro que encierra, sea que la tenga de alguna otra causa todavía mas general y desconocida. De todos modos esto nos suministra una escelente denominacion para distinguir las dos clases de magnetismo, llamando *boreal* al que domina en la parte boreal del globo, y *austral* al que domina en el hemisferio austral; entónces para conservar la analogía de las atracciones y repulsiones, es necesario considerar el estremo de las barras que se dirije al norte como el polo austral, y el que se dirije hácia el mediodia, como su polo boreal.

448 En una aguja imantada, cuyo centro de gravedad está sostenido por un estilete, se advierte que no permanece en direccion horizontal, sino que el estremo que posee el magnetismo austral, que es el que se dirije al norte, se inclina hácia el horizonte, al ménos en nuestros climas, y despues de algunas

oscilaciones se detiene formando con la vertical un cierto ángulo determinado. Este ángulo se llama la *inclinacion magnética*.

Hay una zona cerca del ecuador donde la aguja imantada permanece horizontal; al sur de esta zona la aguja inclina hácia la superficie terrestre el estremo que posee el magnetismo boreal, lo que indica dos suertes de fuerzas, las unas australes y las otras boreales, dirijidas de una y otra parte del ecuador terrestre.

Para medir exactamente la inclinacion magnética, se coloca el eje de suspension de la aguja en el centro de un círculo vertical, cuyo limbo dividido en grados da á conocer la inclinacion de la aguja en el paraje donde se observa; y este aparato se llama *brújula de inclinacion* y está representada en la (fig. 114).

449 Se ha creido por mucho tiempo que sólo el hierro y el acero eran las sustancias que pudiesen adquirir el magnetismo; pero en estos últimos tiempos se ha reconocido que el niquel y el cobalto tienen la misma propiedad.

Cuando una lámina ha adquirido en cada uno de sus puntos la mayor cantidad libre de magnetismo que puede admitir, se dice que está *imantada á saturacion*.

El modo mas simple de comunicar el magnetismo consiste en aproximar el estremo *b* (fig. 115) de una barra de acero ó de hierro duro á cualquier distancia, ó aun hasta el contacto, al polo A austral ó boreal de un iman AB. Entónces los magnetismos libres en A y B obran ambos sobre los magnetismos naturales de la barra. El magnetismo de nombre contrario á A es atraido; el del mismo nombre es rechazado; y por consecuencia de esta separacion, el estremo *b* de la barra adquiere un polo de naturaleza contraria á A.

450 Un iman no pierde nada por la imantacion que da á un número cualquiera de barras; ántes al contrario, la repeticion de imantar á otras barras, léjos de debilitarle, aumenta mas bien su enerjía.

La fuerza de los imanes, sean naturales ó artificiales, se hace mas poderosa adaptándoles unos pedazos de hierro dulce á los lados del iman, y esto es lo que se llama sus *armaduras*, las cuales se llegan á hacer magnéticas por influencia, y aumentan con el tiempo su enerjía.

451 Las brújulas de que se hace uso, ya en el mar por los navegantes, ya en tierra al ejecutar operaciones geodésicas, se forman por agujas imantadas que tienen en sus centros una chapa que estriba sobre un estilete de metal no magnético. Debe tener la aguja un pequeño contrapeso, que se pueda acercar y separar del centro, para que cuando se varíe la latitud, se coloque de modo que se conserve horizontal la aguja. Es ventajoso el que las agujas sean bastante delgadas.

Cuando se forman agujas con todas las sustancias sean orgánicas ó inorgánicas, de 4 á 5 líneas de longitud y un cuarto de línea de grueso, y se suspenden á un hilo muy flexible entre los polos opuestos de dos fuertes imanes, se ve que se dirijen constantemente en el sentido de estos polos; y si se les hace oscilar al rededor de su direccion de equilibrio, sus oscilaciones en presencia de los imanes son mas rápidas que cuando están aisladamente suspendidas en el espacio. De donde se deduce que estas pequeñas agujas son sensibles á la influencia de los imanes, y que debe haber alguna causa desconocida que sea mas general.

La inclinacion, la declinacion y la intensidad de las fuerzas magnéticas, varían no sólo en los diversos parajes de la tierra, sino tambien en un mismo lugar, con el tiempo y con algunas otras circunstancias que aun no son bastante conocidas; pero la inclinacion varía ménos con el tiempo que la declinacion. Hay una serie de puntos que forman sobre la superficie de la tierra una curva que se llama el *ecuador magnético*, donde la aguja permanece horizontal; todos los autores han considerado hasta aquí á esta curva como un círculo máximo terrestre, inclinado sobre el ecuador cerca de 12°; pero las últimas observaciones dan á conocer que el ecuador magnético debe formar sobre la superficie de la tierra una curva que encuentre al ecuador terrestre lo ménos en tres puntos. Tambien hay parajes en el globo en que no hay declinacion, y se dirije la aguja exactamente hácia el norte.

La serie de puntos en que esto se verifica forma lo que se llama *líneas sin declinacion*. Estas no siguen los meridianos geográficos, pues son muy oblicuas y ofrecen inflexiones muy irregulares. La posicion de estas líneas no está fija sobre el globo; en 1657 pasaba por Londres, y por Paris en 1664. Esta mudanza no es uniforme, sino muy desigual sobre los diversos paralelos.

La intensidad absoluta de la fuerza magnética en los diversos parajes de la tierra, se ha estudiado ménos todavía que la declinacion é inclinacion; así es, que sobre este punto no hay mas observaciones precisas que las del *Baron de Humboldt* y las de Mr. *Rosel*. Las del primero dan á conocer un aumento general de intensidad de fuerzas magnéticas, yendo del ecuador magnético hácia los polos. En fin, observaciones multiplicadas prueban aun que la aguja imantada está sujeta á variaciones repentinas y accidentales, que coinciden con las apariciones del motéoro luminoso que se llama *aurora boreal*, y cuya causa se ignora.

Segun las últimas investigaciones de Mr. *Hansten*, catedrático de Astronomía en la universidad de Cristianía, parece que hay en nuestro globo cuatro polos magnéticos, ó dos ejes magnéticos que forman ángulos de 28 á 30° con el eje de la tierra. El polo ártico de uno de estos ejes está en el estrecho de Hudson sobre poco mas ó ménos, y su polo meridional en el mar de la India al Sur de la Nueva-Holanda; el polo ártico del otro eje está al norte de la Siberia, en las inmediaciones de Nueva-Zembla, y su polo meridional en el mar del Sur, un poco inclinado al oeste de la tierra del fuego. Estos ejes magnéticos mudan todos los años de posicion, y su movimiento ocasiona las declinaciones de la aguja.

NEUMATOLOGIA.

452 El *aire* que por todas partes rodea la tierra y forma lo que se llama la *atmósfera terrestre*, es un fluido trasparente, invisible, sin color, ni sabor, pesado, compresible y perfectamente elástico. Á cada instante nos podemos asegurar de las cuatro primeras circunstancias; pues hallándonos siempre sumerjidos ó rodeados de él, notamos que da paso á la luz, en lo que consiste el ser trasparente; no le vemos; no nos causa la sensacion de color ni sabor, ó al ménos estamos ya tan acostumbrados á estas sensaciones, que no las distinguimos; pero las otras tres cualidades necesitan examinarse de por sí; y la ciencia que tiene por objeto el indagar todos los fenómenos que tienen relacion con el peso del aire, su compresibilidad y elasticidad, se llama *Neumatologia*.

Hasta el tiempo de *Galileo* se creia que ninguna parte del espacio podia estar vacía de materia, y se espresaba esta imposibilidad diciendo que *la naturaleza tenia horror al vacío*; y á esta causa se atribuia el ascenso del agua en las bombas, inmediatamente que se elevaba el émbolo. *Galileo* fue el primero que atribuyó este fenómeno al peso del aire; pero habiendo muerto sin haberle dado á conocer, su discípulo *Torriceli* le demostró de un modo irrevocable con el siguiente esperimento. Llenó de mercurio un tubo de vidrio de mas de tres pies de largo y cerrado por uno de sus estremos; despues tapó con el dedo el otro estremo del tubo, le invirtió y sumerjió por el estreme abierto sobre una vasija donde habia tambien mercurio; entónces quitó el dedo, y notó que la columna de mercurio contenida en el tubo principió á bajar hasta que llegó á ser de unas 28 pulgadas francesas. Y reflexionando acerca de las causas que puedan orijinar este efecto, no se encuentra otra sino el que la presion que el aire ejerce sobre el mercurio de la cubeta se equilibra con la columna de mercurio, y la longitud de esta misma columna suministra la medida exacta y rigorosa de la presion atmosférica en cada paraje de la tierra, y á cada instante: para cuyo efecto se pone detras de este tubo una escala graduada, y se tiene el instrumento que se conoce con el nombre de *barómetro*, que es de tanta importancia como el termómetro, y que estando bien construido puede servir con mucha utilidad para medir alturas verticales.

453 La altura del mercurio en el barómetro varía por diferentes causas, como son la latitud, la altura del paraje sobre el nivel del mar, los vientos, la temperatura, y la cantidad de agua que contiene el aire en disolucion; pero en un mismo paraje las variaciones tienen sus límites respectivos; así es, que en Madrid las variaciones se pueden reputar en pulgada y media. La mayor altura observada en Madrid en el año de 1800 reducidas todas las observaciones á la temperatura de 15° del termómetro centígrado, ó 12° del de *Reaumur*, fue de 30 pulgadas y 11,75 líneas; la menor fue de 29 pulgadas 10,42 líneas; y la altura media de 30 pulgadas y 6,5 líneas. En el dia se tiene ya la prueba mas decisiva del peso del aire, puesto que se pesa del mismo modo que las peras, las manzanas, la paja, &c.

454 La esperiencia prueba que cuando se comprime el aire, *si está bien seco, disminuye de volúmen exactamente en razon inversa del peso comprimente*. Esta propiedad que se conoce con el nombre de *ley de Mariotte*, nos quiere decir, que *si una masa de aire bájo la presion* P, *ocupa un volúmen espresado por* V, *esta misma masa comprimida por otra presion* P′, *ocupará un volúmen* V′, *tal que se tendrá*

$$P:P'::V':V, \textit{ que da } PV=P'V';$$

por cuyo medio podrémos determinar una cualquiera de las cantidades P, V, P', V', cuando se dén conocidas las otras tres; y tambien se podrán reducir á una presion constante, volúmenes de aire observados á diversas presiones.

La ley de *Mariotte* se verifica igualmente cuando se disminuye la presion; porque entónces se nota que el volúmen del aire aumenta en la misma relacion que disminuye la presion. Lo que da á conocer que el aire tiene elasticidad perfecta, y *esta elasticidad está espresada por la presion que sufre y con que se equilibra.*

455 Como es de la mayor importancia el medir la fuerza elástica del aire, cuando se halla contenido en la parte superior de un tubo ó campana, que por la parte inferior contiene mercurio, agua, ú otro líquido, en cuyo caso la presion de ambos se equilibra con la de la atmósfera, entrarémos en algunos pormenores sobre este punto.

Supongamos que se tiene un tubo lleno de mercurio hasta una cierta altura, colocado de modo que la parte abierta se halle hácia arriba; mídase con toda exactitud la parte que no ocupa el mercurio, y que por consiguiente se halla llena de aire; tápese con el dedo, inviértase el tubo, introdúzcase en una vasija que contenga mercurio, y se notará que este bajará en el tubo mas de lo que se halle en el tubo barométrico, pues que sobre este no carga nada y sobre el otro carga no sólo el azogue del tubo sino tambien el aire que se halla en la parte superior. Espresemos por V el volúmen que ocupaba el aire ántes de invertir el tubo, y por P la presion de la atmósfera, ó su fuerza elástica. Supongamos que cuando el tubo está invertido, esto es, con el estremo cerrado hácia arriba, ocupe un espacio que se puede medir y que espresarémos por V'; este aire dilatado tendrá una fuerza elástica menor que cuando tenia su volúmen primitivo, y si la espresamos por f resultará en virtud de la ley de *Mariotte* $f \times V' = P \times V$, que da $f = \frac{P \times V}{V'}$.

Supongamos ahora que a sea el volúmen total de la capacidad del tubo AC (fig. 116), y tendrémos que $a - V'$ será el espacio AH ocupado por el mercurio, en el tubo sobre el de la cubeta. Y como esta columna inferior del mercurio, mas la fuerza elástica del aire que ocupa la parte superior, deben equilibrarse con la presion atmosférica P, que se ejerce sobre el mercurio de la cubeta, y que se puede medir por el tubo BF que esté purgado de aire en su parte superior, tendrémos $a-V'+\frac{PV}{V'}=P$;

ó quitando el divisor, y preparando (I. 167) sera

$$V'^2+(P-a)V'=PV,$$

que da $V'=-\frac{1}{2}(P-a)\pm\frac{1}{2}\sqrt{(P-a)^2+4PV}$.

Esta ecuacion nos daria el valor de V, sino le conociésemos, y resultaria $V=\frac{V'(P-(a-V'))}{P}$ (52).

456 Si el líquido que hubiese en la campana fuese agua en vez de mercurio, puesto que el peso específico del agua es 13,5 veces menor que el del mercurio, tendríamos que dividir la diferencia $a-V'$ por 13,5, peso específico del mercurio, lo que convertiria la (ec. 52) en $V=\frac{V'\left(P-\frac{a-V'}{13,5}\right)}{P}$.

Todas estas reducciones suponen que el aire no ha variado de temperatura; de modo que hasta ahora lo que tenemos manifestado es que *cualquiera que sea la temperatura*, *con tal que sea constante*, *si se somete una misma masa de aire á presiones diversas y sucesivas*, *los volúmenes que ella ocupa guardan siempre la razon inversa de las presiones.*

457 Suponiendo ahora que permanezca una misma la presion, debemos observar que el aire ó cualquier otro gas, se dilatará si crece la temperatura; y como segun los esperimentos de *Gay-Lussac*, *todos los gases*, *vapores ó mezclas de gases y vapores*, *se dilatan* 0,00375 *de su volúmen*, *tomado á* 0°, *por cada grado del termómetro centígrado*, tendrémos que si se espresa por t el número de grados á que

se toma el gas, su volúmen estará espresado por el que tenia á la temperatura del hielo fundente, que es el que se toma por unidad, +0,00375t, es decir, que estará espresado por 1+0,00375t.

458 El peso del aire se ha determinado en Paris en estos últimos años, tomando todas las precauciones imajinables; pues se ha tenido en consideracion hasta la dilatacion de las vasijas en que se ha pesado, y la presion atmosférica. Más como el peso de la presion varía (453) segun la latitud, y tambien segun la altura del paraje sobre el nivel del mar, resulta que para tener el peso de una porcion determinada de aire en otro paraje cualquiera, se necesita contar con estos dos elementos. Es indispensable atender á estas dos condiciones, á causa de la compresibilidad del aire, y lo mismo debe suceder con los gases; pues un volúmen determinado de aire ó de gas contendrá mas masa, ó lo que es lo mismo, pesará mas á proporcion que se halle mas comprimido: lo que no sucede con los cuerpos sólidos ni con los líquidos, que no se comprimen, al ménos sensiblemente, con su propio peso ni con el de la atmósfera. Por esta causa se ha reducido el resultado obtenido directamente en Paris al que se obtendria bájo la misma presion á la latitud de 45° y al nivel del mar; y ha resultado que en dicho paraje *un centímetro cúbico de aire atmosférico seco, á la temperatura del hielo fundente y á la presion de* $0^m,76$ *pesa 0,001299075 de grama.*

Haciendo las reducciones convenientes á nuestros pesos y medidas (*), resulta que á la espresada latitud de 45° y al nivel del mar, *un pie cúbico de aire atmosférico seco, á la temperatura del hielo fundente y á la presion de 32,73096 pulgadas pesa 562,910631 granos.*

(*) *En el tomo 1.° p. 1.ª de mi tratado elemental de Matemáticas se halla con toda exactitud la correspondencia de todas las medidas y pesas francesas é inglesas con las españolas.*

459 Como el peso de una columna de mercurio de 32,73096 pulgadas de longitud, varía con la intensidad de la pesantez (263 esc.), y la pesantez ó gravedad en un paraje cualquiera se obtiene (326 nota) multiplicando el valor que tiene á 45° de latitud por el factor $1-0,002837\cos.2l$, espresando l la latitud del paraje de que se trata, resulta que deberémos multiplicar por este factor el peso que hemos obtenido; luego se tendrá que *el peso del pie cúbico de aire seco, á la temperatura del hielo fundente y bájo la presion de 32,73096 pulgadas, en un paraje cuya latitud sea* l *y al nivel del mar, estará espresado en granos por* $562,910631\times(1-0,002837\cos.2l)$.

La gravedad varía tambien en razon inversa del cuadrado de la distancia al centro de la tierra; de manera que si llamamos g la gravedad en el nivel del mar, y g' la gravedad á una altura A sobre dicho nivel, y r el radio medio de la tierra, se tiene

$$(r+A)^2:r^2::g:g'=\frac{g\times r^2}{(r+A)^2};$$

luego si queremos que la fórmula anterior nos esprese el peso del pie cúbico de aire en un paraje que esté elevado sobre el nivel del mar la cantidad A, deberémos multiplicar dicha espresion por $\frac{r^2}{(r+A)^2}$; por lo que se nos convertirá en granos en

$$562,910631\times(1-0,002837\cos.2l)\times\frac{r^2}{(r+A)^2}.$$

Pero si efectuamos la division de r^2 por

$$(r+A)^2=r^2+2Ar+A^2,$$

y nos limitamos á los dos primeros términos, en consideracion á que el radio terrestre es muy grande en comparacion de las alturas á que nos podemos elevar sobre la superficie del globo, se convertirá la espresion anterior en

$$562,910631\times(1-0,002837\cos.2l)\left(1-\frac{2A}{r}\right);$$

por cuyo medio podrémos hallar espresado en granos el peso del pie cúbico de aire seco en cualquier paraje, á la temperatura del hielo fundente y bájo la presion de 32,73096 pulgadas.

460 Luego si por l sustituimos la latitud de la plaza mayor de Madrid, que es $40°25'$, y por A la altura de Madrid sobre el nivel del mar, que es 798 varas, y tenemos presente que el radio medio r de la tierra es de 7615916 varas, tendrémos que *en la plaza mayor de Madrid el peso del pie cúbico de aire, bájo la presion espresada de* 32,73096 *pulgadas y á la temperatura del hielo es* 562,595 *granos.*

Pero como en Madrid jamas tiene el aire tanta presion, reducirémos este valor á la presion media de la atmósfera en dicha capital, que supondrémos ser la de 30,54167 pulgadas, que fue la altura media correspondiente al año de 1800; y tambien la reducirémos á 12° del termómetro de *Reaumur*, á la cual está referida la espresada altura media del barómetro. Indaguemos primero la altura de 32,73096 pulgadas del barómetro á la temperatura del hielo, á qué altura corresponde á la de 12° del termómetro de *Reaumur*, que son 15° del centígrado; y como el mercurio se condensa $\frac{1}{5412}$ de su volúmen por cada grado del termómetro centígrado, resulta que si su volúmen á la temperatura del hielo está representado por 1, á la de 15° del termómetro centígrado lo estará por $1+\frac{15}{5412}=1,002772$;
luego tendrémos que multiplicar la espresada altura por este número, y será

$$32,73096 \times 1,002772 = 32,82168 \text{ pulgadas.}$$

Ahora, en virtud de lo espuesto (457), la misma masa de aire que á la temperatura del hielo fundente ocupa un volúmen espresado por un pie cúbico, á la de 12° de *Reaumur* ó 15° del centígrado, ocupará un volúmen espresado por $1+0,00375\times15°=1,05625$; luego tenemos que *á la temperatura de* 15° *centígrados en Madrid*, 1,05625 *pies cúbicos pesan* 562,595 *granos tomado el aire á una presion de* 32,82168 *pulgadas*; y como los volúmenes que ocupa una misma masa de aire están en razon inversa de las presiones que sufren (454), para hallar en qué se convierte este volúmen á la presion media de Madrid, dirémos $30,54167:32,82168::1,05625:x=1,1351$.

Luego la masa de aire que pesaba 562,595 granos, y que ocupaba un pie cúbico, ocupa un volúmen de 1,1351 pies cúbicos; luego para hallar el peso del pie cúbico en estas circunstancias, dividirémos 562,595 por 1,1351, y resultará que *el pie cúbico de aire bien seco, á la temperatura de 12° del termómetro de Reaumur, ó 15° del centígrado, pesa en Madrid, bájo la presion media de 30,54167 pulgadas 495,6344 granos*, que hacen 13,768 adarmes, ú 0,86 de onza.

461 Puesto que ya tenemos determinado el peso del pie cúbico de aire atmosférico, si multiplicamos este valor por el peso específico de un gas cualquiera, tendrémos el peso de un pie cúbico de cualquier gas; luego si el peso específico de un gas, comparado con el del aire, le espresamos por p', tendrémos que $495,6344 \times p'$ espresará el peso del pie cúbico de un gas cualquiera. Á la temperatura del hielo fundente y bájo la presion de 32,73096 pulgadas, el peso del aire atmosférico seco, á igualdad de volúmen, es $\frac{1}{769,44}$ del agua destilada; y á la temperatura de 3°42 y bájo la misma presion, el peso del mismo aire, á igualdad de volúmen, es $\frac{1}{779,37}$ del del agua destilada, que entónces se halla en el mayor grado de condensacion; así, la fraccion $\frac{1}{779,37}=0,00128308$, espresa el peso específico del aire seco, tomando por unidad el del agua en su mayor grado de condensacion.

462 Los químicos han analizado el aire, y han

encontrado que en 100 partes de aire en volúmen se hallan 21 de oxíjeno y 79 de azoe tambien en volúmen, como ya indicámos en otro lugar (381); ademas contiene algunos átomos de ácido carbónico y de agua. La cantidad de ácido carbónico y de agua que contiene el aire, varía segun las localidades y demas circunstancias; pero la proporcion en que se halla el oxíjeno y el azoe es la misma en todos los parajes, en todos tiempos y circunstancias, y á cualquier altura sobre el nivel del mar; pues se ha analizado el tomado á 80000 varas sobre dicho nivel en una ascension aerostática, y se ha encontrado lo mismo.

463 Como las capas inferiores de la atmósfera están cargadas por las superiores, resulta que el aire va estando cada vez mas comprimido segun está mas próximo á la superficie de la tierra; y por consiguiente que en virtud de su elasticidad, procura estenderse en todos sentidos con una fuerza igual al peso de las capas superiores. De donde resulta que la densidad del aire va disminuyendo conforme dista mas de la superficie de la tierra.

464 El *barómetro*, como hemos indicado (452), es un tubo de vidrio de cerca de una vara de largo, cerrado por un estremo, y cuyo interior se ha procurado limpiar y secar perfectamente. Para *cargarle*, se llena todo el tubo con mercurio purificado, y que se halle bien depurado de aire; despues se ajusta bien la yema del dedo en la parte abierta del tubo, se vuelve este, y se introduce en una cubeta que contiene mercurio en cantidad bastante grande para que despues de quitar el dedo no pueda entrar aire en el tubo. En este caso el mercurio del tubo baja hasta que se queda á una altura de 32 pulgadas poco mas ó ménos sobre el nivel del de la cubeta.

La suspension de esta columna de mercurio se debe á la presion que el aire atmosférico ejerce sobre el mercurio de la cubeta: lo cual lo acredita la esperiencia; pues introduciendo el tubo en un recipiente, y estrayendo el aire por medio de la máquina neumática, conforme se va estrayendo va descendiendo el mercurio del tubo; é introduciendo otra vez el aire en el recipiente, vuelve á subir. Y como en llegando á una cierta altura se detiene, es prueba de que allí está equilibrado con el aire atmosférico; luego *una columna vertical de aire atmosférico de toda la altura de la atmósfera, pesa tanto como una columna de mercurio de igual base que la de aire, y de treinta y dos pulgadas poco mas ó ménos de altura.*

465 Si se lleva el barómetro de un paraje á otro mas elevado, la columna de aire que comprime al mercurio de la cubeta será mas corta, y por consiguiente ménos pesada; luego no podrá sostener al mercurio del tubo á la misma altura á que estaba en el sitio mas bajo, y descenderá. Veamos, pues, cómo este descenso puede servir para determinar la altura de un lugar respecto de otro, ó la diferencia de nivel entre dos puntos conocidos.

Para esto, concibamos una columna vertical entera de la atmósfera, compuesta de un gran número de capas horizontales de una misma altura x, bastante pequeña para que la densidad del aire sea sensiblemente la misma en toda la estension de cada capa; y tendrémos que x, $2x$, $3x....nx=X$,
serán las distancias de las bases superiores de estas capas al nivel del mar. Sean A', A'', $A'''....a$, las elevaciones decrecientes del mercurio en el barómetro correspondientes á estas alturas; sea 1 la densidad del mercurio á la temperatura cero, y D la densidad del aire al nivel del mar á la misma temperatura.

Al pasar el barómetro de la primera capa á la segunda, el peso de lo que ha disminuido la columna de mercurio en el barómetro, será igual al peso de la primera capa; al pasar de la segunda á la tercera, el peso de lo que ha disminuido la columna de mercurio en el barómetro, equivaldrá al peso de las dos primeras capas, y así sucesivamente.

466 Teniendo presentes estas y otras muchas consideraciones en el tomo tercero de mi tratado ele-

mental he deducido para medir alturas por medio del barómetro la fórmula siguiente

$$A=66011(1+0{,}002837\cos.2l)\left(1+\frac{2(t+t')}{1000}\right)\log.\frac{h}{h'},$$

en la que A representa en pies la altura que se quiere averiguar; l es la latitud del lugar; t es la temperatura del aire en el paraje mas bajo, y h la altura del mercurio en el barómetro; y t', h' son las mismas cantidades en el paraje mas alto, teniendo cuidado de valuar en pies las alturas h y h'.

Haciendo uso de esta fórmula he encontrado que la altura de Madrid sobre el nivel del mar en Santander, es de 798 varas.

GASOLOGIA.

467 Se da el nombre de *Gasologia* á la ciencia que trata de todo lo que tiene relacion con los gases; pero como hemos visto (424) que todo cuerpo, cuando se le aplica un grado conveniente de calor, toma un estado áeriforme ó gaseoso, debemos hacer una distincion entre los gases que son *permanentes*, y los que resultan de la evaporacion de los líquidos por el calor, los cuales se llaman *vapores*.

Un verdadero gas se diferencia de un vapor, en que la elasticidad del gas aumenta cuando se disminuye el espacio en que está encerrado, y nada de esto sucede en el vapor; pues si disminuye el espacio en que el vapor existe, una porcion de él pierde su elasticidad y pasa á su estado líquido. De manera que el carácter esencial de los vapores es que para cada temperatura solamente puede existir una cantidad limitada en un espacio dado; de modo que disminuyendo gradualmente el espacio, todo el esceso de vapor se reduce á líquido por la presion, sin que la fuerza elástica aumente: siendo así que los gases, resistiendo á toda presion, pueden ser condensados indefinidamente, y no se pueden reducir al estado líquido por ninguna presion conocida hasta ahora.

468 Las fuerzas elásticas de los gases secos, á la temperatura del agua hirviendo y á la del hielo fundente, son entre sí como 1,375 á 1; las del vapor acuoso entre los mismos términos en un espacio saturado, son entre sí como 160 á 1.

Una cantidad cualquiera de agua reducida á vapor adquiere un volúmen 1696,4 veces mayor; el peso específico del vapor acuoso, comparado con el del aire bien seco á la temperatura de 100°, y bájo la presion de 32,73096 pulgadas, da la razon de 10577 á 16964, ó como 1000 á 1604, es decir, muy aproximadamente como 10 á 16 ó como 5 á 8. Pero los vapores, miéntras conservan su estado áeriforme, se dilatan y condensan exactamente como los gases por las mismas mudanzas de temperatura y de presion; de donde resulta que los pesos específicos del vapor acuoso y del aire, conservarán siempre esta misma relacion de $\frac{5}{8}$, cuando ambos estén sometidos á una misma temperatura y á una misma presion.

469 Una cantidad de éter sulfúrico, reducida á vapor y elevada á la temperatura de 100°, daria un volúmen de vapor que guardaria con el de igual volúmen de agua la relacion de 44313 á 16964; lo que manifiesta que el vapor sulfúrico es cerca de 4 veces mas pesado que el vapor acuoso; de donde se podrá deducir que los líquidos que se evaporan con mas facilidad son los que producen vapores mas pesados; el alcool favorece esta conjetura; pero no es general esta ley como lo ha averiguado *Gay-Lussac*.

La fuerza elástica de los gases secos, bájo presiones diferentes y permaneciendo una misma la temperatura, es, así como la del aire, recíproca al volúmen que ocupa. Esta regla es general en la mezcla de los gases secos, y en la mezcla de estos con vapores; de modo que la esperiencia prueba de un modo incontestable, que *si se mezclan varios fluidos, de cualquier naturaleza que sean, que cada uno de por sí sostenga las presiones* p, p', p'', &c. *y que no sean de natura-*

leza de poderse combinar los unos con los otros á la temperatura en que se obra, si se toma un mismo volúmen de cada uno de estos fluidos, y se reducen todos estos volúmenes á uno solo espresado por V, *la fuerza elástica de la mezcla resulta igual á la suma de las fuerzas elásticas parciales, es decir á* $p+p'+p''+$&c.

470 La dilatacion de los gases secos, así como la de los cuerpos sólidos, entre la temperatura del hielo fundente y del agua hirviendo, es proporcional á la dilatacion del mercurio: resultado importante que se debe á *Gay-Lussac*, el cual ha hecho una multitud de esperimentos interesantes é ingeniosos, que le han conducido á los resultados siguientes.

Todos los gases permanentes espuestos á temperaturas iguales bájo la misma presion, se dilatan exactamente la misma cantidad.

La estension de sus dilataciones comunes, desde la temperatura del hielo hasta la de 100° *del termómetro centígrado, es igual á* 0,375 *de su volúmen primitivo á* 0°, *suponiendo constante la presion.*

Entre estos dos límites, la dilatacion de los gases es exactamente proporcional á la dilatacion del mercurio; de donde resulta que *para cada grado del termómetro centígrado y bájo una misma presion, todos los gases se dilatan una cantidad igual á* 0,00375 *del volúmen que ocupaban á la temperatura del hielo.*

Mr. *Dalton*, físico ingles, halló sólo 0,372 en vez de 0,375.

Mr. *Gay-Lussac* se ha asegurado tambien de que las sustancias áeriformes producidas por la vaporizacion de los líquidos, se dilatan absolutamente del mismo modo que los gases, miéntras que no toman la forma líquida. Las mezclas de gases y de vapores conservan tambien la misma ley; pero es necesario que no baje la temperatura del grado en que se hallaba cuando el gas se ha introducido; porque un volúmen de gas á una temperatura dada, no puede contener sino una cierta cantidad limitada de agua en vapores; de lo cual resulta que si está saturado de vapores acuosos á un cierto grado de temperatura, y esta baja, una parte de este vapor se precipitará y pasará al estado líquido. Como esta porcion que se liquida ocupa un volúmen mucho menor, disminuirá el volúmen absoluto del gas, y mudará su fuerza elástica, y por estas dos causas hará variar las leyes de su dilatacion aparente.

471 Para espresar el peso específico de los gases se toma por unidad el del aire atmosférico, el que siendo de una misma naturaleza en todos los climas y en todas las estaciones (462), ofrece una unidad de medida constante: y se suele preferir al agua, porque como las densidades de los gases son muy pequeñas comparadas con la del agua, conviene para hacer sus diferencias mas sensibles y facilitar su comparacion, no referirlas desde luego á este líquido, sino al aire; y pues se sabe que el peso específico del aire comparado con el del agua en su mayor grado de condensacion, es (§ 461) 0,00128308, multiplicando por este valor el peso específico de un gas comparado con el aire, tendrémos su peso específico comparado con el agua.

472 Habiendo ya tratado de las propiedades que son comunes ó generales á todos los gases, pasemos á indicar sus principales propiedades particulares. Los gases permanentes conocidos hasta el dia, no contando al aire atmosférico de que ya hemos tratado en la Neumatologia, son 25 (*); cuatro de ellos son cuerpos simples, á saber: el *oxíjeno*, el *azoe*, el *hidrójeno*, y el *clore*; los otros son compuestos, á saber: *hidrójeno proto-carbonado y per-carbonado, hidrójeno sulfurado, hidrójeno proto-fosforado y per-fosforado, hidrójeno arsenicado, hidrójeno potaseado, hidrójeno*

(*) *Don Saturnino Montojo y Don Francisco Martinez Róbles, alumnos del Real Estudio físico-químico, establecido en el Real Palacio de Madrid, han publicado una tabla sinóptica de todos los gases permanentes.*

teluriado, hidrójeno azoado ó amoniaco, óxide de carbono, ácido carbónico, protóxide de azoe, deutóxide de azoe, ácido nitroso, azoe fosforado, ácido sulfuroso, ácido hidroclórico, ácido cloroso, ácido hidriódico, ácido fluo-bórico, ácido fluórico siliceado, ácido carbo-clórico, y cianójeno ó radical prúsico.

473 El oxíjeno es un gas que no tiene color, olor, ni sabor; su peso específico es 1,10359, suponiendo 1 el del aire atmosférico, y 0,001416 suponiendo 1 el del agua tomada en el mayor grado de condensacion; el peso absoluto de un pie cúbico, á la temperatura de 12° *R*, y á la presion media de Madrid es 15,194 adarmes; no se descompone por el calórico; pero todos los cuerpos combustibles le absorven; su calórico específico comparado con el del aire atmosférico que se toma por unidad, es bájo una misma presion, 0,9765 á volúmenes iguales, y 0,8848 á peso igual; y comparado con el del agua, á peso igual y tomado el oxíjeno á la presion de 32,73096 pulgadas, es de 0,2361. Sin él no puede haber *combustion*, ni *respiracion*; los animales pueden respirarle por algun tiempo; entra como principio constitutivo en el aire atmosférico, formando 0,21 de su volúmen; tambien entra en el agua y forma un tercio de su volúmen ú 0,88 de su peso.

474 El *azoe* es un gas sin color, olor, ni sabor; su peso específico es 0,96913 comparado con el del aire, y 0,00124345 con relacion al del agua; el peso absoluto de un pie cúbico en las mismas circunstancias que el anterior, es 13,343 adarmes; por sí solo no puede mantener la respiracion, ni la combustion; su calórico específico, á volúmen igual, es el mismo que el del aire atmosférico, y en peso igual es 1,0318 del de este, y 0,2754 del del agua. Entra como principio constitutivo en el aire atmosférico, formando 0,79 de su volúmen.

475 El *hidrójeno* no tiene color, ni sabor, pero tiene un olor desagradable; su peso específico es 0,07321 comparado con el aire, y 0,0000939 2 com-

parado con el agua; el peso absoluto de un pie cúbico en las mismas circunstancias (473) es 1,008 adarmes; es el gas que tiene menor peso específico; por lo cual es el mas á propósito para la construccion de los globos aerostáticos. No puede mantener la respiracion ni la combustion; pero él se inflama y arde, con tal que se halle en contacto con el aire atmosférico ó con el oxíjeno, y lo que resulta de esta combustion es *agua*; de manera que se puede decir que el agua es la *ceniza* que resulta de quemar hidrójeno y oxíjeno; entra como principio constitutivo del agua, formando dos terceras partes de su volúmen, ó 0,12 de su peso.

476 El *clore* es un gas amarillo verdoso, que tiene un olor y un sabor muy desagradables; su peso específico es 2,47 comparado con el aire, y 0,0031692 comparado con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico, refiriendo este y todos los demas que sigan á las circunstancias espresadas (473) es 24,007 adarmes; es peligroso el respirarle; destruye los colores vejetales y animales; apaga poco á poco las luces que se sumerjen en él; pero puede mantener la combustion del carbon, del fósforo, del azufre y de muchos metales; se disuelve en el agua hasta la cantidad de 8 ó 10 veces su volúmen en 1 de agua, y en este estado se puede aplicar en las artes para blanquear los lienzos, la cera, &c.; destruye los miasmas pútridos que contiene el aire, y por consiguiente es útil para desinficionar la atmósfera en los hospitales y en las poblaciones en tiempos de epidemia. Á este gas se le llamaba ántes *ácido muriático oxijenado*, y el modo de obtenerle para desinficionar la atmósfera es mezclando el óxide de manganesa, con sal marina y ácido sulfúrico.

477 El hidrójeno se combina en dos proporciones con el carbono; cuando tiene la menor porcion de carbono se llama *proto-carbonado*; y cuando tiene la mayor porcion de carbono, se llama *per-carbonado*. El percarbonado se compone de 0,86 partes de car-

bono y 0,14 de hidrójeno; no tiene color ni sabor; pero su olor es desagradable; su peso específico es el mismo que el del aire atmosférico; no puede servir para la combustion ni respiracion; en contacto con el oxíjeno se inflama con detonacion; su calórico específico, comparado con el del aire, en volúmen es 1,553, y en peso 1,5763; y comparado con el del agua en peso es 0,4207. El *hidrójeno protocarbonado* se compone de 0,73 de carbono y 0,27 de hidrójeno; sus propiedades no se diferencian demasiado de las del precedente; es ménos pesado que el aire, pero mucho mas que el hidrójeno; se desprende del cieno de las aguas estancadas, por lo que se le ha llamado *aire inflamable* de las lagunas.

478 El *hidrójeno sulfurado* se compone en peso de 0,94 de azufre y de 0,06 de hidrójeno; no tiene color; pero su olor y sabor son muy desagradables, como el de los huevos podridos; su peso específico es 1,1912 comparado con el aire, y 0,0015284 comparado con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 26,4 adarmes. Es incapaz de mantener la respiracion ni la combustion.

479 El *hidrójeno* se combina con el fósforo en dos proporciones: cuando tiene la mayor cantidad de fósforo, se llama *per-fosforado*; y cuando la menor, *proto-fosforado*.

El perfosforado no tiene color; su olor es fuerte y desagradable, análogo al de los ajos; su sabor es amargo; su peso específico es 0,9022 comparado con el aire, y 0,00115759 comparado con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 12,401 adarmes. El protofosforado no difiere mucho del perfosforado.

480 El *hidrójeno arsenicado* no tiene color; su olor causa náuseas; es incapaz de mantener la combustion; es muy peligroso el respirarle, pues inmediatamente mata; por lo que no se saben muchas de sus propiedades. Cien partes en volúmen de este gas contienen 140 de gas hidrójeno.

481 El *hidrójeno potaseado* no tiene color; se in-

flama espontáneamente por el contacto del aire y del oxíjeno, cuando está recien preparado; pero despues pierde esta propiedad.

482 El *hidrójeno teluriado* tampoco tiene color; su olor es desagradable, semejante al del hidrójeno sulfurado; arde puesto en contacto con el aire, ó con el oxíjeno y con un cuerpo inflamado.

483 El *hidrójeno azoado ó amoniaco*, se compone en volúmen de tres partes de hidrójeno y una de azoe; no tiene color; su sabor es acre y desagradable; su olor es vivo, picante y escita las lágrimas; su peso específico es 0,596 comparado con el aire, y 0,00076472 con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 8,206 adarmes. Este líquido disuelve casi la tercera parte de su peso ó 430 veces su volúmen; en este estado constituye lo que se llama *amoniaco líquido ó álkali volátil*, de que se hace uso para hacer volver en sí á los que son acometidos de asfixias, desmayos y paroxismos histéricos.

484 El *óxide de carbono* se compone de 0,43 de carbono y 0,57 de oxíjeno; es invisible é insípido; su peso específico es 0,96783 comparado con el aire, y 0,00124 con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 13,325 adarmes; su calórico específico comparado con el del aire en volúmen igual es 1,034, y en peso 1,0805; y comparado con el del agua en peso es 0,2884.

485 El *ácido carbónico* se compone de 0,27 de carbono y de 0,73 de oxíjeno; es invisible; su sabor es acídulo; su olor un poco picante; no es bueno para la combustion ni respiracion; su peso específico es 1,5196 comparado con el aire, y 0,00194077 con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 20,922 adarmes. Su calórico específico comparado con el del aire en volúmen es 1,2583, y en peso 0,828; y comparado con el del agua en peso es 0,221.

486 El *protóxide de azoe* se compone en volúmen de dos partes de azoe y una de oxíjeno, y es conocido con el nombre de *gas oxídulo de azoe*; no tiene

color, ni olor; su sabor es un poco azucarado; su peso específico es 1,36293 comparado con el aire, y 0,00174874 comparado con el agua; su peso absoluto en un pie cúbico es 18,765 adarmes.

487 El *deutóxide de azoe* se compone de partes iguales en volúmen de azoe y de oxíjeno, y se le ha llamado *gas nitroso*; su peso específico es 1,0388 comparado con el aire, y 0,00133285 comparado con el agua. Por medio de este gas se puede averiguar el grado de salubridad del aire atmosférico, ó el oxíjeno que contiene; para lo cual hay un aparato que se llama *eudiómetro*.

488 El *ácido nitroso* se compone de oxíjeno y de azoe; tiene un color rojo anaranjado; un olor y sabor muy fuertes y desagradables; es muy perjudicial para la respiracion; su peso específico es 2,10999 comparado con el aire, y 0,00270828 con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 29,05 adarmes.

489 El *azoe fosforado* se compone de un átomo de fósforo y un volúmen igual al suyo de azoe; no tiene color; huele como el fósforo, y es un poco mas pesado que el azoe.

490 El *ácido sulfuroso* se compone de 0,52 partes de azufre y de 0,48 de oxíjeno; no tiene color; su sabor es fuerte y desagradable; su olor vivo y sofocante, análogo al del azufre encendido; apaga los cuerpos inflamados, y mata los animales que le respiran; su peso específico es 2,2553 comparado con el aire, y 0,00289372 comparado con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 31,051 adarmes.

491 El *ácido hidroclórico* se compone de volúmenes iguales de clore y de hidrójeno, y es conocido con el nombre de *ácido muriático*; es invisible; su olor es picante; apaga los cuerpos en combustion, y mata los animales que le respiran; su peso específico es 1,278 comparado con el aire, y 0,00163977 comparado con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 17,596 adarmes.

492 El *ácido cloroso* se compone de dos partes de

clore y una de oxíjeno; tiene un color amarillo verdoso; su olor participa del del clore y del que tiene la azúcar quemada; su peso específico es 2,41744 comparado con el aire, y 0,0010176 con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 33,083 adarmes.

493 El *ácido hidriódico* contiene la mitad de su volúmen de hidrójeno y la otra mitad de oxíjeno; no tiene color; es muy oloroso y sabroso; apaga los cuerpos encendidos, y mata los animales que le respiran.

494 El *ácido fluo-bórico* es invisible; su olor es picante, un poco análogo al del ácido hidroclórico; sofoca los animales que le respiran, y apaga los cuerpos encendidos; su peso específico es 2,371 comparado con el aire, y 0,00304218 con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 32,644 adarmes.

495 El *ácido fluórico siliceado* se compone de 0,61 de sílice y 0,39 de ácido fluórico; no tiene color; su olor es muy picante, análogo al del ácido hidroclórico; su sabor es fuerte y ácido; no sirve para la combustion ni respiracion; su peso específico es 3,574 comparado con el aire, y 0,00458573 con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 49,207 adarmes.

496 El *ácido carbo-clórico* se compone de volúmenes iguales de clore y de gas óxide de carbono secos; no tiene color; su olor es desagradable y sofocante; apaga con prontitud los cuerpos encendidos, y es peligroso el respirarle; su peso específico es 3,4269 comparado con el aire, y 0,00439698 con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 47,182 adarmes.

497 El *cianójeno ó radical prúsico* se compone de dos partes en volúmen de vapor de carbono y una de azoe, condensados hasta que formen un tercio del volúmen que ocupaban los dos componentes; es invisible; su olor es sumamente vivo y penetrante; ahoga los animales, y apaga los cuerpos encendidos; su peso específico es 1,8064 comparado con el aire, y 0,00231775 comparado con el agua; y su peso absoluto en un pie cúbico es 24,871 adarmes.

HIGROMETRÍA.

498 *Higrometría* es la ciencia que enseña á conocer los grados de sequedad y de humedad de los cuerpos, y particularmente de la atmósfera; y se llama *estado higrométrico de los gases* á la cantidad mayor ó menor de vapores acuosos que contienen.

Para medir estos grados de humedad se han inventado los instrumentos que se llaman *higrómetros*, y que casi todos los construidos hasta el dia se han hecho con sustancias orgánicas. Los vapores acuosos, introduciéndose en estas sustancias, mudan sus dimensiones, y aun su forma, de un modo muy sensible, y es bien conocida para todos la diferente elasticidad que tiene un pedazo de pergamino húmedo, y un pedazo de pergamino seco. Sobre este principio aplicado á las cuerdas de vihuela están fundadas las construcciones de estas pequeñas figuras, que indican por sus movimientos la sequedad y la lluvia; estas figuras son por lo regular de capuchinos, de aguadores, ó de lo que el capricho ó fantasía del constructor le sujiere, pues la forma de la figura es de todo punto independiente del efecto.

499 Entre las sustancias que gozan de estas propiedades higrométricas, no hay ninguna mas sensible, ni mas constante que los cabellos lavados en una débil disolucion de potasa, que les quite la grasa que tienen en su estado natural.

El cabello, despues de esta preparacion, se acorta por la sequedad, y se alarga por la humedad; lo cual no le impide alargarse tambien por el calor y acortarse por el frio, como todos los otros cuerpos, pero en una proporcion mucho menor. *Saussure* se ha servido del cabello así preparado para construir el higrómetro que lleva su nombre, con el cual se ha conseguido en las investigaciones de este género una exactitud hasta entónces desconocida. Este higrómetro está representado en la (fig. 117); el estremo superior del cabello está fijo en S por una pinza que le retiene; el estremo inferior está unido del mismo modo á la circunferencia de una polea P muy móvil, que por un lado está tirada por el cabello y por el otro por un pequeño peso R; cuando el cabello se acorta hace jirar la polea en un sentido, y cuando se alarga, el pequeño peso la hace jirar en otro; la polea con su movimiento hace mover á una larga aguja *n* sobre un arco de círculo graduado, y de este modo indica la dilatacion ó contraccion que padece el cabello, por consecuencia de las variaciones de la humedad del aire que le rodea.

500 Si se pone este higrómetro en un aparato que contenga aire ó un gas cualquiera, y cuyas paredes estén mojadas de agua, se nota que la aguja marcha sobre la division que indica que el cabello se ha alargado, y por último se detiene en un cierto punto. Entónces, si se coloca el instrumento en otro aparato en que el aire esté encerrado algunos dias con sustancias desecantes como el *muriate ó clorureto* de cal, ó la *potasa cáustica*, se ve que inmediatamente principia la aguja á retrogadar, lo que supone una contraccion del cabello; despues de lo cual la aguja se detiene. Cualquiera que sea la temperatura á que se obra, con tal que el un aparato esté saturado de vapores acuosos y el otro esté perfectamente privado de ellos por la desecacion, estos puntos estremos son siempre los mismos sobre el limbo del instrumento. *Saussure* llama al uno de los dos el término de la *sequedad estrema*, y le señala por 0; llama al otro el término de la *humedad estrema*, y le señala con el número 100; despues dividiendo el arco que comprenden sobre el limbo en 100 partes iguales, cada una de estas partes le suministra otros tantos grados intermedios de humedad.

501 *Saussure* ensayó si los vapores del *éter*, del *alcool* y de otras sustancias, producian el mismo efecto que el vapor acuoso: y halló que si producian algunos efectos muy débiles, era solamente en razon

del agua que ellas cedian ó que podian absorver.

El *higrómetro* construido con cuidado, es constante en sus indicaciones, y es comparable; de modo que en esta parte de la Física ejerce las mismas funciones que el termómetro para los fenómenos del calor.

502 Tambien se ha usado de un filamento de ballena para la construccion del higrómetro; y ahora acaba de inventar Mr. *Wilson* un higrómetro muy simple y al mismo tiempo muy sensible. Para construirle, toma una vejiga de raton, y despues de haberla lavado en agua fria, la retuerce, y une á su orificio un tubo capilar de vidrio; lo llena todo de mercurio, y obtiene el término de la humedad metiendo la vejiga en agua á la temperatura de 15°,5 centígrados. El punto de sequedad le determina encerrando ya sea todo el instrumento, ya sea sólo la vejiga que le termina, en un recipiente de vidrio que contenga una cantidad de ácido sulfúrico de una densidad igual á 1,85. El intervalo comprendido entre estos dos puntos fijos, que es muy considerable, se divide en 100 partes iguales. El autor asegura que ha tenido higrómetros construidos de este modo, que despues de tres años no han padecido alteracion ninguna en su marcha.

ANEMOLOGIA.

503 *Anemologia* es la ciencia que trata de dar á conocer el oríjen, direccion y todo lo que tiene relacion con los *vientos*.

Se da el nombre de *viento* á una porcion de aire atmosférico que se mueve en una direccion cualquiera. Los vientos pueden ser *constantes*, *periódicos* y *variables*. Los constantes son aquellos que soplan ó vienen siempre de un mismo lado; los periódicos son los que reinan en ciertas épocas solamente; y los variables son aquellos que se verifican sin saberse todavía las épocas fijas, ó las leyes que guardan en su aparicion.

Los vientos provienen de la falta de equilibrio en la atmósfera, producida las mas veces por el calor, que aumentando la elasticidad del aire, rechaza al que está en sus inmediaciones, y de este modo se rompe el equilibrio. En efecto, como el aire calentado es mas lijero, se debe elevar por las leyes de la hidrostática (371), y entónces se acumula allí el aire frio contiguo, lo que produce una corriente que se esparce por todos lados. El paso del sol y de la luna por el meridiano ejercen su atraccion sobre la atmósfera, y se verifican mareas atmosféricas análogas al flujo y reflujo del mar.

504 En el viento se deben considerar cuatro cosas, á saber: su *direccion*, su *velocidad*, su *fuerza*, y el *tiempo* que cada uno reina; segun la direccion del viento con relacion á los puntos cardinales, se les dan diversos nombres; y se conocen ó distinguen hasta 32, que se suelen llamar *rumbos*, los cuales se señalan en la (fig. 118) que se llama *rosa de los vientos ó rosa náutica*. Los cuatro vientos principales están señalados con las letras N, E, S y O, iniciales de *Norte*, *Este*, *Sur* y *Oeste*: los cuales están en los estremos de las direcciones NS y EO que se cruzan á ángulos rectos. Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los cuatro ángulos rectos que forman los cuatro vientos cardinales, tendrémos otros cuatro intermedios que reciben el nombre de los dos puntos cardinales entre que se hallan, y se señalan por N E, SE, S O, N O, iniciales de *Nord-Este*, *Sud-Este*, *Sud-Oeste*, *Nor-Oeste*. Si dividimos en dos partes iguales cada uno de los ocho ángulos de 45°, resultarán las direcciones de otros ocho vientos ó rumbos, señalados por N N E, E N E, E S E, S S E, S S O, O S O, O N O y N N O, y se leen *Nor-Nord-Este*, *Es-Nord-Este*, *Es-Sud-Este*, *Sur-Sud-Este*, *Sur-Sud-Oeste*, *Oes-Sud-Oeste*, *Oes-Nor-Oeste* y *Nor-Nor-Oeste*. Con lo cual se tienen ya 16 vientos; y dividiendo en dos partes iguales cada uno de los 16 ángulos que forman, se tendrán los otros 16 que se

señalan en la figura; los del cuadrante NE se leen *Norte-cuarta al Nord-Este*, *Nord-Este cuarta al Norte*, *Nord-Este cuarta al Este*, *Este-cuarta al Nord-Este*; y análogamente se leerán los demas.

505 Se tienen muy pocas observaciones acerca de la velocidad del viento. Don Jorje Juan hizo algunos esperimentos en la bahía de Cádiz; y es lástima que no se hayan repetido. La fuerza del viento contra un objeto proviene de su velocidad, de la densidad del aire que se mueve, y de la superficie que presenta el cuerpo al viento. En muchas ocasiones se verifica que un huracan arranca árboles, derriba casas y eleva las aguas del mar á una altura espantosa. Esta fuerza proporciona un ajente ó fuerza motriz á la mecánica, que se aplica con mucha utilidad en los molinos, batanes &c.

Para saber los nombres y efectos que produce el aire segun su velocidad, sirve la adjunta

Tabla que manifiesta los diferentes nombres que se dan al aire, segun la velocidad que lleva por segundo.

Velocidad espresada en pies.	*Nombres que va tomando el aire.*
2................	insensible;
4................	ya es sensible;
7................	moderado;
19................	algo fuerte;
36................	fuerte;
72................	muy fuerte;
81................	viento de tempestad ó tempestuoso;
97................	de gran tempestad ó muy tempestuoso;
130................	huracan;
162................	huracan fuerte, que derriba las casas y arranca los árboles

Nota. La velocidad mas conveniente para los molinos de viento es la de 21 á 30 pies por segundo.

Acerca de la duracion de los vientos no se tienen observaciones, y seria de la mayor importancia; pues si se observase con exactitud por buenos *anemómetros* la direccion, duracion y velocidad de los vientos en cada paraje, y se tuviesen en consideracion los puntos lunares y el movimiento del sol, se llegarian á deducir las leyes con que obran en los diferentes puntos del globo. Los anemómetros ordinarios ó *veletas* que se ponen en las torres, sólo indican la direccion del viento, y eso con imperfeccion. *Wolfio* y *Ousembray* describen anemómetros mejores.

ACÚSTICA.

506 *Acústica* es la ciencia que trata del sonido; y para dar una idea de ella, observarémos que las partículas de los cuerpos elásticos cuando son estirados y salen momentáneamente de su posicion natural, vuelven á ella por una multitud de oscilaciones. Estas vibraciones se comunican al aire, que siendo un cuerpo compresible y elástico, producen en él ciertas condensaciones y dilataciones alternativas, que al principio son escitadas en las capas mas inmediatas á los cuerpos puestos en movimiento, y de estas se propagan á las mas distantes en toda la masa del aire, del mismo modo que cuando se arroja una piedra sobre un agua tranquila, las ondas que se forman, se propagan circularmente por todo al rededor del punto donde cayó. Cuando estas dilataciones y contracciones se mueven con bastante rapidez, escitan en el órgano del oido la sensacion de lo que se llama un *sonido*; y la rapidez mas ó ménos grande de su sucesion, forma toda la diferencia de los tonos agudos ó graves, por los cuales se distinguen los sonidos.

507 Se debe hacer una distincion entre lo que se llama *sonido*, y lo que simplemente es un *ruido*; el primero es susceptible de *armonía* y *valor musical* ó *tiempo*; el segundo carece de ambas cualidades. El primero le producen las campanas, una cuerda mas

ó ménos estendida, un tubo &c.; el segundo un cañon ó arma de fuego, cualquier choque de las armas blancas, un peso que cae, &c. De modo que cuando las oscilaciones son tan rápidas que no producen sensaciones distintas en el oido, entónces sólo producen ruido.

La *música* sólo trata del verdadero sonido, que es susceptible de entonacion y medida, y hay que considerar en ella lo que se llama *melodía* y *armonía*; la melodía es la sucesion de varios sonidos unos despues de otros; y armonía es la verificacion de dos, ó tres ó mas sonidos á un mismo tiempo.

508 Desde luego es bien fácil de probar que en efecto los cuerpos sólidos, cuando son sacudidos de modo que produzcan un sonido distinto y no un ruido, vibran con mucha rapidez; porque si se les toca entónces lijeramente con el dedo, se conoce con mucha distincion una multitud de pulsaciones que se suceden con una estrema viveza; esta observacion se puede hacer fácilmente sobre una campana que se acaba de sacudir con el badajo.

Cuando una lámina elástica tenga tal longitud, que haga 32 oscilaciones por segundo, hará un sonido bien distinto; y cuando haga exactamente este número de vibraciones, el sonido que cause será el que en los órganos es producido por la resonancia de un tubo abierto de la longitud de treinta y dos pies. Si se acorta mas la parte saliente de la lámina, se percibirá un mayor número de oscilaciones, y los sonidos son mas *agudos*; donde vemos que el tono mas agudo ó mas *grave* de los sonidos producidos por un cuerpo sonoro, depende de la rapidez de sus vibraciones. No basta el que el sonido sea escitado por las vibraciones rápidas de los cuerpos elásticos, sino que para que se trasmita es preciso que haya aire, pues en la máquina neumática no se perciben los sonidos, aunque haya sacudimiento, y por consiguiente vibraciones en los cuerpos; por cuyo motivo se dice que el *aire es el vehículo del sonido.*

509 *Los líquidos tambien sirven para trasmitir el sonido*; porque si se chocan dos piedras debajo del agua, se percibe el sonido de este choque aun á grandes distancias, cuando uno tiene la cabeza dentro de este líquido. *El sonido tambien se trasmite á traves de los cuerpos sólidos*; en efecto, el minador, al trabajar en su galería, oye los golpes del minador enemigo, y juzga de este modo de su direccion.

La propagacion del sonido por medio del aire es uniforme; y el valor de su velocidad por segundo sexagesimal, deducido de un gran número de esperimentos hechos en diversos parajes, se puede reputar en 413 varas. Esta velocidad es sensiblemente la misma, ya esté el tiempo nublado ó sereno, con tal que el aire se halle en reposo. Pero si estuviese ajitado, la velocidad del viento, descompuesta segun la direccion de la línea sonora, aumentará ó disminuirá en todo su valor á la velocidad de la propagacion del sonido, segun le sea favorable ó contraria.

La teoría da *sólo* 338 varas, que es cerca de $\frac{1}{6}$ ménos de la que da la esperiencia. Segun *Laplace* esto proviene del calor que se desenvuelve con el aire por efecto de la compresion; pues se sabe hace mucho tiempo que una masa de aire que se comprime, desprende calor, y cuando se dilata produce frio.

510 Los sonidos que componen la *escala música* ó *diapason*, son producidos por un número de vibraciones tal, que tomando por unidad el número de vibraciones que pertenece al sonido fundamental *ut*, los demas se hallan espresados en la tabla siguiente:

Nombre de los sonidos...	*ut*,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	*ut*.
Números de vibraciones en igual tiempo..	1,	$\frac{9}{8}$,	$\frac{5}{4}$,	$\frac{4}{3}$,	$\frac{3}{2}$,	$\frac{5}{3}$,	$\frac{15}{8}$,	2.
Longitudes de las cuerdas que los dan.......	1,	$\frac{8}{9}$,	$\frac{4}{5}$,	$\frac{3}{4}$,	$\frac{2}{3}$,	$\frac{3}{5}$,	$\frac{8}{15}$,	$\frac{1}{2}$.

Si se reunen sobre una tabla ocho cuerdas de la misma naturaleza, estendidas por pesos iguales, y cuyas longitudes se hallen en razon inversa de los números de oscilaciones que pertenecen á cada sonido, estas cuerdas cuando se les haga vibrar, producirán los siete sonidos del diapason, como se puede uno convencer por la esperiencia; y si se emplea un número mayor de cuerdas, cuyas longitudes sean sucesivamente dobles, cuádruplas, óctuplas &c. de las precedentes, se tendrán otros tantos nuevos diapasones, cuyos sonidos serán la *octava*, la *doble octava*, ó la *triple octava* de la primera subiendo.

Esc. La primera de las dos series anteriores puesta en lenguaje vulgar, quiere decir, que dos cuerdas están á la segunda la una de la otra, cuando la primera hace ocho vibraciones miéntras la otra nueve; dos cuerdas están á la *tercera*, cuando miéntras la una hace cuatro vibraciones la otra hace cinco; están á la *cuarta*, cuando miéntras la una hace tres vibraciones la otra hace cuatro; están á la *quinta*, cuando la una hace dos vibraciones miéntras la otra hace tres; están á la *sesta*, cuando en el tiempo que la una hace tres la otra hace cinco; están á la *séptima*, cuando miéntras la una hace ocho vibraciones la otra hace quince; y están á la *octava*, cuando en el tiempo que la una hace una vibracion la otra hace dos.

511 En los instrumentos de música, tales como el fortepiano, se sacuden las cuerdas de las diversas octavas por martillos, que se ponen en movimiento por medio de pequeñas palancas blancas y negras de madera sobre que se ponen los dedos, y se llaman *teclas*.

Las que pertenecen á la escala ó tono de *ut*, son las teclas blancas que sucesivamente suben. Así, la tecla que da el *re* es la segunda contando desde el *ut*; la que da el *mi* es la tercera; la que el *fa* es la cuarta; la que da el *sol* es la quinta; y así sucesivamente. De aquí ha provenido el uso de designar las notas por el lugar que ocupan á continuacion del *ut*. Así, se dice que *mi* es la tercera de *ut*; *fa*, la cuarta; *sol*, la quinta; *la*, la sesta; *si*, la séptima, y así sucesivamente; de modo que si se enuncia por ejemplo la *décimaséptima* de *ut*, esto quiere decir que es la *tecla décimaséptima* partiendo de *ut* hácia *la*; lo que corresponde por consiguiente á la doble octava de *mi*.

Variando la tension ó tirantez de la cuerda, se puede tambien duplicar y triplicar el número de vibraciones, ó en general multiplicarle en la relacion que nos acomode.

512 Escuchando con atencion el sonido producido por una cuerda metálica, se puede fácilmente reconocer en él la mezcla de otros muchos sonidos mas agudos que el fundamental; de modo, que si este se halla representado por *ut*, se oye muy distintamente, por ejemplo, el *sol* agudo y *mi* sobreagudo, es decir, la octava de su quinta, y la doble octava de su tercera, las cuales están respectivamente representadas por los números 3 y 5 cuando se espresa por 1 el sonido fundamental. Un oido bien ejercitado aprecia aun la octava de *ut*, que está representada por el sonido 2, y la doble octava cuyo valor es 4. De suerte que generalizando este resultado, se concibe que la misma cuerda hace oir al mismo tiempo, pero con una intensidad continuamente decreciente, los sonidos 1, 2, 3, 4, 5, &c., es decir, todos aquellos que ella puede dar dividiéndose en un número entero de partes; lo cual ha hecho dar á estos sonidos el nombre de *armónicos*, porque la palabra *armonía* espresa la resonancia simultánea de muchos sonidos, cuyo conjunto agrada al oido. Á fin de que su coexistencia en la cuerda vibrante sea mas fácil de reconocer, es necesario hacer la esperiencia con una cuerda bastante gruesa y larga, para que el sonido principal sea grave é intenso.

Los esperimentos manifiestan que la resonancia simultánea de un sonido principal con la serie de sus armónicos, forma un *acorde* tan agradable, que no se le puede alterar en la cosa mas mínima sin que se perciba al instante; así es que se le ha dado el nombre de *acorde perfecto*; y el primer sonido, del cual se derivan todos los otros, se ha llamado *fundamental* ó *generador*. Designando este sonido por *ut* ó 1, se halla que todos los otros sonidos del diapason, escepto el *fa* y el *la*, se derivan de las armónicas de *ut* comprendidas en la octava de *ut*.

513 En los instrumentos de viento, que se componen generalmente de tubos, el aire contenido en ellos es el que se pone en vibracion segun el sentido de su longitud, por diversos procedimientos. Estas vibraciones trasmitidas al aire esterior producen en él un sonido que viene á ser apreciable cuando son bastante rápidas. Así, en estos instrumentos no es el mismo tubo, sino la columna de aire encerrada la que forma el cuerpo sonoro, y su teoría es de todo punto igual á la de las vibraciones longitudinales. Para poner en movimiento la columna de aire encerrada en un tubo, de modo que le haga producir un sonido, no es necesario empujarla ó comprimirla enteramente; pues esto no haria sino trasportarla paralelamente á ella misma, ó condensarla en un espacio menor; es necesario escitar en uno de sus puntos, á uno de sus estremos por ejemplo, una presion de rápidas condensaciones y dilataciones alternativas, tales como las que resultarian de las idas y venidas de un cuerpo sólido puesto en vibracion. Estos movimientos alternativos, trasmitidos á toda la columna de aire, la obligan á oscilar en el sentido de su longitud, y escitan en ella ondas sonoras, iguales á las que hemos descrito, tratando de la propagacion del sonido.

El medio mas simple de conseguir este movimiento de oscilacion, consiste en soplar en el tubo de manera que una lámina delgada de aire, puesta en movimiento con rapidez, venga á quebrarse contra el filo, ó las orillas del instrumento, y así es como se silba en una llave hembra. En general, lo que se llama un *silbato* es un tubo cilíndrico, en que se sopla por un orificio, hecho hácia una de sus orillas; y segun sea mas ó ménos largo, resultan los sonidos mas graves ó mas agudos, y hé aquí por qué los instrumentos de viento tienen aquellos agujeros laterales, que cuando se destapan, elevan cada uno de ellos el sonido fundamental una cantidad relativa á su magnitud y á su distancia de la embocadura. En dichos instrumentos tambien se ha observado que soplando con mas violencia dan la octava del tono que darian con ménos aliento.

514 Los gases son tambien á propósito para la propagacion del sonido; y se ha encontrado que los sonidos orijinados en varias columnas gaseosas guardan aproximadamente la razon inversa de las raices cuadradas de sus densidades, á igualdad de presion; de donde resulta que el gas hidrójeno, que es el mas lijero de todos, da los sonidos mas agudos, lo cual está confirmado por la esperiencia.

ÓPTICA.

515 Todas las madrugadas podemos observar que cuando el sol principia á elevarse sobre el horizonte, se va presentando á nuestra vista que ántes no le descubria: lo cual nos manifiesta que hay necesariamente entre este astro y nosotros un cierto modo de comunicacion que nos hace conocer su existencia, sin que tengamos necesidad de tocarle. Este modo de comunicacion que se ejerce así á cierta distancia, y se trasmite por los ojos, constituye lo que se llama *luz*; y la ciencia que trata de sus propiedades, se llama *Óptica*. Los cuerpos que pueden presentarla inmediatamente, se llaman cuerpos *luminosos por sí mismos*, tales son el *sol* y las *estrellas*. Generalmente todas las sustancias materiales vienen á ser luminosas tambien, cuando su temperatura está suficientemente elevada; y pierden esta facultad al enfriarse. Sin embargo, si en este último caso son iluminadas por un cuerpo luminoso, pueden enviarnos todavía su luz como si fuese propia, y entónces vienen á ser visibles para nosotros por *reflexion*.

La ciencia de la luz se suele dividir en cuatro tratados, á saber: en *Óptica* propiamente dicha, que trata de las propiedades de la luz directa; *Perióptica*, que trata de la direccion que toma la luz al pasar por junto á otros cuerpos; *Catóptrica*, que trata de la luz refleja; y *Dióptrica*, que trata de la luz refracta.

En todos los casos cuando un objeto nos trasmite la sensacion de su existencia por medio de la luz, esta trasmision se hace uniformemente, en línea recta, y casi instantáneamente; pues cuando el sol se halla en uno de los puntos de su órbita, nosotros tenemos la sensacion de su presencia en dicho punto 8′ 13″ despues que ha llegado allí; y como la distancia media del sol á la tierra es 27440453 leguas de 20000 pies, resulta que la velocidad con que camina la luz es de 55660 leguas por segundo.

516 Cuando la luz se propaga de un cuerpo luminoso hácia nosotros, nos llega siempre á traves de diferentes medios, tales como el aire, el agua ú otros cuerpos diáfanos que le permiten el paso. Los rayos al entrar en estos cuerpos siguen algunas veces su ruta en línea recta; pero lo mas regular es que se desvien de su direccion, á cuyo fenómeno se llama *refraccion*.

Cuando los cuerpos no dan paso á la luz, la reflejan; y si tienen bastante densidad y están pulimentados, la reflejan con regularidad y presentan una imájen distinta del objeto luminoso. La esperiencia prueba que *el rayo que viene del cuerpo luminoso, y que se llama* rayo incidente, *y el rayo reflejo se hallan ambos en un mismo plano, normal á la superficie de incidencia*; *y ademas se verifica que el rayo incidente y el reflejo forman con la superficie reflectante ángulos iguales.* De manera que si suponemos que NL (fig. 119) sea normal á la superficie reflectante KLH, y que SL sea el radio incidente, y RL el reflejado, se llama comunmente á SLH *el ángulo de incidencia* ó simplemente *la incidencia*, y á RLK el ángulo de *reflexion*; y como segun lo que acabamos de indicar, debe ser RLK=SLH, resulta que *el ángulo de reflexion es igual con el de incidencia.*

Como la reflexion de la luz se verifica con un rigor matemático segun la ley que hemos enunciado, se puede hacer uso de esta propiedad con mucha ventaja para medir los ángulos formados por dos superficies planas pulimentadas: y en esta propiedad estriba el *goniómetro* que Mr. *Charles* emplea para medir los ángulos de los cristales; este apreciable instrumento es mas ventajoso que el descrito por *Haüi* y por *Brongniart*, por cuanto es adecuado para la repeticion de los ángulos.

En la reflexion de la luz está fundada la construccion de los *espejos*: los cuales pueden ser *planos*, *cóncavos* y *convexos*; los planos dan á conocer la imájen *igual* al objeto; los cóncavos la hacen conocer *mayor*, y los convexos *menor*. Los espejos ordinarios se hacen de cristal, poniéndoles detras una aleacion de azogue y estaño; pero se pueden hacer de cualquier sustancia que sea capaz de recibir pulimento; para los telescopios astronómicos se hace uso de los espejos de metal. Los Incas del Perú los tenian de obsidiana.

La fuerza que produce la reflexion de la luz en la superficie de los cuerpos, parece que es á primera vista un simple resultado de la elasticidad, que obliga á las moléculas luminosas á reflejarse en la superficie de los cuerpos pulimentados.

517 Cuando la luz penetra en lo interior de los cuerpos, si la incidencia es oblicua no continúa su ruta en línea recta, sino que se desvia de su direccion; y este fenómeno es el que hemos llamado la *refraccion de la luz*. La cantidad que se separa de su direccion primitiva, depende de la diferencia que existe entre la densidad y naturaleza del medio que deja y la de aquel en que entra. Si los dos medios son homojéneos y de densidad igual, la refraccion es nula, y el rayo continúa su ruta en línea recta. Si son de la misma naturaleza, pero diferentes en densidad, el rayo luminoso al entrar en el mas denso se aproxima á la normal en su superficie comun; y si la naturaleza y densidad de los medios difieren, concurren ambas circunstancias al fenómeno, y el rayo se

aproxima á la normal en el medio cuya accion sobre la luz es mas fuerte.

La esperiencia prueba que *el rayo incidente y el refracto están siempre comprendidos en un mismo plano normal á la superficie de incidencia*; ademas, si los medios no mudan, *el seno del ángulo de incidencia y el de refraccion guardan siempre una relacion constante.*

En la refraccion que padece la luz al atravesar por diferentes medios, está fundada la construccion de las *lentes*, que son de tanta importancia para aliviar y ayudar la vista, y para la construccion de muchos instrumentos útiles.

Todas las formas que pueden tener los vidrios que pueden servir para este objeto, están representadas en la (fig. 120). La A por estar terminada por dos superficies convexas, se llama *convexo-convexa*; y por la semejanza que tiene con una lenteja, es por lo que á todos estos vidrios se les ha dado el nombre de *lentes*; la B se llama *plano-convexa*; las C y D *cóncavo-convexas*, y difieren entre sí en que la C es mas gruesa hácia el centro y la D al contrario; la E *plano-cóncava*; y la F *cóncavo-cóncava*.

Las A, B, C, sirven para reunir los rayos de luz; y las D, E, F para separarlos; las primeras sirven para auxiliar la vista de los que la tienen cansada, que se llaman *présbitas*; y las segundas, para los que por tener los ojos demasiado esféricos ó saltones, ó demasiada fuerza refrinjente en ellos, no ven sino á muy poca distancia, y se llaman *míopes*.

518 Disponiendo sobre un mismo eje muchas *lentes*, cuyos focus é intervalos se hallen convenientemente calculados, se llegan á formar sistemas que hacen ver los objetos mas distintos y mayores que con la simple vista; y en esto consisten las *lunetas* ó *telescopios*, que tantas utilidades producen á la Astronomía, Navegacion &c.; y los *microscopios*, por cuyo medio se consigue el hacer visibles hasta los seres mas imperceptibles.

Para dar á conocer cómo se verifica este efecto en las lentes, supongamos que sobre la lente convexo-convexa (fig. 121) que es el *tipo* de todas las de primera clase, caigan varios rayos paralelos, de los que supondrémos que el uno pase por el centro; como este será perpendicular á la superficie refrinjente no padecerá refraccion, y continuará por lo interior de la lente, y luego saldrá de ella sin mudar su direccion; pero los demas rayos paralelos, al entrar en la lente se hacen convergentes, y al salir se hacen todavía mas convergentes, de modo que se van á reunir en un punto F que se llama el *focus* de la lente; y se da el nombre de *distancia focal* á la que hay desde dicho punto á la lente. Lo contrario se verifica en la segunda clase de lentes, como se ve (fig. 122).

519 Los telescopios dióptricos se pueden considerar como esencialmente compuestos de dos sistemas de vidrios, cuyos destinos son diferentes. El primero que se llama el *objetivo*, está situado del lado del objeto, y su oficio es el proyectar detras de él á una cierta distancia una pequeña imájen del objeto, muy clara y muy luminosa.

El otro sistema que se llama *ocular*, está situado del lado del ojo del observador, y está destinado á hacer mayor la pequeña imájen formada en el focus del objetivo, y á enviarla á una distancia del ojo que sea la conveniente para la vision distinta; por lo que la disposicion del ocular debe modificarse segun las diferentes vistas. Todas las lentes que componen un telescopio, se deben colocar en el eje de un tubo ennegrecido, á fin de que la luz de los objetos situados sobre la prolongacion de este eje sea la sola que pueda llegar al ojo; y aun es necesario que el tubo total se componga de dos partes móviles la una en la otra, de las que la una comprenda el objetivo y la otra el ocular, para que cada observador tenga la facultad de aproximar ó retirar el uno del otro y ponerle al alcance de su vista.

Sustancias de densidad muy diferente pueden tener fuerzas refrinjentes iguales, y se ve al mismo tiempo que una sustancia ménos densa que otra puede sin embargo poseer un poder refrinjente mayor. Así, la accion de los cuerpos sobre la luz no sólo depende de su densidad, sino tambien de la naturaleza química de sus partículas. Se nota ademas que las sustancias cuya fuerza refrinjente es mas enérjica, son en general las resinas y aceites; y puesto que la del agua destilada no les es muy inferior, se puede concluir que debe haber en el agua algun princípio inflamable, análogo á aquel de que se componen las resinas y los aceites. Como el diamante es el que mayor fuerza refrinjente tiene, dedujo *Neuton* que debia ser combustible: lo cual ha sido comprobado por la Química moderna, pues ha demostrado que el diamante es el *carbon puro.*

520 De todos los gases y de todas las sustancias observadas, el que tiene mayor fuerza refrinjente es el *hidrójeno*, que es 6,6 veces mayor que la del aire atmosférico; este principio existe en grande abundancia en las resinas, aceites y gomas, donde está unido al carbon y al oxíjeno; por lo que se deduce que él es el que da á estas sustancias aquella gran fuerza refrinjente que *Neuton* habia observado.

El poder refrinjente del aire atmosférico es el mismo en todos los parajes de la tierra; pues se ha calculado por los poderes refrinjentes parciales de sus principios constitutivos, y estos no varían (462) ni con la latitud, ni con la altura del observador sobre el nivel del mar. Por consiguiente las tablas de refracciones calculadas para una latitud, se pueden emplear en todos los climas, teniendo en consideracion solamente las variaciones de densidad producidas por las mudanzas de presion y de temperatura.

En cuanto á las diferencias que podrian depender de la humedad esparcida en la atmósfera, está demostrado que son nulas, y que es inútil atender á ellas; pues el vapor del agua mezclado con el aire obra sobre la luz, casi como lo haria el aire ordinario que tuviese un grado de tension igual; tambien resulta que la mudanza de temperatura no produce mudanzas sensibles en el poder refrinjente de los gases y del aire.

Cuando por circunstancias locales hay dos capas de aire contiguas, en que las densidades son muy diferentes por estar la una muy caliente por los rayos del sol ó cualquier otra circunstancia, y un observador colocado en la capa de densidad media, mira á un objeto remoto, situado tambien en esta capa, le verá de dos modos: directamente por medio de la capa del aire de densidad uniforme que los separa, é indirectamente por rayos reflejados en la capa inferior; y habrá dos imájenes del objeto, la una derecha y la otra invertida por la reflexion.

Á este fenómeno le suelen llamar los marinos *miraje*. De manera que un hombre que se fuese alejando del ojo del observador, se iria viendo con dos imájenes invertidas como representa la (fig. 123).

521 Hay cristales que tienen doble refraccion; y estos se deben dividir en *doble refraccion atractiva* y en *doble refraccion repulsiva*.

Todos los rayos luminosos emanados de los objetos terrestres, no siguen al refractarse la misma relacion del seno de incidencia al seno de refraccion. Así es, que si un rayo de luz se hace atravesar por un prisma, y se recibe la imájen en un bastidor, se descompone la luz y presenta una *imájen ó espectro solar* de la forma que se ve en la (fig. 124), en la cual se notan los siete colores siguientes: *rojo*, *anaranjado*, *amarillo*, *verde*, *azul celeste*, *azul turquí*, y *violado*. De manera que *la luz del sol es una mezcla de rayos heterojéneos, de los cuales los unos son mas refranjibles que los otros*; y *tomados los de una misma especie separadamente de los demas, son susceptibles de producir sobre nuestros órganos la sensacion de sus respectivos colores.*

Se nota igualmente que *estos rayos difieren tambien en reflexibilidad*, y *que los mas refranjibles son* *tambien los mas susceptibles de ser reflejados interiormente por refraccion.*

Cada uno de los rayos homojéneos comprendidos entre los diversos límites de rojo, anaranjado &c. tiene su grado propio é invariable de refranjibilidad y de color, que conserva siempre, cualquiera que sea el número de refracciones que se le hagan sufrir; y tambien se verifica que estos colores no se alteran por las reflexiones que padecen sobre los cuerpos naturales.

Si se concibe dividida en 360 partes la longitud total del espectro, resulta que el color violado ocupa 80 de estas partes; el azul turquí 40; el azul celeste 60; el verde 60; el amarillo 48; el anaranjado 27; y el rojo 45.

522 Cuando las moléculas luminosas atraviesan cuerpos cristalizados, dotados de la doble refraccion, sufren al rededor de su centro de gravedad diversos movimientos dependientes de la naturaleza de las fuerzas que las partículas del cristal ejercen sobre ellas. Algunas veces el efecto de estas fuerzas se limita á disponer todas las moléculas de un mismo rayo paralelamente las unas á las otras, de modo que sus caras homólogas estén vueltas hácia los mismos lados del espacio. Este fenómeno se ha espresado con el nombre de *polarizacion*, asimilando el efecto de las fuerzas al de un iman que volviese los polos de una serie de agujas magnéticas todos en la misma direccion; y se demuestra por esperimentos directos la existencia de los movimientos diversos que se acaban de indicar, y que se continúan realmente á profundidades muy sensibles en lo interior de los cuerpos.

523 Habiéndose notado que la luz va por lo regular acompañada de *calor*, se ha tratado de indagar si todos los rayos de los diferentes colores, en que se descompone por medio del prisma, poseen igual facultad de calentar los cuerpos; y se ha encontrado que *esta facultad era mayor en el azul turquí que en el violado*; *mayor en el azul celeste que en el azul turquí*; *mayor en el verde que en el azul celeste*; y *así*

sucesivamente hasta el rojo, que producia una temperatura mas elevada que todos los otros colores; y aun se ha encontrado por algunos que *el máximo de temperatura estaba mas allá del rojo estremo, y fuera de toda la parte visible del espectro.*

Habiéndose observado que cuando se espone el muriate de plata y otras diversas sales blancas á la luz, se ennegrecen: que la resina guayaco espuesta á la luz pasa del amarillo al verde: y que esponiendo á un rayo de luz solar una mezcla de volúmenes iguales de gas hidrójeno y de clore, se verifica al instante una detonacion, cuyo producto es el ácido hidroclórico, llamado ántes ácido muriático, se ha tratado de indagar si cada porcion colorífica del espectro solar poseía una misma ó diferente enerjía química; y se ha encontrado que *esta enerjía era menor en el rojo que en cualquiera de los otros, y que iba creciendo hasta el violado que poseia la mayor.* De manera, que por todos los fenómenos que hasta el dia nos presenta la luz, debemos inferir que la facultad *calorífica* y *química* varía en toda la estension del espectro, al mismo tiempo que la *refranjibilidad*; pero segun funciones diferentes, tales que la facultad calorífica esté en su *mínimo* al estremo violado del espectro, y en su máximo al estremo rojo, ó un poco mas allá, miéntras que al contrario la facultad química, espresada por otra funcion, tuviese su mínimo en el estremo rojo, y su máximo al estremo violado, ó un poco mas allá.

METEOROLOGÍA.

524 Se da el nombre de *fenómeno* á todo hecho que nos presenta la naturaleza; así, el salir el sol, el ponerse, el eclipsarse &c., todos estos son fenómenos; y se llaman *metéoros* á los fenómenos que se verifican en la atmósfera; y *Meteorología* á la ciencia que trata de dar á conocer su oríjen, formacion y demas circunstancias. La Meteorología la consideran algunos como parte de la *Atmosferologia*, ó ciencia de todo lo

que corresponde á la atmósfera, y deberia abrazar la *Hidrología* y la *Meteorología*.

Los metéoros se pueden reducir á tres clases, á saber: *acuosos*, *luminosos* é *ígneos*. Los metéoros acuosos son los que deben su oríjen al agua. Para darlos á conocer, recordarémos que el aire tiene la facultad de contener agua en disolucion, y que contiene mayor cantidad de agua á proporcion que se halla mas comprimido y hace mas calor. Luego si suponemos que por una causa cualquiera varíe la presion del aire ó el grado del calor, ó ambas causas á un mismo tiempo, el aire abandonará parte del agua que tiene en disolucion; y segun sea el estado de la atmósfera serán diferentes los metéoros que sucedan.

525 Si las moléculas de agua, abandonadas por el aire, no tienen bastante masa para vencer la adherencia que tienen con el aire, permanecen suspendidas en la atmósfera y turban su trasparencia; este metéoro se llama *niebla*, si la falta de trasparencia de la atmósfera se verifica en parte próxima á la superficie terrestre; y se llama *nube*, si se verifica en las rejiones elevadas de la atmósfera.

526 Cuando las moléculas de agua que se desprenden y vuelven á tomar el estado líquido, están muy próximas las unas á las otras, y obedeciendo á las leyes de la atraccion, se reunen en gotas que se precipitan en virtud de la gravedad y caen á la superficie de la tierra, entónces este metéoro se llama *lluvia*.

527 Si hubiese una frialdad en la atmósfera, tal que conjelase las moléculas de agua ántes de haberse reunido en gotas, entónces estas moléculas se van precipitando, se reunen con otras en su tránsito, y forman *copos* de diversas figuras que se precipitan á la superficie de la tierra, á cuyo fenómeno se le caracteriza con el nombre de *nieve*.

528 Si estando el agua ya reunida en gotas, se hiela, cae á la superficie terrestre conjelada en forma de *esferoides*, y se llama *granizo*. Cuando el granizo es muy grueso, se llama *piedra*: y entónces es

muy perjudicial para los campos y ganados, y aun para los edificios.

Como durante el dia hace mas calor que de noche, resulta que miéntras se halla el sol sobre el horizonte, hace que se eleven vapores de la tierra, y luego al ponerse el sol, se va enfriando la atmósfera y deja que los vapores tomen la forma líquida, y se precipiten hácia la tierra; á este metéoro se le llama *sereno* ó *relente*, que suele humedecer nuestros vestidos, y en muchos parajes perjudica á la salud el recibirle.

El sereno ó relente se hace mas sensible por la mañana al salir el sol, que aparece sobre las hojas de las plantas, y en este caso se llama *rocío*; y si el rocío se conjela, se llama *escarcha*.

529 Hay otro metéoro acuoso que se llama *trompa* ó *manga*, y consiste en una reunion de vapores, ó en una nube muy espesa que tiene la forma de un cono inverso, cuya base reposa sobre otras nubes de las cuales está el cono como suspendido. Cuando la manga se forma sobre el mar, se ve elevarse de su superficie una masa de agua bájo la forma de un cono, cuyo eje se halla sobre la misma direccion que la del cono superior: se siente un ruido semejante al del mar embravecido, y el agua se precipita de las diversas partes de la manga, acompañada frecuentemente de un granizo abundante y de vientos impetuosos. Hay tambien *mangas terrestres*, que aunque son ménos frecuentes que las de mar, no por esto son ménos peligrosas.

530 Los *metéoros luminosos* tienen oríjen de la luz, y son: el *arco íris*, los *parelíos*, las *paraselenas* y las *coronas*.

El arco íris es un metéoro que se verifica cuando en un paraje está lloviendo, y un observador se halla entre la nube y el sol, teniendo vueltas las espaldas á este astro; ademas se necesita que el sol tenga ménos de 42° de altura sobre el horizonte. Este metéoro se forma por la luz del sol, que cayendo sobre las gotas de agua padece dos refracciones, y vuelve al ojo del observador ya descompuesta en los siete colores primitivos (521).

Por lo regular se observan dos arcos íris concéntricos, de los cuales el uno tiene los colores ménos vivos que el otro y en un órden inverso; en algunas ocasiones, aunque muy raras, se suelen ver hasta tres arcos concéntricos; pero el tercero es muy débil. Tambien se suele verificar el arco íris con la luz de la luna, y se le suele llamar *arco íris lunar*; pero casi nunca se ven todos los colores ni son tan vivos. En el mar, cuando está ajitado, se suele ver un arco pintado de algunos colores del íris; y entónces se llama *arco íris marino*. Por último, se suele llamar *arco íris terrestre* á un arco coloreado que se suele ver sobre un prado ó sobre un campo, cuando se mira desde un paraje elevado, un poco despues de haber salido el sol, ó un poco ántes de que se ponga.

531 Se llaman *parelios* la aparicion simultánea de muchos soles, que son imájenes fantásticas del sol verdadero. Estas imájenes se forman siempre sobre el horizonte á la misma altura á que se halla el sol, y están siempre unidas las unas á las otras por un círculo blanco horizontal; las imájenes que aparecen sobre este círculo del mismo lado que el sol verdadero, presentan los colores del arco íris; y algunas veces se halla tambien coloreado el mismo círculo en la parte que se halla próxima al sol. La aparicion mas completa de este fenómeno se verificó en Dantzick el 20 de Febrero de 1661, y es el que se halla representado en la (fig. 125).

532 Se llaman *paraselenas* á un metéoro que ofrece el espectáculo de varias imájenes de la luna, y *coronas* á uno ó muchos anillos luminosos de que aparecen rodeados los astros.

533 Los metéoros ígneos son el *relámpago*, el *rayo*, el *trueno*, las *exhalaciones*, el *fuego de San Telmo*, los *ambulones*, los *fuegos lambentes*, los *globos de fuego*, *auroras boreales*, *luz zodiacal*, y los *aerolitos ó piedras caidas de la atmósfera.*

Se da el nombre de *relámpago* á una claridad viva que aparece repentinamente, desaparece con la misma prontitud, y ordinariamente precede al ruido del *trueno*. Por el intervalo de tiempo que pasa entre el relámpago y el trueno, se puede juzgar aproximadamente de la distancia á que nos hallamos de la nube en que se ha producido. Para esto no hay mas que observar el número de segundos que pasan entre el relámpago y trueno, y se multiplica 413 varas (509) por el número de segundos que hayan trascurrido; pero como no se hallará á mano relox de segundos, se puede uno servir de su misma pulsacion; y como un hombre en un estado regular tiene 66 pulsaciones en un minuto, se obtendrá tambien un resultado aproximado de dicha distancia, multiplicando 380 varas por el número de pulsaciones que hayan pasado entre el relámpago y el trueno.

Igualmente se tendrá con bastante aproximacion la distancia de una batería al punto donde esté el observador, multiplicando 380 varas por las pulsaciones que se hayan contado desde que se ve la esplosion hasta que se oye el cañonazo.

534 El *rayo* es una gran cantidad de electricidad, que en ciertas circunstancias parece lanzarse del seno de la nube, con una esplosion mas ó ménos fuerte, que constituye el *trueno*. Este resulta de la esplosion que causa una combinacion repentina de una mezcla de gas oxíjeno y de gas hidrójeno, que la chispa eléctrica inflama en las rejiones atmosféricas, que son el teatro de los rayos. Como los efectos de los rayos son muy temibles, se ha ideado (443) el preservar los edificios por medio de pararayos.

535 Se llaman *exhalaciones* á unos pequeños globos que esparcen una claridad mas ó ménos viva, y que se ven algunas veces revolotear en el seno de la atmósfera, presentando en su aparicion el mismo fenómeno que ofreceria una estrella que desprendiéndose de la bóveda celeste se precipitase hácia la superficie de la tierra.

536 El *fuego de San Telmo*, á que se suele llamar *Cástor y Pólux*, le constituyen unas llamas ó lucecitas pequeñas, que cuando truena se suelen ver en los pabellones, jarcias, masteleros, y demas objetos que terminan en punta.

537 Los *ambulones*, que tambien se llaman *fuegos fatuos*, son unos fuegos débiles que fluctúan en el aire en el verano y principio de otoño, inmediatos á la superficie de la tierra; brillan ménos cuando se les mira de mas cerca, y se suelen ver en los parajes en que hay mas descomposicion de materias animales y vejetales, como son los cementerios, muladares, pantanos, &c.

Estos fuegos fatuos provienen de la parte de fósforo que se halla en los huesos de los animales; y suelen inspirar miedo sin fundamento á las personas pusilánimes que los ven.

538 Los *fuegos lambentes* son aquellos que se suelen ver sobre las cabezas de los niños y sobre la crin de los caballos, principalmente cuando sus arreos y adornos terminan en punta, y deben tambien su oríjen á la electricidad.

539 Los *globos de fuego* son unos metéoros que aparecen en la atmósfera bájo la forma de un globo, animado de un movimiento muy rápido y ordinariamente acompañado de una *cola luminosa*; los ha habido, cuyo diámetro parecia igual al de la luna llena, y cuya cola luminosa equivalia á siete ú ocho veces el diámetro del globo.

540 Se llama *aurora boreal* á un metéoro luminoso que se manifiesta ordinariamente hácia el norte, y cuya claridad, cuando se halla próxima al horizonte, parece á la de la aurora; se presenta por lo regular dos, tres ó cuatro horas á lo mas, despues de ponerse el sol, es decir, que siempre se verifica por la noche, y algunas veces va acompañada de lijeras detonaciones.

541 Se llama *luz zodiacal* una débil claridad que tiene ordinariamente la forma de un cono, cuya

base está vuelta hácia el sol y el vértice hácia el zodiaco; se verifica principalmente hácia el fin del invierno, ó al principio de la primavera, y jamas en el otoño.

542 Los *aerólitos* son piedras caidas á la tierra, cuyo oríjen aun no se conoce suficientemente; su peso específico es 3,591; y su análisis química manifiesta que todos se componen de sílice, de magnesia, de azufre, de hierro en el estado metálico, de niquel y de algunas partículas de cromo. *Laplace* ha pensado que podian ser arrojadas sobre la tierra por los volcanes lunares; y sometiendo esta idea al cálculo, ha encontrado que bastaba para esto una fuerza de proyeccion cuádrupla de la de una bala de á 24 cargada con 12 libras de pólvora.

542 Como los metéoros tienen una influencia muy considerable en la agricultura, seria de la mayor importancia el hacer con mucha exactitud todo género de observaciones meteorológicas, y compararlas con el curso del sol y de la luna; pues de este modo se podrian llegar á pronosticar con mucha anticipacion las lluvias, las tempestades &c., y por consiguiente se podrian prever las cosechas abundantes y las escasas, y se arreglarian convenientemente las operaciones rurales para que resultase el mayor beneficio al género humano.

ASTRONOMÍA.

543 *Astronomía* es la ciencia que tiene por objeto el determinar todo lo que tiene relacion con los cuerpos que aparecen en la bóveda celeste, que se llaman *astros*; esta ciencia nos enseña á observar y determinar exactamente la posicion de dichos cuerpos, á seguir sus movimientos, á medirlos con precision, á reconocer las leyes constantes á que están sujetos, y á servirnos despues de estas mismas leyes para predecir su posicion en lo sucesivo, ó espresar la que han tenido en otro tiempo: de cuyos

conocimientos saca el navegante medios para reconocer su ruta, el geógrafo señales para determinar la posicion de los lugares de la tierra, el labrador procedimientos para arreglar sus trabajos, y las naciones épocas ciertas para fijar su historia. La Astronomía es el tratado físico-matemático que se halla mas adelantado; porque habiendo siempre llamado la atencion de los hombres los cuerpos celestes, se han hecho mas observaciones que en los demas tratados.

Entre la multitud de astros de que aparece sembrada la bóveda celeste, hay unos que conservan siempre entre sí la misma posicion, y se llaman *estrellas fijas*, ó simplemente *estrellas*; hay otros que varían de posicion tanto entre sí, como con relacion á las estrellas fijas, á los cuales se les caracteriza con el nombre de *planetas*, cuya palabra quiere decir *estrellas errantes*; hay otros que suelen aparecer de cuando en cuando, al principio muy pequeños y poco brillantes, que despues va aumentando su brillo hasta ciertos límites, y luego vuelve á disminuir por los mismos grados hasta que desaparecen del todo; á estos se les da el nombre de *cometas*, porque van acompañados de una nebulosidad ó cola. Y por último, se notan otros astros que acompañan siempre á los planetas en sus diferentes movimientos, y que por lo mismo se llaman *planetas secundarios* ó *satélites*.

De las estrellas fijas.

544 Aunque á primera vista parece imposible numerar y determinar las estrellas, sin embargo los astrónomos han observado sus situaciones relativas con tanta escrupulosidad, que en el dia se conoce su posicion en el cielo con una exactitud mayor que la de muchos puntos terrestres, y se valúa el número de las observadas en unos cien millones.

Para dar una idea del modo con que se ha llegado á adquirir este conocimiento, supongámonos colocados en medio de una gran llanura, ó sobre el cúspide de una montaña, ó en lo alto de una torre ó azotea, de modo que no haya objetos próximos que nos impidan la vista: y entónces notarémos que el cielo aparece á nuestra vista como una bóveda semiesférica, que estriba en un círculo que se halla en la tierra. Este círculo que es el límite comun de la tierra y el cielo, se llama *horizonte*, que quiere decir *terminador*. Á este se le caracteriza con el nombre de *horizonte sensible*, porque es el que se presenta á los sentidos; y á un plano que pasando por el centro de la tierra fuese paralelo al horizonte sensible, se le llama *horizonte racional* ó *matemático*.

545 Si al principio de la noche nos colocamos en dicho sitio elevado, de modo que tengamos á nuestra derecha el paraje por donde el sol se ha puesto, y observamos con atencion, percibirémos que las estrellas se van levantando por diversos puntos de la parte del horizonte que tenemos á nuestra izquierda, que suben durante una parte de su curso, que emplean otra parte del tiempo en bajar, y que en fin desaparecen hácia un punto del horizonte mas ó ménos remoto de aquel en que ellas se han manifestado; pero notarémos que todas estas estrellas conservan entre sí las mismas distancias, forman las mismas figuras miéntras dura la noche, y que toda la bóveda estrellada parece que jira al rededor de la tierra.

Para conocer mejor todos estos movimientos es necesario referirlos á alguna cosa que sea fija; y pues que hasta ahora sólo conocemos el *horizonte*, referirémos á este círculo todos los movimientos. Más como nosotros nos hallamos en su centro, no podemos llegar á la circunferencia para señalar en ella los puntos por donde parece que los astros se elevan y se ocultan. Pero observando que en todos los círculos concéntricos las líneas tiradas desde el centro á la circunferencia los dividen en arcos de un mismo número de grados, conseguirémos nuestro objeto trazando al rededor de nosotros una circunferencia, ó poniendo una balaustrada redonda y en el centro un piquete recto de la misma altura que la balaustrada; y colocando el ojo en el estremo de dicho piquete podrémos referir á este círculo todos los movimientos que observemos.

En efecto, supongamos colocado el ojo en C (fig. 126); señalemos sobre nuestra balaustrada ó sobre nuestro horizonte facticio el punto A, hácia el cual una estrella se levanta, y señalemos por medio de un relox la hora y minutos á que ha principiado á nacer. Hagamos lo mismo para diferentes estrellas que se eleven sucesivamente en E, en D y en otros puntos. Sigamos el curso de estas estrellas miéntras están sobre el horizonte, y notemos los instantes en que desaparezcan, una en B, otra en O y la otra en F; señalemos estos puntos, y advertirémos que la estrella que se ha levantado y ocultado en la direccion de A á B ha empleado en ello ménos tiempo que la que habiéndose levantado en E se ha ocultado en O, y esta ménos que la estrella cuyo camino está indicado por la cuerda DF.

546 Tambien echarémos de ver que la duracion de la aparicion de una estrella, será tanto mas corta cuanto menor sea la cuerda, y se halle esta mas léjos del centro yendo de C á S; y que será tanto mas larga cuanto la cuerda sea mas corta y se halle mas distante de C hácia N.

Que si dos estrellas se elevan la una despues de la otra en el mismo punto del horizonte, se ocultarán tambien en la misma cuerda, y la aparicion será de la misma duracion; lo que manifiesta bastante la uniformidad del movimiento de la esfera celeste.

Donde se ve que no es la longitud de la cuerda la que orijina la duracion de la aparicion, sino la posicion de esta cuerda con relacion á la EO, que da una duracion media de 12 horas y pasa por el centro C.

547 Si repetimos estas observaciones los dias siguientes, hallarémos que las elevaciones se verifican siempre en los mismos puntos y con 24 horas de intervalo. Notarémos tambien que la estrella AB en medio de su curso estaba sensiblemente ménos alta que la estrella EO, es decir, que estaba mas próxi-

ma al punto S del horizonte; que la estrella DF estaba al contrario mas alta que EO y mas remota del punto S. Que las estrellas que siguen la misma cuerda se elevan igualmente sobre el punto S, al ménos á la simple vista.

Si tiramos sobre el terreno las diferentes cuerdas, véremos que todas son paralelas; y tirando una línea SCN perpendicular á una de ellas, tal como EO, lo será igualmente á todas las otras y las dividirá en dos partes iguales.

Los diámetros NS, EO dividirán el horizonte en cuatro partes iguales; y sus estremos E, S, O, N, se llaman los *puntos cardinales del horizonte*, porque á ellos se refieren todos los demas. E es el *este*, *oriente*, *orto ó levante*; S el *sur* ó el *mediodia*; O el *oeste*, *poniente* ú *ocaso*; y N el *norte* ó *septentrion*.

548 El arco AS del horizonte comprendido entre el punto del orto de un astro y el punto sur del horizonte, se llama el *azimut* de este astro; el arco SB es el azimut del astro que se pone, y estos dos arcos son iguales para una misma estrella.

El azimut se puede contar tambien desde el punto N, y se tendrá del mismo modo NA=NB. El NA contado desde el norte es siempre el suplemento del contado desde el sur, es decir, que $NA=180^\circ+SA$.

Se podrian contar los arcos del horizonte partiendo desde E ó desde O. En este caso EA se llama la *amplitud ortiva* de la estrella que se levante en A. El arco OB es la *amplitud ocaso* del astro que se oculta en B, y estas dos amplitudes son iguales.

549 Si sobre el diámetro SN concebimos un círculo perpendicular al horizonte, tendrémos un círculo que se llama *vertical*. Si concebimos prolongado indefinidamente el piquete que tenemos en el centro C, en el punto en que corte al vertical le dividirá en dos partes iguales ó de 90°. Este punto se llama *zenit*, es decir, *punto*; el estremo de este piquete, prolongado indefinidamente hácia abajo, cortaria á dicho círculo en el punto que se llama *nadir*, que quiere decir *opuesto*.

Por medio de este semicírculo colocado verticalmente sobre el diámetro SN, se podrá medir la distancia de la estrella al punto sur del horizonte, cuando esté en medio de su curso; en esta posicion el círculo vertical toma el nombre de *meridiano*, y divide la esfera celeste en dos hemisferios, el uno oriental y el otro occidental.

Observando con atencion el instante del paso de una estrella por este círculo, nos aseguraremos de que este instante se halla igualmente remoto del instante en que sale y de aquel en que se oculta; y que así, la denominacion de meridiano está bien dada, pues que divide en dos partes iguales el dia del astro ó la duracion sobre el horizonte.

Por este medio se determina el órden con que cada estrella pasa por el meridiano, y segun este mismo órden se colocan en los catálogos, que son unas listas ó tablas en que se hallan las diferentes estrellas, segun el órden con que pasan por el meridiano.

550 Para mayor claridad y comodidad las han dividido los astrónomos en varios grupos, que se llaman *constelaciones*, y á cada constelacion se le ha dado un nombre particular, tomado de la semejanza que puede tener dicho grupo de estrellas con algun hombre, animal ú objeto conocido.

El número de constelaciones va aumentando cada dia; en la actualidad se conocen ciento y ocho. *Ptolomeo* espresó hasta 48; *Hevelio* añadió 12; *Halley* 8; *Bayer* 12; *La-Caille* 16; *Lemonnier* 2; *Lalande* 1; *Poozobut* 1; *Bode* 7; y *Hell* 1.

De todas estas constelaciones la mas conocida y que por otra parte es mas útil saber determinar, es la que se llama *osa mayor ó el carro*, que es el nombre con que es mas conocida de la gente del campo. Por medio de esta constelacion que se halla hácia la parte del norte, podemos conocer muy aproximadamente el *polo norte* del mundo; pues cerca de él hay una estrella, que se llama *estrella polar*, y vamos á manifestar el modo de determinarla.

Esta constelacion se halla representada en la (fig. 127); se compone de las siete estrellas que en ella están señaladas con mayor tamaño, las cuales son muy brillantes: cuatro de ellas se hallan dispuestas de modo que forman casi un rectángulo, figura semejante á la caja de un carro: y las otras tres que casi se hallan en línea recta, tienen alguna semejanza con una lanza de carro ó con una cola. Si por las dos estrellas del rectángulo que están mas remotas de la cola, se concibe una recta ó mas bien un plano visual tirado por el ojo del observador, este plano pasará muy cerca de la estrella polar, que se halla representada en P en la misma figura. Esta misma estrella termina otro grupo, compuesto de siete estrellas como la osa mayor y absolutamente semejante, sin mas diferencia que el estar colocada en una situacion contraria, como representa la misma figura; á este grupo ó constelacion se le da el nombre de *osa menor*, y la estrella polar es la mas brillante de las que la componen, todo lo cual está representado en la misma figura. En unas ocasiones se halla la estrella polar mas alta que la osa mayor, y en otras mas baja; pero siempre la estrella polar se encuentra del lado de la convexidad de la cola de la osa mayor: y por el punto P, que representa la posicion del polo norte, pasa el eje de rotacion de la esfera celeste.

551 Hácia la parte del norte hay muchas estrellas que permanecen toda la noche sobre el horizonte y que jiran al rededor del polo P; á la simple vista parece que la estrella polar no tiene movimiento, pero con los telescopios se observa que tambien jira. Las estrellas que están cerca del polo se llaman *circumpolares*; al polo norte se le llama tambien *polo boreal ó ártico*, que quiere decir situado del lado de la osa, y el opuesto se llama *polo del sur*, ó del *mediodia*, *austral ó antártico*.

Las estrellas, vistas con los mejores telescopios que aumentan hasta doscientas veces las dimensiones de las imájenes, no presentan aun diámetro ó *disco* de una estension apreciable. Pero aunque sólo aparecen como puntos brillantes, sin embargo con estos instrumentos se ven como si estuviesen doscientas veces mas cerca de nosotros. Y pues que no se nota en ellas diferencia, se deduce que su distancia respecto de nosotros es inmensa. Con todo, se clasifican segun su magnitud aparente; los antiguos las distinguian desde la 1.ª hasta la 6.ª magnitud; pero los modernos las distinguen hasta la 10.ª magnitud; más como no se tienen medios bastante seguros para determinar estas magnitudes, unos astrónomos ponen entre las estrellas de una magnitud, las que otros reconocen como de magnitud diferente; pero de esto no resultan grandes inconvenientes.

De los planetas.

552 Los antiguos conocian sólo siete planetas, á saber: el *Sol*, *Mercurio*, *Vénus*, *Marte*, *Júpiter*, *Saturno* y la *Tierra*; pero en estos últimos tiempos se han descubierto otros cinco, á saber: *Urano* por Herschell el 13 de Marzo de 1781; *Céres* por Piazzi el 1.º de Enero de 1801; *Pálas* por Olbers el 28 de Marzo de 1802; *Juno* por Harding el 1.º de Setiembre de 1803; y *Vesta* tambien por Olbers el 29 de Marzo de 1807.

Todos los planetas se mueven al rededor del sol de occidente á oriente en curvas elípticas; el sol ocupa uno de los fócus de estas curvas, que se les da el nombre de *órbitas*.

El órden de los planetas segun su proximidad al sol es el siguiente. Mercurio es el que está mas próximo al sol; despues siguen Vénus, la Tierra, Marte, Vesta, Juno, Pálas, Céres, Júpiter, Saturno, y Urano que se encuentra ya en los confines del sistema planetario. En la (fig. 128) se hallan representados segun sus distancias observadas al sol. Los planetas Mercurio y Vénus se llaman *planetas inferiores*, porque sus órbitas están comprendidas por la de la Tierra; todos los demas se llaman *planetas superiores*.

Mas allá de todos estos cuerpos se hallan las estrellas fijas á una distancia inmensa, y en un órden que nos es desconócido. Para que la figura presente una verdadera imájen que manifieste á los sentidos todo el sistema planetario, se pone tambien la órbita de un cometa, y se señalan las estrellas fijas.

553 El Sol, Mercurio, Vénus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno, tienen un movimiento de rotacion al rededor de sus ejes, que es tambien de occidente á oriente; de manera que cada planeta está dotado de dos movimientos, uno al rededor de su eje que se llama movimiento diurno, y otro al rededor del sol que se llama *ánuo*; estos dos movimientos son análogos á los que tienen los *trompos* ó *peones* con que juegan los muchachos; ellos jiran al rededor de su eje, y al mismo tiempo trazan en el suelo curvas mas ó ménos irregulares, segun las desigualdades del terreno y mas ó ménos destreza del que los arroja.

En Juno, Pálas, Vesta, Céres y Urano, no se ha reconocido todavía el movimiento de rotacion; pero la analojía nos conduce á sospechar que le tendrán igualmente que los demas.

554 Todos los planetas son cuerpos opacos que reciben su luz del sol; así es, que vistos con el telescopio se observa en ellos que, segun su posicion, están iluminados en un todo ó en parte, del mismo modo que aparece la luna con sus fases, segun esplicarémos (590). Si nosotros pudiésemos ver desde el sol nuestro sistema planetario, notaríamos la regularidad con que hacian sus movimientos propios los planetas; pero como nos hallamos en la tierra, y esta tiene dos movimientos, uno de rotacion al rededor de su eje, que se verifica en 24 horas, y otro al rededor del sol en su órbita, en que gasta un año, resultan las irregularidades que observamos en los movimientos de los planetas.

Aunque todos los planetas se mueven al rededor del sol, sin embargo no todas sus órbitas se hallan en un mismo plano; la órbita en que se mueve la Tierra se llama *eclíptica*, y la posicion de todas las demas órbitas se refieren á ella. El ángulo que la órbita de un planeta forma con la eclíptica, es lo que se llama su *inclinacion*; y los puntos en que la órbita de un planeta encuentra á la eclíptica, se llaman *nodos*. Los planetas antiguamente conocidos se separaban muy poco del plano de la eclíptica; por lo que desde la mas remota antigüedad se ha dado un nombre particular á la zona del cielo en que estaban comprendidos, y se llamaba *zodiaco* ó *zona de los animales*, dándole ocho grados de ancho á cada lado de la eclíptica, de modo que el zodiaco es una faja ó zona que consta de diez y seis grados sexajesimales, y se hallan en ella las doce constelaciones siguientes: *Áries*, *Tauro*, *Géminis*, *Cáncer*, *Leo*, *Virgo*, *Libra*, *Escorpion*, *Sajitario*, *Capricornio*, *Acuario* y *Píscis*.

Pero desde el descubrimiento de los últimos planetas, esta denominacion ha venido á ser inútil; porque Céres, Juno, y principalmente Pálas, se separan mucho mas allá de los límites que se les habia querido señalar.

555 De la constante observacion de los fenómemos celestes dedujo Keplero, astrónomo aleman del siglo 17.º, las leyes del movimiento de los planetas, conocidas con el nombre de *leyes de Keplero*, y son las tres siguientes: 1.ª *Los planetas se mueven en curvas planas, y sus radios vectores describen al rededor del sol, áreas proporcionales á los tiempos.*

2.ª *Las órbitas de los planetas son elipses de las que el centro del sol ocupa uno de los fócus.*

3.ª *Los cuadrados de los tiempos de las revoluciones de los planetas al rededor del sol, son entre sí como los cubos de los ejes mayores de sus órbitas.*

Estas leyes se refieren al movimiento del centro de gravedad de cada planeta; y aplicando el cálculo á ella se ha llegado á descubrir que la causa universal que orijina todos estos movimientos, *es una fuerza que los atrae hácia el centro del sol, y que obra en razon directa de las masas é inversa* *de los cuadrados de las distancias á dicho centro.*

La análisis hace ver que una fuerza como esta, combinada con un impulso conveniente, puede hacer describir á un móvil no sólo una elipse, sino tambien una parábola ó una hipérbola, de donde se deduce que *es posible que existan en el universo astros que sólo sean visibles una vez para nosotros.*

Dada una idea jeneral de todo nuestro sistema planetario, consideraremos cada planeta en particular.

Del Sol.

556 El sol es el centro de todo nuestro sistema planetario; al rededor de él jiran todos los planetas; es el astro que mas llama nuestra atencion por su magnitud y por las ventajas que nos proporciona; cuando se halla sobre el horizonte, orijina el dia, y cuando debajo, orijina la noche; el tiempo que media entre la claridad del dia y la oscuridad de la noche, se llama *crepúsculo*; del sol emana la luz, y esta orijina el *calor* que esperimentamos. Los antiguos le llamaban el *corazon* del cielo; porque decian que, así como el corazon es el centro del sistema animal, del mismo modo el sol es el centro del universo.

El sol está dotado de un movimiento de rotacion al rededor de su eje, que se verifica en 25,01154 dias, lo cual se ha reconocido por la observacion atenta y escrupulosa de ciertos puntos negros que se observan en él, y que se llaman *manchas*; su volúmen es 596 veces mayor que el de todos los planetas juntos. El sol aparece para nosotros como un círculo que se llama el *disco del sol*. El ángulo que forman dos rayos visuales tirados desde el ojo del observador á los dos estremos de un diámetro del disco del sol, es de unos 32′ cuando se halla á su distancia media de la tierra.

El sol presenta á nuestra vista el mismo movimiento que toda la bóveda celeste; es decir, que *nace*, *sale* ó se *eleva* por un punto del oriente, sube hasta una determinada altura, luego vuelve á bajar por los mismos grados, y *desaparece*, se *oculta*, ó se *pone* por el occidente. Cada dia sale por diferente punto del oriente, y se oculta por diferente punto del oeste. El movimiento del sol en la eclíptica no es uniforme. En 1.º de Enero su movimiento diario es cerca de $1^\circ 1' 13''$; pero en 1.º de Julio es de $57' 13''$; su movimiento diario medio es de $59'$. Tarda en volver á salir exactamente por el mismo punto del oriente un año entero, ó $365^{\text{dias}}, 5^{\text{horas}} 48' 51'' = 365^{\text{dias}}, 24225694$.

557 El tiempo que tarda el sol en volver á pasar por el meridiano se llama *dia solar*, y se divide en 24 horas *solares de tiempo medio*. Estas 24 hor. solares medias equivalen á 24 hor. $3' 56'',5554$ de *tiempo sideral*; así, *la duracion de la hora de tiempo medio equivale á* 1,0027379722 *horas siderales*.

El eje de revolucion del sol forma con la eclíptica un ángulo de $82^\circ 40'$. El diámetro del sol es 111,75 veces mayor que el de la tierra, y como segun las últimas observaciones el diámetro de la tierra es de 15231832 varas, ó de 2284,7748 leguas de 20000 pies, resulta que el del sol será de 255323,5839 de las mismas leguas; el volúmen del sol es 1395324 veces mayor que el de la tierra; y la masa 329630 veces mayor que la de la tierra; de donde se deduce que *la densidad del sol es* 0,236 *de la de la tierra* (*), ó 1,298 veces la del agua.

558 El movimiento del sol es el que determina

(*) *En efecto, como las densidades están* (263) *en razon compuesta directa de las masas, é inversa de los volúmenes, si tomamos por unidad de masa y por unidad de volúmen el de la tierra, será*

$$\text{densid. de tierra} : \text{densid. de sol} :: 1 : \frac{329630}{1395324} = 0,236.$$

Y como la densidad de la tierra es 5,5 *veces la del agua segun verémos* (§ 565), *resulta que la densidad del sol es* 1,298 *veces la del agua*.

los diversos periodos empleados en la sociedad para la distribucion del tiempo. La eleccion de estos periodos y el órden de esta distribucion, componen lo que se llama el *calendario*. El tiempo que el sol emplea en volver al mismo equinoccio, ó en jeneral al mismo punto de la eclíptica, forma el año trópico. Y se le da esta denominacion, porque se llaman *trópicos* á dos círculos de la esfera celeste que distan del ecuador á cada lado una cantidad igual á la inclinacion de la eclíptica, pues *la cantidad que espresa la citada inclinacion es lo que se separa el sol del ecuador celeste.*

La duracion del año trópico ha interesado á los hombres en todos tiempos. Porque en efecto era una medida natural de los trabajos que piden largos intervalos, y que dependen de la mudanza de las estaciones; su conocimiento era necesario para la agricultura, el comercio y los viajes; por lo que se ha puesto mucho cuidado en determinarlos.

Aunque la division de los meses en dias sea conocida de la mayor parte de las gentes, sin embargo pondrémos aquí los siguientes versos, para que se pueda fijar bien en la memoria:

Treinta dias trae Noviembre
con Abril, Junio y Setiembre;
veinte y ocho trae el uno,
y los demas treinta y uno.

El mes de Febrero es el que consta sólo de 28 dias, escepto en los años bisiestos, que vienen de cuatro en cuatro años, y consta de 29 dias. El año de 1820 es año bisiesto; y despues, de cuatro en cuatro años vendrá uno bisiesto, de modo que los años 24, 28, 32, &c. serán bisiestos; y en jeneral *todos los años cuyo número se puede dividir por* 4, *sin dejar resta*, *son bisiestos*, *escepto en los que forman un siglo completo*; así es, que no fue bisiesto el año de 1800, y no lo serán los de 1900, 2000, 2100, &c.

El año se ha dividido en cuatro estaciones análogas á los trabajos de la agricultura, que son: la *primavera*, el *estío*, el *otoño*, y el *invierno*. La primavera se cuenta desde la entrada del sol en el ecuador hasta que llega al *trópico boreal* ó *ártico*; el equinoccio que le sirve de oríjen se llama el *equinoccio de la primavera*. El tiempo que pasa despues hasta la vuelta al ecuador forma el estío, y se termina por el otro equinoccio que es el de *otoño*. Esta estacion se estiende hasta que llega el sol al *trópico austral*; y su vuelta de este punto al ecuador forma el invierno, que cierra el círculo del año trópico.

558 La línea de los equinoccios retrograda sobre la eclíptica un grado en 71,6 años, y por consiguiente no volverá á la misma posicion, sino en un periodo de 25776 años. Á este fenómeno se le da el nombre de *precesion de los equinoccios*. Su descubrimiento es del tiempo de Hiparco. Ántes de esta época se creia que cuando el sol volvia al mismo equinoccio, volvia á tomar la misma posicion con relacion á las estrellas; y como la presencia de este astro en las diversas partes del cielo determinaba y arreglaba los trabajos de la agricultura, se habia dividido desde la mas remota antigüedad la eclíptica, partiendo del equinoccio de la primavera, en doce porciones iguales que se habian llamado *signos*, sin duda á causa de los trabajos que ellos indicaban, porque se les habian dado nombres análogos.

El paso del sol por estos diferentes signos era fácil de reconocer por la observacion de las estrellas que componen la eclíptica, y que se habian tambien dividido en doce grupos ó constelaciones. Pero despues de esta antigua época, el estado del cielo ha mudado mucho. Los equinoccios han retrogradado sobre la eclíptica por el efecto de la precesion, y las mismas estrellas no corresponden ya á los mismos trabajos. Sin embargo, se ha conservado en Astronomía esta antigua division, y aun los nombres de los doce signos, que se pueden retener por su órden en estos dos versos.

Sunt Aries, Taurus, Geminis, Cancer, Leo, Virgo.
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Piscis.

Cada signo es la dozava parte de la circunferencia, y vale por consiguiente 30 grados. La reunion de estos signos forma como ya hemos dicho lo que se llama el *zodiaco*.

559 Despues de un convenio jeneralmente adoptado por todos los astrónomos, el primer punto del signo de áries corresponde siempre al equinoccio de la primavera; el primer punto de cáncer al solsticio de estío; el primer punto de libra al equinoccio de otoño; y el primer punto de capricornio al solsticio de invierno.

Desde el tiempo de Hiparco, ó mas exactamente en una época un poco anterior, las constelaciones de áries, cáncer, libra y capricornio, se hallaban realmente en cuatro puntos de la órbita del sol; pero se han alejado cerca de 30° por el efecto de la precesion. De modo que el equinoccio de la primavera sucede hoy en la constelacion de píscis; el solsticio de estío en la constelacion de géminis; el equinoccio de otoño en la de virgo; el solsticio de invierno en la de sajitario; todos han retrogradado un signo. Luego se ve que es preciso distinguir cuidadosamente los *signos del zodiaco*, que son fijos con relacion á los equinoccios; y las constelaciones, que son móviles con relacion á estos mismos puntos.

La teoría de la atraccion universal ha hecho conocer que el fenómeno de la precesion de los equinoccios es causado por la atraccion de la luna y del sol sobre el esferoide aplanado de la tierra.

560 Se observan frecuentemente sobre el disco del sol manchas negras de una forma irregular, que atraviesan su superficie en el espacio de algunos dias. Su número, su posicion y su magnitud, son sumamente variables; se han visto hasta cinco ó seis veces mas anchas que la tierra entera, como fue la observada por Herschell en 1779; su ancho real, concluido de su diámetro aparente, era de mas de 17000 leguas.

Cada mancha negra está rodeada por lo regular de una *penombra*, al rededor de la cual se nota una faja de luz mas brillante que el resto del sol. Cuando las manchas principian á manifestarse sobre el borde del sol, se parecen á un trazo delicado. Despues va aumentando poco á poco su magnitud aparente, á medida que se adelantan hácia el medio de su disco, despues disminuyen por los mismos periodos, y acaban por desaparecer enteramente.

De Mercurio.

561 Este planeta es el que se halla mas próximo al sol, y por lo mismo no se le ve en muchas ocasiones por estar confundido en su resplandor. El diámetro de Mercurio es 0,3837 del de la tierra; su volúmen 0,0565 del de la tierra; y su masa 0,1627 de la de la tierra; su densidad (557 nota) es 2,88 de la de la tierra, ó 15,84 de la del agua; su distancia media al sol es de 9284,8 radios terrestres; su distancia media á la tierra es de 23985,9 radios terrestres. Su revolucion al rededor del sol se verifica en 87,969258 dias; la rotacion de Mercurio al rededor de su eje se efectúa en 1,0038 dias; y la inclinacion de su órbita respecto de la eclíptica es de 7° (*). En Mercurio se han observado montañas hasta de unas 18000 varas.

De Vénus.

562 Este planeta jira al rededor del sol en una órbita que se halla entre la de Mercurio y la de la Tierra. Es el planeta mas brillante de todos; los an-

(*) *Para mayor sencillez omitirémos en los demas planetas la repeticion de que se toma siempre por unidad la parte correspondiente de la tierra; así, los valores que pongamos de los diámetros, volúmenes, masas y densidades, son tomando por unidad el diámetro, volúmen, &c. de la tierra; y todas las distancias medias las espresarémos en valores de radios terrestres.*

tiguos le llamaron *lúcifer* ó el astro de la mañana; tambien le han llamado *vésper* ó estrella de la tarde ó del pastor. La razon de estas denominaciones es que los antiguos no conocieron desde luego que la estrella de la tarde y la de la mañana son un solo y mismo astro; Vénus presenta fases en un todo semejantes á las de la luna. El diámetro de Vénus es 0,9593; su volúmen 0,8828; su masa 0,9243; su densidad 1,0934, y 6,0137 comparada con la del agua; su distancia media al sol es 17349,8; su distancia media á la tierra 23985,9; su revolucion al rededor del sol se hace en 224,700824 dias; la duracion de la rotacion de Vénus al rededor de su eje, se verifica en 0,973 de dia; el eje de rotacion permanece constantemente paralelo á sí mismo, y el ecuador que le es perpendicular forma con la eclíptica un ángulo considerable. Se han reconocido montañas sobre la superficie de Vénus hasta de unas 40000 varas; la inclinacion de su órbita respecto de la eclíptica es de $3^{\circ}23'35''$.

De la Tierra.

563 Como la *Tierra* es el planeta que habitamos, desde la mas remota antigüedad se han hecho esfuerzos para conocerle debidamente, y se le ha consagrado una ciencia particular, que se conoce con el nombre de *Geografía*, que quiere decir, *descripcion de la tierra*; y segun el objeto con que se haga esta descripcion, resulta un ramo particular de la Geografía: así es que se considera la Geografía *astronómica*, la *comercial*, *eclesiástica*, *histórica*, *matemática*, *física*, *política* y *estadística*; pero los puntos de vista principales bajo que se puede considerar y que mas interesa conocer son tres, á saber: *geografía astronómica*, *geografía física* y *geografía política*.

La astronómica tiene por objeto la descripcion de la Tierra con relacion á la bóveda celeste; la física la considera con relacion á su naturaleza; y la política con relacion á los habitantes que la pueblan. Nosotros considerarémos rápidamente á la Tierra bajo cada uno de estos aspectos; es decir, que considerarémos á la Tierra, 1.º *astronómicamente*, esto es, como planeta; 2.º físicamente, para dar alguna lijera idea de lo que se sabe en el dia acerca de su estructura; 3.º indicarémos el número de habitantes que la pueblan; 4.º y por último dirémos algo de su temperatura.

De la Tierra considerada astronómicamente.

564 Á la Astronomía corresponde el considerar la Tierra como un planeta; y por lo mismo deberémos dar á conocer en este lugar sus movimientos, su figura, su masa, su volúmen, &c. con alguna mas particularidad, por cuanto habiendo sido elejido para unidad de medida respecto de los demas planetas, su diámetro, su volúmen, su masa, su densidad y su radio, debemos determinar estas cantidades con la mayor exactitud posible.

Hace ya mucho que por la altura que tenian los astros en los diversos parajes de la tierra, y por el fenómeno que se observaba en el mar de irse ocultando las embarcaciones por su parte inferior segun se iban alejando del puerto, de modo que lo último que desaparece son las cruzetas y los topes, se llegó á deducir que la superficie terrestre no era plana, sino *convexa*. Se observó tambien que en cualquier paraje donde uno se coloque, ve terminada la tierra por todas partes; por lo que se llamó *horizonte* al círculo en que parece que el cielo se une con la tierra; se advirtió igualmente que en cada sitio hay un horizonte particular, y que en alta mar este horizonte parece con toda exactitud un límite real, uniforme y circular. Pero como variando de punto en el mar se tiene tambien diferente horizonte, era un proyecto atrevido é importante, el tratar de reconocer lo que viene á ser esta barrera aparente cuando se camina hácia ella siempre en un mismo sentido. Juan Sebastian de Elcano, natural de Guetaria en Guipúzcoa, fue el primero que llegó á realizar esta empresa (*). Se embarcó en Sevilla, y dirijiendo siempre su ruta hácia el occidente, volvió á encontrar al fin la Europa, y entró en Sevilla, como si hubiera venido del oriente.

565 Esta importante espedicion, repetida despues por muchos navegantes, prueba que *la superficie total de las aguas y de la tierra es convexa, reentrante en sí misma*, y *que el cielo no la toca en ningun punto ni paraje.*

(*) *Como este es un hecho que hace mucho honor á la Nacion Española, no podemos ménos de indicar sus principales circunstancias.*

El gran Cristóbal Colomb concibió la idea de que, caminando hácia el occidente, se podria pasar á las Indias orientales sin el largo y penoso viaje del cabo de Buena Esperanza, cuyas tormentas y riesgos arredraban á los mas intrépidos marinos. Con este objeto emprendió Colomb su primer viaje en 12 de Octubre de 1492, y en él descubrió las principales islas de las Antillas. En 1493 verificó segunda espedicion, y aumentó el número de las islas conocidas. En el tercer viaje llegó á tomar tierra en 1498 en el continente de América hácia Paria y Cumaná.

Repetidas espediciones de otros marinos, que formados en los buques de Colomb, siguieron su ejemplo, dieron á conocer mas y mas el nuevo continente, y desengañaron á su descubridor de que no hacia parte de las primitivas Indias, como él creia; pero á esta idea sustituyó otra no ménos feliz, conjeturando que la costa descubierta tendria en la parte occidental otra bañada por un oceano que daria fácil tránsito á las Indias orientales. Con tan grande esperanza, y deseoso de encontrar este paso, que uniendo ambos mares facilitase tan suspirada navegacion, emprendió su cuarto viaje dirijiéndose al ismo de Darien, en donde conjeturaba que debia hallarse esta comunicacion; pero despues de haver reconocido toda la costa hácia el mediodia hasta Portobelo, por una

Estos resultados nos hacen conocer la redondez de la tierra en el sentido de occidente á oriente; pero por una multitud de viajes marítimos, se ha llegado á reconocer que es tambien redonda en el sentido de norte á sur; por lo que no queda la mas mínima duda en que la masa redonda de la tierra rodeada de su atmósfera, como de una capa de poco espesor, existe en el espacio aislada y en el vacío. Y por muchas operaciones jeodésicas hechas en Francia, en el ecuádor y hácia los polos, se ha llegado á determinar que *el es-*

---

complicacion de desgracias, tuvo que volverse á España, donde acabó su gloriosa carrera dejando á la posteridad un nombre eterno.

Los Portugueses habian realizado entre tanto su gran viaje á las Indias orientales por el cabo de Buena Esperanza, que montó el primero Basco de Gama, regresando felizmente; lo que, unido á la rica flota que de ellas habia conducido Pedro Álvarez Cabral, eran poderosos estímulos para que los castellanos no dejasen sepultado con Colomb su lisonjero designio de encontrar un nuevo oceano y una comunicacion al sur para este lucroso comercio. Con estas miras Juan Díaz de Solis y Vicente Ibáñez Pinson, que ya habian hecho descubrimientos al norte, emprendieron un viaje á la parte opuesta, que se estendió hasta los 40° de latitud meridional, sin otro éxito que conocer algo mas la dilatada estension de la América. Mas venturoso fue Basco Núñez de Balboa; pues arrostrando á todas las fatigas que se opusieron á su camino para atravesar el ismo de Darien, descubrió el primero el gran mar del sur, comprobando una de las sospechas de Colomb.

Reconocido el mar del sur, sólo restaba hallar su comunicacion con el del norte, para cumplir todo el sistema de Colomb. Fernando el Católico se aplicó á esto con eficacia, equipando dos navíos, cuyo mando confió al acreditado marino Juan Díaz de Solis, el cual costeando la América meridional tocó en el rio *feroide que mas concuerda con todas las medidas, es aquel en que el eje mayor de la tierra, ó sea el diámetro del ecuador, es de 15254598 varas, y el eje menor, esto es, la distancia que hay de polo á polo, es de 15209063 varas.* En este concepto, para hallar el volúmen de la tierra, no tendrémos mas que sustituir en la espresion $\frac{4\pi a^2 b}{3}$ que representa (227) el volúmen de un elipsoide aplanado, ó que se orijina

---

Janeiro: y mas al mediodia embocó en uno que creyó ser el apetecido canal, y era el rio de la Plata, donde en un desembarco fue muerto y devorado por los naturales; de lo cual horrorizados sus compañeros, sin pasar adelante regresaron á España. Pero como en aquella época era la Nacion Española emprendedora y activa cual ninguna, aprobó el plan que sobre este punto le propuso el portugues Fernando Magallanes, y mandó aprontar en Sevilla cinco carabelas, en que iban 237 personas, y en una de ellas iba por maestro Juan Sebastian de Elcano.

El 1.º de Agosto de 1519 salieron de Sevilla, y el 27 de Setiembre de San Lúcar, haciendo rumbo por Canarias, llegaron al cabo de Santa María, ya descubierto por Solis; reconocieron el rio de la Plata, y viendo que su direccion era hácia el norte, como su intencion era el recorrer la costa hácia el mediodía hasta que precisamente se terminase ó se encontrase paso al otro mar, pasaron adelante y descubrieron la bahía de San Matías, la que reconocieron: y viendo que no pasaba al otro mar, salieron de ella; y prolongando la costa llegaron á la de San Julian. Allí se detuvo, y al salir de ella perdió uno de los buques. Con los cuatro restantes siguieron costeando; y el dia de las once mil vírjenes descubrieron un cabo al que pusieron este nombre; una de las naos, que se llamaba Victoria, *vió una abertura que reconocida despues, era un estrecho que por esto algunos le* de jirar una elipse al rededor de su eje menor, en vez de π su valor 3,14 &c.; en vez de a la mitad del diámetro del ecuador ó eje mayor de dicho elipsoide, que es 7627299 varas; y en vez de b la mitad del eje menor de dicho elipsoide ó de la distancia que hay de polo á polo, que es 7604531,5 varas, y nos resultará que el volúmen de la tierra es de

1853116042409079468459 varas cúbicas;

que multiplicando por 27 se tendrán convertidas en

50,034.133,145.045,145.648,393 pies cúbicos;

---

llamaron de la Victoria. Mandó Magallanes que todas las naos saliesen á su reconocimiento; una de ellas se vió obligada á desembarcar por causa del reflujo; su tripulacion mal contenta, aprisionó al Capitan é hizo rumbo á España. De las dos restantes, una le trajo la nueva de que sólo habia descubierto una gran bahía rodeada de bajos y escollos; y la otra, que habiendo caminado tres dias sin embarazo, lo alto de las sierras de uno y otro lado, el escesivo fondo y sus observaciones sobre las mareas, le inclinaban á asegurar que aquel era un estrecho por el que se comunicaban ambos mares. Con esta noticia embocó Magallanes con las tres naves restantes el estrecho, que era el que se caracterizó con su nombre, y sin haber visto natural alguno, desembocó en el mar pacífico al cabo de 22 dias. Caminaron luego haciendo rumbo al NO, y hallaron la isla que denominaron San Pablo; *despues cortaron la equinoccial; vieron las islas que llamaron* de los Ladrones; *y continuando su rumbo, descubrieron un archipiélago que denominaron de* San Lázaro; *navegaron por entre estas islas llevando indios en canoas por prácticos; y formaron alianzas con los Régulos; algunos abrazaron la religion cristiana y prestaron obediencia al Emperador. Resistiéndose á ejecutarlo el de la isla de Matan, fue á ella Magallanes con 40 hombres; pero recibidos por mas de 3000, hubieron de retirarse con pérdida de mucha jente, entre ellos el mismo Magallanes. Eli-*

que partiendo por 8000000000000 pies cúbicos, que tiene la legua cúbica, da 6254266643,13064 &c. leguas cúbicas.

La densidad media de la tierra la ha determinado Cavendish en una memoria que se halla en las *transacciones filosóficas* del año de 1798; y ha encontrado que es 5,5 estando representada por 1 la del agua; luego para hallar la masa de toda la tierra, no tenemos mas que averiguar el peso de un pie cúbico de los que componen la masa terrestre; y co-

---

jieron por jefes al piloto mayor Juan Serrano y al portugues Duarte Barbosa. Uno de estos maltrató á un esclavo de Magallanes, quien por vengarse le malquistó con el Rey de la isla, de suerte que en un falso convite hizo matar á 24 de los principales; y aunque Serrano fue llevado herido á la playa, y rogaba con lágrimas que le rescatasen, temiendo los de las naves alguna otra traicion siguieron su rumbo dejándole abandonado.

En la isla inmediata de Buhol, de las tres naos que les quedaban habilitaron dos; y quemando la otra, siguieron su viaje; surjieron en Borneo, trataron con los isleños, y despues siguieron su ruta hasta las Molucas; tuvieron sus tratos particularmente con el Rey de Tidore; hicieron alianza con sus soberanos; cargaron de sus esquisitos frutos en breve tiempo; y no pudiendo la nao Trinidad seguir el viaje, hubo de quedarse para intentarle despues; y la Victoria, única que restaba, cuyo mando se habia dado en Borneo á Juan Sebastian de Elcano con 59 personas, dió la vela para Europa, y el 19 de Julio de 1522 entraron en el puerto de la isla de Santiago en las de Cavo Verde, *donde notaron la diferencia de un dia entre su cuenta y la de los isleños; pues los del buque contaban miércoles cuando los de la isla le tenian por juéves; el 4 de Setiembre avistaron el cavo de San Vicente; y por último entraron en San Lúcar el 7 de Setiembre de 1522 sólo con 18 personas.*

mo un pie cúbico de agua dejamos advertido (371), que pesa 47 libras, y la densidad media ó peso específico de la tierra acabamos de indicar que es 5,5 veces mayor que la del agua, resulta que cada pie cúbico de los que componen la tierra pesará 5,5×47 libras =258,5 libras =2,585 quintales.

Luego si multiplicamos el número de pies cúbicos que hemos hallado que contiene el globo terrestre, por este número de quintales, resultará que la masa de toda la tierra es de
$129338^{2}234^{1}7994^{1}701501096$ quintales.

566 Como la diferencia entre los ejes del elipsoide terrestre es sólo 45535 varas, resulta que en la mayor parte de las aplicaciones se supone esférica la tierra; y para hallar la esfera que mas se aproxima á su figura, se supone que sea aquella en que todos los grados del meridiano sean iguales al grado 45 de latitud que tiene 57008,22 toesas, ó 133019,18 varas; luego si multiplicamos esto por 360°, hallarémos la circunferencia entera de la tierra; y dividiendo esta por 3,14 &c. resultará que el diámetro de la esfera que mas se aproxima á la tierra es de 15231832 varas; y por consiguiente su radio será de 7615916 varas, ó 1142,3874 leguas de á 20000 pies españoles; y este valor es el que se ha tomado por unidad para espresar las distancias medias de los planetas al sol y á la tierra. Así es, que siendo la distancia media del sol á la tierra de 27440452 leguas de á 20000 pies españoles, para tener este valor espresado en una unidad mayor, cual es en radios terrestres, se dividirá por 1142,3874 leguas que tiene dicho radio, y resulta que la distancia media de la tierra al sol es de 24020,3 radios terrestres.

567 La tierra jira al rededor de su eje, que es la línea que une los dos polos, en 24 horas solares de tiempo medio; y al rededor del sol jira como los planetas, en una órbita, que se llama la *eclíptica*, y vuelve á un mismo punto de ella en 365,24225694 dias; de manera que el movimiento que aparentemente tie-

ne (556) el sol, es el que corresponde á la tierra.

Todo plano que pasa por el eje de la tierra, corta á su superficie en lo que se llama *meridiano*, que aunque en realidad es una elipse, se considera como un círculo máximo: y se llama meridiano, como ya hemos indicado (549), porque cuando el sol pasa por dicho plano, es medio dia para todos los puntos que constituye este plano en la superficie terrestre.

El plano del ecuador terrestre forma con el plano de la eclíptica un ángulo que se llama *la oblicuidad de la eclíptica.* Este ángulo es variable, pues disminuye en cada año $0'',521$; dicha oblicuidad en el año de 1800 era de $23^\circ 27' 57''$.

568 Los planos del ecuador y de la eclíptica se cortan en una línea recta, que se llama *línea de los equinoccios*, y los estremos de esta recta se llaman *equinoccios ó puntos equinocciales*; porque cuando la tierra pasa por ellos, el dia es igual con la noche en todos los parajes del globo. El equinoccio por el cual pasa la tierra al remontar hácia al polo norte, se llama el *equinoccio de la primavera*, y es cuando la tierra entra en el signo de *áries* hácia el 21 de Marzo; y aquel por el cual pasa al dirijirse al polo sur, se llama *equinoccio de otoño*, y es cuando la tierra entra en el signo de libra hácia el 23 de Setiembre.

Una recta perpendicular al plano de la eclíptica, tirada por el centro de la tierra, se llama el *eje de la eclíptica*, por analojía con el eje del ecuador. Los dos puntos opuestos donde esta recta prolongada corta á la esfera celeste, se llaman los *polos de la eclíptica*, y dicha recta corta por precision en alguno de sus puntos á los *círculos polares*, que son unos círculos que distan del polo la misma cantidad que espresa la inclinacion de la eclíptica, llamándose *circulo polar boreal* el que está junto al polo boreal del ecuador, y el otro *austral*.

El *eje* del ecuador es el mismo eje terrestre, que es la perpendicular al plano del ecuador tirada por el centro de la tierra; el ángulo que forman entre sí el eje de la eclíptica y el del ecuador, es el mismo que el que forman los planos á que son perpendiculares; por lo que tienen la misma inclinacion que espresa la oblicuidad de la eclíptica. El polo boreal de la eclíptica es el único que podemos percibir en Europa.

569 Para formar una idea de la figura de la tierra y de las partes que la componen, se hace uso de un globo, que se arma de modo que tiene allí su horizonte, meridiano, &c. y con su auxilio se pueden resolver muchos problemas útiles é interesantes. Pero debemos advertir que no se puede fijar la traza del plano de la eclíptica sobre la superficie del globo terrestre, como se marca la del ecuador. En efecto, este es perpendicular al eje de rotacion de la esfera celeste; jirando con ella, no muda la posicion con relacion á la tierra, que él corta siempre en los mismos puntos. La eclíptica, al contrario, es oblicua al eje del ecuador; esta fija en el cielo, pero es móvil con relacion á la tierra; jirando con la esfera celeste, corta necesariamente á la tierra en puntos diferentes, y la traza que forma en ella es siempre variable, estando limitada al norte y al mediodia por dos paralelos terrestres, correspondientes á los trópicos de capricornio y de cáncer. Por consiguiente el señalarla en el globo, segun se acostumbra, es inexacto y puede inducir á equivocaciones.

570 Tambien es útil distinguir sobre la superficie de la tierra dos pequeños círculos análogos á los círculos polares celestes. Si se hace jirar la tierra sobre ella misma en el sentido de su movimiento diurno, quedando fijo el eje de la eclíptica, este eje trazará sobre su superficie los paralelos de que se trata. Los lugares que están situados en ellos tienen un punto de los círculos polares celestes en su zenith; luego su latitud es igual á la declinacion de estos círculos, que es el complemento de la oblicuidad de la eclíptica en el ecuador. En los paises que comprende el círculo polar boreal ó ártico hay habitantes; pero el círculo polar austral ó antártico está rodeado por to-

das partes de hielos perpetuos, y hasta ahora nadie ha podido acercarse á él.

Jeneralmente el hemisferio austral de la tierra parece mas frio que el boreal; lo cual puede provenir de que como el sol ilumina á este hemisferio unos seis dias ménos que al otro en cada año, no puede escitar en él tanto calor: así es, que la faja de hielo que rodea al polo ártico sólo se estiende á 10° de distancia en latitud; cuando la del polo antártico se estiende á mas de 20°, y los enormes pedazos de hielo que se desprenden de ella, suelen caminar hasta al 65° y aun al 55° de latitud.

Los dos círculos polares y los dos trópicos dividen la superficie de la tierra en cinco bandas ó fajas que se llaman *zonas*, y que son tambien distintas las unas de las otras, por su posicion con relacion al sol, y por la variedad de sus producciones y de su temperatura.

571 El sol, por su magnitud, ilumina al mismo tiempo mas de la mitad de la tierra, y el círculo que forma este límite se llama *círculo de iluminacion*.

La zona comprendida entre los dos trópicos tiene siempre el sol casi vertical, el calor es allí escesivo, por lo que se le llama *tórrida*. En ella es donde la naturaleza despliega todas sus riquezas; los animales, las plantas y aun las sustancias inorgánicas, están allí dotadas de los mas vivos colores, y se hallan en ella los frutos mas sabrosos.

Al contrario, las regiones comprendidas desde los polos hasta los círculos polares, no ven jamas el sol, sino con una gran oblicuidad; tienen largos intervalos de dias y de noches, y bajo el polo no hay en el año sino un dia y una noche de seis meses. El frio es escesivo en dichos paises; estos son estériles y casi inhabitables, aun del lado del polo boreal; por lo cual estas zonas se llaman *glaciales*.

Los paises tales como Europa, intermedios entre los trópicos y los círculos polares, no recibiendo jamas el sol, ni bajo una oblicuidad muy grande ni muy pequeña, y no estando espuestos á largas alternativas de dia y de noche, conservan una temperatura media, y se les ha caracterizado con el nombre de *zonas templadas*.

572 Hay muchas causas que disminuyen la larga oscuridad de las rejiones polares. Porque en primer lugar la mas pequeña porcion visible del disco del sol basta para orijinar el dia. Así, el dia principia cuando el centro del disco del sol está todavía debajo del horizonte. Esta circunstancia añade muchos dias al tiempo en que el sol es visible bajo los círculos polares. Las refracciones aumentan aun este efecto, y tanto mas cuanto ellas son mas considerables en aquellos paises helados donde el aire se halla condensado por el frio. Otra causa debe aumentarlas todavía, y es la conjelacion casi habitual de la superficie del suelo, que hace muy rápido el decremento de la densidad del aire á pequeñas alturas. Estas circunstancias reunidas deben frecuentemente producir refracciones estraordinarias, que hacen visible al sol mucho tiempo ántes. El crepúsculo, mas largo en aquellos paises que en los nuestros, mantiene allí un débil resplandor, por el cual no están en una oscuridad total. Ademas, cuando la luna pasa al norte del ecuador, jira constantemente al rededor del polo, y los habitantes de las regiones polares la perciben siempre sobre el horizonte, como ven siempre al sol cuando se aproxima al trópico boreal. En fin, un gran número de metéoros ígneos, tales como las auroras boreales y los globos de fuego, que son muy frecuentes, orijinan aun algunos resplandores sobre estos paises.

573 Por último, observarémos que los pueblos que se hallan en el ecuador, se dice que tienen *la esfera recta*; porque el ecuador pasa por el zenit de aquellos parajes perpendicularmente sobre el horizonte, y estos tienen siempre iguales todos los dias del año. Los parajes que se hallan en los polos, se dice que tienen *la esfera paralela*; porque su horizonte es paralelo con el ecuador terrestre, y para estos

parajes el año consta sólo de un dia y de una noche. Y en fin, tienen *la esfera oblicua* todos los parajes de la tierra que no están ni en el ecuador ni en los polos, que son la mayor parte de los puntos terrestres. En todos ellos se verifica que los dias son desiguales con las noches en todo el año, escepto en los tiempos de los equinoccios. Miéntras mas oblicua es la esfera, es decir, miéntras mas se acerca uno á los polos, hay mas desigualdad en los dias y en las noches. El mayor dia que se tiene en Madrid es de $15^h 3' 43''$; el menor de $8^h 56' 17''$; y el mayor crepúsculo de $2^h 40' 23''$ por mañana ó tarde.

574 Para fijar la posicion de un paraje ó punto sobre la superficie del globo terrestre, se acostumbra hacer sólo por dos coordenadas, que son lo que se llama *longitud*, y lo que se llama *latitud*. Y así como para fijar la posicion de un punto sobre un plano es arbitrario elejir el punto de oríjen, así sucede aquí; por lo que cada nacion ha elejido un punto diferente para oríjen de estas coordenadas. Elejido este punto, se concibe por él un meridiano que se llama *primero*, porque con relacion á él se comparan los demas; y para fijar un punto cualquiera, no se hace mas que concebir un meridiano que pase por este punto, y la parte de este meridiano interceptada entre dicho punto y el ecuador, es lo que se llama *latitud*; y el arco del ecuador interceptado entre dicho meridiano y el primero, es lo que se llama *longitud*: habiéndose dado estas denominaciones porque la tierra conocida de los antiguos era mas estrecha de sur á norte, que de este á oeste. La longitud se puede contar de dos modos, ó distinguiéndola en *longitud oriental* y en *longitud occidental*, segun el paraje se halle al este ú oeste de dicho primer meridiano, en cuyo caso la mayor longitud que puede haber es de 180°; ó tambien se suele contar siempre al oriente del primer meridiano; y entónces puede llegar á contarse hasta de 360°. Antiguamente se contaba de este modo, por-

que se elejia por primer meridiano el que pasaba por la isla de Hierro, la mas occidental de las islas Canarias; pero como en el dia se toma por primer meridiano el que pasa por las ciudades donde se hallan los observatorios astronómicos principales, se acostumbra á contar la longitud del primer modo. En la actualidad el primer meridiano que se cuenta mas jeneralmente en España es el que pasa por la ciudad de San Fernando, en la isla de Leon, donde se halla el observatorio astronómico; tambien se ha contado por primer meridiano el que pasa por la plaza mayor de Madrid y por el Real Seminario de Nobles. Los franceses le cuentan desde el que pasa por el observatorio de Paris, y los ingleses desde el que pasa por su observatorio de Greenwich. Lo que conviene saber es los grados de distancia que hay entre dos primeros meridianos; por lo que es indispensable saber que el del observatorio astronómico de la ciudad de S. Fernando ó isla de Leon, se halla $2°29'33''$ al oeste del meridiano que pasa por la plaza mayor de Madrid; el del antiguo observatorio de Cádiz á $2°34'55''$ al oeste tambien del que pasa por dicha plaza mayor de Madrid; el de Tenerife $12°57'30''$ al oeste tambien; el de la punta mas occidental de la isla de Hierro $13°27'30''$ tambien el oeste; el de Greenwich á los $3°42'15''$ al este del de Madrid; y el de Paris á los $6°2'30''$ al este tambien de Madrid; el que pasa por el Real Seminario de Nobles, se halla $26''$ al O del que pasa por dicha plaza mayor.

Con estos datos ya es fácil reducir unas longitudes á otras, con sólo añadir ó quitar la distancia que hay entre dichos meridianos, que es lo que se llama *diferencia de meridianos*.

575 La latitud tambien conviene distinguirla en latitud *norte* y latitud *sur*, segun se halle el punto terrestre situado entre el ecuador y el polo norte, ó entre el ecuador y el polo sur. La latitud de la plaza mayor de Madrid, tomando un promedio entre la determinada por D. Jorje Juan, la de D. Josef Chaix,

la de D. Joaquin Ferrer, y la de D. Felipe Bauzá, cuyas diferencias respectivas no esceden de 3″, es de 40°24′56″,86. Como en el dia no se hacen otras observaciones en Madrid que las de nuestro célebre Don Felipe Bauzá en el observatorio del depósito hidrográfico, calle de Alcalá, núm. 6, no será inoportuno advertir que este observatorio se halla 10″,6 al norte de la plaza mayor, y 56″,1 al este de dicha plaza.

Como en la superficie del globo terrestre se hallan valles y montañas, resulta que unos puntos distan mas que otros del centro de la tierra ó de la superficie del mar; y por esta causa Laplace ha sido el primero que ha llamado la atencion de los sabios manifestando que para fijar invariablemente la posicion de un paraje terrestre, era tambien necesario atender á su distancia del centro de la tierra, ó á lo que esté mas elevado sobre el nivel del mar; por lo que se hace tan recomendable el hacer observaciones barométricas en todos los parajes, para determinar por la altura media del barómetro la altura de aquel paraje sobre el nivel del mar.

Los antiguos sólo conocieron parte de la Europa y del Ásia y África: á fines del siglo 15.° se descubrió la América: y desde entónces se ha considerado dividida la superficie del globo en cuatro porciones que se han denominado *las cuatro partes del mundo*, y son: *Europa*, *Ásia*, *África* y *América*. Posteriormente se han descubierto varias islas que se han ido agregando á algunas de las cuatro partes conocidas segun su localidad; pero atendiendo á la gran estension que tienen algunos de estos nuevos paises, y á que por la gran distancia que separa á la mayor parte de ellos de los continentes conocidos, no hay razones suficientes para agregarlos mas bien á una parte del mundo que á otra, se ha considerado necesario en estos últimos tiempos el formar otra parte del mundo, que se ha denominado *Oceanía*. Esta quinta parte del mundo, que se halla separada del Ásia por el estrecho de Málaca y el mar de China, y en el resto de su estension está rodeada por el grande oceano, se ha dividido por los mejores geógrafos modernos en tres grandes partes denominadas *Archipiélago austral*, *Australasia* y *Polinesia*.

El Archipiélago austral se divide en seis partes: 1.ª las *islas Filipinas*; 2.ª *Borneo*; 3.ª las de la *Sonda*; 4.ª las de *Timor*; 5.ª las *Célebes*; y 6.ª las *Molucas*.

La Australasia comprende: 1.º la *Nueva Guinea*; 2.º la *Nueva Holanda*; 3.º la tierra de *Diemer*; y 4.º la *Nueva Zelanda*.

La Polinesia está formada, como su nombre lo indica, pues quiere decir *muchas islas*, por una multitud de pequeñas islas esparcidas en el grande oceano. Se divide en Polinesia *septentrional* y en Polinesia *meridional*, separadas entre sí por el ecuador. La septentrional comprende las islas *Sandwich*, las *Marianas* ó de los *Ladrones*, las *Carolinas* y las *Mulgraves*. Las partes principales que componen la Polinesia meridional son las islas del *Almirantazgo*, el Archipiélago de la *Nueva Bretaña*; las islas de *Salomon*, las *Nuevas Hébridas* ó *tierra del Espíritu Santo*, la *Nueva Caledonia*, las islas de los *Amigos*, las de los *Navegantes*, de la *Sociedad*, el archipiélago *peligroso* y del *mar malo*, las islas *Marquesas de Mendoza*, la isla de *Pascua*, y las últimamente descubiertas, á saber, la de *Washinton*, la de *Salas* y de *Gomez*, de *Gwsinn*, y de *Buchle*.

De la tierra considerada físicamente, ó con mas propiedad, geognósticamente.

576 Bajo el nombre de Geografía física, se ha considerado aquella parte de la Geografía que tiene por objeto el describir la tierra con relacion á su naturaleza. Ella representa la estructura esterior de la tierra, su division en tierras y aguas, la subdivision de estas diferentes partes, su disposicion y encadenamiento; ella abraza la estension, situacion, límites y los nombres de los diversos paises, su clima, sue-

lo y aspecto, ó sus montañas y selvas; los mares, golfos, bahías, cabos, rios, arroyos, torrentes, lagos, canales, y las producciones de los tres reinos.

577 No permitiendo los límites á que hemos circunscrito esta obrita el esplicar con toda estension cada uno de estos aspectos bajo que se puede considerar la tierra, solo dirémos que esta se llama tambien *globo terráqueo*, porque casi las tres cuartas partes de su superficie están cubiertas de agua; y ademas indicarémos que los naturalistas han comprendido bajo el nombre de *Geologia* todo lo que se ha discurrido acerca de la tierra; y para esplicar su estructura y formacion, han recurrido á hipóteses mas ó ménos aventuradas: tambien han comprendido con el nombre de *Geogenia* todo lo que corresponde al estudio y conocimiento de la tierra. Mas como en estos últimos tiempos se ha abandonado el método antiguo de tratar de adivinar la naturaleza, en vez de observarla, no se ocupan ya los naturalistas en discursos vagos sobre la formacion de la tierra, sino que han tratado de examinarla con reflexion y madurez, y conocer en cuanto nos sea posible su estructura; ya se ha adelantado mucho sobre este punto, y se ha creido necesario el formar una ciencia aparte y separada, que se ocupe en dar á conocer la disposicion de nuestro globo. Esta ciencia, que está ahora en sus principios, se llama *Geognosia*, que quiere decir *conocimiento de la tierra*, y es muy digna de cultivarse por las muchas utilidades que pueden seguirse á todos los ramos de la historia natural, y á la misma Mineralogia; pues teniendo esta por objeto el conocimiento de los minerales, nunca puede ser este bastante exacto y completo, sino se conocen á fondo sus criaderos, y la colocacion y funciones que ejerce cada uno en el globo.

578 Nosotros habitamos la superficie de la tierra, donde edificamos nuestras casas; labramos esta superficie, para que produzca nuestro sustento; sondeamos su corteza, capa esterior ó su epidérmis, si podemos

esplicarnos de este modo, para socorrer nuestras necesidades, proporcionándonos los minerales que nos son precisos. El espesor de esta costra, capa ó epidérmis, hasta donde se ha llegado á penetrar en lo interior del globo terrestre, no es con respecto al volúmen de la tierra, lo que el grueso de una hoja de papel con relacion al volúmen de una esfera de 34 pulgadas españolas de diámetro. Las montañas mas elevadas, que nos parecen masas enormes, son irregularidades apénas sensibles sobre esta epidérmis, y vienen á ser lo mismo que aquellas eminencias que notamos en la superficie de una naranja.

Esta parte del globo se compone de *rocas*, que son aquellas masas grandes muy estendidas que forman las montañas y cordilleras, y son el criadero jeneral de todos los minerales. De estas, unas se ven formadas de capas, ya horizontales, ya oblicuas, al paso que en otras apénas es notable esta disposicion por estrados ó capas.

Observando estas masas y estas capas, se han notado en ellas diversas clases de estructura. Las unas se presentan jeneralmente bajo un aspecto cristalino; las sustancias que las forman, se hallan reunidas sin intermedio ó diseminadas en una pasta; tales son las piedras conocidas jeneralmente bajo el nombre de *granito*, de *sienito*, de *pórfido*, &c. Se ha observado que estas piedras estaban siempre colocadas debajo de todas las otras, y que no encerraban jamas cuerpos organizados; por lo que se ha inferido que habian sido formadas las primeras, y ántes de que la tierra fuese poblada. Á estas capas se les ha caracterizado con el nombre de *terrenos primitivos*.

579 Otras capas tienen una testura mas homojénea, un grano mas fino, y no presentan ordinariamente en su estructura la apariencia cristalina, sino mas bien la de una formacion por sedimento. Ellas se encuentran siempre colocadas encima de las primeras, y algunas veces encierran despojos muy abundantes de animales ó vejetales. Estas se llaman *capas de se-*

dimentos ó terrenos secundarios; tales son los *mármoles*, comunmente así llamados, las *margas*, el *yeso* &c.

Aun se puede distinguir una tercera clase de terrenos, que se han llamado *terrenos terciarios*, ó de *trasporte* ó de *acarreo*; y parece que se forman de los despojos de los dos primeros, depositados bajo forma de arenas ó de cantos rodados, separados ó reunidos de nuevo por una especie de sedimento. Aunque estos terrenos no tengan posicion relativa bien determinada, están sin embargo bastante comunmente colocados sobre las dos primeras especies de terrenos.

En fin, una cuarta clase de terreno, de una naturaleza y oríjen bien diferentes del de los tres precedentes, es el terreno formado casi á nuestra vista por las erupciones de los volcanes, y que por esta causa se llaman terrenos *volcánicos*.

580 Estas cuatro clases de terrenos componen, juntos ó separados, montañas que tienen aspectos muy diferentes. Las montañas que están formadas de capas primitivas son ordinariamente agudas, y aparecen como desgarradas. Las que pertenecen á formacion volcánica son casi cónicas, miéntras que las montañas compuestas de capas secundarias ó terciarias son aplanadas en su vértice, ó redondeadas por todos sus lados ó faldas.

Las capas que pertenecen á las dos primeras clases de terreno, están frecuentemente cortadas por una especie de hendiduras, las unas vacias y las otras llenas de sustancia de diversa naturaleza, como piedras, metales, &c.

Cada especie de terreno viene á ser criadero particular de las sustancias minerales, que no formando por sí rocas, se hallan como esparcidas en estas grandes masas. Las rocas mas metalíferas, como el *gneis*, el *granitino*, &c. pertenecen á los terrenos secundarios; y los de acarreo son estériles en minas metálicas, pues sólo ofrecen algunas sustancias metálicas en granos y en trozos rodados, que fueron arrancados de los terrenos primitivos y depositados en ellos.

De la tierra considerada políticamente.

581 Este es el punto sobre el cual nos detendrémos ménos, no porque no sea de la mayor importancia su conocimiento; sino porque es el aspecto que tiene ménos analojía con el objeto de esta obra. Sin embargo, no podemos ménos de indicar que la poblacion de todo el globo terrestre se reputa en unos 630 millones de habitantes. De estos la Europa contiene 170 millones; El Ásia 330; El África 70; la América 40 millones; y la Oceanía se reputa que tiene unos 16 millones. La España contiene unos 10 millones y medio de habitantes; y Madrid 167607.

De la temperatura de la tierra.

582 Se sabe que en los subterráneos, como á unos cien pies de profnndidad, la temperatura se mantiene constante. Pasado este término, no se sienten ni los grandes frios del invierno, ni los calores abrasadores del estío; se ha observado tambien que los grandes montones de hielo que cubren ciertas montañas de los Álpes, se funden continuamente por el pie, cuando ellos son bastante espesos para preservar del frio esterior el terreno sobre que reposan; y de debajo de estos hielos salen corrientes de agua, que corren aun durante el invierno. Cada año el sol envia ú orijina en la tierra una cierta cantidad de calórico; pero una gran parte se disipa en el espacio, y resulta un cierto equilibrio entre el calor que anualmente nos envia el sol y el que se disipa; de donde resulta un estado constante y durable de la temperatura en cada paraje de la tierra.

583 Todos los puntos de la superficie terrestre no están colocados en situaciones igualmente favorables para recibir la accion del sol; y así, la tabla siguiente manifiesta la ley de estos resultados para diferentes latitudes.

Latitudes.	*Nombres de las ciudades.*	*Temperatura media en grados del termómetro centíg.*
70°5′..........	Wadso, en Laponia..	2°, 2
59°56′,4.........	Petersburgo....	4, 2
48°50′............	Paris..............	12, 0
41°53′............	Roma.............	15, 9
29°44′............	El Cairo.........	22, 5
19°59′............	En el océano...	26, 0
0° 0′............	En el océano...	27, 0

Esta tabla, estraida de las observaciones mas exactas, prueba incontestablemente que *la temperatura del globo terrestre, observada cerca de su superficie, decrece del ecuador á los polos.*

La elevacion sobre el nivel del mar hace que esta temperatura disminuya, en términos que aun en la zona tórrida, el vértice de las altas montañas está cubierto de nieves que no se derriten jamas. Esta línea de las nieves perpetuas está colocada á diferentes elevaciones, segun las diversas latitudes.

Hé aquí la tabla formada por el Baron de Humboldt.

Latitudes boreales espresadas en grados.	*Alturas del límite inferior de las nieves perpetuas sobre el nivel del mar.*	*Temperatura media del llano á las mismas latitudes en grados centesimales.*	*Nombres de los observadores.*
0°0′............	17227 varas...	27°.............	Bouguer. Lacondamine Humboldt.
19°69′,9.........	16509............	26°.............	Humboldt.
45°0′............	9152............	12°,7............	Saussure. Bamond.
62°............	3409............	4°.............	Buch.
65°56′,9.........	....	0.............	Ohlsen. Vetlassen.

Entre las causas jenerales que modifican la temperatura de los lugares, no hemos considerado hasta ahora sino la altura; pero la proximidad á los mares tiene tambien mucha influencia, no precisamente para elevar ó bajar la temperatura ánua, sino para hacerla igual; porque se ha encontrado por esperiencia que la temperatura del mar, léjos de las costas, se mantiene siempre constante é igual á la temperatura media del aire durante todo el año.

De Marte.

584 La órbita de *Marte* se halla entre la de la tierra y la de Júpiter; su luz es de un color que tira al rojo, y no tiene fases bastante sensibles. Su diámetro en grados no llega á 9″, es 0,5176 del de la tierra; su volúmen es 0,1386; su masa 0,1294; su densidad 0,934 comparada con la de la tierra, y 5,137 comparada con el agua; su distancia media al sol y á la tierra es 36547,2; su revolucion al rededor del sol se verifica en 686,9796619 dias; su rotacion al rededor de su eje en 1,029 dias; la inclinacion de su órbita es 1°51′; y el eje de este planeta está inclinado sobre la eclíptica un ángulo de 59°41″,82.

De Júpiter.

585 *Júpiter* es el planeta mas importante del sistema solar, ya por su gran masa, y ya por los cuatro satélites que siempre le acompañan. Es el mayor de todos, y se distingue fácilmente de ellos por su magnitud peculiar y por su luz. Á la simple vista parece casi tan ancho como Vénus; pero no tan brillante; el diámetro de Júpiter á la distancia media del sol en grados es 186″,8; y comparado con el de la tierra es 10,8612 veces mayor que él; su volúmen 1280,9; su masa 308,94; su densidad 0,241 comparada con la de la tierra, y 1,3255 comparada con el agua; su distancia media al sol y á la tierra es 124793,8.

Su revolucion al rededor del sol se verifica en 4332,596308 dias; su rotacion al rededor de su eje en 0,414; su eje de rotacion es casi perpendicular al plano de la eclíptica. El contorno de su ecuador es cerca de once veces mayor que el de la tierra; la inclinacion de su órbita, respecto de la eclíptica, es 1°18′52″.

De Saturno.

586 Ántes que Herschell descubriese el planeta Urano, era *Saturno* el mas remoto del sol en nuestro sistema planetario. Saturno es bien visible, aunque ménos grande, ménos brillante y ménos próximo á nosotros que Júpiter. Su diámetro aparece de 18″, y es 9,9826 veces mayor que el de la tierra. Saturno está rodeado de un anillo cuyo diámetro es de 42″; su volúmen es 974,78 veces mayor que el de la tierra; su masa 93,271; su densidad 0,096, comparada con la de la tierra y 0,528 comparada con el agua; su distancia media al sol y á la tierra es 228796,2; su rotacion al rededor de su eje es en 0,428 de dia; su revolucion al rededor del sol se efectúa 10758,96984 dias, que hacen cerca de 29 años y medio; y su inclinacion respecto de la eclíptica es de 2°29′38″.

De Urano.

587 Los planetas de que hemos hablado hasta aquí, han sido conocidos desde los primeros tiempos; y se estaba bien léjos de creer que existian otros, cuando Mr. Herschell haciendo la revista del cielo con su gran telescopio en 1781, percibió á los pies de géminis un pequeño astro que se parecia á una estrella de quinta magnitud; este astro fue reconocido como un planeta superior á todos los otros; al principio se le dió el nombre de *Herschell*, de *planeta de Jorje*, y por último el de *Urano*; su diámetro aparente es de 4″, y el efectivo es 4,3317 veces mayor que el de la tierra; su volúmen 81,26; su masa 1,6904; su densidad 0,021, comparada con la de

la tierra y 0,1155 comparada con el agua; su distancia media al sol y á la tierra es 460128,5. Como Urano se halla situado en los confines del sistema solar, está demasiado remoto, y hay poco tiempo que se descubrió, no se ha podido observar todavía su rotacion al rededor de su eje; su revolucion al rededor del sol se efectúa en 30688,712687 dias, que hacen 84 años; la inclinacion de su órbita es 0°46′25″.

De Vesta, Juno, Pálas y Céres.

588 Los diámetros de los cuatro planetas telescópicos Vesta, Juno, Pálas y Céres, son de una pequeñez que se escapa á los micrómetros ordinarios; por lo que son muy difíciles de medir con exactitud, y por consiguiente aun no se pueden determinar con todo rigor sus masas, volúmenes, &c. Sin embargo, pondrémos aquí todo lo que se sabe hasta el dia; y es que el diámetro de Vesta es 0,034 del de la tierra; su distancia media al sol y á la tierra es 5668,5 radios terrestres; la inclinacion de su órbita 7°7′51″; y que su revolucion al rededor del sol se efectúa en 1324,17 dias. El diámetro de Juno es 0,176 del de la tierra; su distancia media al sol y á la tierra es 64086,5 radios terrestres; la inclinacion de su órbita 13°4′27″, y su revolucion al rededor del sol es en 1591,75 dias. El diámetro de Pálas es 0,256 del de la tierra; su distancia media al sol y á la tierra es 66426,7 radios terrestres; la inclinacion de su órbita 34°37′28″,35; y su revolucion al rededor del sol es en 1679,75 dias. El diámetro de Céres es 0,19 del de la tierra; su distancia media al sol y á la tierra es 66469,5 radios terrestres; la inclinacion de su órbita 10°37′31″,2; y su revolucion al rededor del sol se verifica en 1681,38 dias.

De los planetas secundarios, ó de los satélites de los planetas primarios.

589 Cuando se observa á Júpiter con el telescopio, se le ve acompañado de cuatro puntos luminosos

semejantes á estrellas muy pequeñas. Ellos se notan á diversas distancias de su disco, ya á su derecha, ya á su izquierda; y como le acompañan siempre *como guardias*, se les ha llamado *satélites*.

Júpiter tiene cuatro satélites; Saturno tiene siete, y Urano seis. La Luna debe considerarse como satélite de la tierra. Los satélites se denominan 1.º, 2.º, 3.º, &c. por sus distancias á los planetas principales, llamándose primero el que está mas próximo de ellos. Para los usos astronómicos trae muchas ventajas el conocimiento de los satélites de Júpiter y el de la Luna; pero sobre todo el de este último; por lo que nos detendrémos algo mas.

590 La Luna aparece á nuestra vista como el astro mayor de la bóveda celeste, despues del sol, y en sus movimientos presenta fenómenos análogos á los de este astro. Es muy notable por la magnitud de su disco, por su brillo y por las mudanzas que sufre en la configuracion de su parte luminosa.

El paso de la Luna por el meridiano se retrasa todos los dias mas de $\frac{3}{4}$ de hora; su distancia al zenith varía con bastante rapidez, y la figura bajo que se manifiesta la Luna varía casi todos los dias.

El sol nos ofrece siempre un disco redondo y perfectamente terminado, la Luna no es sensiblemente redonda sino durante algunas horas; y en el espacio de 29 á 30 dias, que ella emplea en dar la vuelta al cielo y en volver á reunirse al sol, que es lo que se llama estar dos astros en *conjuncion*, nos ofrece todas las diferencias posibles entre un disco, ó perfectamente claro, ó casi enteramente oscuro.

Estas diversas apariencias, que se llaman las *fases de la Luna*, han suministrado á los hombres un medio fácil para dividir el tiempo en periodos, que se han llamado *meses*; al ménos se halla una grande analogía entre la palabra griega que espresa *mes* y la que espresa *luna*. Las cuatro fases mas notables, que se suceden con un intervalo de siete á ocho dias, han podido aun dar la idea de la semana.

Todos los meses la Luna desaparece enteramente cerca de dos dias, despues de los cuales vuelve á aparecer por la tarde, un poco despues de ocultarse el sol, bajo la forma de un segmento circular muy estrecho, cuya circunferencia esterior es un semicírculo, y la circunferencia interior una semielipse poco aplanada, que tiene por eje mayor el diámetro mismo del semicírculo. La Luna se oculta poco tiempo despues que el sol, y se notará fácilmente que la convexidad del segmento luminoso está vuelta hácia el sol; las dos puntas están igualmente remotas del sol; en fin, si se concibiese un plano perpendicular sobre el medio del diámetro que une los dos estremos que se suelen llamar *sus cuernos*, iria á pasar por el sol. Esto tambien se verifica cualquiera que sea la fase de la Luna.

591 Cada dia aumenta el ancho del segmento luminoso, la curva interior se aplana, la Luna se oculta mas tarde; el séptimo dia, la luna aparece ya como un semicírculo, la línea de los cuernos es en toda su longitud el límite de la parte luminosa, y los astrónomos dicen entónces que la Luna es *dicótoma*, es decir, que *aparece cortada por el medio*, esta *fase* se llama tambien *el primer cuarto* ó el *cuarto creciente.*

Desde el dia siguiente la curva elíptica vuelve á ser lo que ella era la víspera, pero en sentido contrario, es decir, que vuelve su convexidad hácia el sol; la parte luminosa aumenta cada dia, la Luna pasa mas tarde por el meridiano, y alumbra una parte mas considerable de la noche.

Del 14 al 15 dia aparece enteramente redonda, y pasa por el meridiano hácia media noche; esta es la fase que se llama *Luna llena*; pero aunque iluminada en su totalidad, se nota que su brillo ó resplandor no guarda una tinta uniforme; se advierten en ella puntos mas luminosos, espacios que lo son ménos, á los cuales se ha dado el nombre de *mares*; esta denominacion es impropia; porque con el auxilio de los telescopios se notan en estos mares, agujeros redondos que parecen iluminados hasta el fondo. Se distinguen unas partes mas salientes que otras, pero no se proyecta ninguna sombra de las partes elevadas sobre las mas bajas. Muchos astrónomos han dado diseños del aspecto que pr senta la Luna vista con los telescopios. Hevelio ha trazado la figura de la Luna para todos los dias, entre dos desapariciones consecutivas, el dibujo se llama *selenografía ó descripcion de la Luna.*

Desde el dia siguiente, el borde occidental de la Luna principia á aparecer ménos bien terminado, y cada dia disminuye su parte luminosa. El dia 22 la Luna aparece otra vez dicótoma; y esta fase es lo que se llama *último cuarto*, ó *cuarto menguante.* Todos los fenómenos se reproducen en sentido inverso; las montañas de la Luna echan sombras que van aumentando de dia en dia, así como habian ido disminuyendo, durante la primera mitad de la revolucion; el segmento viene á ser cada vez mas estrecho; la Luna se aproxima al sol, le precede muy poco en el horizonte oriental; en fin ella desaparece por dos ó tres dias, y el medio de este intervalo es lo que se llama *Luna nueva.*

En todo el curso de su revolucion, la parte iluminada es siempre la mas próxima al sol, la parte oscura es la mas lejana, las manchas ó puntos notables conservan la misma posicion sobre el disco. De estas observaciones hechas en todos los tiempos, se sigue que *la Luna nos presenta siempre un mismo hemisferio, que no tiene luz propia, sino prestada que recibe del sol.* De lo cual se ha concluido que la Luna no es un disco simple, sino un globo cuya mitad iluminada no está siempre vuelta hácia nosotros. La curva elíptica que termina la parte iluminada, debe ser la de un gran círculo, que visto oblicuamente debe tomar la forma de una elipse.

592 Estas fases que nos presenta la Luna, podríamos verificarlas todas las noches, poniendo una luz delante de una esfera ó globo cualquiera, y dirijién-

dole nuestra vista colocándonos sucesivamente con todos los grados de oblicuidad.

La revolucion de la Luna se efectúa en $29^{\text{dias}}\,12^{\text{horas}}\,44'3''$, y su movimiento medio diurno es de $13°10'35''$. El diámetro de la Luna es 0,273 del de la tierra, lo que equivale próximamente á $\frac{3}{11}$; el volúmen de la Luna es 0,0204, que equivale á $\frac{1}{49}$ del de la tierra; su masa es 0,0146; su densidad es 0,716 comparada con la de la tierra y 3,938 comparada con el agua. La Luna jira al rededor de su eje en el mismo tiempo que da una vuelta al rededor de la tierra, y por eso la vemos casi siempre igual, presentándonos el mismo lado escepto un pequeño balanceamiento que se espresa con el nombre de *libracion*, y que proviene de no moverse la Luna con un movimiento uniforme en la eclíptica.

593 La distancia media de la Luna á la tierra es 60,3179 radios terrestres; su mayor distancia á la tierra es 65,4882 id., y su menor distancia 55,9052 id. La inclinacion de su órbita respecto de la eclíptica es $5°9'$; el ecuador lunar está inclinado $1°43'$ respecto de la eclíptica; y el ecuador y la órbita se hallan mútuamente inclinados $3°26'$, estando siempre el ecuador entre la órbita y la eclíptica. En la Luna se han observado montañas; y la mas alta de todas se ha encontrado que es como de unas nueve mil varas.

Para que mejor se perciban todos los movimientos planetarios, se pueden disponer del modo que están representados en la (fig. 129) en que sólo haciendo jirar al manubrio M se hace que se muevan todos estos planetas con los movimientos que les son peculiares. Los ingleses suelen llamar *orreris* á estos *planetarios* del nombre del Milord Orrery, que hizo construir muchos. En ellos no se presentan aun los últimos planetas, porque no estando todavía sus movimientos bastante bien determinados, aun no se ha ideado el colocarlos de modo que sólo por el movimiento del manubrio ejecuten sus movimientos correspondientes. En España se ha ejecutado uno de estos planetarios por nuestro paisano D. Francisco Morales; y aunque no le hemos visto, tenemos noticia de que están bastante arreglados todos los movimientos.

De los cometas.

594 Los fenómenos imprevistos que presentan los cometas han consternado á los pueblos por espacio de muchos siglos, á causa de que los consideraban como presajio de las mayores desgracias. El rastro luminoso que les sigue ordinariamente, era lo que mas les espantaba; pues se juzgaba por su magnitud del efecto desgraciado que debia causar. Pero hace ya medio siglo que las luces han llegado á disipar estos terrores; y los cometas sólo escitan en el dia el interes de los astrónomos y la curiosidad jeneral.

Las órbitas de los cometas no están comprendidas en ninguna zona del cielo como la de los antiguos planetas, sino que siguen todo jénero de direcciones.

Las colas no se observan sino cuando se acercan al sol, y siempre la direccion de la cola se halla opuesta al sol. La cola del cometa del año de 1680 fue de las mayores, pues ocupaba un espacio de cerca de 66°. La del de 1744 fue aun mas notable.

Hasta el dia sólo hay un cometa cuya revolucion sideral esté bien conocida, y cuya vuelta sea cierta, que es el del año de 1682 ya observado en 1607, en 1531 y en 1456, que ha vuelto á aparecer en 1759; este emplea cerca de 76 años en hacer su revolucion, y debe volver á aparecer el año de 1834.

De los eclipses.

595 Otro de los fenómenos que ha consternado tambien á los pueblos, cuando sucedia, eran los *eclipses*; pero los progresos de las luces han disipado todos estos temores, y los eclipses en el dia son un objeto

de curiosidad y de utilidad; pues por su medio se determina la posicion de los parajes en el globo.

Esplicarémos este fenómeno observando que el sol, la tierra y la luna, son tres cuerpos sensiblemente esféricos; si sus centros se hallan sobre una misma recta de que el sol ocupa siempre uno de los estremos, la tierra y la luna proyectan detras de sí una sombra cónica; si la tierra se halla entre la luna y el sol, la luna está dentro del cono de la sombra de la tierra; deja de recibir la luz del sol, no la refleja por consiguiente, y el habitante del hemisferio oscuro de la tierra observa *un eclipse de luna.* Si la luna se halla entre el sol y la tierra, la sombra de la luna llega á la tierra las mas veces, y el habitante del hemisferio iluminado se halla momentáneamente en el cono de sombra y pierde de vista al sol.

Los eclipses de luna se llaman *parciales*, cuando sólo entra en la sombra de la tierra una parte de la luna; se llaman *totales* cuando entra toda la luna en la sombra terrestre; y *centrales* cuando su centro coincide con el mismo eje del cono; del mismo modo los del sol se llaman *parciales* cuando la luna sólo oculta una parte del disco solar; eclipses *totales* cuando la luna oculta enteramente el disco; y se llaman eclipses *anulares* aquellos en que la luna se proyecta enteramente sobre el disco del sol, y oscurece sólo la parte interior de dicho disco, quedando sólo descubierto por las orillas un anillo luminoso; y se llaman *centrales*, aquellos en que el observador se halla en el centro de la sombra sobre la línea que une los centros de la luna y del sol. Los eclipses totales del sol no se verifican sino en ciertos parajes por poco tiempo, que á lo mas puede llegar á ser cinco minutos, y es tal la oscuridad, que se llegan á ver las estrellas. Los eclipses totales de luna son universales para todos los puntos del hemisferio terrestre, que tienen la luna sobre el horizonte en el momento del eclipse, y pueden durar mucho tiempo.

Terminarémos este punto indicando que en las

Efemérides de Milan correspondientes á los años de 1813 y 1816, se hallan unas observaciones muy interesantes del Sr. *Angelo Cesaris* sobre el movimiento oscilatorio y periódico de los observatorios; el cual se debe tener en consideracion si se quiere lograr que las observaciones astronómicas tengan toda la precision y exactitud que exije su importancia.

ARTE CONJETURAL,

ó TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES.

596 Hemos dicho (introd.) que las proposiciones son evidentes, ciertas y probables; y como las Matemáticas forman una verdadera ciencia, no son de su jurisdiccion las proposiciones probables. Sin embargo, las Matemáticas sirven para averiguar ó espresar la probabilidad que hay de que sean verdaderas ó falsas dichas proposiciones. En la misma introduccion dimos á conocer el carácter de las proposiciones evidentes ó axiomas; y que toda proposicion que por razonamientos idénticos vaya conforme con los axiomas, es una proposicion cierta, y constituye lo que se llama *certidumbre absoluta*. Aunque las proposiciones que se deducen por induccion ó analogía, sean verdaderas, no por eso constituyen una certidumbre tan absoluta como la que se demuestra por raciocinios directos. En efecto, esta proposicion el *sol saldrá mañana*, se aproxima mucho al grado de certidumbre absoluta, por las muchas veces que hemos visto salir el sol; y no hay ejemplar de que al cabo de cierto tiempo determinado para cada pais haya dejado de salir. Sin embargo, no constituye una certeza tan absoluta como la de que *la suma de los tres ángulos de un triángulo equivale á dos ángulos rectos*, ó que *un triángulo es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura*; pues podria suceder que una ley de la naturaleza, que aun no se hubiese manifestado, modificase de algun modo la sucesion de estos he-

chos tan repetidos, y no se verificase la proposicion.

Si de los hechos en que no reconocemos ninguna escepcion, pasamos á otros que la hayan ofrecido, se introduce la duda en nuestro espíritu por grados mas ó ménos razonables. Por ejemplo, de que un dia amanezca nublado no podemos deducir con certeza que aquel dia lloverá; porque se ha visto muchas veces que amaneciendo nublado, despues no ha llovido.

Cuando el asunto no ofrece todas las condiciones necesarias para llegar á la certidumbre de una demostracion, se debe hacer un exámen de todas las condiciones que son conocidas, pesar su importancia y conocer su número. En el exámen de lo que pueden influir para deducir sobre la certeza de una proposicion, se debe procurar descomponer cada circunstancia, tanto como sea posible, á fin de no tener que pronunciar sino sobre proposiciones de igual sencillez y de igual evidencia. No habria mas que desear si se pudiesen reducir las cuestiones á tal punto, que hubiese una exacta paridad con el acto de arrojar un dado que tuviese un cierto número de caras señaladas de diversos colores ó puntos. Si la figura de este dado fuese bien regular, de materia bien homojénea, las circunstancias de su tiro bien variadas é imprevistas, de modo que no hubiese ninguna razon de esperar verle caer mas bien á un lado que hácia á otro; y que hubiese por ejemplo cinco caras blancas y una negra, nuestro entendimiento, hallando el número de las caras blancas mayor que el de las negras, juzgaria que era mas posible al echar un dado, el sacar una cara blanca que una negra; por lo que diria que era mas *probable* el echar una cara blanca; así, la palabra *probable* se emplea cuando el número de circunstancias que favorecen al acontecimiento, es mayor que el que favorecen al acontecimiento opuesto. Si de las seis caras del dado tres fuesen blancas y otras tres negras, habia tanta razon para esperar que saliese una blanca como para que saliese una negra.

597 En todos los casos medirémos el grado de con-

fianza que se debe tener en que se verificará un hecho, averiguando el número de juicios afirmativos, y comparándole con el número total de los juicios tanto afirmativos como negativos. Á lo que resulta de esta comparacion se llama *probabilidad matemática*, que no es mas que la relacion entre el número de casos favorables al acontecimiento y el número total de los casos, esto es, la suma de los favorables y de los contrarios; ó mas claro, la probabilidad matemática es un quebrado, cuyo numerador es el número de casos favorables, y el denominador el número total de los casos que pueden ocurrir.

Así, en el dado que tiene seis caras, si está bien construido, la misma razon hay para que salga cualquiera de las caras; pero si cinco de ellas son blancas y una negra, hay cinco casos que favorecen el sacar una cara blanca; y siendo seis el número total de caras, la probabilidad matemática de sacar una blanca será $\frac{5}{6}$, y la de sacar una negra $\frac{1}{6}$.

Al valuar la probabilidad matemática del modo que acabamos de manifestar, se debe atender á que todos los casos sean igualmente posibles. En efecto, si se echan á un mismo tiempo dos dados de á seis caras, señaladas cada una con los números desde 1 hasta 6 inclusive, por poco que se reflexione sobre lo que debe suceder, se reconoce que cada una de las caras del uno de los dados se puede presentar con cada una de las caras del otro; de modo que si se espresa el primero por A y el segundo por B, se tendrán los casos espresados en la tabla siguiente.

A, B	A, B	A, B	A, B	A, B	A, B
1...1	2...1	3...1	4...1	5...1	6...1
1...2	2...2	3...2	4...2	5...2	6...2
1...3	2...3	3...3	4...3	5...3	6...3
1...4	2...4	3...4	4...4	5...4	6...4
1...5	2...5	3...5	4...5	5...5	6...5
1...6	2...6	3...6	4...6	5...6	6...6

Cada uno de estos casos es igualmente posible, si se considera aisladamente cada dado. Así, el sacar 5 con el dado A y 2 con el B, es un caso igual al de sacar 6 con el uno y el otro al mismo tiempo; pero si se quiere sólo la salida de los puntos 2 y 5 sin distincion de órden, la probabilidad de obtenerlo será diferente de la de echar 6 y 6 ó las *senas*, pues que la primera condicion se verificará igualmente echando 2 y 5 y echando 5 y 2, miéntras que 6 y 6 no se halla sino una sola vez en los 36 casos igualmente posibles de la tabla. Así, la probabilidad de sacar los puntos 5 y 2 sin distincion de órden es $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, y la de sacar 6 y 6 ó las senas es sólo $\frac{1}{36}$.

Si el acontecimiento deseado fuese no el sacar cada punto de por sí, sino el número que esprese su suma, se hallarian posibilidades muy diversas. Por ejemplo, el número 2 sólo se podria obtener de un modo, á saber, por la suerte de 1 y 1; pero el número 7, al contrario, resultaria de seis modos diferentes, á saber:

1, 6	6, 1	2, 5	5, 2	3, 4	4, 3

y segun estas condiciones la probabilidad de obtener el número 2 seria $\frac{1}{36}$, miéntras que la de obtener el número 7, será $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

De lo espuesto hasta aquí se deduce que *la probabilidad matemática siempre estará espresada por un quebrado propio* ó menor que la unidad, á la cual se aproximará tanto mas cuanto el número de los casos favorables al acontecimiento que se considera, sea mayor con relacion al número total de los casos posibles; pero sólo se podrá convertir en la unidad cuando no hubiese ningun caso contrario á este acontecimiento, lo que haria cierta su produccion; de modo que *la unidad es símbolo de la certidumbre*. Por egemplo, si un dado de seis caras las tuviese todas de un mismo color, por ejemplo que todas fuesen blancas, resultaria que la probabilidad de echar una cara blanca estaria espresada por $\frac{6}{6}=1$.

Se debe notar tambien que cada acontecimiento incierto da lugar á dos probabilidades contrarias, la de que este acontecimiento sucederá y la de que no sucederá; y que la suma de estas dos probabilidades es siempre igual á la unidad. Cuando se trata por ejemplo de echar el número 7 con dos dados, pues que sobre las 36 suertes que ofrecen, sólo hay 6 que den el número 7, hay 30 que no le dan; luego la probabilidad de obtener el número 7 es $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, y la probabilidad contraria $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$, y $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1$.

Por último, observarémos que la idea que se debe sujetar á la palabra *probable*, es de que su probabilidad matemática es mayor que $\frac{1}{2}$.

Determinacion de la probabilidad cuando el número de casos ó suertes de cada especie ó la relacion de estos números es asignable, y se puede deducir á priori *del enunciado de la cuestion.*

598 Si espresamos por m el número de casos favorables á un acontecimiento, y por n el de los casos contrarios, su probabilidad matemática estará espresada por $\frac{m}{m+n}$, y la probabilidad contraria por

$$1-\frac{m}{m+n}=\frac{n}{m+n}.$$

Así, teniendo por ejemplo una baraja de naipes completa, esto es, de cuarenta y ocho cartas con los ochos y los nueves, la probabilidad de que sacando una cualquiera de ellas sea una figura, estará espresada por $\frac{12}{48}=\frac{1}{4}$, puesto que hay 12 figuras en toda la baraja. Pero si ademas se espresase del palo que habia de ser la figura, tendríamos, que como en cada palo sólo hay tres figuras, la probabilidad de acertar estaria representada por $\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$.

Del mismo modo tendríamos que por multiplicadas que fuesen las diversas clases de acontecimientos posibles, se podrian señalar sus probabilidades matemáticas. Por ejemplo, si una caja contuviese m bolas blancas, n rojas, p azules, q verdes, r amarillas, y s negras, y de la cual se fuese á sacar una á la casualidad, entónces el número total de los casos que espresarémos por T, será $m+n+p+q+r+s=T$, y se verificará que $\frac{m}{T}$ será la probabilidad de obtener una bola blanca; $\frac{n}{T}$ una roja; y así de las otras cuatro.

La suma de todas estas probabilidades es

$$\frac{m}{T}+\frac{n}{T}+\frac{p}{T}+\frac{q}{T}+\frac{r}{T}+\frac{s}{T}=\frac{m+n+p+q+r+s}{T}=\frac{T}{T}=1.$$

Todas las cuestiones de probabilidad á que se aplica el cálculo, se pueden reducir en última análisis á estar representadas por el acto de sacar una ó varias bolas de una ó muchas urnas que las contienen de diversas clases, ó al de echar dados que tengan un número cualquiera de caras señaladas con diversos números ó colores. En los ejemplos de ántes sólo hemos considerado la *probabilidad absoluta* de cada clase de acontecimientos; pero hay cuestiones que conducen á considerar sólo una probabilidad relativamente á otras.

Si, por ejemplo, al tirar dos dados, se quisiese comparar la probabilidad de echar el punto 7 mas bien que el punto 4, se veria (597 tab.) que habia seis casos que daban el primer número, y tres el segundo; y las probabilidades absolutas serian $\frac{6}{36}$ y $\frac{3}{36}$. Luego si dos personas jugasen con la condicion, la una de obtener el número 7 y la otra el número 4, reputando nulas las otras suertes, resultaria que como la primera tenia á su favor seis casos y la segunda sólo tres, las probabilidades serian $\frac{6}{9}$ para la primera, y $\frac{3}{9}$ para la segunda.

De modo que *la probabilidad relativa se obtiene*, *dividiendo la probabilidad absoluta del acontecimiento de que se trata por la suma de las probabilidades absolutas de los dos acontecimientos que se comparan.*

Determinacion de la probabilidad á posteriori, *es decir, cuando el número total de los casos es ilimitado, y sus relaciones con el número de los casos de cada especie son inasignables.*

599 Cuando no se conoce la forma del dado ó la naturaleza de la urna que produce los acontecimientos observados, es necesario para remontar á su probabilidad, considerar todas las formas ó las condiciones de que pueden resultar, á fin de deducir de ellas una especie de probabilidad media, que se aproximará tanto mas á la verdadera cuanto el número de observaciones sea mayor.

Si se sabe por ejemplo que en una urna hay cuatro bolas entre blancas y negras, y se han sacado sucesivamente tres bolas blancas y una negra, teniendo cuidado de volver á poner cada vez la bola sacada, podríamos conjeturar que se verificaba alguna de las tres hipóteses siguientes: ó que habia 3 bolas blancas y 1 negra, ó 2 blancas y 2 negras, ó una blanca y 3 negras.

La última hipótesis es mucho ménos probable que las otras dos; porque si la una contuviese sólo una bola blanca, seria necesario que esta misma bola hubiese salido tres veces de seguida; y se concibe con facilidad que habria ménos dificultad si hubiese dos bolas blancas, y aun ménos si hubiese tres.

La facilidad con que cada hipótesis conducirá á los acontecimientos observados, da naturalmente la probabilidad de esta hipótesis; porque miéntras mas combinaciones haya que sean favorables á la produccion de estos acontecimientos, mas ocasion se tiene de repetir el juicio de posibilidad de ellos. Así es, que se ha establecido por principio el que *las probabilidades de las causas* (ó de las hipóteses), *son proporcionales á las probabilidades que dan estas causas para los acontecimientos observados.*

Así, cuando se observa una superioridad constante en el número de veces que un acontecimiento se manifiesta sobre el número de veces en que se manifiesta el contrario, nos vemos conducidos á creer que la produccion del primero es de una facilidad mayor que la del segundo: ó que hay una causa que determina mas bien la una que la otra; ó en fin, lo que es lo mismo, que la probabilidad simple del primer acontecimiento escede á $\frac{1}{2}$. Pero esta creencia, que al principio no es mas que un simple concepto, fortificándose á medida que los acontecimientos se reproducen en el mismo órden de frecuencia, es susceptible de ser apreciada.

Lo primero que se ha discurrido para aplicar la probabilidad á la dependencia que tienen los efectos de las causas, ha sido lo siguiente.

Si hemos esperimentado una sola vez que dos hechos A y B se siguen inmediatamente, se presentan á nosotros tres suposiciones: ó que B tenga su fundamento en A, ó que A y B tengan su fundamento comun en una tercera causa C, ó que cada uno de los dos dependa de una causa aislada ó independiente. En los dos primeros casos deberán volver á parecer siempre el uno á continuacion del otro; en el tercero su concurso será efecto de la casualidad. Donde se ve que admitiendo la influencia de la repeticion del juicio de posibilidad sobre nuestro espíritu, somos conducidos á suponer una dependencia sea inmediata, sea mediata entre A y B. Luego si se reproducen de nuevo, y si al reproducirse parecen constantemente reunidos, viene á ser verosímil que esta reunion tiene su principio en una de las dos primeras hipóteses; y miéntras mas frecuente sea la repeticion del concurso de los dos hechos, mas se aumentará esta verosimilitud é irá creciendo hasta el infinito.

600 Veamos cómo el cálculo justifica esta última asercion.

Se ha observado un gran número de veces de seguida la aparicion consecutiva ó simultánea de los hechos A y B; la probabilidad de que esta aparicion es de una gran posibilidad, se obtendrá buscando la probabilidad de la hipótesis; por lo cual la resolucion de los casos que establecen el concurso del uno con el otro, difiere muy poco de la unidad; y para hacer la cosa mas sensible se puede enunciar así la cuestion: *se ha sacado de una urna* (con la circunstancia de volverlos á poner á cada vez en ella) *un gran número de billetes señalados A, B; si sólo los hubiese de esta clase, la aparicion simultánea de las letras A y B seria necesaria; lo cual se ignorará miéntras que todos los billetes no se hayan sacado; pero esta presuncion se irá haciendo cada vez mas verosímil, si se va aumentando el número de casos en que se hayan sacado los billetes A, B.*

Y como el objeto esencial de nuestras observaciones es el de prever lo que debe suceder, la probabilidad de la produccion de un nuevo acontecimiento, semejante á los que ya se han observado, es la que mas nos interesa, porque ella puede servir para arreglar nuestra conducta; por lo cual debemos observar que nos es de la mayor importancia el recojer hechos de toda especie con absoluta imparcialidad; y aplicando despues el cálculo, se podrán determinar las circunstancias que influyen en su produccion. De manera, que la teoría matemática va conforme con las simples indicaciones del buen sentido y con los resultados de la esperiencia, concurriendo á probar que *las leyes de la naturaleza se pueden reconocer, al ménos con el tiempo, por la sucesion de los hechos que son sus consecuencias necesarias*; de donde se sigue que en las cuestiones cuyos elementos son demasiado complicados, para agotar las combinaciones y recorrer todo su encadenamiento, es necesario interrogar á la naturaleza, contar y comparar los hechos, y en fin juzgar *á posteriori*, de lo que es imposible de prever. Tal es la base y el motivo de la aplicacion del cálculo de las probabilidades á las ciencias físicas, morales y políticas.

Por este medio se han llegado á descubrir muchas verdades útiles, á pesar de que hace poco tiempo que se ha tomado este rumbo; pues ántes en vez de observar á la naturaleza, no se hacia mas que adivinarla, de lo cual han provenido todas las hipóteses absurdas que hemos visto en todas las ciencias. Recojiendo hechos y contándolos con exactitud é imparcialidad, se ha llegado á determinar por Laplace que en treinta departamentos de Francia, *el número de los varones que nacen, está con el de las hembras en la razon de* 22 *á* 21; *los matrimonios con los nacidos están en la relacion de* 3 *á* 14; *y en fin, que la poblacion guarda con los nacidos anuales próximamente la razon de* 28,353 *á* 1. De donde resulta que sabiendo el número de nacidos en un año, si se multiplica por el número 28,353 se tendrá el número de los habitantes con mas exactitud acaso que por los otros medios. Se ha encontrado tambien que desde 1745 á 1784 en Francia, *la relacion de los nacidos varones á las hembras está representada por* 25:24; de 1664 á 1758 inclusive esta relacion en Lóndres es la de 19 á 18; de 1774 hasta 1781 inclusive en Nápoles, no comprendiendo la Sicilia, esta relacion es de 22 á 21.

Cuando, á falta de datos, se apoyan los cálculos en suposiciones arbitrarias, se cae siempre en el error. Por lo cual repetirémos que un número suficiente de observaciones, separadas de todas las circunstancias estrañas á las consecuencias que se buscan, ofrecen siempre un medio tan simple como seguro de descubrir estas consecuencias ó de medir su estension.

Así es, que simples registros, fielmente llevados, bastarian para reconocer el efecto de un impuesto, por las variaciones que produce en los salarios y en los consumos; y el de los reglamentos comerciales, por las importaciones, esportaciones, y por el progreso de las manufacturas.

Se puede tambien juzgar de un sistema de instruccion, por el número de los sujetos que haya producido despues de un cierto número de años; de un sistema de legislacion civil, por el número de procesos que haya enjendrado ó evitado; de una legislacion criminal, por el número de culpables condenados, absueltos y vueltos á reincidir. Más para poder sacar partido de estas observaciones, es necesario que la prueba del sistema sea continuada, que se recojan los resultados con imparcialidad para ser *contados* con exactitud. Separándose de este procedimiento, siempre hay riesgo de equivocarse.

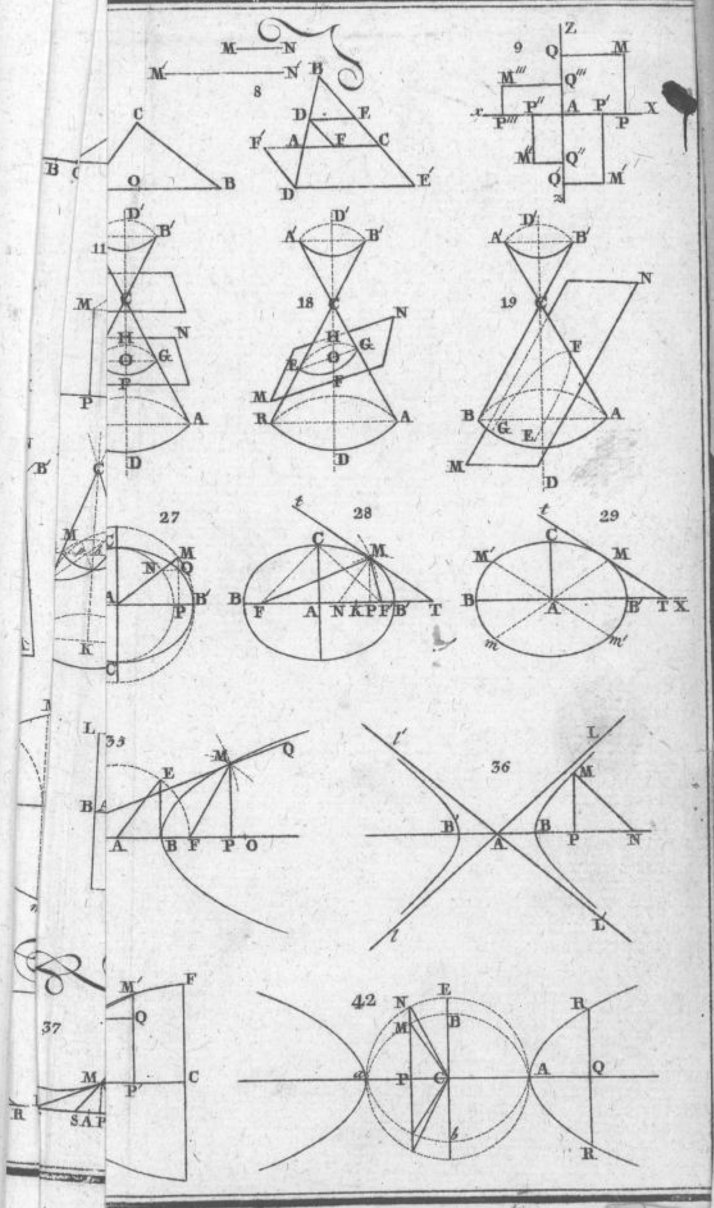
Uno de los puntos á que con mucha utilidad se podria aplicar el cálculo de las probabilidades, es al pronóstico que se podia hacer de las circunstancias que pueden influir en las buenas ó malas cosechas; sobre cuyo punto no me detendré por hallarse bien especificadas todas las medidas que deberian adoptarse, en mi disertacion sobre el modo de perfeccionar la agricultura, leida en el Real Jardin Botánico de esta Corte el dia 18 de Octubre de 1815.

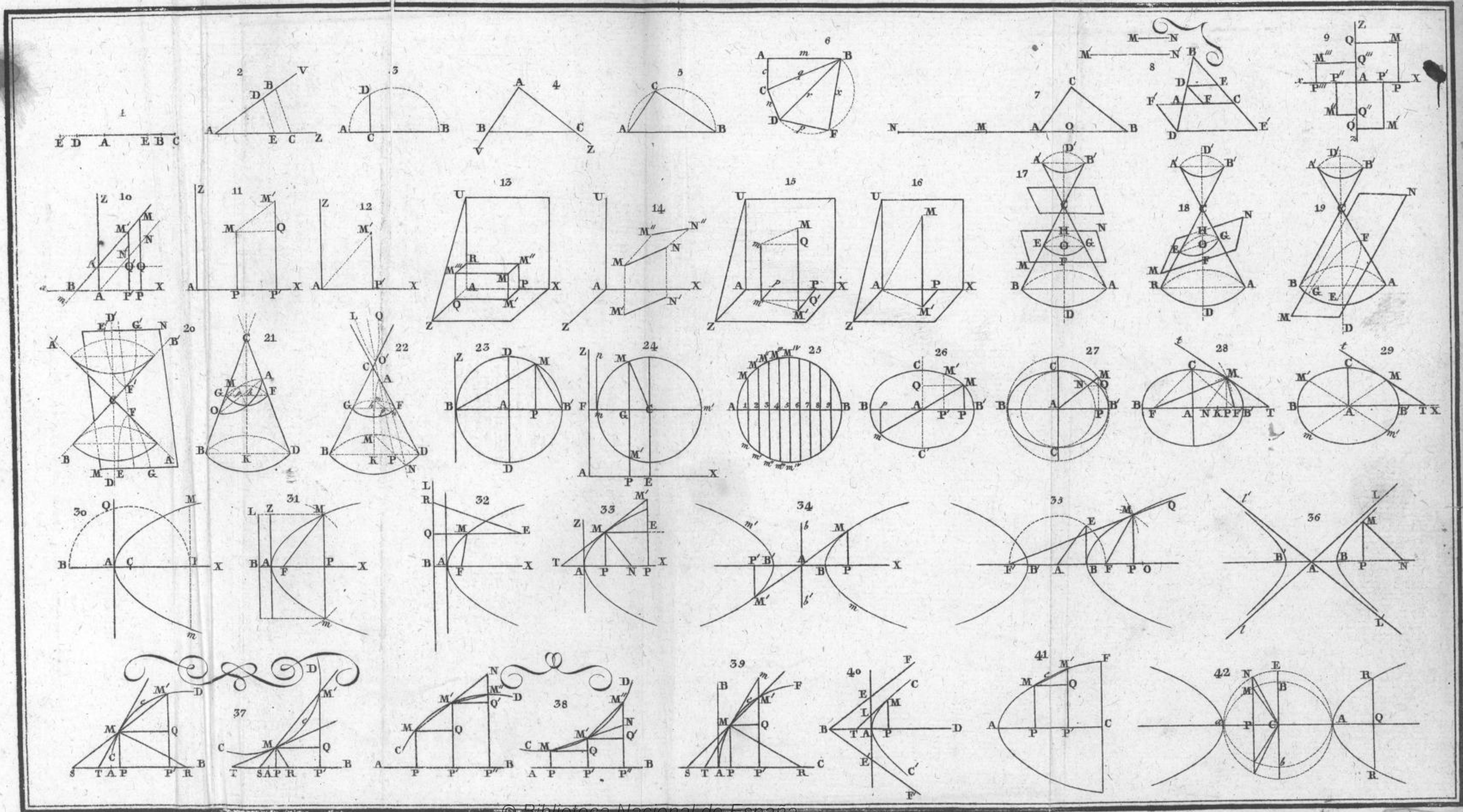
FIN.

ducido despues de un cierto número de años; de un sistema de legislacion civil, por el número de procesos que haya engendrado ó evitado; de una legislacion criminal, por el número de culpables condenados, absueltos y vueltos á reincidir. Mas para poder sacar partido de estas observaciones es necesario que la prueba del sistema sea continuada, y que se recojan los resultados con imparcialidad para ser consignados con exactitud. Separándose de este procedimiento, siempre hay riesgo de equivocarse.

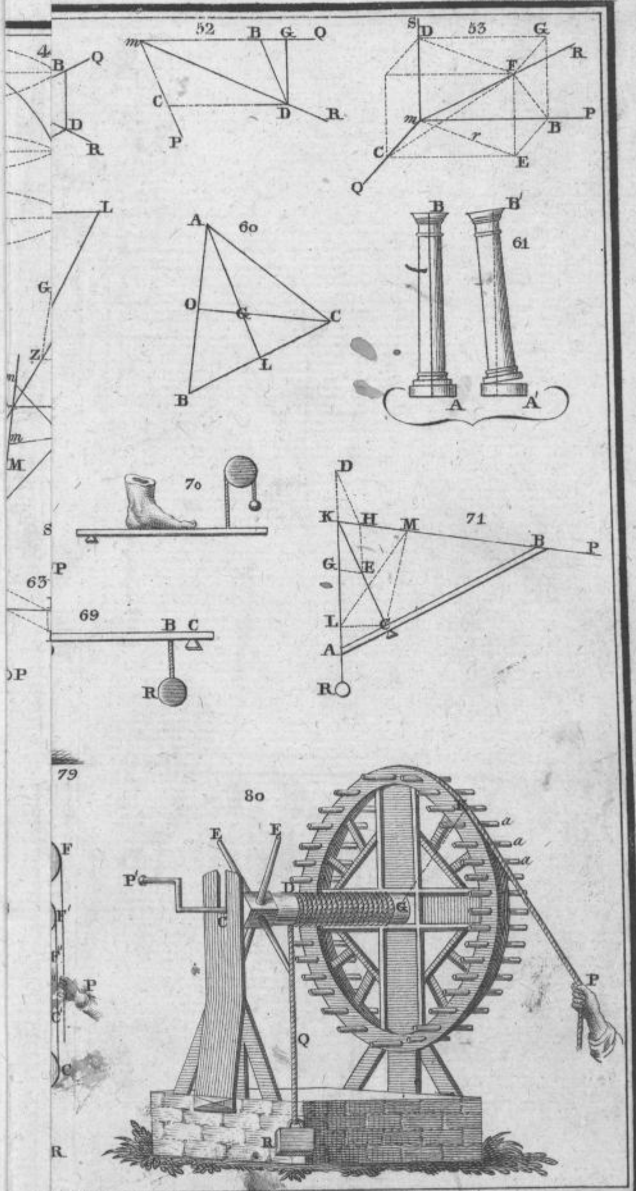
Uno de los puntos á que con mucha utilidad se podria aplicar el cálculo de las probabilidades, es al pronóstico que se podia hacer de las circunstancias que pueden influir en las buenas ó malas cosechas, sobre cuyo punto no me detendré por hallarse bien especificadas todas las medidas que deberian adoptarse, en mi disertacion sobre el modo de perfeccionar la agricultura, leida en el Real Jardin Botánico de esta Corte el dia 16 de Octubre de 1815.

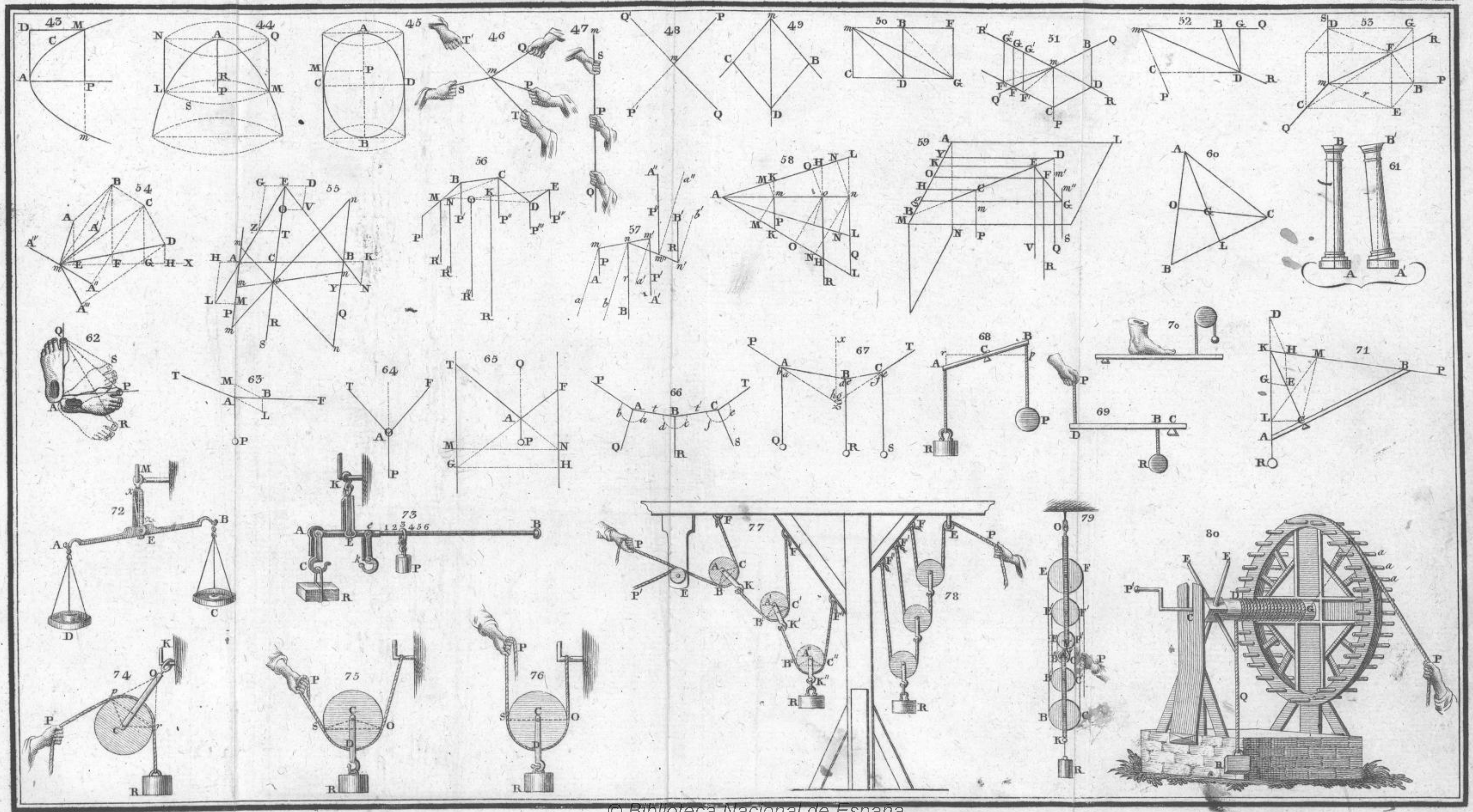
FIN.


8
9
11
18
19
27
28
29
33
36
37
42

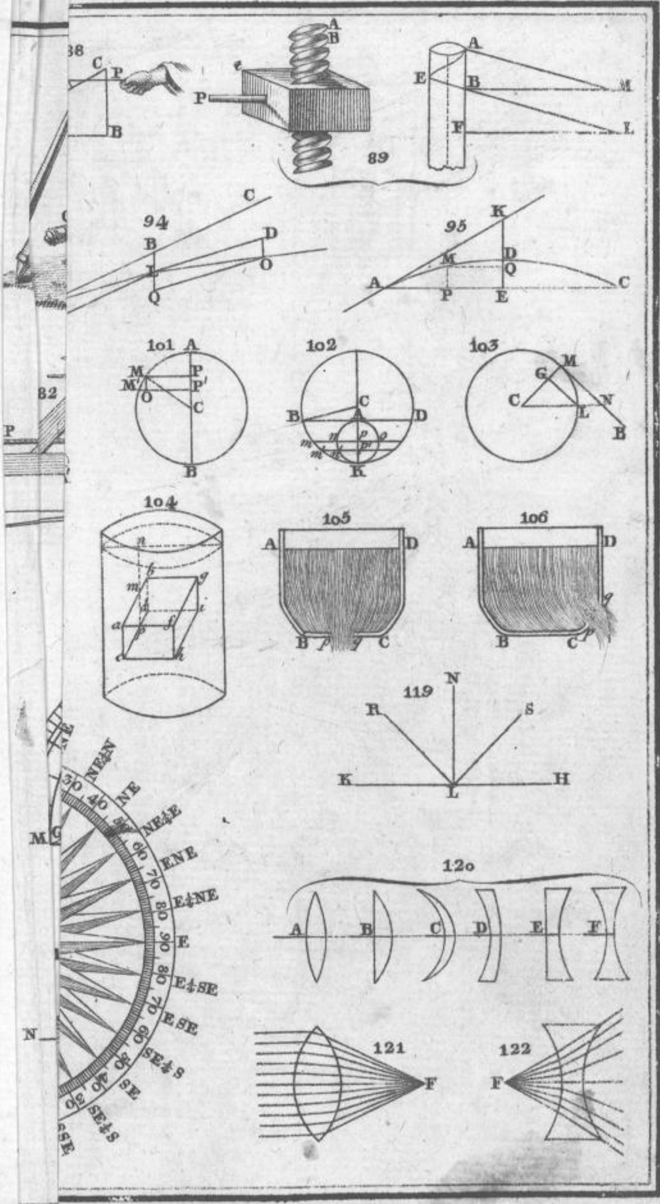

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42

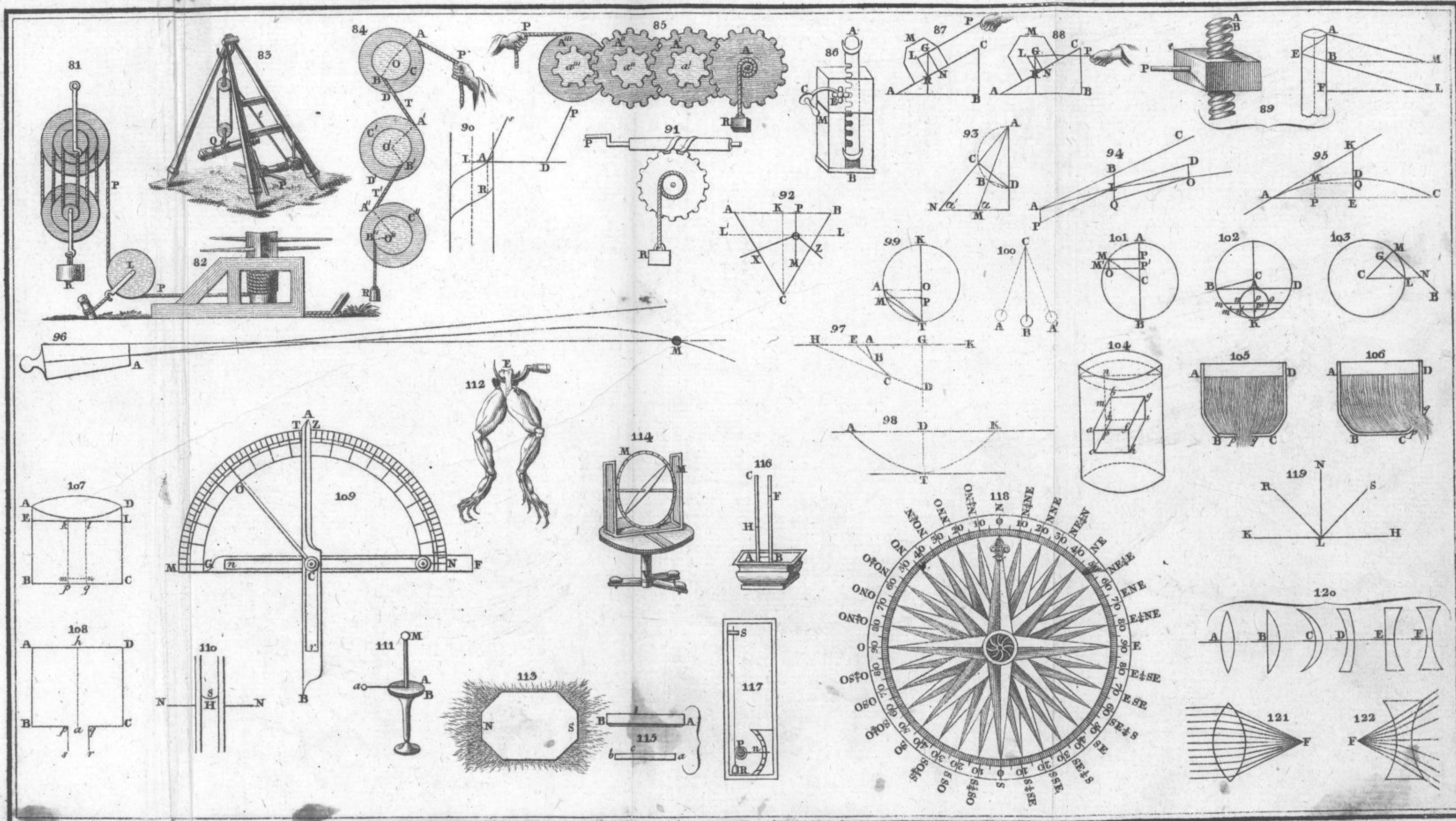
T.R. lo G.


52
53
60
61
63
69
70
71
79
80

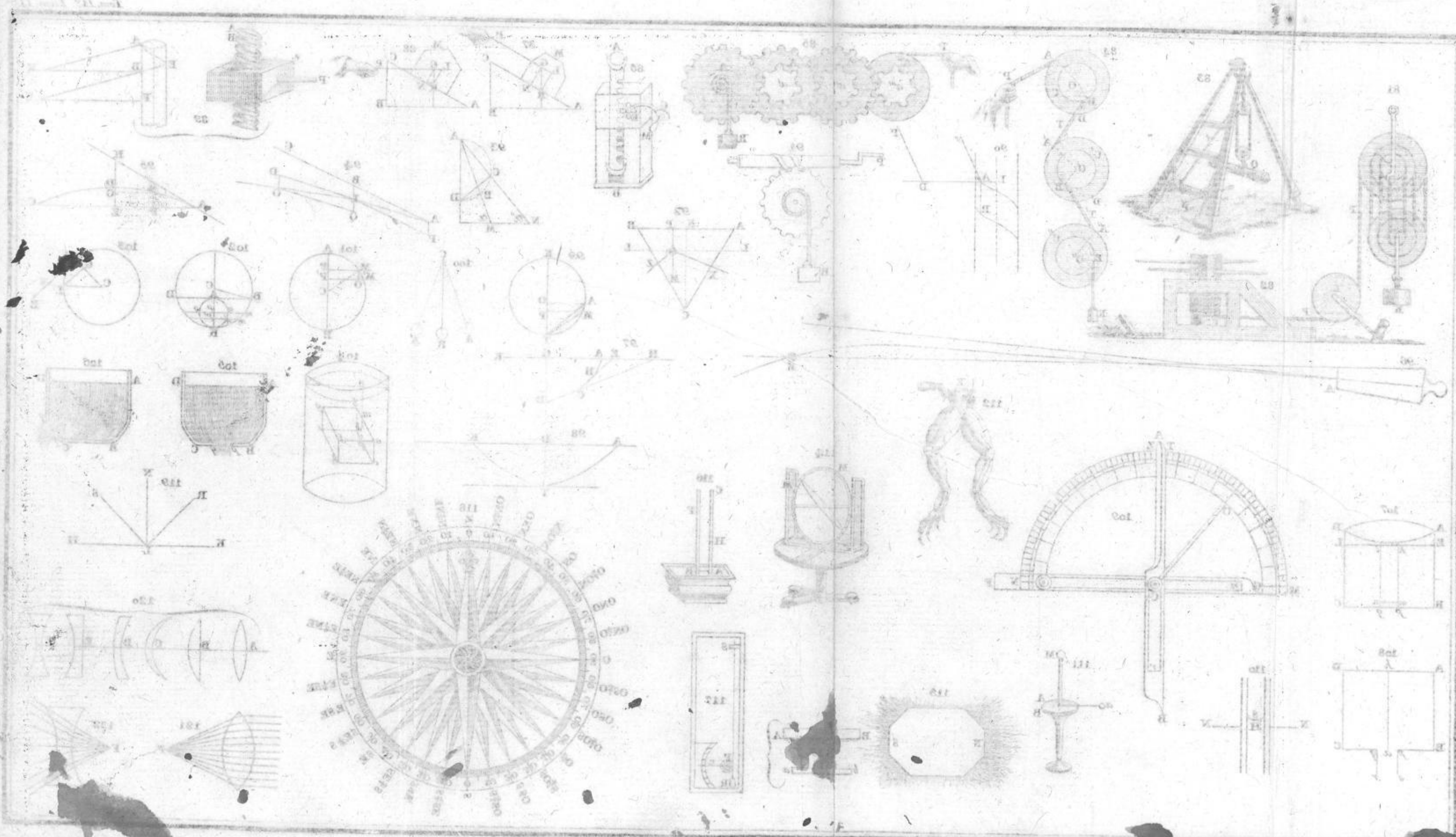

43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80

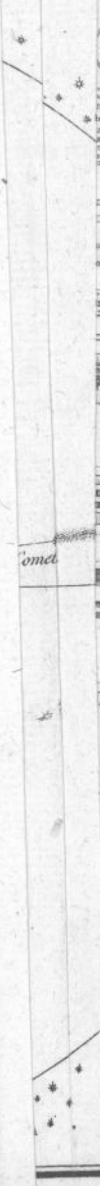
T.R. lo G.

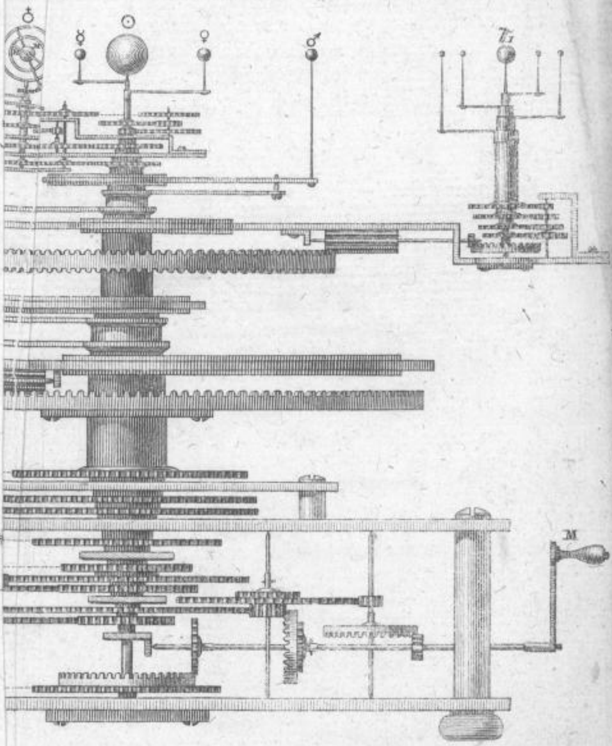

88
89
94
95
101
102
103
104
105
106
119
120
121
122
NE¼N
NE
NE¼E
ENE
E¼NE
E
E¼SE
ESE
SE¼S
SE
SE¼S
SSE
82



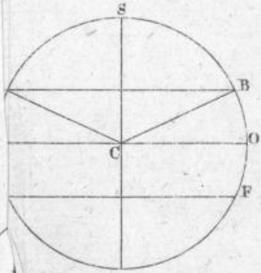
T.R. lo G.º



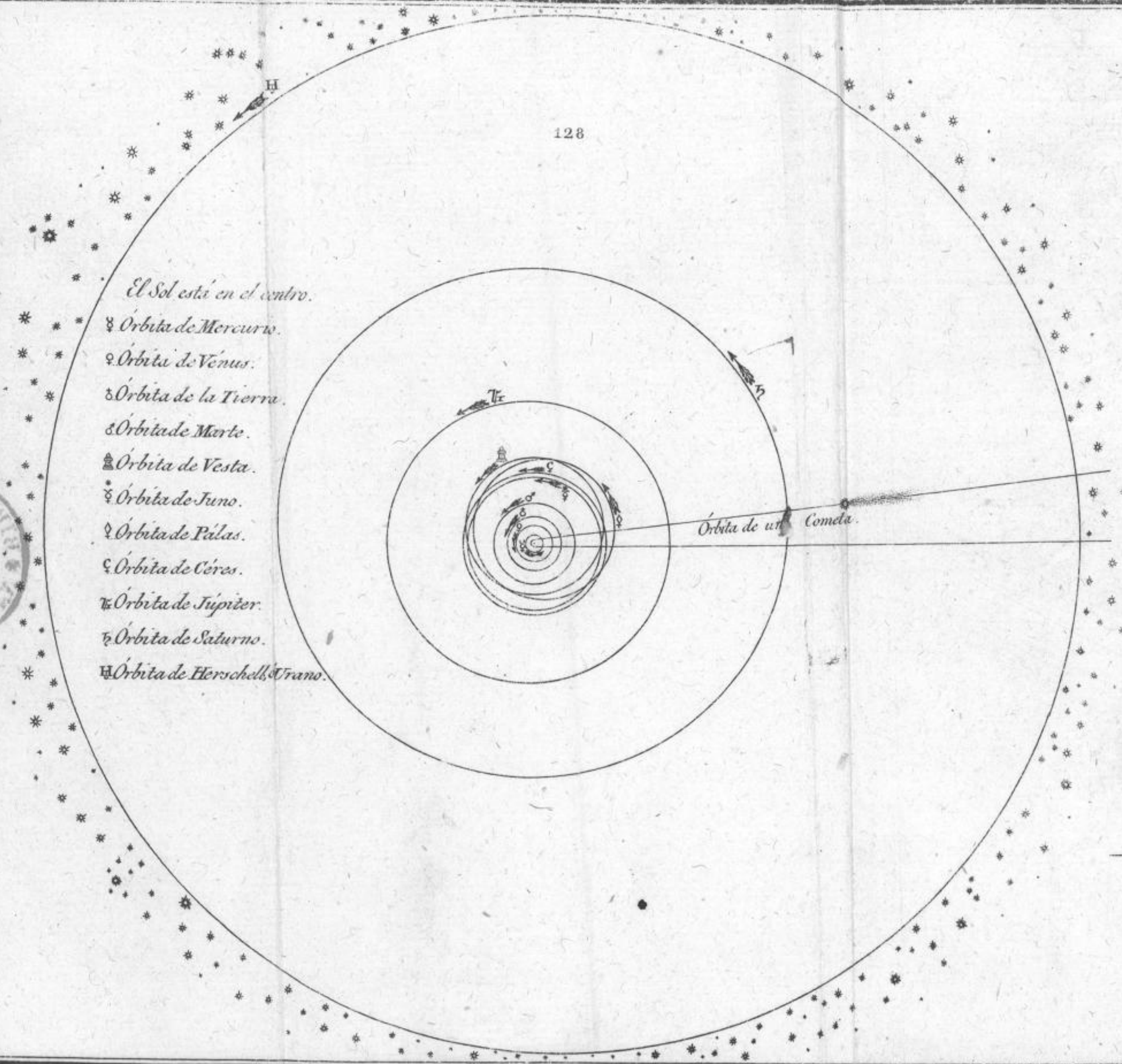


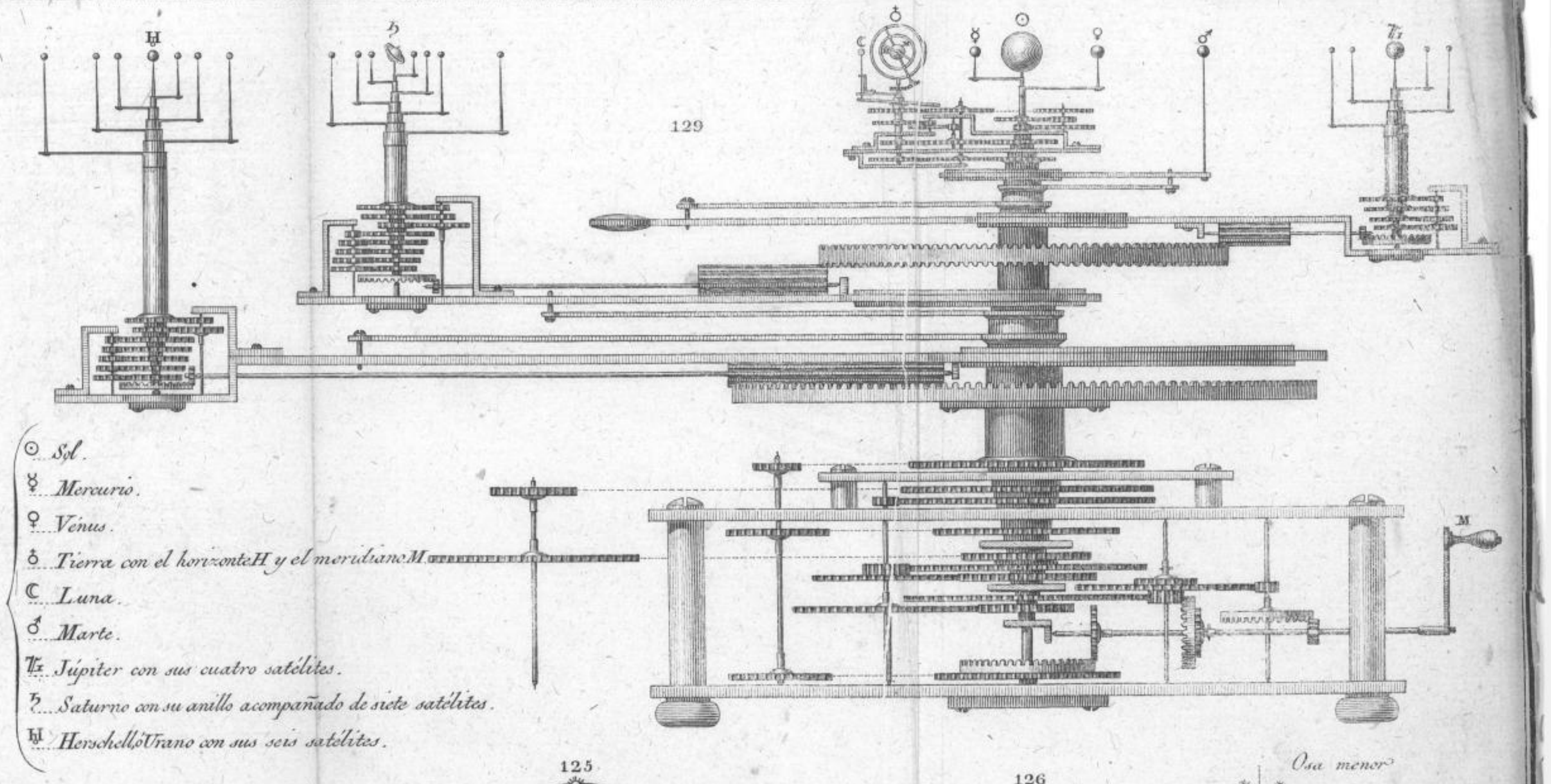


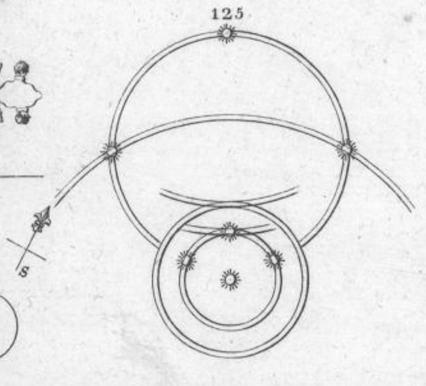
126

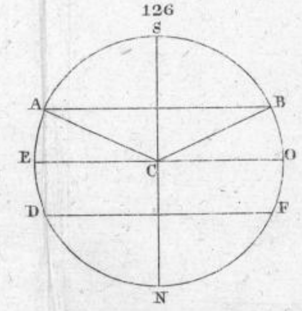


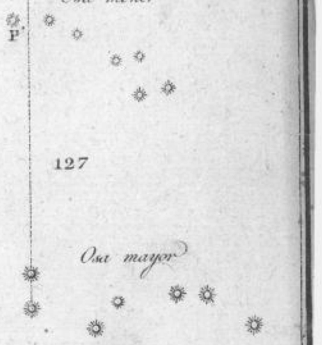
127

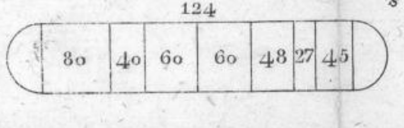












Grabado por T. Rocafort.

Catálogo de las obras del Autor.

Tratado elemental de Matemáticas, cinco volúmenes en 4.º, á saber:	*Precios.*
Tomo I. parte 1.ª Aritmética y Álgebra.	30 rs.
Tomo I. parte 2.ª Geometría, Trigonometría rectilínea y Geometría práctica.	30
Tomo II. parte 1.ª Trigonometría Esférica, Aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones Cónicas y Teoría general de las ecuaciones...............	30
Tomo II. parte 2.ª Funciones, Series, y los cálculos diferencial é integral, con sus aplicaciones.............................	30
Tomo III. parte 1.ª Mecánica, dividida en sus cuatro tratados, á saber: Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica...................................	30
Compendio de Matemáticas puras y mistas, dos tomos en 8.º prolongado......	40
Id. en papel grande y buena pasta......	100
Aritmética de niños, en rústica.........	4
Id. en pasta..................................	6
Tabla sinóptica del arte militar..........	7
Memoria sobre la Curvatura de las líneas &c..	14
Compendio de Mecánica práctica &c.....	14
Disertacion sobre el modo de perfeccionar la Agricultura &c.....................	4

Se hallarán en Madrid en las librerías de Castillo, Sojo, Gómez y Orea; en Cádiz en las de Castillo, Pajáres y Hortal; en Valencia en la de Gil; en Sevilla en las de Aragon y Compañía y en la de Berard; en Granada en la de Sanz; y en Barcelona en las de Dorca, Piferrer, y Lluc.