R. ARANAZ

LOS MECANISMOS

TEXTO

LOS MEDICAMENTOS

F.A.S.
297

Gabriel Lopez Cabrera

2º Año 1ª Sección Nº 72

17 Abril 24

48-43 56

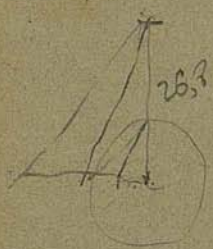
40

Segovia Junio de 1923

Juan Lopez Cabrera

2º año 3ª Sección N. 480

Segovia Junio del 27



$\frac{26,3}{2} =$

Julian Lopez V.
Julian Lopez Viota
Julian Lopez Viota

LOS MECANISMOS



103 a 108 lendo
109 a 114 es — 104 a 109
114 lendo
116 a 124 es — 111 a 119
124 a 129 l
129 es — Não sabia

181 a 183 (estudiado)
183 (lido) — 170 a
184 a 189 (estudiado)
194 a 198

~~pag~~ 129

220 a 236 — 220 a

395 a 398
407 a 411
414 a 419
} Estudiado

LOS

MECANISMOS

ESTUDIOS ANALÍTICOS Y GRÁFICOS

POR EL

TENIENTE CORONEL DE EJÉRCITO
CAPITÁN DE ARTILLERÍA

D. RICARDO ARANAZ É IZAGUIRRE

ex Profesor de la Academia del Cuerpo

TEXTO

Obra aprobada de texto para dicha Academia por R. O. de 4 Abril 1889

J. L. V.
BIBLIOTECA
N-60

MADRID.—1889
IMPRENTA DE D. LUIS AGUADO
Pontejos, 8

Es propiedad de su autor y queda hecho el depósito que marca la ley.



PRÓLOGO

El estudio de la Mecánica aplicada requiere esencialmente una armonía perfecta entre la teoría y la práctica; exige un exacto conocimiento de las fórmulas y procedimientos usuales en los diversos casos de aplicación y el de las investigaciones necesarias á su establecimiento, para que estas proporcionen datos seguros sobre la marcha que haya de seguirse en otras de igual naturaleza: tal es la primera idea que hemos tenido en cuenta al redactar estos estudios, en los cuales nos ha servido de norma.

Para no desviarnos de ella; para dar la necesaria unidad al conjunto; para que pueda satisfacerse también la lícita aspiración de que tengan un carácter esencialmente práctico los estudios mecánicos, sin despreciar, como es consiguiente, las teorías que deban ser perfectamente conocidas, preciso ha sido variar el método de exposición ordinariamente seguido, tanto en la marcha general de los estudios como en la particular de cada uno de ellos. Mas una de las principales causas que han influído en estas variaciones, ha

sido la necesidad de introducir el método gráfico en la enseñanza de los Mecanismos, cuyo estudio, iniciado por Mr. Herrmann en una Memoria recientemente publicada, creemos debe formar parte de los programas de Mecánica de las Academias especiales.

Las ventajas de este procedimiento, debidas principalmente á la rapidez y precisión con que se opera, le hacen ser hoy día frecuentemente empleado en muchas aplicaciones, y sobre todo en las que se refieren á las construcciones fijas. Y si hasta ahora no se había empleado en el estudio de los Mecanismos, si había dificultades insuperables para poderse tomar en cuenta las diversas resistencias que en estos se presentan, hoy día pueden considerarse vencidas todas ellas, ya que el ilustre Herrmann, antes citado, ha manifestado el camino que debe seguirse para que los cálculos sean perfectos, y ha presentado un cierto número de aquellos, que pueden verse en su mencionada Memoria.

Y no solamente hemos encontrado las susodichas ventajas de rapidez y precisión, sino que este procedimiento nos ha permitido en algunos casos hacer un estudio particular de las condiciones del Mecanismo, unificar el de todos ellos y simplificar notablemente el de otros, lo que con los procedimientos analíticos hubiera sido sumamente complicado. Esta observación es de suma trascendencia y permite dar mayor amplitud á los estudios mecánicos, por acostumbrarse el Alumno, con el nuevo método, á abarcar bajo un sólo golpe de vista la correlación entre los diversos esfuerzos que se ejercen en un mecanismo, deducir las oportunas consecuencias, y por fin, hallar directamente no sólo las relaciones entre los esfuerzos, sino también las de velocidades y aun el rendimiento.

A pesar de estas ventajas tan notables que proporciona el método gráfico, no se da en el texto la preferencia á éste ni al analítico; se explican ambos, como creemos de necesidad, pero poniendo de relieve dichas ventajas por medio de las correspondientes notas, en las que se establece también algunas veces la debida comparación entre una y otra forma de cálculo, para que no quede duda alguna de la exactitud de los nuevos procedimientos. Mr. Herrmann dice que *los errores que pueden obtenerse por efecto del grueso de las líneas, de su medición inexacta, de la inexacta también de los ángulos, etc., referentes á las operaciones gráficas, no alcanzan ni con mucho á los que presentan las fórmulas de que suele hacerse aplicación, en las cuales siempre se han hecho*

notables supresiones de términos para presentarlas bajo más sencilla forma.

Este aserto lo hemos corroborado haciendo un estudio comparativo especial, principalmente en los mecanismos que hemos tenido que calcular de nuevo, bien para presentar su estudio gráfico bajo la forma más conveniente, ó bien para ponerlo en armonía con el analítico. En todos los casos hemos encontrado exactitud notable con los métodos gráficos, y no contentándonos con esto, hemos hecho á los Alumnos que se convenzan de ella, presentándoles cuestiones especiales no incluídas directamente en nuestras explicaciones, las que han sido resueltas con una exactitud y ligereza admirables.

Para armonizar los estudios de una y otra forma de cálculo; para dar al conjunto toda la unidad que es indispensable, y por fin, para que los procedimientos gráficos sean expresión fiel y exacta de las fórmulas deducidas en el analítico, nos ha sido preciso establecer reglas fijas con carácter verdaderamente práctico, que constituyan la base necesaria para todos los cálculos de una y otra especie, necesitando variar algún tanto la forma de las que propone Mr. Herrmann, y aun presentar otras nuevas, pues dedicada su Memoria (única hasta ahora en su género) exclusivamente á los estudios gráficos, difícil hubiera sido la armonía con los analíticos, y más difícil todavía el que pudieran dichas reglas, en la forma que las expone, satisfacer las necesidades de un libro de texto, en el que se exige, como es natural, toda la concisión compatible con la más perfecta claridad en la doctrina y exposición ordenada de ideas.

Las mencionadas reglas generales, que se establecen en los primeros estudios, sirven de base para los subsiguientes, en todos los cuales se procura seguir una marcha análoga. Hemos necesitado trabajos especiales en algunos casos para unificar el estudio; ha sido preciso presentar nuevas formas de cálculo en algunos mecanismos; se ha hecho indispensable adicionar con nuevos datos las tablas que presentan los diversos autores para la resolución de los problemas, y los resultados prácticos que con tales innovaciones hemos obtenido en la enseñanza, han satisfecho por completo nuestras aspiracciones. El Alumno queda poseído de los principios que rigen al cálculo de las máquinas, y ninguna dificultad se le ofrece al proponerle cuestiones cuyo estudio directo no ha practicado.

Una observación debemos hacer antes de dar por ter-

minado este preámbulo. Se refiere á las formas que hemos escogido para la explicación de cada uno de los mecanismos, las cuales hemos procurado que satisfagan las aspiraciones de los más prácticos; puesto que creemos un error encontrar en los libros de texto solamente las formas teóricas, con exclusión de las más usadas generalmente. Tan lamentable costumbre hace que el Alumno adquiera ideas erróneas, conceptos equivocados, y que un industrial práctico tenga un grado de adelanto mayor que el que corresponde á los conocimientos adquiridos en las Academias especiales.

Indicaremos, por último, que antes de dar forma á las explicaciones que veníamos dando en la Clase, y de ampliarlas todo lo posible para complementar los estudios y hacer que estos contengan cuanto es indispensable para el más perfecto cálculo de los Mecanismos, nos hemos querido convencer de las ventajas que la nueva forma de cálculo pueda reportar á la enseñanza, ensayándola en las explicaciones de los pasados cursos con éxito favorable. Si nuestros dignos é ilustrados compañeros encuentran en este libro alguna utilidad; si los jóvenes que deban estudiarlo hallan en él el verdadero fruto para las aplicaciones que deban resolver, se verán satisfechas nuestras aspiraciones: y al abandonar el honroso cargo de Profesor, que tanto tiempo hemos desempeñado, habremos cumplido el imperioso deber de evitar á cuantos deban sucedernos en el desempeño de esta asignatura los inconvenientes que hemos encontrado durante los diversos cursos que ha estado á nuestro cargo.

20 Agosto 95

30

INTRODUCCIÓN

1. Objeto de la Mecánica aplicada á las máquinas.—El objeto de esta ciencia es resolver cuantas cuestiones son relativas á la forma, régimen, establecimiento y dimensiones de las máquinas, para aprovechar en las más favorables condiciones, las fuerzas que la naturaleza nos proporciona.

Continuación, puede decirse, de la Mecánica racional, *sirven de base* cuantos principios se han establecido en ella, auxiliados, como es natural, por las leyes que la experiencia proporciona y que tan indispensables son al pasar del terreno ideal al práctico; de las concepciones abstractas de aquella ciencia á las aplicaciones concretas que deban hacerse al estudiar detenidamente las condiciones de establecimiento y marcha de las máquinas.

La definición de estas nos servirá de punto de partida para precisar los verdaderos límites y principales divisiones que pueden hacerse.

2. Definición y división de las máquinas.—Se dá el nombre de *máquina, á un conjunto de piezas de suficiente resistencia, dispuestas de tal modo que, bajo la influencia de las fuer-*

zas que las solicitan, pueden tener solamente movimientos de antemano determinados (*).

Si en lugar de considerarlas en su concepto puramente mecánico, como aparece en esta definición, se miran bajo el punto de vista industrial, podrá decirse que las *máquinas se establecen con el fin de ejecutar ciertos trabajos de las artes, aprovechando los motores ó fuerzas motrices que la naturaleza nos proporciona.*

3. Obedeciendo á esta idea; debiendo por tanto, ejecutarse con el auxilio de las máquinas determinados trabajos; debiendo también aprovechar, como se indica, la inmensa cantidad de energía que la naturaleza pone á disposición del hombre, puede colegirse inmediatamente cuáles sean las diversas clases de máquinas que deben considerarse y existirán en una instalación mecánica completa. Ellas constituyen una primera división de las máquinas, según el objeto principal á que satisfagan.

Esta división es en tres clases: 1.ª Máquinas motoras; 2.ª Máquinas operadoras; 3.ª Trasmisiones de movimiento, ó simplemente mecanismos.

4. La *máquina motora* recibe el movimiento directamente del motor ó agente que se emplea, y sus condiciones dependen de la naturaleza de éste.

La clase de movimiento obtenido, su velocidad y demás condiciones, necesitan, en general, modificarse para satisfacer las exigencias de la máquina ó *máquinas operadoras* existentes en la instalación mecánica, que son las que ejecutan el trabajo industrial, y se hace indispensable el establecimiento de las trasmisiones de movimiento, ó más simplemente, *mecanismos*.

(*) Es la definición más precisa entre las muchas que se han dado. Véase el programa del curso de la Escuela de Minas de Lieja, escrito por V. Dwelshauvers-Dery, en cuya introducción se encontrarán consideraciones notables relativas á este asunto. En él se demuestra la insuficiencia de cuantas definiciones dan muchos autores, y se comprueba la exactitud de la que hemos aceptado.

Estos cumplen su especial misión de servir, digámoslo así, como agentes intermedios entre motora y operadora, ó de vehículo, que á la par que trasporta, trasforma convenientemente la energía que proporciona la máquina motora para aprovecharla en una operación industrial determinada.

5. **División del estudio de la Mecánica aplicada.**—Bajo el punto de vista mecánico, al cual debemos concretarnos, será indispensable hacer abstracción de la naturaleza del trabajo industrlal (*) que debe ejecutarse por las máquinas operadoras. Limitada, por lo tanto, la aplicación mecánica al estudio de las motoras y los mecanismos, nos ocuparemos de estos últimos, cuyas condiciones relativas á su instalación y movimiento son base fundamental del estudio de las primeras. La clasificación que consideramos como preliminar de nuestros estudios comprende, según lo dicho, dos principales, que son relativos á *los mecanismos y á los motores industriales*, y á ellos debe agregarse uno complementario que tenga por objeto investigar las dimensiones que deben darse á los diversos órganos de las máquinas, para que puedan resistir á los esfuerzos á que están sometidos: á este tercer estudio se le llama *Resistencia de materiales*.

Suponemos, por lo tanto, divididos los estudios de Mecánica aplicada en tres grupos principales, por el orden siguiente:

1.° Mecanismos;
2.° Motores industriales;
3.° Resistencia de materiales,

y en este concepto, el que ha de ocuparnos, relativo á los Mecanismos, habrá de considerarse como base fundamental de los dos últimos.

(*) Téngase presente la diferencia de acepciones de la palabra trabajo, según se hable en términos industriales ó puramente mecánicos.

LOS MECANISMOS

CONSIDERACIONES GENERALES

6. Objeto y división.—Todo mecanismo tiene por objeto, según se ha dicho, *trasmitir el movimiento de un órgano á otro, trasformándolo convenientemente si así fuere necesario.*

Las diversas piezas que constituyen un mecanismo, son fijas ó movibles. Las primeras aseguran la estabilidad del conjunto ó la dirección del movimiento que las segundas deben tener.

Determinar cuál sea la forma de las referidas piezas ú órganos, cuál su peso y dimensiones, será el objeto que debemos proponernos en este estudio.

7. En el supuesto que las dimensiones necesarias para resistir, sin romperse, á los diversos esfuerzos que soportan, deben determinarse en el estudio que denominaremos *Resistencia de materiales*, se presentan ahora dos cuestiones principales:

1.ª Forma y dimensiones de los órganos que constituyen un mecanismo, para que satisfagan á las condiciones relati-

vas á la dirección y sentido del movimiento, y á la velocidad de este. Esta cuestión, primera parte del estudio de los mecanismos, es una aplicación esclusiva de la *Cinemática*.

2.ª Esfuerzos á que debe estar sometido el mecanismo para que las velocidades de sus diversos órganos sean las prescritas, ó estén en una relación determinada. Esta segunda parte, este nuevo punto de vista bajo el cual han de considerarse los mecanismos, entra en el dominio de la *Dinámica*.

Si al estudio general de cada una de las cuestiones á que nos hemos referido, se agrega el estudio completo de los mecanismos más usados, que englobe ó reuna ambos, que sea una aplicación de las teorías expuestas en los dos primeros, se habrá cumplido el objeto que nos habíamos propuesto.

8. Dividimos, por lo tanto, el estudio de los mecanismos del modo siguiente:

Estudio 1.º Teoría Cinemática.

Idem 2.º Teoría Dinámica.

Idem 3.º y siguientes. Aplicaciones.

9. **Métodos que han de emplearse.**—En todos los casos procuraremos tratar las cuestiones del modo más general que sea posible, para que pueda tenerse una base segura en el cálculo de cualquier mecanismo, comprendido ó no en la clasificación que hemos de hacer.

Se emplearán para el estudio los métodos analítico y gráfico, sin dar la preferencia á ninguno de ellos, ya que tienen igual importancia en cuanto es referente al cálculo de los mecanismos en proyecto ó mecanismos ya establecidos.

Es verdad que el primero proporciona mayor exactitud en algunos casos; pero también lo es, que en otros muchos los errores que puedan cometerse en el método gráfico, son compensados, con exceso, por los que puedan proporcionar las hipótesis que suelen hacerse en las fórmulas con objeto de simplificarlas. Además, el método gráfico proporciona la incalculable ventaja de presentar los datos y soluciones de un problema, de tal modo que puedan abrazarse con una rápida

ojeada, para formarse idea perfecta de cuantos detalles constituyen el cálculo de un mecanismo.

10. Tales ventajas é inconvenientes, dicen, en nuestro entender, que deben emplearse ambos métodos siempre que sea posible. Aplicaremos por una parte el método gráfico, para abarcar el conjunto, medir con la exactitud necesaria y formarse idea aproximada, y se estudiará también el analítico, para comprobar la exactitud de los resultados obtenidos y fijar las expresiones correspondientes á las cantidades que sean incógnitas del problema.

En algunas cuestiones, y para comprobar la armonía de ambos métodos, tratará de establecerse la reciprocidad de las fórmulas y construcciones usuales. Recomendamos la mayor escrupulosidad en este estudio comparativo, que viene á corroborar cuanto hemos expresado en los párrafos anteriores. (*)

(*) El estudio gráfico de los mecanismos es hoy día muy empleado por cuantos necesitan hacer proyectos de máquinas y cálculo de las establecidas; pero su doctrina no aparece completa en los muy pocos tratados publicados hasta el día. Es preciso establecer una perfecta armonía entre las construcciones gráficas en los diversos casos. Es indispensable que las teorías generales comprendan de un modo explícito sus bases fundamentales. Si estas condiciones no se cumplen, si los estudios principales no son completos, será preciso divagar por el inmenso campo de gran número de memorias, manuales y prontuarios, para formarse idea de la marcha actual de los conocimientos, para poder bosquejar los proyectos ó cálculos que deban hacerse y obtener el verdadero efecto útil en el estudio que nos ocupa.

Con la nueva forma que damos al estudio elemental, con las tablas que hemos calculado y con los procedimientos gráficos que hemos añadido á los que presentan algunos autores, pretendemos que se habrán de conseguir los buenos efectos antes indicados.

ESTUDIO I

TEORÍA

CINEMÁTICA DE LOS MECANISMOS

CUADRO DEL ESTUDIO 1.º

PRELIMINARES. Clasificación.

MECANISMOS DE CONTACTO.
- Dos movimientos rectilíneos.
- Dos movimientos circulares.....
  - Ejes paralelos....
    - Movimiento de rodar.
    - Idem mixto.
  - Ejes que se cortan.
    - Movimiento de rodar.
    - Idem mixto.
  - Ejes que ni se cortan ni son paralelos.
- Un movimiento rectilíneo y otro circular.

MECANISMOS DE BIELA.
- Dos movimientos rectilíneos.
- Dos movimientos circulares.
  - Ejes paralelos.
  - Ejes que se cortan.
- Un movimiento rectilíneo y otro circular.

EMPLEO DE ÓRGANOS FLEXIBLES.
- Dos movimientos rectilíneos.
- Dos movimientos circulares.
- Un movimiento rectilíneo y otro circular.

PRELIMINARES

11. Clasificación.—Sin ocuparnos por ahora de los detalles relativos á las diversas piezas que componen, en general, un mecanismo, y recordando solamente que éstos constan de órganos fijos y movibles, dependientes aquéllos de la naturaleza de éstos, y sirviendo, como se ha dicho, para asegurar su estabilidad y la dirección del movimiento, haremos una clasificación que sea el fundamento del estudio general, bajo el punto de vista de la Cinemática.

En esta clasificación deben estar comprendidos los movimientos más comunes que tengan las diversas piezas de los mecanismos, y debe ser relativa á la naturaleza de los órganos movibles y á los medios de comunicación del movimiento.

12. El estudio general debe referirse á un mecanismo elemental, ó sea al que contiene solamente dos piezas principales movibles: una que comunica el movimiento, otra que lo recibe de aquella; *conductora*, por otro nombre, la primera; *conducida* la segunda; aquella manda, esta obedece, sin preocuparse por ahora de los medios que se empleen para dar el

movimiento á la conductora, que no están comprendidos en el dominio de la Cinemática.

13. La primera clasificación que hacemos de los mecanismos elementales, para facilitar el estudio, se refiere al modo de comunicar el movimiento la pieza conductora á la conducida, según que dicha comunicación se verifique por mutuo contacto de las referidas piezas conductora y conducida, que estén ambas reunidas por un órgano de perfecta rigidez (*), ó que se empleen en el mecanismo órganos flexibles (cuerdas, correas, cadenas, etc.)

En cada uno de estos tres casos, todavía podrá hacerse una subdivisión conducente al más perfecto estudio, la cual será relativa á la naturaleza del movimiento; y teniendo presente que los movimientos que casi exclusivamente se emplean en las máquinas son el rectilíneo y el circular, ya que el movimiento helicoidal ó de tornillo se estudia, según se sabe, considerándolo debido á la coexistencia de los dos mencionados, la subdivisión de cada una de las clases anteriores se referirá á los casos en que ambas piezas tengan movimientos rectilíneos; que las dos lo tengan circular, y por último, que uno de los movimientos sea rectilíneo y el otro circular.

No se desciende por ahora á más subdivisiones que complicarían y particularizarían los movimientos principales, sin proporcionar ventaja positiva. Estos detalles deberán estudiarse cuando, al hacer aplicación de las teorías generales que han de exponerse, estudiemos detenidamente los mecanismos que son más usados en las instalaciones mecánicas.

14. **Cuadro de los mecanismos elementales.** — Como consecuencia de lo dicho, podremos formar el cuadro siguiente de mecanismos elementales, el cual nos marca el orden que

---

(*) En el estudio cinemático consideramos á los diversos órganos como sólidos invariables; empleando, al expresar esta idea, la misma acepción indicada en Mecánica racional, según la cual debe considerarse que nunca varían de forma, ni accidentalmente, ni de un modo permanente.

habrá de seguirse al hacer su estudio bajo el punto de vista más general que sea posible.

PRIMER GRUPO: Piezas en contacto inmediato ó *mecanismos de contacto.*	1.ª *Especie:*	Dos movimientos rectilíneos.
	2.ª *Idem:*..	Dos movimientos circulares.
	3.ª *Idem:*..	Uno rectilíneo y otro circular.
SEGUNDO GRUPO: Piezas reunidas por un órgano rígido ó *mecanismos de biela.*	1.ª *Especie:*	Dos movimientos rectilíneos.
	2.ª *Idem:*..	Dos movimientos circulares.
	3.ª *Idem:*..	Uno rectilíneo y otro circular.
TERCER GRUPO: *Empleo de órganos flexibles.*	1.ª *Especie:*	Dos movimientos rectilíneos.
	2.ª *Idem:*..	Dos movimientos circulares.
	3.ª *Idem:*..	Uno rectilíneo y otro circular.

15. Marcha en su estudio. —Estudiaremos separadamente cada una de estas clases de mecanismos; y como en el estudio cinemático que debe hacerse nos habremos de referir únicamente á los movimientos que las diversas piezas deban tener, dependientes, cual es natural, de su forma y posición, trataremos en cada uno de los casos las dos cuestiones siguientes, que son recíprocas la una de la otra.

PRIMERA CUESTIÓN. Dada la forma de los órganos conductor y conducido, encontrar la relación de velocidades.

SEGUNDA CUESTIÓN. Dada la relación de velocidades, encontrar la forma de los órganos.



CAPÍTULO PRIMERO

PRIMER GRUPO.—MECANISMOS DE CONTACTO

ARTÍCULO PRIMERO

PRIMERA ESPECIE.—DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

16. Cuestión directa.—Sean dos piezas sólidas A y B (*figura* 1.ª, *lámina* 1.ª), aseguradas en su movimiento rectilíneo por las guías cc..... La pieza A es conductora y se mueve en el sentido de la flecha, con una velocidad de v metros por segundo. La pieza conducida, B, recibe también un movimiento en el sentido de su flecha, y su velocidad es v'.

Para resolver la primera cuestión, ó sea para determinar la relación de velocidades dada la forma de las piezas en contacto, considérese que $T'T'$ es la posición que toma la tangente TT, después de haber recorrido la pieza A un camino elemental mm_1. El camino recorrido por la B, será mm_2 y sus valores serán, respectivamente,

$$mm_1 = ds = \frac{mn}{sen\,\alpha} \quad \text{y} \quad mm_2 = ds' = \frac{mn}{sen\,\alpha'};$$

pero teniendo presente la relación que, según lo indicado en Mecánica racional, liga al espacio y velocidad, se tendrá $ds = vdt$ y $ds' = v'dt$; de todas las cuales se deduce muy fácilmente la proporción

$$\frac{v}{v'} = \frac{sen\,\alpha'}{sen\,\alpha} \quad (1)$$

ó bien $v\,sen\,\alpha = v'sen\alpha'$; expresión que puede traducirse al lenguaje vulgar, diciendo que las *proyecciones de ambas velocidades sobre la normal común, son iguales.*

La relación (1) nos marca la base para la resolución analítica de cuantos problemas sean relativos á los mecanismos comprendidos en esta especie, bastando en todos los casos despejar la cantidad que sea incógnita de la cuestión, en función de las demás cantidades, que deberán ser datos de ella; así pueden deducirse las expresiones

$$v = v'\frac{sen\,\alpha'}{sen\,\alpha}\,;\; v' = v\frac{sen\,\alpha}{sen\,\alpha'}\,;\; sen\,\alpha = sen\,\alpha'\frac{v'}{v}\,;\; sen\,\alpha' = sen\,\alpha\frac{v}{v'}\,;$$

correspondientes á los diversos problemas en que traten de encontrarse los valores que figuran en el primer miembro de cada una de ellas.

La solución gráfica de dichos problemas depende de la misma relación (1) ó más directamente de la regla deducida de ella. Dicha solución se halla representada por el triángulo $vv'm$, cuya construcción es muy sencilla en todos los casos. Así, cuando se trate de determinar el valor de v, conocidas que sean las direcciones de ambas velocidades y el valor de v', bastará trazar por el punto v' la paralela $v'v$ á la tangente T, para tener en mv el valor que se busca. Igual construcción se hará en el caso que la incógnita de la cuestión sea la velocidad v'.

Pero si se pide, por ejemplo, la dirección de esta última, conocido el valor y posición de v y el valor de v', habrá de variarse el modo de construcción del triángulo mvv' en el que

puede trazarse también directamente la paralela vv', debiendo hacerse centro en m para fijar por medio de un arco, cuyo radio sea mv', la posición del vértice v'. El problema tendrá en este caso dos, una ó ninguna soluciones, según la relación que exista entre las magnitudes de la velocidad v' y de la distancia mn' del punto m á la paralela vv', escogiéndose, en el caso de ambigüedad, la solución que más convenga á la naturaleza del problema que se resuelva.

Iguales consideraciones servirán para fijar la posición de v, conocidos que sean tanto su valor como el valor y dirección de v'.

17. **Cuestión inversa.**—La segunda cuestión, ó problema inverso, se deduce de la misma fórmula ó regla práctica, sustituyendo en vez de $\frac{v}{v'}$ la función dada que expresará la relación de velocidades en cada instante.

El caso práctico más frecuentemente empleado por el constructor, al que interesa esta segunda cuestión, es *determinar la forma que las piezas deben tener, para que la relación de velocidades sea constante.*

Es dato de este problema la relación $K = \frac{v}{v'}$; marcándose el ángulo 6 que deben formar las velocidades, cuyo valor es $6 = 180 - (\alpha + \alpha')$. De aquí se deduce $\alpha' = 180 - (\alpha + 6)$ y $sen\,\alpha' = sen(\alpha + 6)$. El valor de K toma la forma

$$K = \frac{sen(\alpha + 6)}{sen\,\alpha};$$

mas como K y 6 son datos de la cuestión, se deduce uno solo y único valor para $sen\,\alpha$; lo que nos dice que el contorno de A debe ser una línea recta, para que se cumpla la condición marcada en el enunciado del problema. La posición de esta recta es conocida analítica y gráficamente, por serlo el ángulo α que ella forma con la dirección del movimiento.

ARTÍCULO II

SEGUNDA ESPECIE.—DOS MOVIMIENTOS CIRCULARES

18. Caracter distintivo del movimiento.—En esta clase de movimientos, para que la comunicación se verifique en las mejores condiciones teóricas, es indispensable que los elementos de una de las piezas vayan adaptándose sucesiva y contínuamente sobre los de la otra, condición con la que queda caracterizado el movimiento llamado de rodar. En la práctica es todavía más usado el movimiento mixto, ó sea una combinación del de rodar y resbalar.

19. División del problema.—Al resolver las dos cuestiones generales que hemos indicado, se presenta también el problema de determinar la forma que deben tener las piezas, para que se cumpla la condición del movimiento marcado en el párrafo anterior. Según esto, estudiaremos, como en el caso de movimientos rectilíneos, la relación de velocidades, considerando aquí las angulares, y nos ocuparemos también de la cuestión inversa, indicando en el lugar más conveniente cuanto sea relativo á la forma del mecanismo.

Se considerarán los tres casos siguientes:

A.—Ejes paralelos.

B.—Ejes que se cortan.

C.—Ejes que ni se cortan ni son paralelos.

A.—Ejes paralelos

1.—MOVIMIENTO DE RODAR

20. Ecuaciones condicionales.—Sean *A* y *B* las piezas conductora y conducida respectivamente *(fig. 2.ª)* que giran alrededor de los ejes proyectados en *c* y *c'*. (*).

(*) Se suponen las piezas *A* y *B* cilíndricas, por ser las formas usadas exclusivamente. La figura representa las secciones rectas de ambos cilindros.

Supuesto que los diversos elementos se han de ir adaptando sucesivamente el uno al otro, las velocidades de los puntos m y m' que están en contacto, y cuyas direcciones son normales respectivamente á los radios vectores ρ y ρ', deberán de coincidir; para lo cual será indispensable también la coincidencia de las direcciones de estos radios. Esta coincidencia viene expresada analíticamente por la condición

$$\rho+\rho'=c \quad (2)$$

en la que llamamos c á la distancia de centros $c\,c'$.

21. La relación de velocidades á que se refiere la cuestión primera, ó directa, se deduce de la igualdad que indudablemente existe entre las velocidades lineales de los puntos m y m', cuyos valores son respectivamente $\omega\rho$ y $\omega'\rho'$, en los cuales ω y ω' representan las velocidades angulares.

Dicha igualdad nos proporciona directamente

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{\rho'}{\rho} \quad (3)$$

22. Las ecuaciones (2) y (3) se verifican simultáneamente para todos los puntos de contacto y asignan á ρ y ρ' valores determinados y constantes para cada posición de los discos.

Se deduce en esta clase de mecanismos, por traducción al lenguaje vulgar de las susodichas ecuaciones, que *la suma de radios vectores es una cantidad constante, y su relación, inversa de la de velocidades angulares.*

23. Resolución gráfica.—La resolución gráfica que proporciona la relación de velocidades, se obtendrá trazando una curva ó diagrama cuyas coordenadas sean $x=\alpha$, $y=\alpha'$, representándonos α y α' los diversos ángulos descritos por los discos A y B, desde el orígen hasta el instante que se considere. El *coeficiente angular de la tangente al diagrama, será la relación de velocidades que se busca.* En efecto, los valores de ω y ω' son respectivamente, según enseña la Mecánica racional, $\omega=\frac{d\alpha}{dt}$ y $\omega'=\frac{d\alpha'}{dt}$; y la relación $\frac{\omega'}{\omega}=\frac{d\alpha'}{d\alpha}=\frac{dy}{dx}$

que de ellos se deduce, es, según se sabe, el valor del coeficiente angular mencionado.

24. Problema inverso.—La segunda cuestión, ó problema inverso, se deduce de las ecuaciones (2) y (3) de un modo análogo al empleado en la clase de mecanismos explicado anteriormente. El cálculo siguiente indica la marcha de su resolución. (*)

Es un dato el valor $k=\frac{\omega}{\omega'}$ y como $\rho'=c-\rho$, y $k=\frac{\rho'}{\rho}=\frac{c-\rho}{\rho}$, se deduce $\rho=\frac{c}{k+1}$ y $\rho'=c\frac{k}{k+1}$; es decir, que deben ser constantes los valores de cada uno de los radios vectores, para que se cumpla la condición de constancia en la relación $\frac{\omega}{\omega'}$. En otros términos: es indispensable que *las directrices de los cilindros sean circunferencias cuyos centros estén sobre los ejes de rotación*. Sus radios vectores estarán determinados por las fórmulas anteriores.

25. Caso en que el contacto se verifique interiormente.—No hacen falta nuevas consideraciones para el caso en que el contacto se verifique interiormente, porque las fórmulas se deducirán de las anteriores, con solo cambiar el signo de ρ' si B es el disco interior.

Las fórmulas que nos dan la clave de los problemas, son

$$\rho-\rho'=c \quad \text{y} \quad \frac{\omega}{\omega'}=\frac{\rho'}{\rho}.$$

II.—MOVIMIENTO MIXTO

26. Naturaleza del movimiento.—Siguiendo el estudio del caso que se considera en que los ejes sean paralelos, supóngase ahora que el movimiento sea combinado de rodar y

(*) Conste que se estudia el caso en que sea constante la relación de velocidades angulares.

resbalar. Más frecuente en la práctica que el caso anterior, es todavía el presente. Trasmitido el movimiento por simple rozamiento de las superficies en contacto, acaban estas por destruirse, efecto del desgaste á que están expuestas, y el movimiento se comunica difícilmente ó deja de comunicarse.

Si á los discos ó ruedas consideradas anteriormente se les añade unos suplementos, salientes á la una y huecos ó entrantes á la otra, de tal modo que los salientes vayan apoyándose sucesiva y continuamente sobre los respectivos entrantes, el movimiento estará asegurado y el desgaste de los salientes y entrantes, que realmente son los que lo proporcionan, tendrá muy pequeña influencia.

La naturaleza de este movimiento es tal en la práctica, que verificándose un resbalamiento entre los salientes y entrantes, las circunferencias de los primitivos discos se conducen como si su movimiento fuera exclusivamente de rodar. Estamos, por lo tanto, en el caso de *movimiento combinado de rodar y resbalar, en que uno de ellos, el primero, es puramente ideal.*

27. **Nomenclatura.**—Antes de entrar en la explicación detenida de estos mecanismos llamados *engranajes*, conviene establecer la nomenclatura de sus diversos elementos, para la mejor inteligencia y claridad de cuanto ha de exponerse.

Se llaman *circunferencias primitivas ó proporcionales*, á las circunferencias puramente ideales de los primitivos discos. Su movimiento es de rodar simple, y están marcadas en la *figura 2.ª* con las letras A y B.

Punto de contacto ideal, al punto m donde se tocan las circunferencias primitivas. Este punto podrá estar confundido ó no con el *punto de contacto real*, que es el de tangencia de los elementos conductor y conducido.

Dientes se llama á los salientes M y N con que quedan montadas las circnnferencias A' y B', que limitan realmente los discos en su interior. Su forma es generalmente simétrica con respecto al radio que pasa por el punto medio del arco de circunferencia primitiva comprendido entre ellos.

Huecos, los espacios comprendidos entre cada dos dientes.

Paso del engranaje, á la longitud $o\,o'$ comprendida entre los centros de dos dientes consecutivos, contada también sobre las circunferencias primitivas.

Lleno, el arco mn que corresponde al diente.

Vacio, el arco ms que corresponde al hueco.

Juego, á la diferencia entre el vacío y el lleno.

Base ó raiz, á la superficie cilíndrica $m'\,n'$ de arranque de los dientes.

Vértice, la superficie $m_1\,n_1$ que limita exteriormente el diente.

Perfil, las curvas $m'\,m_1$ y $n'\,n_1$ que reunen la base con el vértice.

Caras, los trozos $m\,m_1$ y $n_1\,n$ del perfil, que son exteriores á la circunferencia primitiva.

Flancos, los trozos interiores $m\,m'$ y $n\,n'$.

Altura ó saliente es la distancia entre la circunferencia primitiva y el vértice, contada sobre el eje de simetría del diente.

28. Problema de los engranajes.—El problema de los engranajes, según el medio que hemos empleado para caracterizar su movimiento, debe satisfacer á la condición de *que verificándose un resbalamiento en los puntos de contacto reales ó de los dientes, las circunferencias primitivas tengan en el punto de contacto ideal un movimiento de rodar.*

Para estudiar el modo de cumplirse esta condición, considérese la *figura* 4.ª, en la que c_1 es la rueda conductora y c_2 la conducida, que giran con las velocidades angulares ω_1 y ω_2 respectivamente. En dicha figura se halla claramente marcado el diente de la conductora y el hueco de la conducida, cuyo punto de contacto real es n. Para este punto, según se ha dicho, el movimiento debe ser de resbalar. La condición característica del resbalamiento se ha estudiado en el párrafo 16, cuya consecuencia fué que *las proyecciones sobre la normal común, de los caminos recorridos por cada una de las piezas en contacto, deben ser iguales.*

Esta condición, referida á la nomenclatura que está marcada en la figura, tendrá por expresión analítica

$$v_1 \cos \varphi_1 = v_2 \cos \varphi_2$$

siendo v_1 y v_2 las velocidades absolutas del punto n, considerado respectivamente como perteneciendo á la rueda c_1 y á la c_2. Se ha marcado á estas velocidades las direcciones T_1 y T_2 que son perpendiculares á los radios de giro ρ_1 y ρ_2 correspondientes al punto n de cada una de las piezas en contacto, cuya normal común es NN'. Pero por ser de rotación los movimientos considerados, los valores de v_1 y v_2 serán respectivamente $\begin{cases} v_1 = \omega_1 \rho_1 \\ v_2 = \omega_2 \rho_2 \end{cases}$ con lo cual la condición antedicha se reduce á $\omega_1 \rho_1 \cos \varphi_1 = \omega_2 \rho_2 \cos \varphi_2$. Por otra parte, la condición característica del movimiento de rodar, relativo al punto de contacto ideal m, viene expresada, según lo dicho en el párrafo 21, por la ecuación $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$.

29. Simultáneamente deben verificarse las dos condiciones expresadas. Deberán combinarse como es natural sus expresiones analíticas, con lo cual resulta $\frac{r_1}{\rho_1 \cos \varphi_1} = \frac{r_2}{\rho_2 \cos \varphi_2}$: ó bien teniendo presente que si se trazan las q_1 y q_2 perpendiculares á NN' desde c_1 y c_2, los ángulos φ_1 y φ_2 son iguales respectivamente á los $(\rho_1 q_1)$ y $(\rho_2 q_2)$ y que por lo tanto $\begin{cases} \rho_1 \cos \varphi_1 = q_1 \\ \rho_2 \cos \varphi_2 = q_2 \end{cases}$ resulta en definitiva la ecuación condicional

$$\frac{r_1}{q_1} = \frac{r_2}{q_2}.$$

Esta ecuación nos indica, según la geometría enseña, que la recta NN' debe *precisamente* pasar por el punto m, sin lo cual las condiciones anteriores no quedarían satisfechas.

Resulta, finalmente, y como idea fundamental que debe presidir á la construcción de los engranajes, que la *normal común en los contactos reales ó de los dientes, debe pasar por el*

contacto ideal ó de las circunferencias primitivas, que se halla sobre la línea de centros.

30. Ya podrá resolverse muy fácilmente el problema general de los engranajes, el cual, toda vez que la relación de velocidades está representada por la ecuación (3) ó sea en este caso $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$, se reducirá á determinar la forma geométrica de los perfiles de los dientes conductor y conducido, que deben estar en contacto.

Plantearemos el problema considerando como dato el perfil del diente de la rueda conductora, por ejemplo, para deducir cuál sea el que corresponde á la conducida, con la condición de que se cumpla la ley fundamental de los engranajes, que acabamos de enunciar.

31. Sean c_1 y c_2 las ruedas conductora y conducida respectivamente (*fig.* 5.ª (*a*)) y $B\,m$ el perfil dado, perteneciente á esta última, que vamos á suponer, para fijar las ideas, colocado en la posición correspondiente al momento en que los dientes deben cesar en su engrane. Sea m el contacto real y $a\,b$ el ideal, en cuyo caso la normal en m pasa por b, y el punto m pertenece al perfil que se busca.

32. Para encontrar los demás puntos del perfil que corresponde al diente de la rueda c_1, supóngase el arco $b\,B$ dividido en otros elementales por medio de los puntos b_1, b_2..... Siendo de rodar el movimiento de las circunferencias primitivas, si se toman sobre la c_1 arcos $a a_1$, $a_1 a_2$....., iguales en longitud á los $b\,b_1$, $b\,b_2$....., los puntos del mismo sub-índice, vendrán á coincidir al fin de los tiempos elementales que á estos correspondan. Trazando las normales $b_1 m_1$, $b_2 m_2$..... á la curva dada, resulta, que cuando un punto cualquiera de ella, el m_1, por ejemplo, pase á ser contacto real, el punto correspondiente b_1 será contacto ideal según la ley fundamental enunciada, ocupando la posición b, y con él estará en contacto el a_1. Como la normal en este nuevo contacto no será otra cosa que una nueva posición de la $b_1 m_1$, el punto que deba estar en contacto real con m_1, dista de a_1 esta can-

tidad. Descríbase, por lo tanto, con centro a_1 y con radio $b_1 m_1$ un arco de círculo, y á él deberá ser tangente el perfil buscado.

Extensivas estas consideraciones á los diversos puntos a_1 a_2....., puede deducirse que *dicho perfil no es otra cosa que la curva envolvente de los distintos arcos trazados del modo que acaba de expresarse, y que termina en el punto* A, *toda vez que la normal en su contacto real* B *es cero.* (*)

33. Para deducir una consecuencia final que pueda servir de regla general relativa al trazado de los engranajes, trácese en la *figura* 5.ª (*b*) una recta $b' m' = b m$, y constrúyase el triángulo $b' b'_1 m'$ con las dos $b' b'_1 = b b_1$ y $b'_1 m' = b_1 m_1$. Sobre éste, el triángulo $b'_1 b'_2 m'$, en análogas condiciones respecto á las rectas $b_1 b_2$ y $b_2 m_2$, y así sucesivamente hasta cerrar el polígono $b' b'_1 b'_2 b'_3 m' b'$, que será una curva en el caso en que la subdivisión del arco $b B$ se hubiese hecho en otros infinitamente pequeños. En estas condiciones, colocada la figura (*b*) sobre la (*a*) de modo que la recta $b' m'$ coincida con la $b m$, no hacen falta más consideraciones para comprender, que si se hace rodar el perfil de la figura (*b*) sobre la circunferencia c_2, al adaptarse los elementos $b' b'_1$, $b'_1 b'_2$....., respectivamente, sobre los $b b_1$, $b_1 b_2$, el punto m' irá coincidiendo sucesivamente con los $m_1 m_2$.....; ó, en otros términos, el punto m' engendrará el perfil dado $m B$.

Si partiendo de la misma posición inicial, rueda el perfil de (*b*) sobre la circunferencia c_1, el punto m' engendrará á su vez el perfil $m A$, cuya construcción habíamos ya indicado.

La consecuencia final de cuantas consideraciones llevamos hechas, es que cualquiera que sea el perfil dado para una de las ruedas, siempre existe una curva, construída del modo indicado, que, rodando sobre cada una de las circunferencias primitivas, engendra los perfiles conductor y condu-

(*) Se ha exajerado en la figura la curvatura de los arcos de círculo, que no parecen tales, para la mejor inteligencia de las explicaciones que damos.

cido, de tal modo, que estos satisfagan á la ley fundamental de los engranajes.

34. Reglas prácticas.—Esta consecuencia puede traducirse en una regla práctica que preside á la construcción de los engranajes, toda vez que en general están caracterizados por la naturaleza de la curva que rueda. Esta regla práctica es la siguiente: *Hágase rodar una curva cualquiera sobre las circunferencias primitivas, exteriormente sobre la rueda conductora é interiormente sobre la conducida, y encuéntrense las líneas engendradas por un mismo punto de dicha curva. Estas líneas serán los perfiles de los dientes, cuyos elementos deben presentarse sucesivamente en contacto.*

La resolución de este problema es bien conocida, y los procedimientos que enseña la Geometría se simplifican notablemente, cuando la línea generatriz es una de las más sencillas, círculo ó línea recta, empleadas casi exclusivamente en los trazados que en la práctica suelen hacerse. En este caso, los dientes tienen las formas de epicicloides é hipocicloides, y sus casos particulares de evolventes de círculo y líneas rectas.

35. Estudiado ya el modo de cumplir la condición fundamental, y resuelto, en su consecuencia, el problema de determinar el perfil de los dientes, falta deducir cuál sea el medio que deba emplearse para que la relación de las velocidades angulares permanezca constante, y para hacer que no existan intermitencias en el movimiento.

En primer lugar, los dientes de cada una de las ruedas deben ser todos iguales y estar igualmente distantes. Además, el paso debe ser el mismo para ambas ruedas, y por consiguiente, una común medida de las dos circunferencias primitivas; puesto que para que el contacto de dos dientes sea inmediato y sucesivo al de otros dos, sin que exista interrupción alguna, es preciso que las circunferencias primitivas hayan girado el mismo arco.

Las intermitencias en el movimiento se evitarán procurando que haya siempre, y por lo menos, dos dientes en con-

tacto, de los cuales uno es perteneciente á cada rueda. En este caso límite es indispensable que cada diente cese de obrar en el momento en que el siguiente empiece el contacto, ó sea cuando pasa por la línea de centros. La altura ó saliente del diente depende, por lo tanto, de estas circunstancias, y puede decirse que *en el caso límite de que el contacto real se verifique entre un par de dientes solamente, la altura ó saliente es igual á la distancia entre el segundo contacto y la circunferencia primitiva.* Hallada esta altura, se comprende que será fácil limitar los dientes de la rueda conductora y trazar su cabeza, *con una circunferencia cuyo radio sea el de la primitiva, más la altura hallada.*

Las mismas consideraciones sirven para que pueda deducirse el modo de limitar interiormente los huecos de la rueda conducida; lo que se verificará trazando *una circunferencia cuyo radio sea igual al de la circunferencia primitiva menos la altura hallada para el diente conductor.* (Generalmente se hace elentrante un poco mayor que el saliente, para que el engranaje funcione sin dificultad).

36. Engranajes recíprocos.—Cuantas consideraciones hemos hecho, deducidas de las figuras 4.ª y 5.ª, suponen que mande siempre una de las ruedas, y obedezca ó sea conducida la otra; pero si se quiere que alternativamente pueda mandar una ú otra, ó lo que es lo mismo, que el engranaje sea *recíproco*, será preciso que ambas circunferencias primitivas se provean de salientes que correspondan á los entrantes de la otra, satisfaciendo á la vez, tanto los salientes como los entrantes, á la condición de simetría respecto al radio que pase por su punto medio respectivo.

37. Relaciones analíticas entre los elementos de un engranaje.—Para concluir con las condiciones generales inherentes á los engranajes, y deducir las relaciones analíticas que nos sirvan de base á las aplicaciones, indicaremos que si fuese de perfección absoluta la construcción de las ruedas, bastaría que el lleno y el vacío fueran iguales para el buen ajuste de los dientes; pero como sea de todo punto imposible

llegar á este grado de absoluta perfección, se tiene cuidado de que los vacíos excedan á los llenos, en la cantidad que hemos llamado el juego del engranaje, cuyo valor es una fracción determinada del paso (generalmente de $\frac{1}{10}$ á $\frac{1}{20}$).

38. La expresión analítica de cuantas consecuencias generales hemos deducido, relativas á los engranajes, nos proporcionará suficientes datos que presidan á la construcción de estos. Nos ocuparemos del establecimiento de dichas fórmulas, por el orden que generalmente suelen utilizarse.

Relaciones entre los radios. Son las mismas fórmulas (2) y (3) aplicadas al caso presente.

$$R_1+R_2=c; \quad (2) \qquad \frac{R_1}{R_2}=\frac{\omega_2}{\omega_1} \quad (3)$$

Relaciones entre lleno, vacío y paso.—Se deducen de las últimas consideraciones hechas, y de la definición de estos elementos. Siendo p el paso, l el lleno y v el vacío, la primera fórmula será

$$p=l+v \quad (4)$$

Y si el juego es una fracción $\frac{1}{n}$ del paso, puede expresarse el valor del vacío por la

$$v=l+\frac{p}{n} \quad (5)$$

pudiendo deducirse de las (4) y (5) los valores que convengan, siempre que sea dato una de las tres cantidades, p, l ó v.

Número de dientes.—La relación entre estas cantidades, se encuentra por la consideración de que las circunferencias primitivas contienen tantas veces al paso, como número de dientes existe en cada una de ellas.

Se deduce la siguiente fórmula; $N_1 p = 2\pi R_1$ de la que se desprende la relación

$$\frac{R_1}{p} = \frac{N_1}{2\pi} = 0{,}15915\, N_1 \quad (6)$$

Y como aplicada esta fórmula á la circunferencia de radio R_2 y número de dientes N_2, toma el valor $\frac{R_2}{p} = \frac{N_2}{2\pi}$, se deduce por comparación de estas fórmulas,

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (7)$$

39. Engranajes interiores.—Todas las consideraciones hechas son aplicables al caso en que el contacto de las circunferencias primitivas se verifique interiormente, ó que el engranaje sea *interior* como suele llamarse. No nos ocuparemos, por lo tanto, de esta clase de engranajes en la teoría general que ahora se explica, dejando su trazado particular para cuando tratemos de las aplicaciones á los diversos mecanismos que más comunmente suelen usarse.

B.—Ejes que se cortan

I. MOVIMIENTO DE RODAR

40. Ecuaciones condicionales.—Siguiendo el procedimiento general ya indicado, determinaremos en primer lugar cuál sea *la condición para que el contacto sea simplemente de rodar, y encontraremos después la relación de velocidades.*

Sean So_1 y So_2 (*fig* 6.ª) los ejes de rotación que suponemos en el plano de la figura; M el punto de contacto, que puede ó no estar situado en dicho plano. Trácense las perpendiculares Mc_1 y Mc_2 á los ejes, y llamemos r_1 y r_2 á sus longitudes respectivas. Trácese también la recta MS que determina con cada uno de los ejes, dos planos MSo_1 y MSo_2, á

los cuales deben ser respectivamente normales las velocidades de los puntos de contacto M de los cuerpos A y B.

Si tenemos presente que la condición de rodadura supone implícitamente la coincidencia de estas velocidades, se deducirá como primera consecuencia que los planos MSo_1 y MSo_2 deben confundirse, y por consiguiente, la recta SM estar en el mismo plano de los dos ejes. Todos los puntos de contacto están, según esto, en el plano de los ejes de rotación.

Se expresa analíticamente esta consecuencia por la igualdad

$$\alpha = \theta_1 + \theta_2 \quad (8)$$

en la que estas cantidades representan los ángulos marcados en la figura.

41. La relación de velocidades se encontrará teniendo presente la igualdad absoluta que debe existir entre las velocidades lineales de los puntos de contacto reunidos en M, y que viene expresada por la condición $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Pero si se observa que $r_1 = SM \operatorname{sen} \theta_1$ y $r_2 = SM \operatorname{sen} \theta_2$, la igualdad anterior se reduce á $\omega_1 \operatorname{sen} \theta_1 = \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2$, de la cual se deduce ya la relación que se buscaba,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} \quad (9)$$

Las ecuaciones (8) y (9) se verifican simultáneamente para todos los puntos de contacto, y asignan á θ_1 y θ_2 valores constantes para dichos puntos. El lugar de los contactos es, según esto, la misma línea SM, y la forma geométrica de los cuerpos A y B que puedan servir como órganos de este mecanismo, es *dos superficies cónicas, cuyo vértice común es el punto de intersección de los ejes, y cuya generatriz de contacto está en el mismo plano que estos.*

42. **Resolución gráfica.**—La resolución gráfica que proporciona la relación de velocidades, se obtendrá tomando sobre el eje So_2 una magnitud $SK' = 1$ y construyendo el paralelógramo $SKnK'$. La distancia SK resuelve la cuestión,

toda vez que del triángulo SnK se deduce $\frac{SK}{Kn} = \frac{\operatorname{sen} n}{\operatorname{sen} \theta_1}$, ó bien $\frac{SK}{SK'} = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1}$, ó lo que es lo mismo, $SK = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

43. Problema inverso.—El problema inverso se resuelve por medio de las ecuaciones (8) y (9) que acabamos de hallar. Si se da el valor $K = \frac{\omega_1}{\omega_2} =$ constante, se deducirá inmediatamente $K = \frac{\operatorname{sen} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} = \frac{\operatorname{sen} (\alpha - \theta_1)}{\operatorname{sen} \theta_1}$; pudiendo obtenerse de esta expresión el valor de θ_1 y de éste el de θ_2 por la ecuación (8). Sin necesidad de hacer el cálculo relativo á la investigación de estos valores, deducimos que son constantes mientras lo sean los datos K y α; y por lo tanto, que las *directrices de los conos deben ser circunferencias cuyos centros estén sobre los ejes de rotación y cuyos planos sean normales á dichos ejes.*

II. MOVIMIENTO MIXTO

44. Trazado teórico de los engranajes cónicos.—Las consideraciones que han servido de preámbulo á los engranajes cilíndricos, pueden considerarse extensivas á los cónicos, y deducir para estos la conveniencia de armar una de las ruedas con salientes ó dientes, para que encajen en los entrantes ó huecos que se practiquen en la otra.

Aceptada la misma nomenclatura, si queremos deducir las formas geométricas que deben tener los perfiles de una y otra rueda del engranaje, podrán imaginarse cortados los dos conos primitivos *(figura 7.ª)* de ejes Sc_1 y Sc_2 por una superficie esférica de centro S y radio arbitrario SM. Esta cortará á los conos según dos círculos marcados en la figura, cuyos radios serán respectivamente r_1 y r_2. Con respecto á las curvas que pudieran trazarse en esta esfera, de condiciones análogas á las indicadas para las curvas planas consideradas en el caso de los engranajes cilíndricos, pudiéramos hacer consideraciones idénticas, que nos proporcionarían la consecuencia de que

los *perfiles conductor y conducido pueden considerarse engendrados por un punto de una curva esférica móvil, que ruede sobre las circunferencias primitivas* c_1 *y* c_2, *interiormente sobre la conducida y exteriormente sobre la conductora.* Se engendran de este modo, en el caso ordinario y práctico de que la curva móvil sea una circunferencia, las epicicloides é hipocicloides esféricas, cuya construcción es de todos conocida, si bien no tan sencilla como la de las curvas planas del mismo nombre.

Las curvas halladas para perfiles, servirán de directrices á las superficies cónicas cuyo vértice común sea *S* y de las cuales la una formará el diente de la conductora y la otra el hueco de la conducida. El contacto de dichas superficies se verificará en cada instante según una generatriz, y el plano normal á ellas en dicha línea ó contacto real, pasará por la *S M* de contacto ideal de los conos primitivos.

45. Trazado práctico.—Todas las consecuencias son análogas á las halladas para los engranajes ordinarios y las construcciones que pueden hacerse sobre la esfera de que hemos hablado, análogas también á las indicadas en el plano de aquellos; pero teniendo presente para la totalidad del trazado, que nunca se considerarán completos los conos, ó sea prolongadas las generatrices hasta el vértice *S;* se limita en la práctica el engranaje, por otra esfera de menor radio, *S M'*, que proporciona el espesor $c_1\ c'_1$ que sea suficiente.

Si bien son sencillas las construcciones que puedan practicarse sobre la superficie esférica auxiliar, hay imposibilidad casi absoluta de realizar materialmente dicha superficie, para trazar en ella los perfiles que son necesarios.

Para salvar esta dificultad, puede emplearse un procedimiento que proporciona suficiente exactitud, y que en principio se reduce á sustituir una pequeña porción de dicha superficie esférica auxiliar, por una cónica, que siendo desarrollable, podrá extenderse en un plano y hacer cómodamente el trazado (*).

(*) La simplificación que se indica, es debida á Tredgold.

46. La teoría general simplificada de los engranajes cónicos, resulta, según esto, de la consideración de los conos suplementarios de los anteriores, que se obtienen trazando en el punto M la normal $S_1 S_2$ á la generatriz común SM, y considerando cada una de sus partes $S_1 M$ y $S_2 M$ como generatrices de estos nuevos conos de vértices S_1 y S_2 y directrices los mismos círculos c_1 y c_2. Estos conos circunscritos á las esferas ideales, tendrán constantemente un plano tangente común, según la generatriz $S_1 S_2$.

Considerando los dientes y huecos con que puedan estar dotados los conos primitivos, las superficies cónicas que los forman cortarán á los conos suplementarios según curvas análogas á las que corresponden á un engranaje ordinario; y durante la rotación, los elementos de estas diversas curvas ó perfiles pasarán sucesivamente por el plano tangente común en $S_1 S_2$. Pueden, por lo tanto, suponerse desarrollados los conos suplementarios sobre dicho plano tangente, y considerar trazados sobre estos desarrollos los perfiles que corresponden á un engranaje ordinario. Estos perfiles, arrollados de nuevo, servirán de directrices á los conos que forman el engranaje.

Se deduce la construcción general siguiente: Desarróllense sobre un plano (*figura* 8.ª) las superficies cónicas suplementarias S_1 y S_2. Considérense los arcos $a'Mb'$ y aMb como arcos primitivos (circunferencias primitivas incompletas) de un engranaje ordinario, y hágase el trazado de éste, tomando como paso una medida común á los arcos aMb y $a'Mb'$. Arróllense los sectores correspondientes á estos arcos sobre los conos suplementarios, y ellos servirán de base ó directriz al engranaje pedido, que podrá limitarse por los conos, también suplementarios, que pasen por el punto M'.

47. Observaciones sobre este mecanismo.—Las observaciones hechas al tratar de los engranajes cilíndricos, deberán hacerse extensivas á esta clase de engranajes, cuyos datos prácticos habremos de indicar, como de los demás mecanismos, al estudiar las aplicaciones de las teorías generales que ahora se establecen.

C.—Ejes que ni se cortan ni son paralelos

48. Condición del movimiento.—Sean S_1 y S_2 los ejes de rotación (*figura* 9.ª, *lám.* 2.ª), y sean también ω_1 y ω_2 las respectivas velocidades angulares. Tomemos un punto cualquiera a sobre la perpendicular común $o_1\ o_2$ y supondremos que dicho punto sea uno de los de contacto de ambos cuerpos. La velocidad absoluta de este punto, como perteneciendo al sólido A, debe ser normal al plano $a o_1 S_1$; la velocidad del mismo punto, como perteneciendo al sólido B, lo será á su vez al plano $a o_2 S_2$. Ambas velocidades deben ser iguales en magnitud y dirección para que pueda ser el movimiento por simple rodadura, lo cual lleva consigo la coincidencia de los expresados planos, ó lo que es lo mismo, la condición de que los ejes dados estén en un mismo plano. Por consiguiente, en el caso que se estudia, *es imposible que el movimiento se verifique por simple rodadura*. Según las condiciones anteriores, y de acuerdo con lo que enseña la Mecánica racional (*), es indispensable que exista un resbalamiento entre las superficies que están en contacto, y toda vez que es imposible evitarlo al no poderse verificar el movimiento por simple rodadura, en la práctica deberá procurarse que se acerque lo más posible á este caso ideal: que el resbalamiento sea tan pequeño como pueda imaginarse. Será muy conveniente, según esto, determinar el camino recorrido durante el movimiento de resbalar, para deducir las condiciones que hagan á este camino el menor posible.

49. Condición de resbalamiento mínimo.—Se nos presenta el problema de *determinar un punto* a *sobre la recta* $o_1\ o_2$ *que cumpla con la condición de resbalamiento mínimo.*

Sea $o_1 o_2 = m$, y $o_1 a = x$; la distancia $o_2 a$ será igual á $m - x$.

Si se considera el camino $a\ b$ recorrido por el punto a en su rotación al rededor de S_1 en un elemento de tiempo $d\ t$, su valor será $a\ b = \omega_1 . a\ o_1 . d\ t = \omega_1\ x\ d\ t$.

(*) Delaunay, párrafo 56.

Del mismo modo, el valor del camino recorrido por dicho punto en su rotación al rededor de S_2 en el mismo elemento de tiempo, será $ab' = \omega_2 . a\,o_2 . dt = \omega_2 (m - x)\, dt$.

La medida del resbalamiento elemental vendrá expresada por la magnitud bb' cuyo valor puede deducirse del triángulo abb', siempre que se conozca el ángulo θ de los elementos ab y ab', que es igual al formado por los ejes de rotación. Dicho triángulo nos da el valor

$$\overline{b\,b'}^2 = \overline{a\,b}^2 + \overline{a\,b'}^2 - 2\,a\,b.\,a\,b' \cos\theta$$

y sustituyendo los valores de ab y ab' será

$$\overline{b\,b'}^2 = \omega_1^2\, x^2\, dt^2 + \omega_2^2 (m-x)^2\, dt^2 - 2\,\omega_1\,\omega_2\, x\,(m-x)\, dt^2 . \cos\theta .$$

El valor mínimo del resbalamiento relativo bb' se obtendrá igualando á cero la primera derivada del segundo miembro con respecto á x. Se obtiene de este modo la ecuación

$$\omega_1^2 x - \omega_2^2 (m-x) - \omega_1\,\omega_2 (m-x) \cos\theta + \omega_1\,\omega_2\, x \cos\theta = o$$

Y de ella se deduce inmediatamente

$$\frac{x}{m-x} = \frac{\omega_2^2 + \omega_1\,\omega_2 \cos\theta}{\omega_1^2 + \omega_1\,\omega_2 \cos\theta} \qquad (10)$$

La determinación del punto a es bien sencilla, y se reduce á despejar el valor de x en la ecuación anterior; ó bien, si se quiere emplear el procedimiento gráfico, á encontrar sobre la recta $o_1\,o_2$ un punto a, que cumpla con la condición

$$\frac{a\,o_1}{a\,o_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2 + \omega_1 \cos\theta}{\omega_1 + \omega_2 \cos\theta}$$

De esta ecuación condicional puede deducirse la encontrada para el caso de ejes paralelos, con solo hacer $\theta = o$; obteniéndose la relación

$$\frac{a\,o_1}{a\,o_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

La misma ecuación sufre una simplificación notable, que debemos poner en evidencia. Se refiere al caso de ser $\theta = 90°$, en el cual dicha expresión toma la forma

$$\frac{ao_1}{ao_2} = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$$

50. Determinado el punto *a* de resbalamiento mínimo, se podrá conocer la dirección *b b'* construyendo un triángulo semejante al *a b b'*, del cual se conocen el ángulo θ y los lados que le comprenden. Si por el punto *a* se traza una recta *G G'* paralela á *b b'* y se hace girar alrededor de cada uno de los ejes S_1 y S_2, describirá un hiperboloide de revolución relativo á cada uno de estos. Ambos hiperboloides tendrán común una generatriz *G G'*, y cuando giren alrededor de sus ejes respectivos, resbalarán uno sobre otro á lo largo de ella. (*)

El mecanismo que nos ocupa, se reduce, en vista de cuantos razonamientos se han hecho, á dos hiperboloides determinados del modo antedicho, que tienen constantemente una generatriz común.

51. Problema inverso.—La resolución del problema inverso, ó construcción de estos hiperboloides, para que cumpla el mecanismo con la condición de ser constante la relación de las velocidades angulares, es la misma que acabamos de indicar para la investigación de la generatriz de contacto.

52. Engranaje hiperboloide.—Si sobre las superficies de los hiperboloides primitivos se eligen las zonas comprendidas entre los paralelos de cada uno de ellos, trazados por dos puntos de la generatriz común *G G'*, podrán trazarse sobre dichas zonas una serie de generatrices equidistantes, que sean las bases de los dientes con que deben estar armados cada

(*) Puede expresarse en otros términos, diciendo que si se considera el movimiento relativo de un hiperboloide con relación al otro, la generatriz *G G'* es el *eje instantáneo de rotación y resbalamiento.*

De acuerdo con lo dicho en Mecánica racional (Delaunay 51 y 56), puede construirse esta generatriz, componiendo la rotación ω_2 al rededor de S_2, con una igual y contraria á ω_1 al rededor de S_1.

uno de dichos hiperboloides primitivos. Estos dientes serán pequeñas porciones de superficies salientes, verdaderas estrías oblícuas situadas sobre las coronas de las ruedas, y sus perfiles en un paralelo cualquiera, ó circunferencia primitiva, son los mismos que los de un engranaje cónico cuya superficie primitiva sea un cono tangente á la superficie primitiva del hiperboloide, en toda la extensión del paralelo dado.

Así, el trazado deberá referirse únicamente á los paralelos extremos de las zonas escogidas, en cada una de los cuales se imaginarán los conos tangentes á los hiperboloides, para que sirvan de superficies primitivas, como si sobre ellos debiera armarse un engranaje cónico. Los conos suplementarios de aquellos servirán como auxiliares para el trazado de los perfiles, y obtenidos estos, bastará que sobre ellos se haga resbalar la recta generatriz de cada uno de los hiperboloides, para obtener la forma de sus respectivos dientes.

El modo de conducirse una á otra rueda, dependerá de los razonamientos ya hechos; según los cuales, cada diente de la rueda conductora resbalará á lo largo del hueco correspondiente en la conducida. (*)

ARTÍCULO III

Tercera especie.—Un movimiento rectilíneo y otro circular

53. Condiciones características del movimiento.—Problema directo.—Sean dos piezas *A* y *B* (*fig.* 10), la primera con movimiento circular alrededor de *C* y la segunda con movimiento rectilíneo en sentido de *Q P*. Supuesto que el plano de la figura sea normal al eje de rotación, la dirección del movimiento rectilíneo será paralela á este plano, sin lo

(*) Según habrá de verse en las aplicaciones, presentan un gran inconveniente estos engranajes, y es relativo el resbalamiento de los dientes, que produce gran pérdida de trabajo. Por esta razón son muy poco usados.

cual sería imposible que las velocidades absolutas del punto de contacto M, en ambos movimientos, tuviesen la misma dirección y sentido, cual es indispensable en el movimiento simple de rodar que aquí suponemos.

Esto supuesto, puede observarse que la velocidad de M, en su rotación, debe coincidir con la velocidad del mismo en la traslación, y ser igual á esta. La dirección de la primera es normal á ρ, y la correspondiente al segundo movimiento es paralela á $P\,Q$; se deduce que el radio de contacto ρ debe ser normal á la dirección de la traslación, y, por lo tanto, que *la curva de contacto de los dos cuerpos, es una curva situada en un plano que pasa por el eje de rotación y es normal á la dirección de la traslación.*

La condición que acabamos de enunciar está indicada analíticamente por la expresión

$$\rho+\rho'=c \quad (11)$$

en la que c representa la distancia del eje C á una recta fija, $P\,Q$, paralela á la traslación.

La igualdad de las velocidades del punto M en cada uno de los movimientos, podrá expresarse por la ecuación

$$v=\omega\,\rho \quad (12)$$

que nos proporciona el medio de encontrar la relación de las velocidades ω y v.

54. Problema inverso.—Resuelto el problema directo, podemos, como en los casos anteriores, fundarnos en las ecuaciones (11) y (12) para encontrar la forma de las superficies, dada que sea la relación de velocidades. Ninguna dificultad ofrece, por lo tanto, este problema inverso, porque se deduce inmediatamente $\rho=\frac{v}{\omega}$; y como se supone constante la relación de velocidades $\frac{v}{\omega}$, se deduce la constancia de ρ.

Esto nos dice que *la pieza en rotación, es un cilindro de revolución cuyo eje es el del movimiento; y que la pieza en traslación es una superficie plana tangente al cilindro y paralela á la velocidad* v.

55. Cremallera y rueda dentada.—Iguales consideraciones á las hechas al tratar de los engranajes, nos conducen á considerar imperfecto el mecanismo anterior, y á la necesidad de armar con dientes tanto la rueda como la barra que respectivamente tienen los movimientos circular y rectilíneo.

Ninguna dificultad puede ofrecer el trazado de estos dientes, ya que se puede considerar á la superficie plana como el límite de una cilíndrica cuyo radio aumenta indefinidamente. Esta consideración origina la idea de un trazado, consecuencia del empleado en los engranajes, en el que sirvan de base la *circunferencia y recta primitivas*, que provienen de proyectar las superficies del caso anterior sobre un plano normal al eje de rotación.

Las curvas que resultan para perfiles de los dientes y huecos, serán casos particulares de las consideradas en el caso general, y su trazado presenta gran sencillez, sobre todo empleando la misma nomenclatura, cual es costumbre en este mecanismo. (Cuando hagamos aplicación de las teorías que ahora se exponen, se indicará el trazado, si bien no sea indispensable la explicación que podamos dar).

CAPÍTULO II

Segundo grupo.—Piezas reunidas por un órgano rígido ó mecanismos de biela

56. Composición de estos mecanismos, y clasificación.— Los mecanismos de este grupo están compuestos de dos piezas principales, guiadas cada una en su respectivo movimiento, que están reunidas por un órgano intermedio, rígido, llamado *biela*, cuya magnitud permanece, por lo tanto, constante durante el movimiento. Cuando este es de rotación, á las piezas principales que están reunidas por la biela, se les da el nombre de *manivelas*.

La clasificación expuesta en el número 14, que se refiere á la naturaleza de los movimientos, es relativa á los que puedan tener las dos piezas principales del mecanismo.

El estudio de este grupo comprenderá, según esto, los mismos tres casos del grupo anterior, ó sea cuando los movimientos de las piezas principales sean ambos rectilíneos, ambos de rotación, ó uno rectilíneo y otro de rotación.

ARTÍCULO PRIMERO

PRIMERA ESPECIE.—DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

57. Ecuación del movimiento.—Las dos piezas A y B (*figura* 11) están aseguradas en su movimiento rectilíneo por las guías om y on y la biela AB reune á aquellas, estando articulados sus extremos de modo que les permita el giro correspondiente á las distintas posiciones que puedan ocupar. (Si las guías no están en un mismo plano, se podrá suponer el plano de la figura paralelo á las direcciones de los movimientos rectilíneos ó sea á las de dichas guías oA y oB).

Si se trazan las normales AC y BC á las trayectorias de ambos movimientos, el punto C de intersección representará el centro instantáneo de rotación en el movimiento elemental que pudiera considerarse, y si se recuerda lo dicho en Mecánica racional (*) acerca del movimiento de una figura plana en su plano, podrán obtenerse los caminos elementales descritos por los puntos A y B, por las siguientes expresiones:

Para el punto A..... $ds = vdt = AC d\theta$

Para el punto B..... $ds' = v'dt = BC d\theta$

en las cuales, v y v' representan respectivamente las velocidades de los puntos A y B, y $d\theta$ el ángulo que corresponde á la rotación elemental alrededor de C.

Dividiendo una por otra las anteriores expresiones, puede obtenerse la relación de velocidades, cual se desea en todos los problemas de que nos estamos ocupando, cuyo valor es

$$\frac{v}{v'} = \frac{AC}{BC} = \frac{sen\,\alpha'}{sen\,\alpha}$$

proporción de la que se deduce inmediatamente

$$v\,sen\,\alpha = v'\,sen\,\alpha' \quad (1')$$

(*) Delaunay, párrafo 21.

58. Comparación con los mecanismos de contacto.— Esta ecuación es idéntica á la marcada con el número (1) para los mecanismos de contacto, ó sea los comprendidos en el primer grupo, y esta identidad nos hace entrever la idea de reciprocidad entre ambas especies de mecanismos, ó sea que pueden sustituirse el uno al otro; toda vez que por resolución de los problemas directo é inverso relativos á ambos casos, sería fácil encontrar el mecanismo de contacto que fuera equivalente al mecanismo de biela dado, ó inversamente, dado un mecanismo de contacto, encontrar el de biela que le sea equivalente.

Se indican estos problemas, por lo notable de las conclusiones que los han proporcionado, y porque quizás en algún caso especial pudieran ser de utilidad en la práctica; pero no siendo esto lo más general, no siendo de útil aplicación la solución de ellos, suprimimos el indicarla, sobre todo cuando su estudio ninguna dificultad ofrecería al que posée los suficientes conocimientos de Mecánica racional.

ARTÍCULO II

Segunda especie.—Dos movimientos circulares

59. División de estos mecanismos.—Del mismo modo que para los mecanismos explicados en el primer grupo, deben considerarse los tres casos que se refieren á la posición relativa de los ejes, ó sea que estos sean paralelos, que se corten, ó que ni se corten ni sean paralelos. Pero no siendo de utilidad práctica este último, consideraremos solamente cada uno de los dos primeros, cuyo estudio va á indicarse separada y sucesivamente.

A.—Ejes paralelos.

60. Ecuaciones fundamentales.—Sean $o\,A$ y $o'\,B$ las dos piezas conductora y conducida respectivamente (*figura* 12),

llamadas, según hemos dicho, *manivelas*, cuyas longitudes son iguales á r y r'. La recta AB representa la biela de longitud constante L. Supongamos que la posición inicial del mecanismo sea la representada en la figura por las líneas de trazos y puntos oA_0B_0o', y la marcada con trazos fuertes y letras $oABo'$, que sea correspondiente al caso en que la manivela conductora oA haya girado un ángulo α en sentido de la rotación, cuya velocidad angular ω está indicada en la figura. El ángulo α' que corresponde á la manivela conducida $o'B$ y descrito en sentido de su rotación ω', será dependiente de α.

Si M representa la intersección de la biela con la línea de centros oo' y llamamos ρ, ρ' y c respectivamente á las magnitudes oM, $o'M$ y oo', la primera ecuación condicional de este movimiento, vendrá representada por la expresión

$$\rho + \rho' = c \quad (2')$$

61. Para encontrar una segunda condición, ó sea la relación de velocidades, téngase presente también cuanto es relativo al movimiento elemental de una figura plana en su plano, caso en el que se encuentra la biela AB (*). El centro instantáneo de rotación en el movimiento elemental de AB que puede considerarse, lo proporcionará la intersección o'' de las normales oA y $o'B$ á las trayectorias respectivas de los puntos A y B. Los caminos elementales descritos por estos puntos, pueden deducirse por las consideraciones sencillas que la Mecánica racional enseña, obteniéndose:

Para el punto A, $ds = vdt = r\omega dt$, por efecto de la rotación alrededor de o; y como por efecto de la que se verifica alrededor del centro instantaneo o'', también tiene el valor $ds = Ao''.d\theta$; fórmula en la cual $d\theta$ nos representa el ángulo de rotación elemental alrededor de o'', resulta

$$r\omega dt = Ao''d\theta \quad (a).$$

(*) Delaunay, párrafo 21.

Para el punto B se obtienen del mismo modo la expresiones $ds' = v'dt = r'\omega' dt$ y $ds' = Bo'' d\theta$, y por lo tanto, igualando

$$r'\omega' dt = Bo'' d\theta \qquad (b).$$

Dividiendo una por otra las expresiones (a) y (b) se obtiene

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'.Ao''}{r.Bo''} \qquad (c).$$

Pero al considerar el triángulo $oo'o'$ que está cortado por la trasversal AB, podrá deducirse un nuevo valor para la relación $\frac{\omega}{\omega'}$; puesto que dicho triángulo proporciona (*)

$$\rho.r'.Ao'' = \rho'.r.Bo''.$$

Expresión de la cual se deduce la proporción

$$\frac{r'.Ao''}{r.Bo''} = \frac{\rho'}{\rho} \qquad (d);$$

y comparando, por último, las proporciones (c) y (d) se obtiene

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{\rho} \qquad (3').$$

62. Comparación con los mecanismos de contacto.— Las expresiones (2') y (3') encontradas como condicionales de esta clase de mecanismos, son idénticas á las (2) y (3) obtenidas para el primer grupo en el párrafo 38, y esta particularidad nos dispensa de entrar en más detalles sobre esta clase de mecanismos, ya que, lo mismo que en el caso anterior, es

(*) Esta propiedad de los triángulos cortados por las trasversales, es fácil demostrarla tirando una paralela $o\,H$ á la trasversal, por el punto o, comparando los triángulos semejantes $o''AB$ y $oo''H$; y también los $o'MB$ y $o'oH$.

factible la resolución de los problemas que establecen reciprocidad entre los mecanismos de contacto y los de biela que estamos estudiando.

63. Curva descrita por un punto de la biela.—Cuando las dos manivelas son iguales, el punto medio de la biela describe una curva que tiene la forma de un ocho prolongado, á la que se llama curva de larga inflexión. No sería difícil hallar la ecuación de esta curva, sobre todo en el caso más usado en la práctica, de que las manivelas en su posición primitiva fuesen paralelas; entonces el sistema coordenado que proporcionara la ecuación más sencilla, sería el formado por las rectas MX y MY (*fig.* 13), paralela y perpendicular respectivamente á dicha posición primitiva. La curva resultante, descrita por el punto M, cuya forma particular indicamos antes, es tan prolongada, que un trozo de ella se confunde sensiblemente con el eje de las Y. Esta propiedad particular debe tenerse muy presente, porque se utiliza más adelante en el estudio de los mecanismos compuestos, que hemos de hacer como aplicación de los que ahora nos ocupan (*).

B.—Ejes que se cortan.

64. Descripción.—El mecanismo de biela comprendido en este caso, lleva el nombre de junta universal, y se compone de dos horquillas semicirculares ada' y beb' (*fig.* 14), montadas en la extremidad de los ejes od y $o'e$. Los extremos de estas horquillas están reunidos por la biela $aa'bb'$ que tiene la forma de una cruz, cuyos brazos son iguales y perpendicu-

(*) Aun cuando parece que el mecanismo que tuviera por objeto producir un movimiento rectilíneo del punto M, debiera entrar en la clase de mecanismos simples que estamos estudiando, no es así, puesto que sería indispensable una nueva pieza colocada en M, que estuviera asegurada en su movimiento rectilíneo por las guías correspondientes.

Serían ya más de dos las piezas elementales de este mecanismo, que entra en la clasificación de los mecanismos compuestos.

lares. (Se supone que la horquilla ada' está trazada en el plano de la figura, que es el mismo de los dos ejes, y la beb' en uno perpendicular á ella).

Si se supone que manda ó es conductor el eje o, los puntos a y a' describirán una circunferencia de centro c en un plano perpendicular á dicho eje; y los b y b', que permanecen á distancias invariables de los a y a', describirán otra circunferencia con el mismo centro y plano normal al eje o'.

65. Valores límites de la relación de velocidades.— Puede demostrarse, como en el caso anterior, que existe un mecanismo de contacto equivalente al de biela que se considera, y que tal mecanismo está formado por dos conos cuyo vértice común es el punto de intersección de los dos ejes. Pero dada la analogía con dicho caso, se puede evitar la demostración de esta propiedad, y encontrar directamente la relación de velocidades.

Con tal objeto, podrá observarse que las velocidades angulares de los ejes o y o' en función de las velocidades absolutas v y v' de los puntos a y b, tienen por expresiones $\omega = \frac{v}{ac}$ y $\omega' = \frac{v'}{bc}$ y por lo tanto

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{v}{v'} \quad (a)$$

Pero si se consideran los planos normales á las trayectorias descritas por los puntos a y b, que pasarán á su vez por los respectivos ejes o y o', su intersección producirá el eje instantáneo de rotación (*), que dada la posicion especial de la figura, se confundirá con el eje o'. (Téngase presente que cuando los ejes hayan girado un cierto ángulo, debe variar la posición del eje instantáneo). Según esto, las velocidades v y v' de los puntos a y b deben ser proporcionales á sus distancias á dicho eje instantáneo, y lo mismo sucederá, según

(*) Véase Delaunay, párrafo 26, que trata del movimiento de una figura esférica que se mueve en su esfera, cual es el caso que se estudia.

expresa la relación (*a*), á las velocidades angulares ω y ω': por lo tanto, si se traza la normal $a'h$ al eje instantáneo o', podrá establecerse la proporción $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a'h}{cb}$; ya que cb es la misma normal trazada por b al eje instantáneo.

Esta última proporción puede reemplazarse por la $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a'h}{a'c} = \cos\alpha$, siendo α el ángulo $ha'c$ de las normales á los ejes, ó lo que es lo mismo, el ángulo $o'co''$ que forma un eje con la prolongación del otro.

Como es natural, variando durante el movimiento la posición del eje instantáneo, variará también la relación de velocidades; y para evitarnos encontrar fórmulas complicadas que indiquen esta variación, trataremos de encontrar el valor que toma la relación $\frac{\omega}{\omega'}$ cuando los ejes hayan girado 90°, y de esta manera se obtendrán dos valores límites de la relación expresada, de los que pueda colegirse cuál sea su valor medio durante la totalidad del movimiento.

66. Si la *figura* 15 representa la nueva posición después del giro de 90°, el eje o de ella será la posición que ocupe el eje instantáneo de rotación; y por lo tanto, la relación de velocidades angulares estará expresada por la fracción $\frac{a'c}{b'h}$ en que cada uno de sus términos representa la distancia al eje instantáneo o, de los respectivos puntos a' y b'. Esta relación, igual á la $\frac{b'c}{b'h}$, es igual á $\frac{1}{\cos\alpha}$; pudiendo por lo tanto decir, que en la posición de la figura, la relación $\frac{\omega}{\omega'}$ es la inversa de la que corresponde á la anterior, ó sea antes de verificarse el giro de 90°.

67. Límites del empleo de este mecanismo.—Considerando la totalidad del movimiento, puede observarse que la relación $\frac{\omega}{\omega'}$ está comprendida entre los citados límites, y por

lo tanto, las variaciones que dicha relación pueda experimentar, serán tanto menores cuanto más pequeño sea el ángulo α ó mayor el que forman los dos ejes. El mecanismo es posible mientras este ángulo sea superior á 90°; pero llegado este límite, ó lo que es lo mismo, si α es 90°, las distancias $a'h$ de la *figura* 14 y $b'h$ de la *figura* 15, serán nulas; y por lo tanto, si la velocidad angular de uno de los árboles es constante, la del otro debe variar en cada vuelta entre los límites cero é infinito, que corresponden á los valores que en este caso toman las cantidades $cos\alpha$ y $\frac{1}{cos\alpha}$. Estas condiciones son irrealizables en la práctica, y por lo tanto, el mecanismo que nos ocupa puede solamente emplearse entre los ya citados límites de 90 y 180° para el ángulo de los dos ejes.

ARTÍCULO III

Tercera especie.—Un movimiento rectilíneo y otro circular

68. Composición del mecanismo.—En esta especie, supondremos siempre que la dirección del movimiento rectilíneo está situada en un plano perpendicular al eje de rotación, único caso que en la práctica se considera.

El mecanismo (*fig.* 16) está compuesto de una *manivela* ob que gira alrededor del eje o, y de una barra aa' asegurada en su movimiento rectilíneo por las correspondientes guías, estando reunidas manivela y barra por la *biela* ab.

69. Relación de las velocidades.—La teoría de este mecanismo, conocido con el nombre de *manivela simple*, se establece de un modo análogo á la del caso anterior, teniendo presente cuanto se ha dicho relativamente al movimiento de una figura plana en su plano. La biela ab se mueve apoyándose constantemente por sus extremidades sobre la recta aa' y sobre la circunferencia o; y por lo tanto, si se considera una

posición cualquiera ab de ella, se obtendrá el centro instantáneo de rotación, por la intersección de las rectas ob y ac, normales á los caminos recorridos.

La relación de las velocidades absolutas v y v' de los puntos a y b será, según se sabe, $\frac{v}{v'} = \frac{ca}{cb}$. Pero si se traza la recta ok perpendicular á oa, la comparación de los triángulos bok y bac, proporcionará el sustituir la relación $\frac{ca}{cb}$ por su igual $\frac{ok}{ob}$.

Puede ponerse en evidencia, en la relación $\frac{v}{v'}$, el valor $v' = \omega.ob$, para deducir la relación que en este mecanismo se busca. Con esta sustitución, se obtiene $\frac{v}{\omega.ob} = \frac{ok}{ob}$, ó bien, por último, llamando ρ al valor variable ok, $\frac{v}{\omega} = \rho$, y

$$v = \omega\rho \qquad (12')$$

70. Reciprocidad con el mecanismo de contacto equivalente.—Esta expresión es idéntica á la (12) encontrada en el párrafo 53, y todavía puede obtenerse otra idéntica á la (11), considerando que la suma de las cantidades ok y kk' tomadas con los signos correspondientes, es igual á la distancia ok' que existe entre el eje de rotación y la recta fija YY' paralela al movimiento rectilíneo. Si se llama ρ' á la distancia kk', y c á la ok', esta propiedad se expresa por la ecuación

$$\rho + \rho' = c \qquad (11')$$

Existe reciprocidad, en vista de las ecuaciones (11') y (12') entre este mecanismo de biela y el de contacto correspondiente, y pudiera examinarse con detención esta analogía, para las sustituciones de uno por otro en los casos que fuera preciso. Pero será más conveniente, ya que la relación $\frac{v}{\omega}$ es una can-

tidad variable, examinar las variaciones que pueda tener, para que puedan colegirse las condiciones prácticas del establecimiento de este mecanismo.

71. Observaciones.—En los puntos n y n', es nulo el valor ok y la ecuación (12′) nos dice que en ellos es cero el valor de v; razón por la cual, se da á estos puntos el nombre de *puntos muertos*. En cambio, en los m y m', la velocidad es máxima, y toma el valor ωr, ó sea el que corresponde á la velocidad absoluta del movimiento de rotación. Estas particularidades son dignas de tenerse en cuenta, y nos serán de utilidad en todas las aplicaciones que de este mecanismo puedan hacerse. También se debe tener presente en las aplicaciones, que el movimiento rectilíneo es alternativo en este caso, siendo su amplitud igual á la magnitud $n\,n'$, ó sea al doble del radio de la manivela. Se podrá deducir, por lo tanto, el valor de dicho radio, conocida que sea la amplitud del movimiento; y en esta forma se presenta también el problema, que relativamente á este mecanismo puede resolverse.

CAPÍTULO III

Tercer grupo.—Empleo de órganos flexibles.

72. Carácter distintivo.—Notable diferencia presentan los materiales que constituyen los mecanismos de este grupo, con los órganos rígidos que hasta aquí se han considerado exclusivamente. Los esfuerzos que tiendan á disminuir su longitud no encuentran en ellos resistencia alguna, y por el contrario, resisten perfectamente á cualquier esfuerzo que tienda á alargarlos, y afectan formas determinadas y variables, según las circunstancias.

En el estudio cinemático consideraremos estos materiales como inextensibles, y se tendrá presente que cuando una de las extremidades de un órgano de esta naturaleza (correas, cuerdas, etc.) está fija, y la otra extendida, afectará la forma rectilínea; pero cuando se adapte la pieza flexible sobre otra pieza rígida convexa, aquella afectará la forma de esta. Téngase en cuenta, que aun cuando en realidad sólo debieran considerarse en este grupo los materiales antes enumerados,

podrán suponerse también incluidas las cadenas, cuyos eslabones, si bien son rígidos, forman un conjunto que se adapta sobre las piezas convexas, y pueden entrar en la categoría de los flexibles.

73. Modo de obrar los órganos flexibles, y naturaleza de los movimientos que pueden obtenerse.—En todos los casos, las correas, cadenas, cuerdas y cables, que son los órganos flexibles que entran en la composición de los mecanismos, se emplean arrollándolos sobre tambores ó poleas, cuyo movimiento está prescrito de antemano por las correspondientes guías. El órgano flexible rueda sin resbalar sobre la superficie cilíndrica exterior del tambor ó polea, y si se supone que dicho órgano sea á la par inextensible, la velocidad de todos los puntos de su eje de simetría será la misma. Puede considerarse que existe una circunferencia que llamaremos *circunferencia primitiva*, cuyos puntos están animados todos de la misma velocidad que la correspondiente al eje de la correa. Esta circunferencia primitiva será la que tomaremos en consideración al estudiar los mecanismos comprendidos en este grupo; consideración puramente ideal que sustituirá á la circunferencia real que limita exteriormente el tambor ó polea.

Si bien la forma de las poleas ó tambores que se emplean en unión con los órganos flexibles son cilindros de revolución, cuyo movimiento es de rotación alrededor de su eje de figura, no hay duda que con el auxilio de aquel órgano podrían obtenerse también movimientos rectilíneos, ya que pueden afectar cualquier forma que trate de dárseles.

74. División.—El estudio de este grupo lo dividiremos, por lo tanto, del mismo modo que los anteriores, según se considere que los dos movimientos sean rectilíneos, que ambos sean circulares ó que uno sea rectilíneo y otro de rotación, y examinaremos por separado cada una de las especies que acabamos de indicar.

ARTÍCULO PRIMERO

PRIMERA ESPECIE.—DOS MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

75. Naturaleza del mecanismo.—Se hallan comprendidas en esta especie las poleas *(fig. 17)*, que son unos tambores cilíndricos, con sus correspondientes guías para el movimiento de rotación y provistos de una garganta en su superficie lateral, por donde pasa la cuerda. Con ellas se trasforma el movimiento rectilíneo del ramal *a b*, en otro rectilíneo de dirección *d e*. La porción *b c d* de la cuerda se adapta sobre la garganta de la polea, y la adherencia que entre una y otra se manifiesta, es causa de que esta última tome un movimiento de rotación, y sirva, por decirlo así, de vehículo que trasporta las diferentes porciones de la cuerda que sucesivamente van presentándose para arrollarse en *b* y desarrollarse en *d*.

76. Estudio del movimiento.—En la polea fija, que así se llama el mecanismo en cuestión, la velocidad de los diversos puntos del ramal *a b* es la misma que la correspondiente á los del ramal *d e*. Se proporciona, por lo tanto, el efecto de cambiar la dirección del movimiento, sin pérdida alguna en la velocidad. La relación entre las velocidades de ambos movimientos es igual á la unidad, y esta idea nos proporciona ya la completa resolución de los problemas que hemos presentado en el estudio general de los mecanismos.

ARTÍCULO II

SEGUNDA ESPECIE.—DOS MOVIMIENTOS CIRCULARES

77. Condición del movimiento.—En esta especie de mecanismos sólo habremos de considerar el caso en que los ejes sean paralelos, porque á él se reducen todos los demás,

según podrá verse cuando se estudien las aplicaciones de estas teorías. Tampoco nos detendremos en consideraciones que fijen la forma que habrán de afectar los órganos rígidos, porque en el estudio del primer grupo hemos visto, y puede considerarse extensivo á este caso, que cuando el movimiento es de rotación, debe darse á las piezas la forma cilíndrica de revolución alrededor de los ejes que han de serlo en el movimiento.

78. Sean, según esto, o y o' los dos ejes de rotación; c y c' los cilindros montados en estos ejes *(fig. 18)*, cuyas velocidades angulares ω y ω' están marcadas por las flechas correspondientes. Sobre las superficies exteriores de estos cilindros se tiende una correa $a\,b\,c'\,b'\,a'\,c\,a$, que siendo flexible, se adapta con perfección sobre los trozos de superficie cilíndrica $a\,c\,a'$ y $b\,c'\,b'$; esta correa debe estar suficientemente tendida para que no pueda resbalar sobre la superficie de los tambores ó poleas.

Constituído de este modo el mecanismo, y dada la condición de tensión en que la correa se encuentra, será fácil encontrar la relación de velocidades, al considerar que no puede existir alargamiento alguno en el órgano flexible. Con efecto; si se imprime un movimiento al tambor o, de modo que el punto a pase á ocupar la posición infinitamente próxima α, el movimiento elemental que por efecto de este corresponderá al punto b' estará expresado por la magnitud $b'\,\beta$; y por efecto de la inextensibilidad de la correa, estos dos caminos recorridos deben ser iguales. Se deduce la igualdad de las velocidades absolutas de los puntos a y b; y por lo tanto, de igual modo que en el párrafo 21, la expresión $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}$, ya que los valores respectivos de cada una de las referidas velocidades absolutas, son $\omega\,r$ y $\omega'\,r'$.

79. **Tensión de la correa.**—Esta relación, idéntica á la (3), nos servirá para la resolución de los problemas referentes á este mecanismo llamado de *correa sin fin*, siempre que se procure para la correa una tensión conveniente, con objeto

de que cumpla la condición indicada como base, ó sea que no exista resbalamiento alguno de la correa sobre la polea. En cuanto á los medios de conseguir dicha tensión, habremos de tratarlos más adelante al enumerar los diversos mecanismos de uso más frecuente en la práctica. Por ahora podrá observarse, que si la correa estuviese colocada en sentido de las tangentes interiores á los círculos primitivos de los tambores ó poleas, las velocidades de estas serían de sentido contrario, lo que debe tenerse presente al establecer una trasmisión de este género.

80. Cálculo de la longitud de la correa.— Complemento indispensable al estudio de este mecanismo, habrá de ser el cálculo de la longitud que debe tener la correa para que resulten rectilíneos los dos trozos libres ab y $a'b'$. Fácilmente se deduce esta longitud, observando que se compone de los dos indicados trozos rectilíneos, y de las porciones de circunferencia aca' y $bc'b'$. La porción ab ó su igual $a'b'$, se calcula por medio del triángulo rectángulo $oo'm$ que resulta de trazar la $o'm$ paralela á ab. Llamando d á la diferencia de radios y c á la distancia de centros, se tendrá

$$o'm = ab = \sqrt{c^2 - d^2}; \quad \text{y} \quad ab + a'b' = 2\sqrt{c^2 - d^2}.$$

El arco aca', tiene por longitud $\pi r + 2aa_1 = \pi r + 2\varphi r$; cual se comprueba trazando por o el diámetro perpendicular á oo', con lo que resultan iguales al φ los pequeños ángulos agudos marcados en la figura. Del mismo modo se deduce el valor lineal $bc'b' = \pi r' - 2\varphi r'$; la suma de ambos tendrá por valor

$$\pi(r + r') + 2\varphi(r - r') = \pi(r + r') + 2\varphi d.$$

La longitud total de la correa, será, según las expresiones encontradas, $L = 2\sqrt{c^2 - d^2} + \pi(r + r') + 2\varphi d$; en cuya expresión puede eliminarse el valor del ángulo φ, al deducir del

triángulo $oo'm$, $\text{sen}\,\varphi = \frac{om}{oo'} = \frac{d}{c}$. La expresión anterior toma la forma definitiva (*).

$$L = 2\sqrt{c^2 - d^2} + \pi(r + r') + 2\,d\,.\,arc\,\left(sen = \frac{d}{c}\right) \qquad (13)$$

81. Este valor se simplifica notablemente cuando los radios de las poleas difieren poco en longitud, y la distancia de centros es grande. En este caso pueden hacerse $d = o$ y $\varphi = o$ sin error sensible, y se usará la fórmula más sencilla que resulta

$$L = 2\,c + \pi(r + r') \qquad (14)$$

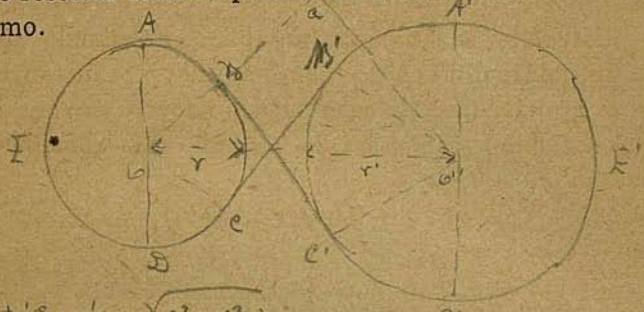
ARTICULO III

TERCERA ESPECIE.—UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO Y OTRO CIRCULAR

82. **Condición del movimiento y comparación con el mecanismo de contacto equivalente.**—Al considerar un cilindro animado de un movimiento de rotación y una cuerda ó cadena arrollada en su superficie, con uno de sus extremos libre y en disposición de adaptarse al cilindro, se realizará la trasformación enunciada, ya que el extremo libre, por su propio peso, afectará una forma rectilínea. Esta es la idea del mecanismo llamado *torno;* y en él, admitiendo, como siempre, la inextensibilidad del órgano flexible, y la imposibilidad de que la cuerda resbale por estar fijo al cilindro uno de sus extremos, puede demostrarse, de idéntico modo que en el caso anterior, la igualdad de las velocidades absolutas de ambos movimientos.

(*) Puede estudiarse, como aplicación, la forma que afectará el valor de L, en el caso que la correa esté cruzada ó en dirección de las tangentes interiores.

La ecuación relativa á este mecanismo es idéntica, según esto, á la (12) encontrada para los mecanismos de contacto y puede deducirse de su expresión $v = \omega r$, que la relación $\frac{v}{\omega}$ es una cantidad constante é igual á r, proporcionándonos el medio de resolver cuantos problemas sean relativos á este mecanismo.



$DC' = D'C = C'A = \sqrt{c^2 - y^2}$

$AED = \pi r$

$A'E'D' = \pi r'$

$AD = DC = \varphi r$

$A'D' = D'C' = \varphi r'$

$L = 2\sqrt{c^2 - y^2} + \pi r + \pi r' + 2\varphi r + 2\varphi r' =$

$= 2\sqrt{c^2 - y^2} + \pi(r + r') + 2\varphi(r + r') =$

$= 2\sqrt{c^2 - y^2} + \pi\delta + 2\varphi\delta$

Faltan del pag. 83 al 88
que no se dan

ESTUDIO II

TEORÍA

DINÁMICA DE LOS MECANISMOS

CUADRO DEL ESTUDIO 2.º

PRELIMINARES..... Fundamento de la teoría.

EFECTO ÚTIL DE LOS MECANISMOS..... { Ecuación general. / Rendimiento.

RESISTENCIAS PASIVAS.. { Rozamiento de 1.ª especie.. { Son planas las superficies en contacto. / Son curvas las superficies en contacto. / Rozamiento de 2.ª especie. / Rigidez de cuerdas, correas y cables metálicos. / Choques y vibraciones. / Resistencia del medio en que se mueven las máquinas.

PRELIMINARES

83. Clasificación de los esfuerzos.—Al considerar los esfuerzos á que están sometidos los mecanismos, de los cuales se ha hecho abstracción en la teoría cinemática, tendrá el estudio de ellos distinto aspecto, y la diferencia estribará principalmente en la ya establecida para el estudio de la Mecánica racional, entre la Cinemática y Dinámica generales.

Este nuevo aspecto induce en primer lugar á verificar una separación entre las distintas clases de esfuerzos que obran sobre los mecanismos, los que pueden dividirse en dos clases principales: *fuerzas motrices ó potencias y fuerzas resistentes* ó simplemente *resistencias*. Son motrices aquellas que obrando directamente sobre el mecanismo, producen su movimiento, ó tienden á favorecerlo; y resistentes, todas aquellas que directa ó indirectamente se oponen al movimiento. Estas últimas pueden á su vez subdividirse en *resistencias útiles y resistencias nocivas ó pasivas*, llamándose útiles á las que nacen del efecto mismo que se busca, ó lo que es igual, las que proceden del trabajo industrial que se está verificando, y nocivas á todas las que se originan en los diversos puntos de

las máquinas cuando se hallan en movimiento, y que no contribuyen en modo alguno á la producción de la obra.

89 **84. Clasificación de los trabajos.**—Recordando que los efectos producidos por las fuerzas son medidos por los *trabajos mecánicos* de ellas, natural será hacer extensiva á estos la clasificación anteriormente hecha para dichos esfuerzos; así, los dividiremos en primer lugar en *trabajos motores* y *trabajos resistentes*. Ambos provendrán de las fuerzas del mismo nombre, y los primeros, ó motores, no serán otra cosa que la *energía* comunicada á la máquina; empleando esta palabra elegante de la mecánica moderna, y que parece mucho más apropiada en la mayoría de los casos. (*) El trabajo resistente se dividirá á su vez en *útil y nocivo*, los cuales, al considerarlos en los cálculos, deben entrar como factores negativos, por su carácter verdaderamente opuesto al del trabajo motor, que deberá tomarse como positivo.

90 **85. Fundamento de la teoría dinámica.**—Hecha esta división, necesaria para la buena inteligencia de cuanto hemos de exponer, deberá indicarse que al establecer la teoría

---

(*) Rankine define la energía diciendo que es *la capacidad para efectuar trabajo*. Es la definición más breve y precisa que puede darse. Nosotros partiremos de ella, empleando para sus diversas acepciones, la misma nomenclatura prescrita en la magistral obra del referido autor. Así, diremos que la energía de un esfuerzo cualquiera ó *energía potencial*, es el trabajo que dicho esfuerzo *es capaz de desarrollar*, ó en otros términos, la energía potencial de un esfuerzo está medida por el producto de dicho esfuerzo por la distancia que su punto de aplicación *es capaz de recorrer*.

El nombre de *energía actual*, correspondiente á un cuerpo en movimiento, se refiere al producto de la masa de este cuerpo por la mitad del cuadrado de su velocidad, ó lo que es lo mismo, á la mitad de la mal llamada fuerza viva del cuerpo. Equivalente la fuerza viva, según sabemos, al valor de un trabajo, la medida de la energía en todos los casos vendrá expresada del mismo modo que éste, en kilográmetros.

Adoptaremos también los nombres de *energía ejercida*, *energía almacenada*, *energía restituída y energía total*, en todos los casos que tengan precisa justificación.

(Véase Rankine, párrafos 514 y siguientes.)

dinámica de los mecanismos y al examinar todo el alcance de la definición dada para estos, habrá de tenerse en cuenta que á la par que comunican y aun trasforman los movimientos, consumen la energía de que disponen, ó el trabajo motor por otro nombre, para vencer una determinada resistencia, ó lo que es lo mismo, *la energía comunicada á la máquina debe trasformarse en trabajo resistente*, ya que ha de tenerse también en cuenta el camino recorrido por el punto de aplicación de las resistencias.

Esta consideración nos permite comprender que la mayor bondad de un mecanismo, dado el que cumpla con las condiciones cinemáticas ya estudiadas, será relativa al máximo del trabajo producido, ó en otros términos, á la máxima cantidad de energía que se utiliza en la obra que se desee producir.

En tal concepto, y dado el que las máquinas pueden considerarse como sistemas materiales en movimiento, la principal cuestión dinámica que debe resolverse en todo mecanismo, podrá ser planteada por medio del teorema de fuerzas vivas, que no es otra cosa que un caso particular del principio general que rige al universo, conocido con el nombre de *conservación de la energía*.

CAPÍTULO PRIMERO

Efecto útil de los mecanismos

ARTÍCULO PRIMERO

Ecuación general

91 86. **Aplicación del teorema de fuerzas vivas.**—Sin recordar por ahora el mencionado principio general de conservación de la energía, del que tantas manifestaciones se presentan en la naturaleza, enunciemos de nuevo el teorema de fuerzas vivas, aplicándolo á los mecanismos, para estudiar las diversas fases de su movimiento.

Durante un intervalo cualquiera de tiempo, puede establecerse la relación siguiente entre trabajos y fuerzas vivas (*):

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma T.$$

Esta ecuación nos expresa que la suma de las variaciones de energía actual ó fuerza viva de todos los elementos del

(*) Delaunay, párrafo 230.

mecanismo, durante un intervalo cualquiera de tiempo, es igual á la suma de trabajos de todas las fuerzas, tanto interiores como exteriores, que obran sobre él durante el mismo tiempo.

92. Es natural poner en evidencia en la ecuación anterior, las distintas clases de trabajos que obran sobre el mecanismo, que vienen expresados en conjunto por el segundo miembro ΣT, y al hacerlo así emplearemos la nomenclatura siguiente:

T_m designará el trabajo motor ó energía potencial de la máquina, incluyendo en él, según se ha dicho, todo cuanto tienda á favorecer el movimiento. Lo consideramos de signo positivo.

T_r expresará el trabajo resistente, sea cualquiera la naturaleza de las resistencias que á él den lugar. Como es natural, y según ya hemos indicado, deberá tomarse con signo negativo.

Según esta nomenclatura, el segundo miembro de la ecuación anterior tomará la forma

$$\Sigma T = T_m - T_r.$$

Si llevamos todavía más adelante la división, y consideramos las dos especies de trabajos resistentes, el término T_r se comprondrá á su vez de los siguientes:

T_u trabajo útil, ó que proviene de las resistencias útiles.

T_f trabajo nocivo, originado por las resistencias pasivas que obran sobre el mecanismo, sea cualquiera su naturaleza.

El valor de T_r podrá escribirse bajo la forma

$$T_r = T_u + T_f.$$

La ecuación general ya mencionada, podrá escribirse del modo siguiente:

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = T_m - T_u - T_f \quad (1).$$

Y así expresada la ecuación de fuerzas vivas, nos servirá de base para el estudio dinámico de los mecanismos que vamos á emprender (*). Pero téngase en cuenta, que en muchos casos no puede evitarse que intervengan, durante la marcha de la máquina, ciertas fuerzas exteriores que no producen trabajo ó efecto útil alguno; antes al contrario, sirven para aumentar el número de las resistencias nocivas, y como es consiguiente, el término T_f. Tales son, los contrapesos y otras piezas que tienen movimientos tanto en un sentido como en otro, y cuyo trabajo, unas veces positivo y otras negativo, se anula en todos los momentos en que las piezas recuperan la posición inicial ó de partida. Convendremos siempre en considerar incluídos dichos trabajos en los términos T_m ó T_f respectivamente, según que favorezcan ó se opongan al movimiento; ó lo que es lo mismo, según que sean positivos ó negativos.

93 88. **Ecuaciones correspondientes á los períodos en que se divide la marcha total de un mecanismo.**—Para hacer el estudio de la totalidad del movimiento de un mecanismo, considérese á este desde el momento en que dicho movimiento se inicia, hasta que, ejecutada la obra que se desea, cese

(*) Hay perfecto acuerdo entre la expresion (1) que nos va á servir de punto de partida para el estudio, y la moderna nomenclatura que empleamos al poner en evidencia las diversas clases de energía. Véase si no, el enunciado del principio de conservación de la energía que presenta Rankine en el párrafo 552. Dice así: *En un intervalo cualquiera de tiempo durante el movimiento de un cuerpo, la energía potencial ejercida, añadida á la energía restituída, es igual á la suma de la energía almacenada y del trabajo efectuado.* Este mismo enunciado se deduce directamente de la ecuación (1) que citamos en el texto, ó de su equivalente

$$\Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = T_m - T_r$$

bastando para ello ponerla bajo la forma

$$T_m + \Sigma \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma \frac{1}{2} m v_1^2 + T_r$$

de cuya expresión, los diversos términos tienen respectivamente la significación que marca el mencionado principio de conservación de la energía.

aquel por completo. Podrá dividirse la marcha total en tres períodos, que consideraremos sucesivamente.

Primer período.—La máquina está en reposo. Empieza á obrar sobre ella la potencia que ha de producir su movimiento. Este no puede iniciarse hasta que aquella haya ejercido un esfuerzo capaz de vencer cuantas resistencias se oponen. Una vez iniciado, la velocidad de la máquina irá en aumento progresivo hasta que haya alcanzado el valor que corresponda á la marcha ordinaria de la máquina, ó al *régimen* de esta, como suele decirse. Este valor de la velocidad, que debe ser constante en las máquinas perfectas, toma el nombre de *velocidad de régimen*.

La ecuación representativa de este primer período, se deducirá de la ecuación general (1), considerando que los límites de velocidad entre los cuales actúa el mecanismo, son $v_0 = o$, y $v_1 = v$, llamando v á la velocidad de régimen. Dicha ecuación toma la forma

$$\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = T_m - T_u - T_f;$$

ó la equivalente

$$T_m = (T_u + T_f) + \Sigma \frac{1}{2} m v^2 \quad (2).$$

Bajo esta forma, observamos que el trabajo motor ó energía potencial que ha consumido la máquina hasta alcanzar la velocidad de régimen, se ha trasformado, descomponiéndose en dos partes. Una, el término $T_u + T_f$, trabajo resistente producido por el mecanismo. La otra es el término $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$; fuerza viva adquirida, que conserva la máquina, sin exteriorizarse, sin manifestarse bajo la forma de trabajo; pero que es susceptible de trasformarse en éste cuando la máquina se encuentre en condiciones para ello. En otros términos: la expresión $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ no es otra cosa que una energía que la

máquina guarda, almacena, digámoslo así, para gastarla en otro período; energía que está bajo la forma conocida con el nombre de energía actual, por ser debida á la velocidad de la máquina. Dado el objeto que debe cumplir, la daremos el nombre de *energía almacenada*.

Podremos resumir lo referente al primer período, diciendo que el *trabajo motor ó energía potencial comunicada hasta el momento en que la máquina adquiere la velocidad de régimen, se ha gastado en producir un trabajo resistente y una fuerza viva ó energía almacenada, que queda en depósito para emplearla en los períodos siguientes* (*).

94 89. *Segundo período.*—La máquina ha adquirido la velocidad de régimen, y su movimiento, si es perfecta, es un movimiento uniforme. Estas condiciones no suelen realizarse en la práctica, por la imposibilidad absoluta de obtener una velocidad que sea constante durante un gran espacio de tiempo. En las máquinas reales, la velocidad varía en cada instante; pero las variaciones de ella son de tal naturaleza, que oscila de ordinario entre determinados límites, volviendo á tomar repetidas veces la velocidad de partida. El movimiento es periódicamente uniforme; pero puede estudiarse la totalidad de él, del mismo modo que en el caso de uniformidad absoluta, ya que los límites extremos son siempre iguales, é iguales á la velocidad que hemos llamado de régimen.

La ecuación representativa de este período, se deducirá al observar que los límites de velocidad entre los cuales funciona, son ambos iguales á la velocidad de régimen v. El primer miembro de la ecuación general (1), se reduce á cero, y aquella toma la forma

$$T_m - T_u - T_f = o,$$

ó la equivalente

$$T_m = T_u + T_f \quad (3).$$

(*) Obsérvese la concordancia de esta deducción, con el principio general enunciado en la nota del párrafo 87.

No hay pérdida real ni aparente en este período. Todo el trabajo motor ó la energía potencial comunicada se convierte en trabajo resistente, sin desaparecer parte alguna, como sucedía en el primer período, bajo la forma de fuerza viva ó energía almacenada.

Todavía podríamos llevar más allá el estudio del segundo período, subdividiéndole, cuando el movimiento sea periódicamente uniforme, en otros varios que correspondan á los intervalos de tiempo entre los cuales la velocidad pase por los mismos valores, y deduciríamos la misma consecuencia de todos ellos, y por consiguiente, en la totalidad del período considerado.

Podemos, en todos los casos, y según lo dicho, caracterizar el segundo período ó período de régimen, diciendo que *la totalidad del trabajo motor ó energía potencial se ha trasformado en trabajo resistente.*

95 90. *Tercer período.*—La velocidad de la máquina empieza á disminuir, y no cesa esta disminución hasta que se para por completo. Los límites de la velocidad son, según esto, $v_0=v$ y $v_1=o$. La ecuación (1) toma la forma

$$-\Sigma \frac{1}{2} m v^2 = T_m - T_u - T_f;$$

ó la análoga

$$T_u + T_f = T_m + \Sigma \frac{1}{2} m v^2 \quad (4)$$

El trabajo resistente supera al motor en una cantidad igual á $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$. Si extraño pudo parecer en el primer período que hubiera una pérdida, aparente al menos, de energía, extraño parecerá también que en este período se haya creado una cierta cantidad de trabajo resistente, que no proviene de la energía potencial comunicada. Pero si se recuerda que en aquel período la máquina guardó una cierta cantidad de energía que quedó almacenada bajo la forma de fuer-

za viva; si se recuerda también que su valor era el mismo $\Sigma \frac{1}{2} m v^2$ que ahora aparece, se vendrá á deducir que la energía almacenada en el primer período, se restituye ó exterioriza en el tercero, y aparece en él bajo la forma de trabajo efectuado. A esta cantidad de energía se la da el nombre de *energía restituída.*

Caracterizamos, por fin, el tercer período de marcha de un mecanismo, diciendo que *el trabajo motor ó energía potencial comunicada, más la energía restituída, han producido el trabajo resistente,* no debiendo olvidarse la condición de igualdad entre la energía almacenada en el primer período y la restituída en el tercero.

96. Ecuación de los mecanismos en régimen.—Resumiendo cuanto se ha indicado relativamente á la totalidad de la marcha del mecanismo, se deduce que en el conjunto de los tres períodos no ha habido pérdida alguna de energía ó trabajo motor, ya que la pérdida aparente del primer período se evidencia ó exterioriza en el tercero, y esta conclusión se deduce también directamente de la ecuación (1) al observar que son cero los límites extremos de la totalidad de la marcha. Con esta observación, la ecuación toma una forma idéntica á la del segundo periodo,

$$T_m = T_u + T_f \quad (3),$$

ecuación que puede llamarse de las máquinas en régimen, y que nos servirá para deducir las condiciones del movimiento de los mecanismos, considerados como debe hacerse en dicho estado, ya que en uno de nuestros estudios habremos de ver los procedimientos que se siguen para asegurar un régimen perfecto, ó lo que es lo mismo, para hacer que la velocidad de los diferentes órganos de un mecanismo sea constante ó sensiblemente constante.

97. Condiciones de máximo efecto útil.—Si el objeto industrial de las máquinas es producir un efecto determina-

do; si la expresión mecánica de este efecto aparece en las ecuaciones en el término T_u que hemos llamado trabajo ó efecto útil, es natural que el objeto principal, en un mecanismo cualquiera, debe ser la obtención del máximo valor que puede tener T_u, ó el máximo efecto útil. Este valor, representado por $T_u = T_m - T_f$, cual se deduce de la ecuación (3) que nos sirve de punto de partida para el estudio, nunca podrá ser mayor ni aun igual al término T_m, por la absoluta imposibilidad de suprimir las resistencias nocivas, cuyo trabajo representa el término T_f.

El ideal, el estado de perfección absoluta de un mecanismo, la *máquina teórica* que pudiéramos llamar, sería aquella en la que no existiera ninguna resistencia pasiva. El valor máximo de T_u, valor que nunca podrá alcanzar, es por lo tanto el término T_m, y la ecuación de las *máquinas teóricas* ó ideales es

$$T_u = T_m \quad (5)$$

de la cual habremos de presentar más adelante algunas aplicaciones, porque el estudio de este caso más sencillo, bastará muchas veces para formarse idea, siquiera sea ligera, de la naturaleza de un mecanismo. (*)

Si en la anterior ecuación se ponen en evidencia los esfuerzos y caminos recorridos, si se llama P á la potencia y p el camino recorrido en su dirección, Q á la resistencia y q el camino recorrido sobre la dirección de esta, dicha ecuación aparecerá bajo la forma

$$P\,p = Q\,q,$$

de la que se deduce

$$\frac{P}{Q} = \frac{q}{p} \quad (6)$$

(*) Este estado de perfección absoluta es el que persiguen los ilusos que tratan de encontrar el mal llamado *movimiento continuo*, problema de condiciones irrealizables, que trata de encontrar una máquina que, puesta en acción por un motor cualquiera, persista indefinidamente en su movimiento sin la acción de aquel, y aun más, que proporcione trabajo motor ó energía disponible para utilizarla en otros usos.

Esta proporción nos dice, que en las *máquinas teóricas ó ideales, los esfuerzos son inversamente proporcionales á los caminos recorridos por su punto de aplicación.*

Tal proporcionalidad es expresada vulgarmente por el conocido adagio que dice *lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad:* el cual, lo mismo que la proporción (6), deja de ser exacto para las máquinas reales, en que las resistencias nocivas no se pueden suprimir en modo alguno.

La imposibilidad que indicamos de eliminar por completo las resistencias nocivas, induce á estudiar el medio de disminuirlas cuanto sea posible, para hacer que las máquinas se acerquen más y más al estado teórico ó de absoluta perfección. Este estudio no podrá hacerse sin el que sea referente á la naturaleza de dichas resistencias, razón por la cual, para completar la teoría dinámica de las máquinas, será indispensable hacer un detenido estudio de las resistencias nocivas que, necesitando capítulo separado, emprenderemos inmediatamente después de las consideraciones sobre el rendimiento de los mecanismos que vamos á exponer.

ARTÍCULO II

Rendimiento de los mecanismos

Definición.—Se llama *rendimiento* á la relación $\frac{T_u}{T_m}$ del trabajo útil al trabajo motor. Es, en otros términos, un número abstracto, que nos expresa la mayor ó menor bondad del mecanismo, al indicar la fracción del trabajo motor ó energía consumida por la máquina, que es utilizada en esta para el objeto industrial á que se destina.

Expresiones generales del rendimiento.—El rendimiento, como es natural, debe en las máquinas ser el mayor posible, porque de este modo el trabajo útil se acercará más á valer el trabajo motor; pero nunca su valor puede ex-

ceder de la unidad, como se deduce de la ecuación (3), en la que despejando T_u y verificando la división por T_m, se obtiene

$$\frac{T_u}{T_m} = 1 - \frac{T_f}{T_m}.$$

Como el término T_f no puede anularse, según se ha indicado, tampoco el primer miembro de esta ecuación podrá valer la unidad, si bien este será un límite del rendimiento al cual nunca podrá llegar, y cuyo valor sólo alcanzará en las máquinas teóricas, para las cuales se verifica $T_f = o$. Se deduce, que *en las máquinas teóricas el rendimiento es igual á la unidad.*

Pero en las máquinas reales será indispensable, siempre que se trate de apreciar su bondad, encontrar el valor del *rendimiento ó coeficiente de efecto útil*, que también así se llama, por la expresión

$$R.^0 = \frac{T_u}{T_m} \quad (7).$$

deducida de la misma definición que de este coeficiente hemos dado.

100. Para la más fácil investigación del valor numérico del rendimiento, cuando se trate de mecanismos determinados, procuraremos hallar otras expresiones que sean generales á todos ellos, y de las que pueda hacerse más directa aplicación.

Con este objeto, pónganse en evidencia en la expresión anterior, los esfuerzos y caminos recorridos por sus puntos de aplicación, con lo cual tomará la forma

$$R.^0 = \frac{Q \cdot q}{P \cdot p};$$

pero si se supone por un momento que desaparecen las resistencias nocivas, quedando la máquina en disposición de efec-

tuar el mismo trabajo útil, $T_u = Q \cdot q$, la fuerza P podrá ser reemplazada por una *potencia teórica* P_0 que por vencer menor resistencia, deberá ser más pequeña que aquella, en la hipótesis de que está aplicada al mismo punto, tenga la misma dirección y recorra el mismo camino que la *fuerza efectiva* P.

La máquina teórica correspondiente á la real que se obtiene de este modo, gozará de la propiedad indicada en la ecuación (6) y aplicándola el principio de proporcionalidad que dicha ecuación establece, se obtiene inmediatamente

$$\frac{P_0}{Q} = \frac{q}{p} \qquad (8)$$

Esta proporción nos da el medio de modificar la fórmula anterior del rendimiento, por la sustitución de la relación $\frac{P_0}{Q}$ en vez de la $\frac{q}{p}$. El rendimiento toma la forma

$$R.^o = \frac{Q}{P} \cdot \frac{q}{p} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{P_0}{Q} = \frac{P_0}{P} \qquad (9)$$

expresión que, traducida al lenguaje vulgar, proporciona la regla siguiente, que debe tenerse muy en cuenta en el estudio detallado de los mecanismos:

El rendimiento es igual á la relación que existe entre la potencia teórica y la potencia efectiva.

96. Otra expresión del rendimiento podemos todavía encontrar, haciendo con respecto á la resistencia útil Q, análogas consideraciones que las indicadas con relación á la potencia P.

Considérese, como antes, la máquina teórica correspondiente; pero quedando en disposición, no de efectuar el mismo trabajo útil, como se suponía en el caso anterior, sino de que se gaste la misma cantidad de energía ó trabajo motor, $T_m = Pp$; evidentemente podrá vencerse una *resistencia útil*

teórica, Q_0, mayor que la *resistencia útil efectiva*, Q, en la hipótesis de que esté aplicada al mismo punto, y recorra el mismo camino q.

Aplicando á esta máquina teórica el principio de proporcionalidad que encierra la ecuación (6), se obtiene

$$\frac{P}{Q_0} = \frac{q}{p} \quad (10)$$

expresión que modifica el valor del rendimiento en la siguiente forma:

$$R.^0 = \frac{Q}{P} \cdot \frac{q}{p} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{P}{Q_0} = \frac{Q}{Q_0} \quad (11)$$

y de ella puede deducirse también la siguiente regla, de aplicación análoga á la que indica la (9):

El rendimiento es igual á la relación que existe entre la resistencia útil efectiva y la resistencia útil teórica.

Téngase en cuenta que el valor numérico obtenido por la aplicación de ambas reglas es el mismo, é igual también al que proporciona la expresión (7) de la misma definición del rendimiento; por lo tanto, se hará uso indistintamente de una cualquiera de las fórmulas (7), (9) ú (11), según sea la naturaleza del problema que deba resolverse (*).

Consecuencia de los valores hallados.—Una consecuencia importante podremos deducir, que si bien no se relaciona directamente con el rendimiento de los mecanismos, será de suma utilidad para la apreciación de su bondad, según el uso á que se destinen. Esta consecuencia se deduce al comparar las proporciones (8) y (10), en las que se observa identidad entre sus segundos miembros, y que pueden, por lo tanto, traducirse al lenguaje vulgar por la siguiente regla práctica:

(*) Ocasión tendremos en el estudio de los diversos mecanismos, de ver los casos en que deberá escogerse una ú otra de las fórmulas que se presentan para expresiones del rendimiento.

La relación de espacios recorridos por los puntos de aplicación de la potencia y resistencia útil en una máquina real, es igual á la relación de la potencia teórica á la resistencia efectiva, y también á la que existe entre la potencia efectiva y resistencia teórica.

Esta regla es de suma utilidad, porque permite hallar la relación de esfuerzos en una máquina teórica, conocida que sea la que existe entre las velocidades, y recíprocamente. Nos dispensará, en muchos casos, de complicados cálculos para deducir directamente ciertos valores que sea necesario obtener, como ha de verse en las aplicaciones que se presentan en los estudios siguientes.

Otro enunciado más sencillo podemos presentar de esta regla, si se tiene en cuenta: primero, que la relación de la potencia teórica á la resistencia efectiva, es la relación de esfuerzos en una máquina teórica que trate de vencer la misma resistencia que la máquina real; y segundo, que la relación de la potencia efectiva á la resistencia teórica, es también la relación de esfuerzos de una máquina teórica que trata de emplear la misma potencia que la máquina real.

El enunciado de dicha regla queda modificado en la siguiente forma:

La relación de espacios recorridos en una máquina cualquiera, es inversa de la que existe entre los esfuerzos de la máquina teórica correspondiente á la real que se considere.



CAPÍTULO II

Resistencias pasivas

103

98. Clasificación de las resistencias pasivas.—Definidas ya estas fuerzas resistentes que obran en los mecanismos, y comprendiendo la necesidad de verificar un detenido estudio de ellas, deberá indicarse que al considerar sus distintas clases, supondremos que los mecanismos están en régimen ó que su movimiento es uniforme; teniendo en cuenta también que las potencias y resistencias obran de una manera constante, puesto que, en el caso contrario, no habrá inconveniente en reemplazar las acciones variables de estos esfuerzos, por otros que tuvieran una intensidad constante y correspondiente al valor medio de aquellos.

Hecha esta salvedad, necesaria para que los procedimientos que han de explicarse tengan todo el carácter general que sea posible, procederemos á la división de las resistencias pasivas en las distintas clases que han de estudiarse, pasando después á examinar cada una de ellas.

104

99. Las resistencias nocivas que obran en los mecanismos son las siguientes:

1.ª Rozamiento de primera especie, ó de resbalar.
2.ª Rozamiento de segunda especie, ó de rodar.
3.ª Rigidez de las cuerdas, correas y cables.
4.ª Choques y vibraciones.
5.ª Resistencia del medio en que se mueven los cuerpos.

Esta última, en general, no se toma en consideración por la poca influencia que ejerce en la marcha de los mecanismos, dados los límites de velocidad entre que ordinariamente funcionan; pero á pesar de ello, indicaremos siquiera la fórmula que puede servir para su cálculo, en el caso que este debiera alcanzar un grado de perfección extrema.

ARTÍCULO PRIMERO

Rozamiento de primera especie, ó de resbalar

105

100. Naturaleza del rozamiento—Al tratar en Mecánica racional del movimiento de los sólidos naturales (*) se ha indicado la causa que origina esta fuerza resistente. Esta causa, que procede, según entonces se indicó, de las desviaciones que las moléculas experimentan en las inmediaciones de los puntos de contacto que tengan los dos sólidos al moverse el uno sobre el otro, y de las vibraciones que á ellas son consiguientes, se traduce en una pérdida de fuerza viva, ó bien en un gasto de energía ó trabajo motor, empleado en adquirir dicho movimiento vibratorio.

La resistencia que puede sustituir á dichas acciones moleculares para producir la expresada pérdida de energía, queda notablemente aumentada por el hecho de que los cuerpos en contacto nunca pueden tener un pulimento de absoluta

(*) Delaunay, párrafo 254.

perfección, y están dotados, como es natural, de pequeñas eminencias y cavidades, que tienen quizá más importancia que el trabajo molecular á que nos hemos referido.

La resistencia total que de unas y otras causas provenga, ó el rozamiento de resbalar, que así se llama cuando de esta naturaleza es el movimiento, la estudiaremos considerando por separado los dos casos que pueden ocurrir, de que sean planas las superficies en contacto, ó que sean curvas; pero suponiendo siempre que uno de los cuerpos es fijo, ya que será bien fácil extender las explicaciones al caso en que los dos se muevan, imprimiendo al sistema total de ellos un movimiento igual y contrario al que tenga uno de los cuerpos, según enseña la teoría de movimientos relativos.

A.—Las superficies en contacto son planas.

101. Valor en función del coeficiente de rozamiento.— Supongamos un cuerpo pesado N, *(fig.* 19, *lám.* 3.ª) apoyado sobre un plano horizontal M, sobre el cual ejerce una acción igual á su peso Q. En el estado de equilibrio, se desarrollan reacciones en cada uno de los puntos de contacto, cuya resultante 2—o es igual y opuesta á la dirección del peso Q. Esta reacción tiene su punto de aplicación en el mismo punto b de intersección de la vertical Q con la superficie de apoyo.

Pero si una fuerza P, paralela al plano M, tiende á mover el cuerpo en el sentido de la flecha, nuevas reacciones se desarrollarán, dependientes á la vez de las dos, P y Q, que ahora obran sobre el cuerpo. Es natural que este no podrá ponerse en movimiento hasta el preciso momento en que la potencia P sea suficiente para contrarrestar la resistencia que á él se opone; en otros términos: hasta que la fuerza P sea igual y directamente opuesta á la fuerza resistente que hemos llamado rozamiento.

Considérese este estado límite, en que la fuerza P es la estrictamente necesaria para poner al cuerpo en movimiento, y en él podrá observarse que la reacción desarrollada 1—o

de valor R, es igual y directamente opuesta á la resultante o—1 de las dos fuerzas P y Q.

La fuerza de rozamiento, cuyo valor F está representado en magnitud y dirección por la recta 1—2, tiene por expresión $F=Q.\ tg\ \varphi$, según se deduce del triáugulo o—1—2, y bajo esta forma se introduce su valor en los cálculos de los mecanismos, ó más bien bajo la

$$F=Q.f \quad (12)$$

deducida de la anterior, al hacer $f=tg\ \varphi$.

Al ángulo φ que forma la resultante total o—1 de las fuerzas con la presión normal o—2, se le llama *ánguto de rozamiento*, y á la tangente f de este ángulo, *coeficiente de rozamiento.*

Según esta nomenclatura, puede traducirse la fórmula (12) en la siguiente regla, que nos servirá para el cálculo del rozamiento en el caso que estamos estudiando:

La fuerza de rozamiento es igual á la presión normal, multiplicada por el coeficieute de rozamiento.

102. Basta conocer, por lo tanto, los valores de estas dos cantidades, para venir en conocimiento de aquella. La presión normal será fácil deducirla por el examen de los esfuerzos que obren sobre el mecanismo, y tendrá en cada caso especial un valor determinado, dependiente de aquellos. En cuanto al coeficiente de rozamiento, será indispensable recurrir á los datos que la experiencia proporciona, los cuales se hallan resumidos en la *tabla número* 1; para cuya mejor inteligencia, deberá tenerse presente la naturaleza de los cuerpos en contacto, ya que, sabida la causa del rozamiento, es natural que varíe con ella. También habrá de considerarse la diferencia que existe entre *el caso en que se inicia el movimiento, y aquel en que, ya iniciado, continuan los cuerpos moviéndose, puesto que el valor de* f *es menor en este último.* Estas observaciones se hallan en evidencia en la tabla á que nos hemos referido, al repasar sus diversas columnas; y si pudie-

ra chocar que en ella no aparece la velocidad que tenga el cuerpo móvil, es porque la experiencia demuestra que *las velocidades con que ordinariamente suelen marchar las máquinas, no tienen influencia en el valor del rozamiento,* (*) pero entiéndase que al rebasar dicho límite, variará el rozamiento con el valor de la velocidad. *Tampoco tiene influencia alguna la extensión que puedan tener las superficies en contacto,* ya que al aumentar esta, queda el aumento compensado por repartirse la presión en mayor número de puntos.

103. Valor en función del coeficiente modificado.—Es conveniente, para las aplicaciones que deben hacerse, que indiquemos otra expresión formular del rozamiento, para que se pueda escoger en cada caso particular, aquella que sea más útil ó de más fácil aplicación. Se deduce muy fácilmente por la simple inspección de la figura, al poner el cateto 1—2 en función de la hipotenusa 1—0. Resulta evidentemente

$$F = R \operatorname{sen} \varphi$$

ó bien poniendo el seno en función de la tangente

$$F = R \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\,\varphi}} = R \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} = R.f_1 \quad (13)$$

(*) Todas las consecuencias que hemos apuntado, incluso el valor que proporciona la fórmula (12), se hallan expresadas en otros autores, mediante la enumeración de ciertas leyes deducidas de la experiencia, que son las siguientes:

1.ª El rozamiento es proporcional á la presión normal.

2.ª Es independiente de la extensión de las superficies puestas en contacto.

3.ª Una vez establecido el movimiento, el rozamiento es independiente de la velocidad.

4.ª El rozamiento de partida es mayor que el desarrollado durante el movimiento.

Pero hemos creído más conveniente englobarlas formando un cuerpo de doctrina, necesario para la mejor inteligencia en una obra de texto, en la que

Al coeficiente f_1 que resulta de multiplicar el coeficiente de rozamiento f por la fracción $\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}$ le llamaremos, para abreviar el lenguaje, *coeficiente modificado*, y así podremos dar otra regla como traducción de la fórmula (13):

El valor del rozamiento es igual á la resultante de las fuerzas, multiplicada por el coeficiente modificado (*).

Las dos reglas que hemos mencionado se utilizan para los cálculos analíticos de los mecanismos, en los cuales, como generalmente se hace uso de la ecuación de trabajos, debe introducirse el correspondiente al rozamiento, que se obtendrá multiplicando el valor de esta fuerza por el camino recorrido, ya que la dirección de ella es la misma del movimiento.

104. Regla para los cálculos gráficos.—Todavía hemos de deducir otra consecuencia que nos será útil, especialmente para el cálculo gráfico de los mecanismos.

A este efecto, observaremos que es propiedad inherente á las superficies materiales que están en contacto, el reaccionar una sobre otra, de tal suerte, que si en la figura 19 conside-

---

no creemos debe tratarse de la marcha seguida por los experimentadores, para sentar los principios fundamentales del estudio de los mecanismos.

Recomendamos al lector otros tratados especiales, que describen los aparatos empleados en las experiencias.

(Vease *Mecánica del General Morin*, párrafos 223 á 227.)

(*) Empleamos esta nomenclatura y adoptamos el uso de esta regla, no usada por los demás autores, para evitar grandes desarrollos de cálculo y rodeos enojosos que distraen la imaginación del principal objetivo. Además, podrá observarse en los estudios subsiguientes, que las fórmulas resultantes son de una aplicación notablemente más sencilla, y que proporcionan idénticos resultados en todos los casos.

Al habérsenos ocurrido su empleo, y al observar en los diversos cursos que hemos explicado, la facilidad y simplificación notable que proporciona á los alumnos, hemos creído conveniente adicionar la *tabla número* 1, agregando á los diversos datos que todos los autores citan, la columna que se refiere al coeficiente modificado. Estos valores los hemos calculado con una aproximación de *una centésima*, suficiente en nuestro concepto para los cálculos.

ramos el estado de equilibrio, podrán ser sustituídos en los cálculos gráficos los cuerpos M y N, respectivamente, por las acciones normales 2—0 y 0—2 que cada uno ejerce sobre el otro.

Si una fuerza P tiende á mover el cuerpo N, la resultante de P y Q desviará de la normal un cierto ángulo que aumentará á medida que lo haga el esfuerzo P. Pero según se ha indicado, el movimiento no empieza hasta que esta desviación sea igual al ángulo de rozamiento. En este caso, las acciones que uno sobre otro ejercen los cuerpos M y N, están representadas en magnitud por la resultante R de P y Q, y sus direcciones son respectivamente las indicadas por 1—0 y 0—1.

Teniendo presente que consideramos siempre á la fuerza P con el valor *estrictamente necesario* para mover el cuerpo N, podrán traducirse las consideraciones anteriores en la regla siguiente:

El rozamiento de dos cuerpos cuyas superficies de contacto son planas, se toma en consideración reemplazando cada una de estas superficies por una reacción inclinada sobre la normal, un ángulo igual al de rozamiento.

Debe complementarse esta regla, indicando cuál ha de ser el sentido que á dicha reacción corresponde; y esta nueva idea la deduciremos de las consideraciones hechas en el párrafo 95, según el cual, en todos los mecanismos debe ser la potencia teórica menor que la efectiva. Es, por lo tanto, el rozamiento una fuerza que *desfavorece la potencia de las máquinas*, ó en otros términos, que obliga á emplear en ellas una fuerza mayor que la indispensable en los casos teóricos.

La segunda parte de la regla podemos ya enunciarla, diciendo que *el sentido de la reacción debe ser tal, que desfavorezca la potencia del mecanismo.*

Pudiéramos enunciar otra relativa á las resistencias, pero nos evitamos hacerlo por no aumentar el número de las reglas que han de servir de base; bastando recordar para los casos de aplicación, que la resistencia teórica es siempre mayor que la efectiva, como se ha indicado en el párrafo 96.

105 Para las aplicaciones de esta regla, tan útil al determinar el rendimiento de los mecanismos, se deberá tener presente la necesidad de fijar con exactitud el punto de aplicación de la reacción R. En el ejemplo escogido, como el más sencillo para exponer la teoría, ninguna dificultad puede presentarse; pero en los casos en que aparezca indeterminación relativa al expresado punto, puede escogerse el centro de la superficie de contacto, cuya elección responde con exactitud suficiente al estado real de los cuerpos, y garantiza mejor la seguridad que debe tenerse en los cálculos á que se refiera.

B. —Las superficies en contacto son curvas.

106. Valores del rozamiento de muñones.—Como la aplicación casi exclusiva que en las máquinas se hace de este caso, es relativa al rozamiento de los muñones en sus cojinetes, ó sea, definiendo estos órganos á que todavía no nos hemos referido, de las extremidades de los árboles horizontales de rotación en las superficies que les sirven de apoyo, tomaremos en consideración este tipo de órganos, para el estudio que vamos á emprender.

Supóngase un muñón cilíndrico *A A (fig. 20)*, que reposa sobre su coginete *B B*. En el estado de equilibrio, el muñón ejerce sobre el cojinete una acción $Q = n\,n'$, dependiente á la vez del peso que el árbol horizontal tenga, y del que corresponda á los órganos que sobre él están montados. Dicha acción es normal á la vez al eje geométrico proyectado en o', y á las superficies de apoyo en n. En dicho estado de equilibrio, el cojinete devuelve al muñón una reaccion de valor absoluto igual á Q, de dirección $n'\,n$, y aplicada en el punto n.

Si se aplica una fuerza excéntrica P, que sea la extrictamente necesaria para producir el movimiento del muñón, comunicándole una rotación en sentido de la flecha, deberán, como es consiguiente, componerse ambas fuerzas P y Q

como se ve en el paralelógramo 0—3—1—2, para obtener la resultante total 0—1, y como consecuencia, la reacción 1—0 del cojinete sobre el muñón.

Está el muñón, por lo tanto, solicitado, además de las fuerzas P y Q, por la reacción R de valor y sentido 1—0, y aplicada en el punto m, al que puede trasladarse. En este punto se debe considerar, por lo tanto, desarrollada la fuerza de rozamiento F, cuyo valor dependerá de las reglas dadas para las superficies planas, ya que puede considerarse el movimiento de los elementos que se encuentran en contacto.

Resulta de las reglas enunciadas en los párrafos 101 y 103, que la componente tangencial de la resultante total es el valor del rozamiento, y por consiguiente, se podrá obtener la magnitud de éste mediante la construcción del triángulo m—4—5. Dicho triángulo proporciona el valor $F = N\,tg\,\varphi$, que comparado con la expresión relativa á aquel caso, nos expresa la identidad entre el ángulo φ de la *figura* 20, y el ángulo á que hemos dado el nombre de *ángulo de rozamiento*. El valor formular de F en este caso, es $F = f.\,N$, idéntico, según todo lo dicho, al que proporciona la primera de las reglas citadas, pudiendo obtenerse también la misma fórmula (13), expresión de la segunda, que en unión de la primera son aplicables al caso que estamos estudiando.

Deberá añadirse, sin embargo, á dichas reglas, una observación importante, que depende de la posición relativa que en la figura ocupan las fuerzas R y N. Dado que estas fuerzas forman un ángulo igual al de rozamiento, y dado también que el punto de aplicación de las fuerzas, ha pasado desde la posición de equilibrio n á la m que ocupa durante el movimiento, la adición que á dichas reglas puede hacerse podremos indicarla en la siguiente forma:

Antes de empezar á moverse el muñón, el punto de contacto ascenderá sobre el cojinete en sentido contrario del movimiento hasta una posición tal, que la resultante total de las fuerzas forme con la normal un ángulo igual al de rozamiento.

107. Regla para los cálculos gráficos.—Para deducir

otra regla de aplicación práctica en el cálculo de los mecanismos, trácese una circunferencia $o'a$ tangente á la resultante R. Su radio $o'a$ será el brazo de palanca de dicha resultante, y su valor vendrá expresado por la fórmula

$$\rho = o'm \operatorname{sen} \varphi = r \operatorname{sen} \varphi = rf_1 \qquad (14)$$

Se obtiene siempre el mismo valor de ρ para este brazo de palanca, cualquiera que sea la posición de la fuerza P; y si se supone que esta toma todas las posiciones posibles alrededor del muñón, la reacción R será siempre tangente al círculo trazado con el radio ρ.

A este círculo se le llama *círculo de rozamiento*, y á su radio ρ *radio de rozamiento;* pudiendo decir como traducción de la fórmula (14), que el valor de éste es igual *al radio del muñón multiplicado por el coeficiente modificado.*

Si se observa la posición relativa de las fuerzas P, Q y R, y se recuerdan las reglas del párrafo (14), podrá establecerse la siguiente, que servirá para la determinación del rozamiento en el caso que estamos estudiando:

Cuando un muñón gira en su cojinete, la reacción que se desarrolla es tangente al círculo de rozamiento, y su dirección es tal, que desfavorece la potencia del mecanismo.

108. Las mismas consideraciones pueden hacerse extensivas al caso en que el muñón esté fijo y gire el cojinete; pero deberá tenerse presente que si el giro de éste se verifica en sentido contrario al de la flecha de la *figura* 20, el punto de aplicación de la reacción R será el m_1, situado en la parte superior de los círculos en contacto, y sobre la reacción R.

Por último, en el caso que se muevan el muñón y el cojinete, bastará imprimir al sistema de ambos un movimiento igual y contrario al que tiene uno de ellos, para reducir el estudio al del caso anterior; conforme todo con las ideas vertidas en Mecánica racional, al tratar de los movimientos relativos.

109. Medios de disminuir el rozamiento. — Quedará

completo el estudio del rozamiento de primera especie, cuando indiquemos los medios que se emplean para disminuir el efecto nocivo de tal resistencia, que, como es natural, debe procurarse que produzca la menor pérdida posible de energía.

Se conseguirá tal efecto, en primer lugar, *aumentando el grado de pulimento de las superficies que deben estar en contacto*, con lo cual disminuyen las asperezas que ambas superficies puedan tener; principal causa, como sabemos, de la resistencia que trata de hacerse desaparecer. Esta razón nos explica la causa de que las máquinas tengan un movimiento más perfecto cuando han funcionado ya un cierto tiempo; porque pulimentadas más y más las superficies en contacto por efecto del mismo rozamiento, se atenúa algún tanto la pérdida de energía originada por éste.

Otro de los medios empleados constantemente para disminuir dicha pérdida es la *lubrificación*, ó sea la interposición de materias grasas entre las piezas que rozan entre sí. Estas sustancias protegen las superficies en contacto, aislándolas en cierto modo, penetrando por los instersticios que cada una pueda tener, y haciendo, por fin, que el contacto no sea inmediato entre dichas superficies. La lubrificación proporciona además la ventaja de disminuir notablemente la elevación de temperatura que es consiguiente al rozamiento, y que lleva consigo también una gran pérdida de energía (*).

110. Aplicación al rozamiento de cadenas.—Para la mejor inteligencia de las reglas dadas en el estudio del rozamiento de muñones, y para que sirva también de base en los estudios subsiguientes, vamos á presentar una aplicación importante, de la que se hace frecuente uso en los mecanismos.

Sea una cadena ordinaria de eslabones A, B.... (*fig.* 21) arro-

(*) La temperatura más conveniente á que deben conservarse los cuerpos que rozan entre sí, está comprendida entre 5 y 20°. En los reconocimientos frecuentes de que dede ser objeto toda máquina, es uno de los puntos principales que deben tenerse en cuenta.

llada sobre el tambor c, giratorio alrededor de sus muñones. Suspendido en un extremo de la cadena, está un peso Q, y en el otro extremo se ejerce un esfuerzo P, que sea estrictamente indispensable para vencer la expresada resistencia Q.

Si estas fuerzas obraran en dirección del eje de simetría de la cadena, como sucede á las fuerzas teóricas P_o y Q_o, sus valores serían exactamente iguales, cual puede deducirse estableciendo la ecuación de momentos con respecto al punto c. Dicha ecuación es aplicable en este caso, porque las fuerzas teóricas deben hacerse equilibrio, ya que la potencia ha de ser, según se ha dicho, la estrictamente indispensable para vencer la resistencia dada.

Pero téngase presente que si el eslabón A y los inferiores á este tienen una dirección rectilínea y según ella van ascendiendo, no sucede lo mismo á medida que se arrollan sobre el tambor. El primero que desvía de dicha dirección es el B, porque la cadena debe ir adaptándose sobre la semicircunferencia superior. En esta desviación, que no es otra cosa que una rotación de dicho eslabón B alrededor del punto a, (*) puede considerarse á B como un cojinete, y como muñón suyo á la parte superior del eslabón A.

En este movimiento de rotación, que sucesivamente se va repitiendo al presentarse los diversos eslabones en las posiciones A y B, se desarrolla un rozamiento de la naturaleza ya indicada, que, como rozamiento de muñón, se tomará en consideración trazando la tangente al pequeño círculo de rozamiento cuyo centro sea a.

La dirección de esta tangente es paralela á las fuerzas dadas, puesto que debe pasar por su punto de concurso, y su sentido se determina por la última regla que hemos enunciado. Obsérvese, para la aplicación de ella, que si ha de quedar desfavorecida la potencia, será preciso disminuir su brazo de palanca, ó bien aumentar el de la resistencia; en su conse-

(*) Para mayor claridad de la figura, se han puesto las letras a b y o en puntos distintos de los verdaderos, y reunidos con estos por pequeñas curvas.

cuencia, la tangente Q, trazada á la izquierda del círculo de rozamiento, satisface á las condiciones exigidas, y representa la verdadera reacción que el muñón del eslabón A ejerce sobre el cojinete del B, ó sea la resistencia real ó efectiva que presenta la cadena al arrollarse sobre el tambor.

El resultado final obtenido es, que si el brazo de palanca de la resistencia Q estaba representado por el radio $a\,c$, ahora tiene por valor $b\,c$; ó en otros términos, que dicho radio ha sufrido un incremento $b\,a$, al cual daremos el nombre de *radio de rozamiento de la cadena.*

Consideraciones análogas pueden hacerse con el ramal libre de la cadena, resultando de ellas que la potencia real ó efectiva desvía de la teórica la misma cantidad, pero disminuyendo su brazo de palanca.

Ambos resultados pueden expresarse en la siguiente regla, que será de suma utilidad para todos los casos en que deba hacerse aplicación de este estudio.

El rozamiento de cadenas se toma en consideración, aumentando el brazo de palanca de la resistencia en una cantidad igual al radio de rozamiento de la cadena y disminuyendo el de la potencia en la misma cantidad.

La aplicación de esta regla exige que se determine el radio de rozamiento de la cadena. Este valor se obtendrá por medio de la fórmula (14) en la cual r es el radio del círculo de rozamiento que constituye la sección recta de la cadena; determinándose f_1 por medio de la *tabla número* 1, en vista de la naturaleza del material de que aquella esté construída.

ARTÍCULO II

Rozamiento de segunda especie ó de rodar

111. Naturaleza de este rozamiento. Cuando dos cuerpos ruedan uno sobre otro, se producen análogos fenómenos á los indicados en el caso de resbalamiento. Las de-

formaciones que cada uno experimenta en la inmediación de los puntos en contacto, el movimiento vibratorio que adquieren las moléculas al volver á sus primitivas posiciones y las asperezas ó resaltes que existen en la superficie, son causa de esta nueva resistencia ya considerada en Mecánica racional, al estudiar el movimiento de los sólidos naturales. (*) En otros términos: dichas causas producen una pérdida real de fuerza viva, que puede considerarse debida á la acción de una fuerza resistente que se conoce con el nombre de resistencia á la rodadura ó rozamiento de rodar.

El valor de este rozamiento es muy pequeño si se compara con el rozamiento de primera especie, y por esta razón se prescinde de él muchas veces en los cálculos de las máquinas.

Pero siendo indispensable en algunos casos hacer un cálculo exacto, y tomar en consideración, como es consiguiente, cuantas resistencias se originan, trataremos también de encontrar el valor del rozamiento de segunda especie, siguiendo una marcha análoga á la indicada para el de primera.

112. Valor del rozamiento de rodar.—Para considerar el caso más sencillo, supóngase un cilindro A, *(fig. 22)*, que rueda sobre un plano horizontal B, sobre el cual ejerce una acción igual á su peso Q, representado por la fuerza 0—2. La reacción que el plano devuelve en el estado de equilibrio, es igual á Q, y tiene la dirección opuesta 2—0.

Pero si una nueva fuerza, P, viene á turbar el equilibrio con el valor estrictamente indispensable para hacer rodar al cilindro, la reacción desarrollada tendrá por valor la resultante R de ambas fuerzas, y por dirección la 1—0 opuesta á la de dicha resultante. Es natural que la fuerza P que debe aplicarse, tenga un valor igual y opuesto á la resistencia que se opone al movimiento, ó lo que es lo mismo, que dicha fuerza sea igual en valor absoluto al rozamiento.

Esta idea, que puede esplayarse más por consideraciones

(*) Delaunay, párrafo 255.

idénticas á las del rozamiento de primera especie, permite hacer el cálculo del rozamiento de rodar, F.

Compárense á este efecto los triángulos $o\,a\,b$ y o—1—2, deduciendo la proporción

$$\frac{1—2}{o—2} = \frac{a—b}{o—b};$$

ó bien llamando r al radio del cilindro y ε á la cantidad $a\,b$,

$$\frac{F_1}{Q} = \frac{\varepsilon}{r}$$

de la cual se desprende el valor

$$F_1 = \varepsilon \frac{Q}{r} \quad (15)$$

La diferencia que se observa entre esta fórmula y la (12), que corresponde al caso anterior, estriba principalmente en que aquella se dedujo en función del ángulo de rozamiento, y esta se calcula poniendo en evidencia la cantidad $a\,b$; que si la experiencia indica la constancia de aquel ángulo en el rozamiento de resbalar, dicho poderoso auxiliar nos hace ver que la expresada magnitud $a\,b$ es constante para unos mismos cuerpos, cuando se trata del movimiento de rodar.

A esta cantidad $\varepsilon = a\,b$ se la llama *coeficiente de rozamiento de segunda especie*, y su valor, lo mismo que el de primera especie, se deduce de los datos experimentales que proporciona la *tabla número* 2 calculada por Coulomb, y comprobada por las experiencias del General Morin.

Conocido el valor de dicho coeficiente, ninguna dificultad existe en calcular el rozamiento de segunda especie valiéndose de la fórmula (15), que puede traducirse al lenguaje vulgar por medio de la siguiente regla:

El rozamiento de rodar es igual al coeficiente de rozamiento,

multiplicado por la relación que existe entre la presión normal y el radio del cilindro. (*)

113. Regla para los cálculos gráficos.—Otra regla hemos de establecer, que nos será de suma utilidad por servir de base al cálculo gráfico de los mecanismos. Para deducirla, téngase en cuenta que la magnitud $b\ a = \varepsilon$ está contada, á partir de la normal, en sentido del movimiento, y que la reacción total R, resulta de unir su extremo a con el centro o del cilindro. Según esto, puede enunciarse la regla del modo siguiente:

La reacción que se desarrolla en el movimiento de rodar, desvía del pie de la normal una cantidad igual al coeficiente del rozamiento de segunda especie, y está contada en el mismo sentido del movimiento.

La aplicación de esta regla nos permitirá resolver con facilidad los problemas en que debe tomarse en consideración esta clase de rozamiento, y de ella hemos de presentar más adelante algunas aplicaciones.

(*) Creemos, como en el caso anterior, que la marcha que debe seguirse en una obra de texto es distinta á la que han seguido los experimentadores, al deducir las consecuencias que son de utilidad en este estudio. No consideramos conveniente, como lo hacen casi todos los autores, enunciar en el texto las leyes deducidas por Coulomb en sus delicadas experiencias con cilindros de guayaco y olmo, que hizo rodar sobre vigas de roble. Dichas leyes, que aparecen en evidencia en la fórmula (15), son las siguientes:

1.ª El rozamiento de segunda especie es proporcional á la presión producida por el cilindro con su carga.

2.ª Dicha fuerza es inversamente proporcional al diámetro del cilindro.

3.ª Es dependiente de un coeficiente numérico, variable con la naturaleza de las superficies en contacto.

ARTÍCULO III

Rigidez de cuerdas, correas y cables metálicos

114. Rigidez de cuerdas.—Su naturaleza.—Cuando una cuerda se arrolla sobre un tambor cilíndrico *C*, *(fig. 23)*, se desarrollan ciertas resistencias nocivas debidas á la dificultad mayor ó menor que presenta la cuerda á poderse adaptar fácilmente á la superficie del tambor, siguiendo la curvatura de este. Estas resistencias dependen principalmente de que al contornear la cuerda al tambor, trata de dilatarse la porción *B* comprendida hacia el exterior de la fibra central ó de simetría *h h*....., mientras se comprime el trozo *A* situado al interior. Esta propiedad especial, comprobada experimentalmente, y que se esplaya en resistencia de materiales al tratar de las diversas deformaciones que pueden sufrir los cuerpos, nos permite demostrar con facilidad en el párrafo siguiente, que la resistencia opuesta por las cuerdas al arrollarse sobre un tambor, puede tomarse en consideración mediante un aumento en el brazo de palanca de la resistencia, y una disminución en el de la potencia.

115. Modo de tomar en consideración la rigidez de cuerdas.—Supongamos una carga *Q* aplicada á la cuerda, la cual debe vencerse con una potencia *P*, que actúe en el otro ramal de ella. En el estado de equilibrio, obrando la carga en la dirección Q_0 del eje de simetría, se desarrollarán reacciones uniformemente repartidas en todos los puntos de la sección de la cuerda, cuya resultante *T*, ó tensión de ella, será igual y directamente opuesta á Q_0. Pero en el momento en que una fuerza *P* tiende hacer á girar al tambor en sentido de la flecha, las dilataciones del trozo *B* y las contracciones que experimenta el *A*, podrán considerarse como nuevas fuerzas, cuyos efectos, acumulándose sobre los producidos

por la tensión T, nos proporcionarán una nueva resultante total, igual y opuesta á Q, y cuya posición nos indica la que puede atribuirse á esta. En este caso, la resistencia á la dilatación podrá ser representada por una fuerza q, obrando en un punto α comprendido entre o y a, y la resistencia á la compresión por una fuerza p, que obre en un punto 6 comprendido entre o y b. Al componer T con q, se obtendrá una resultante paralela igual á su suma, y aplicada en un punto comprendido entre o y α. Esta resultante parcial debe componerse con p, y por estar en sentido opuesto, se restará de aquella, haciendo que la resultante definitiva desvíe más todavía del punto o y tenga un valor igual á T, ya que pueden suponerse iguales en valor absoluto las resistencias p y q. Se obtiene, finalmente, una resultante total S, aplicada en un punto o', de valor igual á T, y por tanto á Q_o, y que debe ser igual y directamente opuesta á la resistencia Q. Resulta, que el efecto de la resistencia nociva que nos ocupa, ó rigidez de la cuerda, puede asimilarse á un aumento en el brazo de palanca de la resistencia.

Iguales consideraciones son relativas al otro ramal de la cuerda, resultando de ellas que el brazo de palanca de la potencia ha disminuído en una cierta cantidad $o_1o'_1$, que puede suponerse igual á la $o\,o'$.

Podremos expresar los resultados obtenidos, en la siguiente regla, idéntica á la del rozamiento de cadenas:

La rigidez de las cuerdas se toma en consideración, mediante un aumento en el brazo de palanca de la resistencia y una disminución en el de la potencia, de una cantidad que se llama radio de rigidez.

116. El valor ρ_1 del radio de rigidez viene dado por fórmulas experimentales, y dependerá, como es natural, de la naturaleza de la cuerda, y del mayor ó menor uso que se haya hecho de ella, pues es sabido que las cuerdas usadas son más flexibles ó menos rígidas, como quiera expresarse, que las cuerdas nuevas.

La fórmula más usada para la determinación del valor

de ρ_1 correspondiente á las cuerdas de cáñamo de gran potencia, es

$$\rho_1 = \frac{r^2}{26,8}$$

que puede construirse gráficamente según expresa la *figura 23 bis*, en la que la magnitud $c\,n'$ es igual á 26,8 en la escala del dibujo. (*) El valor de ρ_1 viene expresado en dicha figura, por la tercera proporcional $c\,a'$.

Dicha fórmula y la construcción correspondiente, pueden emplearse en todos los casos en que deba tomarse en consideración la rigidez de las cuerdas, ya sean nuevas, usadas ó mojadas; pues deducida para el caso más desfavorable, será ventajoso su empleo para los otros.

Esta fórmula está deducida de la que ha dado Eytelwein para el valor del esfuerzo de rigidez

$$F = 0,0186 \frac{d^2}{R} Q;$$

en la que d representa el diámetro de la cuerda, R el radio del tambor, y Q la resistencia que debe vencerse.

117. Rigidez de las correas.—Es de poca importancia, y despreciable en la mayor parte de los casos, debiendo tener presente que su valor es tanto más pequeño, á igualdad de sección, cuanto menor sea el espesor de la correa.

118. Rigidez de los cables metálicos.—La rigidez de los que se emplean en las trasmisiones telodinámicas se calcula del mismo modo que la de las cuerdas, si bien varía notablemente el valor del radio de rigidez, como consecuencia del aumento que en este caso adquiere el esfuerzo que representa la rigidez del cable, cuya flexibilidad es mucho menor que la correspondiente á las cuerdas.

(*) Esta figura es proyección horizontal del ramal de la izquierda.

El valor que ρ_1 adquiere en este caso, es

$$\rho_1 = \frac{r^2}{3{,}33}$$

el cual podrá construirse gráficamente del modo indicado.

Este valor está deducido de la fórmula empleada al montar la trasmisión telodinámica de la fábrica de armas blancas de Toledo, que es

$$F = 0{,}15 \frac{d^2}{R} Q,$$

en la cual seguimos la misma nomenclatura empleada anteriormente para la de Eytelwein, correspondiente á las cuerdas (*).

(*) Creemos ventajoso el empleo de estas fórmulas (que también cita Redtenbacher aunque con distintos coeficientes), por la identidad de las expresiones que á las cuerdas y cables corresponden. La aproximación es muy suficiente en todos los casos, y con su empleo puede sentarse un cuerpo de doctrina apropiado á la rigidez en general, cuya importancia es bien notoria en una obra de texto.

No es de necesidad para las explicaciones, la indicación del medio que ha servido para la deducción del radio de rigidez, como consecuencia de las fórmulas experimentales que proporciona el esfuerzo; pero con objeto de que no quede duda alguna sobre la exactitud de la fórmula $\rho_1 = \frac{r^2}{3{,}33}$ que se cita en el texto, indicaremos la marcha que hemos seguido, deducida de la marcada en la excelente obra de Herrmann para la rigidez de las cuerdas.

Si P es la potencia, Q la resistencia y F el esfuerzo de rigidez, podrá establecerse

$$P = Q + F = Q + 0{,}15 \frac{d^2}{R} Q = Q\left(1 + 0{,}60 \frac{r^2}{R}\right).$$

Pero según la regla dada para tomar en cuenta la rigidez, y ya que debe aumentarse el brazo de palanca de la resistencia y disminuir el de la potencia en una cantidad igual á la rigidez, podrá establecerse la ecuación

$$P(R - \rho_1) = Q(R + \rho_1)$$

de la cual se deduce

$$P = \frac{R + \rho_1}{R - \rho_1} Q;$$

ARTÍCULO IV

CHOQUES Y VIBRACIONES

119. Causa de estas resistencias nocivas.—Se ha visto en Mecánica racional (*) que todo choque entre dos sólidos naturales produce una pérdida de fuerza viva, debida á que el trabajo positivo producido por las fuerzas moleculares durante el segundo período del choque, es inferior al valor absoluto del trabajo negativo correspondiente al primero.

Esta pérdida de energía que se traduce en un consumo de trabajo motor no aprovechado para producir efecto útil, no es otra cosa que una trasformación especial de dicho trabajo, que se presenta á nuestros sentidos, bien bajo la forma de sonido ó ya bajo la de calor, según sea la rapidez y amplitud de las vibraciones que acompañan al choque.

Reconoce por causa principal los cambios bruscos que pueda experimentar la velocidad de los diversos órganos de

---

ó bien, con suficiente aproximación, dado el pequeño valor que la relación $\frac{\rho_1}{R}$ tiene en todos los casos

$$P = \left(1 + 2\,\frac{\rho_1}{R}\right) Q.$$

Igualando las dos expresiones de P, se obtiene

$$0{,}60\,\frac{r^2}{R} = 2\,\frac{\rho_1}{R}$$

de donde

$$0{,}60\,r^2 = 2\,\rho_1$$

y por último

$$\rho_1 = 0{,}3\,r^2 = \frac{r^2}{3{,}33}.$$

(*) Delaunay, párrafo 253.

una máquina, y como consecuencia, será indispensable que en todas ellas se traten de evitar dichos cambios, lo que habrá de conseguirse con el uso de aparatos especiales destinados exclusivamente á este objeto, y de que habremos de ocuparnos al tratar de los medios para regularizar el movimiento de las máquinas.

120. Expresión formular.—Como quiera que no siempre será posible disponer convenientemente los mecanismos destinados á este objeto, deberá recordarse la doctrina sentada en Mecánica racional, que habrá de tener aplicación siempre que se trate de conocer la cantidad de trabajo que por tales conceptos se ha perdido. El teorema de Carnot nos expresa el valor de la pérdida debida al choque de dos cuerpos, que es igual, según su enunciado, *á la suma de fuerzas vivas que corresponden á las velocidades ganada y perdida por ambos cuerpos, si permaneciesen en contacto después de terminado el choque.*

La expresión analítica de esta pérdida, será, por lo tanto (empleando la misma nomenclatura que Delaunay)

$$p = m(v-u)^2 + m'(u-v')^2$$

en la que v y v' representarán las velocidades de que ambos cuerpos están animados antes del choque, y u la velocidad común que han adquirido después de verificado aquel.

121. Debe observarse, á propósito de este asunto, que algunas máquinas están destinadas á ejecutar ciertos trabajos industriales mediante la acción repetida del choque de una masa, convirtiéndose el mencionado choque en verdadera potencia del mecanismo; y en este caso se ha de procurar, para obtener el mayor efecto útil, que la materia del cuerpo que percute sea muy rígida y elástica, empleándose por lo común el acero, por ser sustancia que reune en alto grado aquellas propiedades.

122. Necesidad de evitar los movimientos vibratorios.—No terminaremos este asunto sin recalcar bien la idea de que es necesario en toda máquina, para que alcance el

mayor grado de perfección, suprimir en cuanto sea posible las causas que produzcan una disminución en la fuerza viva, cuando esta disminución no sea acompañada de la producción de una cantidad correspondiente de trabajo útil. En este caso se encuentran los movimientos vibratorios que pueden adquirir las moléculas de algunas piezas de la máquina, provengan ó no de choques entre sus diferentes órganos. Al adquirir este movimiento vibratorio además del movimiento especial de que están animadas, desaparece una gran parte del trabajo motor ó energía del mecanismo, sin que esta pérdida pueda traducirse en producción efectiva de trabajo útil; porque las vibraciones de las moléculas se trasmiten de unas á otras, y de estas á los cuerpos que están próximos á la máquina, por medio de los soportes y del aire que la rodea, concluyendo por perderse en la masa total de la tierra.

ARTÍCULO V

Resistencia del medio en que se mueven las máquinas

128. Efectos de esta resistencia.—Todo cuerpo que se mueve en un medio de alguna densidad, por pequeña que sea, experimenta de parte de éste una resistencia determinada, que influirá en la marcha del cuerpo, retardando su movimiento.

Esta fuerza resistente, oponiéndose al movimiento de las máquinas, producirá en ellas una pérdida de energía ó trabajo motor, que no podrá trasformarse en efecto útil. Pero esta pérdida, en la mayor parte de las máquinas, es de tan escasa importancia, que por lo general se prescinde de ella al hacer el cálculo del efecto útil. Solamente en ciertos órganos que presentan gran superficie, como en los volantes, trasmisiones telodinámicas y ruedas hidráulicas, se toma algunas veces en consideración.

Por este motivo no es conveniente extenderse aquí en un asunto de escasa importancia para nosotros, mucho más, cuando se estudia con la debida extensión en el curso de Artillería, ya que la resistencia que nos ocupa ejerce una influencia notable en el movimiento de los proyectiles, para cuyo estudio sirve de base la mencionada resistencia.

124. Expresión formular.—Para satisfacer á nuestro objeto, y para tener idea del valor que adquiere cuando se deba tener en cuenta al calcular una máquina, bastará indicar que su valor aumenta, como es natural, con la velocidad del cuerpo que se mueve, con su sección, y por último, con la densidad del medio en que el movimiento se verifique.

Repetidas experiencias han comprobado que entre los límites de las velocidades usuales correspondientes á las máquinas, puede representarse el valor de esta resistencia por la fórmula

$$F = K \delta A \nu^2,$$

en la cual δ representa la densidad del medio, A la mayor sección del cuerpo en movimiento, contada en sentido normal á éste; ν la velocidad con que se mueve, y por último, K un coeficiente numérico determinado experimentalmente y que varía según la forma de la proa y popa del cuerpo.

Cuando la velocidad de éste aumenta para rebasar el límite ordinario que corresponde á las máquinas, deja de ser aplicable esta fórmula.

Con respecto á los valores que puede tomar el coeficiente K, ó los que corresponden á otras fórmulas experimentales dadas por los diversos autores que de este asunto se han ocupado, consignaremos que los principales resultados útiles para nuestro estudio, se hallan en la *tabla número* 3, que expresa los resultados de la experiencia sobre la resistencia del aire.

ESTUDIO III

APLICACIÓN Á LOS ÓRGANOS GENERALES

DE LOS MECANISMOS

CUADRO DEL ESTUDIO 3.°

PRELIMINARES. Orden del estudio.

DESCRIPCIÓN DE LOS ÓRGANOS PRINCIPALES.

MOVIMIENTO DE LOS ÓRGANOS GUIADOS	Organos guiados en movimiento rectilíneo.....	Movimiento descendente en un plano inclinado.
		Movimiento ascendente en un plano inclinado.
		Movimiento en las guias ordinarias.
	Organos guiados en movimiento de rotación...	Movimiento de un árbol horizontal.
		Movimiento de un árbol vertical.

PRELIMINARES

120

125. Orden de los estudios de aplicación.—En el estudio de aplicación que ahora vamos á emprender, nos concretaremos á la explicación de los mecanismos más usuales, y sobre todo de los que sirven de base para las principales combinaciones que la industria emplea, cuyo conocimiento será muy suficiente para la buena comprensión de estos últimos.

Emplean los autores diversas clasificaciones para el más perfecto orden en el estudio; pero anticuadas unas y muy complicadas otras, por referirse más bien á un estudio filosófico de las combinaciones elementales, que pueda servir de base á una teoría matemática de los mecanismos, adoptaremos la indicada en nuestra teoría cinemática, que está de acuerdo con los resultados prácticos que se pretenden exponer en estas lecciones.

126. Será conveniente, antes de explicar los tipos de mecanismos más usuales, sean simples ó compuestos, que demos una idea de los principales órganos que constituyen las má-

quinas, haciendo á ellos aplicación de las teorías expuestas. Conocidos estos, ninguna dificultad existirá al estudiar los diversos mecanismos, cuyo estudio no podrá quedar completo sin hacer el de los aparatos que pueden llamarse complementarios de ellos, como son, en primer lugar, los que sirven para establecer, interrumpir, modificar ó regularizar una trasmisión de movimiento, y en segundo lugar, los que se emplean para la medida de velocidades, tiempos, esfuerzos y trabajos; en una palabra, de todos los elementos que caracterizan un movimiento.

127. Creemos conveniente y más práctica esta marcha en el estudio (opuesta á la que siguen muchos autores), ya que el conocimiento de los que pueden considerarse como mecanismos complementarios exige en cierto modo el de los comprendidos en nuestra clasificación, y de ellos depende. Por otra parte, son aparatos que en toda clase de máquinas se emplean, y estudiándolos en último lugar, puede explicarse al propio tiempo el enlace mútuo de unos y otros, la aplicación de estos á aquellos, que fuera imposible de otro modo, á no ser con repeticiones enojosas que tratamos de evitar.

128. De acuerdo con las consideraciones expuestas, expresamos á continuación la marcha que se habrá de seguir en el estudio de aplicación que vamos á emprender:

1.° Aplicación á los órganos generales de los mecanismos.

2.° Aplicación á los mecanismos derivados del primer grupo cinemático, ó mecanismos de contacto.

3.° Aplicación á los mecanismos derivados del segundo grupo.

4.° Aplicación á los mecanismos derivados del tercer grupo.

5.° Mecanismos para establecer, interrumpir y modificar los movimientos (están comprendidos los reguladores, volantes y moderadores).

6.° Indicadores mecánicos.

7.° Combinaciones de los diversos grupos y especies.

CAPÍTULO PRIMERO

Descripción y objeto de los órganos generales

ARTÍCULO ÚNICO

129. Cuadro de los órganos generales.—Una gran parte de los órganos que se emplean en las máquinas son conocidos ya de cuantos han de proseguir el curso de estos estudios, y nos limitaremos, por tanto, á pasar ligera revista de algunos, deteniéndonos más en los que hasta ahora eran desconocidos para el alumno, como son: soportes, árboles de rotación, tornillos y tuercas, pernos, manivelas, palancas, bielas, correas, cuerdas, cadenas, cables metálicos, poleas, ruedas de engranaje, guías de movimiento y engrasadores.

130. Soportes.—Tienen por objeto asegurar la estabilidad de los diversos órganos que constituyen un mecanismo. Su forma es muy variada y depende de la mayor ó menor sencillez de aquel, así como de la colocación que puedan tener.

La más sencilla se refiere al caso en que deban servir para asegurar la posición de un solo eje. La forma del *soporte*

ordinario, cuando es de hierro, está representada en la *figura* 24, *lam.* 4.ª; consta de los piés *A* y *B*, reunidos en su parte media por el puente ó tirante *C* y en la superior por el *D*, que sirve de sostén al eje, mediante la disposición que ha de verse al tratar de las guías de movimiento.

Cuando los soportes no se deben apoyar en el suelo del taller y sí en sus paredes ó en una columna, presentan la forma de la *figura* 25, y reciben el nombre de *soportes de escuadra*. La plataforma *a a* es la que recibe el aparato especial ó guía de movimiento que ha de soportar los muñones del eje.

Pueden, por fin, los soportes, estar sujetos al techo, en cuyo caso llevan el nombre de *soportes de suspensión*, y están representados en la *figura* 26. En ella representa *a* la tapa ó sombrerete, entre la cual y el soporte constituyen el alojamiento *b* para las guías del movimiento que han de contener al árbol.

En cuanto á las dimensiones de todos estos órganos, nada por ahora puede indicarse, y pertenece su conocimiento á la parte del curso dedicada á la *resistencia de materiales*. La misma observación es relativa á los demás órganos cuya explicación nos ocupa en este estudio.

134. Arboles de rotación.—Constan, en general, del *cuerpo principal* del arbol *A B C*, *figura* 27, cuya forma es muy variada. La representada en la figura se compone de un cilindro central, terminado por dos troncos de cono. En las extremidades de estos existen los *muñones ó gorrones*, cuya forma es siempre de revolución, puesto que por ellos se verifica el apoyo del árbol, permitiento á este el movimiento de rotación alrededor de su eje geométrico. Tienen los gorrones casi siempre resaltes ó anillos cilíndricos, para impedir los movimientos del árbol en dirección de su eje.

Cuando este deba soportar grandes cargas, se emplea para su sección transversal la forma en cruz, cuyas ventajas han de ponerse en evidencia al estudiar la resistencia de materiales. La *figura* 28 indica las dos proyecciones correspondientes á este caso.

Si la longitud del eje es muy grande, no suele construirse de una sola pieza, y entonces se reunen los diversos trozos que lo componen, empleando la que se llama *unión ó enlace por medio de manguitos*, que está representada en la *figura* 29. El manguito *a a* ajusta suavemente sobre las dos extremidades, y se sujeta con una pieza tronco-piramidal, llamada *llave ó chaveta*, *b b*, introducida fuertemente en una canal longitudinal, llamada *chavetero*, que está abierta parte en el eje y parte en el interior del manguito. Se comprende que esta disposición permite quitar con prontitud uno de los trozos del eje, sin separar los inmediatos; pero debe tenerse presente, que para hacer eficaz la unión, es preciso colocarla siempre cerca de uno de los soportes que sostengan á dicho eje.

No bastan dos apoyos solamente en el caso que consideramos, de árboles que tengan gran longitud; además de los gorrones que estos llevan en sus extremidades, como los árboles ordinarios, tienen otros intermedios, que se forman generalmente, bien haciendo de menor diámetro un trozo del eje, como el *a* de la *figura* 30, ó bien como se ve en *b*, por medio de dos anillos que impidan los movimientos laterales, sin disminuir el diámetro del árbol en el gorrón.

Por último, si los árboles de gran longitud no pueden llevar apoyos intermedios por impedirlo las condiciones del local, como por ejemplo, cuando deben trasportar la energía de un taller á otro, se les refuerza convenientemente por una serie de tirantes, que constituyen lo que se llama una armadura. (*)

132. Tornillos y tuercas.—Bien conocidos son de todos

(*) No se han dibujado todas las figuras con arreglo á la misma escala, porque exigirían láminas excesivamente grandes para su buena inteligencia. Además, en unas basta un dibujo reducido para comprender la explicación, y para otras es indispensable que aparezcan ciertos detalles necesarios. La idea de correlación entre las magnitudes de los diversos órganos, se adquiere perfectamente dado el objeto de cada uno de ellos, auxiliando la explicación, como es natural, con los modelos y máquinas que puedan ponerse á la vista de los alumnos.

estos elementos constituyentes de las máquinas, cuya generación y trazado forma parte del curso de Geometría Descriptiva. No creemos tampoco necesitar indicación alguna sobre el uso á que están destinados.

133. Pernos ó bolones.—Constan de una barra cilíndrica *A*, *(fig* 31*)*, casi siempre de hierro, terminada por uno de sus extremos en una cabeza de forma cuadrada ó semiesférica *C*, y en la otra por un tornillo *D D'*.

Para reunir dos ó más piezas terminadas por caras paralelas, se practican normalmente á estas caras unos orificios cilíndricos, en los cuales se introducen los pernos, cuyo diámetro exterior sea algo menor que el interior de aquellos. Se asegura cada perno por medio de la tuerca *E E'*, cuyos filetes corresponden á la rosca del tornillo en que aquel termina. Se suele interponer entre la tuerca y la pieza que sujeta, un *ovalillo ó volandera FF*, cuya forma es de corona circular, y que tiene por objeto evitar el rozamiento directo de la tuerca con dicha pieza.

A veces se asegura la posición de la tuerca por medio de un pequeño *muelle pasador A*, representado en la *figura* 32, y otras por una *chaveta B*, *(fig.* 33*)*.

134. Manivelas.—Sirven para dar movimiento de rotación á los ejes, y se colocan generalmente en las extremidades de estos. Cuando el movimiento ha de darse á mano, tiene la forma indicada en la *figura* 34, y consta del *brazo de la manivela A* y del mango *B*, de forma cilíndrica, que suele tener movimiento de rotación alrededor de su eje, para mayor comodidad del que ha de ejercer el esfuerzo.

Si el movimiento lo ha de recibir el árbol por medio de otros órganos mecánicos, se sustituye el mango por un muñón *B*, *(fig.* 35), análogo á los que figuran en las extremidades de los ejes.

Otras veces conviene proporcionar el movimiento directamente á la parte central del eje, y en este caso afecta la manivela la forma de la *figura* 36, en la que *A* y *B* son los brazos de la manivela, y *C* el muñón ligado á ellos por sus dos

extremos. Manivela y eje forman entonces un solo cuerpo, no siendo aquella otra cosa que un verdadero recodo con que este se ha construído.

135. Palancas. Balanzaderas.—Es perfectamente conocido este mecanismo, cuyo uso, cuando se emplea aislado, tiene por principal objeto favorecer la fuerza motriz empleada en muchos casos. Las palancas que suelen emplearse aisladas, son sencillamente barras de hierro de gran resistencia, para las cuales el punto de apoyo puede variarse á voluntad, *apalancando*, como suele decirse, en el punto conveniente para el esfuerzo que se desea. La *figura* 37, *lám.* 5.ª, indica el empleo que se hace de ellas, para la elevación de un cuerpo pesado *A*, por medio de un esfuerzo *P*.

Cuando forman parte de una máquina, su punto de apoyo deja de ser *accidental*, y está constituído ligando la palanca á un eje de rotación. Los esfuerzos se ejercen también por el intermedio de los correspondientes ejes, á cuyo fin está provista de muñones ó muñoneras, según la forma de la barra donde aquellos han de actuar.

Muy variadas pueden ser las formas que afectan las palancas. Presentamos un ejemplo de palanca acodada en la *figura* 38, en la que *A* representa el eje de rotación, y *B* y *C* los muñones ó el alojamiento de ellos.

Otro ejemplo está de manifiesto en la *figura* 39; palanca de brazos iguales, cuyo punto de apoyo es central, y su contorno parabólico. En este caso, toma el nombre particular de *balanzadera* (*).

Por último, suelen las palancas tener sus puntos de apoyo formados por verdaderos cuchillos para apoyarse en soportes de forma conveniente, y el objeto de ellos es que el giro alrededor del apoyo se verifique con suma facilidad. Así sucede á las que forman los brazos de una balanza (*fig.* 40): en el centro se ve el cuchillo que sirve de apoyo; *b* y *c* son los brazos de las palancas, en cuyos extremos han de colocarse los

(*) Solamente está dibujada la mitad de la balanzadera.

platillos, suspendidos de otros cuchillos, para constituir el referido aparato, que más adelante hemos de describir.

~~189.~~ Las palancas se dividen en tres géneros principales, al considerarlas con respecto á la posición que puede tener el punto de apoyo. Si está situado en un punto intermedio de la palanca, ejerciéndose los esfuerzos á un lado y otro de él, como sucede en las cuatro figuras que hemos presentado, se llama *palanca de primer género;* cuando el punto de apoyo está en un extremo, y la resistencia que ha de vencerse comprendida entre éste y la potencia, se llama de *segundo género;* y si conservando la misma posición del punto de apoyo, se ejerce la potencia entre éste y la resistencia, la palanca es, del *tercer género* (*).

(*) Son tan elementales las propiedades de las palancas, que no parece conveniente incluirlas en el texto; mucho más si se tiene en cuenta que la mayoría de los alumnos que han de estudiar estas lecciones, conocen ya algunos elementos de Mecánica aplicada; pero con objeto de no dejar incompleto nuestro estudio, las apuntaremos ahora, indicando cuanto es referente á los tres géneros de palancas.

En todas ellas, cualquiera que sea la dirección de la potencia y resistencia que actúe con objeto de que la primera sea extrictamente indispensable para vencer á la segunda, es preciso que se hagan equilibrio, ó lo que es igual, que la suma de momentos de las fuerzas aplicadas sea cero; puesto que las seis ecuaciones generales de equilibrio á que se hace referencia en Mecánica racional, se reducen á una sola, en el caso particular de rotación alrededor de un eje del sistema coordenado.

Refiriéndonos á la *figura* 41, si se llama P y Q respectivamente la potencia y la resistencia, y p y q á las distancias oa y ob, la ecuación de momentos tendrá la forma

$$P \cdot oa' = Q \cdot ob';$$

ó bien

$$\frac{P}{Q} = \frac{ob'}{oa'} = \frac{ob}{oa} = \frac{q}{p}$$

por ser semejantes los triángulos oaa' y obb'. Traducida al lenguaje vulgar la última proporción, nos dice que *los esfuerzos son inversamente proporcionales á los brazos de palanca.*

Si se observa la proporción obtenida, se deducirá que las palancas serán ó

137. Bielas.—Son las bielas unas barras, generalmente largas con relación á su sección trasversal, que reciben en una de sus extremidades la acción de una palanca ó balanzadera, para trasmitirla por la otra extremidad á un órgano también movible, en general una manivela. En las bielas debe distinguirse el *cuerpo de la biela A B* (*fig.* 42), y las cabezas *C* y *D*. Estas deben estar dispuestas de modo que puedan ligarse á los correspondientes muñones de las palancas ó manivelas, permitiéndoles el giro conveniente. Constituyen, por lo tanto, verdaderas guías de movimiento, análogas á las que nos van á ocupar en uno de los siguientes párrafos (*).

138. Correas.—Estos órganos, como las cadenas y cables de que nos vamos á ocupar inmediatamente, se utilizan para la trasmisión de esfuerzos más ó menos considerables. En general, se emplean las *correas de cuero* de un pequeño

---

no favorables á la potencia, según que p sea mayor ó menor que q. En otros términos, *los grandes brazos de palanca favorecerán á la potencia*, ó permitirán que se emplee una menor para vencer la misma resistencia.

Con respecto á los valores de p y q en los distintos géneros de palancas, se observa lo siguiente:

En la palanca de primer género, no existe idea preconcebida acerca de los valores de p y q; por lo tanto, puede ser *favorable ó desfavorable á la potencia.*

En la palanca de segundo género, siempre por su definición es p mayor que q; luego este género de palancas *favorece siempre á la potencia.*

Por último, en la de tercer género, es siempre p menor que q; luego tales palancas siempre son *desfavorables á la potencia.*

Con respecto á la influencia que el peso puede tener en el esfuerzo, deberemos decir, que si el centro de gravedad pasa por el apoyo, en nada modificará dicho valor, por ser nulo su momento; pero si no coincide, se incluirá el momento correspondiente en la ecuación de equilibrio, con el conveniente signo según el sentido de la rotación que produzca. También debe tomarse en consideración la influencia del rozamiento, cuando los puntos de apoyo de las palancas sean verdaderos muñones, y este estudio habremos de practicarlo en distintas ocasiones, por cuya razón, y no ser de este lugar, nos dispensamos de hacerlo por ahora.

(*) En la figura se representa la cabeza superior, suponiendo que está alojado en ella el muñón correspondiente. La cabeza inferior aparece sin él, para formarse idea del modo con que se verifica la colocación.

espesor con relación á su ancho, y para darles la forma de correa sin fin, es preciso hacer el empalme de sus extremidades, después de calculada la longitud que debe tener, según hemos dicho en la teoría cinemática. La naturaleza de este empalme depende de la fuerza que debe trasmitirse. Para impedir la distensión que suelen tener los bordes de las correas, se emplean las *correas de bordes reforzados*, representadas en la *figura* 43, en la que *aaa* y *bbb* representan los refuerzos hechos con tiras de menor ancho. También expresa la misma figura el modo de verificar un empalme.

Cuando los esfuerzos que deben trasmitirse son de consideración, se emplean con ventaja las *correas dobles* y aun las triples, compuestas de correas simples superpuestas, y fuertemente unidas entre sí.

Si la trasmisión está expuesta á mojarse con agua fría, podrán usarse las *correas de cautchouc*, ó mejor las de tela y cautchouc, que resisten mejor dicho efecto, y pueden obtenerse grandes longitudes de ellas en una sola pieza.

Por último, cuando estos órganos de trasmisión deben estar expuestos á la acción del agua caliente ó situados en un taller cuya atmósfera esté á elevada temperatura é impregnada de vapores ácidos, presentan notables ventajas las *correas de crin*, cuya resistencia es además muy superior á las de cuero.

139. Cuerdas.—Las cuerdas ó *cables de cáñamo*, sustituyen con ventaja á las correas en algunos casos, sobre todo cuando la trasmisión esté expuesta á irregularidades en su marcha, que pudieran producir un resbalamiento de la correa en su polea. Se emplean sencillas, apareadas y en mayor número todavía, teniendo en este caso la polea una, dos ó más gargantas, según hemos de ver al tratar de estos órganos.

Las cuerdas para trasmisiones deben ser de cáñamo de primera calidad, de fibras largas y bien torcido. El empalme, para que tengan la forma de cuerdas sin fin, debe hacerse de modo que ocupe una gran longitud, y no aumente sensiblemente el diámetro.

Con las cuerdas puede obtenerse un efecto difícil de conseguir con las correas, y es el de fraccionar el esfuerzo de un motor, repartiéndolo por diversos puntos situados á derecha é izquierda de la polea principal, y á distancias relativamente grandes. Verdad es que también pudiera conseguirse el mismo efecto empleando las correas; pero si el número de trasmisiones es grande, y los esfuerzos considerables, resultaría para las correas y para la totalidad del mecanismo, un ancho irrealizable en las condiciones de la práctica.

Se emplean también las cuerdas construídas *de sustancias textiles*, análogas á las usadas en los instrumentos de cuerda, las cuales reemplazan con ventaja á las anteriores en determinadas circunstancias; y finalmente, también en algunas otras, es usado el algodón para las trasmisiones por cuerdas.

140. Cadenas.—Las *cadenas* presentan formas muy variadas, y las que más se emplean en las máquinas, afectan las formas y reciben los nombres siguientes: *Cadena ordinaria*, representada en la *figura* 44: está compuesta de los eslabones *mm*... que al enlazarse unos con otros, forman un conjunto de gran resistencia. A veces se refuerzan con *contretes aa*, indicados en la *figura* 44 *bis*. *Cadena de Vaucanson:* formada con eslabones trapezoidales, según marca la *figura* 45, y por su forma especial se adaptan mejor que las anteriores á las poleas ó tambores, permitiendo que unos salientes colocados en estos, vayan introduciéndose sucesivamente en los huecos que dejan los eslabones, con lo cual queda mejor guiada la cadena. *Cadena de Galle*, que está constituída por chapas *aa'*, *bb'*... etc. (*fig.* 46) atravesadas por los bolones *ccc'* que permiten á aquellas el giro conveniente. Son susceptibles de gran resistencia, por lo que suelen emplearse en las máquinas que han de vencer pesos considerables, y se adaptan perfectamente á los tambores ó poleas cuyo movimiento reciben ó trasmiten.

141. Cables metálicos.—Se emplean en las trasmisiones telodinámicas, ó sea á gran distancia, y su forma es la de una cuerda constituída por varios ramales, compuesto cada

uno de ellos de un núcleo central de cáñamo embreado, alrededor del cual van arrollados en hélice seis ó más alambres de hierro. Cada uno de estos ramales se arrolla á su vez alrededor de un nuevo núcleo principal ó alma, también de cáñamo embreado, y así el conjunto presenta en su sección normal la forma que indica la *figura* 47, en la que las partes rayadas representan los núcleos parciales de cáñamo, y la *A*, también rayada, el núcleo principal ó alma. Con esta disposición mixta presenta el cable una gran resistencia, á la par que adquiere suficiente flexibilidad para adaptarse á las poleas, haciendo un principal papel, como se ha dicho, en las trasmisiones á grande distancia.

142. Poleas.—Son verdaderas ruedas, montadas sobre un árbol con el que forman cuerpo y que lleva sus correspondientes muñones. En la llanta ó superficie exterior de ellas se adapta la correa, cuerda, cadena ó cable que comunica ó recibe el movimiento. Varía la forma de la llanta, según que haya de emplearse en unión con uno ú otro de los mencionados órganos.

Las poleas en cuya superficie han de adaptarse *correas*, presentan la forma de la *figura* 48; la llanta *abc* es ligeramente bombeada, y formada teóricamente por dos troncos de cono, reunidos por sus bases mayores. La razón de tal disposición se pone de manifiesto en la *figura* 49; una forma cónica de la polea, produciendo dilatación de la correa en el punto *a* correspondiente á la base mayor, daría por resultado un esfuerzo desarrollado en sentido de la flecha, debido á las reacciones interiores que se desarrollan en la correa, según las cuales, las moléculas próximas á *b* tienden á ocupar la posición *a*. Si para centrar la correa se hiciese una garganta á la polea, aquella tendería á salirse de esta por el efecto antedicho; es conveniente, por lo tanto, la forma bombeada que hemos indicado, y con ella queda la polea perfectamente centrada, por desarrollarse los esfuerzos del exterior al interior.

143. Generalmente las poleas no forman cuerpo con los ejes donde van montadas; y para hacerlas solidarias de ellos,

y que su rotación proporcione á dichos ejes el movimiento, se emplean las *chavetas* longitudinales, introduciéndolas, como en los empalmes de los árboles, en un hueco abierto en sentido de las generatrices de su eje, que recibe también el nombre de *chavetero*. La *figura* 50 representa el núcleo central de una polea, y en ella está introducida la chaveta *a*, que la reune al árbol. Cuando las poleas no están ligadas al eje, y giran por lo tanto independientemente de él, á cuyo efecto tienen un orificio central por el que aquel penetra, reciben el nombre de *poleas locas*.

144. Si las poleas han de servir para la trasmisión por *cadenas*, llevan también una garganta especial cuando se emplea la cadena ordinaria; unos dientes ó salientes que penetran en los eslabones, si la cadena es de Vaucanson, y por último, son poligonales, si se ha de arrollar en su contorno una cadena de Galle. No creemos de necesidad ilustrar la explicación con figuras correspondientes á cada uno de estos casos, por la extremada sencillez de todos ellos.

145. En las trasmisiones por *cuerdas ó cables de cáñamo*, se emplean poleas de una ó varias gargantas, según el número de cuerdas que hayan de adaptarse á la polea. Estas gargantas, abiertas en la llanta á tenor de lo que indica la *figura* 51, tienen por objeto hacer que las cuerdas queden perfectamente centradas y no se salgan de su alojamiento.

146. Cuando la trasmisión se efectúe por medio de *cables metálicos*, deben ser las poleas de dimensiones mayores, y presentar su conjunto gran resistencia, en consonancia, como es natural, con la idea de que su peso no sea excesivo; por cuyos motivos afectan la forma que indica la *figura* 52, en la cual se halla representada la totalidad de una polea con sus correspondientes soportes, que en general son de mampostería (*). La garganta de estas poleas tiene una disposición es-

(*) En la proyección de la derecha, se han dejado de dibujar las guías del movimiento circular, para que se vea la totalidad de la polea, que aparece como en el aire.

pecial, representada en mayor escala en la *figura* 53, *lám.* 6.ª, de la que la *a* representa una polea simple y la *b* se refiere al caso en que sea doble. El fondo de cada garganta está constituído por un disco de gutapercha, madera ó cuero, que tiene por objeto disminuir el rozamiento, consiguiendo que el desgaste del cable sea menor. Dicho disco está marcado en ambas figuras con la letra *m*.

147. Ruedas de engranaje.—La forma y objeto de esta clase de órganos ha sido explicada en el estudio cinemático de los mecanismos, en el que se indicó al propio tiempo la nomenclatura de las diversas partes de que constan. Basta añadir que en las combinaciones de dichas ruedas, ó en los engranajes, como se les llama, toma el nombre de *rueda* la que tiene mayor diámetro, y el de *piñón* la menor. Esta última suele tener mayores dimensiones en sentido del eje.

El modo de hacerlas solidarias del árbol de rotación, es idéntico al explicado para las poleas.

148. Guías de movimiento rectilíneo. — Sirven para asegurar la dirección del movimiento rectilíneo que puedan tener ciertos órganos de las máquinas. Su forma es muy variada, y pueden estar constituídas por dos largueros (*) entre los cuales marcha el órgano guiado, el cual lleva unas lengüetas que encajan en ranuras abiertas en aquellos.

Otra forma empleada para las guías, es la representada en la *figura* 54, en la que las piezas *a* de forma cilíndrica son las que constituyen el órgano que nos ocupa. El objeto guiado *c*, lleva unas mordazas *b b* en sus extremos, las cuales pueden comprimir más ó menos á las guías por medio de los tornillos *t*.

Suelen también afectar las guías la forma que indica la *figura* 55, y en este caso están constituídas por dos barras *A A*, de forma prismática, en vez de ser cilíndrica como en la figura anterior. La pieza guiada *B*, lleva unas ranuras de

(*) Los maquinistas dan á estos largueros el nombre de paralelas, por ser esta la posición que ocupan.

contorno interior igual al exterior de las barras, y de este modo queda asegurado su movimiento.

Por último, en ciertos casos, un cuerpo cualquiera terminado en un plano inclinado por su superficie superior, puede guiar con perfección el movimiento rectilíneo de otro cuerpo ú órgano cualquiera. El *plano inclinado*, que así se llama al aparato de referencia, permite el ascenso ó descenso de un cuerpo cualquiera en dirección de su línea de máxima pendiente; cuyo movimiento se verifica por la acción de una fuerza cualquiera en el ascenso, y por la pesantez en el descenso, auxiliado en este caso por otra fuerza determinada, si aquella no bastase, ó contrarrestado por otra fuerza de retenida, si aquella fuese excesiva.

Constituye el plano inclinado, bajo este punto de vista, una verdadera guía de movimiento rectilíneo, más sencilla que las consideradas anteriormente (*).

149. Guías de movimiento circular.—Tienen análogo objeto que las anteriores, pero refiriéndose á los movimientos de rotación.

La disposición de estos órganos varía, según deban servir para guiar el movimiento de un árbol que ocupe una posición horizontal, ó que se refiera al caso en que este sea vertical.

150. Para un *árbol horizontal*, suelen tener las guías la disposición indicada en la *figura* 56. El árbol *B*, que se repre-

(*) Casi todos los autores estudian el plano inclinado, incluyéndolo en las máquinas simples; pero tal modo de considerarlo es de todo punto inadmisible, al no cumplir con las condiciones prescritas á todo mecanismo. El plano inclinado es un cuerpo solamente, cuya forma especial le hace adecuado á ciertas operaciones industriales, y por sí solo no constituye nunca un mecanismo. Es necesaria la adición de un cuerpo que se mueva, y un aparato especial para producir el ascenso cuando tiene este objeto, como un torno, por ejemplo; en cuyo caso constituirá, sí, un verdadero mecanismo, del cual el plano inclinado es uno de sus órganos principales. Este nuevo modo de considerar el plano inclinado, facilitará las aplicaciones y salvará los escrúpulos que tienen algunos autores de adoptar una clasificación racional de los mecanismos, que como la que presentamos, está en consonancia con su constitución primordial, y con las aplicaciones prácticas que de ellos deben hacerse.

senta en ella para mayor claridad, está sostenido por dos *mordazas* ó *cojinetes A* y *A'* que le aseguran en su posición y constituyen las verdaderas guías del movimiento. Se construyen de una sustancia menos dura que el árbol (generalmente de bronce) con objeto de que no se deforme aquel por el rozamiento á que se halla expuesto. Los cojinetes tienen su alojamiento en una caja *cc* que se asegura con pernos al soporte, de cuya forma ya se ha tratado. Completa el mecanismo una *tapa* ó *sombrerete L* que por medio de unos pernos comprime á las mordazas contra el árbol, y de este modo se puede llevar la compresión á mayor grado, cuando las mordazas se hayan desgastado por el rozamiento. Un embudo con su tapa *K*, va abierto en el sombrerete, y tiene por objeto verificar el engrase de las superficies en contacto, lo que se consigue con cierta perfección, por comunicar con unas ranuras helicoidales practicadas en el cojinete superior.

151. Cuando es el *árbol vertical*, varía notablemente la disposición de las guías que le aseguran en su movimiento. Toman en este caso particular el nombre de *ranguas*, y se dividen en dos clases: *ranguas ordinarias* y *ranguas de elevación*.

152. La *rangua ordinaria* se reduce *(fig.* 57) al cojinete *a* de forma cilíndrica, que puede centrarse por medio de los tornillos *t*, y al *culote ó grano c;* este conjunto encaja en el *soporte b* donde descansa la totalidad del aparato. El objeto de las piezas *a* y *c*, es el mismo que para las guías anteriores se ha indicado. El pivote del árbol se ha representado en *E* para mayor claridad de la figura.

153. La *rangua de elevación* (*fig.* 58) consta de una rangua ordinaria, encerrada en una caja de hierro *mmm;* y esta última puede recibir un movimiento de ascenso por medio del tornillo *t* que termina en una cabeza en contacto con la rangua. Esta cabeza tiene una lengüeta *a* que penetra en una ranura practicada en el soporte, con objeto de impedir su rotación y que solo pueda tener un movimiento vertical. La tuerca *nn'* que produce el movimiento de este tornillo, se apoya sobre un saliente situado en la parte central inferior

del soporte principal *K*. El movimiento vertical que puede comunicarse al eje, para cuyo objeto es preciso aflojar de antemano los tornillos *t' t'* que lo centran, es útil en muchas circunstancias, y evita otras maniobras más complicadas y difíciles en las instalaciones mecánicas.

El engrase de ambas ranguas puede verificarse por un orificio lateral, en comunicación con un tubo que lleva su correspondiente embudo.

154. Engrasadores.—Complemento indispensable de los órganos que hemos explicado, serán los aparatos empleados con objeto de proporcionar la grasa que sea necesaria para mantener constantemente lubrificados los órganos que están en contacto; debiendo cumplir con la condición de que por su medio se obtenga un engrase continuo mientras persista el movimiento de los mecanismos, impidiendo también en lo posible la elevación de temperatura.

El engrasador más comunmente empleado lleva el nombre de *engrasador de aguja (fig. 59)* y consta de una botella de cristal *A* llena de aceite, cuyo tapón *B*, de madera, tiene un orificio por el que pasa un tubo *c c'*. En el interior de éste penetra una aguja de un diámetro muy poco menor que el interior del tubo, y que se apoya, como la figura indica, sobre el árbol en rotación *D*. Completa el aparato una rejilla metálica que rodea la parte del tubo *c c'* comprendida en el interior de la botella, y que sirve para impedir el paso de sustancias extrañas, purificando el aceite.

Cuando el árbol *D* toma un movimiento de rotación, comunica á la aguja, que está en contacto con él, un movimiento vibratorio que proporciona la salida paulatina del aceite. La cantidad de este dependerá, como es natural, del espacio hueco que queda entre aguja y tubo, y á igualdad de estas condiciones, de la velocidad de rotación del árbol, puesto que aumentando esta, aumentará también la del movimiento vibratorio que se comunica á la aguja. Estos aparatos cumplen mejor su cometido que los orificios abiertos en las mismas guías; pues el consumo de aceite en aquellos se verifica sólo

durante el movimiento de los árboles, lo que no sucede cuando la alimentación se proporciona por un simple orificio.

155. Es importante que el aceite empleado tenga la consistencia debida, y sobre todo, que no se altere con facilidad por la exposición al aire, debiendo advertir que en todos los casos, y cuando no haya confianza absoluta de su pureza, debe purificarse hasta el mayor grado posible. La *tabla número* 4 indica el orden de bondad de los diversos aceites que pueden emplearse, y el modo de purificar el aceite ordinario, caso que deba emplearse por no disponer de otro mejor.

CAPÍTULO II

Movimiento de los órganos guiados

156. División del estudio.—Para completar el estudio que pudiéramos llamar de introducción al de los diversos mecanismos que han de ocuparnos, se hace preciso hacer aplicación de las teorías expuestas al movimiento de los órganos que deben ser guiados en los aparatos especiales destinados á este objeto, cuya descripción acabamos de presentar. Seguiremos el mismo orden que ha servido para describir las guías, empezando, por lo tanto, por los cuerpos guiados en su movimiento rectilíneo, y terminando con las aplicaciones que pueden hacerse á los que están guiados en movimiento de rotación.

ARTÍCULO PRIMERO

Órganos guiados en movimiento rectilíneo

157. Aplicaciones que han de presentarse.—Las aplicaciones que presentaremos, están en consonancia con la descripción de las guías que á esta clase de movimiento corres-

ponden. Empezaremos por la más sencilla, por estar la guía compuesta de un solo cuerpo, y según ello haremos el estudio por el orden siguiente:

A.— Movimiento descendente en un plano inclinado.
B.— Idem ascendente en ídem ídem.
C.— Idem en las guías ordinarias.

A.—Movimiento descendente en un plano inclinado.

158. Estudio analítico.—En el descenso de un cuerpo *A* (*fig.* 60) situado sobre un plano inclinado, cuando está sometido solamente á la acción de la gravedad, se desarrolla un rozamiento entre las superficies en contacto, cuyo valor, según la regla del párrafo 101 de la teoría dinámica, es igual á la *componente normal de las fuerzas multiplicada por el coeficiente de rozamiento*. Supuesto que la única fuerza que obra en este caso es el peso Q del cuerpo, la componente normal ó presión que este ejerce sobre el plano, estará representada por $N = Q \cos \alpha$, llamando α el ángulo del plano con el horizontal.

La expresión de la fuerza de rozamiento tendrá la forma

$$F = Nf = Qf \cos \alpha$$

y su sentido debe ser contrario al del movimiento. Como este es producido por la componente tangencial del peso Q, cuyo valor es $T = Q \operatorname{sen} \alpha$, de dirección igual á F, pero de sentido contrario, resulta que en el movimiento del cuerpo, es $Q \operatorname{sen} \alpha$ la fuerza motriz y $Qf \cos \alpha$ la resistente; así, aplicando la ecuación general de la teoría dinámica, que se dijo servía de base para el estudio de los mecanismos, se podrán deducir de ella cuantas condiciones son inherentes al movimiento. Llamando s al espacio recorrido por los puntos de aplicación de ambas fuerzas, que es común por tener las dos la dirección de

la línea de máxima pendiente del plano, dicha ecuación de fuerzas vivas tomará la forma

$$(Q\,sen\,\alpha - Qf\cos\alpha)s = \frac{1}{2}M(v^2 - v_0^2)$$

sustituyendo en vez de Q, peso del cuerpo, su valor Mg y diferenciando, se tendrá

$$Mg\,(sen\,\alpha - f\cos\alpha)ds = Mvdv,$$

ó bien, puesto que $ds = vdt$,

$$g\,(sen\,\alpha - f\cos\alpha) = \frac{dv}{dt} = j$$

Este es el valor de la aceleración del movimiento, que nos indica ya la naturaleza de este (*).

En él puede sustituirse en vez de f, el valor hallado en el párrafo 101 de la teoría dinámica, $f = tg\,\varphi$ y en este caso se convertirá en

$$j = g\left(sen\,\alpha - \frac{sen\,\varphi\cos\alpha}{\cos\varphi}\right) = g\,\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} \qquad (a)$$

(*) Tratamos de presentar las aplicaciones bajo esta forma, deduciéndolas de la ecuación de fuerzas vivas, para uniformar la marcha de nuestras explicaciones y ponerla de acuerdo con los principios generales establecidos en la teoría dinámica. He aquí un inconveniente que hemos encontrado en varios autores; que estableciendo una teoría general, para servir de base á las explicaciones subsiguientes, no se encuentran aplicaciones de ella á los diversos mecanismos, ó no se sigue en ellos una marcha análoga. Hemos necesitado trabajos especiales en algunos casos, para unificar el estudio partiendo siempre de esta ecuación; y los resultados obtenidos satisfacen nuestros deseos de obtener simplificación notable, tanto en la marcha general, como en el estudio particular de los diversos mecanismos.

Con este ejemplo hemos corroborado la idea vertida ya en la teoría general dinámica, de que la ecuación de fuerzas vivas encierra las leyes todas del movimiento de las máquinas.

deduciendo de esta fórmula que el movimiento será acelerado ó retardado, según que el ángulo α sea mayor ó menor que el de rozamiento cuyo valor es φ; y también que si $\alpha = \varphi$, la aceleración es nula, y el movimiento es uniforme.

159. Las leyes del movimiento se deducirán por dos integraciones sucesivas, según enseña la mecánica racional, teniendo en cuenta la correlación de los valores, aceleración, velocidad y espacio recorrido, expresada en las fórmulas

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Ponemos de manifiesto solamente el cálculo que corresponde, ya que tantos ejemplos de él se han presentado en Mecánica racional, y por lo tanto ninguna dificultad debe presentar su inteligencia (*).

$$\frac{dv}{dt} = g\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi}; \qquad \int_0^v dv = \int_0^t g\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi}dt;$$

$$v = g\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi}\,t.$$

La segunda integración verificada en la misma forma, puede seguir la marcha siguiente:

$$\int_0^s ds = \int_0^t g\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi}tdt; \qquad s = g\frac{sen\,(\alpha - \varphi)}{cos\,\varphi}\,\frac{t^2}{2}.$$

(*) Esta aplicación está comprendida en el primer caso del párrafo 106 de Delaunay. Suponemos que el cuerpo parta del estado de reposo, y por tanto la velocidad inicial se supone igual á cero. El mismo límite inicial se toma para la determinación de la ley de espacios recorridos; todo con objeto de simplificar el cálculo, que por otra parte no presenta dificultad en el caso que los valores iniciales sean distintos de cero. Bastaba definir la integral entre los correspondientes límites.

De ambas ecuaciones puede hacerse aplicación para encontrar los valores particulares de velocidades, tiempos, espacios recorridos, etc., en función de los que sean datos de la cuestión, y venir en conocimiento de cuantos detalles son relativos al movimiento que se estudia (*).

160. Cálculo gráfico.—El de este caso, es bien sencillo si se recuerda la regla del párrafo 104, dada para tomar en consideración el rozamiento de superficies planas. Refiriéndonos á la misma figura, obsérvese que por la aplicación de la regla, debe trazarse la resultante R de las acciones que el cuerpo A ejerce sobre el plano, de tal modo que forme con la normal N el ángulo φ de rozamiento. Por la descomposición indicada en el triángulo 1—2—4, se observa que el valor del rozamiento es 3—4; y siendo 2—4 la componente tangencial del peso Q en dirección del movimiento, resulta que la diferencia 2—3 es la fuerza real que obra sobre el cuerpo para producir dicho movimiento, cuya magnitud debe servir de base para la determinación de los elementos que caracterizan á éste (**).

161. Ya que el movimiento es uniformemente variado, según hemos dicho, por ser constante el valor 2—3, precisa determinar, gráficamente también, el valor de la aceleración; lo cual se conseguirá mediante la construcción que sea expre-

---

(*) No repetiremos en los estudios subsiguientes la investigación de las ecuaciones del movimiento, porque como dejamos entrever en el texto, solamente las presentamos en esta aplicación, con objeto de que sirvan de norma para los casos en que deban conocerse los detalles del movimiento en las diversas piezas de un mecanismo. La Mecánica racional ha prescripto ya una marcha general y sencilla de aplicar, en los diversos casos, como acabamos de comprobar.

(**) En todas las aplicaciones del cálculo gráfico, dibujamos con tinta encarnada las costrucciones á que da lugar la investigación de los esfuerzos; poniendo líneas seguidas á los polígonos reales, ó que corresponden á esfuerzos efectivos, y de trazos y puntos á los polígonos teóricos. Las líneas de construcción se hacen de trazos. Este modo de presentar las figuras facilitará notablemente su inteligencia, y permitirá distinguir con suma claridad las construcciones, un tanto complicadas á veces, del cálculo gráfico de los mecanismos.

sión gráfica de la fórmula $F = Mj = \frac{Q}{g} j$, ó su igual $\frac{F}{j} = \frac{Q}{g}$. Tómese, por lo tanto, la magnitud 1—a igual á g, valor numérico conocido, y la ab paralela á 2—3 nos proporciona el valor de la aceleración que se busca (*).

162. La ley de variación de la velocidad, se encuentra teniendo en cuenta que es una recta, de la que la aceleración representa el coeficiente angular, por tener un valor constante. Trácese, por lo tanto, la perpendicular ao á la recta ab; tómese la magnitud ao igual á la unidad en la escala de tiempos, y la recta ob representa la ley que se busca; de tal modo, que todas las rectas comprendidas en el ángulo vot, que sean normales á ot, representarán las velocidades que tenga el cuerpo A, al cabo del tiempo correspondiente á la distancia al punto o. Por ejemplo, si se quiere encontrar la velocidad del cuerpo al cabo de dos unidades de tiempo, bastará tomar lo magnitud oa' igual al doble de oa, y $a'b'$ medida en la escala de velocidades, nos dará la que se busca.

163. Puede encontrarse también la ley de las variaciones que experimentan los espacios recorridos; la que, según la expresión encontrada, estará representada por una parábola. La construcción de esta, ó en otros términos, la integración gráfica de la ecuación de la velocidad, no puede presentar di-

---

(*) Es preciso tener en cuenta que las construcciones deben hacerse mediante el trazado previo de la escala del dibujo. La misma escala que sirva para representar las magnitudes de los esfuerzos, puede servir para otras medidas, como son velocidades, tiempos, etc.; pero en muchos casos será más conveniente, para mayor claridad de los resultados, que se adopte escala diferente. Esta observación debe hacerse en los dibujos correspondientes al cálculo gráfico que se presente, indicando cuál es la escala de fuerzas y cuál la de velocidades, que son las dos más comunmente empleadas.

Es conveniente que el alumno se acostumbre á resolver problemas numéricos con la regla y el compás, y que compare los resultados obtenidos con los que proporcionan las fórmulas que se han establecido. De este modo se familiarizará con este sencillo procedimiento, y le será sumamente fácil la resolución de las cuestiones de Mecánica aplicada.

ficultad alguna, mucho más en el caso que estudiamos, por haberla reducido á su forma más sencilla $s = j \frac{t^2}{2}$ (*).

Terminaremos este caso, indicando la suma facilidad que existe para deducir de la figura directamente las expresiones analíticas antes encontradas, con lo cual quedaría demostrada una vez más la exactitud del procedimiento, y confrontados los valores que se deseen (**).

B.—Movimiento ascendente en un plano inclinado.

164. Estudio analítico.—Sea un cuerpo *A* (*fig.* 61) el que trata de elevarse por un plano inclinado un ángulo α, venciendo la acción de su peso *Q*; y supongamos que la potencia *P* forme un ángulo δ con la dirección de la máxima pendiente del plano. Las componentes normales de las fuerzas *P* y *Q*, serán respectivamente $P \operatorname{sen} \delta$ y $Q \cos \alpha$, de donde resulta que el valor de la presión normal ejercida por el cuerpo sobre el plano es

$$N = Q \cos \alpha - P \operatorname{sen} \delta$$

(*) No presentamos en la figura la ley de los espacios, porque á pesar de no existir dificultad alguna para ello, no hay ventaja positiva en hacerlo. Los cálculos gráficos que deben usarse en la práctica, han de satisfacer á la condición de sencillez, y solamente son empleados aquellos en que se hace uso casi exclusivo de rectas y arcos de círculo. En este caso se encuentran los correspondientes á los mecanismos que hemos de usar más adelante, y cuando en la práctica se deban hacer determinaciones en que hayan de construirse expresiones de segundo ó mayor grado, se combinará el cálculo gráfico con el analítico. No damos la preferencia absoluta á uno ó á otro; deseamos escojer lo más práctico, lo más sencillo y lo menos expuesto á errores. En algunos casos cumple con estas condiciones un método mixto, ó sea que participe de los dos presentados en estos estudios.

(**) La comprobación y comparación entre ambos cálculos, es fácil y se deduce del estudio de las relaciones entre los lados de los triángulos, y por esta razón nos dispensamos de hacerla en este caso. La indicaremos en algún mecanismo, cuando con ella se evidencien de un modo notable las ventajas del método gráfico sobre el analítico. Creemos que este estudio comparativo no debe formar parte del texto, por no constituir doctrina especial, y se pondrá también por nota en la página correspondiente.

y el valor del rozamiento, según la regla dada

$$F = Nf = (Q \cos \alpha - P \operatorname{sen} \beta) f.$$

Siendo P la potencia, el trabajo motor será $T_m = P\, s \cos \beta$, llamando s el espacio recorrido en dirección de la máxima pendiente del plano. El trabajo resistente útil será $T_u = Q\, s \operatorname{sen} \alpha$ y el trabajo nocivo $T_f = Nfs$. La ecuación general de fuerzas vivas toma la forma

$$P\, s \cos \beta - Q\, s \operatorname{sen} \alpha - Nfs = \frac{1}{2} (M v^2 - M v_0^2)$$

y diferenciándola, pueden deducirse fácilmente las condiciones del movimiento, de idéntico modo al que hemos empleado en el caso anterior (*).

165. Para que el movimiento sea uniforme, ó en otros términos, para que la potencia P sea la extrictamente necesaria á la elevación del peso Q, se hace precisc que el segundo miembro de la ecuación se anule, ó lo que es consecuencia directa, que

$$P \cos \beta - Q \operatorname{sen} \alpha - Nf = o$$

de cuya ecuación, y sustituyendo por N su valor, se puede deducir el de P que buscamos (**)

$$P = Q \frac{\operatorname{sen} \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \operatorname{sen} \beta} = Q \frac{\operatorname{sen} (\alpha + \varphi)}{\cos (\beta - \varphi)} \qquad (b)$$

después de sustituir en vez de f su valor $tg\, \varphi$.

(*) Es conveniente que los alumnos resuelvan esta aplicación y que discutan la fórmula de la aceleración, para ejercitarse en las aplicaciones de este curso, y no olvidar los principios aprendidos en los anteriores, que tan necesarios les son en los estudios á que se refiere esta clase. La sencillez del cálculo y el deseo de que el alumno se acostumbre á resolver por sí las aplicaciones cuya marcha conoce, nos impide entrar en detalles, que ni aun por nota creemos deban incluirse en estos estudios.

(**) Puede deducirse también esta fórmula en función de los lados del

166. Iguales consecuencias se hubiesen deducido aplicando el teorema de Alembert, según el cual se reducen las cuestiones de movimiento á problemas de equilibrio, con sólo tomar en consideración la fuerza de inercia del cuerpo. Existe entre esta y las directamente aplicadas, un equilibrio que podemos llamar dinámico, cuyas condiciones (seis en el caso general) se reducen á una sola; la de proyecciones sobre la dirección del movimiento, ya que este es de traslación.

Dicha ecuación de equilibrio toma la forma

$$P\cos\beta - Q\,\mathrm{sen}\,\alpha - Nf - \frac{Q}{g}j = o$$

y de ella puede deducirse el valor de la aceleración, y las condiciones del movimiento, así como las necesarias para que este sea uniforme, por un cálculo idéntico al que anteriormente hemos presentado (*).

167. La fórmula encontrada para valor de P puede discutirse con objeto de ver las condiciones más favorables al modo de ejercerse la potencia, ó lo que es lo mismo, para de-

---

triángulo formado por el plano, y bajo esta forma podrá ser de utilidad en muchos casos.

Por la sencillez, omitimos complicar el cálculo, y si se dispone de tiempo suficiente, puede encontrarse la fórmula correspondiente y hacer aplicaciones numéricas de ella.

(*) No es deseo de complicar el que nos hace indicar dos caminos para la investigación de las fórmulas correspondientes al movimiento en estudio. Creemos que además de la aplicación directa, debe presentarse esta aplicación del notabilísimo teorema de Alembert, para que aprenda el alumno á tomar en consideración las fuerzas de inercia con ejemplos prácticos. El desuso de estas ideas, pudiera hacer que se llegara á perder por completo la noción de fuerza de inercia, tan necesaria en el estudio de la Mecánica. Por lo demás, y una vez que se haya practicado en la clase todo cuanto indica el texto, puede el alumno escojer cualquiera de los métodos que se explican, para deducir las consecuencias relativas al estudio del plano inclinado.

ducir en qué caso será mínimo el valor de P. Este análisis se hará aplicando directamente la teoría de máximos y mínimos, ó sea encontrando la primera derivada de P con respecto á θ, é igualando á cero. Pero como la consecuencia que se obtenga hemos de verla deducida con suma facilidad en el cálculo gráfico, omitimos la discusión analítica, por creerla al alcance de cuantos estudian estas lecciones.

168. Cálculo gráfico.—El *cálculo gráfico* lo referiremos exclusivamente, según las indicaciones del caso anterior, á la investigación de la potencia extrictamente indispensable para obtener el ascenso del cuerpo, estudiando también las condiciones más favorables en que pueda encontrarse.

La regla del párrafo 104 indica el ángulo que ha de formar con la normal la resultante R de las acciones del cuerpo A; pero el sentido del ángulo es contrario al del caso anterior, por serlo el del movimiento. Supuesto que dicha resultante, cuya dirección es conocida, tiene por componentes las fuerzas P y Q, de las cuales la primera es desconocida, se vendrá en conocimiento de esta por la construcción del triángulo 1—2—3, obtenido trazando la 2—3 paralela á P, la que representará ya el valor de esta. Al propio tiempo que obtenemos este resultado, se deduce la magnitud de la resultante $R = 1 - 3$, y la del rozamiento, por la proyección de 3—4 sobre la dirección del movimiento, según lo dicho en el caso anterior. Expresa, según esto, la magnitud 3—4, la influencia del rozamiento en el valor del esfuerzo, ó sea la cantidad que este aumenta por efecto de aquel; pues si no existiera rozamiento, la resultante hubiera sido 1—4 y el valor del esfuerzo el 2—4. A este puede llamarse *esfuerzo teórico*, en consonancia con la nomenclatura que hemos sentado en la teoría dinámica, y que hemos de emplear por necesidad en el estudio de los diversos mecanismos.

169. Discusión.—Al variar la dirección de la potencia, una nueva paralela á ella nos hubiera proporcionado su valor. De aquí, que *todas las rectas que partiendo del punto 2 terminen en la 1—R, nos representan las magnitudes de los esfuerzos que á*

sus direcciones corresponden (*). Consecuencia directa de esta regla es la investigación del valor mínimo que pueda tener la potencia, el cual se deduce inmediatamente por la propiedad geométrica de ser la perpendicular la mínima distancia entre un punto y una recta. Así, trazando desde 2 la perpendicular $2-5$ á la recta R, obtendremos dicho mínimo valor de la potencia; y si se observa que el ángulo formado por ella con la $2-b$ paralela al plano es igual á φ, podemos deducir la consecuencia de que *la potencia tiene un valor mínimo, cuando forma con el plano un ángulo igual al de rozamiento.*

C.—Movimiento en las guías ordinarias.

170. Estudio analítico.—Sea A el cuerpo guiado por las barras B y C de la *figura* 62, y se trata de determinar la potencia P que será necesaria para vencer una resistencia Q que forma un ángulo determinado con la dirección de las guías (**).

La marcha que debe seguirse en este problema es idéntica á la del anterior, y se reduce á establecer la ecuación de fuerzas vivas que, según hemos dicho, contiene todos los elementos necesarios para la determinación de las condiciones del movimiento. Para mayor sencillez, supondremos unifor-

---

(*) He aquí una consecuencia práctica y de suma trascendencia, al presentarnos bajo un solo golpe de vista la correlación entre los diversos esfuerzos que deban ejercerse en distintas direcciones, y al proporcionarnos el medio de hallar cualquiera de ellos sin repetir cálculo alguno, lo que sería bien enojoso. La comparación de este método con el analítico es sumamente sencilla, pues basta observar que si proyectáramos la resultante $1-3$ sobre la normal, su proyección representaría la suma de las correspondientes á cada una de las P y Q, y sería el valor $Q\cos\alpha - P\,sen\,\delta$ á que nos hemos referido en el cálculo analítico. Deducimos que efectivamente el valor del rozamiento es la magnitud $3-a$ obtenida por la proyección de $3-4$ sobre el movimiento, y deduciríamos por fin, con suma facilidad, el valor de P encontrado anteriormente.

(**) Ponemos en las guías este ejemplo, que puede ser de utilidad práctica, por emplearse en la forma que se supone, para las máquinas de vapor.

midad en éste, lo cual no está en desacuerdo con lo que sucede en la práctica; porque siendo estos aparatos, uno de los órganos que se encuentran en los mecanismos más complicados, tendrá la máquina uno especial llamado *volante* para conseguir dicha uniformidad, y su estudio hemos de hacerlo más adelante (*).

La citada ecuación se reduce, según lo dicho, á la forma marcada con el número (3) en la teoría general dinámica, que es la ecuación general de las máquinas en régimen

$$T_m - T_u - T_f = o$$

y aplicada á este caso

$$Ps - Qs \cos \alpha - Nfs = o.$$

En ella representan, α el ángulo de la resistencia Q con la dirección del movimiento; s el camino recorrido en dirección de éste; N la presión normal sobre la guía correspondiente; Nf el valor del rozamiento deducido de la regla varias veces mencionada; pero teniendo presente el valor de N que es $Q \operatorname{sen} \alpha$, podrá deducirse la expresión formular de la potencia

$$P = Q (\cos \alpha + f \operatorname{sen} \alpha) \qquad (c).$$

Esta expresión puede discutirse también, como en el caso anterior, para deducir las condiciones más favorables á la po-

---

(*) En todas las aplicaciones que hemos de presentar, obedeceremos á la idea de estudiar el movimiento uniforme, sobre todo cuando el mecanismo suela estar en estas condiciones al usarlo en circunstancias ordinarias. De todos modos, ninguna dificultad puede presentar el estudio completo del movimiento variado, y la marcha ha quedado indicada en el primer problema resuelto con relación al plano inclinado. No es posible dar una extensión tan grande al estudio de los mecanismos, que sobre no presentar utilidad práctica, haría imposible abarcarlos en los límites correspondientes al curso de Mecánica aplicada.

tencia, y los valores que deba tener al variar el ángulo α, como sucede en la práctica. Ninguna dificultad ofrece la expresada discusión, y por lo tanto, omitimos indicarla.

171. **Cálculo gráfico.**—También es de extremada sencillez el *cálculo gráfico* correspondiente á este caso. La regla del párrafo 104 de la teoría dinámica, indica ya el modo de trazar la resultante R del sistema de fuerzas que obran sobre el mecanismo, y á esta regla debe añadirse que dicha resultante ha de pasar por el punto o de intersección de P y Q. Trácese, por lo tanto, desde este punto la recta R que forme con N el ángulo φ contado en el sentido del movimiento; y si la recta $0-1$ representa con arreglo á escala el valor de la resistencia, se conocerá una de las componentes, y las direcciones de la resultante y la otra componente. La $1-2$ paralela á P, nos dará el valor de esta, obteniendo en $0-2$, la resultante R á que nos referimos. La presión normal que el cuerpo A ejerce sobre la guía, se vé representada en $0-3$, y en $2-3$ la magnitud del rozamiento, con lo cual resulta para valor de la potencia teórica ó fuerza necesaria para vencer la resistencia en el caso que no existiera el rozamiento, el valor $1-3$, diferencia entre la potencia real y el rozamiento.

172. Véase cómo el polígono de las fuerzas $0-1-2$, nos pone de relieve, lo mismo que en los casos anteriores, no solamente el valor de la cantidad P que exige el enunciado del problema, sino las magnitudes de cuantas fuerzas pueden considerarse en él; que si bien no son á primera vista indispensables bajo el punto de vista que ahora hacemos el estudio, lo han de ser más adelante cuando se trate en resistencia de materiales de la determinación de los espesores que deben tener las diferentes piezas de las máquinas (*).

(*) Esta observación es general y se aplica á todos los estudios subsiguientes. En resistencia de materiales, para la determinación de las dimensiones correspondientes á las piezas de máquinas, sirven de punto de partida las presiones que soportan, y es conveniente su determinación, para que no haya necesidad de inmiscuir en aquella parte del estudio los problemas que son ajenos á su especial índole.

173. Trabajos desarrollados.—Para terminar con las guías de movimiento rectilíneo, indicaremos que en todos los casos es sumamente sencilla la determinación de los trabajos que corresponden á cada una de las fuerzas potencia, resistencia y rozamiento, y basta conocer perfectamente los puntos de aplicación de cada una de dichas fuerzas, sin cuya idea será imposible la expresada determinación; ya que es preciso multiplicar por el esfuerzo, la proyección sobre él, del camino recorrido por su punto de aplicación.

Refiriéndonos á este ejemplo, bastará tomar como unidades de medida para el esfuerzo y el camino recorrido, el kilogramo y el metro respectivamente, y si s representa el espacio recorrido por el punto o en un segundo, el trabajo de la potencia en el mismo tiempo es, según se ha visto, Ps kilográmetros, ó bien $\frac{Ps}{75}$ al representarlo en caballos de vapor. Al trabajo de la resistencia le hemos dado la forma $Q\,s\,\cos\alpha$ por tener el valor $s\,\cos\alpha$, la proyección del camino recorrido sobre la dirección de Q. Y por fin, el correspondiente al rozamiento que llamaremos F, será igual también á

$$F\,s = N f s = Q\,\text{sen}\,\alpha\, s f = Q f s \,\text{sen}\,\alpha.$$

si bien no sea el punto o el de aplicación de este esfuerzo. Pero esto no es óbice para que el camino recorrido tenga en este caso la misma magnitud s que al de la potencia corresponde, porque el punto de aplicación debe ser el a, ya que en él tienen lugar las acciones totales que se ejercen entre el cuerpo guiado y su guía. Este punto a recorre un camino que, por ser paralelo al descrito por el punto o, tendrá el mismo valor s que corresponde al de este último.

174. La representación gráfica del trabajo, se reduce en este sencillo caso á un rectángulo en que sus dos dimensiones sean los elementos fuerza y espacio recorrido en su dirección; pero al no ser constantes, la obtendríamos mediante el área

de una curva que sea la expresión gráfica de la integral $\int F ds$, definida entre los correspondientes límites.

ARTÍCULO II

ÓRGANOS GUIADOS EN MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

175. Aplicaciones que han de presentarse.—Las aplicaciones que hemos de presentar, dadas las guías que de esta clase de movimiento se han descrito, se referirán á las posiciones que ocupe el árbol; debiendo distinguir, por lo tanto, los dos subcasos siguientes:

A—Movimiento de un árbol horizontal en sus cojinetes.
B— Idem de ídem vertical en su rangua.

Explicaremos sucesivamente cada uno de ellos, siguiendo la marcha prescrita en los casos anteriores.

A.—Movimiento de un árbol horizontal en sus cojinetes.

176. Bases y división.—En el párrafo 107 de la teoría general dinámica, se ha explicado el modo de tomar en consideración el rozamiento de muñón, que se desarrolla entre este órgano y la correspondiente guía; y por lo tanto, dicha explicación deberá tenerse en cuenta, tanto al encontrar las ecuaciones correspondientes como para el cálculo gráfico.

Será conveniente subdividir este estudio para su mejor inteligencia, en dos casos, que podremos llamar teórico y práctico: el primero se refiere á un eje, en el cual se desarrollan esfuerzos y reacciones en un mismo plano de la sección recta; el segundo será relativo á las condiciones ordinarias que se verifican en la práctica, ó lo que es lo mismo, á un eje de longitud determinada, desarrollándose los esfuerzos en puntos distintos de su longitud.

177.—a.—Caso teórico.—Estudio analítico.—Sea *(figura 63)* un muñón A guiado por las mordazas ó cojinetes B y C, y solicitado por la acción de una fuerza excéntrica P, que debe producir el movimiento, venciendo una resistencia también excéntrica Q_1, además del peso correspondiente Q_2. Ya que estas dos fuerzas son concurrentes, puede sustituirse su acción por la de su resultante Q, única resistencia que se debe considerar. La ecuación de fuerzas vivas de que hemos hecho mención, se referirá á los trabajos de las fuerzas P y Q, comprendiendo también el correspondiente al rozamiento, cuyo valor en función de la resultante R, de P y Q, es según la regla del párrafo 103, igual al producto de esta resultante por el coeficiente modificado y su expresión formular, $F = Rf_1$. El punto de aplicación de esta fuerza es el a', distante del punto inferior a un arco aa', cuyo número de grados sea el correspondiente al ángulo de rozamiento, según la regla del párrafo 106 de la teoría dinámica.

Según esto, si se llaman respectivamente r, r' y r'' á las magnitudes cm, cn y ca, y se tiene presente que por ser el movimiento de rotación, los espacios lineales recorridos en dirección de cada una de las fuerzas expresadas son respectivamente αr, $\alpha r'$ y $\alpha r''$, en cuyas expresiones representa α el ángulo correspondiente á una rotación determinada, ángulo que es común por referirse á varios puntos de un mismo sistema material en rotación, la ecuación de fuerzas vivas tomará la forma

$$P\alpha r - Q\alpha r' - Rf_1\alpha r'' = \frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) =$$

$$= \frac{1}{2} Mr^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2} Y (\omega^2 - \omega_0^2)$$

después de poner en evidencia el valor $v = \omega r$ de la velocidad lineal en función de la angular ω y el $Y = Mr^2$ del momento de inercia correspondiente.

Diferenciada esta ecuación, proporciona la siguiente

$$(Pr - Qr' - Rf_1 r'')\,d\alpha = Y\omega\,d\omega$$

y si se tiene en cuenta la expresión del elemento angular $d\alpha = \omega\,dt$ hallada en Mecánica racional, podrá escribirse dicha ecuación bajo la forma

$$(Pr - Qr' - Rf_1 r'')\,dt = Y\,d\omega$$

de donde se deduce

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Pr - Qr' - Rf_1 r''}{Y} \qquad (d)$$

como expresión de la aceleración angular (*), y de ella podrán deducirse las condiciones características del movimiento, por medio de las integraciones correspondientes.

178. Solo restará la sustitución en esta fórmula de las cantidades que no sean datos directos, por los correspondientes valores en función de ellos; y á este efecto se observará, que conocidos P, r y r'' por ser datos de la cuestión; conocido también f_1 por medio de las tablas correspondientes, y cono-

---

(*) Puede observarse la identidad de esta fórmula con la que se deduce directamente al emplear la fórmula hallada para aceleración angular en el movimiento de rotación (Delaunay, párrafo 247). Dicha forma general es

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sum Pp}{\sum mr^2}$$

ó sea el cociente de la suma de momentos de las fuerzas exteriores dividido por el momento de inercia del cuerpo. Los dos términos de la fracción obtenida en el texto, son precisamente las cantidades indicadas.

Comprobamos una vez más las notables ventajas de la aplicación del teorema de fuerzas vivas, del que huyen en estos casos los autores que hemos podido examinar. Con él se evita distraer la imaginación, reteniendo en ella fórmulas como la que se acaba de citar, y se consigue dar carácter general y unidad grande á las cuestiones de Mecánica aplicada.

cido por último el valor de Y por medio de las fórmulas deducidas en Mecánica racional, faltará únicamente la determinación de las cantidades R, Q y r' en función de dichos datos. Esta determinación es sencilla, si se recuerda la fórmula que proporciona el lado de un triángulo

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ)}$$

en la cual debe sustituirse el correspondiente de Q.

Para la determinación de Q y r' podrá servir la fórmula análoga á la anterior, que proporciona Q en función de Q_1 y Q_2, combinada con la ecuación de momentos relativos á estas fuerzas, fundada en la propiedad de ser el momento de la resultante igual á la suma de los momentos de las componentes.

Sustituídos los valores encontrados en el correspondiente á la aceleración angular, podrá hacerse un cálculo análogo al que hemos presentado en el caso de movimiento rectilíneo, discutiendo las fórmulas que se obtengan para deducir cuanto sea relativo al movimiento en estudio (*).

(*) Hemos querido estudiar una aplicación del caso de movimiento variado cuando es de rotación, para estar en condiciones de presentar con sencillez el cálculo de los mecanismos, verificándolo en su estado de régimen, ó sea con movimiento uniforme. De otro modo hubiera sido preciso repetir en cada mecanismo el estudio actual, complicando demasiado las fórmulas. Bajo esta forma se presenta un tipo general del cálculo en los casos de no uniformidad, y las aplicaciones que pretendan hacerse de él serán sencillas, teniendo como modelos los dos que hemos presentado referente el uno al movimiento rectilíneo y este al de rotación.

Se ha omitido completar el cálculo de este estudio, con el objeto de no recargar el texto con detalles que no conducen al esclarecimiento de la cuestión puramente mecánica que en él debe presentarse. Hemos experimentado que estos detalles suelen distraer la imaginación del alumno, desviándola del objeto principal. Dejando planteada la ecuación, é indicados los diversos valores de las cantidades que entran en ella, queda por resolver una cuestión puramente algebráica que ninguna dificultad presenta.

Esta misma marcha seguiremos en general, á no ser que las fórmulas que

179. Habrá uniformidad en el movimiento, cuando la aceleración angular $\frac{d\omega}{dt}$ sea nula, y en este caso la ecuación correspondiente se obtendrá haciendo cero el numerador de la (*d*) y tomará la forma

$$Pr - Qr' - Rf_1 r'' = 0 \qquad (e)$$

en la cual se sustituirá por R el valor antedicho, deduciendo el de P en función de Q de la ecuación resultante.

Esta expresión hubiera podido obtenerse directamente estableciendo la ecuación correspondiente á las máquinas en régimen, para lo cual basta tener presente que el segundo miembro de la que ha servido de punto de partida para este estudio, es cero en este caso.

180. Cálculo gráfico.—Para el *cálculo gráfico* que hacemos en el caso de movimiento uniforme, sirve de base la regla del párrafo 107 de la teoría general dinámica. Dice la primera parte de la regla que *la reacción que se desarrolla es tangente al círculo de rozamiento*. Trácese, por lo tanto, éste, cuyo radio ρ es conocido por la fórmula (14) en función del radio del muñón, y representémosle por el pequeño círculo de puntos que se ve en nuestra figura (*). Como dato para el trazado de la reacción total, y opuesta á la resultante de P y Q, se presenta el punto o' de intersección de estas (después de obtenida Q como se dijo anteriormente), y sólo

---

deban obtenerse sean las empleadas en la práctica del mecánico, ó sean muy sencillas y de ellas se puedan deducir consecuencias importantes para el conocimiento del mecanismo en estudio.

Esta omisión la haremos extensiva á los casos que, como en el actual, el cálculo gráfico nos proporciona resultados directos y sencillos, según vamos á ver en el párrafo siguiente.

(*) Exajeramos la magnitud de este círculo, para que la figura resulte con la debida claridad. Acostúmbrese el alumno á exajerarlo también en la figura que dibuje para el estudio de todos los casos, pero no en las aplicaciones numéricas que se le propongan, las que debe hacer con arreglo á la escala adoptada de antemano en los dibujos.

resta salvar la ambigüedad correspondiente á las dos tangentes que desde el punto o' pueden trazarse al círculo de rozamiento.

181. La segunda parte de la regla mencionada viene en nuestro auxilio, al indicar que *el sentido de la reacción debe ser tal, que desfavorezca la potencia;* ó en otros términos, *la potencia real debe resultar mayor que la teórica.* Esta condición queda satisfecha con la tangente R que se ve en nuestra figura, cual podrá observarse al determinar las magnitudes necesarias para la resolución del problema, ó construir el polígono de las fuerzas.

Para el trazado de este último, obsérvese que son conocidas las direcciones de todas ellas y las magnitudes Q_1 y Q_2; fácilmente se determinará, por lo tanto, la magnitud de la resultante total R y de la potencia P. Indicamos aparte la construcción, para no complicar la figura principal. Tracemos 1—2 y 2—3 paralelas é iguales respectivamente á Q_1 y Q_2, y las paralelas 3—4 y 1—4 á P y R cerrarán el polígono, proporcionándonos las magnitudes de estas fuerzas.

182. El polígono de las fuerzas teóricas ó *polígono teórico*, como le llamaremos en adelante, se obtiene considerando que si el rozamiento no existiera, el radio de rozamiento sería cero, y la tangente al círculo de rozamiento se reduce á la $o'c$ que pasa por el centro del muñón. La 1—5 paralela á ella cierra este polígono, y proporciona la potencia teórica $P_0 = 3-5$, al mismo tiempo que nos indica la influencia que el rozamiento ejerce en el valor de la potencia; influencia representada por la magnitud 4—5. Es esta magnitud, según en el caso anterior se ha dicho, la proyección del rozamiento sobre la dirección de la potencia, y de ella se puede deducir directamente el valor absoluto de aquel.

183. **Resumen de operaciones necesarias para el cálculo gráfico.**—Para concretar las ideas y resumir la doctrina que se deduce de las consideraciones apuntadas, indicaremos las operaciones que sucesivamente se deben practicar para hacer el cálculo gráfico.

OPERACIONES DE PREPARACIÓN PARA EL CÁLCULO GRÁFICO

Hallar la resultante Q *de* Q_1 *y* Q_2.

Prolongar Q *y* P *hasta que se corten en* o'.

Trazar el círculo de rozamiento con arreglo á escala, valiéndose de la fórmula $\rho = rf_1$ *que dá el valor de su radio, ó calculando éste gráficamente.*

Trazar desde o' *la tangente al círculo de rozamiento, de modo que desfavorezca la potencia.*

CÁLCULO GRÁFICO PROPIAMENTE DICHO

Trazar con arreglo á escala la recta 1—2 *igual y paralela á* Q_1.

Trazar también, en las mismas condiciones, la 2—3 *que corresponde á* Q_2.

Cerrar el polígono con las paralelas 1—4 *y* 3—4 *á* R *y* P *respectivamente.*

CÁLCULO DEL POLÍGONO TEÓRICO

Es análogo al del polígono real, sustituyendo la tangente al círculo de rozamiento, por la recta que pasa por el centro del muñón (*).

184.—b.—**Caso práctico.—Estudio analítico.**—Sea (*figura* 64) un eje *A B*, cuyos muñones *A* y *B* descansan sobre los correspondientes cojinetes, no marcados en la figura. La poten-

(*) Hemos insistido tanto en esta aplicación, por ser la primera que presentamos correspondiente al caso de superficies curvas en contacto. Creemos que con esta forma, bajo la cual la presentamos en el texto, podrá tenerse una guía segura en los demás casos de aplicaciones análogas. En ellos no habremos de ser ya tan explícitos, dejando al cuidado del Profesor la repetición, poco conveniente en un texto, de todas las reglas en que se fundan los cálculos; repetición que será necesaria hasta que el alumno se penetre bien del modo como deben practicarse todas las operaciones y pueda marchar por sí solo en cuanto se refiera á cálculos ordinarios ó de esta naturaleza.

cia P se desarrolla en un plano normal situado en un punto C del eje, y la resistencia Q en otro cuya posición D es distinta y paralela á la anterior. Para no complicar el cálculo, no tomamos en consideración el peso del aparato que actuará en su centro de gravedad, y que obra como verdadera resistencia; cuyo efecto se acumula sobre el producido por Q.

También supondremos, como en el caso anterior hemos hecho observar, que la fuerza P sea la extrictamente indispensable para vencer la resistencia dada Q, ó lo que es lo mismo, que el movimiento sea uniforme.

185. Para hacer aplicación de la ecuación general de las máquinas en régimen, empecemos por calcular las reacciones que se desarrollan en los muñones; y como provendrán de los efectos producidos en ellos por las fuerzas P y Q, podremos hacer la descomposición de cada una de estas en otras dos paralelas P_1, P_2 y Q_1, Q_2, situadas en los planos normales al eje, que pasan por los puntos medios A y B de dichos muñones, y actuando con el mismo brazo de palanca que las primeras. Si se emplea la nomenclatura indicada en la figura, los valores de cada una de estas componentes serán respectivamente

$$P_1 = \frac{Pb}{l}, \quad P_2 = \frac{Pa}{l}, \quad Q_1 = \frac{Qb'}{l}, \quad Q_2 = \frac{Qa'}{l},$$

y las reacciones que buscamos podrán suponerse originadas por P_1 y Q_1 las del muñón A, y por P_2 y Q_2 las del muñón B. Podría reproducirse una figura análoga á la 63, para representar las proyecciones sobre un plano normal al eje; pero sin necesidad de esta repetición, se deducirán los valores observando que la reacción R_1 del muñón A, es resultante de P_1 y Q_1, y la R_2 desarrollada en B, lo es á su vez de P_2 y Q_2. Esta idea nos proporciona las expresiones

$$R_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + 2 P_1 Q_1 \cos (PQ)}$$

$$R_2 = \sqrt{P_2^2 + Q_2^2 + 2 P_2 Q_2 \cos (PQ)}.$$

Puede ya hacerse aplicación de la ecuación

$$T_m - T_u - T_f = o,$$

si se observa que los rozamientos desarrollados en cada uno de los muñones tienen por valores respectivos $R_1 f_1$ para el A y $R_2 f_1$ para el B. A este efecto, llámense r' y r'' á los brazos de palanca de P y Q; r_1 y r_2 á los radios de los muñones A y B, y encontrando los valores que á cada uno de los trabajos corresponden, sustitúyanse en la ecuación expresada, que tomará la forma

$$P\alpha r - Q\alpha r' - f_1 R_1 \alpha r_1 - R_2 f_1 \alpha r_2 = o,$$

ó bien suprimiendo el factor comun α y poniendo en vez de R_1 y R_2 sus valores

$$Pr - Q r' - f_1 r_1 \sqrt{P_1^2 + Q_1^2 + 2P_1 Q_1 \cos(PQ)} - \\ - f_1 r_2 \sqrt{P_2^2 + Q^2_2 + 2P_2 Q_2 \cos(PQ)} = o,$$

y por último, sustituyendo por P_1, Q_1, P_2 y Q_2 las expresiones correspondientes

$$Pr - Q r' - \frac{f_1 r_1}{l} \sqrt{P^2 b^2 + Q^2 b'^2 + 2P Q b b' \cos(PQ)} - \\ - \frac{f_1 r_2}{l} \sqrt{P^2 a^2 + Q^2 a'^2 + 2P Q a a' \cos(PQ)} = o \quad (f)$$

186. Método de aproximación empleado en este caso.— Esta ecuación permite ya deducir el valor de P que trata de encontrarse en función de Q, para lo cual basta hacer desaparecer los radicales. Pero la dificultad inherente á esta operación y la correspondiente á la ecuación resultante, exige en la práctica el empleo de alguno de los métodos de aproximación, siendo el de las aproximaciones sucesivas el

más comunmente empleado en Mecánica aplicada; por cuya razón lo vamos á exponer, si bien ligeramente, para que puedan resolverse cuantas aplicaciones sean necesarias.

Consiste en suponer la máquina teórica, ó sea en suprimir los rozamientos; con lo cual, siendo $f_1 = o$, la ecuación resultante toma la forma $Pr - Qr' = o$, de la cual se deduce

$$P = Q\,\frac{r'}{r} \qquad (g).$$

Este primer valor de P es muy inexacto; pero sustituído en las cantidades subradicales que para mayor sencillez llamamos H y H', nos proporciona un segundo valor de la forma

$$P = \frac{1}{r}\left\{ Qr' + \frac{f_1 r_1}{l}\sqrt{H} + \frac{f_1 r_2}{l}\sqrt{H'} \right\} \qquad (g')$$

187. En general, es suficiente la aproximación que este segundo valor proporciona; pero si no lo fuera, podría servir nuevamente de punto de partida para obtener un tercero, por sustitución también en las cantidades subradicales, cuyas operaciones se continuarían hasta obtener la aproximación deseada.

188. Es de notar una particularidad relativa á las fórmulas (e) y (f) obtenidas en este estudio. Si en esta última se supone $b = b'$ y $a = a'$, ó lo que es lo mismo, si las fuerzas P y Q actúan en un mismo plano, los resultados obtenidos con ambas serán idénticos, cual puede comprobarse verificando los correspondientes cálculos. Esto nos proporciona la simplificación de practicar las operaciones siguiendo la marcha indicada en el caso teórico, siempre que la distancia entre los puntos C y D sea pequeña, como sucede muchas veces; pero debe tenerse en cuenta que para el cálculo de las reacciones R_1 y R_2 que se desarrollan en los dos apoyos, deberá hacerse la descomposición de fuerzas que es consiguiente; á no ser que el plano donde pueda suponerse que actúen

las P y Q, esté situado en el punto medio del eje; en cuyo caso, cada una de las R_1 y R_2 será igual á la mitad de la resultante R de P y Q, calculada por la fórmula

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,cos\,(P\,Q)}$$

de que ya hemos hecho uso.

189. Cálculo gráfico.—En el *cálculo gráfico* seguiremos una marcha que sea la expresión del indicado método de las aproximaciones sucesivas. Representamos en la *figura* 65 el árbol $A\ B$ reducido á su eje de simetría, y tómese desde el punto D la magnitud $D\,Q = Q$, si bien no sea esta la verdadera proyección de la fuerza real Q, cuya dirección, situada en el plano normal al eje que pasa por D, forma un cierto ángulo con el plano de proyección, según se ve en la *figura* 65 *bis*, que representa la proyección del árbol sobre un plano normal á él. En esta misma figura se representa la dirección dada para la potencia, cuyo brazo de palanca se supone igual á $a\,c$.

Considerando la máquina teórica, ó lo que es igual, suponiendo que no exista rozamiento alguno, podría obtenerse el valor de la potencia por el método ordinario, y sería expresión del cálculo el polígono teórico $0—1—2$, obtenido uniendo o con a, tomando $0—1 = Q$ y trazando la $1—2$ paralela á P. Esta última nos da la potencia teórica $P_0 = 1—2$ que sirve de punto de partida para los cálculos sucesivos, análogamente á lo indicado en el método analítico, y cuyo valor puede confrontarse con aquel.

190. Es necesaria ahora nueva construcción para modificar el valor obtenido, en vista de la influencia que el rozamiento tiene en el valor de P, y como dicho rozamiento se desarrolla en los puntos A y B de la *figura* 65, debe depender de las componentes que en estos puntos obren.

Por esta razón debe hacerse la descomposición de Q en otras dos Q_1 y Q_2 referidas á estos puntos. Indicamos en esta figura el cálculo gráfico de los valores de estas componentes, empleando con tal objeto el trazado de los polígonos funicu-

lar y de fuerzas. Se ha trazado este último, tomando un polo cualquiera o y uniéndolo con los puntos 1 y 3 que resultan de marcar la magnitud $1-3=Q$ sobre una paralela á esta fuerza, trazada por el punto A. Las direcciones $o-1$ y $o-3$ sirven de punto de partida para el trazado del polígono funicular $A\,E\,F$, que se obtiene prolongando el lado $A\,o$ hasta la intersección en E de la vertical Q, y trazando $E\,F$ paralela á $o-3$. La línea $A\,F$ de cierre de este polígono, marca la dirección con que debe trazarse la $o-2$, que divide á $1-3$ en dos trozos $1-2$ y $2-3$, iguales respectivamente á las componentes Q_1 y Q_2 que corresponden á cada uno de los puntos A y B.

De igual modo se puede hacer la descomposición de P_0 en otras dos P_1 y P_2 que obran en los mismos puntos, y de esta construcción que marcamos también en la figura, omitimos dar detalles, por ser idéntico el procedimiento al que hemos empleado relativamente á la fuerza Q(*).

Resulta, que en el plano normal A, obran fuerzas P_1 y Q_1 en la misma dirección de P y Q; y trasladándolas á su punto

---

(*) Hemos presentado los problemas de descomposición de fuerzas haciendo uso del polígono funicular, para que no se pierda el hábito del trazado de este polígono, que es de suma utilidad cuando se trata de determinar las dimensiones de los ejes. En el cálculo gráfico de estos, que se practica en la parte del curso denominada *Resistencia de materiales*, debe hacerse uso de un polígono de esta clase, ya que sus ordenadas representan magnitudes proporcionales á los momentos de flexión y sirven de punto de partida para el cálculo de las expresadas dimensiones, dándonos al propio tiempo una idea de la correlación de espesores entre los diversos puntos del eje.

Por esta razón adoptaremos la costumbre de rayar los polígonos funiculares, además de marcarlos tambien con tinta encarnada, con objeto de que se destaquen perfectamente del resto de la construcción.

Recordado por esta vez el trazado del polígono funicular, sobre el que se ha insistido en Mecánica racional, emplearemos en adelante, bien este procedimiento, ó bien cualquiera de los otros también muy conocidos para resolver los problemas de composición y descomposición de fuerzas, fundados todos, cuando estas son paralelas, en la proporcionalidad inversa que existe entre ellas y sus brazos de palanca.

de encuentro *o* (*fig.* 65 *bis*) y construyendo el paralelógramo correspondiente, se obtendrá en R_1 la resultante de estas fuerzas, que representa la dirección de la reacción que se desarrolla en el muñón de la izquierda. En cuanto á la posición de esta fuerza, basta recordar la regla tantas veces mencionada de ser tangente al círculo de rozamiento, en el conveniente sentido para que produzca aumento en la potencia, y por lo tanto, podrá marcarse en la tangente $r_1\ r_1$ la posición de la reacción desarrollada para el muñón *A* (*). De idéntico modo puede obtenerse la resultante R_2 de las fuerzas Q_2 y P_2 que obran en el muñón *B*, (que suponemos menor que *A*) y la tangente $r_2\ r_2$ al círculo de rozamiento de este muñón, que sea paralela á R_2, nos representará la reacción que á dicho muñón corresponde.

191. Puede encontrarse ya la potencia definitiva, si se observa que en cada muñón existe para producir su movimiento el par de fuerzas $(R_1\ r_1)$ para el *A* y $(R_2\ r_2)$ para el *B;* los cuales pueden ya suponerse trasladados arbitrariamente á lo largo del eje, para que obren en un plano común, que supondremos sea el plano de la *figura* 65 *bis* (**); en este caso la teoría de composición de fuerzas, nos proporciona como resultante definitiva la recta oo_1 que une los puntos

(*) Nótese bien la diferencia característica entre la construcción relativa al caso teórico y la correspondiente al práctico. En el primero, bastaba la reacción del muñón para establecer el equilibrio con la potencia y resistencia, y por esta razón se confundia en dirección con la de la resultante. Considerando los dos muñones, ya la reacción que en uno se desarrolla no restablece por sí sola el equilibrio, y debe, por lo tanto, ser distinta de la resultante, si bien paralela á ella. Debe fijarse el alumno en la concordancia de estos resultados con las teorias de Mecánica racional, según las cuales, considerando dicha resultante aplicada al sistema material en rotación, puede suponerse en *A* la existencia de dos fuerzas iguales y contrarias, lo cual no altera en nada el estado del sistema. Resulta la fuerza R_1 sustituida por una fuerza r_1 y un par; la fuerza r_1 representa la presión del muñón sobre el cojinete, y el par produce una rotación. (Delaunay, párrafo 182).

(**) Recuérdense las propiedades enunciadas en la teoría de pares, entre las que figura que un par puede ser trasportado paralelamente á sí mismo, cuando está aplicado á un sólido invariable. (Delaunay, párrafo 181).

de intersección correspondientes, y el triángulo o—1—3, la potencia que se busca en la magnitud 1—3.

La aproximación que este resultado proporciona, es suficiente en la mayoría de los casos; pero si no lo fuera, podría repetirse el cálculo, tomando la fuerza $P = 1 - 3$ como punto de partida, y operando con ella como lo hemos hecho con P_0. Esta operacion, como decimos, no es necesaria para la investigación del valor que debe tener la potencia en los mecanismos; pero será conveniente servirse de dicha fuerza 1—3 para encontrar las magnitudes de las reacciones r_1 y r_2, iguales en valor absoluto á las resultantes R_1 y R_2, siempre que nos sea indispensable encontrar dichas fuerzas, como sucederá cuando se resuelvan los problemas relativos á la resistencia de materiales, para cuyo estudio habrán de servir como punto de partida.

192. Observaciones relativas al movimiento de un árbol horizontal.—Resumiendo las ideas que presiden al cálculo de un árbol horizontal en el caso práctico de tomarse en consideración su longitud, puede observarse que bastará el conocimiento de cuanto se refiere al caso teórico en cada mecanismo especial, para combinar del modo indicado, los valores de las componentes que corresponden á cada uno de los esfuerzos que obran sobre el mecanismo. Por esta razón, sólo consideramos el caso teórico en las aplicaciones que más adelante hemos de presentar; ya que será sumamente fácil la transición al caso práctico, por razonamientos y cálculos idénticos á los ya practicados.

B.—Movimiento de un árbol vertical en su rangua.

193. Resolución analítica.—La resolución analítica de este problema, es análoga á la del caso anterior, si bien debe tenerse en cuenta la variación consiguiente al modo de actuar las fuerzas, que procuraremos poner de manifiesto.

Sean *(fig. 66)* Q_1 la carga que soporta el árbol; $C\,Q_2$ la resistencia excéntrica que debe vencerse, y DP la dirección de la potencia, tambien excéntrica. Si se observa que la carga Q_1

durante la rotacion del árbol alrededor de su eje de figura, gravita sobre la superficie plana inferior del apoyo, se deducirá que origina un rozamiento de superficies planas entre los círculos que están en contacto. Pero las acciones excéntricas de las fuerzas P y Q_2, obrando del mismo modo que en los árboles horizontales, proporcionarán una presion sobre la superficie cilíndrica lateral de la rangua, dando orígen á un nuevo rozamiento de superficies curvas, de la misma naturaleza que el rozamiento de muñón ya explicado. Es un caso de combinación el que se nos presenta para el estudio. Existen, además de las fuerzas directamente aplicadas, los dos rozamientos de que hemos hablado. La ecuacion de trabajos contendrá, como en el caso anterior, los de las fuerzas P, Q_2 y los correspondientes á estos rozamientos. El valor del rozamiento de muñón desarrollado en la superficie lateral, es idéntico al de dicho caso y su expresión formular lo proporciona en función de P y Q_2. Resta solamente encontrar el que corresponde á los circulos en contacto, para agregar su trabajo con el signo negativo, á los términos de la ecuación que anteriormente hemos empleado.

194. Esta investigación es la que ahora nos va á ocupar, y en ella debe tenerse en cuenta que al obrar las fuerzas P y Q_2 en un plano normal al eje, ninguna influencia tendrán para producir dicho rozamiento; el que será debido exclusivamente á la carga Q_1 que actúa normalmente á los círculos en contacto. Suponiendo que dicha carga se reparta con uniformidad en toda la superficie de apoyo, en lo que no se comete error sensible, podemos encontrar la porción de ella que corresponde á un elemento ω. Llámese r al radio del árbol, y la carga por unidad superficial tendrá por valor $\frac{Q_1}{\pi r^2}$ y el valor del rozamiento que en este elemento se desarrolla tendrá por expresión $\frac{Q_1 \omega}{\pi r^2} f$; (presion normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento). Esta fuerza tendrá una dirección perpendicular al radio $o\,\omega$ y será opuesta al movimiento comunicado.

Trátase ahora de componer los rozamientos desarrollados en todos los elementos de las superficies en contacto, sustituyéndolos por un sistema más sencillo. Con este objeto, obsérvese que el elemento superficial ω' diametralmente opuesto al ω, experimenta un rozamiento de la misma intensidad que el de éste, pero dirigido en sentido contrario; estos dos rozamientos constituyen un par que podemos llamar *par elemental de rozamiento*. Como toda la superficie del círculo *o* puede ser descompuesta en elementos que cumplirán con las mismas condiciones, resulta que la fuerza total de rozamiento está formada por el conjunto de los pares elementales, contenidos todos en el plano de apoyo, y que pueden reducirse á un par resultante contenido en el mismo plano. El trabajo correspondiente á él, es el que tratamos de encontrar; pero si se tiene en cuenta que en la ecuación de trabajos resulta eliminado el valor del ángulo de giro, quedando solamente, como en el caso anterior, el producto de la fuerza por su brazo de palanca, ó sea el momento correspondiente á ella, trataremos de hallar este valor, del cual podrá deducirse inmediatamente el trabajo en cuestión.

Para encontrar el momento del *par de rozamiento*, que así puede llamarse el par resultante, tomado con relación al eje *o*, se hallará la suma de los momentos de los pares elementales, según enseña la Mecánica racional. Consideremos, pues, todos los elementos superficiales ω comprendidos entre dos circunferencias descritas con el centro común *o* y con radios ρ y $\rho + d\rho$. La suma de momentos de los rozamientos desarrollados en esta superficie anular elemental, estará representada por

$$\rho \frac{Q_1 f}{\pi r^2} \cdot \Sigma \omega;$$

y sustituyendo por $\Sigma \omega$ su valor $2 \pi \rho \, d\rho$, tomará la forma

$$\frac{2 Q_1 f \rho^2 d\rho}{r^2}$$

Integrando esta expresión entre los límites o y r, que corresponden al caso actual, se obtendrá para el momento que se busca

$$M.^{o} = \frac{2\,Q_1 f}{r^2} \int_0^r \rho^2\, d\rho = \frac{2\,Q_1 f}{r^2} \cdot \frac{r^3}{3} = \frac{2}{3} Q_1\, fr. \qquad (h)$$

Determinado este valor, correspondiente al momento del par de rozamiento, bastará, como hemos dicho, multiplicarlo por el ángulo de giro, y agregar el trabajo resultante á los términos correspondientes de la ecuación general, para deducir la potencia que debe emplearse con objeto de que venza todas las resistencias desarrolladas en la rangua, y cuyo cálculo omitimos por su gran sencillez.

La fórmula obtenida nos hace ver la conveniencia de terminar por superficies convexas la parte inferior del árbol y la superior del culote; con cuyo medio, si bien no cambia la magnitud del rozamiento, por ser independiente de la extensión de las superficies que están en contacto, disminuye notablemente su brazo de palanca y con él el trabajo absorbido por esta resistencia nociva.

195. Pero debemos deducir una consecuencia importante relativa á esta fórmula, que nos será de utilidad para la simplificación de los cálculos analíticos y gráficos. Si se describe una circunferencia con centro o y con un radio $om = \frac{2}{3} r$, y tangencialmente á esta circunferencia se considera obrando un par FF' opuesto al movimiento, cuyo brazo de palanca mn tenga una dirección cualquiera y su intensidad sea $F = F' = \frac{1}{2} Q_1 f$, el momento de este par tendrá la misma expresión $\frac{2}{3} Q_1\, fr$ antes encontrada; pudiendo considerársele como verdadero par de rozamiento y deducir las siguientes reglas:

1.ª *El camino recorrido por el punto de aplicación del rozamiento en la parte inferior de la rangua, es una circunferencia cuyo radio vale dos tercios del correspondiente á los círculos en contacto.*

2.ª *La intensidad de cada una de las fuerzas del par, puede considerarse debida á una presión normal igual á la mitad de la efectiva que actúa en el eje de simetría.*

La primera regla es de utilidad para la investigación del trabajo debido al rozamiento, y de la segunda haremos aplicación en el cálculo gráfico, que es, según llevamos dicho, la expresión más sencilla de los resultados que se desean obtener en los diversos problemas relativos á los mecanismos.

196. Debe también considerarse el caso de que el contacto entre eje y rangua se verifique según una superficie anular en que esté terminado aquél, como sucede en algunos mecanismos.

La carga sobre cada elemento ω estará representada por $\frac{Q_1 \omega}{\pi (r^2 - r'^2)}$, y el rozamiento correspondiente por la misma expresión multiplicada por f. (Representamos por r y r' los radios exterior é interior de la superficie anular.) La suma de momentos de los rozamientos desarrollados en la superficie anular elemental de radios ρ y $\rho + d\rho$, tendrá la forma

$$\rho \frac{Q_1 f}{\pi (r^2 - r'^2)} \cdot \Sigma \omega = \frac{Q_1 f}{\pi (r^2 - r'^2)} \cdot 2 \pi \rho^2 d\rho$$

é integrando esta expresión entre los límites r y r', se obtendrá para valor del momento del par de rozamiento

$$M.^o = \frac{2 Q_1 f}{r^2 - r'^2} \int_{r'}^{r} \rho^2 d\rho = \frac{2}{3} Q_1 f \frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2} =$$

$$= \frac{2}{3} Q_1 f \frac{r^2 + rr' + r'^2}{r + r'} \qquad (h')$$

de la cual puede deducirse también el trabajo correspondiente.

197. Cálculo gráfico.—Ninguna dificultad puede ofrecer este estudio, ya que conocemos la influencia de las fuerzas que actúan en estos órganos de los mecanismos.

Puesto que el rozamiento de los círculos en contacto depende exclusivamente de la carga Q_1 según llevamos dicho, debe determinarse primero este valor, para que, considerado luego como nueva resistencia que se ejerce en el mismo plano que las fuerzas P y Q_2, pueda componerse con esta última. Fundándonos en la primera regla de las que acabamos de enunciar, se trazará el círculo de radio $on = \frac{2}{3} r$ y las tangentes F y F' opuestas al movimiento, cuya dirección nos dará la del par de rozamiento. El valor de estas fuerzas se deduce de la segunda regla; y en virtud de ella, siendo $ab = \frac{1}{2} Q_1$ la presión normal que produce una de las fuerzas del par, la F por ejemplo, se trazará la reacción total $a'\ b$, que forma con $a\ b$ el ángulo de rozamiento φ, y la horizontal $a\ a'$ nos representa el esfuerzo que se buscaba, que puede proyectarse horizontalmente en F. No hay necesidad de nueva construcción para encontrar F', por ser su valor igual al de F.

Conocido el valor del par de rozamiento, fácil será la resolución definitiva del problema, análoga á la del caso en que el árbol era horizontal, puesto que las fuerzas todas se consideran actuando en el plano de la proyección de este nombre. La diferencia estriba únicamente en la posición de las resistencias y en haberse reducido á un par una de ellas. Sin necesidad de nuevos razonamientos, que serían repetición de los hechos en el caso de referencia, indicaremos la construcción más sencilla que debe hacerse, á cuyo efecto se empezará por calcular el radio de rozamiento y dibujar el que hemos llamado círculo de rozamiento. La construcción es la siguiente:

1.° *Componer la fuerza Q_2 con el par FF'.* El triángulo $1-2-3$, trazado desde el punto 1 de intersección de F y Q_2 indica la composición de estas fuerzas, dando por resultante

la $Q' = 1 - 3$ y el $4 - 5 - 6$, cuyo punto de partida es el 4 de intersección de Q' y F' nos da por resultante $4 - 6$ de estas últimas, la resistencia definitiva Q. Es de observar que esta fuerza Q obtenida, es igual y paralela á Q_2, según podría demostrarse fácilmente al comparar los triángulos construídos; y esta particularidad no debe de chocar, si se recuerda que en Mecánica racional se ha dicho que la composición de una fuerza y un par equivale á una variación en el brazo de palanca de la fuerza. (Debe tenerse en cuenta esta propiedad especial, para la comprobación de los cálculos gráficos en todos los casos análogos que puedan ocurrir).

2.° *Trazar por el punto 7 de intersección de P y Q la tangente al círculo de rozamiento*, en tal sentido que tienda á disminuir el brazo de palanca de la potencia.

3.° *Construcción del triángulo* $7 - 8 - 9$ que nos da en $8 - 9$ el valor de la potencia P y en $7 - 9$ el de la reacción total que se ejerce entre las superficies cilíndricas.

198. El cálculo del polígono teórico puede hacerse prolongando Q_2 y P y uniendo su punto de intersección con el centro o (*).

(*) No se indica en la figura por no complicarla, pero conviene que el alumno se ejercite en el dibujo completo, tanto de éste como de los demás problemas.

ESTUDIO IV

APLICACIÓN Á LOS MECANISMOS DERIVADOS

DEL PRIMER GRUPO CINEMÁTICO

Ó

MECANISMOS DE CONTACTO

CUADRO DEL ESTUDIO 4.°

PRELIMINARES. Marcha en este estudio.

MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS. Cuña.

MOVIMIENTOS CIRCULARES.
- Ejes paralelos.....
  - Cilindros de fricción.
  - Engranajes cilíndricos.
  - Trenes de engranajes.
  - Idem epicicloidales.
  - Levas de martillos.
- Ejes que se cortan...
  - Conos de fricción.
  - Engranajes cónicos.
- Ejes que ni se cortan ni son paralelos...
  - Hiperboloides de friccion.
  - Engranaje hiperboloide.
  - Tornillo sin fin.
  - Combinaciones de engranajes.

MOVIMIENTOS COMBINADOS.
- Movimiento rectilíneo, paralelo al plano de la rotación.
  - Rodillos.
  - Cremalleras.
  - Cremalleras dobles.
  - Levas.
- Movimiento rectilíneo, perpendicular al plano de la rotación.....
  - Tornillo ordinario.
  - Tornillo doble.
  - Tornillo diferencial.

PRELIMINARES

199. Marcha en el estudio.—En este estudio, como en los subsiguientes, nos servirá de norma la clasificación hecha en la teoría cinemática, con arreglo á la cual explicaremos los diversos mecanismos simples y compuestos que puedan considerarse comprendidos en este grupo. Las fórmulas y reglas halladas en la teorías generales, constituirán la base para encontrar las particulares que se refieran á cada mecanismo.

Procuraremos al mismo tiempo hacer en estas últimas cuantas simplicaciones sean necesarias, á fin de darles el verdadero carácter de fórmulas prácticas y que puedan emplearse con facilidad para las aplicaciones numéricas que deban resolverse.

También el cálculo gráfico trataremos de presentarlo con la mayor sencillez posible, indicando el medio para que las figuras que sean su fiel expresión, resulten con la claridad debida y puedan aplicarse á cuantos mecanismos se deriven de los que presentamos en nuestros estudios.

CAPÍTULO PRIMERO

Primera especie.—Movimientos rectilíneos

200. Mecanismos comprendidos en esta especie.—Solamente un mecanismo explicaremos que esté comprendido en esta especie, por realizar la transformación que en ella se indica. Es el que se conoce con el nombre de *cuña*, cuyo estudio vamos á emprender.

ARTÍCULO ÚNICO

Cuña

201. Descripción.—Se da generalmente el nombre de *cuña* á un sólido de forma prismática triangular, cuyo objeto industrial es separar dos partes de un mismo cuerpo ó dos cuerpos en contacto. Para verificar esta separación es preciso colocar la cuña de modo que su *vértice*, ó sea la arista intersección de las caras laterales mayores, esté situado entre los trozos ó cuerpos que se deseen separar, y ejercer un esfuerzo

en la otra cara lateral del prisma, á la que se da el nombre de *cabeza de la cuña*.

Muchos ejemplos pueden presentarse de las aplicaciones industriales que este aparato recibe, puesto que casi todas las herramientas ó útiles que se emplean para los trabajos mecánicos, como el buril, los dientes de una sierra, el escoplo, las asperezas de una lima, etc., no son otra cosa que verdaderas cuñas.

Pero el conocido con el nombre de *mecanismo de cuña*, cuyo uso industrial puede verse en las llamadas prensas de cuña, supone, además de la pieza que acabamos de describir, otra que reciba el movimiento rectilíneo de aquella, si bien modificado en su dirección, que es perpendicular á la primitiva.

Como es natural, y dada la idea que preside á la constitución de los mecanismos, cada una de las piezas, conductora y conducida, debe estar guiada en su movimiento rectilíneo por las guías correspondientes. Queda, por lo tanto, constituído el mecanismo por los siguientes órganos:

1.° La cuña propiamente dicha *abc* (*fig.* 67) que recibe en su cabeza la acción de la potencia *P*. La forma de su sección puede ser triángulo isósceles ó rectángulo.

2.° La pieza *X*, que recibe el movimiento rectilíneo de la cuña en dirección de la resistencia *Q* perpendicular á la potencia.

3.° La guía de la cuña, representada en la figura con la letra *G*. Este órgano debe estar fijo para que cumpla su debido efecto.

Y 4.° La guía de la pieza *X*, representada por la letra *G'*, cuya posición debe ser también fija.

Para seguir el orden que nos hemos propuesto, se explicarán separadamente los puntos siguientes:

A.—Teoría analítica.
B.—Cálculo gráfico.
C.—Resumen del estudio de este mecanismo.

A.—Teoría analítica.

202. Relación de velocidades.—La regla dada en el párrafo 16 correspondiente á esta combinación de movimientos, nos proporciona la relación de velocidades de ambas piezas; pues basta expresar la igualdad de sus proyecciones sobre la normal común N. Siendo v la velocidad correspondiente á la cuña y v' la de la pieza X, si se tiene en cuenta que el ángulo de v' con N es igual al C de la cuña, se tendrá

$$v' \cos C = v \operatorname{sen} C$$

como expresión de la relación (1) correspondiente al mismo párrafo 16.

La relación de velocidades viene, por lo tanto, expresada por la proporción

$$\frac{v}{v'} = \frac{\cos C}{\operatorname{sen} C} \quad (a)$$

Y la teoría cinemática del mecanismo queda completa, bien que se trate de su cálculo cuando esté construído, ó del correspondiente al mecanismo en proyecto. En el primer caso es dato el ángulo C y una de las velocidades, y en el segundo lo será la relación de estas, y se podrá venir en conocimiento del ángulo C.

203. Relación de esfuerzos.—Al establecer la teoría dinámica, trátase en primer lugar, de encontrar la relación de esfuerzos correspondiente á la máquina teórica. Esta relación se deduce inmediatamente al recordar la regla del párrafo 92, según la cual hay proporcionalidad inversa entre esfuerzos y espacios recorridos, ó lo que es igual, entre esfuerzos y velocidades; y por lo tanto, si se llama P la potencia y Q la resis-

tencia (*), la máquina teórica obedecerá en su relación de esfuerzos á la proporción

$$\frac{P}{Q} = \frac{v'}{v} = \frac{sen\ C}{cos\ C} \qquad (b).$$

El estudio de la máquina teórica es muy útil en todos los casos, porque sirve como punto de partida para un cálculo aproximado de las condiciones del mecanismo, constituyendo, por decirlo así, un croquis analítico de su estudio perfecto, que deberá ser modificado por la influencia de las resistencias nocivas. Del examen de la proporción (*b*) se deduce inmediatamente que *la potencia quedará favorecida, disminuyendo el ángulo de la cuña*, puesto que disminuyendo C, disminuye la relación $\frac{sen\ C}{cos\ C}$ por disminuir *sen* C y aumentar *cos* C, y por lo tanto, disminuye tambien la relación $\frac{P}{Q}$, ó en otros términos, que *con menor potencia, se podrá vencer una resistencia mayor, á medida que sea más pequeño el ángulo de la cuña.*

204. Puede ponerse esta fórmula en función de los lados ab y ac, base y altura de la cuña, si se tiene en cuenta que son complementarios los ángulos B y C; y en vista de ello, la relación (*b*) sufre las siguientes transformaciones:

$$\frac{P}{Q} = \frac{sen\ C}{cos\ C} = \frac{sen\ C}{sen\ B} = \frac{ab}{ac} = \frac{B}{H}$$

expresándonos la última relación, que los esfuerzos son proporcionales á la base y altura de la cuña, y también que *se favorece la potencia, disminuyendo la base ó aumentando la altura.* Esta consecuencia, como la relativa á la disminución del ángulo C, están de acuerdo con los usos constantes á que la cuña se destina.

(*) Esta misma nomenclatura emplearemos en todos los mecanismos.

205. Pasando ya al estudio de la máquina real y considerando su estado de régimen, podemos hacer aplicación de la ecuación correspondiente, deducida en el párrafo 91 de la teoría dinámica. Al hacer aplicación de ella, bajo la forma $T_m = T_u + T_f$, tendremos en cuenta que dicha ecuación debe aplicarse á cada uno de los cuerpos en movimiento, según la Mecánica racional enseña. Según esto, considerando la cuña como un sistema material al que aplicamos la expresada ecuación de trabajos, puede observarse que las fuerzas que en ella se han de considerar son:

1.ª La potencia P normal á la cabeza ab.

2.ª La reacción normal N que ejerce X sobre la cuña.

3.ª La reacción normal N' de G sobre la cuña.

Y 4.ª Los rozamientos dependientes de estas, cuyos valores están dados por la regla del párrafo 101 de la teoría dinámica.

Si se llama s al camino recorrido por la cuña en dirección de P, podremos hallar los valores correspondientes á los trabajos de estas fuerzas; los cuales, excluyendo el de N' que es nulo por tener esta fuerza una dirección normal al movimiento, tendrán los valores siguientes:

Trabajo de la potencia..... Ps
De la reacción N..... $N s \operatorname{sen} C$.
Del rozamiento $N'f$ en la cara ac..... $N'fs = Nfs \cos C$.
Del rozamiento Nf en la cara bc..... $Nfs \cos C$.

La ecuación de trabajos toma la forma

$$Ps = N \operatorname{sen} C.s + 2 Nf \cos C.s$$

ó bien suprimiendo el factor común s

$$P = N \operatorname{sen} C + 2 Nf \cos C \qquad (c)$$

Considérese ahora la pieza X, y en ella se observa que

llamado s' al camino recorrido en dirección de Q, las fuerzas y trabajos que deben tenerse en cuenta son los siguientes:

Acción normal N de la cuña sobre X ..... Trabajo $= N s' \cos C$
Reacción normal N'' de G' sobre X ..... Trabajo $= o$
Rozamiento Nf en la cara bc. Trabajo $= N f s' \operatorname{sen} C$
Idem $N''f$ en el contacto de... Trabajo $= N'' f s' = N \operatorname{sen} C f s'$
Resistencia Q ..... Trabajo $= Q s'$

Téngase en cuenta al establecer la ecuación de trabajos correspondiente á la pieza X, que la fuerza normal N que era resistencia en la cuña, actúa como potencia en esta pieza, siendo resistencias las demás que hemos puesto de manifiesto. (Esta observación es general para todos los mecanismos que hemos de estudiar.) La ecuación que se busca toma la forma

$$N s' \cos C = 2 N f s' \operatorname{sen} C + Q s'$$

ó bien, suprimiendo el factor común s' y despejando Q,

$$Q = N \cos C - 2 N f \operatorname{sen} C \qquad (d)$$

206. Las ecuaciones (c) y (d) nos dan la solución del problema, pues basta dividir una por otra para venir en conocimiento de la relación que se buscaba, al haber eliminado con esta operación la cantidad N. Dicha relación tiene la forma

$$\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{sen} C + 2 f \cos C}{\cos C - 2 f \operatorname{sen} C} \qquad (e)$$

Este resultado está de acuerdo con la fórmula (b), pudiéndose deducir aquella de ésta, con solo introducir la condición $f = o$, que es característica de las máquinas teóricas.

207. Rendimiento. — La relación de trabajos ó rendimiento del mecanismo, se encuentra muy fácilmente con sólo

tener en cuenta que son conocidas ya las relaciones de esfuerzos y de velocidades ó espacios recorridos; por lo tanto, bastará multiplicar invertidas dichas relaciones, con lo que se obtendrá el siguiente valor:

$$R.^{o} = \frac{T_u}{T_m} = \frac{sen\, C\,(cos\, C - 2f\, sen\, C)}{cos\, C\,(sen\, C + 2f\, cos\, C)} \qquad (f).$$

208. El conjunto de operaciones que llevamos hechas constituye la verdadera *apreciación del mecanismo*, puesto que de ellas pueden deducirse cuantas consecuencias son inherentes á éste, con solo discutir las fórmulas obtenidas. Esta discusión en general, no se hacé necesaria, bastando el análisis que hemos hecho de la fórmula correspondiente al mecanismo teórico, puesto que ella da una idea bastante exacta de la mayor ó menor bondad que pueda tener relativamente á la potencia en los diversos casos.

209. Complemento del estudio analítico.—Para completar el estudio analítico, nos resta encontrar los valores correspondientes á los diversos trabajos que se desarrollan, y los que tienen las reacciones ejercidas entre las diversas superficies en contacto. Estas últimas, punto final, por decirlo así, del estudio dinámico, habrán de servir como punto de partida cuando se trata de encontrar la resistencia de los diversos órganos de un mecanismo, en la parte del curso denominada *Resistencia de materiales*.

Ninguna dificultad ofrece en este problema la investigación de los valores que corresponden á los trabajos, puesto que el camino recorrido por los puntos de aplicación de los diversos esfuerzos es rectilíneo, y bastará multiplicarlo por dichos esfuerzos. Solamente el correspondiente á los distintos rozamientos que actúan, es el que viene en función de las cantidades N, N' ó N'' según la cara á que se refiera.

Pero la reacción N puede deducirse inmediatamente de uno de los valores *(c)* ó *(d)* según que sea dato de la cuestión

la potencia ó la resistencia, obteniéndose las dos expresiones

$$N = \frac{P}{sen\ C + 2f\ cos\ C} \qquad (g)$$

$$N = \frac{Q}{cos\ C - 2f\ sen\ C} \qquad (h)$$

y como son conocidos los valores de N' y N'' en función de N, que según hemos dicho son $N' = N\ cos\ C$ y $N'' = N\ sen\ C$, quedarán completamente determinados, tanto los rozamientos como las reacciones desarrolladas.

B.—Cálculo gráfico.

210. Polígono real.—El cálculo gráfico es consecuencia directa de la regla dada para el rozamiento de superficies planas, únicas que entran en la composición del mecanismo. Se trata *(fig.* 68, *lám.* 8.ª) de encontrar la potencia necesaria para vencer una resistencia dada Q. A este efecto, trácense las normales N, N', N'' á las superficies en contacto y se podrán inmediatamente conocer las direcciones de las resultantes R, R_1 y R_2 que forman con aquellas el ángulo φ de rozamiento, y están dirigidas en sentido del movimiento.

Siendo Q, R y R_2 las fuerzas que obran sobre la pieza X, el triángulo 1—2—3 en el que ha servido de base la fuerza 2—1 igual á Q, y en el que 2—3 y 1—3 son respectivamente paralelas á R_2 y R, será la expresión del cálculo relativo á esta pieza, y nos proporciona los valores 2—3 de R_2 y 1—3 de R.

En la cuña obran las fuerzas R, R_1 y P; y sirviendo R como punto de partida, puede construirse á su vez el triángulo 1—3—4 que nos proporciona en 3—4 el valor de R_1 y en 1—4 el valor que buscábamos de la potencia P. El polígono 1—2—3—4, obtenido por el sencillo trazado de paralelas á las diversas fuerzas, es la expresión del cálculo gráfico de la máquina real, proporcionando, como hemos dicho, no

solo el valor P que se busca, sino también las diversas reacciones que se desarrollan entre las superficies en contacto; y para el conocimiento de estas, se podrá venir en el de las componentes normales, y en el del rozamiento en cada uno de los contactos; pues basta la descomposición normal y tangencial de cada una de dichas reacciones.

211. Polígono teórico.—El polígono teórico es fácil construirlo, si se tiene en cuenta que los ángulos φ se anulan; por lo tanto, bastará trazar las paralelas á las diversas normales para obtener en $1-4'$ la fuerza teórica P_0 que sería necesario desarrollar si no existiera rozamiento.

212. Apreciación del mecanismo.—Es muy fácil hacer la apreciación de este mecanismo, siguiendo una marcha idéntica á la empleada en el cálculo anterior. Basta recordar los principios enunciados en la teoría dinámica, en la forma que á continuación se expresa.

a.—*Relación de espacios recorridos.*—Es inversa de la de esfuerzos que á la máquina teórica corresponde, según la regla del párrafo 92. Si se llaman s_p y s_q á los caminos recorridos por la potencia y resistencia respectivamente, se tendrá

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{Q_0}{P_0} = \frac{1-2}{1-4'}.$$

b.—*Relación de esfuerzos.*—Su valor está expresado por la fracción

$$\frac{P}{Q} = \frac{1-4}{1-2}.$$

c.—*Rendimiento.*—Es igual al cociente de la potencia teórica dividida por la efectiva, según la regla del párrafo 95. Su valor es

$$R.^0 = \frac{P_0}{P} = \frac{1-4'}{1-4}.$$

Basta en estas tres fracciones encontrar las magnitudes correspondientes, con arreglo á la escala del dibujo, para deducir los valores numéricos de cada una de ellas.

Pueden hacerse observaciones idénticas á las deducidas de la fórmula *(b)*, con solo observar que el ángulo C es igual al ángulo de la cuña, y por lo tanto, disminuyendo éste, disminuirá P_0, ó en otros términos, se favorecerá la potencia.

213. Nada debemos añadir por lo que respecta á los trabajos y reacciones, porque los primeros son conocidos en el momento que tenemos las magnitudes de todos los esfuerzos, y se sabe cuáles son los caminos recorridos por los puntos de aplicación; y en cuanto á las reacciones, se han ido encontrando sus valores, como auxiliares del cálculo de la potencia que se buscaba, lo que proporciona, según tenemos indicado, una de las grandes ventajas del cálculo gráfico, al obtener en una sola figura, cual es el polígono de las fuerzas, los valores de las cantidades que nos son indispensables en los cálculos mecánicos.

214. Si el dato fuera P, ó lo que es igual, se tratase de resolver la cuestión inversa de encontrar la resistencia que pueda vencerse con una potencia determinada, se hubiera hecho el trazado de un modo idéntico, variando solamente la expresión del rendimiento, que sería resultado de la regla del párrafo 96 de la teoría dinámica, la cuál nos proporciona el valor $R.^0 = \frac{Q}{Q_0}$ (*).

C.—Resumen del estudio de este mecanismo.

215. Bases que se sientan para los estudios subsiguientes.—Resumiendo cuanto llevamos dicho relativo al estudio de este mecanismo para fijar la marcha uniforme que hemos de seguir en todos ellos, y observando, al hacer este resumen, que la relación de esfuerzos de la máquina teórica es consecuencia inmediata, bien del valor correspondiente á la

(*) Es conveniente que los alumnos se acostumbren á resolver las cuestiones directa é inversa, aun cuando la explicación del texto se refiera solamente á una de ellas. Esto facilitará los estudios siguientes, y les familiarizará con los cálculos de los mecanismos.

relación de velocidades, ó bien del que se refiera á la relación de esfuerzos en la máquina real, podremos sentar las bases siguientes, para que nos sirvan de norma en lo sucesivo:

1.ª *Estudio geométrico del mecanismo, para deducir las condiciones especiales de su forma, según el objeto á que se destine.*

2.ª *Apreciación del mecanismo, comprendiendo los extremos siguientes:*

a *Relación de velocidades.*

b *Relación de esfuerzos.*

c *Relación de trabajos ó rendimiento.*

Este estudio se hará analítica y gráficamente, para que pueda escogerse el sistema que más convenga al mecanismo en cuestión.

3.ª *Valores de los trabajos desarrollados, referentes á la potencia, á la resistencia útil y los rozamientos.*

4.ª *Reacciones en las diversas piezas del mecanismo.*

En algunos casos omitiremos el estudio de alguno de los puntos indicados, especialmente el de estos dos últimos, que suelen estar comprendidos directamente en los anteriores. De todos modos, esta supresión se hará siempre que el punto suprimido sea idéntico al de otro mecanismo ó consecuencia inmediata de él. Perô cuando se puedan deducir consecuencias importantes, y haya facilidad de traducirlas en reglas prácticas relativas al mecanismo, se establecerán las fórmulas correspondientes para discutir los resultados que proporcionan (*).

(*) Adoptamos esta nueva marcha para el estudio, con el objeto, según se indica en el texto, de uniformar en lo posible las explicaciones de todos los mecanismos, y que sean consecuencia directa de las teorías generales que han de servir de base. En el tiempo que hemos llevado de enseñanza de esta asignatura, hemos experimentado los excelentes resultados que proporciona tal modo de considerar los problemas mecánicos. El alumno queda poseído de los principios que rigen al cálculo de las máquinas, y ninguna dificultad se le ofrece al proponerle cuestiones cuyo estudio directo no ha practicado. La facilidad al resolver estas, aumenta notablemente por el empleo casi exclusivo de la ecuación general de las máquinas, hallada en la teoría dinámica, de la que en general suelen presentar pocas aplicaciones los diversos autores que se ocupan de este asunto.

CAPÍTULO II

Segunda especie.—Movimientos circulares

216. Mecanismos comprendidos en esta especie.—Se consideran en esta especie, según la teoría general cinemática, tres clases diferentes, que son:

Clase *A*.—Ejes paralelos.
Idem *B*.—Ejes que se cortan.
Idem *C*.—Ejes que ni se cortan ni son paralelos.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Ejes paralelos

217. Diversos tipos correspondientes á esta clase.—Los mecanismos que van á explicarse, comprendidos en esta agrupación, son los siguientes:

a Cilindros de fricción.
b Engranajes cilíndricos.
c Trenes de engranajes.
d Trenes epicicloidales.
e Levas de martillos.

Pasemos á hacer aplicación de las teorías generales, á estos mecanismos.

a—Cilindros de fricción.

218. Descripción.—Consta este mecanismo de dos ruedas ó tambores cilíndricos montados sobre los árboles que han de trasmitirse el movimiento, y situados de tal modo, que están constantemente en íntimo contacto, siendo efecto de este la comunicación del movimiento. Esta trasmisión se emplea únicamente en los mecanismos muy ligeros, ó que han de soportar pequeños esfuerzos. Para aumentar la adherencia entre las superficies, y que la comunicación sea más fácil, se guarnecen las llantas de las ruedas con un trozo de correa del mismo ancho que ellas.

219. Apreciación del mecanismo.—Según la fórmula (3) del párrafo 21, la relación de velocidades angulares es inversa de la de radios; y esta proporción puede servir de base para el primer punto de la apreciación de un mecanismo de este género. La relación de esfuerzos se deduce inmediatamente por la descomposición del problema en otros dos que correspondan á cada una de las ruedas A y B (*fig.* 69). Sea P la potencia y p su brazo de palanca; Q la resistencia y q su brazo de palanca; N la presión normal en el contacto, y fN será el rozamiento que en este se desarrolla.

Si se llama α el ángulo de giro de la rueda A, la ecuación de trabajos correspondiente á esta rueda será $Pp\alpha = fN\alpha r$ y la correspondiente á la rueda B, en la que llamaremos α' al ángulo correspondiente, tomará la forma $fN\alpha' r' = Qq\alpha'$.

Suprimiendo factores comunes y eliminando N, resulta:

$$\frac{Pp}{fr} = \frac{Qq}{fr'} \text{ ó bien } \frac{P}{Q} = \frac{qr}{pr'}.$$

Ninguna dificultad ofrece la investigación de los trabajos, así como de la reacción N, que basta despejarla de cualquiera de las relaciones anteriores en función de P ó de Q.

Tampoco presenta dificultad el cálculo gráfico, que por su gran sencillez omitimos explicarlo.

b.—Engranajes cilíndricos.

220. Naturaleza de este mecanismo.—En el párrafo 27 se ha establecido la nomenclatura de los diversos elementos que constituyen este mecanismo, deduciendo en los 29 y 34 las reglas que presiden á su construcción, según las cuales es fácil hallar la forma de los dientes en todos los casos.

La naturaleza de las curvas que se obtengan, caracteriza y da nombre al engranaje; y si bien son muchos los trazados que pueden hacerse, y por consiguiente la clase de los engranajes obtenidos, solamente son usados los que llevan los nombres de *epicicloidales*, *de evolventes de círculo y de linterna*.

Debe tenerse en cuenta, que según las circunferencias primitivas sean tangentes interior ó exteriormente, así las rotaciones se verificarán en el mismo sentido ó en sentidos contrarios, proporcionando también un nombre al mecanismo, que recibe los de *engranaje interior* ó *engranaje exterior*.

Los engranajes ordinarios son, en general, de hierro, empleándose también otros metales, y fabricándose de una sola pieza cada una de las ruedas; pero cuando deben marchar á grandes velocidades, se disponen de modo que una de las ruedas tenga los dientes de madera, montados sobre unas mortajas que se practican en ella. Estos dientes, por su mayor elasticidad, presentan la gran ventaja de proporcionar trasmisiones menos rígidas y que hacen menos ruido durante la marcha. Otra ventaja evidente consiste en que es más difícil el deterioro total del engranaje, por la facilidad de reponer solamente uno, dos ó más dientes, cuando se hayan deteriorado; en cuyo caso sería necesaria la reposición total de la rueda, si fuese de metal.

ESTUDIO GEOMÉTRICO

221. Casos que se consideran en el trazado de los engranajes.—Como quiera que el trazado obedece á las mismas reglas, cualquiera que sea la materia de que se construyan, indicaremos, según antes se ha manifestado, el modo de verificarlo en los casos siguientes:

α—Engranaje epicicloidal exterior.

β—Engranaje exterior de evolventes de círculo.

γ—Engranajes interiores.

δ—Engranajes de linterna.

222. α—Trazado del engranaje epicicloidal exterior.—El trazado de un engranaje comprende varias operaciones que debemos explicar con separación unas de otras, para la mejor inteligencia. Estas operaciones son:

1.ª Determinación de las circunferencias primitivas.

2.ª División de estas circunferencias.

3.ª Trazado de los perfiles.

4.ª Limitar los dientes.

223. 1.ª—Determinacion de las circunferencias primitivas.—Siendo dados los ejes de rotación, lo que equivale á considerar como dato el valor c de la ecuación (2) párrafo 38, y dándose también las velocidades angulares de ambas ruedas, ó una de ellas y su relación, quedarán determinados los radios por la ecuación

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \qquad (3)$$

del mismo párrafo; bastando, por lo tanto, dividir la distancia de centros en dos partes inversamente proporcionales á las velocidades angulares.

224. 2.ª—División de las circunferencias primitivas.—El punto de partida para esta división, que debe preceder según hemos dicho, al trazado de los perfiles, habrá de ser una

de las cantidades que entran en las fórmulas halladas en el expresado párrafo. En general, sirve de dato el número de dientes, el que, dependiendo en primer lugar de la magnitud que tengan los radios, debe cumplir con la condición de proporcionar la mejor conducción posible al engranaje. Para que tal efecto se cumpla, dicho número debe estar comprendido en los límites que marca la *tabla núm.* 5, y una vez fijado, sirve de punto de partida para la investigación de los demás valores, en la forma siguiente:

Asignado á N_1 el valor correspondiente, según dicha tabla, se deducirá el de N_2 por la relación (7) del párrafo 38, obteniéndose la expresión

$$N_2 = \frac{r_2}{r_1} \cdot N_1 ,$$

con lo cual quedan determinados ya los números de dientes que ambas ruedas han de tener. Estos números habrán de modificarse convenientemente, conservándose en los límites que dicha tabla marca, en el caso que N_2 no resultase un número entero, como es indispensable.

La división de las circunferencias primitivas en el número de partes marcado por dichos valores, nos proporcionará gráficamente el que debe asignarse al paso, pudiéndose confrontar el valor de éste por medio de la fórmula (6) de dicho párrafo, de la que se deduce

$$p = \frac{2\pi r_1}{N_1} .$$

Obtenido ya el valor del paso, se calcularán el lleno y el vacío por las fórmulas (4) y (5), deduciéndose

$$l = p\,\frac{n-1}{2n} ; \qquad v = p\,\frac{n+1}{2n} .$$

Los valores obtenidos para todas estas cantidades habrán

de ser confrontados con los datos que proporciona la *tabla número* 5 (*), haciendo las modificaciones que sean convenientes para que estén de acuerdo con ella, ó por lo menos se aproximen lo más posible á los límites que fija (**)

Puede procederse ya á marcar sobre las circunferencias primitivas o_1 y o_2 *(fig. 70)* las magnitudes encontradas, disponiéndolas, á partir del punto de contacto *a*, de tal modo que los llenos de una rueda correspondan con los vacíos de la otra.

225. 3.ª—**Trazado de los perfiles.**—En casi todas las máquinas, los engranajes deben estar dispuestos para marchar en uno y otro sentido, bien sea accidental ó periódicamente. Es necesario, por lo tanto, que los dientes cumplan con la condición de simetría con respecto al radio que pasa por el punto medio del lleno. Según esto, bastará determinar uno solo de estos perfiles y reproducirlo simétricamente con respecto á dicho radio. Tratemos de construir los perfiles que pasan por el punto de contacto *a* de las circunferencias primitivas.

La regla del párrafo 34 nos servirá de punto de partida. Si los perfiles han de ser epicicloidales, la curva generatriz á que dicha regla se refiere será una circunferencia. El engranaje más sencillo, resulta de considerar la circunferencia cuyo diámetro sea el radio $o_1 a$ de la circunferencia primitiva. Si se

---

(*) Dicha tabla marca también el espesor que deben tener los dientes, en sentido paralelo al eje de rotación.

(**) En algunos casos es conveniente hacer que la rueda mayor tenga un diente más, que el que le corresponde según el cálculo que en este párrafo se menciona. El uso de este diente, llamado *diente suplementario*, tiene por objeto evitar que siempre entren en contacto los mismos pares de dientes, y proporciona, por tanto, un desgaste más uniforme en todos ellos; pero tiene el inconveniente de variar algún tanto la relación de velocidades.

Deberá ser desechado este sistema, muy en boga entre los constructores ingleses, cuando haya de existir una relación perfectamente determinada entre las velocidades de ambas ruedas, como sucede, por ejemplo, en un movimiento de relojería.

hace rodar esta circunferencia c_1, exteriormente sobre o_2 é interiormente sobre o_1, el punto a engendrará en el primer caso la epicicloide ab_2, cuyo trazado es conocido (y por esta razón nos evitamos exponerlo) y en el segundo la hipocicloide rectilínea ab_1, pues según se sabe, cuando la relación de radios de las circunferencias movible y fija es $\frac{1}{2}$, la epicicloide interior ó hipocicloide engendrada es precisamente un diámetro de la circunferencia fija. Según la regla mencionada, estas líneas ab_2 y ab_1 satisfacen á las condiciones generales con que deben cumplir los perfiles, y pueden utilizarse, la ab_2 como perfil saliente de la rueda conductora o_2, y la ab_1 como entrante ó flanco de la rueda conducida o_1.

226. Si el engranaje ha de ser *recíproco*, como suelen construirse, será preciso escoger una nueva circunferencia en condiciones análogas á las de la c_1, y hacerla rodar exteriormente sobre o_1 é interiormente sobre o_2. Para mayor generalidad, hemos elegido la circunferencia c_2, cuyo diámetro es menor que el radio de o_2; de este modo, la hipocicloide $a\,d_2$ engendrada por el punto a cuando la circunferencia c_2 rueda interiormente sobre o_2, no será rectilínea y podrá trazarse por los métodos conocidos, lo mismo que la epicicloide $a\,d_1$ engendrada por el mismo punto a, en el movimiento de rodar de c_2 sobre o_1.

Resulta como perfil definitivo de la rueda o_2 la línea $d_2\,a\,b_2$ siendo $d_1\,a\,b_1$ el correspondiente al piñón o_1.

227. Si el engranaje no debiera tener ningún flanco rectilíneo, se escogerá otra circunferencia generatriz para sustituir á c_1; resultando en lugar de la recta $a\,b_1$, el correspondiente trozo de hipocicloide engendrado por la circunferencia elegida.

228. Se obtiene un *trazado rápido*, que si bien no es de perfección absoluta, proporciona perfiles suficientemente aproximados para los usos de los engranajes, sustituyendo los arcos de epicicloide por arcos de círculo trazados, tomando como centro el punto de división que corresponde al segundo diente, y como radio la cuerda del paso.

Por último, si se trazan los ejes de simetría de los dientes, podrán marcarse con suma facilidad los perfiles simétricos de los ya construídos, obteniéndose el contorno total de los primeros dientes, que tratan de limitarse en la operación que ahora nos va á ocupar (*)

229. 4.ª—**Limitar los dientes.**—La regla establecida en el párrafo 35 nos proporciona el medio de terminar el trazado del engranaje. Considérese el caso límite en que sólo deba verificarse el contacto entre un par de dientes, ó lo que es lo mismo, que la longitud del arco de circunferencia primitiva durante el cual tiene lugar la conducción, ó *arco de conducción*, como suele llamársele, sea igual al paso. La altura ó saliente, dice dicha regla, es igual á la distancia entre el segundo contacto y la circunferencia primitiva. Bastará hallar la posición de este segundo contacto; para lo cual, si la magnitud $a\,a'$ representa el paso del engranaje, se reproducirá en a' el perfil del diente, obteniendo por su intersección m con la circunferencia c_2 el punto deseado. Si se describe, por lo tanto, una circunferencia con centro o_1 y radio $o_1\,m$, se tentrán limitados los salientes de o_1. Se limitan también los entrantes de o_2, teniendo en cuenta el juego que debe quedar entre dientes y huecos, cuya cantidad habrá de disminuirse á la distancia $o_2\,m'$ que teóricamente resultaría como radio para limitar el entrante.

Iguales consideraciones limitan los salientes de o_2 para el caso en que esta sea la conductora; bastando según se ha dicho, reproducir en a'' el perfil $a''n$, para obtener el segundo contacto n relativo á este caso. La circunferencia de centro o_2 y radio $o_2\,n$ limita estos dientes, y la trazada con centro o_1 y radio $o_1\,n'$ disminuído en el juego, limita interiormente los correspondientes á o_1.

(*) Es conveniente que los alumnos se ejerciten en el trazado correspondiente á los diversos casos, sean ó no rectilíneos los flancos, empleando indistintamente el trazado perfecto de las epicicloides, y el trazado rápido por arcos de círculo.

Si la longitud del arco de conducción fuese mayor que el paso, bastaría hacer la misma construcción, pero reproduciendo el perfil en un punto que distara del contacto primitivo *a* la expresada longitud de dicho arco.

Quedan ya determinados en definitiva los contornos correspondientes á los primeros dientes, y pueden obtenerse los restantes por medio de plantillas, que se colocarán convenientemente en los puntos de división que de antemano habíamos marcado.

230. Para terminar con todo lo relativo al trazado, yá pesar de haber puesto de manifiesto las fórmulas que se emplean en la determinación de todos los elementos del engranaje, insertamos al final la *tabla número* 6, que expresa cuantos datos numéricos pueden necesitarse, incluyendo á la vez los valores correspondientes al esfuerzo, velocidad, número de vueltas, etc. Esta tabla (*), se refiere á los engranajes que por cualquier circunstancia relativa á su servicio especial estén expuestos á choques violentos, y los datos prácticos que contiene son superiores, como es consiguiente, á los que proporcionan las fórmulas correspondientes.

231. *6.*—**Engranaje exterior de evolventes de círculo.**—La única diferencia que existe con respecto al caso anterior, se refiere al trazado de los perfiles, del que por lo tanto debemos ocuparnos.

Sean, *(fig. 71)* o_1 y o_2 las circunferencias primitivas, y *a* su punto de contacto, determinado como se ha indicado en el caso anterior. Trácese por este punto una línea $N\,N'$ inclinada sobre la línea de centros $o_1\,o_2$; siendo lo más conveniente, según la práctica ha demostrado, que forme un ángulo de 75°, tipo adoptado por los constructores. Trácense desde los centros o_1 y o_2 las perpendiculares $o_1\,m$ y $o_2\,n$ á esta línea, y descríbanse las circunferencias cuyos radios sean estas perpendiculares, á las cuales se da el nombre de *circunferencias auxiliares*. La línea $N\,N'$ será evidentemente una tangente

(*) La referida tabla la tomamos de la excelente obra de Mr. Reuleaux.

común á estas circunferencias; y si se arrollan respectivamente las porciones $a\,m$ y $a\,n$ sobre los círculos $o_1\,m$ y $o_2\,n$, el punto a describirá las evolventes de cada uno de estos círculos.

232. Si ahora se imagina que una de las circunferencias primitivas, la o_1 por ejemplo, gira al rededor de o_1 en el sentido de la flecha, la curva $m_1\,n_1$ trazada sobre ella conducirá á la $m_2\,n_2$, ejerciendo siempre su acción en dirección de la normal común á estas curvas. Mas como una propiedad de toda evolvente es que la normal en cualquier punto ha de ser tangente á la evoluta, se deduce que la normal común á ambas curvas debe ser á la vez tangente á las dos circunferencias auxiliares, y se confunde, como es consiguiente, con la tangente común $m\,n$. Resulta, que en todas las posiciones que adquieren las curvas $m_1\,n_1$ y $m_2\,n_2$, su normal común pasa constantemente por el contacto a de las circunferencias primitivas, y esta es precisamente la condición indicada en el párrafo 29, como característica de los perfiles correspondientes á los dientes que en un engranaje deben estar en contacto. Esta es la razón por que á dicha normal común se la da también el nombre de *línea de contactos*, ya que en las diversas posiciones que ocupan los dientes, tienen estos su punto común situado precisamente sobre esta línea.

233. Indicado el modo de obtener los perfiles de los dientes, se podrá proceder al trazado del engranaje, para el que se seguirá idéntica marcha que la explicada en el engranaje epicicloidal. Márquense, por lo tanto, los puntos de división correspondientes al paso, lleno y vacío; trácense los ejes de simetría de los dientes, y constitúyanse las curvas simétricas de las evolventes á que hemos hecho referencia.

234. Restará solamente la limitación de los dientes, que obedece á los mismos principios indicados. Ya que el contacto se verifica siempre en la línea $N\,N'$, bastará reproducir en el segundo punto de división b el perfil $m_1\,n_1$ y su punto de intersección con la referida normal común, nos dará la posición del segundo contacto. La circunferencia trazada con cen-

tro o_2 y radio $o_2 c$, será por lo tanto la que limite exteriormente los dientes de o_2.

Se deduce del mismo modo la posición del punto c' para limitar con radio $o_1 c'$ los dientes de o_2; obteniéndose por fin las límites interiores correspondientes á cada rueda, empleando radios que se diferencien de los teóricos en una cantidad igual al juego que deba dejarse (*).

235. Ventajas del engranaje de evolventes. — Esta clase de engranajes presenta grandes ventajas sobre el epicicloidal, las que vamos á indicar á continuación:

1.ª Los perfiles de los dientes se deducen en cada una de las ruedas, sin intervenir en nada la presencia de la otra. Basta la circunferencia auxiliar correspondiente, para hacer el trazado de aquellos. Con el convenio adoptado de que la normal común forme 75° con la línea de centros, se podrá hacer que engranen entre sí dos ruedas de evolventes, cualesquiera que sean sus radios, siempre que los pasos sean los mismos y los huecos de cada rueda, bastante grandes para que dejen pasar los dientes de la otra. Esta facilidad no existe en el engranaje epicicloidal, en el cual es necesario construir especialmente una de las ruedas para que engrane con la otra, porque los perfiles no dependen exclusivamente de la rueda á que se refieren.

2.ª La acción mutua que ejercen ambas ruedas, ejercida, como es consiguiente, en el punto de contacto, tiene la dirección de la normal común, cualquiera que sea la posición actual de los dientes. No sufre variación alguna la dirección de esta fuerza, como sucede en los engranajes epicicloidales, según se desprende del mismo trazado.

3.ª El desgaste de los perfiles en contacto, es sensiblemente el mismo para todos los puntos de un mismo perfil,

---

(*) Se ha omitido en la figura el trazado completo del engranaje, por la analogía con el caso anterior. Ninguna dificultad puede ofrecer la práctica de esta operación, que debe completar el alumno para perfeccionarse en el estudio de este mecanismo.

dada la propiedad anteriormente indicada. La posición del nuevo perfil después de haber experimentado algún desgaste, aunque sea considerable, será paralela al primitivo, constituyendo una nueva evolvente de la circunferencia auxiliar. Las condiciones geométricas del engranaje no se modifican, por lo tanto, con el uso que de él puede hacerse; lo que no se verifica en los engranajes epicicloidales, por las variaciones constantes de la presión mutua que se ejerce entre los dientes en contacto.

236. Estas ventajas dan la preferencia en algunos casos á los engranajes de evolventes; pero debe tenerse en cuenta que, cuando los radios de las ruedas son pequeños, la extremidad de los dientes se debilitaría bastante en este engranaje, por la rápida convergencia de las curvas. Esto constituye, en los casos expresados, un inconveniente que hace alternar este trazado con el epicicloidal, escogiendo en cada caso el que sea más favorable, según las condiciones del mecanismo (*)

237. γ—**Engranajes interiores.**— Cuando las rotaciones de ambas ruedas deban verificarse en el mismo sentido, se recurre al empleo de los engranajes interiores, para los que sirven de base los mismos principios relativos á los exteriores, según en el párrafo 39 se ha indicado. Las reglas dadas para el trazado serán aplicables en la misma forma, salvo ligeras modificaciones que vamos á apuntar.

238. Si se trata del *engranaje epicicloidal,* una de las circunferencias auxiliares, la c_1 *(fig. 72)*, rodará exteriormente sobre ambas circunferencias primitivas o_1 y o_2. El punto a engendrará de este modo las epicicloides am_1 y am_2, que serán respectivamente el flanco de los dientes de la rueda y la cara de los dientes del piñón.

De la misma manera, el círculo c_2, rodando interiormente sobre las dos circunferencias primitivas, engendrará la hipo-

---

(*) Esta es la razón por que nos creemos obligados á indicar ambos trazados, ya que los dos son frecuentemente usados en la práctica.

cicloide an_1 para cara de los dientes de la rueda, y la hipocicloide an_2, para flanco de los dientes del piñón.

Determinados los perfiles, ninguna dificultad ofrece la terminación del trazado, que para mayor facilidad se marca en la figura, con objeto de que pueda observarse el modo de limitar los dientes por medio de las circunsferencias que pasen por los puntos c y c' que representan los segundos contactos. Podrá observarse como consecuencia de este trazado, que las caras de los dientes de la rueda resultan interiores á la circunferencia primitiva, al paso que los flancos son exteriores.

239. Debe hacerse la observación de la imposibilidad en obtener un engranaje para el cual no solamente fuesen rectilíneos los flancos del piñón, como sucede en éste, sino que lo fueran también los de la rueda. Sería preciso engendrar los perfiles por una circunferencia que sustituyendo á la c_1, fuese interior á la primitiva y de diámetro ao_1. Entonces la curva descrita por el punto a estaría situada en la misma región que la hipocicloide rectilínea an_2, siendo evidentemente imposible la realización de un engranaje de esta naturaleza, que por esta razón *no podrá nunca ser recíproco el engranaje interior de flancos rectilíneos*.

240. Con respecto al *engranaje interior de evolventes*, podemos indicar que no hay variación alguna en la marcha expresada para los exteriores; pero debe tenerse en cuenta que los dientes resultantes para la rueda serán cóncavos, obteniéndose convexos los del piñón. Se atenúa este inconveniente empleando dientes pequeños y en gran número, con lo cual las curvas se confunden sensiblemente con sus cuerdas, asimilándose á superficies planas, las caras laterales que debieran ser cóncavas.

241. Inconvenientes de los engranajes interiores.—De todos modos, los engranajes interiores tienen inconvenientes comunes á los diversos trazados; siendo el principal que la rueda, por tener sus dientes en el interior, donde debe marchar el piñón, deberá estar montada sobre la extremidad del árbol, de distinto modo que las ruedas ordinarias, cuya especial suje-

ción la hará estar expuesta á trepidaciones que constituyen un verdadero inconveniente, según se sabe, y perjudica á la buena marcha de los mecanismos.

242. Modo de evitar su empleo.—Por estos inconvenientes, debe evitarse en lo posible el empleo de los engranajes interiores; pero cuando sea indispensable una trasmisión en que las rotaciones deban verificarse en el mismo sentido, se podrán sustituir dichos engranajes por una combinación de exteriores, que está exenta de los inconvenientes mencionados. Sean o_1 y o_2 *(fig. 73)* las proyecciones de dos ejes que deben tener velocidades angulares ω_1 y ω_2, y cuyas rotaciones deben verificarse en el mismo sentido, indicado por las flechas correspondientes. Establezcamos un tercer eje o paralelo á los anteriores, y móntese sobre este eje uua rueda que engrane exteriormente con las o_1 y o_2, á la cual se dá el nombre de *rueda parásita*, recibiendo también el de *árbol parásito*, el eje correspondiente. El movimiento dado á una de las ruedas, la o_1, por ejemplo, se comunicará á las otras dos de tal modo, que obrando la velocidad angular ω correspondiente á la rueda parásita en distinto sentido que cada una de las ω_1 y ω_2, estas habrán de verificarse en el mismo sentido, según se deseaba. Se ha obtenido parte del resultado que se buscaba, sin recurrir al empleo de los engranajes interiores.

243. Falta hacer que la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2}$, sea la que haya prescrito el enunciado del problema, y á este objeto bastará observar que en cada uno de los pares de ruedas $(o_1 o)$ y $(o\, o_2)$ se verifica respectivamente

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{r}{r_1}\,; \qquad \frac{\omega}{\omega_2} = \frac{r_2}{r}$$

y multiplicando miembro á miembro, se obtendrá la relación que se desea, por eliminarse de este modo las cantidades ω y r,

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}\,.$$

Resulta, finalmente, que la relación de velocidades es también inversa de la de radios, como sucede en el engranaje ordinario; observándose, por lo tanto, que el establecimiento de la rueda parásita no modifica en nada el valor de dicha relación, no cumpliendo otro objeto que cambiar el sentido de las velocidades angulares, para evitar el empleo del engranaje interior.

244. δ—Engranaje de linterna.—Se llama así al engranaje para el cual se adopta como perfil de los dientes del piñón, un punto único.

Supongamos que el perfil de la rueda o_2 (*fig.* 74, *lám.* 9.ª) se reduce al punto de contacto a, común á las circunferencias primitivas o_1 y o_2; siendo, por ejemplo, y para aclarar las ideas, una aguja montada en a, normalmente al plano del piñón o_2.

Para encontrar el perfil de la rueda que sea conjugado del que presentamos como dato, bastará tener presente la regla del párrafo 32, según la cual debe ser dicho perfil la envolvente de las posiciones sucesivas que vaya adquiriendo el que es dado; y esta envolvente no es otra que la epicicloide ab engendrada por el punto a, cuando la misma circunferencia o_2 rueda exteriormente sobre la o_1. Si se desea que esta última rueda pueda conducir á la o_2 en ambos sentidos, será preciso emplear también una epicicloide ab', simétrica de la primera con relación al radio $o_1 a$.

Si ahora tomamos magnitudes am_1 y am_2 iguales al paso sobre cada una de las circunferencias, el punto m_2 será la posición que en la rueda o_2 adquiere la aguja más próxima á a; y reproduciendo en el punto m_1 el perfil conductor ab', que deberá pasar por m_2, según las propiedades de las epicicloides, obtendremos en acm_1 el perfil del diente, que debe limitarse, según lo dicho en el párrafo 35, por la circunferencia de centro o_1 y radio $o_1 m_2$; ya que m_2 es la posición del segundo contacto. Resulta como perfil definitivo del diente de la rueda, el trapecio curvilíneo $anm_2 m_1$, y este perfil puede reproducirse á continuación á partir del mismo punto m_1 como se ve en la figura, si se tiene en cuenta que habiéndose redu-

cido á un punto el diente de o_2, el vacío de o_1 debe ser igual á cero.

245. Se comprende que el engranaje construído de este modo es puramente teórico. Las agujas que hemos supuesto como dientes de la rueda o_2 deben tener un espesor proporcionado al esfuerzo que deba soportar el mecanismo, y esta consideración hace que en el terreno práctico sean verdaderos cilindros circulares rectos, proyectantes sobre el plano de o_2, á los que se da el nombre de *husillos* y que generalmente están montados entre dos platillos circulares, lo que da al piñón o_2 el nombre de *linterna*, por la forma especial que adquiere. El trazado que acabamos de indicar sirve como auxiliar para el trazado práctico, el cual se reduce á hacer una sencilla modificación que permita la buena conducción de los cilindros que constituyen los dientes de la linterna.

246. Partiendo, pues, del *trazado auxiliar* que acabamos de explicar, supóngase que el cilindro que forma el primer diente esté representado por el pequeño círculo que con el centro a se ve en la figura. Para que el contacto se verifique con este círculo y no con el punto a, será preciso que el nuevo trazado diste del auxiliar una cantidad igual al radio de este círculo. Deberán, por lo tanto, tomarse en dirección de las diversas normales á las epicicloides, magnitudes iguales á dicho radio, y trazar la curva, lugar geométrico de los puntos obtenidos. Se obtendrán de este modo las curvas que sustituyen á las epicicloides, según se ve en la figura; debiendo limitarse los dientes por la circunferencia de radio $o_1 r$, en que r representa el punto de contacto del nuevo trazado con la segunda posición m_2 del husillo. Debe observarse que será necesario dar á los huecos de la rueda o_1 la forma semicircular entrante, para que puedan alojarse en ellos los diversos husillos de la linterna.

247. Inconvenientes y límites de su empleo.—Este engranaje presenta grandes inconvenientes con relación á los anteriores, siendo el principal relativo al rozamiento entre dientes y husillos, que se verifica constantemente en muy pe-

queña extensión superficial de estos; casi se puede decir que en un mismo punto se verificará constantemente el desgaste. Se atenúa este inconveniente, haciendo que los husillos sean verdaderos rodillos giratorios al rededor de su eje de figura, con lo que se convierte en rozamiento de segunda especie, ó de rodar, el de primera especie.

Apesar de todo, el engranaje de husillos es muy poco empleado, y su uso se limita hoy día á los mecanismos toscos, como los de ciertos molinos, norias, etc., para los cuales suele construirse de madera. Pero es necesario su conocimiento, que en muchas circunstancias será de gran utilidad, por la facilidad en improvisar un engranaje de esta naturaleza.

APRECIACION ANALÍTICA DE LOS ENGRANAJES CILÍNDRICOS.

248. Relación de velocidades.—En los diversos extremos á que se refiere la apreciación, ó sea el conocimiento de las relaciones entre velocidades, esfuerzos y trabajos, nos limitaremos, para evitar repeticiones, al estudio de uno de los tipos de engranaje que se han explicado, cuyas consideraciones será fácil hacer extensivas á los otros trazados.

Nada habremos de indicar que sea relativo á las velocidades, porque es sabido que la relación de las angulares es inversa de la de radios, y que las absolutas son iguales en los contornos de ambas ruedas. Nos ocuparemos, por tanto, de encontrar las relaciones de esfuerzos y trabajos, segundo y tercer extremo á que se refiere la apreciación de los mecanismos.

249. Preparación para el cálculo de la relación de esfuerzos.—Acto de resbalamiento.—Sirve de punto de partida, como en los demás casos, la ecuación de las máquinas en régimen $T_m = T_u + T_f$, de la cual trataremos de encontrar los diversos términos. Si nos referimos al trabajo correspondiente al tiempo que tardan las ruedas en avanzar un paso, y llamamos P la potencia tangencial á la circunferencia primitiva de la rueda o_1 (*fig.* 70) y p al paso, el trabajo motor tendrá por expresión

$$T_m = Pp$$

Y si se llama Q la resistencia tangencial á la rueda o_1 que supondremos obrando en el punto a, el trabajo resistente útil tendrá por valor

$$T_u = Qp$$

Con respecto al término T_f, debemos considerar, para facilitar los cálculos, que solamente se verifica el engrane entre un par de dientes; y en esta hipótesis, si el primitivo contacto se verifica en a sobre la línea de centros, y el segundo tiene lugar en m, como quiera que la posición del punto a durante el segundo contacto es b, si se considera perteneciente á la rueda o_1, y a' si forma parte de la o_2, el camino real recorrido por el punto de aplicación de la fuerza de rozamiento, será $(mb - ma')$, por ser este el arco correspondiente al resbalamiento relativo que se verifica entre los dientes. Llamando s á esta diferencia ó *arco de resbalamiento*, podrá expresarse el trabajo debido al rozamiento, por la fórmula

$$T_f = Fs = Qfs$$

por ser Q la presión normal que en este caso produce el rozamiento.

La ecuación de trabajos toma la forma

$$Pp = Qp + Qfs$$

y en ella deberá buscarse únicamente el valor de s, en función de cantidades que sean datos de esta cuestión.

250. Para encontrar el valor de s, consideremos primero el movimiento elemental que se verifique durante el tiempo dt, y llamemos ω_1 y ω_2 á las velocidades angulares respectivas de las ruedas o_1 y o_2. Si para reducir una de ellas, la o_2 por ejemplo, al estado de reposo, se da al sistema un movimiento igual y contrario al que tiene dicha rueda, según lo dicho en Mecánica racional al tratar de los movimientos relativos (*),

(*) Delaunay, párrafo 62.

la o_1 tomará un movimiento tal, que se encontrará animada á la vez, de una velocidad angular ω_2 alrededor de o_2 y de otra ω_1 alrededor de o_1, en el mismo sentido que la precedente. Estas dos rotaciones simultáneas de la rueda o_1, equivalen á una rotación única alrededor de un eje trazado por el punto a paralelamente á los ejes o_1 y o_3, y la velocidad angular de esta rotación resultante es igual á $(\omega_1 + \omega_2)$ (*). El espacio angular descrito por la rueda o_1 y por lo tanto por un punto cualquiera m de ella, durante el tiempo dt, en virtud de su movimiento relativo, es $(\omega_1 + \omega_2)\, dt$; y si designamos por h la longitud de la normal am, el resbalamiento elemental que buscamos tendrá el valor

$$ds = h\,(\omega_1 + \omega_2)\, dt.$$

Para eliminar dt y poner esta expresión en función del paso, obsérvese que en dicho tiempo elemental dt, el arco infinitamente pequeño de cada una de las circunferencias primitivas que pasa por la línea de centros es dp, y que el valor de este arco considerado como de cada una de dichas circunferencias, será

para la circunferencia o_1 ..... $dp = \omega_1 r_1\, dt$
para la circunferencia o_2 ..... $dp = \omega_2 r_2\, dt$

y de estas expresiones se deduce inmediatamente

$$\omega_1\, dt = \frac{dp}{r_1}, \qquad \omega_2\, dt = \frac{dp}{r_2}$$

cuyos valores sustituidos en el de ds, nos dan en definitiva para valor del resbalamiento elemental

$$ds = h\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) dp$$

(*) Delaunay, párrafo 54. El eje de rotación resultante está situado á distancias inversamente proporcionales á las velocidades angulares, y la velocidad angular resultante es la suma de las componentes.

251. Queda reducido nuestro problema á verificar una integración del valor que acaba de presentarse; y á este fin, con objeto de no emplear cálculos complicados y deducir directamente la expresión que en la práctica se suele emplear, supondremos (en lo que no hay error sensible, sobre todo cuando las ruedas tienen gran número de dientes) que la normal h tenga una longitud igual al paso. De este modo, sustituyendo en vez de h el valor p, y verificando una integración entre los límites correspondientes al resbalamiento s que se busca, que son o y p, se obtiene

$$s = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \int_0^p p\,dp = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{p^2}{2}$$

252. Relación de esfuerzos.—Puede ya sustituirse este valor en la ecuación de trabajos, que tomará la forma

$$P p = Q p + Q f \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \frac{p^2}{2}$$

que se reduce fácilmente á la

$$P = Q \left\{ 1 + \frac{fp}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \right\}$$

La *relación de esfuerzos* en este mecanismo queda ya encontrada en definitiva, al deducirse inmediatamente de la ecuación anterior. Presenta la forma

$$\frac{P}{Q} = 1 + \frac{pf}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \qquad (a)$$

Es una comprobación de la exactitud de los cálculos hechos, la deducción del valor correspondiente á la *relación de espacios lineales recorridos*, que según sabemos es igual á la uni-

dad, y asimismo se deduce haciendo $f = o$ y tomando la inversa de la relación (*a*). En otros términos, según se ha dicho en el párrafo 97 de la teoría general dinámica, *tomando la relación inversa de la que corresponde á los esfuerzos teóricos*

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{Q_o}{P_o} = 1 \quad (b)$$

253. Rendimiento y trabajos.—Ninguna dificultad ofrece ya la investigación del *rendimiento*, que como en todos los casos, se obtiene por multiplicación de las relaciones (*a*) y (*b*) invertidas. Su valor es

$$R.^o = \frac{Q \cdot s_q}{P \cdot s_p} = \frac{Q}{P} = \frac{2 r_1 r_2}{2 r_1 r_2 + fp (r_1 + r_2)} \quad (c)$$

Con respecto á los *valores de cada uno de los trabajos desarrollados*, nada habremos de indicar, por hallarse ya en evidencia en la ecuación general que hemos establecido para deducir la fórmula (*a*).

254. Discusión de las fórmulas obtenidas.—Solamente restará la discusión de las fórmulas *a*, *b* y *c*, discusión sumamente sencilla, y de la cual la consecuencia más importante, deducida por simple inspección de la (*c*), es que se *aumenta el rendimiento de un engranaje, disminuyendo todo lo posible su paso, ó como es consiguiente, aumentando el número de dientes.*

Esta conclusión se ha tenido en cuenta al fijar los valores prácticos de los diversos elementos de un engranaje, en la *tabla número* 5 que sirve de base para los cálculos de este mecanismo; pues debe observarse, que si bien en teoría puede el paso disminuir indefinidamente, queda esta disminución limitada por las condiciones de buena resistencia y perfecta conducción de los dientes.

Las relaciones encontradas suponen para mayor facilidad que existe solamente un par de dientes en contacto; pero debe tenerse en cuenta que, si como sucede en la práctica, se verifica el engrane entre dos ó más pares entre los cuales

se reparten las presiones, en nada variarán dichas relaciones, puesto que los esfuerzos desarrollados son los mismos, si bien repartidos en mayor número de puntos.

255. Fórmulas en función del número de dientes.— Puede ponerse en evidencia el número de dientes que á cada una de las ruedas corresponde, para deducir otras fórmulas que nos serán de utilidad en muchos casos. Basta combinar las encontradas, con las relaciones

$$n_1 p = 2\pi r_1; \quad n_2 p = 2\pi r_2$$

deducidas de la fórmula (6) párrafo 38 de la teoría general cinemática, y de esta combinación resultan las nuevas expresiones.

$$\frac{P}{Q} = 1 + f\pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (a')$$

$$\frac{s_p}{s_q} = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b')$$

$$R.^{o} = \frac{2 n_1 n_2}{n_1 n_2 + f\pi(n_1 + n_2)} \ldots\ldots\ldots \quad (c')$$

CÁLCULO GRÁFICO DE LOS ENGRANAJES

256. Trazado del polígono de las fuerzas.—Supóngase, para mayor sencillez de la figura, que el movimiento se comunica *(fig. 75)*, por dos pares de dientes $(M_1\ M_2)$ y $(N_1\ N_2)$, siendo conductores los M_1 y N_1 correspondientes á la rueda o_1 y conducidos los que pertenecen á la o_2. Tomando como tipo el trazado de evolventes de círculo, la normal común $N\ N'$ á los dientes en contacto, pasará por o y formará 75° con la línea de centros $o_1\ o_2$ (*)

(*) Presentamos una figura muy exagerada, que desdice quizás de las dimensiones que tienen las otras, para poner bien de relieve las consecuencias que deben obtenerse. Sin ella, la explicación resultaría confusa, como podrá observarse al deducir las reglas correspondientes á este cálculo.

Sea Q la resistencia que trata de vencerse, que obra en el punto o según la dirección de la normal común. Si no existiera rozamiento alguno, la potencia teórica necesaria para vencer esta resistencia sería oP_0 igual á Q, y obrando en dirección de la normal común, en sentido contrario á la resistencia.

Mas al desarrollarse un rozamiento en cada uno de los contactos reales, rozamiento que tiene lugar para los dientes M_1 y M_2 en los puntos a_0 y b_0 que están en contacto, y para los N_1 y N_2 en los a_1 y b_1, deberá considerarse, como en la teoría analítica hemos dicho, que la resistencia se reparte por igual en cada uno de estos puntos.

Para facilitar la inteligencia, dibujamos en la *figura 75 (a)* uno solo de los contactos, en el que obra la resistencia $\frac{1}{2} Q$. En ella está de manifiesto el modo de encontrar la resultante R de las fuerzas que obran en este punto, dado que el rozamiento F se considera debido á un resbalamientro entre los dientes conductor y conducido. Dicha resultante forma con la normal el ángulo φ de rozamiento, y puede considerarse como la fuerza efectiva que sustituye á la teórica $\frac{1}{2} P_0$ cuando se toma en consideración el rozamiento.

257. Refiriéndonos ya á la figura principal, puede trazarse la dirección $b_0 R$ de esta resultante, que corresponde al contacto $a_0 b_0$; y como las consideraciones hechas son extensivas al segundo contacto $a_1 b_1$, en el que obra también como resistencia $\frac{1}{2} Q$, no hay inconveniente en trazar la resultante $b_1 R'$ que corresponde á este contacto, puesto que forma también con la normal el ángulo φ.

Ya que son R y R' las fuerzas efectivas que obran simultáneamente en el engranaje para vencer las resistencias que en él se desarrollan, deberán componerse para encontrar la resultante definitiva ó potencia efectiva que se busca; y á este efecto, trasládense cada una de ellas á su punto de in-

tersección *c;* tómense sus respectivas magnitudes iguales entre sí é iguales á la encontrada por medio de la *figura 75 (a)* y la diagonal *c P* del paralelógramo formado, nos representa la fuerza que se busca, quedando resuelto nuestro problema.

258. Deducción de la regla para el cálculo gráfico de los engranajes.—El cálculo gráfico sería bastante complicado, si en todas las aplicaciones debiera repetirse la construcción hecha en este estudio. No respondería á su objeto principal de simplificar notablemente los cálculos, si no pudiéramos deducir una regla práctica relativa á los engranajes, y de tal naturaleza, que sin repetir las consideraciones que á ella conduzcan, puedan abreviarse notablemente las operaciones necesarias en la investigación de los elementos necesarios para la apreciación de un mecanismo. Las consideraciones siguientes nos servirán al objeto que indicamos.

Obsérvese, que dada la igualdad de los ángulos φ formados con la normal en los puntos a_0 y a_1, el triángulo $a_0\, c\, a_1$ es isosceles; que la recta $o\, c$ es su altura, y resulta por lo tanto perpendicular á la base $a_0\, a_1$. Obsérvese también, que dada la igualdad absoluta de las fuerzas R y R' que forman un ángulo $2\,\varphi$ en el punto c, la diagonal ó potencia efectiva P es la bisectriz de este ángulo, y su dirección es por lo tanto paralela á la $a_0\, a_1$ que corresponde á la normal común. Combínense estas dos observaciones, cuya demostración pertenece al dominio de la geometría elemental, y resultará que la recta $c\, o$ es perpendicular á la potencia P.

259. Resulta de estas sencillas consideraciones, que si con centro o y radio $o\, c$ se traza una circunferencia, la fuerza P debe ser tangente á ella: y esta deducción unida á la idea de ser paralela á la normal común, nos proporciona la regla que se busca. Antes de enunciarla, debemos indicar que á la magnitud $c\, o$ se la llama *radio de rozamiento del engranaje*, y al círculo trazado con dicho radio, *círculo de rozamiento del engranaje*, y debemos también encontrar la magnitud que corresponde al radio de rozamiento, en función de las cantidades que puedan ser datos de la cuestión. Esta

magnitud que llamaremos ρ', se deduce inmediatamente de las propiedades trigonométricas del triángulo $o\,c\,b_0$, las que proporcionan

$$\rho' = o\,c = o\,b_0\,tg\,\varphi = \frac{1}{2}\,b_0\,b_1\,tg\,\varphi.$$

Pero si consideramos que la magnitud $b_0\,b_1$ sea igual á la proyección del paso sobre la normal común, en lo cual no hay error sensible, máxime cuando hemos dicho que el paso debe ser pequeño, podrá sustituirse su valor por el ($p\ sen\ 75°$) que resulta de esta consideración. La expresión anterior toma la forma

$$\rho' = \frac{1}{2}\,p\,tg\,\varphi\ sen\ 75° = \frac{1}{2}\,p\,f\ sen\ 75° \quad (\alpha)$$

y este es el valor que corresponde al radio de rozamiento de un engranaje, que como se ve, es dependiente, no sólo del ángulo de rozamiento, sino también del paso (*).

260. Puede ya enunciarse la regla á que nos habíamos referido, del modo que sigue:

El rozamiento en los engranajes se toma en consideración trazando una tangente al círculo de rozamiento del engranaje, que sea paralela á la normal común.

Pero existiría ambigüedad en los problemas, si no hicié-

(*) Este valor es fácil de encontrar por medio de las tablas que nos dan los valores de f, combinadas con las relativas á los engranajes, y si no se quisiera recurrir á las tablas trigonométricas, podría emplearse la construcción gráfica marcada en la *figura* 75 (b), por medio de la cual se obtiene la magnitud $O\,D = \rho'$ tomando $O\,A = \frac{1}{2}\,p$, trazando la $A\,B$ que forme con ella 75°, y la perpendicular $O\,B$ á esta última. Esta sirve de punto de partida para el trazado de $B\,D$ que forme con $O\,B$ el ángulo φ de rozamiento, y por último de $O\,D$ perpendicular á $O\,B$, que nos proporciona el valor que se busca, como es fácil comprobar por las relaciones

$$O\,D = O\,B\,tg\,\varphi = O\,A\ sen\ 75°\,tg\,\varphi = \frac{1}{2}\,p\,f\ sen\ 75°$$

ramos una observación deducida de las construcciones á que se refiere la *figura* 75. Esta observación, es la disminución que ha habido del brazo de palanca con respecto á la rueda conducida y aumento en la conductora. Según ella, no cabe duda de cuál de las dos tangentes habrá de tomarse para potencia efectiva que venza la resistencia desarrollada en los contactos. Puede, por lo tanto, enunciarse otra regla, complemento indispensable de la anterior, que destruirá la ambigüedad que ella proporciona. La regla es la siguiente:

El rozamiento en los engranajes produce el efecto de disminuir el brazo de palanca de la potencia con respecto á la rueda conducida.

Bien fácil será ya el cálculo de una trasmisión con engranajes, bastando para ello empezar por la investigación del radio de rozamiento, lo cual se obtiene por medio de las tablas que dan los valores de f, y por las que nos proporcionan el paso del engranaje (*), terminando por la aplicación de las dos reglas citadas.

261. Generalización de la regla anterior.—Los resultados obtenidos pueden aplicarse también á otra forma de dientes que sea distinta de la de evolventes de círculo y para lo cual la dirección de la normal común no forme un ángulo constante con la línea de centros. Basta observar que el valor de *sen* 75^0 difiere muy poco de la unidad, para comprender la pequeña diferencia que habría con respecto á los valores del radio de rozamiento, al considerar constante dicho ángulo. De este modo se salva la dificultad que existiría en el trazado de esta normal común, para el que sería preciso determinar la posición correspondiente á cada uno de los contactos y escojer después la que pudiera considerarse como promedio de todas ellas.

(*) Anotaremos, para evitar que tenga que recurrirse al empleo de las tablas trigonométricas, que el valor de *sen* 75^0 es 0,9699, y con esta observación será fácil el cálculo de ρ', que por otra parte puede hacerse por el método gráfico indicado en la nota anterior.

Bajo este concepto, en los trazados epicicloidales, es suficientemente aproximado formar un ángulo de 80° y considerar esta recta como el promedio de las posiciones de la normal común; ya que según hemos dicho, pueda tomarse para el radio de rozamiento el mismo valor que corresponde al trazado de evolventes (*).

262. Apreciación gráfica.—Ninguna dificultad podrá ofrecer ya la apreciación gráfica de los engranajes, al necesitar solamente hacer aplicación de las reglas dadas en la teoría general dinámica y conocer con precisión el valor que tiene la potencia teórica en un mecanismo de esta clase.

263. Omitimos nuevas consideraciones para la apreciación de los engranajes interiores, que solamente serían repetición de las hechas en este estudio. Las reglas todas se aplican de un modo análogo, teniendo en cuenta el sentido que debe asignarse á los radios de cada una de las ruedas que constituyen el engranaje.

OBSERVACIONES RELATIVAS Á LOS ENGRANAJES

264. Engranajes de precisión.—En todos los sistemas de engranaje que hemos explicado, el contacto de los dientes se verifica según una generatriz de los cilindros, cuyas secciones rectas están representadas en cada una de nuestras figuras. Pueden considerarse como verdaderos *engranajes de fuerza*, dado el que se construyan los dientes con las dimensiones necesarias.

Pero en estos engranajes, el rozamiento, según sabemos, es considerable; y se hace preciso en muchos casos reducir á

(*) Para comprender las ventajas del cálculo gráfico, debe observarse la analogía de las reglas dadas con las deducidas en todos los casos ya explicados, como rozamiento de cadenas, cuerdas, etc., para los cuales se asimilaba también el rozamiento á variaciones en el brazo de palanca. Por otra parte, es fácil demostrar la identidad de los resultados obtenidos por el cálculo gráfico con los que proporciona el analítico. Véase á este efecto el tratado especial de Mr. Hermann, página 60.

su mínimo dicha resistencia nociva, para obtener por este medio un *engranaje de precisión*, que sea susceptible de marchar á grandes velocidades.

265. La idea de este engranaje, llamado también *engranaje de White*, es sumamente sencilla (*). Es sabido, según se ha demostrado en el párrafo 254, que el rozamiento disminuye aumentando el número de dientes, ó lo que es lo mismo, disminuyendo el paso del engranaje, con lo cual disminuye también la altura ó saliente de cada diente. Depende tal efecto, de haber disminuído de este modo la longitud del que hemos llamado arco de resbalamiento; con lo cual, el trabajo del rozamiento disminuye también, al ser menor el espacio recorrido por el punto de aplicación de esta fuerza nociva. Si se consiguiese anular, ó por lo menos disminuir todo lo posible dicho arco, el trabajo expresado se anularía ó disminuiría considerablemente; pudiendo observarse que en el caso límite, el contacto de cada par de dientes se verificaría constantemente sobre la línea de centros. Recíprocamente, si esta condición queda satisfecha, también lo será la de anular el trabajo del rozamiento, por anularse el camino recorrido ó arco de resbalamiento.

Pero según se ha dicho en el expresado párrafo 254, esta disminución del paso ó aumento del número de dientes, no puede hacerse tan considerable que impida la buena resistencia y perfecta conducción de aquellos; haciéndose preciso tomar el valor que sea compatible, con las condiciones prácticas que han de tenerse en cuenta en estos mecanismos.

266. Constitución del mecanismo.—Imagínese un cierto número de ruedas dentadas cuyo espesor sea muy pequeño y que cumplan además con la condición que relativa al número de dientes hemos mencionado. Sea n el número de éstas, y representemos el desarrollo de cada una de sus llantas por las

(*) El fundamento es debido á Hooke y dado á luz en 1666; pero ha sido perfeccionado el sistema por White en 1808, recibiendo el nombre de éste para olvidar al verdadero inventor de tan notable mecanismo.

bandas ab, a_1b_1, a_2b_2....(*fig.* 76), en las cuales las partes rayadas representan los llenos, y las otras los vacíos.

Colóquense todas estas ruedas superpuestas de modo que tengan un mismo eje, que formen un solo cuerpo ó sistema material, y por último, que los dientes de cada una tengan un avance con respecto á los de la anterior, según se manifiesta en la figura. Imagínese también el conjunto de piñones que deben engranar con estas ruedas, los cuales deben estar superpuestos en una disposición análoga.

Supongamos que un diente de la rueda ab empieza su contacto y conduce al diente de su correspondiente piñón durante la fracción $\frac{1}{n}$ del paso, y supongamos también que el perfil está limitado de tal modo, que cese el contacto al fin de este período correspondiente á dicha fracción $\frac{1}{n}$. La posición del segundo diente d_1 es tal, que terminado el contacto del d, empieza á engranar con uno de los dientes del segundo piñón, cuyo engrane se verifica también durante la fracción $\frac{1}{n}$ del paso. Al diente d_1 sigue el d_2, con el cual se verifica el mismo efecto, el que se repite una y otra vez, hasta terminar la serie de dientes d, d_1, d_2....

Como el número de piñones es igual á n, el contacto del último diente de esta primera serie, habrá terminado cuando las ruedas hayan girado una cantidad igual al paso; entonces empezarán los contactos de la segunda serie d', d'_1, d'_2.... para la que se repetirán los mismos fenómenos explicados en la primera.

Con el sistema empleado, conseguimos poder asignar al lleno de cada una de las ruedas, el mismo valor que si sus dientes estuvieran obrando durante el paso entero, y disminuimos el arco de resbalamiento ó de conducción de los dientes en tal forma, que será la enésima parte del que se hubiera obtenido con un engranaje ordinario, cuyo paso fuese igual al dado.

267. Supongamos ahora que el número n aumenta indefinidamente, y que al mismo tiempo, el espesor de cada una de las ruedas que hemos superpuesto, tiende hacia cero. La serie de dientes escalonados $d, d_1, d_2 \ldots$. se transformará en su límite en una porción de filete de tornillo. Los dientes que en el piñón son conjugados de éstos, sufrirán análoga transformación. El contacto de ambas series se verificará en cada instante en un elemento solamente, ya que cada elemento de serie á que se reducen los pequeños dientes $d, d_1 \ldots$. debe verificar la conducción durante una fracción infinitamente pequeña del paso.

Resulta, finalmente, que el trabajo del rozamiento se habrá anulado, puesto que al ser reemplazado cada par de elementos por el siguiente, el arco de resbalamiento será nulo; el contacto de cada par de dientes se verificará siempre sobre la línea de centros, y por fin, el movimiento de las series una sobre otra, será de rodar. Al mismo tiempo, se ha proporcionado á la rueda, y por consiguiente á los dientes especiales con que queda armada, el espesor suficiente, en sentido de su eje, para que pueda resistir los esfuerzos á que esté sometida.

268. Inconvenientes y modo de evitarlos.—Debe señalarse un inconveniente, relativo al engranaje obtenido del modo dicho. La presión que se ejerce entre ambas ruedas, siendo normal á las superficies helicoidales en contacto, tendrá una componente paralela al eje, cuyo efecto será fatigar los cojinetes, acabando por destruirlos al cabo de cierto tiempo. Este efecto queda destruído superponiendo dos engranajes idénticos, en los cuales los filetes estén dispuestos en sentido contrario, como se representa en la *figura 77*. Se verificarán al mismo tiempo dos contactos en vez de uno, pero las componentes paralelas al eje serán iguales y en sentido contrario. El engranaje obtenido será ya perfecto; será un verdadero engranaje de precisión, con el que podrán obtenerse velocidades considerables sin que presente resistencia nociva de ningún género (*).

(*) Empleando engranajes de esta naturaleza, ha conseguido Mr. Breguet

c.—Trenes de engranajes

269. Descripción y trazado.—Cuando las velocidades con que deben marchar los dos árboles de rotación difieren mucho entre sí, los radios de las ruedas que resuelven teóricamente la cuestión en un engranaje ordinario, resultan muy grande el uno y muy pequeño el otro; de tal modo, que llegando á cierto límite, la trasmisión es impracticable. (*)

Se hace preciso recurrir al empleo de árboles de rotación intermedios, cada uno de los cuales tiene montados una rueda y un piñón, dispuestos de tal modo, que cada rueda engrane con el piñón del árbol anterior, y cada piñón con la rueda del posterior. La *figura* 78 representa una trasmisión de este género, vista de perfil para su mejor inteligencia. Los árboles principales están representados en o y o', siendo R y r' la rueda y piñón también principales. Los árboles intermedios llamados *árboles parásitos* están representados en o_1 y o_2; y las ruedas y piñones que también toman el nombre de *parásitos*, montados sobre estos árboles, realizan la comunicación del movimiento, por formar cuerpo ó estar invariablemente unidos cada rueda y piñón, R_1 y r_1, por ejemplo, á su eje correspondiente o_1.

Nada nuevo hemos de indicar con respecto al trazado de este mecanismo compuesto, por ser combinación sencilla del que acabamos de explicar, y por lo tanto, entraremos de lleno en la apreciación, empezando por determinar la relación de

---

mover ejes de rotación con velocidades que exceden á 2.000 vueltas por segundo. También pertenecen á este género, los engranajes cuyo uso ha propuesto Wethli para emplearlos en las vias férreas de rampas muy pronunciadas.

(*) El límite que ordinariamente se fija para la relación de velocidades en una trasmisión por engranaje ordinario, es $\frac{1}{5}$ para las máquiuas industriales, y $\frac{1}{10}$ para los cronómetros.

velocidades para obtener después las de esfuerzos y trabajos, como principales puntos á que aquella se refiere.

270. Relación de velocidades.—Es de observar para esta determinación, que las velocidades angulares de cada rueda y piñón montados sobre un mismo árbol, son iguales, por corresponder todos sus puntos á un mismo sistema material en rotación; y en este concepto, si empleamos la nomenclatura indicada en la figura, en la que las letras R y r representan radios y las ω velocidades angulares, podremos considerar separadamente cada par de ruedas dentadas; y tomando como base la propiedad ya demostrada de ser la relación de radios inversa de la que corresponde á las velocidades angulares, estableceremos las proporciones siguientes:

Engranaje de rueda R y piñón r_1..... $\dfrac{R}{r_1} = \dfrac{\omega_1}{\omega}$

Id. R_1 » r_2..... $\dfrac{R_1}{r_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$

Id. R_2 » r'..... $\dfrac{R_2}{r'} = \dfrac{\omega'}{\omega_2}$

Multiplicando miembro á miembro estas relaciones y haciendo las consiguientes reducciones, resulta

$$\frac{R\,R_1\,R_2}{r'\,r_1\,r_2} = \frac{\omega'}{\omega} \qquad (d)$$

cuya expresión, generalizándola al caso en que exista cualquier número de árboles parásitos, nos dice que en los trenes de engranajes, *la relación de velocidades angulares es inversa de la que existe entre los productos de los radios de las ruedas y los correspondientes á los mismos elementos de los piñones.*

De esta relación se deduce inmediatamente la de espacios recorridos, con solo multiplicar los dos miembros de la expresión (d) por la fracción $\dfrac{r'}{R}$, obteniéndose

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{R_1\,R_2}{r_1\,r_2}$$

expresión que puede también traducirse al lenguaje ordinario, como lo hemos hecho con la anterior.

271. Téngase en cuenta que las velocidades extremas tendrán el mismo sentido, ó sentido contrario, según que el número de árboles parásitos sea impar ó par; en el supuesto, como es consiguiente, de que todos los engranajes que forman el tren sean exteriores. Obsérvese también que, según la relación (7) párrafo 38 de la teoría cinemática, pueden sustituirse las relaciones de los radios, por las que existen entre los números de dientes; obteniéndose por este medio otra fórmula que será de aplicación en determinados casos y que presenta la forma

$$\frac{N\,N_1\,N_2}{n'\,n_1\,n_2} = \frac{\omega'}{\omega} \qquad (d')$$

272. Relación de esfuerzos.—Ninguna dificultad puede ofrecer la investigación de esta relación, si se tiene en cuenta que en este mecanismo, lo mismo que en todos los mecanismos compuestos, las acciones que se desarrollan en cada contacto pueden ser consideradas como resistencias del elemento anterior y como potencias del siguiente. Así, será resistencia del eje o' la que corresponde al contacto de R_2 y r'; esta á su vez, será potencia para el eje o_2, en el que obrará como resistencia la relativa al contacto $r_2\,R_1$ y así sucesivamente.

Según estas consideraciones y en el supuesto de que la potencia y la resistencia obren tangencialmente á las ruedas r' y R respectivamente (lo que suponemos para mayor sencillez) podrán establecerse las siguientes igualdades:

$$P = P_1 \ldots\ldots\ldots P_1 = {}_1Q\left\{1 + \frac{fp}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{R_2}\right)\right\}$$

$$Q_1 = P_2\frac{r_2}{R_2} \ldots\ldots P_2 = {}_2Q\left\{1 + \frac{fp}{2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R_1}\right)\right\}$$

$$Q_2 = P_3\frac{r_1}{R_1} \ldots\ldots P_3 = Q\left\{1 + \frac{fp}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{R}\right)\right\}$$

en las que los subíndices de las letras P y Q indican el número del engranaje simple á que corresponden.

Multiplicando miembro á miembro y suprimiendo los términos de 2.° grado en f, se obtiene la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = \frac{r_1 r_2}{R_1 R_2}\left(1 + \frac{fp}{2}\Sigma\frac{1}{r}\right)$$

comprendiéndose bajo el símbolo $\Sigma\frac{1}{r}$ la suma de las diversas fracciones $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r_1}$..... correspondientes á los piñones y ruedas de este mecanismo.

273. También el cálculo gráfico es de notable sencillez, y con objeto de que pueda adquirirse la suficiente práctica en las combinaciones, haremos su explicación presentándolo en la forma siguiente:

Trátase de investigar la magnitud que deberá tener la resistencia Q de dirección dada *(fig. 79, lám. 10)* en un tren de engranajes, empleando una potencia P de magnitud y dirección conocidas. (*)

Trácense los círculos de rozamiento correspondientes á cada uno de los contactos, y los relativos á los ejes, tanto principales como parásitos. Supongamos el caso más sencillo, de que exista solamente un árbol parásito, y en tal concepto examinemos los diversos problemas parciales en que esta cuestión puede descomponerse, que son los siguientes:

274. Primer problema parcial.—Se refiere al árbol c_1, en que obra como potencia la P, que es dato de la cuestión. La resistencia en él se desarrolla en su contacto con la rue-

---

(*) Resolvemos el problema inverso de dada la potencia encontrar la resistencia, para que los alumnos vayan ejercitándose en la resolución de los distintos problemas que pueden presentarse, sea cualquiera la forma que afecten. La marcha es análoga á la del problema directo, y estudiado uno cualquiera de ellos, ninguna dificultad presenta el conocimiento del otro.

da siguiente c_2. La dirección X_1 de esta resistencia, si el engranaje es de evolventes, forma, según se ha dicho, 75° con la línea de centros $c_1 c_2$, disminuyendo el brazo de palanca relativo á la rueda conducida. El problema es idéntico al explicado en el párrafo 183 al tratar de las guías de movimiento. La tangente R_1 al círculo de rozamiento del muñón c_1 trazada desde el punto o_1 en que se cortan P y X_1, representa la reacción total desarrollada en este.

Fácil es, según estas consideraciones, determinar el valor de la resistencia X_1. Presentamos aparte la construcción, para simplificar la figura principal, y que se obtenga en una sola la expresión del cálculo gráfico. En la 79 bis, el triángulo 1—2—3 obtenido trazando las paralelas á las fuerzas que en la 79 tienen el mismo nombre, representa el cálculo de este primer problema. La magnitud 2—3 es el valor hallado para X_1 y la 1—3 el de R_1, tan necesario en los cálculos de los mecanismos, para la investigación de las dimensiones que correspondan á los soportes de este árbol. (*)

275. *Segundo problema parcial.*—Es relativo al árbol c_2. Es potencia en él, la resistencia X_1 hallada para el anterior. Es resistencia la X_2 que corresponde al contacto m_2, trazada en las mismas condiciones que X_1. La resolución del problema será idéntica á la del anterior. Prolónguense las fuerzas X_1 y X_2 y desde su punto de intersección o_2 trácese la trangente R_2 al círculo de rozamiento, en el sentido conveniente para que desfavorezca á la potencia X_1 ó disminuya su brazo de palanca, dada la posición que tiene. El triángulo 2 — 3 — 4 de la *figura 79 bis*, resuelve este problema, y en él la fuerza 3 — 4 representa la resistencia X_2 y 2 — 4 la reacción R_2, que corresponde al árbol parásito c_2.

276. *Tercer problema parcial.*—El árbol c_3 es objeto de este problema. La fuerza X_2, resistencia del anterior, es potencia en éste. Sirve como resistencia, la definitiva Q del problema

(*) Esta investigación pertenece, según hemos dicho en otra ocasión, al dominio de la resistencia de materiales.

principal. Sin dar nueva explicación, puede comprenderse por la figura la construcción hecha, que es idéntica á la que corresponde á los anteriores problemas. Resulta en definitiva como valor de la resistencia Q que se busca, la magnitud 4—5, y como reacción correspondiente á este árbol principal la 3—5.

277. Resumen de los tres problemas parciales. — El polígono obtenido en la *figura 79 bis*, es el polígono de las fuerzas reales, y nos pone de manifiesto bajo un solo golpe de vista, las relaciones entre los diversos esfuerzos desarrollados en este mecanismo, las cuales forman el objeto principal de nuestro estudio.

Terminamos este punto de la apreciación de los trenes de engranajes, expresando que dicho polígono nos proporciona la relación buscada; cuyo valor, que se medirá en la escala del dibujo, es

$$\frac{P}{Q} = \frac{1-2}{4-5}.$$

278. Rendimiento.—Es sabido, por la teoría general dinámica, que para encontrar el rendimiento por medio del cálculo gráfico, han de encontrarse los esfuerzos que corresponden á la máquina teórica. Debe, por lo tanto, construirse el que llamaremos polígono teórico, para el que servirá de punto de partida en la *figura 79 bis*, la misma fuerza dada P. Las fuerzas auxiliares que se desarrollan en los contactos, son normales á la línea correspondiente de centros. Las reacciones en los muñones pasan por los centros de figura de éstos, y se trazarán desde los puntos de intersección o'_1, o'_2 y o'_3 que sustituyen á los o_1, o_2 y o_3. La subdivisión en problemas parciales puede hacerse también, pero sin necesidad de ello será muy fácil ir dibujando los diversos lados del polígono teórico, que representamos por los mismos números que corresponden al polígono real, afectado cada uno de un acento. También lo representamos con líneas de trazos y puntos, cuyo convenio, que emplearemos en adelante, es muy necesario para la buena inteligencia de las construcciones. Resulta como resistencia

teórica Q_0, la magnitud $4' - 5'$; mayor, como es natural, que el valor $4 - 5$.

El rendimiento queda ya determinado por la aplicación de la regla, párrafo 96 de la teoría general dinámica, y su valor es

$$R.^o = \frac{Q}{Q_0} = \frac{4 - 5}{4' - 5'}.$$

279. Observaciones relativas á los trenes de engranajes.—En los engranajes ordinarios, las fórmulas obtenidas nos permiten la resolución de los diversos problemas que puedan plantearse, comprendidos en el párrafo 15 de la teoría general cinemática. La sencillez notable que dichas fórmulas presentan, nos ha obligado, y nos obliga en los mecanismos simples, á pasar por alto la resolución de dichos problemas. Los comprendidos en la primera cuestión ó directa, tendrán por objeto calcular un engranaje construído, y serán datos los radios de ambas ruedas, determinando en su consecuencia la relación de velocidades que es inversa de ella. Así, si se nos da también una cualquiera de dichas velocidades, obtendremos por una cuarta proporcional el valor de la otra. Igual consecuencia deducimos para la cuestión inversa, en la que se da la relación de velocidades, para obtener en su consecuencia los valores de los radios que deben tener las ruedas, ó lo que es lo mismo, para hacer el cálculo del mecanismo en proyecto. Una cuarta proporcional nos resuelve también la cuestión, siempre que se asigne un valor determinado al radio de una de las ruedas; el que si no es dato directo, se marcará según el objeto á que deba satisfacer el engranaje.

280. También el problema directo presenta sencillez en los trenes de engranajes, por poderse medir los valores de los radios de todas las ruedas, y conocer, como es consiguiente, el primer miembro de la fórmula (*d*) obtenida para la relación de velocidades. Pero en el problema inverso, en que ninguno de los radios es conocido, la cuestión varía de aspecto, y se hace precisa la asignación de valores particulares que satisfa-

gan á esta fórmula, que presenta en este caso varias soluciones. Pero en este problema inverso se recurre en general á la fórmula (d'), en la que se determina el número de dientes que á cada rueda corresponde. A este fin, deben asignarse al numerador y denominador del primer miembro dos valores que, siendo proporcionales á ω' y ω, puedan descomponerse á lo menos en tantos factores enteros como ruedas ó piñones existen. Estos factores deben estar comprendidos, como es natural, entre los límites superior é inferior que marquen las tablas, para número de dientes de las ruedas dentadas. Agrupando convenientemente los factores obtenidos, reduciendo su número al de ruedas ó piñones existentes, se tendrán las soluciones de este problema, que serán tantas como agrupaciones puedan hacerse.

Por ejemplo, si los números que arbitrariamente elegimos son H y H', tal que se tenga

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{H}{H'}$$

y en la descomposición de estos se obtiene

$$H = a.b.c.d.e, \qquad H' = a'.b'.c'.d',$$

una de las agrupaciones que podrán hacerse en el caso que solamente haya tres ruedas y tres piñones, será

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a.b}{a'.b'} \cdot \frac{c.d}{c'} \cdot \frac{e}{d'}$$

y los valores obtenidos para número de dientes, serán según la fórmula (d'),

$$N = a.b; \quad n' = a'.b'; \quad N_1 = c.d; \quad n_1 = c'; \quad N_2 = e; \quad n_2 = d'$$

Si estos resultados no están comprendidos en los límites

que marquen las tablas, podrán hacerse nuevas agrupaciones, hasta obtener factores comprendidos entre los límites convenientes.

281. Como puede observarse, este problema es en general bastante complicado, pudiendo suceder muchas veces que los factores primeros que se obtengan sean muy grandes ó que la relación dada sea incomensurable. En ambos casos será preciso contentarse con una cierta aproximación, y buscar fracciones cuyas condiciones difieran lo menos posible de las que hemos indicado (*).

d.—Trenes epicicloidales.

282. **Trenes exteriores.**—Se llama tren epicicloidal un aparato compuesto de ruedas dentadas, dispuestas de tal modo, que la primera está montada sobre un eje fijo y las restantes sobre ejes móviles, arrastrados por una armadura que gira alrededor del primero, llamado eje principal. Con esta disposición, los diversos puntos de cada una de las ruedas correspondientes á los ejes movibles están animados de un movimiento especial, caracterizado de idéntico modo al que se emplea en Geometría para definir las epicicloides, y cuyo movimiento da nombre al mecanismo.

283. Presentaremos un ejemplo de tren epicicloidal, que sirva para poderse formar idea del modo de funcionar esta clase de mecanismos. Consta de una rueda dentada *A (figura* 80) fija completamente. Alrededor de su eje geométrico gira una armadura *BB*...., formada por un anillo concéntrico con la rueda. En diversos puntos de esta armadura, y engra-

(*) En casi todos los casos, debe recurrirse al empleo de las fracciones continuas para resolver las aplicaciones á que se refiere la cuestión inversa. Pero no siendo de utilidad práctica para nuestro estudio el conocimiento detallado de estos problemas, omitimos su resolución, que puede encontrarse en tratados especiales que comprendan el estudio de los mecanismos empleados en relojería.

nando con la rueda, van montados varios piñones C, C...., que pueden girar alrededor de sus ejes correspondientes, fijos sobre dicha armadura. Al recibir el anillo B un movimiento de rotación, se ven obligados los piñones á girar alrededor de sus ejes respectivos, con lo cual los diversos puntos de ellos se encuentran animados á la vez del movimiento de arrastre que proporciona el anillo, y del relativo correspondiente á cada piñón. El movimiento absoluto de cada punto, es un verdadero movimiento epicicloidal, que puede ser utilizado en industrias especiales (*).

284. El cálculo de este mecanismo es idéntico al de los trenes de engranajes, del cual puede considerarse más bien como un caso particular. Las relaciones diversas que pueden encontrarse para velocidades, esfuerzos y trabajos, tienen la misma forma, y los valores particulares que adquieran las primeras se encontrarán directamente, fundándose en la teoría de movimientos relativos. Basta considerar que se imprime al sistema total un movimiento igual y contrario al que tiene la armadura, para deducir la consecuencia de proporcionalidad inversa entre las velocidades angulares y los radios respectivos. En efecto, con este movimiento, los sistemas formados por la rueda y cada uno de los piñones, quedan en idénticas condiciones á un engranaje ordinario, pudiendo establecerse la relación indicada, que sirve de base para la resolución de cuantos problemas puedan presentarse.

285. Trenes interiores.—Otro ejemplo de tren epicicloidal podemos presentar con el llamado *engranaje interior*

(*) Es el ejemplo más sencillo que hemos podido encontrar de esta clase de mecanismos, y más útil también por la aplicación especial á que se destina. El tren epicicloidal á que nos referimos en el texto, forma la base principal de una máquina para la fabricación de cables. Cada uno de los piñones lleva en su eje una bobina de la que pende un alambre. Los diversos alambres van á reunirse en un embudo especial, donde se arrollan los unos á los otros para formar el cable. La rotación propia de los piñones, produce la torsión de cada alambre, y la rotación del anillo los arrolla según hélice.

de Lahire (*). Dicho engranaje difiere del anterior en que la rueda fija está dentada interiormente. Los piñones se reducen á uno sólo, montado sobre una armadura *abc* (*fig.* 81) que gira alrededor de *o*. El diámetro de este piñón es exactamente igual al radio de la rueda fija. De este modo el movimiento epicicloidal que corresponde á un punto cualquiera *m* del piñón, se convierte en rectilíneo; pero como caso particular de una hipocicloide ó epicicloide interior, cuya forma es rectilínea, según se sabe, en el caso especial que consideramos de ser $\frac{1}{2}$ la relación de radios.

La recta descrita por el punto *m* es el diámetro *dd'*, y este camino es recorrido alternativamente en uno y otro sentido, realizándose por este medio una trasformación de movimiento circular continuo (el de la armadura) en otro que sea rectilíneo alternativo. Esta es la razón por la que se articula en el punto *m* del piñón una barra *mm'*, que comunica dicho movimiento rectilíneo al órgano que deba tenerlo.

286. Omitimos también la apreciación de este mecanismo, de la cual puede deducirse que la velocidad correspondiente al punto *m* es nula al pasar por los extremos *d* y *d'* del camino recorrido, razón por la cual se da á estos el nombre de puntos muertos (**).

(*) Si bien todos los autores colocan este engranaje en otro lugar, correspondiendo á la trasformación de movimiento circular continuo en rectilíneo alternativo, creemos oportuno darle su verdadero carácter de tren epicicloidal, con lo cual se facilita la explicación y se comprende mejor la marcha del mecanismo.

(**) Se obtiene muy fácilmente la ley del movimiento sobre el diámetro *dd'* si se recuerda cuanto se ha dicho en Mecánica racional acerca de los movimientos proyectados. El mismo ejemplo que cita Delaunay en su párrafo 14, sirve de base á éste, y basta observar, para estudiar las variaciones de la velocidad, que según el párrafo 13 del mismo autor, la que corresponde al movimiento rectilíneo es proyección sobre el diámetro, de la que tiene el punto de contacto de ambas circunferencias. En los extremos del diámetro *dd'*, dicha velocidad es normal al expresado diámetro; su proyección es cero. En cambio en los extremos del diámetro horizontal que pudiera trazarse, la velocidad de referencia es paralela á su proyección, y tendrá, por lo tanto, un valor máximo.

e.—Levas de martillos.

287. Descripción.—Cuando el movimiento circular que debe tener el órgano conducido no se verifica de un modo continuo, variará, como es natural, su forma; afectando la que corresponde á la naturaleza de dicho movimiento.

En el mecanismo que nos ocupa, el órgano conducido es un martillo *oA*, (*fig.* 82) que debe girar alrededor del punto *o*, provisto de las correspondientes guías de movimiento circular, para que en la caída percuta su cabeza *B* sobre el yunque *M*. La rueda *C*, ú órgano conductor, tiene un movimiento circular continuo, que debe proporcionar por intermitencias el ascenso del martillo, siendo el descenso originado por el propio peso de éste.

288. Trazado teórico.—Terminado el vástago del martillo por un prisma rectangular, cuyo perfil inferior tiene las letras *ab* en nuestra figura, la conducción de aquel durante su movimiento de ascenso, se verificará en las mismas condiciones que hemos explicado para un engranaje ordinario. El perfil conducido *ab* es rectilíneo, y como forma parte de un diámetro de la circunferencia *o*, cuya primitiva posición es *ob'*, puede considerarse como un trozo de la hipocicloide rectilínea engendrada por el punto *b'* de la circunferencia *o''* (que se ha trazado con diámetro *ob'*) al rodar interiormente sobre la circunferencia *o*.

289. Según lo dicho en el párraro 225 al tratar del trazado de los engranajes epicicloidales, de los cuales es esta una aplicación, el perfil del diente conductor debe ser engendrado por la misma circunferencia *o''*, rodando exteriormente sobre la *C*. La epicicloide *b'c* representa este perfil, y su trazado no presenta ninguna dificultad, dada la generación de esta clase de curvas.

290. El problema hasta este momento, ha sido idéntico al de los engranajes ordinarios. Preséntase ahora la cuestión de limitar los dientes, que está íntimamente ligada con la que

se refiere al número de ellos con que debe estar armada la rueda *C*. He aquí la única diferencia con el caso citado que nos sirve de base, y esta diferencia es la que nos obliga á presentar este problema como una de las aplicaciones que deben resolverse.

Para responder á los fines que hemos indicado, observaremos que si *ob* es la posición más elevada del martillo, el diente *b'c* debe conducir á éste hasta su punto más alto *b*, siendo este punto precisamente el extremo de la correspondiente posición del diente. Trácese, por lo tanto, con centro *o'* y radio *o'b* una circunferencia, y esta nos limitará el perfil *b'c*, que será fácil reproducir en el punto *b*. La curva *bb''* obtenida, representaría con exactitud la posición del segundo diente, si la caída del martillo fuera instantánea. Al verificarse de este modo, abandonado el perfil *ab* por su perfil conductor *bb''*, encontraría el martillo en su caída el nuevo perfil *b'c* que otra vez ha de producir su elevación.

291. Pero esta condición es imposible de realizar. La caída necesita un cierto tiempo para verificarse. El efecto útil que se desea obtener con este mecanismo es el choque ó percusión de la cabeza *B* con el yunque *M*. El diente *b'c* debe presentarse á recoger el martillo y elevarlo, después de verificado este choque. Se hace preciso, por lo tanto, calcular el tiempo de duración de dicha caída, y en función de él, el aumento que por tal concepto debe tener la distancia *b'b''* entre dos dientes consecutivos.

Este cálculo es bien sencillo si se recuerdan las leyes enunciadas en Mecánica racional (*) sobre la caída de los cuerpos graves; cuya ecuación, al ser abandonados libremente en el vacío, y sin velocidad inicial, es

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

(*) Delaunay, párrafo 90.

y de ella se deduce directamente el tiempo á que nos referimos

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

en cuya fórmula es bien sabida la significación de g, debiendo también recordar que h es la altura que corresponde á la distancia recorrida por el centro de gravedad; ó sea, refiriéndonos á nuestra figura, la magnitud $g\,p$. Esta altura debe servirnos de dato principal, dada la naturaleza del problema que nos ocupa, ya que su valor, combinado con el que corresponde al peso del martillo, depende del objeto industrial propuesto, ó en otros términos, de la mayor ó menor resistencia que presente el objeto percutido.

292. Conocido el tiempo de caída, y cómo debe calcularse el avance que en este tiempo corresponde al diente, podrán relacionarse ambos elementos por la fórmula

$$s = v\,t$$

del movimiento uniforme que se supone á la rueda, y en dicha fórmula representará s el espacio lineal recorrido, y v la velocidad de la rueda, que será conveniente poner en función de la velocidad angular ω, para deducir la expresión

$$s = \omega\, r \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (e)$$

que se obtiene combinando las dos últimas que hemos presentado.

Será más cómodo en la práctica encontrar el número de grados que corresponde á este arco, cuyo valor es $\alpha = \frac{s}{r}$, para marcar con exactitud la posición verdadera $d\,d'$ del segundo perfil, que se obtiene tomando un arco $b''\,d'$ cuyo número de grados sea α.

293. Pero no es todavía definitiva la posición marcada. El arco $b'd'$ obtenido como distancia entre los dientes, debe ser una parte alicuota de la circunferencia o', para que el mecanismo sea lo más perfecto posible. Caso contrario, resultaría muy pequeña la distancia entre el último y primer diente, ó de no ser así, quedaría el martillo detenido un cierto tiempo en su posición más baja.

Deben rectificarse, por lo tanto, los resultados obtenidos, dividiendo la circunferencia total por el arco $b'd'$ para obtener el número de dientes; y si éste no resultara entero, se tomaría solamente su parte entera, modificando convenientemente el valor antes obtenido para $b'd'$, que de este modo nos dará la posición definitiva de los diversos perfiles.

294. Se completa el trazado de este mecanismo, limitando los dientes por las rectas que resultan de unir los puntos extremos c y d al centro o', puesto que no es necesaria la condición de simetría que exigían los dientes de las ruedas que debieran marchar unas veces en un sentido y otras veces en otro.

Debe indicarse, como complemento de este trazado, la conveniencia de redondear los ángulos entrantes que corresponden á los perfiles rectilíneos, con objeto de reforzar los arranques de cada diente. Así está representado en el diente H que se ve en nuesta figura.

295. Siguiendo las indicaciones que dejamos hechas al expresar la marcha general para el estudio de los mecanismos, omitiremos la apreciación de éste, por la suma facilidad que existiría al hacerla de un modo idéntico al que corresponde á los engranajes ordinarios; debiendo tener presente que la resistencia que trata de vencerse es el mismo peso del martillo, que puede servir como dato para la determinación de la potencia, y que si se llama R y r á las magnitudes $o'a'$ y $o'b'$ respectivamente y R' y r' á las og' y ob', se obtendrá para valor de la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = \frac{rr'}{RR'}\left\{1 + \frac{fp}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R'}\right)\right\}$$

296. Observaciones relativas á este mecanismo.—La descripción y trazado que hemos estudiado se refiere al martillo conocido con el nombre de *martillo frontal*, aparato muy empleado en muchas industrias, como forjas de hierro, fábricación de papel, etc.

Tal nombre es debido al modo de ejercerse la potencia en la palanca que forma el mango del martillo. Pero algunas veces, la leva obra en un punto comprendido entre el eje de rotación y la cabeza *B*. En este caso, toma el nombre de *martillo de elevación ó á la alemana*.

297. Por último, puede ejercerse la potencia en un punto situado en la extremidad de la prolongación del mango, quedando entonces el punto de apoyo comprendido entre potencia y resistencia. El mecanismo toma el nombre de *martillo de báscula ó martinete*. El trazado en todos los casos es análogo, variando en este último la posición de las levas, que estarán invertidas con respecto á las que se dibujan en la *figura* 82; evitándonos una repetición que sería enojosa, dada la identidad de consideraciones que pudiéramos hacer con respecto á estas variedades del mecanismo que hemos estudiado (*).

ARTÍCULO II

Clase B.—Ejes que se cortan

298. Mecanismos que comprende esta clase.—En esta agrupación de mecanismos, se van á explicar los siguientes:

a. Conos de fricción.

b. Engranajes cónicos.

No se hace el estudio de los trenes epicicloidales esféricos, porque están constituídos con relación á los engranajes

(*) Expresamos de nuevo la conveniencia de que los alumnos se ejerciten en el trazado y cálculo que tan justificadamente omitimos.

cónicos, de idéntico modo que los trenes epicicloidales explicados lo están con respecto á los engranajes planos.

a.—Conos de fricción.

299. Naturaleza y condiciones del mecanismo.—Tiene gran analogía con los cilindros de fricción, porque realiza la trasformación del movimiento por el simple contacto de dos superficies cónicas que en general son troncos de cono, teniendo cada uno de ellos la altura conveniente al objeto para que está destinado el mecanismo.

La aplicación que puede hacerse, se deduce inmediatamente de las fórmulas (8) y (9) obtenidas respectivamente en los párrafos 40 y 41, con cuyo auxilio quedan resueltos los problemas relativos al trazado y apreciación del mecanismo. Para los primeros, basta seguir la marcha indicada en el párrafo 43, según el cual, se obtienen de las mencionadas fórmulas, los valores

$$sen\, \theta_1 = \frac{\omega_2\, sen\, \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\, cos\, \alpha}}$$

$$sen\, \theta_2 = \frac{\omega_1\, sen\, \alpha}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2\, cos\, \alpha}}$$

que nos proporcionan el medio de trazar la generatriz común á los dos conos, dados que sean el ángulo α de los ejes y la relación $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ de velocidades angulares.

En cuanto á los problemas de apreciación, puede observarse la dependencia directa del primer punto con relación á las fórmulas (8) y (9) ya mencionadas; debiendo deducirse de ellas mismas la relación de esfuerzos si se trata de la máquina teórica, ó bien cuando se trate de la máquina real, aplicar los razonamientos hechos para los cilindros de fricción.

La resolución gráfica es una consecuencia directa de la

marcada en el párrafo 42, por cuya razón omitimos presentarla.

Como en este mecanismo la trasmisión depende de la mayor ó menor adherencia que existe entre las superficies de ambas ruedas, solamente se emplean para el caso en que deban soportar pequeños esfuerzos. Se aumenta también dicha adherencia, guarneciendo las superficies en contacto con trozos de cuero del mismo ancho que ellas.

b.—Engranajes cónicos.

300. Trazado.—El trazado de esta clase de engranajes se ha explicado en los párrafos 44, 45 y 46, á los cuales deben añadirse las consideraciones hechas y fórmulas encontradas al tratar de los conos de fricción, habiendo de observarse además la dependencia entre este mecanismo y los engranajes cilíndricos, de los cuales es una consecuencia inmediata.

Nada nuevo añadiremos relativo á dicho trazado, que estará caracterizado también por la naturaleza de las curvas que se empleen como perfiles de los dientes. Se obtendrán diversos tipos correspondientes á los marcados con las letras α, β y δ en el párrafo 221, ó sea con los nombres *de epicicloidal, de evolventes y de linterna.* Presentamos uno de ellos en la *figura* 83, en la que $S\,A\,M$ y $S\,B\,M$ representan los conos primitivos, siendo $S_1\,A\,M$ y $S_2\,B\,M$ los suplementarios. Estos, en su desarrollo marcado en la *figura* 83 *(a)*, han sido armados de dientes, como si constituyeran un engranaje plano, y ellos sirven de base ó directriz para que una generatriz que se apoye constantemente en S y en el contorno de los sectores dentados, después de arrollados de nuevo, engendre el engranaje. Este se limita por la parte superior de modo que proporcione el espesor conveniente, dada la naturaleza de los esfuerzos que deban trasmitirse (*).

(*) Ejercítese el alumno, por vía de repaso, en el trazado del engranaje marcado en la *figura* 83 *(a)*. Hecho esto, el dibujo de la 83 es una cuestión sencilla de Geometría Descriptiva.

Los datos numéricos relativos á estos engranajes son los indicados para los cilíndricos, ya que el trazado se reduce al de éstos, y en el caso de engranajes expuestos á choques violentos, se puede hacer uso de la *tabla núm 7*, análoga á la que se refiere á los cilíndricos.

301. Apreciación de los engranajes cónicos.—Se obtiene la *relación de velocidades angulares* por las fórmulas (8) y (9) que ya hemos mencionado; y la *relación de velocidades lineales* se deduce ser igual á la unidad, por las mismas consideraciones que han servido para establecer dichas fórmulas.

302. La *relación de esfuerzos* es consecuencia inmediata de la obtenida para los engranajes cilíndricos, dadas las ideas que han presidido al trazado de los que ahora nos ocupan. Obsérvese, según ellas, que el engranaje cónico representado en la *figura* 83, del cual, según hemos dicho, son $S_1 A M$ y $S_2 B M$ los conos suplementarios, funciona de tal modo, que los diversos elementos van presentándose sucesivamente en el plano tangente común trazado por la arista $S_1 S_2$. Obsérvese también que dada esta consideración, puede el engranaje, en su modo de funcionar, ser asimilado al engranaje plano que hemos presentado en la figura auxiliar, cuyos círculos primitivos sabemos tienen por radios las generatrices $S_1 M$ y $S_2 M$ de los conos suplementarios. Si llamamos r_1 y r_2 á los radios de los círculos proyectados respectivamente en $A M$ y $B M$, los valores que corresponden á las generatrices de dichos conos suplementarios, tendrán por expresiones:

$$S_1 M = \frac{r_1}{\cos \delta_1}; \quad S_2 M = \frac{r_2}{\cos \delta_2}$$

en las cuales tienen δ_1 y δ_2 la significación indicada en nuestra figura, idéntica por otra parte á la marcada en los párrafos citados de la teoría cinemática.

La aplicación de la fórmula *(a)* obtenida para los engranajes planos cuyos radios tienen los valores que acabamos

de señalar, y cuyo contorno se desarrolla, según hemos dicho, en el plano tangente común á los conos suplementarios, nos proporciona el valor de la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q}=1+\frac{f\,p}{2}\left(\frac{\cos\theta_1}{r_1}+\frac{\cos\theta_2}{r_2}\right) \qquad (f)$$

303. Generalmente se da otra forma á esta relación, para ponerla en función del ángulo α que forman los dos ejes. A este efecto, llamemos ω_1 y ω_2 las velocidades angulares que corresponden á las ruedas cuyos ejes son $S\,S_1$ y $S\,S_2$ respectivamente, y llamemos también ω á la resultante de estas velocidades. El valor de esta en función de aquellas, tendrá por expresión

$$\omega=\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2+2\,\omega_1\,\omega_2\cos\alpha}$$

Además, si se proyectan las componentes ω_1 y ω_2 sobre la dirección de la resultante ω, obtendremos el valor

$$\omega=\omega_1\cos\theta_1+\omega_2\cos\theta_2$$

Igualando estos valores é introduciendo en la expresión obtenida la condición de proporcionalidad inversa entre velocidades angulares y radios, se obtendrá

$$\frac{\cos\theta_1}{r_1}+\frac{\cos\theta_2}{r_2}=\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2\cos\alpha}{r_1\,r_2}}$$

Este valor, sustituído en la expresión *(f)* nos proporciona la nueva forma que tratábamos de encontrar:

$$\frac{P}{Q}=1+\frac{f\,p}{2}\sqrt{\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2\cos\alpha}{r_1\,r_2}} \qquad (f')$$

304. En esta fórmula puede ponerse en evidencia, como lo hicimos en los engranajes cilíndricos, el número de dientes

que á cada rueda corresponde, bastando combinarla con las relaciones

$$n_1 p = 2\pi r_1; \quad n_2 p = 2\pi r_2$$

encontradas en la teoría cinemática, párrafo 38. De esta combinación resulta la expresión

$$\frac{P}{Q} = 1 + f\pi \sqrt{\frac{1}{n_1^2} + \frac{1}{n_2^2} + \frac{2\cos\alpha}{n_1 n_2}} \qquad (f')$$

y observando que si α se anula, la cantidad subradical es el cuadrado de la suma $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}$, se obtiene

$$\frac{P}{Q} = 1 + f\pi\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

305. Reproducimos de este modo la fórmula (a') obtenida en el párrafo 255 para los engranajes cilíndricos, pudiendo establecerse la comparación entre una y otra clase de mecanismos.

ARTÍCULO III

Clase C.—Ejes que ni se cortan ni son paralelos

306. Mecanismos pertenecientes á esta clase.—Los mecanismos que comprendidos en esta clase vamos á explicar, son los siguientes:

a—Hiperboloides de fricción.
b—Engranaje hiperboloide.
c—Tornillo sin fin.
d—Combinaciones de engranajes.

a—Hiperboloides de fricción.

307. Naturaleza del mecanismo.—Menos usado todavía este mecanismo que los cilindros y conos de fricción, omitiremos datos particulares relativos á él, indicando solamente que la construcción de los hiperboloides se deduce inmediatamente de las consideraciones hechas en los párrafos 48 al 51 de la teoría cinemática, según los cuales puede investigarse con facilidad la posición que corresponde á la generatriz que cumpla con la condición de resbalamiento mínimo. Como se comprende, la comunicación del movimiento no se verifica de un modo tan perfecto como en los mecanismos indicados, cual pudiera deducirse al examinar sus condiciones, haciendo la apreciación de un modo análogo al expresado en los demás casos. La indicación que hacemos la consideramos, por lo tanto, muy suficiente, puesto que sólo ha de servir como base para la construcción del engranaje hiperboloide que ahora nos ha de ocupar, constituyendo los hiperboloides primitivos que corresponden á dicho engranaje.

b—Engranaje hiperboloide.

308. Trazado.—Los hiperboloides de revolución que han sido objeto del párrafo anterior, sirven de punto de partida para el trazado de este engranaje. Sin detenernos en el trazado teórico que pudiera verificarse, que por otra parte no presentaría utilidad práctica, habremos de expresar la conveniencia de utilizar los conos suplementarios de cada uno de los hiperboloides, de un modo análogo al empleado para los engranajes cónicos.

La *figura* 84, *lám.* 11, nos representa el engranaje que nos ocupa. En ella solamente ha podido representarse con claridad uno de los hiperboloides primitivos: el *m n*. La posición del cono suplementario que corresponde á este hiperboloide, se halla marcada con las letras *a b c*. La del otro hiperboloide y del

cono suplementario correspondiente, se marcaría con exactitud mediante una nueva proyección del mecanismo sobre un plano paralelo al eje *o*. Los perfiles que pueden obtenerse por medio de estos conos suplementarios, servirán de base al engranaje, cuyos dientes y huecos tendrán la dirección de las generatrices rectilíneas y estarán engendrados por estas. Se limita el engranaje por otros conos suplementarios que tengan sus bases como la $a'c'$, que dista de $a\,c$ la cantidad necesaria para que el espesor sea el conveniente á la resistencia que debe presentar.

309. Apreciación.—Para la apreciación de este mecanismo, debe servir de base la fórmula (10) ó sus derivadas, encontradas en el párrafo 49. Ellas nos proporcionan el medio de encontrar la relación de velocidades angulares, de las que puede deducirse la de espacios recorridos, ya que nos es conocida la naturaleza del movimiento de los puntos en contacto. Mas este movimiento precisamente, no siendo por simple rodadura, y sí debido á la coexistencia de uno de rodar y otro de resbalar á lo largo de la generatriz de contacto, origina una pérdida considerable de trabajo, que debe tomarse en consideración, deduciéndolo del valor del resbalamiento encontrado en el mencionado párrafo, con cuyo auxilio se completa la apreciación del mecanismo.

Pero la referida causa hace que sea de un uso muy poco frecuente, siendo sustituído generalmente por una combinación de engranajes, como la que ha de ocuparnos en el párrafo 329; por esta razón omitimos presentar los complicados cálculos que resultarían, indicando que en los pocos casos de uso de este engranaje, se supone nulo el citado resbalamiento, para afectar después el valor del esfuerzo ó trabajo trasmitido, con un coeficiente de corrección que representa la pérdida ocasionada.

c—Tornillo sin fin.

310. Forma del mecanismo —En el caso particular de que los ejes de rotación sean perpendiculares, se emplea este mecanismo compuesto de un tornillo, en general de filete cuadrangular, y una rueda dentada que engrana con él. Para formarnos idea de esta trasmisión, considérese que una rueda *o* (*fig.* 85) de espesor infinitamente pequeño, debe engranar con otra cuyo radio es infinitamente grande, ó lo que es lo mismo, cuya circunferencia primitiva se haya reducido á la recta *X Y*. Los dientes de esta última, llamada cremallera según se ha dicho en el párrafo 55 de la teoría cinemática, tienen su perfil *b m* rectilíneo, y los dientes correspondientes de la rueda que han de engranar con estos, estarán engendrados por un punto de la recta *X Y* al rodar sobre la circunferencia *o;* cual se deduce del trazado de los engranajes ordinarios, por reducirse á esta recta la circunferencia que debe rodar sobre dicho círculo primitivo *o*. Serán, por lo tanto, dichos perfiles, verdaderas evolventes de este último círculo.

311. Supongamos que se sustituye la cremallera *X Y d d'* por un tornillo de filete cuadrado, y que el perfil *b m* sea una generatriz del helicoide de plano director, cuyo eje es la recta *d d'*. Toda rotación que pueda tener este tornillo alrededor de su eje, producirá sobre la rueda el mismo efecto que una traslación de la cremallera; puesto que por efecto de dicha rotación, se irán presentando sucesivamente sobre el plano de la figura diversas generatrices, que como la *b' m'*, estarán cada vez más separadas de la primitiva posición *b m*. Estas generatrices irán conduciendo sucesivamente al diente *a b* de la rueda, y proporcionarán á esta la rotación en sentido de la flecha que está marcada en la figura. El movimiento de rotación del tornillo alrededor de su eje *d d'*, se ha trasformado por este medio en otro movimiento de rotación que tiene la rueda alrededor de su eje correspondiente *o*.

312. Pero las consideraciones hechas son exclusivamen-

te ideales. La rueda *o* se ha supuesto de un espesor infinitamente pequeño, lo que es inadmisible en la práctica. Esta rueda, y por lo tanto sus dientes, deben tener un espesor conveniente, y en dirección de este espesor se ha de verificar el contacto con la superficie helicoidal de conducción del tornillo. Será necesario que el espesor de referencia presente cierta oblicuidad, para que el contacto se verifique en las mejores condiciones. Pero el contacto de estas superficies, la conductora ó del tornillo y la conducida ó de la rueda, debe verificarse siempre en un mismo plano *cb* paralelo al eje del helicoide y perpendicular al plano de la figura; y por ser este el plano tangente al cilindro que sirve de base á dicho helicoide, los puntos de contacto $b, b' \ldots$ de éste, equidistan todos del eje correspondiente. Es consecuencia directa, que los diversos planos tangentes á la superficie helicoidal, trazados por dichos puntos de contacto, tienen todos la misma inclinación sobre el plano de la figura.

Estos planos tangentes deben serlo á la vez á las superfiecies que forman el espesor de los dientes de la rueda; y por lo tanto, si se consideran las diversas posiciones que puedan tener, se podrá deducir que dichas superficies no son otras cosas que las envolventes de las posiciones que á este plano corresponden. Queda encontrada la forma de dicho espesor, que según estas consideraciones, es un helicoide desarrollable, cuya arista de retroceso es una hélice trazada sobre la superficie exterior cilíndrica de la rueda *o*. La forma definitiva de este mecanismo se halla determinada, y para su mejor inteligencia la presentamos en su totalidad en la *figura* 86.

313. Trazado. — Las mismas consideraciones hechas nos indican la marcha que debe seguirse en el trazado, que es un caso particular de los engranajes ordinarios, y para él servirán las mismas relaciones que en estos ligan al paso, lleno, vacío, juego, etc., cuya nomenclatura es común á ambos mecanismos.

Dado el estudio que con relación á la forma hemos hecho en los párrafos anteriores, se comprende que si el paso del

tornillo es pequeño, siempre éste deberá conducir á la rueda; pero si por el contrario, dicho paso es suficientemente grande, podrá la rueda conducir al tornillo sin que se verifique la recíproca: bastará á este efecto proveer al tornillo de un cierto número de filetes paralelos, cuya distancia sea la conveniente para asegurar la conducción. Por último, si el paso tiene un valor medio, el mecanismo obtenido podrá ser recíproco; gozando por tanto de las mismas propiedades inherentes á los engranajes, por cuya razón se le da en este caso el nombre de *engranaje helicoide*.

314. Forma del tornillo tangente.—En los aparatos de precisión se modifica algún tanto la forma del mecanismo que nos ocupa, haciendo que la rueda presente una garganta en su parte central, y tenga, por lo tanto, la concavidad que indica la *figura* 87, para que se adapte perfectamente á las roscas del tornillo, que se encuentran en su presencia. El trazado de este engranaje, al que se da el nombre de *tornillo tangente*, puede hacerse imaginando una serie de planos que como el AB, sean perpendiculares al eje de la rueda. Estos planos cortarán al tornillo, cada uno según una cremallera ideal, cuyo perfil puede construirse exactamente siguiendo los procedimientos indicados en Geometría Descriptiva, y construídos estos perfiles, nada más fácil que el trazado de las correspondientes ruedas que han de engranar con ellos. El conjunto de estas ruedas, superpuestas en la forma debida, determinará la superficie total de la rueda definitiva (*).

(*) En la práctica existe un medio más sencillo de determinar esta superficie y construirla al mismo tiempo; el cual no nos parece oportuno indicarlo en el texto, por formar parte más bien del curso de industria. Después de haber construído el disco de garganta que debe tener la rueda, se le pone en contacto con un tornillo de acero templado, de la misma forma que el que debe constituir el mecanismo, pero cuyos filetes estén dispuestos de modo que formen un útil á propósito para ir mordiendo el disco en el trozo que deba constituir la rueda. Se hace girar á este tornillo, aproximando poco á poco el eje del disco. El tornillo va penetrando en éste, y los filetes se van formando paulatinamente, sin necesidad de un trazado preliminar de ellos.

Cuando la rueda está convenientemente tallada, se reemplaza el tornillo de

APRECIACIÓN ANALÍTICA

315. Relación de velocidades.—Es consecuencia directa de la igualdad, que según los principios de la teoría cinemática, debe existir entre las magnitudes aa' y bb' de la *figura* 85. Si estas magnitudes representan los espacios lineales recorridos en la unidad de tiempo por la rueda y tornillo respectivamente, podrán ponerse en función de las velocidades angulares que llamaremos ω y ω'; de este modo tendremos:

$$aa' = s_q = \omega r; \qquad bb' = s_p \, tg\, \alpha = \omega' r' \, tg\, \alpha.$$

En estas igualdades, representa α el ángulo de inclinación de la hélice directriz del tornillo; s_q y s_p los espacios lineales que en sentido de las circunferencias de la rueda y tornillo respectivamente, corresponden al avance bb' (*).

Igualando los dos valores obtenidos para aa' y bb', se deduce la relación de espacios lineales

$$s_q = s_p \, tg\, \alpha; \qquad \frac{s_q}{s_p} = tg\, \alpha$$

y poniendo en evidencia las velocidades angulares

$$\frac{\omega r}{\omega' r'} = tg\, \alpha; \qquad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r' \, tg\, \alpha}{r}$$

---

acero por el que debe formar parte del mecanismo. Se emplea ordinariamente un tornillo de tres ó cuatro filetes equidistantes, que pueden ser triangulares ó cuadrangulares.

(*) Deben ser bien conocidas las propiedades de la hélice, según las cuales al verificar su desarrollo, se forma un triángulo en que uno de los catetos es bb', otro s_p, y la hipotenusa la hélice desarrollada. Uno de los ángulos agudos de este triángulo rectángulo, es el α de inclinación de las generatrices. No parece oportuno incluir en el texto esta observación, que está al alcance de cuantos hayan estudiado una curva tan interesante para nuestras aplicaciones.

Multiplíquense por 2π los dos términos de la segunda razón, y la igualdad tomará la forma

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{2\pi r' tg\,\alpha}{2\pi r}$$

Pero $2\pi r' tg\,\alpha$ es el valor que corresponde al paso de la hélice directriz del tornillo, y llamándole p' se encuentra la relación entre las velocidades angulares

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{p'}{2\pi r} \qquad (g')$$

316. Relación de esfuerzos.—Supóngase que el contacto se verifica en un solo diente de la rueda. Las reacciones que se desarrollan en el contacto de éste con el correspondiente filete, estarán situadas en el plano tangente al cilindro á lo largo de su generatriz XY. Para la mejor inteligencia, dibujamos en la *figura* 85 *(a)*, la proyección sobre un plano paralelo al tangente. En ella representa cT la tangente á la hélice que, como se sabe, forma con la horizontal (desarrollo de la circunferencia que pasa por c) el ángulo α.

Si los esfuerzos P y Q obran respectivamente según las tangentes á las circunferencias que son secciones rectas del tornillo y rueda respectivamente, y están proyectados por lo tanto en las direcciones cP y cQ de la expresada figura, como el camino elemental cc' recorrido por el punto de contacto c, tiene la dirección de la tangente cT, los trabajos motor y resistente tendrán por expresión:

$$T_m = P \,.\, cc' \,.\, cos\,\alpha; \quad T_u = Q \,.\, cc' \,.\, sen\,\alpha$$

Para encontrar el trabajo correspondiente al rozamiento, observaremos que la presión normal cN que se desarrolla en este contacto, forma el ángulo α con la recta XY, y por lo tan-

to, que su valor en función de P y Q estará representado por

$$N = Q \cos \alpha + P \operatorname{sen} \alpha$$

La fuerza de rozamiento, cuyo valor, según la regla tantas veces mencionada, es Nf, proporcionará el trabajo nocivo

$$T_f = N f \,.\, cc' = (Q \cos \alpha + P \operatorname{sen} \alpha) f \,.\, cc'$$

317. Podemos ya hacer aplicación de la ecuación de trabajos ó de las máquinas en régimen, para seguir la marcha general que en las investigaciones analíticas nos hemos propuesto. Estableciendo dicha ecuación, y suprimiendo el factor común cc' á todos sus términos, resulta como ecuación de este mecanismo:

$$P \cos \alpha = Q \operatorname{sen} \alpha + (Q \cos \alpha + P \operatorname{sen} \alpha) f$$

y haciendo las transformaciones convenientes, se obtiene la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = \frac{\operatorname{sen} \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \operatorname{sen} \alpha} \qquad (h)$$

318. Puede darse á esta ecuación otra forma más apropiada, para deducir las consecuencias necesarias. Sustitúyase con este objeto, en vez de f su valor $tang\ \varphi$ y divídanse los dos miembros por $\cos \alpha$. Resultará la fórmula

$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\varphi}{1 + tg\,\alpha\ tg\,\varphi} = tg\,(\varphi + \alpha) \qquad (h')$$

319. Rendimiento.—Se deduce inmediatamente de las fórmulas (g) y (h'), por multiplicación de la primera con la segunda invertida. Se obtiene así el valor

$$R.^{o} = \frac{Q}{P} \cdot \frac{s_q}{s_p} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\varphi + \alpha)} \qquad (i)$$

320. Consecuencias de las fórmulas halladas.— De la relación de esfuerzos (h'), se deduce qne para que el mecanismo funcione en la forma que hemos supuesto, ó sea para que conduzca ó *mande el tornillo*, es necesaria la condición

$$\varphi + \alpha < 90^0; \qquad \alpha < 90^0 - \varphi$$

sin la cual la relación $\frac{P}{Q}$ sería negativa. Además la potencia quedará favorecida según dicha fórmula, aumentando la suma $\alpha + \varphi$; pero conservándola, como es consiguiente, dentro del límite que hemos marcado.

321. Si *manda la rueda*, será necesario considerar á Q como potencia y á P como resistencia; invertir las ecuaciones obtenidas y cambiar el signo de f, ó lo que es lo mismo, el del ángulo de rozamiento φ; pudiendo deducirse que la condición de posibilidad del mecanismo actuando en esta forma, es $\alpha > \varphi$.

322. Es fácil deducir los *valores de los trabajos* correspondientes á cada uno de los esfuerzos que actúan, ya que conocemos estos y los caminos recorridos por sus respectivos puntos de aplicación, y fácil también poner las fórmulas en función del paso del tornillo, que suele ser dato de la cuestión, sustituyendo en vez de $tg\ \alpha$ su valor $\frac{p'}{2\pi r'}$, en cuya fracción representa p' el paso del tornillo y r' su radio (*)

(*) El tornillo sin fin es muy empleado en la maniobra de las compuertas á que se hace referencia en el estudio de los motores hidráulicos, por la facilidad en poderlo construir de manera que un solo hombre aplicado á una manivela que lleva el tornillo, pueda elevar una compuerta de peso considerable. Dando además á las hélices directrices una inclinación pequeña, se obtiene otro efecto muy notable, y es que si por cualquier circunstancia se deja abandonada la manivela, el peso de la compuerta no puede hacerla descender. En efecto, obrando el peso como potencia en este caso, basta que α sea igual ó menor que φ, para que no se cumpla la condición indicada en el texto, de posibilidad del movimiento. Será necesario mover la manivela en sentido contrario para que des-

CÁLCULO GRÁFICO

323. Planteo del problema.— Supongamos, como siempre, que trata de vencerse una resistencia $a\,Q = Q$ (*fig.* 88) que obra tangencialmente á la rueda, actuando la potencia P en una manivela montada en el eje del tornillo. Para mayor claridad de la figura, representamos solamente los contornos que pueden llamarse primitivos de uno y otro órgano de este mecanismo, siendo el del tornillo un cilindro circular recto, cuyo radio sea el radio medio de las superficies helicoidales que forman los filetes, por suponerse obrando las reacciones en la hélice media del tornillo.

La reacción que se desarrolla entre ambos órganos en dirección tangencial á la rueda, servirá como fuerza intermedia entre esta y el tornillo, de tal modo que será verdadera potencia para vencer la resistencia Q, y pasará después á actuar como resistencia en el tornillo.

Para la mejor inteligencia de la construcción, subdiviremos el problema en otros parciales, cuya resolución nos es conocida, indicándolos en la forma siguiente:

324. *Primer problema parcial.* Se refiere á la rueda A. Es dada la resistencia Q obrando en el punto a y se conoce también la dirección de la potencia X_1 que obra en el punto b tangencialmente á la circunferencia A.

El problema se ha resuelto al tratar de las guías de movimiento circular. Las reglas marcadas en el párrafo 183 nos dispensan de nuevos razonamientos. El triángulo $o - 1 - 2$, en el cual $o - 2$ es tangente al círculo de rozamiento del mu-

---

cienda la compuerta, y en este caso deberá emplearse una potencia cuyo valor se deduzca de la ecuación (h'), cambiando solamente el signo φ. La expresión tomará la forma $P' = Q\,tg\,(\alpha - \varphi)$.

Se emplea también el tornillo sin fin, en los mecanismos de aletas que se usan en relojería. En estos, suele la rueda conducir al tornillo. La inclinación que ordinariamente se da á las hélices de este, es en tal caso de 45 grados.

ñón y 1 — 2 paralelo á la tangente en b, representa el polígono real que corresponde á este primer problema. La fuerza $1-2=X_1$ es la potencia que se buscaba, y se ha obtenido al propio tiempo la reacción R_1 desarrollada en los muñones del eje de la rueda.

325. *Segundo problema parcial.* Es dato de fuerza X_1 que obra como resistencia en este problema. Es incógnita la fuerza tangencial al tornillo que debe vencer dicha resistencia.

Ejerciéndose la acción de los filetes sobre la rueda en las superficies helicoidales que pueden considerarse como una sucesión de planos inclinados que formen ángulo constante con la sección recta del tornillo, las consideraciones hechas en dicho caso serán extensivas al problema en estudio. Si α representa la inclinación de la hélice ó de dichos planos, la reacción normal tendrá una dirección perpendicular á la cT que forme con la sección recta cT' dicho ángulo.

Pero las consecuencias del párrafo 104, nos indican que la resultante total ha de formar con la normal el ángulo de rozamiento φ, y la marcha prescrita en los 168 y 169 al tratar del plano inclinado, nos permite construir el triángulo $0-2'-3$ en el que $0-2'$ es igual y paralela á $1-2$; $0-3$ forma con la normal ON el ángulo φ, y por último, $2'-3$ es paralela á la tangente dX_2 al tornillo, en cuya dirección consideramos tiene lugar la potencia de este problema parcial. Este valor $2'-3=X_2$ es el que se buscaba en el segundo problema, para el que se obtiene al mismo tiempo la reacción $R_2=0-3$ que se ejerce en los filetes del tornillo.

326. *Tercer problema parcial.* La fuerza X_2 que acabamos de encontrar, sirve de punto de partida. Se trata de hallar la potencia definitiva que ha de ejercerse en la manivela M para que pueda vencer dicha resistencia X_2.

Ya que manivela y tornillo están invariablemente unidos, el problema es también análogo al primero parcial que hemos resuelto. La tangente $o'R_3$, trazada al círculo de rozamiento de los muñones del tornillo, nos proporciona la dirección de

la reacción desarrollada en ellos. Su sentido es tal, según llevamos dicho, que desfavorece á la potencia P ó disminuye su brazo de palanca. El triángulo $o' - 4 - 5$ en que $o'-4 = X_2$ y $4-5$ es paralela á P, resuelve definitivamente nuestro problema, proporcionándonos en $4 - 5$ el valor de la potencia, incógnita principal cuya magnitud buscábamos (*).

327. Resumen de los tres problemas parciales.— La *relación de esfuerzos* está representada por la fracción

$$\frac{P}{Q} = \frac{4-5}{o-1}$$

y los problemas resueltos nos sirven de punto de partida para el cálculo del polígono teórico, que omitimos en la figura, y cuya construcción es fácil si se tiene en cuenta que basta sustituir cada una de las reacciones R_1 y R_3 por las que resultan de unir los puntos o y o' con los centos de la rueda y tornillo respectivamente. En cuanto á la reacción R_2, se sustituirá su dirección por la que corresponde á la normal ON.

328. Las magnitudes que se obtengan por medio del polígono teórico, combinadas con las encontradas en nuestra figura, nos dan inmediatamente los valores de la *relación de espacios* y del *rendimiento*, haciendo uso de las reglas enunciadas en los párrafos 97 y 95 de la teoría dinámica (**)

(*) Para mayor sencillez de la figura, hemos hecho abstracción del rozamiento que se ejerce en las superficies planas $r\,s$ del tornillo y su cojinete, que entran en contacto por efecto de la presión $o - 2' = X_1$. Este rozamiento es de igual naturaleza que el desarrollado en el círculo inferior de contacto de los árboles verticales, y se hubiera tomado en consideración, encontrando de igual modo que en dicho problema, el valor del par de rozamiento, cuyo efecto se acumula sobre el de X_2 para constituir una resistencia única correspondiente al tercer problema parcial.

(**) En adelante omitiremos también el cálculo del polígono teórico por la gran sencillez que presenta, después de construido el de las fuerzas reales. Sin embargo, el alumno debe siempre completar la figura para adquirir el hábito de la apreciación gráfica, que tan sencilla es en todos los casos.

d.—Combinaciones de engranajes.

329. Medios diversos de verificarlas.—La trasmisión comprendida en el caso que estamos estudiando de ejes no situados en un mismo plano, puede realizarse de muchas maneras, recurriendo al empleo de engranajes convenientemente combinados.

Trácese una recta que corte á los dos ejes, que sin necesidad de representarlos por una figura, vamos á llamar O_1 y O_2, y sea X la recta trazada, que consideramos como un eje auxiliar de rotación. Móntese un engranaje cónico que ligue entre sí los ejes O_1 y X. Móntese también otro mecanismo de igual naturaleza para ligar los X y O_2. Se habrá realizado de este modo la trasmisión que se pedía, cuyo cálculo resultará idéntico al de los trenes de engranajes.

La recta auxiliar que hemos empleado como eje intermedio de rotación, puede trazarse desde un punto de uno de los ejes paralelamente al otro. Se consigue de este modo igual efecto, pero los engranajes que se emplean son el uno cónico y cilíndrico el otro.

CAPÍTULO III

Tercera especie.—Movimientos combinados

830. Clases de mecanismos comprendidos en esta especie.—Para la mejor marcha en el estudio de esta especie, conviene subdividirla en dos clases principales, del modo siguiente:

Clase *A*.—La dirección del movimiento rectilíneo es paralela al plano de la rotación.

Clase *B*.—La dirección del movimiento rectilíneo es perpendicular al plano de la rotación.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Movimiento rectilíneo paralelo al plano de la rotación

831. Diversos tipos correspondientes á esta clase.—Los mecanismos que hemos de explicar como comprendidos en esta clase, son los siguientes:

a—Rodillos.
b—Cremalleras.
c—Cremalleras dobles.
d—Levas.

a—Rodillos.

332. Naturaleza y cálculo del mecanismo.—Es de los más sencillos que pueden considerarse, y está constituído por un cilindro circular recto que tiene movimiento de rotación y una barra ó tablero de contorno rectilíneo en contacto con él, animada de un movimiento de traslación. Generalmente la barra ó el tablero se apoya sobre dos cilindros ó *rodillos* propiamente dichos, sin otra ligazón que el contacto entre ambas especies de órganos. Al comunicar á la primera un movimiento rectilíneo debido á la acción de un esfuerzo cualquiera, se produce la rotación de los rodillos por efecto de dicho contacto; obteniéndose para la barra un *movimiento de rodar*, que viene á sustituir al resbalamiento que se hubiera verificado al apoyarse directamente sobre una superficie cualquiera desprovista de movimiento de rotación.

Se consigue de este modo el efecto de trasformar el rozamiento de resbalar, que como se sabe es de alguna consideración, en rozamiento de rodar, de valor insignificante y que produce, por lo tanto, pequeña pérdida de trabajo. Por esta razón es muy empleado este mecanismo en las guías de movimiento, las que se proveen de pequeños rodillos ó ruedas, colocadas en las superficies que han de estar en contacto.

333. Aplicación directa, puede decirse, del mecanismo elemental estudiado en los párrafos 53 y 54 de la teoría cinemática, ninguna dificultad ofrece el estudio del movimiento, si se tienen en cuenta además las reglas para el cálculo del rozamiento de rodar, que hemos explicado en los párrafos 111, 112 y 113 de la teoría dinámica.

334. Aplicaciones que pueden presentarse.—Además de las aplicaciones sencillas, en que los rodillos tienen sus ejes fijos á las superficies cuyo resbalamiento han de evitar, se presentan otras de gran interés que deben mencionarse, por ser derivadas del mecanismo que nos ocupa. Tales son el trasporte de materiales por medio de rodillos, y el que se ve-

rifica empleando los carruajes, de cuyas aplicaciones nos vamos á ocupar.

TRASPORTE POR MEDIO DE RODILLOS

335. Fórmula que resuelve el problema.—Cuando un cuerpo pesado M (*fig.* 89) debe ser trasportado rodando sobre *rodillos ó polines,* se desarrollan resistencias á la rodadura tanto en el punto a de contacto con el terreno, como en el b, común al cuerpo y al rodillo N.

El problema práctico que se presenta de *determinar la potencia necesaria para vencer ambas resistencias,* puede resolverse como en todos los casos, con el auxilio de la ecuación de trabajos. Para su establecimiento se tendrá presente que si llamamos F_1 á la resistencia desarrollada en el punto a, y s á su camino recorrido, el trabajo de esta resistencia estará representado por $F_1 s$. Del mismo modo, la resistencia F_2 desarrollada en el punto b, será causa de un trbabajo $F_2 s$, puesto que los caminos recorridos por los puntos de aplicación de ambas resistencias son iguales, ya que para ambos se deduce el mismo valor de la fórmula (12) encontrada en el párrafo 53 de la teoría cinemática, que sirve de base á este problema.

336. Pero al moverse el cuerpo M de modo que esté constantemente apoyado sobre el rodillo, el movimiento absoluto de que estará animado dicho cuerpo será dependiente á la vez del relativo que corresponde á su marcha sobre el rodillo y del que tiene este sobre el terreno, ó sea el de arrastre, según la nomenclatura sentada en Mecánica racional.

La teoría de movimientos relativos proporciona para la velocidad absoluta de M un valor igual á la resultante de las velocidades relativa (la del punto b) y de arrastre (la del punto a). Resulta igual propiedad para los espacios recorridos en el mismo tiempo, y por lo tanto el que corresponde á los movimientos componentes. Encontramos, por fin, el trabajo correspondiente á la potencia P, que debe aplicarse al

cuerpo M para producir su movimiento, cuyo valor está representado por $P.2s$.

La ecuación de trabajos ó de las máquinas en régimen toma la forma

$$P.2s = F_1 s + F_2 s$$

y de ella se deduce

$$P = \frac{F_1 + F_2}{2} \qquad (a)$$

es decir, que la *potencia necesaria para producir el movimiento, es igual á la semisuma de los rozamientos desarrollados en cada uno de los contactos.*

337. Estos rozamientos son conocidos, y de ellos nos ha proporcionado una fórmula general la teoría dinámica, en el párrafo 112. Dicha fórmula (15) depende del coeficiente de rozamiento de segunda especie, el que tomará distintos valores según se refiera al contacto a ó al b. Si representamos por ε_1 y ε_2 respectivamente estos valores, que pueden encontrarse en la tabla correspondiente, y sustituímos en la fórmula anterior en vez de F_1 y F_2 sus expresiones

$$F_1 = \varepsilon_1 \frac{Q}{r} \quad \text{y} \quad F_2 = \varepsilon_2 \frac{Q}{r}$$

se deducirá

$$P = \frac{Q}{r} \cdot \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \qquad (a')$$

en cuya fórmula representa Q la carga que debe trasportarse, ó sea el peso del cuerpo M, (*) y r el radio del rodillo.

Es de notar que esta fórmula es aplicable á un cuerpo

(*) En general se desprecia el peso de los polines, por ser pequeño con relación á la carga. Pero si quiere tomarse en consideración, basta incluirlo en el valor de Q, con lo cual resulta una aproximación mayor.

que se apoye sobre dos polines, como es necesario para verificar el trasporte; puesto que en este caso, representado en la *figura* 90, el peso Q se descompone en dos, Q' y Q'', obrando en cada uno de los contactos, y la suma de los esfuerzos P' y P'' que corresponde á cada una de las cargas parciales, nos dará la misma expresión (a') encontrada para el esfuerzo total.

338. Cálculo gráfico.—Es expresión de la fórmula (a'), y por lo tanto las operaciones pueden practicarse de idéntico modo al empleado en el párrafo 113. La magnitud $a\,a'$ que debe tomarse en sentido del movimiento, es en este caso igual á la semisuma de los coeficientes de rozamiento ε_1 y ε_2. La recta $o\,a'$ representa la dirección de la resultante, y el triángulo $1-2-3$ nos proporciona en $2-3$ la magnitud del esfuerzo; pudiéndose comprobar á posteriori la identidad de su valor con el que se obtiene por la fórmula, pues basta comparar los triángulos semejantes $o\,a\,a'$ y $1-2-3$.

APLICACIÓN Á LOS CARRUAJES

339. Naturaleza y división del problema.—Si en vez de considerar á los rodillos con entera independencia del cuerpo que debe trasportarse, se los supone ligados á este por medio de un eje alrededor del cual pueden girar, se desarrollará un nuevo rozamiento de idéntica naturaleza al de muñones que hemos estudiado. El problema, análogo al anterior, tendrá por objeto encontrar la potencia necesaria para contrarrestar ambos rozamientos de una y otra especie. Para su más perfecto estudio lo subdividimos en otros varios, del modo siguiente: (*)

(*) Si bien estos problemas deben ampliarse en la clase especial de Artillería, creemos necesario sentar las bases y fórmulas generales, para la práctica en la combinación de los rozamientos de primera y segunda especie, y que aquel estudio sea continuación inmediata de este, no distrayendo la imaginación con las consideraciones que dan lugar al establecimiento de las correspondientes fórmulas.

α.—Carruajes de dos ruedas.

β.—Carruajes de cuatro ruedas.

γ.—Locomotoras.

340. α.—**Carruajes de dos ruedas.**—Por la forma que afectan los carruajes, podremos suponer á las fuerzas actuando en su plano de simetría, paralelamente al cual se verifica de ordinario el movimiento. Sea C la proyección de las ruedas sobre este plano *(fig. 91)*, y Q la carga que soporta el eje, que supondremos aplicada en su centro de figura. Se trata de determinar la potencia P que será necesario aplicar en este punto, para verificar el arrastre del carruaje.

341. Sabido que las resistencias desarrolladas son debidas, tanto al rozamiento de rodar de la rueda sobre el terreno, como al de resbalar que se desarrolla entre el muñón y su muñonera, ó *manga del eje* sobre el *buje*, como se llama en este caso á dichos órganos, podremos hacer aplicación de la ecuación general de las máquinas en régimen, encontrando en ella los diversos trabajos desarrollados.

El trabajo que efectúa la potencia mientras la rueda da una revolución completa, es $T_m = P.\ 2\pi r$, llamando r al radio de la rueda.

La resistencia á la rodadura tiene en este caso por valor, $\varepsilon \frac{Q+q}{r}$ en la cual representa q el peso de la rueda; y por lo tanto, su trabajo durante una revolución será

$$\varepsilon \frac{Q+q}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi\varepsilon (Q+q).$$

La resistencia de resbalamiento desarrollada entre la manga y buje, ó el rozamiento de muñón, sabemos también por la teoría dinámica que tiene por expresión Rf_1 (resultante total por el coeficiente modificado) y como el valor de R en función de P y Q es $R = \sqrt{P^2+Q^2}$ y el camino recorrido es $2\pi\rho$, siendo ρ el radio del muñón, el trabajo correspondiente á esta resistencia será:

$$2\pi\rho f_1 \sqrt{P^2+Q^2}$$

Resulta para trabajo resistente total, la expresión

$$T_r = 2\pi\varepsilon(Q+q) + 2\pi\rho f_1\sqrt{P^2+Q^2}$$

y para ecuación de trabajos

$$Pr = \varepsilon(Q+q) + \rho f_1\sqrt{P^2+Q^2}$$

después de haber suprimido el factor común 2π.

342. Nada más fácil que hacer desaparecer el radical y resolver la ecuación de segundo grado que resulta; pero con objeto de evitar el establecimiento de una fórmula complicada, cuyo uso no presenta ventajas positivas, puede suprimirse en la cantidad subradical el término P^2, ya que siendo pequeño el valor de P con relación á Q, más pequeño será todavía el que corresponde á su cuadrado. La ecuación en este caso toma la forma

$$Pr = \varepsilon(Q+q) + \rho f_1 Q$$

y de ella se deduce inmediatamente

$$P = \frac{Q}{r}(\varepsilon + f_1\rho) + q\frac{\varepsilon}{r} \qquad (b)$$

cuya fórmula nos proporciona el valor buscado, haciéndonos ver al propio tiempo que es conveniente para favorecer la potencia, disminuir en lo posible las cantidades ρ y q, y aumentar r. En otros términos: *queda favorecido el tiro en un carruaje (potencia empleada para moverlo), aumentando el radio de la rueda y disminuyendo su peso y el radio del eje.*

343. Puede todavía simplificarse más la fórmula (b) suprimiendo el término $q\frac{\varepsilon}{r}$, de pequeña influencia con relación á los anteriores, con lo que se obtiene una aproximación

suficiente en la mayoría de los casos. La fórmula así simplificada es

$$P = \frac{Q}{r}(\varepsilon + f_1 \rho) \qquad (b')$$

Obsérvese que es condición indispensable para que las ruedas giren sin resbalar sobre el terreno, que este valor sea menor que el que se obtenga para dicho resbalamiento, ó sea el que tiene la expresión $(Q+q)f$ que le sirve de medida. Por el contrario, si $(Q+q)f < P$, las ruedas resbalarán ó patinarán, como suele decirse, cual sucede al marchar un carruaje sobre hielo, para el que el valor de f es pequeño y menor siempre que la fracción $\frac{P}{Q+q}$.

344. Marcha sobre un plano inclinado.—Si α representa el ángulo de plano con el horizontal, la potencia P deberá vencer, además de las resistencias anteriores, la acción de la gravedad. Las componentes de Q paralela y normal al plano, son respectivamente $Q \operatorname{sen} \alpha$ y $Q \cos \alpha$, y por lo tanto, deberá sustituirse este último valor en vez de Q en la expresión (b'), agregando á ella el correspondiente á $Q \operatorname{sen} \alpha$. Resulta la fórmula

$$P = \frac{Q \cos \alpha}{r}(\varepsilon + f_1 \rho) + Q \operatorname{sen} \alpha \qquad (b'')$$

345. Cálculo gráfico.—Al ser debida la resistencia á ambas clases de rozamiento, bastará recordar las reglas dadas para cada una de ellas, según las cuales puede observarse: 1.°, que si se toma á partir del punto a la magnitud $ab = \varepsilon$, la resultante total de las fuerzas debe pasar por el punto b; 2.°, que si se traza el círculo de rozamiento del eje, dicha resultante debe ser tangente á este círculo. Resulta de estas dos observaciones, que basta trazar desde el punto b una tangente al círculo de rozamiento en tal sentido que desfavorezca la potencia, como sucede con la bR, para obtener en esta recta la dirección de la resultante.

El triángulo o—1—2 resuelve el problema, proporcionándonos en 1—2 el valor de la potencia que se busca (*).

346. 6.—**Carruajes de cuatro ruedas.**—Sea *G (fig. 92)* el centro de gravedad de la carga Q, que puede descomponerse en otras dos, Q_1 y Q_2, aplicadas en los centros de las ruedas posterior y anterior respectivamente. Supongamos, para colocarnos en las condiciones prácticas, que el tiro se verifique de tal modo, que la potencia P forme un ángulo 6 con la horizontal.

El problema se resuelve como en todos los casos de mecanismos compuestos, determinando en primer lugar la potencia X necesaria para vencer la resistencia Q_1 del tren posterior del carruaje, y considerando á esta fuerza X como resistencia del tren anterior, que se acumula sobre las que existan, dependientes de su carga especial Q_2.

La fórmula (b') nos da para valor de X, sin necesidad de repetir los cálculos que á ella conducen, la expresión

$$X \frac{Q_1}{r_1} (\varepsilon + f_1 \rho_1)$$

347. Pero la misma fórmula aplicada al tren anterior, nos proporciona el valor de $P \cos 6$ ó potencia tangencial; debiendo tenerse en cuenta para esta aplicación, que la presión normal no es simplemente Q_2, sino la resultante $Q_2 - P \operatorname{sen} 6$ de las presiones normales que se ejercen sobre este cuerpo del carruaje. Resulta el valor

$$P \cos 6 = \frac{Q_2 - P \operatorname{sen} 6}{r_2} (\varepsilon + f_1 \rho_2) + X$$

(*) Puede establecerse reciprocidad entre esta construcción y la fórmula que da el valor P, con sólo comparar el triángulo o—1—2 con el oac, en el cual el lado ac es igual á la suma $ab + bc$, ó lo que es lo mismo, á $\varepsilon + f_1 \rho$, puesto que no hay error sensible en suponer á la magnitud bc igual al radio de rozamiento del eje, cuyo valor es igual á $f_1 \rho$. La proporción

$$\frac{1-2}{1-o} = \frac{ac}{ao}$$

nos da el valor correspondiente á la fórmula (b').

en el cual deberá sustituirse el que corresponde á X para despejar P de la ecuación resultante, cuyo cálculo omitimos por su gran sencillez.

348. Si las ruedas son iguales, como sucede en los carruajes de Artillería, deberemos hacer la hipótesis $r_1 = r_2$ y $\rho_1 = \rho_2$ para deducir la fórmula correspondiente

$$P = Q \frac{\varepsilon + f_1 \rho_1}{r_1 \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \, (\varepsilon + f_1 \rho_1)} \qquad (b_1)$$

349. Haciendo $\theta = o$, se reproduce la fórmula (b') que es por lo tanto aplicable á toda clase de carruajes, incluso á los vagones de los caminos de hierro, á pesar de que en ellos van unidas las ruedas á los ejes, teniendo por tanto su giro dependiente del de estos.

350. La fórmula (b_1) puede discutirse, siendo el punto principal de la discusión la determinación del ángulo más favorable para el tiro, ó ángulo que proporciona la potencia mínima. Esta determinación se hará por medio de la teoría de máximos y mínimos, bastando observar que, como sólo entra θ en el denominador, debe encontrarse el valor de esta, que convierte en máxima á la expresión

$$r_1 \cos \theta + (\varepsilon + f_1 \rho_1) \operatorname{sen} \theta.$$

351. Cálculo gráfico.—Se sigue en él la misma marcha que acabamos de indicar, repitiendo en cada cuerpo del carruaje la construcción hecha para los de dos ruedas. Se empieza por descomponer la fuerza Q en las Q_1 y Q_2. (En los carruajes de artillería se obtiene suficiente aproximación tomando $Q_1 = 0{,}60\ Q$ y $Q_2 = 0{,}40\ Q$). Partiendo de la fuerza Q_1, constrúyase el triángulo $o - 1 - 2$, que nos da en $1 - 2$ el valor de X. Esta obra como resistencia en o' y compuesta con Q_2 nos da $o' - 3$ como resistencia real del tren anterior. Con esta como base, constrúyase el triángulo $o' - 3 - 4$ que nos da en $3 - 4$ la solución del problema.

352. Debe hacerse la observación, de que si se trasporta la figura $o'—X—3—4$ de modo que $o'—X$ se apoye sobre $2—1$, se obtendrá un triángulo $o—3'—4'$ que resuelve directamente la cuestión, al ser $2—4'$ y $1—3'$ prolongaciones respectivamente de $o—2$ y $o—1$. El problema se puede resolver por lo tanto sin verificar la descomposición de Q, operando como si el carruaje fuera de dos ruedas. Todo en el supuesto de que sean iguales las de ambos trenes.

La determinación del ángulo más favorable, es en el cálculo gráfico sumamente sencilla, bastando trazar desde 3 la perpendicular á $o'—4$ que nos marcará el valor de la potencia mínima, y su ángulo con la horizontal, el ángulo buscado.

353. γ.—**Locomotoras.**—Ya hemos dicho que la fórmula (b') es aplicable á toda clase de carruajes, incluso los remolcados por locomotoras, sean estas de vías férreas ó correspondientes á caminos ordinarios. En estos casos, se presenta además una nueva cuestión, debida á la necesidad de que la locomotora tenga un peso determinado para que pueda arrastrar el tren, sin que sus ruedas resbalen ó patinen. A este peso, correspondiente al de la locomotora mas el de sus ruedas, se le llama *peso adherente*, y de su determinación nos vamos á ocupar.

354. Si llamamos Q_a el valor de dicho peso adherente, la fuerza que desarrollará la locomotora para remolcar el tren estará representada por $f\,Q_a$. Pero para que haya arrastre, es necesario que dicha fuerza sea precisamente igual en intensidad á la suma de todas las resistencias del tren remolcado. Estas resistencias se componen en primer lugar, de la que presentan los diversos vagones, y llamando Q_v al peso total de ellos, la fórmula (b') nos proporciona para la resistencia de vagones, el valor

$$\frac{Q_v}{r}\,(\varepsilon + f_1\,\rho)$$

En segundo lugar, debe vencerse la resistencia de la loco-

motora, y si se tiene en cuenta que dicha máquina patina, ó lo que es lo mismo, que sus ruedas giran sin avanzar, la resistencia que ahora buscamos será únicamente de resbalamiento, y se deducirá de la misma fórmula, haciendo $\varepsilon = o$. Por lo tanto, si representamos por ρ' y r' los radios correspondientes á los ejes y ruedas de la locomotora, la expresión

$$Q_a f_1 \frac{\rho'}{r'}$$

nos representará la resistencia de la máquina.

Igualemos la potencia $f Q_a$ á la suma de las resistencias encontradas, y se obtendrá la ecuación

$$f Q_a = Q_a f_1 \frac{\rho'}{r'} + Q_v \frac{\varepsilon + f_1 \rho}{r}$$

de la cual se deduce directamente

$$Q_a = \frac{Q_v r' (\varepsilon + f_1 \rho}{r (f r' - f_1 \rho')}$$

355. Este es el valor del *peso adherente*, ó sea el necesario para que empiece el movimiento del tren. Pero durante el movimiento deberá tenerse en cuenta la resistencia de la locomotora á la rodadura, cuyo valor es $\varepsilon \frac{Q_a}{r'}$ y entonces el esfuerzo necesario para verificar el arrastre, tendrá por expresión

$$P = \varepsilon \frac{Q_a}{r'} + f Q_a = Q_a (f + \frac{\varepsilon}{r'})$$

y sustituyendo por Q_a el valor anteriormente encontrado, se tendrá la fórmula definitiva (*).

$$P = Q_v \frac{(\varepsilon + f_1 \rho)(\varepsilon + f r')}{r (f r' - f_1 \rho')} \qquad (b_2)$$

(*) Obsérvese que cuando la velocidad del tren sea considerable, deberá incluirse en las resistencias el término relativo á la resistencia del aire, cuyo valor hemos dado en la teoría dinámica.

356. Coeficiente de adherencia.—Téngase en cuenta para las aplicaciones de esta fórmula, que los valores de f, á cuyo coeficiente se suele dar en este caso especial el nombre de *coeficiente de adherencia*, los hemos marcado en la *tabla número* 8, con objeto de que sirva exclusivamente para estos problemas, sean relativos á las locomotoras de las vías férreas ó á las que marchan por caminos ordinarios, como la locomóvil de parque reglamentaria en artillería.

b.—Cremalleras.

357. Naturaleza de este mecanismo.—Según las ideas vertidas en la teoría cinemática, este mecanismo puede considerarse derivado de un engranaje cilíndrico, en el cual haya aumentado indefinidamente uno de los radios, hasta reducirse á una recta la circunferencia primitiva correspondiente.

Se compone, según es sabido, de una barra dentada llamada *cremallera*, que está guiada en su movimiento rectilíneo, y de una rueda dentada, á la que se da el nombre de *piñón*, guiada también en su movimiento circular.

Dependiendo el trazado del que se refiere á los engranajes cilíndricos, los casos en estudio deben ser derivados de aquellos, debiendo por lo tanto considerarse los que á continuación se expresan:

α.—Cremallera derivada del engranaje epicicloidal.

6.—Cremallera derivada del engranaje de evolventes.

γ.=Cremallera derivada del engranaje de husillos.

358. α.—Cremallera derivada del engranaje epicicloidal.—Sean (*fig.* 93, *lám.* 12), XY la recta primitiva de la cremallera y o la circunferencia primitiva del piñón. Supónganse ya marcados sobre estas líneas los puntos de división que corresponden á los distintos dientes, cuya operación se practica del modo explicado en el párrafo 224 para los engranajes cilíndricos.

Supuesto que el trazado ha de obedecer á las reglas marcadas en el párrafo 225 para dichos engranajes, el punto de

la circunferencia auxiliar que debe engendrar las caras de la cremallera y los flancos del piñón, describirá al rodar sobre la recta XY un arco de cicloide, y al rodar interiormente sobre la circunferencia o, una hipocicloide. Esta será rectilínea en el caso particular que vamos á considerar, de ser la circunferencia auxiliar o', de un radio igual á la mitad de ao. Ninguna dificultad presenta el trazado de dichas líneas, marcadas en la figura con las letras ab y ab', que deben reproducirse para los diversos dientes, y simétricamente en cada uno de ellos.

Pero si el engranaje que nos ocupa debe ser recíproco, será preciso armar también de salientes al piñón, construyendo á la vez los entrantes de la cremallera. La circunferencia auxiliar se reduce en este caso á la misma recta $X\,Y$. Las caras de los dientes del piñón son evolventes del círculo primitivo o, y los flancos de la cremallera se reducen á líneas rectas de posición perpendicular á XY. Trazada la primera evolvente ac, puede reproducirse para los diversos dientes, y simétricamente en cada uno.

359. Se limitan los dientes con arreglo á las bases sentadas en el párrafo 229, según las cuales el segundo perfil $a'm$ nos proporciona por su intersección m con la circunferencia auxiliar o', el saliente de los dientes de la cremallera, y el perfil $c'm'$, segundo también del piñón, nos da en su intersección m' con la recta $X\,Y$ (considerada como límite de la circunferencia auxiliar), el punto que debe servir de límite al saliente de los dientes del piñón. Determinados los salientes, basta recordar el pequeño juego que debe dejarse, para fijar la magnitud de los entrantes correspondientes á cada uno, con cuya idea se puede completar el trazado del mecanismo.

360. Es de notar en este engranaje, que la parte útil de los flancos de la cremallera se reduce á un punto solamente. Obsérvese á este efecto, que la normal á la evolvente que forma la cara del piñón, debe ser en todas las posiciones tangente á la evoluta, ó sea á la circunferencia primitiva de éste. Recuérdese también la regla del párrafo 29 de la teoría cinemática, según la cual, dicha normal debe pasar siempre por el

punto *a* de contacto de las circunferencias primitivas. Se deduce de ambas consideraciones, que la expresada normal tiene por dirección constante la línea *XY*, y que por lo tanto el contacto se verifica siempre sobre esta línea. Resulta finalmente, que el diente de la cremallera se desgasta con rapidez por estos puntos de acción única, lo que constituye un verdadero inconveniente para el mecanismo construído por este procedimiento; inconveniente que puede evitarse, sustituyendo la cara del piñón y el flanco de la cremallera, por arcos de círculo que tengan el mismo radio.

361. La *apreciación de este mecanismo* puede hacerse teniendo en cuenta, para la relación de velocidades la fórmula (12) de la teoría cinemática encontrada en el párrafo 53, y para la relación de esfuerzos y rendimiento, las mismas consecuencias deducidas en el estudio de los engranajes; en cuyas fórmulas bastará suponer que uno de los radios tiene un valor infinito. Será de observar que este valor no tiene influencia en el radio de rozamiento del engranaje, como puede verse por la inspección de la fórmula (α) del párrafo 259, que nos da el valor de dicho radio.

362. 6.—**Cremallera derivada del engranaje de evolventes.**—Si *mn* (*fig.* 94) es la recta que forma 75º con la línea de centros *oa*, el punto *a* de esta línea proporcionará para el piñón una evolvente del círculo auxiliar, cuyo trazado y reproducción en los diversos dientes es idéntico al de los engranajes. Pero reduciéndose la segunda circunferencia auxiliar á la misma recta *mn*, la otra evolvente que corresponde á la cremallera se reduce á la recta *bac* perpendicular á *mn*. Reproducida también dicha recta en la forma ya indicada, y limitados los dientes de cremallera y piñón con arreglo á las ideas expresadas en el párrafo 234 para el engranaje de evolventes, resultan los de la cremallera de una forma trapezoidal, como se indica en la figura; no marcando en ella las construcciones necesarias, para no complicarla. En este mecanismo se puede variar la distancia de la rueda á la cremallera, sin que se altere en nada la regularidad de la trasmisión.

363. γ.—Cremallera derivada del engranaje de husillos.—Este sistema de engranajes proporciona dos soluciones para las cremalleras, puesto que puede armarse con husillos, bien sea el piñón ó bien la barra. Pero en uno y otro caso, queda constituído un mecanismo del que no se hace ningún uso en la práctica, y cuyos elementos no presentan particularidad alguna que merezca ser mencionada.

c.—Cremalleras dobles.

364. Descripción del mecanismo.—Cuando el movimiento rectilíneo debe cumplir con la condición de ser alternativo, ó lo que es lo mismo, que se verifique en uno y otro sentido, puede emplearse este mecanismo representado en la *figura* 95. Está compuesto de un bastidor guiado en su movimiento rectilíneo y cuyos lados mayores son verdaderas cremalleras dentadas interiormente. Con ellas engrana una rueda *c* parcialmente dentada, la que en su rotación imprimirá al sistema el movimiento que se desea.

Si los dientes de la rueda ocupan una semicircunferencia, en el momento de cesar en su contacto con la cremallera A', empezarán á engranar con A, verificándolo después con A', y así sucesivamente, sin que exista intermitencia alguna.

Pero si el movimiento se debe verificar con intermitencias, será indispensable que solo un pequeño arco esté dentado, siendo su magnitud igual á la amplitud de aquél. La diferencia entre una semicircunferencia y este arco, corresponderá á la intermitencia ó interrupción en el movimiento rectilíneo, y su duración puede calcularse en función de la velocidad de la rueda y la longitud del arco correspondiente.

En todos los casos, dos guías de movimiento rectilíneo aseguran el del bastidor, conduciendo á las barras $B\,d$ y $B'd'$ que forman cuerpo con él, y deben estar colocadas á una distancia de los puntos d y d', que sea por lo menos igual á la amplitud del movimiento.

d.—Levas.

365. Naturaleza del mecanismo y división.—Como todos los mecanismos correspondientes á esta clase, puede éste considerarse como un caso particular del que hemos estudiado en el párrafo 287, siempre que se suponga que el radio del martillo aumenta indefinidamente. Se engendran de este modo las llamadas *levas de pilones*, que proporcionan solamente el ascenso del martillo, verificándose el descenso de éste por su propio peso. Pero además de este tipo de levas deben estudiarse otras bastante usadas en las instalaciones mecánicas, que no solamente conducen en un sentido á la barra que tiene movimiento rectilíneo, sino que lo proporcionan y aseguran su marcha, tanto en el viaje de ida como en el de vuelta.

Extensivas también nuestras explicaciones al caso en que existan intermitencias en el movimienio rectilíneo, pasaremos á estudiar los siguientes tipos de levas.

α.—Levas de pilones.

β.—Levas de movimiento uniforme.

γ.—Levas de movimiento variado.

δ.—Levas de movimiento alternativo intermitente.

ε.—Levas de marcha variable.

366. α.—Levas de pilones.—Está compuesto este mecanismo (*figura* 96) de una barra $A\,A$ guiada en su movimiento rectilíneo, la cual termina en un núcleo pesado M, que sirve para producir percusiones repetidas sobre determinados objetos. Un diente B, formando cuerpo con la barra, recibe su movimiento de ascenso por medio de las levas D, montadas sobre una rueda C, que tiene un movimiento de rotación contínuo.

Construído el perfil de la leva del mismo modo que los correspondientes á una cremallera derivada del engranaje epicicloidal, puede verificarse la limitación por un procedimiento idéntico al indicado en el párrafo 290 para las levas

de martillos frontales. Extensivas también á este caso las consideraciones de los párrafos 291, 292 y 293, acerca de la distancia que debe existir entre cada dos levas, omitimos hacerlas de nuevo por considerar innecesaria esta repetición, indicando, por último, que la apreciación del mecanismo obedece á iguales principios que aquella; debiendo tenerse en cuenta que la resistencia vencida por cada leva, no es otra cosa que el mismo peso del pilón que trata de elevarse.

367. Con la disposición indicada, presenta este mecanismo el inconveniente del gran rozamiento que se ejerce en el punto de contacto, el cual tenderá á desgastar los dientes. Este inconveniente puede evitarse, colocando convenientemente en el diente *B* un rodillo giratorio que recibe la acción de las levas, y de este modo se habrá convertido el rozamiento de primera especie en rozamiento de segunda ó de rodar, cuya intensidad sabemos que es mucho menor, y produce, como es consiguiente, un menor gasto de energía.

Con esta disposición, y el cuidado de aproximar lo más posible al eje del pilón el punto de apoyo de la leva, se consigue mejorar notablemente las condiciones del mecanismo; pues dada la verticalidad del vástago, el rozamiento en las guías de movimiento rectilíneo será nulo si la potencia se ejerce en dirección de su eje.

368. Batería de pilones.—Dado el uso que se hace del mecanismo que acaba de ocuparnos, es más general el empleo de varios pilones, alineados según la longitud del árbol de rotación, y al conjunto de ellos se da el nombre de *bocarte* ó *batería de pilones*. Las levas que producen el ascenso, no deben estar situadas según una misma generatriz del árbol, porque de este modo se elevarían á un mismo tiempo todos los pilones; necesitándose en este momento un consumo grande de energía, y durante la caída, la velocidad del árbol se habría de acelerar rápidamente, al no tener resistencia alguna que vencer en su movimiento.

Es indispensable, según esto, procurar que el árbol tenga siempre en suspensión dos ó tres pilones á lo menos, lo cual

se consigue disponiendo las levas de modo que sus arranques ó uniones con el árbol estén según la dirección de una hélice trazada sobre éste; pero teniendo cuidado de que sus proyecciones sobre un plano perpendicular al árbol estén equidistantes, para la mayor uniformidad en el movimiento.

369. *6*—**Levas de movimiento uniforme.**—Este mecanismo, llamado también *leva ó excéntrica de corazón*, tiene por objeto trasformar la rotación continua y uniforme de un árbol *o* (*fig.* 97) en un movimiento rectilíneo, uniforme y alternativo de una barra guiada en la dirección *XY*. Con este objeto se monta sobre el árbol, y formando cuerpo con él, una leva formada por dos espirales de Arquímedes simétricas, que se apoya constantemente en dos rodillos *m* y *n* montados sobre la barra.

Para que la comunicación del movimiento sea posible, es necesario que la leva cumpla con la condición de igualdad en todos sus diámetros, puesto que de no ser así, no habría contacto simultáneo con ambos rodillos. Esta condición está satisfecha, dadas las propiedades de las espirales que forman el contorno de la leva; pues si se consideran dos diámetros aa' y bb', y se traza el radio vector oc que forme un ángulo $coa = aob$, se verificará la condición

$$oa - oc = ob - oa$$

ó su equivalente

$$2oa = ob + oc.$$

Pero dada la simetría de las espirales, las magnitudes oc y ob' deben ser iguales, verificándose lo mismo con las oa y oa'. El primer miembro de esta última igualdad se reduce á aa', y el segundo á $ob + ob'$, ó bien á su equivalente bb'. Dicha igualdad toma la forma

$$aa' = bb'$$

que nos expresa ya la igualdad entre todos los diámetros de la leva.

Es necesario, además, que exista uniformidad en el movimiento, según las condiciones que hemos prescrito á este mecanismo. También contribuye á ello la misma propiedad fundamental de la espiral de Arquímedes, que nos ha servido de base anteriormente. Si al girar ángulos iguales es constante la diferencia de radios vectores, también será constante el avance lineal de la barra, que no es otra cosa que dicha diferencia. Resulta, pues, que *si el movimiento de rotación de la leva es uniforme, también lo será el rectilíneo que tiene la barra.*

Con respecto á la amplitud total del movimiento rectilíneo, puede observarse que tiene por valor la diferencia

$$c = od' - od$$

entre los radios mayor y menor que son comunes á ambas espirales.

370. El trazado de la leva es fácil, en vista de la propiedad susodicha relativa á las curvas que forman el contorno. En general, serán datos de la cuestión, la distancia de rodillos que llamaremos l, y cuyo valor es $od' + do$, y además la amplitud del movimiento $c = od' - do$. Conocidas l y c que son respectivamente suma y diferencia de las cantidades od' y od, pueden encontrarse estas y trazar con centro o y cada uno de estos radios, dos circunferencias marcadas de puntos en la figura. Estas servirán de base para que dividida la magnitud dd'' en un cierto número de partes iguales (cuatro en nuestra figura), y la semicircunferencia en el mismo número de arcos también iguales, puedan encontrarse los diversos puntos por intersección de los arcos y radios vectores que tengan el mismo número. El trozo inferior de la leva se construye del mismo modo, ó bien teniendo en cuenta la condición de simetría de ambos trozos.

Debe tenerse presente para la buena condición del movimiento rectilíneo, que los rodillos no podrán penetrar hasta el vértice del ángulo entrante d, y por esta causa es preciso

redondear este ángulo, siguiendo la curvatura de dichos rodillos. Consecuencia de esto será también matar el vértice saliente *d'* de tal modo, que los diámetros resulten todos iguales. Pero se debe observar, que con esta construcción se ha modificado algún tanto la ley del movimiento. Esta, que estaba representada por las rectas *dc* y *cb* de la *figura* 97 (*a*), obtenida rectificando en *db* la circunferencia de radio *od*, y trazando en los puntos de división ordenadas iguales á los avances lineales, será modificada también por los pequeños arcos marcados en la figura, para sustituir á los ángulos entrantes y salientes.

371. γ—**Levas de movimiento variado.**—El trazado anterior presenta el inconveniente del cambio brusco de velocidad que se origina cada vez que varía de sentido la barra que tiene movimiento rectilíneo. Por esta razón es preferida en muchos casos la leva propuesta por el general Morin, llamada también *excéntrica Morin*, que produce un movimiento uniformemente variado, de tal modo que la velocidad de la barra conducida es nula al final de su curso.

Para construirla, se traza una recta *mn* (*fig.* 98) igual á la circunferencia *oa* correspondiente al espesor más pequeño de la leva, y sobre esta recta se construye la curva que sea expresión gráfica del movimiento. Tómense sobre las prolongaciones de los radios 01, 02, 03, y á partir de la circunferencia *oa*, magnitudes iguales á las ordenadas del mismo nombre, y se tendrá el perfil de la leva, uniendo por un trazado continuo los diversos puntos obtenidos.

Por este procedimiento general, pueden construirse levas para las cuales el movimiento rectilíneo obedezca á una ley determinada y correspondiente á la trasmisión que trate de establecerse.

372. Para la apreciación del mecanismo, tanto en este caso como en los dos anteriores, debe tenerse en cuenta que la acción de la leva no se verifica según el eje de la barra conducida, lo que origina un rozamiento considerable en sus guías, que puede tomarse en consideración de idéntico modo

al empleado para el estudio del movimiento en las guías ordinarias.

373. δ.—**Levas de movimiento alternativo intermitente.**—Es necesario muchas veces, que al finalizar cada uno de los viajes de la barra conducida, sufra ésta una detención mayor ó menor, según la naturaleza de la trasmisión que se deba montar. Se emplea para este caso la llamada *leva ó excéntrica triangular*, construída trazando desde los tres vértices de un triángulo equilátero *oab (fig.* 99), arcos de círculo con radios iguales á los lados de dicho triángulo. La leva obtenida de este modo gira alrededor de uno de sus vértices *o*, y su contorno se va apoyando sobre los lados mayores *mn* y *pq* de un bastidor guiado en su movimiento rectilíneo en la dirección *XY*.

Cuando la leva gira en sentido de la flecha, el arco *oa* se apoya sobre el lado *pq* del bastidor, impulsándolo en el sentido *XY*, hasta que tome la posición *p'q'* correspondiente á *oa'*. En este momento empieza á deslizar el lado *a'b'* sobre el bastidor, sin proporcionarle movimiento alguno, ya que este lado gira alrededor de su mismo centro de figura *o*. En este caso empezará el apoyo del mismo arco *oa'* sobre el lado superior *m'n'* del bastidor, conduciéndolo hasta la primitiva posición, en la que tendrá una nueva intermitencia, y estos efectos se irán repitiendo sucesivamente mientras dure la rotación de la leva.

Resulta que el arco *oa* es siempre el conductor cuando la rotación es la que hemos supuesto ó positiva; pero si fuera negativa, sería constantemente conductor el arco *ob*. He aquí un gran inconveniente que presentan estas excéntricas, para las cuales el desgaste debido al rozamiento no se verificará por igual en todo su contorno.

374. Ninguna dificultad ofrece la investigación de la ley del movimiento rectilíneo del bastidor, ya que este movimiento no es otra cosa que el movimiento circular de uno de los puntos *a* ó *b*, según el período que se considere, proyectado sobre la dirección *XY*. Esta ley podrá representarse gráfica-

mente, como lo hemos hecho en las anteriores levas, para comparar las condiciones del movimiento con las correspondientes á éstas, y la apreciación del mecanismo se verificará tambien teniendo en cuenta las mismas observaciones.

375. ε.—**Levas de marcha variable.**—Sirven para obtener un movimieeto rectilíneo con varias intermitencias en cada uno de sus viajes. Estas intermitencias pueden conseguirse por medio de arcos de círculo, cuyos centros sean el mismo de rotación de la leva, los cuales obrarán de idéntico modo al expresado para el mecanismo anterior. Las curvas que liguen unos y otros arcos, podrán obtenerse por el trazado preliminar de la ley que ha de regir al movimiento de la barra conducida. Esta conducción se verifica por medio de dos rodillos, de idéntico modo que en la excéntrica de corazón.

Para aclarar las ideas, ya que pudieran presentarse infinidad de mecanismos de este género, según el número y duración de las intermitencias y con arreglo también á la ley del movimiento rectilíneo, explicaremos una leva empleada en las máquinas de vapor, á la que suele darse el nombre de *excéntrica de cuatro arcos de círculo* (*).

Para hacer su trazado, puede empezarse construyendo la curva que sea expresión gráfica de la ley del movimiento, en la cual estarán marcadas por líneas horizontales las intermitencias en número de dos, para cada uno de los viajes de ida y vuelta. Análoga construcción se ha marcado en la figura correspondiente á las levas de movimiento variado, y por esta razón nos evitamos indicarla en este caso. Refiriéndonos á la *figura* 100, trácense dos circunferencias oa y $o1$, cuya diferencia de radios sea igual á la amplitud total, y cuya suma sea la distancia que existe entre los rodillos H y H' que han de apoyarse en el contorno de la leva. Divídase la diferencia $a1$ en

(*) Esta leva sirve para obtener períodos de expansión en las máquinas de vapor, empleando la corredera simple.

tres partes iguales, y con centro *o* y radios *ob* y *oc* trácense circunferencias.

Si la magnitud 1*c* representa la distancia recorrida por los rodillos en el primer movimiento, la curva de la leva correspondiente á él estará comprendida entre los círculos *o* 1 y *oc*. Esta curva 1—2 se trazará por puntos, valiéndose de la ley del movimiento de que hemos hecho mención. La primera intermitencia corresponde al arco de círculo 2—, de longitud marcada también en dicha ley. De igual modo se construye la curva 3—4 y se marca el arco 4—5, teniendo presente, para la inteligencia de nuestra figura, que hemos fijado la amplitud del segundo movimiento en la distancia *ca*, ó sea doble de la que corresponde al primero. El resto de la excéntrica, referente al viaje de vuelta, puede trazarse por puntos, prolongando los radios y tomando en todos ellos magnitudes 3—3′, 4—4′..... iguales á la distancia 1—5 que existe entre los rodillos. Deben tenerse presentes en esta leva, las mismas observaciones que hemos hecho para la de corazón.

ARTÍCULO II

Clase B.—Movimiento rectilíneo perpendicular al plano de la rotación.

376. Mecanismos incluidos en esta clase. — Consideraremos para su estudio, los siguientes tipos de mecanismos, derivados todos del tornillo ordinario, primero que ha de ocuparnos.

a.—Tornillo ordinario.

b.—Tornillo doble.

c.—Tornillo diferencial.

a.—Tornillo ordinario.

377. **Forma del mecanismo.**— Es sabido que todo tornillo se compone de un núcleo cilíndrico que forma el cuerpo principal, y de los filetes cuya forma helicoidal puede ser engendrada, bien por un triángulo ó por un rectángulo que se mueven de tal modo, que pasando constantemente su plano por el eje del tornillo, los vértices van apoyándose todos sobre hélices trazadas en las correspondientes superficies cilíndricas. Es una cuestión suficientemente conocida para el que ha emprendido estos estudios, la referente al trazado y representación de los tornillos, sean sus filetes triangulares ó cuadrangulares.

El mecanismo se complementa con una tuerca ó hembra del tornillo como también suele llamarse, cuyos huecos corresponden á los relieves de aquél y recíprocamente; pero que no ocupa más que una pequeña parte de la longitud del tornillo.

378. Muchas maneras existen de usar este mecanismo. La tuerca puede ser fija, y entonces las rotaciones que se comuniquen á la cabeza del tornillo por medio de una manivela que suele llevar, producirán un movimiento de avance de éste en dirección de su eje, que puede utilizarse para elevación de pesos ú otro objeto industrial cualquiera.

Recíprocamente, si el tornillo está fijo, la tuerca avanzará al mismo tiempo que gira al rededor de su eje geométrico, aplicándose la potencia á ésta, como es consiguiente. Por último, pueden disponerse de modo que estando bien el tornillo ó bien la tuerca con una fijeza relativa que le impida el avance rectilíneo pero no la rotación, se aplique en este mismo la potencia por medio de una manivela, mientras el otro lleve las correspondientes guías de movimiento rectilíneo. En el primer caso, tiene el tornillo sus guías de movimiento circular, análogas á las de un árbol ordinario, y la tuerca va provista de las correspondientes al movimiento rectilíneo, cuya

disposición es también conocida. En el segundo, ó sea cuando la tuerca ha de girar solamente y el tornillo tiene movimiento rectilíneo, está aquella guiada por una caja cilíndrica á manera de rangua; pero con objeto de impedir su avance, debe llevar en su superficie exterior una ranura anular ó chavetero, en el que penetren las correspondientes chavetas, que atraviesa la caja. También el tornillo debe llevar sus guías de movimiento rectilíneo, que están constituídas en este caso por una ranura ó chavetero longitudinal que parte las roscas, y en la cual penetra un dado ó chaveta que atraviesa la caja de éste (*). La disposición de estas últimas guías puede ser recíproca de la indicada, y en este caso llevará el tornillo el dado, y su caja tendrá la correspondiente ranura.

379. Mas cualquiera que sea la disposición relativa, es de observar que en general se emplean los filetes cuadrados para los tornillos de hierro de grandes dimensiones, y los triangulares para los de madera en las mismas condiciones. Pero téngase en cuenta que las formas á que aludimos son modificadas muchas veces en las práctica, debiendo ser trapezoidal la que deben afectar los filetes, para que se encuentren en mejores condiciones de resistencia. Los tornillos de filete triangular suelen también modificarse de tal modo, que en su corte, según el eje, queden suprimidos los vértices entrantes y salientes y sustituídos por pequeñas curvas que les proporcionan excelentes condiciones de resistencia. En el cálculo que vamos á presentar se considerará el de filete cuadrado, ya que esta forma sirve ordinariamente de base para que, modificada ó no, pueda el tornillo formar parte de los diversos mecanismos que de él se derivan.

380. Apreciación analítica.—Sea *a b* (*fig.* 101) el eje del tornillo que suponemos vertical, y destinado á la elevación de un peso representado por la fuerza *Q*, ejerciéndose

(*) Se emplea el mecanismo que nos ocupa en la forma que acabamos de expresar, para los tornillos de puntería de los cañones, los cuales son bien conocidos de cuantos cursan estos estudios.

una potencia horizontal en cada uno de los dos extremos de la barra cd que atraviesa la cabeza del tornillo perpendicularmente al eje de éste. Cada una de las fuerzas iguales, aplicadas en c y d, las representaremos por P; y su efecto, si la tuerca MN está fija, será elevar ó bajar el tornillo y con él el peso Q, según el sentido de la rotación obtenida por dicho par de fuerzas. Siempre podrá suponerse á la resistencia Q distribuída uniformemente en un cierto filete helicoidal del tornillo, al que llamaremos *filete medio*, y de esta manera, dicho filete se moverá sobre su correspondiente de la tuerca, del mismo modo que un cuerpo al ascender ó descender sobre un plano inclinado que forme con el horizontal un ángulo igual al de los planos tangentes á este filete.

Si llamamos α el ángulo de inclinación constante del filete medio con un plano horizontal, y P_1 la fuerza horizontal tangente al cilindro que contiene á dicho filete, que sea capaz de vencer la resistencia Q y los rozamientos que se desarrollan en él, podrá aplicarse la fórmula obtenida en el párrafo 165 para el plano inclinado, en la cual deberá hacerse la hipótesis de $\theta = -\alpha$, resultando

$$P_1 = Q\frac{sen\,(\alpha+\varphi)}{cos\,(-\alpha-\varphi)} = Q\,tg\,(\alpha+\varphi).$$

Pero si llamamos $2r$ al brazo de palanca $c'd'$ del par P, y r' al radio de la hélice media cuyo valor puede suponerse igual á la semisuma de los radios del núcleo y cilindro exterior, podrá ya encontrarse el valor de la potencia definitiva P, que debe aplicarse en cada uno de los brazos c y d, puesto que el par P y la fuerza P_1 están aplicadas á un mismo sistema material en rotación, y debe el par ser extrictamente indispensable para vencer la resistencia P_1, ó lo que es lo mismo, el par y dicha fuerza deben equilibrarse. El valor de P será por consiguiente

$$P = \frac{r'}{2r}P_1 = \frac{r'}{2r}Q\,tg\,(\alpha+\varphi) \qquad (c)\,,$$

obteniéndose con esta fórmula *relación de esfuerzos*, y pudiendo deducirse directamente que para la posibilidad del movimiento ascendente, es necesaria la condición de $\alpha + \varphi < 90°$, ó lo que es igual, $\alpha < 90° - \varphi$.

381. Será conveniente poner la fórmula (*c*) en función del paso y radio medio del tornillo, y para este efecto, basta recordar la expresión trigonométrica que da la tangente de la suma de dos ángulos en función de las tangentes de éstos, y la $tg\ \alpha = \frac{h}{2\pi r'}$ que nos proporciona la tangente del ángulo de inclinación de la hélice, resultando

$$P = \frac{r'}{2r} Q \frac{tg\ \varphi + tg\ \alpha}{1 - tg\ \varphi\ tg\ \alpha} = Q \frac{r'}{2r} \frac{h + 2\pi f r'}{2\pi r' - f h} \qquad (c')$$

y bajo esta forma se usa en muchos casos, para el cálculo de esfuerzos de este mecanismo.

382. Se deduce *la relación de espacios recorridos*, según las reglas empleadas para la apreciación de todos los mecanismos, bastando, por lo tanto, igualar á cero el valor de α ó el de f, según la fórmula que deba emplearse, y tomar la relación inversa de la que corresponde á los esfuerzos teóricos que resultan. Haciendo esta hipótesis en la fórmula (*c*) se deduce

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{2r}{r'\ tg\ \alpha} \qquad (d)$$

é introduciendo la misma condición en la (*c*) se obtiene (*)

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{4\pi r}{h} \qquad (d')$$

(*) Pudiera chocar que la relación de espacios recorridos sea igual al doble de la circunferencia descrita por el punto de aplicación de la potencia, dividida por el paso; siendo así que es condición inherente á la generación del tornillo, el que por cada vuelta de este, haya un avance igual al paso. Tal circunstancia es debida á que hemos considerado que la potencia sea un par, y de este

383. Obtiénese, por fin, *el rendimiento* según las mismas reglas mencionadas, por multiplicación de las fórmulas anteriores invertidas, resultando la expresiones

$$R.^0 = \frac{tg.\alpha}{tg\,(\varphi + \alpha)} \qquad (e)$$

$$R.^0 = \frac{h}{2\pi r'}\,\frac{2\pi r' - fh}{h + 2\pi f r'} \qquad (e')$$

384. Siendo en general pequeño el valor del ángulo α (menor todavía que el correspondiente á φ), las fórmulas (c) y (e) nos proporcionan ambas, pequeños valores para la relación de esfuerzos y para el rendimiento, resultando que este mecanismo favorece notablemente la potencia; pero sus condiciones con respecto á la pérdida de energía por rozamientos no son buenas, ya que la fracción aprovechada como trabajo útil es pequeña. Esta consecuencia nos permitirá apreciar con exactitud las circunstancias que sean favorables ó desfavorables á su elección para una instalación mecánica determinada, según las condiciones especiales de esta.

385. Terminaremos la apreciación analítica indicando la facilidad de hacerla extensiva al movimiento descendente, pues bastará sustituir $-\alpha$ en vez de α en las fórmulas halladas; y deduciremos del valor obtenido mediante la aplicación de la (c), que si $\alpha \gtrless \varphi$ el valor P será cero ó negativo; en otros términos, no será necesaria la aplicación de esfuerzo alguno para que el tornillo verifique su descenso, el que tendrá lugar espontáneamente y por su propio peso. Esta propiedad del tornillo es importante y digna de tenerse en cuenta, sobre todo cuando se aplica este mecanismo á maniobras de elevación de pesos, en las cuales es preciso impedir el des-

---

modo, el camino recorrido es doble que si hubiéramos supuesto obrando una sola fuerza. El espacio recorrido $4\pi r$ que aparece en nuestra fórmula, corresponde, por lo tanto, á una sola revolución del tornillo, y las consecuencias de aquella están de acuerdo con la generación de éste.

censo espontáneo, haciendo que se verifique la condición $\alpha < \varphi$ deducida de dicha fórmula. Indicaremos, por último, que será preciso combinar dichas fórmulas con las correspondientes á las guías de movimiento, en el caso que estos órganos formen parte integrante del mecanismo, según los diversos medios que hemos presentado para su empleo.

386. Cálculo gráfico.—Si aN representa la dirección de la normal al filete medio del tornillo, siendo por lo tanto α el ángulo que forma con la fuerza Q, podrá obtenerse la dirección de la resultante total, trazando la recta aR que forme con N un ángulo igual al de rozamiento φ.

Puede suponerse equilibrada la resistencia por un par que obre tangencialmente á la superficie cilíndrica que contiene á la hélice media, y en este caso cada una de las fuerzas P' que constituyen este par, podrá encontrarse por la construcción del triángulo $1-2-3$, que nos proporciona en $2-3$ el valor de dichas fuerzas P' (*), las que indicamos en proyección horizontal, obrando en los puntos a' y a'', extremos de un mismo diámetro de la circunferencia proyección de la hélice media.

Conocidas en magnitud y posición estas fuerzas, ninguna dificultad ofrece ya la investigación de los valores que corresponden á las potencias P, obrando en las extremidades c' y d', pues bastará tener presente la proporcionalidad inversa que debe existir entre P, P' y sus brazos de palanca respectivos. La construcción de la cuarta proporcional se halla marcada en la figura, que nos da el valor $4-5$ para magnitud de cada una de las fuerzas P que buscamos (**).

(*) Téngase en cuenta que este valor es igual á la mitad de la fuerza P_1 que considerábamos en el estudio analítico.

(**) Obsérvese la sencillez notable obtenida con el empleo del cálculo gráfico en todos los casos, según llevamos indicado, y sobre todo en el de este mecanismo. La reciprocidad entre los resultados obtenidos por ambos procedimientos se comprueba muy fácilmente, dadas las relacioues que existen entre los lados y ángulos de los polígonos de las fuerzas. El cálculo gráfico resulta un auxiliar notable en todas las investigaciones á que hace referencia la aprecia-

Para la investigación del rendimiento y relación de espacios, se encontrará la fuerza teórica que debe aplicarse en la superficie cilíndrica de la hélice media, por medio del triángulo 1—2—6, que nos da en 2—6 el valor de cada una de dichas fuerzas teóricas que forman el par.

387. Debemos hacer una observación final en este mecanismo, referente, tanto al estudio analítico como al cálculo gráfico. Si en lugar de aplicarse como potencia un par de fuerzas en la barra que atraviesa la cabeza del tornillo, aplicáramos una sola, se desarrollaría un nuevo rozamiento entre

---

ción de los mecanismos. Véase si no, la facilidad con que se obtienen las fórmulas presentadas en el estudio analítico.

El triángulo 1 — 2 — 3 nos proporciona el valor del cateto 2 — 3, ó sea P' en función del 1 — 2 igual á $\frac{1}{2} Q$ y del ángulo 2 — 1 — 3 igual á $\alpha + \varphi$. Este valor es

$$P' = \frac{1}{2} Q \, tg \, (\alpha + \varphi);$$

pero la proporcionalidad que nos ha servido para encontrar el valor de P, expresada en los triángulos $o n 4$ y $o m a'$, en los cuales recordaremos que se ha llamado r' á la magnitud $o 4$ y r á la $o a$, nos da

$$P = P' \frac{r'}{r} = \frac{r'}{2r} Q \, tg \, (\alpha + \varphi)$$

reproduciéndose la fórmula (*c*), obtenida para valor de la relación de esfuerzos.

El rendimiento se deduce también directamente, observando que 2 — 6 es el valor de la fuerza teórica que debe aplicarse tangencialmente al cilindro de la hélice media; y por lo tanto, la expresión que corresponde á la relación de los esfuerzos teórico y efectivo, será

$$R.^0 = \frac{2—6}{2—3} = \frac{\frac{1}{2} Q \, tg \, \alpha}{\frac{1}{2} Q \, tg \, (\varphi + \alpha)} = \frac{tg \, \alpha}{tg \, (\varphi + \alpha)}$$

reproduciéndose también la fórmula (*e*) obtenida en el estudio analítico.

Por último, se obtendrá la relación de espacios que completa la apreciación, multiplicando invertidas las relaciones de trabajos y esfuerzos que acabamos de obtener.

las superficies cilíndricas que del tornillo y tuerca están en contacto, cuya resistencia nociva es de igual naturaleza que la estudiada con el nombre de rozamiento de muñón. Su valor podrá tomarse en consideración, por medio de las fórmulas ó construcciones empleadas en este caso.

b.—Tornillo doble.

388. **Forma del mecanismo.**—Se emplean muchas veces dos tornillos del mismo paso, montados sobre un mismo núcleo, y dispuestos sus filetes en sentidos contrarios; es decir, que uno de ellos asciende de izquierda á derecha y otro de derecha á izquierda, para un observador que coloque el tornillo verticalmente y delante de él. En el primer caso se dice que el tornillo tiene el *paso á la derecha*, y en el segundo que es el *paso á la izquierda*.

Engranando cada uno de estos tornillos con su tuerca correspondiente, toda rotación que se comunique al núcleo por medio de una manivela, dispuesta bien en la parte central ó en una de las extremidades, producirá movimientos rectilíneos para cada una de las tuercas, de tal modo, que se aproximarán ó separarán una de otra según el sentido de dicha rotación (*).

389. **Apreciación.**—Las fórmulas que pueden obtenerse son las mismas que hemos encontrado para el tornillo ordinario, y la potencia que se habrá de ejercer en la manivela vendrá en función de la resistencia que cada una de las tuercas oponga al movimiento.

La construcción geométrica representativa del cálculo gráfico se ve marcada en la *figura* 102, en la que A y B representan las tuercas, y C la manivela que debe producir la rotación del núcleo. Suponemos que las reacciones R se

(*) Esta disposición es muy empleada para la unión de los vagones en las vías férreas, y para ciertas máquinas que se explican en el curso de industria, entre ellas el punzón y la estampa.

desarrollan en los puntos m y n de las hélices medias de cada tornillo, correspondientes también á las secciones rectas centrales de estos. Trazando desde el punto de intersección o, la recta o—1 de magnitud y dirección igual á la mitad de la resistencia Q que presenta cada tuerca, y desde el extremo 1 la perpendicular 2—3, obtendremos en esta recta la magnitud de cada una de las fuerzas que componen el par que debe obrar tangencialmente al cilindro de la hélice media, y de esta magnitud se deducirán directamente las fuerzas que deben obrar en el extremo de la manivela. El polígono teórico está representado por el triángulo o'—2'—3', obtenido de un modo análogo por medio de las normales mo' y no'.

c.—Tornillo diferencial.

390. Descripción y propiedades.—Es sabido que cuando un tornillo gira de modo que permanezca fija su tuerca, por cada revolución completa tiene un avance igual á su paso; y que si el tornillo está fijo, siendo la tuerca la que ha de moverse en traslación, ésta avanza también la misma cantidad por cada vuelta de aquel. Según esto, si se concibe un tornillo aa (*fig.* 103) que atraviesa dos soportes con tuercas fijas bb del mismo paso h, y una tercera tuerca c movible en sentido de la longitud del tornillo, cuyo paso h' sea diferente de los anteriores, á cuyo fin el nucleo del tornillo está armado con los tres órdenes de filetes que son consiguientes, pero dispuestos en el mismo sentido, podrá observarse que por cada revolución completa, la tuerca c avanzaría una cantidad igual á h' si estuviese el tornillo con fijeza relativa, ó sea sin avance alguno; pero el avance de este en sus tuercas b es igual á h; por cuyas razones, y según enseña la teoría de movimientos relativos, el avance absoluto de la tuerca c debe ser igual á la diferencia $h'—h$, cantidad que puede hacerse tan pequeña como se quiera, conservando los filetes del tornillo toda la solidez necesaria.

Como se ve, siendo pequeño el espacio recorrido por la

tuerca c, podrá hacerse que venza un esfuerzo considerable y tanto mayor cuanto menor sea la diferencia $h'—h$, en virtud del principio sentado en el párrafo 92 de la teoría dinámica. Escusamos hacer la apreciación de este mecanismo, que sería repetición de la correspondiente al tornillo ordinario, en el que habrían de tenerse en cuenta no sólo los rozamientos en cada una de las tuercas b, b y c, sino también en las guías d, d del movimiento rectilíneo, que conducen á esta última.

ESTUDIO V

APLICACIONES Á LOS MECANISMOS

DEL SEGUNDO GRUPO CINEMÁTICO

Ó

MECANISMOS DE BIELA

CUADRO DEL ESTUDIO 5.°

PRELIMINARES. Orden del estudio.

MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS. Biela que marcha sobre dos guías.

MOVIMIENTOS CIRCULARES.
- Ejes paralelos.....
  - Biela y manivela con balanzadera.
  - Id. id. con pedal.
  - Manivelas paralelas.
- Ejes que se cortan... Junta universal.

MOVIMIENTOS COMBINADOS.
- Mecanismos de manivela y biela.....
  - Manivela simple.
  - Id. doble.
  - Excéntrica circular simple.
  - Id. id. doble.
- Balanzadera y paralelógramo.
  - Paralelógramo de Watt.
  - Id. de Peaucellier.

PRELIMINARES

391. Orden del estudio.—Sirve de norma, según se ha indicado en el estudio anterior, la clasificación hecha en la teoría cinemática, que depende de la naturaleza de los movimientos que pueden tener los órganos conductor y conducido, y serán base fundamental las fórmulas obtenidas en los párrafos 57 al 71, auxiliadas, como es natural, con las correspondientes á la teoría dinámica, de las cuales tanto uso hemos hecho en los estudios anteriores. Pero deberá tenerse presente, como ya hemos indicado, que solamente se explicarán los mecanismos que por cualquier concepto presenten alguna utilidad, descartando los que no cumplan con esta condición, aun cuando estén comprendidos en la clasificación general.

Por esta razón, en la segunda especie de mecanismos de este grupo, omitimos considerar el caso de ejes que ni se cortan ni son paralelos, dado el que los mecanismos de esta naturaleza no suelen ser usados en las instalaciones mecánicas.

CAPÍTULO PRIMERO

PRIMERA ESPECIE.—MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS

ARTÍCULO ÚNICO

BIELA QUE MARCHA SOBRE DOS GUÍAS

392. Naturaleza del mecanismo.—La única aplicación que puede presentarse de esta especie de mecanismos, se refiere al caso en que las dos guías formen ángulo recto, y constituye de este modo el aparato ó compás que se emplea para el trazado de las elipses.

Es sabido que este compás tiene la forma de una cruz, cuyos brazos llevan abiertas unas ranuras longitudinales en dirección de su eje de simetría. Estas sirven de guías para que marche resbalando por ellas la biela, cuya longitud puede aumentarse ó disminuirse á voluntad, y en uno de cuyos puntos se fija un estilete que lleva el lapicero para trazar la curva. La línea descrita por un punto cualquiera de la biela, es una elipse (*) cuyos semiejes son las dos magnitudes en que el

(*) Delaunay, párrafo 24.

estilete divide á dicha biela, quedando marcadas las direcciones de los ejes, según los de simetría correspondientes á las ranuras.

El conocimiento que de este sencillo instrumento se tiene nos dispensa de ampliar la explicación y expresar sus detalles por medio de una figura, cuyo dibujo, por otra parte, no presenta dificultad alguna, y dado el objeto á que el aparato se destina, nos dispensamos también hacer aplicación de las teorías generales cinemática y dinámica, que nos habían de proporcionar cuantos extremos son relativos á velocidades, esfuerzos y trabajos, cuya investigación en este caso no presenta ninguna dificultad.

393. Pero cuando un mecanismo de una instalación mecánica esté constituído del modo que acabamos de indicar y deban ser conocidos los diversos puntos á que se refiere la apreciación, se hará uso de la fórmula (1') del párrafo 57, que nos proporciona la relación de velocidades, y se emplearán para las relaciones de esfuerzos y trabajos las mismas reglas que han servido de norma en el estudio de las guías de movimiento rectilíneo. En este caso especial, deberá tenerse en cuenta que los extremos de la biela han de estar constituídos por pequeños rodillos que trasformarán en movimiento de rodar el de resbalar que en otro caso hubiera existido, disminuyendo notablemente el rozamiento y proporcionando como consecuencia directa, un rendimiento mayor.

CAPÍTULO II

Segunda especie.—Movimientos circulares

394. Mecanismos comprendidos en esta especie.—Según se ha indicado en el párrafo 391, solamente son de aplicación las dos clases siguientes de mecanismos, á las cuales nos hemos de referir:

Clase *A*.—Ejes paralelos.

Clase *B*.—Ejes que se cortan.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Ejes paralelos

395. Tipos correspondientes á esta clase.—Referiremos el estudio únicamente á los tres tipos que son de aplicación directa, á saber:

a.—Biela y manivela con balanzadera.

b.—Biela y manivela con pedal.

c.—Manivelas paralelas.

A.—Biela y manivela con balanzadera.

396. Descripción y trazado.—Como todos los órganos constituyentes de este mecanismo son perfectamente conocidos por haber expuesto de ellos la descripción detallada, nos limitaremos á dibujar el esqueleto, ó sea á suponer cada uno de los elementos reducido á su eje de simetría. Se compone (*fig.* 104, *lám.* 13) de una balanzadera aa', en cuya extremidad a se articula una biela ab, que á su vez está ligada con la manivela $o_1 b$ por medio de la articulación b. En el extremo opuesto a', se ejerce en general la potencia por el intermedio de otro mecanismo que más adelante hemos de describir y que se conoce con el nombre de paralelógramo de Watt; mas en el estudio actual, supondremos que dicha potencia obra directamente en el referido extremo a' y la resistencia actúa en el eje o_1 con un brazo de palanca cualquiera.

Las condiciones del mecanismo son tales, que los tres órganos que lo constituyen están situados en un mismo plano, que suponemos sea el de la figura, pudiendo la balanzadera y la manivela girar alrededor de sus ejes respectivos o y o_1, á cuyo fin están estos provistos de las correspondientes guías de movimiento circular. En general, la longitud de la biela es cinco ó seis veces mayor que la correspondiente á la manivela, guardando próximamente la misma proporción con esta última, la longitud total aa' de la balanzadera.

397. Teniendo en cuenta estas condiciones, supóngase trazada la posición media oc de la balanzadera (cuya posición media es siempre horizontal) y con centro o y radio oc, el arco de círculo $c'cc''$ que describe el extremo c. Limítese este arco por dos puntos c' y c'' simétricos con relación á oc, y tales que su cuerda $c'c''$ sea igual al doble del radio de la manivela. Sobre la vertical $c'c''$ prolongada, se establece el eje de rotación o_1 de la manivela, de tal modo que la distancia mo_1 sea igual á la longitud de la biela. Con tal disposición, se habrá conseguido *transformar el movimiento circular alternativo que puede*

comunicarse á la biela, en otro circular continuo de la manivela y recíprocamente.

Supongamos, con efecto, que el botón ó extremo de la manivela ocupe la posición d', en cuyo caso, y dado que $d'c'$ es igual á la longitud de la biela, la extremidad de la balanzadera estará en c'; é imprímase un movimiento á esta última en sentido de la flecha. Este movimiento sería imposible si el botón d' no estuviese animado de una velocidad inicial en el sentido $d'bd$ por ejemplo, en virtud de la cual recorrerá la semicircunferencia $d'dd''$ mientras c' recorre el arco $c'cc''$. Llegado éste á la posición c'', la manivela se encuentra en la $o_1 d''$. La velocidad adquirida hará que ésta rebase dicha posición. La semibalanzadera oc'' empezará á ascender, obligando á la manivela á recorrer la semicircunferencia $d''d_1d'$. Cuando aquella ocupe de nuevo la posición oc', y la manivela por lo tanto la $o_1 d'$, ésta seguirá su marcha por la velocidad adquirida, empezando aquella su descenso para obligar á la manivela á que siga recorriendo el camino $d'dd''$, reproduciéndose cuantos efectos hemos indicado anteriormente.

398. Teoría analítica.—La fórmula (3′) encontrada en el párrafo 61 de la teoría cinemática, sirve de base para la investigación de la *relación de velocidades* correspondientes á las piezas conductora y conducida, ó sea á la balanzadera y manivela.

Al aplicar dicha fórmula $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\rho_1}{\rho}$ á este caso, debe recordarse que ρ_1 y ρ representan respectivamente las distancias á los ejes o_1 y o del punto h de intersección de la biela con la línea oo_1 de centros, y por tanto, la expresada proporción toma la forma

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{r} \qquad (a)$$

Observamos por medio de esta fórmula, la variabilidad de la relación de velocidades angulares; porque siendo r constante, la magnitud p, y por consiguiente dicha relación, depen-

de de la posición que ocupe la biela en el instante que se considera. Deben examinarse por lo tanto, las variaciones á que nos referimos, para deducir las consecuencias correspondientes al modo de verificar su marcha el mecanismo que nos ocupa.

399. Para que el estudio de dichas variaciones sea más cómodo y breve, pongamos la expresión (*a*) bajo la forma $\omega r = \omega_1 p$; y ya que el producto ωr nos representa la velocidad lineal v del punto a, adoptaremos la siguiente

$$v = \omega_1 p \qquad (b)$$

que nos da á conocer la velocidad que corresponde á una posición cualquiera de la balanzadera, en función de la velocidad angular de la manivela y de la distancia p.

Esta perpendicular p es nula cuando la balanzadera ocupa las posiciones extremas oc' y oc'', porque las posiciones de la biela en este caso son $c'd'$ y $c''d''$. El valor de v correspondiente á dichas posiciones extremas, será cero por lo tanto, razón por la que se da á dichos puntos c' y c'' lo mismo que á los d' y d'', el nombre de *puntos muertos*.

Al separarse la biela de estas posiciones irá en aumento la magnitud p, y continuará de este modo hasta que llegue á su valor máximo, correspondiente, como es natural, al caso en que la biela sea tangente á la circunferencia o_1, para decrecer de nuevo, hasta anularse en la siguiente posición extrema. Como no es de gran interés fijar con exactitud las posiciones precisas de los puntos de velocidad máxima, lo que ninguna dificultad ofrece al hacerlo gráficamente, solo indicaremos que dichas posiciones se encuentran en la proximidad de la posición media ú horizontal oc de la balanzadera y corresponden con otras, también próximas á los extremos d y d_1 del diámetro horizontal de la circunferencia descrita por el botón de la manivela. A los puntos d y d_1 les llamaremos *puntos de mayor actividad*, para distinguirlos de los puntos muertos ó de actividad nula. Dicho nombre se hará extensivo también al extremo c de la balanzadera.

400. Resulta perfectamente conocida la ley de variación de la velocidad v, y por lo tanto, la relación de velocidades lineales de los órganos conductor y conducido, porque de la fórmula (b) puede deducirse

$$v = \frac{\omega_1 r_1 p}{r_1} = \frac{v_1 p}{r_1},$$

y por lo tanto,

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p}{r_1} \quad (c),$$

en cuyas fórmulas nos representan, r_1 el radio de la manivela, y v_1 la velocidad que corresponde á su extremo ó botón b.

Bastan las consideraciones apuntadas para comprender las condiciones del movimiento de este mecanismo, según las cuales necesitará, más que ningún otro de los que llevamos estudiados, el uso de un aparato complementario que tienda á regularizar la marcha, y que hemos de dar á conocer con el nombre de *volante*.

401. La *relación de esfuerzos* en cada una de las posiciones, puede deducirse mediante el establecimiento de la ecuación de trabajos correspondiente, teniendo en cuenta los rozamientos que se desarrollan en los muñones o y o_1, y los que tienen lugar en las articulaciones a y b. Pero sería indispensable también el estudio de las variaciones correspondientes á ellos, ó la deducción de una fórmula para cada posición particular, y ambos procedimientos serían muy complicados en el estudio analítico, sin poderse obtener otras consecuencias que las deducidas implícitamente de las que hemos apuntado referentes á la relación de velocidades, de la cual es inversa la de esfuerzos correspondiente á la máquina teórica (*).

(*) El estudio de la relación de esfuerzos lo omiten la mayoría de los autores, por la complicación que presenta; mas no es esta la razón única de omitirlo en estos estudios. La principal es la gran sencillez que se obtiene al hacer el cálculo gráfico que vamos á presentar inmediatamente, y que sin él no nos hubiéramos permitido la omisión del analítico.

Conocidos que sean los esfuerzos, ninguna dificultad ofrece el conocimiento de los *trabajos desarrollados;* bastando observar para el de rozamiento en las articulaciones, que su camino recorrido en una vuelta, es la circunferencia descrita con un radio igual al del botón de la articulación; pero ni unos ni otros valores nos detendremos á calcular analíticamente, por la sencillez que presentan los razonamientos y cálculos que pueden hacerse por el procedimiento gráfico.

402. Cálculo gráfico.—Considérese (*fig.* 105) una posición cualquiera $a\,o\,a'$ de la balanzadera y la correspondiente $o_1\,b$ de la manivela, y presentemos el problema de encontrar la potencia P que será necesario ejercer en la dirección $a'\,P$ para vencer una resistencia determinada $1—2 = Q$, excéntrica con relación al eje o_1.

Como además de los órganos principales (balanzadera y manivela) existe el órgano intermedio (biela), ésta desarrollará un esfuerzo determinado para vencer la resistencia Q, cuyo esfuerzo, llamado *tensión de la biela*, se ejercerá en dirección del eje de figura de ésta, cuando consideremos la máquina teórica; pudiendo servir á su vez como resistencia directa, que es vencida por la potencia P. De aquí los dos problemas parciales en que puede subdividirse el que nos ocupa, y que estudiaremos sucesivamente; pero observando en ellos, para más generalidad, que los rozamientos desarrollados en las articulaciones a y b hacen que la tensión de la biela, que llamaremos T, se desarrolle tangencialmente á los círculos de rozamiento de dichas articulaciones, según las reglas de la teoría dinámica. Sin embargo, para no complicar nuestra figura, supondremos que la recta $a\,b$ representa la dirección de dicho esfuerzo intermedio T, cuya verdadera posición, tangente á los expresados círculos, podrá marcarse fácilmente (*).

(*) La posición que corresponde á la verdadera tensión de la blela, es la tangente exterior á los pequeños círculos de rozamiento de a y b, trazada á la izquierda de estos puntos. Hágase también el cálculo teniendo en cuenta esta posición, que puede deducirse de las reglas dadas en la teoría dinámica.

403. En el *primer problema parcial* es dato la magnitud y posición de la resistencia Q. La incógnita es la magnitud de la tensión T, cuya dirección ab es conocida. Se resuelve el problema, como se ha indicado en general para el movimiento en las guías, en el caso de árbol horizontal.

Descríbase, por lo tanto, el círculo de rozamiento del árbol o_1; y la tangente cR_1 trazada por el punto de intersección de Q y T que desfavorezca la potencia T de este problema parcial, representará la reacción desarrollada en el cojinete. El triángulo 1—2—3 formado como en los diversos problemas que hemos resuelto, nos proporciona en 1 — 3 la magnitud de la tensión T que se busca.

404. En el *segundo problema parcial* sirve de punto de partida la tensión T, que obra como resistencia. Se trata de encontrar la magnitud del esfuerzo P, cuya dirección $a'P$, es conocida. El problema es de la misma naturaleza que el anterior, pero refiriéndose al árbol de rotación o. Debe trazarse la tangente al círculo de rozamiento de este árbol, desde el punto de intersección de las direcciones aT y $a'P$.

Se nos presenta en este problema una particularidad que no habíamos tenido ocasión de observar en las diversas cuestiones resueltas hasta ahora. Las rectas aT y $a'P$ no se encontrarán en ningún caso en los límites del dibujo. Debemos indicar el artificio que se emplea para el trazado de la reacción, ó lo que es igual, para trazar una tangente al círculo o, que sea concurrente con las direcciones indicadas. Presentaremos como regla general para todos los casos análogos, la construcción siguiente (*):

Trácese por el centro o de la balanzadera una recta $\alpha\beta$ que sea perpendicular á la dirección probable que se imagine debe tener la reacción que se busca, y por un punto cualquie-

(*) Es la construcción más sencilla de cuantas pueden emplearse, y aun cuando no completamente exacta, proporciona siempre la suficiente aproximación. La emplea Mr. Hermann en todos los casos análogos al que estamos estudiando.

ra, una paralela $\alpha' \beta'$ á dicha recta. Por los puntos α' y β' tracemos dos rectas paralelas en una dirección cualquiera, y tómense sobre ellas las magnitudes $\alpha' m$ y $\beta' n$ iguales respectivamente á $\alpha\gamma$ y $\beta\gamma$. Uniendo los puntos m y n por una recta, el punto γ' de intersección de ésta con $\alpha' \beta'$ es tal, que unido con γ proporciona la dirección que se busca. La demostración es sencilla, bastando para ella tener en cuenta la igualdad que existe entre las relaciones $\frac{\alpha' \gamma'}{\beta' \gamma'}$ y $\frac{\alpha' m}{\beta' n}$, y por lo tanto, entre la primera y la $\frac{\alpha \gamma}{\beta \gamma}$. Esta construcción auxiliar, marcada en la figura con líneas de trazos y puntos, puede comprobarse fácilmente examinando si existe perpendicularidad entre las direcciones $\alpha\beta$ y $\gamma\gamma'$, cual es necesario para que esta última sea tangente al círculo de rozamiento. De no verificarse, aproximadamente al menos, podría repetirse de nuevo, eligiendo otra posición para la recta $\alpha\beta$, que habría de proporcionar, seguramente, resultados suficientemente exactos.

Conocida ya la dirección de la reacción R, el problema parcial que nos ocupa se resuelve con facilidad por medio del triángulo $1 - 3 - 4$, sobre cuyo trazado no habremos de insistir y él nos da el valor $3-4 = P$ como potencia de este problema parcial, resultado definitivo del problema principal que nos ocupa.

405. El *polígono teórico* se construye como en los demás casos, anulando los radios de rozamiento de los ejes o y o_1, con lo que las reacciones R y R_1 pasarán por dichos puntos. Este polígono nos proporcionará, según sabemos, la relación de espacios recorridos y el rendimiento.

406. La *ley de variación de los esfuerzos*, se deduce mediante la construcción del polígono de las fuerzas que sean correspondientes á diversas posiciones de la balanzadera, lo que nos permitirá el trazado de la curva, expresión gráfica de dicha ley. Mas sin necesidad de ello, pueden deducirse las mismas consecuencias que ha proporcionado la teoría analítica, observando que cuando la biela sea vertical, no puede cerrarse

el primer triángulo que, análogo al 1 — 2 — 3, corresponda al polígono teórico, por ser paralelas la direcciones 1 — 3 y 2 —3 de las fuerzas T y R_1. El valor de éstas es infinitamente grande, resultando de la misma naturaleza el de P. Esta conclusión nos dice que no existe esfuerzo alguno que sea capaz de vencer la resistencia en los instantes que la biela toma la posición indicada, ó en otros términos, y teniendo en cuenta la relación inversa entre esfuerzos y velocidades de las máquinas teóricas, que la velocidad en los extremos del diámetro vertical será nula. La misma figura deja también entrever que los puntos correspondientes al mínimo esfuerzo corresponderán á una posición próxima á la horizontal de la manivela, siendo éstos los que hemos caracterizado en la teoría analítica con el nombre de puntos de mayor actividad, por ser máxima la velocidad en ellos, cual se desprende de las consideraciones actuales, teniendo en cuenta la susodicha propiedad de las máquinas teóricas.

b.—Biela y manivela con pedal.

407. Descripción y uso del mecanismo.—Imagínese la figura anterior invertida, y se tendrá una idea de este mecanismo, que es tan empleado en un gran número de máquinas movidas por el hombre (*)

Colocada en la parte inferior la que antes hemos llamado balanzadera, recibe ahora el nombre de pedal, dado el objeto á que se destina, y su forma es distinta de la que presenta aquella, no tan sólo porque puede actuar como palanca de primero ó tercer género, sino también porque puede estar dispuesta para recibir la acción de un solo pié ó de los dos. De todos modos, no nos parece oportuno presentar el dibujo de

(*) Las máquinas de coser y las de calar madera, las que emplean los afiladores ambulantes y otras muchas, pueden presentarse como ejemplos del mecanismo que nos ocupa.

un órgano tan sencillo, ya que es muy general el conocimiento de las máquinas que lo utilizan como motor.

La teoría analítica y gráfica se estudiará de idéntico modo que lo hemos hecho en el caso anterior, y de ella se podrán deducir las mismas consecuencias relativas á esfuerzos y velocidades.

c.—Manivelas paralelas.

408. Descripción y teoría.—Cuando la longitud de la biela es igual á la distancia que existe entre los centros de los dos órganos en rotación y son iguales las magnitudes de estos, pueden ocupar constantemente posiciones paralelas, como indica la *figura* 106. En este caso son dos manivelas las que están ligadas por la biela, puesto que según vamos á indicar, los movimientos de rotación de uno y otro eje son ambos continuos, siendo de observar que se verifican en el mismo sentido. Este mecanismo es muy empleado, sobre todo en las locomotoras, para acoplar las ruedas principales ó motoras con otras que reciben su movimiento y favorecen así la tracción, aumentando el número de ruedas que comunican con el motor, para que la adherencia sobre los rails sea mayor.

409. Aplicada á este caso la ecuación (3′) de la teoría cinemática, resulta indeterminación en el valor de la relación de velocidades, por ser infinitamente grandes las distancias ρ y ρ' de cada uno de los centros al punto de intersección con la biela, de la línea que los reune. Esta indeterminación se salva, sin embargo, teniendo presentes las consecuencias obtenidas en el problema anterior, que son generales para todos los casos del estudio que pudiéramos hacer, considerando las diversas formas que puede afectar el mecanismo antes de llegar al límite en que se encuentra.

Si empleamos la nomenclatura del problema anterior y las mismas letras para la figura, la consecuencia expresada por la proporción $\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{p}{r}$ deducida en el párrafo 398, nos hace ver que las velocidades angulares son iguales, puesto que la

distancia p se reduce en este caso á la $o_1 b = r_1$ que según hemos supuesto es igual á r. Esta igualdad entre velocidades angulares y radios subsiste, como es consiguiente, entre las velocidades absolutas, pudiendo deducirse que en la máquina teórica son iguales la potencia y resistencia por la proporcionalidad inversa que existe entre estas y aquellas.

410. Podemos completar el estudio de este mecanismo con la construcción del *polígono de las fuerzas* 1—2—3—4, trazado de idéntico modo que el correspondiente al problema anterior, del cual es un caso particular el que ahora estudiamos. Se supone también en él que es dada la resistencia Q, y se trata de encontrar la magnitud de la potencia P. La construcción del polígono teórico nos permitirá deducir las consecuencias antes apuntadas de igualdad entre los esfuerzos teóricos, y por lo tanto entre las velocidades absolutas, encontrando, por su comparación con el polígono real, el valor del rendimiento de este mecanismo.

ARTÍCULO II

Clase β.—Ejes que se cortan.

411. Junta universal.—La descripción de este mecanismo ha quedado completa en el párrafo 64 de la teoría cinemática, habiendo deducido en el 65 la variabilidad de la relación de velocidades. Esta relación tiene por límites los valores $\cos\alpha$ y $\frac{1}{\cos\alpha}$ en que α representa el ángulo formado por un eje y la prolongación del otro, cuyas conclusiones quedaron marcadas en los párrafos 66 y 67. He aquí la propiedad que sirve de base para el estudio dinámico del mecanismo, que referiremos á la máquina teórica, ya que esta sirve exclusivamente de punto de partida para el cálculo en las condiciones de la práctica.

Siendo iguales las aberturas de ambas horquillas, las velocidades absolutas de los extremos de estas son proporcionales á las angulares, como indica la relación (*a*) del párrafo 65, y por lo tanto, los valores límites que corresponden á la relación de las primeras son los ya indicados de $cos\ \alpha$ y $\frac{1}{cos\ \alpha}$. Resultan estas mismas cantidades como límites de la relación entre los esfuerzos teóricos, pudiendo, por lo tanto, marcar el valor medio que corresponde á esta relación, que será la semisuma de los valores límites de referencia. Estará expresado este valor por la fórmula

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{1 + cos^2\ \alpha}{2\ cos\ \alpha} \qquad (d)$$

Esta consideración nos permite hacer un cálculo bastante aproximado del mecanismo, en el cual suponemos se sustituya la acción de los esfuerzos variables, por la que se obtiene con los esfuerzos constantes cuya relación satisfaga á la fórmula apuntada (*).

412. Puede hacerse el *cálculo gráfico* mediante la construcción de la expresión (*d*), cuya forma más sencilla presentamos en la *figura* 107. Se ha trazado una circunferencia con radio igual á la unidad y formado el ángulo $mon = \alpha$ de un eje y la prolongación del otro. Sobre la perpendicular *ab* al radio *oa*, se ha tomado una magnitud $ab = om = cos\ \alpha$, con lo que la hipotenusa *ob* representará el valor $\sqrt{1 + cos^2\ \alpha}$ y si se traza la *oc* perpendicular á *ob*, limitándola por su intersección *c* con la prolongación de *ab*, la magnitud *bc* representará el valor $\frac{1 + cos^2\ \alpha}{cos\ \alpha}$

Tomando, por último, la distancia 0—1 igual á la resistencia

(*) Nos parece de necesidad presentar esta nueva forma para el cálculo del mecanismo en cuestión, por las dificultades grandes que existen al hacerlo exactamente; cuya razón es, sin duda, la que obliga á los autores á hacer caso omiso de él, cuando establecen la teoría dinámica de los diversos mecanismos.

dada Q_0, la paralela 2 — 3 nos dará un valor doble de la potencia que se busca.

413. Ténganse en cuenta para el establecimiento de esta trasmisión, las observaciones hechas en la teoría cinemática; según las cuales la variabilidad de la relación de velocidades, y por lo tanto de la de esfuerzos teóricos, es tanto mayor cuanto mayor sea el ángulo α. Esta es la razón de limitar el uso de este mecanismo al caso en que α sea muy pequeño, ó en otros términos, al caso en que por las condiciones especiales de la instalación mecánica deba trasmitirse el movimiento de un árbol á otro que esté casi en su prolongación. El cálculo que hemos presentado proporciona resultados suficientemente exactos en este caso; pero si el ángulo α se aproxima á 90°, deja de ser aplicable, y la trasmisión irrealizable en absoluto cuando α adquiere dicho valor límite.

CAPÍTULO III

Tercera especie.—Movimientos combinados

414. Mecanismos comprendidos en esta especie.—Dos clases de mecanismos vamos á explicar, y para su estudio seguiremos el orden siguiente:

A.—Mecanismos de manivela y biela.
B.—Balanzadera y paralelógramo.

ARTÍCULO PRIMERO

A.—Mecanismos de manivela y biela

415. Tipos comprendidos en esta clase.—Los diversos tipos de que habremos de ocuparnos son los siguientes:

a.—Manivela simple.
b.—Manivela doble.
c.—Excéntrica circular simple.
d.—Excéntrica circular doble.

a.—Manivela simple.

416. Descripción y modo de funcionar.—Aun cuando este mecanismo lleve ordinariamente el nombre de manivela simple, está compuesto, como comprendido en este grupo, de dos piezas principales y una intermedia. Las dos primeras son: una, la manivela montada en un árbol de rotación, y la otra, una pieza asegurada en su movimiento rectilíneo por las correspondientes guías. Una y otra están reunidas por la biela, que sirve de órgano intermedio para la comunicación del movimiento.

Puede funcionar este mecanismo á simple ó á doble efecto; en el primer caso, la potencia (que se supone obrando en la pieza que tiene el movimiento rectilíneo) obra solamente durante una semirevolución de la manivela, y en el segundo, obra la potencia constantemente, tanto en el viaje de ida como en el de vuelta.

De todos modos, debe recordarse cuanto se dijo en el párrafo 71 de la teoría cinemática, según el cual, la amplitud del movimiento rectilíneo debe ser igual al doble del radio de la manivela, y mediante tal idea, puede encontrarse este último cuando se conozca la amplitud expresada. Debemos indicar también con respecto á la biela, que su longitud debe guardar con la de la manivela la relación de cinco á uno ó de seis á uno.

417. Teoría analítica.—Tiene por fundamento la ecuación (12′) encontrada en el párrafo 69 de la teoría cinemática. En dicha ecuación $v = \omega \rho$, representa v la velocidad correspondiente al movimiento rectilíneo, ω la angular del de rotación y ρ ladistancia variable ok de la *figura* 16. La discusión de esta ecuación hizo ver en el párrafo 71 la variabilidad del valor de v que es nulo en los *puntos muertos*, para los cuales el valor de ρ es igual á cero. Los *puntos de mayor actividad* corresponderán á la posición en que la biela sea tangente á la circunferencia descrita por el botón de la manivela, estando muy próxi-

mos á los extremos del diámetro perpendicular al movimiento rectilíneo; por cuya razón suelen estos confundirse con aquellos como lo hemos hecho en el mencionado párrafo, y es costumbre suponer en las aplicaciones prácticas.

La *relación de velocidades* absolutas puede deducirse de dicha expresión (12′) poniéndola bajo la forma

$$\frac{v}{\rho} = \frac{\omega r}{r} = \frac{v'}{r},$$

de la cual se deduce

$$\frac{v}{v'} = \frac{\rho}{r} \qquad (a)$$

en las que representa r el radio de la manivela y v' la velocidad absoluta del botón de ésta.

Se obtiene para la *relación de esfuerzos teóricos* el valor $\frac{r}{\rho}$, variable también como el anterior, pudiendo deducirse las mismas consecuencias relativas á la marcha del mecanismo. Pero se encuentra una expresión aproximada del valor medio que corresponde á esta relación, mediante la hipótesis de que la biela sea paralela en todas las posiciones á la dirección del movimiento rectilíneo, como indica la *figura* 108, ejerciéndose la potencia directamente en la dirección ab.

418. En este caso, el trabajo desarrollado por la potencia durante una revolución, si la manivela es á *simple efecto*, tendrá por valor

$$T_m = P.2r$$

y si se supone á la resistencia Q obrando tangencialmente á la circunferencia descrita por el botón de la manivela, su trabajo durante una revolución también, estará representado por

$$T_u = Q.2\pi r.$$

En la hipótesis de la máquina teórica, ó de supresión de trabajos nocivos, la ecuación de las máquinas en régimen se reduce á

$$P.2r = Q.2\pi r,$$

y de ésta se deduce la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = \pi \quad (b)$$

que corresponde á las manivelas á simple efecto.

419. Si es *á doble efecto*, se duplica el valor de T_m permaneciendo igual el de T_u y la relación de esfuerzos toma la forma

$$\frac{P}{Q} = \frac{\pi}{2} \quad (c)$$

que demuestra ser esta manivela más favorable á la potencia que la de simple efecto.

420. El *rendimiento* se obtendrá mediante el estudio de las resistencias nocivas desarrolladas, que son los rozamientos en las guías y en ambas articulaciones; para establecer en su vista la ecuación de trabajos que corresponde á la máquina real (*).

421. Comparación de las manivelas á simple y á doble efecto.—Sabido que la manivela á doble efecto favorece más la potencia que la de simple efecto, convendrá examinar también cuál de las dos manivelas presenta mayor regularidad en su movimiento, ya que en ambas existe la indicada

---

(*) La complicación de las ecuaciones que pudieran obtenerse, hace que no debamos incluir el estudio de la máquina real, como lo hemos hecho en los casos anteriores; mucho más cuando el cálculo gráfico nos ha de proporcionar los mismos resultados con una sencillez notable.

El estudio analítico nos sirve en este caso, para la comparación entre unas y otras clases de manivelas, deduciendo, no sólo cuál es más favorable á la potencia, sino también cuál de ellas presenta mayor regularidad en el movimiento.

variabilidad con respecto á las velocidades y esfuerzos, y con respecto también, como es consiguiente, á los trabajos desarrollados en los distintos instantes de su marcha.

Esta comparación podrá establecerse mediante el examen de las variaciones correspondientes á dichos trabajos elementales, cuyo valor trataremos de hallar en uno y otro caso de simple ó doble efecto.

El valor que corresponde al trabajo elemental, suponiendo las condiciones teóricas de la *figura* 108, tendrá por expresión $P s \cos \alpha$, llamando α el ángulo de P con el elemento correspondiente, ó sea con la tangente T, y s al arco elemental recorrido por el punto de aplicación de P. El límite menor de este trabajo corresponde á los puntos m y m', para los cuales $\alpha = 90^0$ y $\cos \alpha = o$, siendo también nulo el valor de aquel. En cambio, el mayor se obtiene en los puntos n y n' por ser en ellos $\alpha = o$ y $\cos \alpha = 1$, con lo cual se reduce á Ps el trabajo expresado.

422. Debemos encontrar el valor medio que adquiere dicho trabajo elemental, y á este fin, si n representa el número de los arcos s que hemos considerado, ó sea el número de veces que s está contenido en la circunferencia $2\pi r$, dicho valor medio será la enésima parte del trabajo total, ó lo que es lo mismo $\frac{P.2r}{n}$ para la manivela *á simple efecto* y sustituyendo por n el valor deducido de la igualdad $ns = 2\pi r$, resulta para trabajo medio la expresión $\frac{Ps}{\pi}$.

Podemos formar una tabla de los valores extremos y medio que corresponden al trabajo elemental, para que sea más sencilla la comparación de unos y otros. Dicha tabla es la siguiente:

Valor menor.....	o
Idem medio.....	$\frac{Ps}{\pi}$
Idem mayor.....	Ps

y si se toma como unidad el valor *Ps*, todavía los resultados son más visibles; reduciéndose la tabla á la serie de las tres cantidades

$$0 \ldots\ldots \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3} \ldots\ldots 1$$

En la manivela á *doble efecto* permanecen los mismos valores extremos, debiéndose duplicar el que adquiere *P* en el trabajo medio, por depender este del total desarrollado durante una revolución; la serie análoga á la anterior, es la siguiente:

$$0 \ldots\ldots \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3} \ldots\ldots 1$$

423. Comparando una y otra serie, podrá observarse que *la diferencia de variaciones que corresponden á los valores obtenidos, es menor en la manivela á doble efecto que en la de simple efecto;* resultando para esta última una irregularidad mayor, que la hace menos admisible en las condiciones prácticas de instalación de este mecanismo.

424. Cálculo gráfico.—Presentamos el problema como los ya estudiados, considerando sea dato uno de los esfuerzos motor ó resistente; y supongamos *(fig.* 109) sea *P* el valor dado, debiendo encontrarse el que corresponde á la resistencia *Q* de dirección conocida.

Siendo bb' la barra que tiene movimiento rectilíneo en sentido de la flecha, se desarrollará en las guías correspondientes un rozamiento, que en unión del que actúa en la guía de movimiento circular correspondiente al eje *o*, constituyen las resistencias nocivas que vamos á tomar en consideración; ya que sea muy fácil incluir las que corresponden á las articulaciones *a* y *b*.

Consideraciones análogas á las del párrafo 402, nos hacen subdividir el problema en otros dos parciales, teniendo en

cuenta la tensión de la biela, que se ejerce en sentido de su eje de simetría (*).

425. Se refiere el *primer problema parcial* á las guías de movimiento rectilíneo, que no se dibujan por no complicar la figura, y se resuelve, como en tal caso hemos indicado, trazando la reacción R_1 que forma el ángulo φ con la normal N á las guías, y formando el triángulo $1-2-3$ mediante el trazado de $2-3$ paralela á la biela; dicho valor $2-3$ será el que corresponde á la tensión T de esta.

426. El *segundo problema parcial* es relativo á la guía o y queda resuelto por medio del triángulo $2-3-4$, sirviendo de auxiliar el círculo de rozamiento de o y la tangente $o' R_2$ trazada por el punto o' de intersección de Q y T. Si las direcciones Q y T no se cortaran en los límites del dibujo, emplearíamos para trazar la reacción R_2, el artificio de la figura 105 explicado en el párrafo 404.

427. Resulta como polígono de las fuerzas reales el $1-3-4-2$ que nos pone de manifiesto los esfuerzos y reacciones, y que en unión del polígono teórico, que puede construirse fácilmente, nos proporcionará las relaciones á que se refieren los diversos extremos de la apreciación del mecanismo en esta posición particular. El polígono teórico nos haría deducir también consecuencias idénticas á las obtenidas en el estudio analítico, pudiendo obtenerse como hemos indicado en el párrafo 406, la ley de variación que corresponde á los esfuerzos.

b.—Manivela doble.

428. Condiciones de este mecanismo.—Para aumentar la energía comunicada al árbol en rotación, se suelen montar sobre este dos manivelas de tal modo, que si deben obrar

---

(*) Si se considera el rozamiento en las articulaciones a y b, dicha tensión será tangente á los círculos de rozamiento de estos puntos, y dada la posición de la figura, se escogerá la tangente exterior trazada á la izquierda de ellos.

ambas á simple efecto, tengan sus radios en prolongación, con objeto de que cada una trabaje mientras la otra no lo hace. Pero es más común el que ambas sean á doble efecto, y en este caso, como una y otra reciben constantemente la acción del esfuerzo motor, deberá atenderse á la regularidad del movimiento. Según esto, ya que los puntos muertos y los de mayor actividad de cada manivela están situados en las extremidades de dos diámetros próximamente perpendiculares, deberá hacerse que los radios de cada manivela simple formen ángulo recto, y de este modo, cuando una de ellas esté en un punto muerto, corresponderá á la otra la posición más activa, evitándose para el sistema total la existencia de dichos puntos muertos. El estudio, tanto analítico como gráfico de este mecanismo, se deduce directamente del anterior, observándose que la potencia queda favorecida en una cantidad doble de la que corresponde á la manivela simple á doble efecto; puesto que por ser $4P$ el esfuerzo que corresponde á la total revolución, la relación de esfuerzos teóricos toma la forma

$$\frac{P}{Q} = \frac{\pi}{4} \qquad (d)$$

429. Comparación con las manivelas simples.—Entremos ahora en la cuestión relativa á la regularidad del mecanismo, para hacer un estudio comparativo entre esta manivela y las dos que hemos estudiado. Adoptando la misma hipótesis de obrar la potencia en dirección del movimiento rectilíneo, podrá observarse en la *figura* 110, en la que ao y bo son los dos brazos de la manivela ó las dos manivelas simples, que son complementarios los ángulos α y α'. Por esta razón, el trabajo elemental cuyo valor es la suma de los correspondientes á cada manivela, tendrá por expresión

$$P s \cos \alpha + P s \cos \alpha' = P s \, (\cos \alpha + sen \, \alpha)$$

en la que empleamos la nomenclatura sentada para las manivelas simples, debiendo hallar también los valores mayor y

menor que á esta expresión corresponden. El valor menor es relativo al caso en que $sen\alpha$ ó $cos\alpha$ sean cero, ó lo que es lo mismo, que α valga cero ó 90°; de este modo, si $\alpha = o$

$$sen\,\alpha = o \qquad cos\,\alpha = 1$$

y en el caso en que sea $\alpha = 90°$

$$sen\,\alpha = 1 \qquad cos\,\alpha = o$$

En ambos casos, el valor menor del trabajo elemental tiene por expresión el producto Ps.

Se encontrará el valor máximo, recurriendo á la teoría de máximos y mínimos. La 1.ª derivada $cos\alpha - sen\alpha$ igualada á cero, proporciona la condición $cos\,\alpha = sen\,\alpha$ que se verifica con $\alpha = 45°$; que proporciona un máximo, por ser negativo el valor que toma la segunda derivada, con la sustitución de la expresada cantidad en lugar de α. Poniendo en vez de $cos45°$ su valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, se obtiene el correspondiente al trabajo máximo que es $\frac{2Ps}{\sqrt{2}} = Ps\sqrt{2}$.

Por último, deducimos el trabajo medio por la sustitución del valor $4P$ en vez del $2P$ que corresponde á la manivela simple á doble efecto, con lo cual la expresión que se busca será $\frac{4Ps}{\pi}$.

430. Puede ya formarse la tabla de valores correspondientes á esta manivela, que para abarcarlos de un golpe de vista ponemos á continuación

$$Ps \ldots\ldots \frac{4Ps}{\pi} \ldots\ldots Ps\sqrt{2}$$

y tomando por unidad el mismo valor Ps, la ley de variación estará expresada por los números

$$1 \ldots\ldots \frac{4}{\pi} = 1{,}27 \ldots\ldots \sqrt{2} = 1{,}42$$

Comparándola con las tablas análogas de las manivelas simples, resulta que la *diferencia de variaciones es mucho menor en esta manivela que en aquellas*. No sólo es esta la única consecuencia que hace preferible á este mecanismo sobre los anteriores, sino que se debe observar la particularidad de no anularse en ningún caso el valor que corresponde al trabajo elemental, lo que le hace mucho más perfecto y de más aceptación en las instalaciones mecánicas.

c.—Excéntrica circular simple.

431. Descripción y teoría.—Las condiciones geométricas del mecanismo de manivela y biela no sufrirán variación alguna, aun cuando se aumente el radio de la articulación *a* (*fig.* 109). La comunicación del movimiento se verificará en idénticas condiciones, y solamente el trabajo desarrollado por el rozamiento en la expresada articulación tendrá un aumento, por ser mayor el camino recorrido por el punto de aplicación de esta fuerza. Supongamos, pues, que aumenta el mencionado radio hasta tanto que la circunferencia que representa la articulación, que era exterior á la sección recta del eje *o*, deje á éste comprendido en su interior. El mecanismo toma en este caso el nombre de excéntrica circular. El cilindro de la articulación es el *m n* de la *figura* 111 que tiene por centro el punto *a*. El árbol de rotación *o*, comprendido en su interior, es solidario del cilindro ó polea excéntrica *m n* que gira alrededor de dicho árbol, y la circunferencia descrita por el botón de la manivela es la de centro *o* y radio *o a* marcada de puntos en nuestra figura.

La articulación de la biela se efectúa en este caso por medio de un *collar m' n'* que entra en un rebajo correspondiente practicado en la excéntrica *m n*, y que es solidario de la *armadura p q* que sustituye á la biela. Esta armadura está ligada á la barra *b b'* que tiene movimiento rectilíneo, por medio de la articulación *b'*. La expresada forma de la biela se emplea cuando debe tener gran longitud; en el caso contrario,

es una barra sencilla reunida al collar, como se vé en la *figura* 112; llamándose *barra de excéntrica* á dicha pieza *p q*, que sustituye á la biela.

Al radio *oa* se le da el nombre de *radio de excentricidad*, y no es otra cosa que el llamado *radio de manivela* en el mecanismo anterior. Su magnitud será, como en dicho caso, igual á la mitad de la amplitud del movimiento rectilíneo.

432. La teoría de este mecanismo es, como llevamos dicho, idéntica á la del mecanismo de manivela y biela; observándose para la investigación del trabajo nocivo, que el correspondiente á la articulación *a* se desarrolla en la circunferencia *mn*. Este trabajo será, por lo tanto, considerable, y no podrá prescindirse de él como anteriormente; deduciendo la consecuencia de que en la trasformación de movimiento circular continuo en rectilíneo alternativo, debe emplearse el mecanismo de manivela cuando hayan de vencerse grandes esfuerzos, reservándose el uso de la excéntrica para el caso en que los esfuerzos no sean de consideración.

433. Es de observar que este mecanismo, por su forma especial, puede adaptarse á cualquier punto del árbol de rotación, lo que no sucede con las manivelas ordinarias; las cuales, en el caso que hayan de tener dicha colocación, deberán ser sustituídas por un recodo del árbol, como se ha indicado en el estudio tercero; lo que siempre presenta no pequeños inconvenientes.

434. Cálculo gráfico.—A pesar de la analogía con el mecanismo de manivela y biela, del que es este un caso particular, como no puede dejar de tomarse en consideración el rozamiento del collar con la excéntrica, que sustituye al que se ejercía en el botón de la manivela despreciado en aquel, presentaremos la figura correspondiente á este caso, indicando la marcha que debe seguirse en la resolución del problema.

Sea *mn* (*fig.* 112) la excéntrica; *p q* la barra de excéntrica, y *b b'* la pieza que ha de ser guiada en su movimiento rectilíneo. Supondremos, como sucede en las condiciones prácticas de instalación del mecanismo, que obre la potencia *P* en

el árbol motor, con un brazo de palanca igual á oc, y la resistencia Q actúe en la dirección bb' del movimiento rectilíneo. Supóngase también, como sucede ordinariamente, que existan dos guías para este movimiento, y sean estas las G y G_1; en cuyo caso, dadas las direcciones de los movimientos rectilíneo y de rotación, marcadas por las correspondientes flechas, se desarrollarán rozamientos en los puntos r y r_1, que supondremos, como ya dijimos en la teoría dinámica, sean los centros de cada una de las superficies de apoyo. Estos puntos están situados uno á cada lado de la barra bb', dada la oblicuidad de la tensión T que se desarrolla en la biela ó barra de excéntrica. Se tomarán en consideración los expresados rozamientos, mediante el trazado de las reacciones R_1 y R_2 que forman el ángulo φ con las correspondientes normales.

Con respecto á la tensión T de la biela, en lugar de obrar según su eje de simetría, tendrá la dirección de la tangente común á los círculos de rozamiento de a y b; escogiendo la que aparece en nuestra figura, según la regla que relativa á este caso se ha sentado en la teoría dinámica. (Téngase en cuenta que el círculo de rozamiento de a tiene un radio mayor que los radios ordinarios de rozamiento, por depender su valor del radio del collar cuyo centro geométrico es el punto a.)

435. Según las ideas que llevamos apuntadas, el *primer problema parcial* que corresponde á las guías G y G_1 se refiere al equilibrio de las fuerzas Q, T, R_1 y R_2, de las cuales, la primera es conocida en magnitud y dirección, y las otras en dirección solamente. Recordando los principios sentados en Mecánica racional, podremos indicar que la resultante de dos de ellas, Q y R_1, por ejemplo, debe ser igual á la resultante de las otras dos T y R_2. La dirección de estas resultantes se obtendrá, por lo tanto, uniendo el punto o_1 de intersección de las dos primeras, con el o_2 de intersección también de T y R_2.

Podemos, por lo tanto, construir primero el triángulo 1—2—3 para encontrar los valores de R_1 y la resultante S que acabamos de mencionar, y partiendo del valor 2—3 de esta, trazar el triángulo 2—3—4 que nos permite hallar los

valores de R_2 y T, marcados respectivamente por los lados 2—4 y 3—4.

436. Referente el *segundo problema parcial* al árbol de rotación o, sirve de resistencia la tensión T y se debe encontrar el valor de P; no debiendo añadir idea alguna que no esté expresada en casi todos los problemas resueltos, por lo que sólo indicamos que trazada desde el punto o_3 de intersección de P y T la tangente al círculo de rozamiento de o, obtendremos la dirección de la reacción desarrollada en el eje, la cual sirve de base para la construcción del triángulo 3—4—5. Este último nos da el valor de la potencia P que se busca, en la recta 4—5 paralela á la dirección dada.

Son aplicables, por último, las consideraciones hechas al tratar de las manivelas, según las cuales puede encontrarse la ley de variación de los esfuerzos y construirse también el polígono teórico, para obtener la relación de espacios recorridos y el rendimiento del mecanismo.

d.—Excéntrica circular doble.

437. Descripción y modo de funcionar.— Tiene por objeto hacer que pueda variarse á voluntad el sentido de la marcha correspondiente á la barra que tiene movimiento rectilíneo; propiedad muy conveniente en muchas máquinas y sobre todo en las locomotoras, en las que se emplea con el nombre de *corredera de Stephenson*.

Consta el aparato *(fig.* 113) de dos excéntricas circulares a y a' montadas sobre el mismo eje, y cuyos centros de figura son diametralmente opuestos. Cada una de ellas está ligada á una biela ó barra de excéntrica, y estas últimas marcharán como es consiguiente en sentido contrario, estando dichas bielas reunidas en sus extremidades por un arco bc, que lleva una ranura para que encaje en ella el botón d de la barra dd' que ha de tener movimiento rectilíneo.

Fácilmente se observa, que marchando en sentido contrario las dos extremidades del arco bc, existirá en éste un pun-

to central que permanezca inmóvil, y que si el botón *d* ocupa esta posición central, será nula la amplitud del movimiento rectilíneo, ó lo que es lo mismo, la barra *dd'* permanecerá en equilibrio. En cambio, cuanto más se aproxime el botón á las extremidades *b* ó *c*, mayor será la amplitud de dicho movimiento, que llegará á su máximo cuando el botón esté en dichos puntos, pero verificándolo en uno ó en otro sentido, según ocupe la región superior ó la inferior del arco con respecto á su punto medio.

438. Un sistema de palancas acodadas, que el maquinista puede mover á voluntad, permite elevar ó bajar el expresado arco, de tal modo, que resbalando la ranura por el botón *d*, puede quedar éste fijo en la posición que sea conveniente para la marcha de la máquina: por último, el contrapeso que se ve en la figura, facilita notablemente la maniobra necesaria para el movimiento del aparato. El cálculo se refiere fácilmente al del caso anterior, por cuya razón nos evitamos incluirlo en este estudio.

ARTÍCULO II

β.— Balanzadera y paralelógramo.

439. **Mecanismos comprendidos en esta clase.**—Estudiaremos solamente, por ser del mayor interés, los mecanismos siguientes:

a.—Paralelógramo de Watt:

b.—Idem de Peaucellier.

El primero realiza la trasformación aproximadamente y es de muy frecuente uso en las máquinas de vapor. El segundo la realiza de un modo exacto y sin grandes complicaciones en su constitución.

a.—Paralelógramo de Watt.

440. **Descripción y trazado.**—Se ha indicado en el párrafo 63 de la teoría cinemática, que cuando dos manivelas están reunidas por una biela, y sus longitudes son iguales, el punto medio de esta última describe una curva que tiene la forma de un ocho prolongado, y que en su parte central puede confundirse sensiblemente con una línea recta. Esta propiedad permite articular en el punto medio *m* (*fig.* 114) de la biela *ab* que reune las dos manivelas $o_1 b$ y *oa*, una barra *mn* provista de las correspondientes guías de movimiento rectilíneo. Se obtiene de este modo el mecanismo conocido con el nombre de *Paralelógramo simple de Watt*, en el cual la manivela *oa* representa la mitad de una balanzadera, y la otra manivela $o_1 b$ recibe el nombre de *brida* ó *contrabalanzadera*. Este mecanismo realiza la trasformación del movimiento circular alternativo que puede tener la balanzadera, en uno rectilíneo y también alternativo de la barra *mn* y recíprocamente.

441. Pero no es esta la disposición ordinaria que suele tener el mecanismo conocido con el nombre de *Paralelógramo de Watt*, si bien sirve de punto de partida para el conocimiento de este. Imagínese, con efecto, que se prolonga la recta *oa* una magnitud $ac = ao$ y que se completa el paralelógramo *acdb* (téngase en cuenta que con esta construcción resultan proyectadas dos rectas en el lado inferior del paralelógramo: una, la biela $o_1 b$ articulada al vértice *b*, y otra el mismo labo inferior *db*). Existiendo articulaciones en todos los vértices del paralelógramo, cualquiera que sea la posición de la balanzadera que se considere (*), el punto *d* se encontrará

(*) Hemos marcado en la *figura* de trazos y puntos una nueva posición del paralelógramo, para que puedan comprenderse mejor los razonamientos que se hacen en el texto. La nueva posición de la brida es la $o_1 b'$, cuya proyección ha dejado de confundirse con la del lado $d'b'$.

siempre en línea recta con los puntos m y o y estará á una distancia od del punto o, que será doble de la magnitud om.

Se deduce que si la línea mn es una línea recta, la dd' descrita por el punto d será también recta, de posición paralela á la primera; pues de no ser así, dejaría de existir la igualdad entre las relaciones $\frac{om}{od}$ y $\frac{om'}{od'}$ que según hemos dicho, deben ser iguales á $\frac{1}{2}$. Como se ve, se realiza una nueva trasformación de movimiento, porque el circular alternativo de la balanzadera produce, no solamente el rectilíneo de la barra mn, sino también el rectilíneo de otra barra dd', que puede articularse en el vértice d del paralelógramo que marcha en línea recta (*). He aquí la idea del mecanismo, derivado, según hemos visto, del llamado paralelógramo simple, el que para mayor claridad hemos dibujado en la figura con líneas más gruesas, con objeto de que se destaque de ella el contorno primitivo que sirve de base para el estudio.

Representamos en las *figuras* 115 y 116 la forma que afecta tanto el paralelógramo simple como al ordinario, para que puedan comprenderse mejor las explicaciones que hemos presentado; indicando también que cuando este mecanismo forma parte de las máquinas marinas, se coloca la balanzadera en la parte inferior para asegurar de este modo la estabilidad del conjunto.

442. El *trazado* se deduce fácilmente de las consideraciones hechas, debiendo tenerse en cuenta que, según las reglas dadas por Watt, la recta dd' que representa la dirección del movimiento rectilíneo principal, debe pasar por el punto h, que divide en dos partes iguales á la sagita cr. Debe observarse que la amplitud del movimiento rectilíneo es igual al doble de $c'r$. En vista de todo, en vista también de los

(*) En las máquinas de vapor, la barra dd' es el vástago del émbolo que comunica el movimiento á la máquina, y mn el vástago de la que recibe el nombre de bomba de aire.

datos ordinarios de la cuestión, se trazarán en primer lugar las posiciones extremas y media de la balanzadera, cuya longitud se fija de antemano, y cuya máxima separación es la amplitud del movimiento rectilíneo, y se marcará después la recta dd' que sirve para el trazado de los lados menores del paralelógramo, cuya longitud está comprendida entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{7}$ de la amplitud referida (*).

118. Cálculo gráfico (**).— Supondremos, como sucede en la práctica, que obre una resistencia Q *(fig.* 117) en la extremidad A de la balanzadera, y la potencia se ejerza en la barra vertical articulada en el vértice a del paralelógramo, que marcha en línea recta (***).

El problema es más complejo que los resueltos hasta ahora, por el mayor número de órganos que constituye este mecanismo, en cada uno de los cuales se desarrolla un esfuerzo, que contribuye, según su naturaleza, á aumentar ó disminuir la acción correspondiente á la potencia ó á la resistencia. Al mismo tiempo, cada una de las articulaciones da lugar al ro-

---

(*) La relación entre los diversos elementos está marcada por Watt de tal modo, que la magnitud oh sea $\frac{3}{2}$ de la amplitud del movimiento rectilíneo, con lo cual resulta ch igual á $\frac{1}{24}$ de dicha amplitud. Por último, la longitud de la balanzadera resulta según dicha regla, ser igual al triplo más $\frac{1}{12}$ de la mencionada amplitud.

(**) Omitimos el estudio analítico, por la gran complicación que presentaría al tomar en consideración cuantas resistencias obran en el mecanismo. El número y clase de ellas queda sentado al practicar el cálculo gráfico que ahora emprendemos. Se presentan cada vez más de relieve las ventajas de este notable procedimiento, que nos evita el empleo de complicadísimos cálculos, los cuales solamente se ven iniciados, mas no completos, en algunos autores.

(***) Téngase en cuenta que la resistencia Q no es otra cosa que la tensión de la biela á que nos hemos referido en el cálculo del mecanismo de biela y manivela con balanzadera. La reunión de aquel estudio con este, constituye el cálculo de la totalidad de los mecanismos que forman una máquina de vapor de Watt.

zamiento correspondiente, que no tomaremos en consideración en la figura principal, para presentarla con la mayor claridad posible.

Se supondrá además, para que el estudio sea verdaderamente práctico, que en el punto *e* que marcha en línea recta, está articulada una barra cuyo movimiento rectilíneo es vertical; la cual, en las máquinas de vapor, corresponde al vástago de la bomba de aire que, como es natural, se opondrá al movimiento del mecanismo con una resistencia Q_1 que debemos suponer conocida.

444. Partiremos para el estudio, del esfuerzo P que corresponde al movimiento rectilíneo principal; el que actuando en el vértice *a* del paralelógramo, dará lugar al desarrollo directo de los esfuerzos P_1 y t_1 que corresponden á las barras *ab* y *ad*, que por concurrir en la articulación *a*, deben hacerse equilibrio con la potencia dada (*). Debe descomponerse, por lo tanto, la fuerza P en las direcciones P_1 y t_1 y esta descomposición, que constituye el *primer problema parcial*, lo mismo que las que han de seguir, la marcamos aparte en la *figura* 117 *(a)* para que aparezca en ella completamente aislado el polígono de las fuerzas. El triángulo 1—2—3 se refiere á la descomposición indicada, y en sus lados hemos puesto las letras que corresponden á cada una de las fuerzas cuya magnitud y dirección representan.

445. Observemos para plantear el *segundo problema parcial*, que la fuerza t_1 encontrada, concurrirá con la t_2 correspondiente á la brida (**) y con la desarrollada en la varilla *dc*

(*) Debe tomarse también en consideración el rozamiento en las guías del movimiento rectilíneo de la barra *aP*, y en este caso esta fuerza se agregará al sistema de las P, P_1 y t_1 para hacerse equilibrio. Como es perfectamente conocido el modo de tomarla en consideración, no lo hacemos en la figura para simplificar cada uno de los problemas parciales, y que se represente con claridad la marcha para el trazado del polígono de las fuerzas de este mecanismo.

(**) Colocamos el punto *h* ó centro de rotación de la brida en una posición distinta de la que debe tener, y más separada del contorno del paralelógramo, para la mayor claridad del dibujo.

para hacerse equilibrio, pues todas ellas obran en la articulación *d*. Pero observando que las fuerzas relativas al lado *dc* son la Q_1 que obra en el punto *c* y la acción Q_2 que se ejerce en el vértice *c* del paralelógramo, resulta que el polígono de las fuerzas de este segundo problema debe cerrarse con las t_1, t_2, Q_1 y Q_2, de las cuales son conocidas en magnitud y dirección las t_1 y Q_1; en dirección solamente la t_2 (sigue la dirección del eje de figura de la brida), y es completamente desconocida la dirección y magnitud de Q_2.

Siguiendo los procedimientos que enseña la Mecánica racional, compondremos las fuerzas conocidas t_1 y Q_1 por medio del triángulo 2—3—4 para encontrar su resultante *S*, cuya dirección trazaremos en la figura principal á partir del punto *m* de intersección de estas fuerzas; y como dicha resultante ha de ser igual y directamente opuesta á la que tiene la resultante de t_2 y Q_2, resulta que estas tres fuerzas habrán de concurrir en el punto *r* de intersección t_2 y *S* (*). Es ya conocida la dirección de Q_2, que provendrá de unir los puntos *c* y *r* y podrá completarse, por lo tanto, el polígono correspondiente á este segundo problema, mediante el trazado de las rectas 2—5 y 4—5 paralelas respectivamente á Q_2 y t_2.

416. Como resultado de los dos problemas parciales que hemos resuelto, puede observarse que obran directamente sobre la balanzadera las fuerzas P_1 y Q_2 de magnitud y dirección conocidas (**). Deberá encontrarse por lo tanto la resultante de dichas dos fuerzas, cuya investigación constituirá el *tercer problema parcial*.

Es bien fácil la resolución de este nuevo problema en lo

(*) En la *figura* 117 *(b)* hemos puesto más clara esta construcción, expresándola con las mismas letras y variando algo las direcciones de las fuerzas, para distinguir perfectamente los diversos puntos y líneas que aparecen algo confusos en la figura principal.

(**) Téngase en cuenta el sentido que corresponde á cada una de estas fuerzas, que debe ser correspondiente al de la potencia *P* para la fuerza P_1 y contrario al que aquella tenga, para la Q_2; que por esta razón la designamos con la letra *Q*, adoptada para las resistencias.

que respecta al valor de la resultante, por ser suficiente construir el polígono correspondiente que obtenemos en la figura mediante el trazado de la recta 3—6 igual y paralela á 2—5, ó sea á Q_2, y la unión de los puntos 1 y 6 que nos da la resultante $P_2 = 1-6$ que se busca (*). Pero si la magnitud es ya conocida, en cambio no conocemos la posición de esta fuerza en el plano de la figura, que es necesaria para que puedan continuarse las investigaciones correspondientes al problema principal.

Nos valdremos, como procedimiento más sencillo para encontrar la posición de dicha resultante P_2, de las propiedades inherentes á los polígonos funiculares que ya hemos utilizado en el curso de estos estudios. Elíjase con este objeto un polo arbitrario *o* que uniremos con los vértices del polígono de las fuerzas 1—3—6 de este problema parcial. Las direcciones de estos radios nos servirán como punto de partida para que, eligiendo un punto cualquiera α en la dirección de Q_2, pueda hacerse el trazado de las rectas $\alpha\beta$ y $\alpha\gamma$ paralelas respectivamente á o—1 y o—6, y por el punto β de intersección de $\alpha\beta$ con P_1 la paralela $\beta\gamma$ á o—3, que nos da por su punto de intersección γ con la $\alpha\gamma$ un punto de la resultante que se busca, cerrándose el polígono funicular de estas fuerzas, que marcamos rayado en la figura para distinguirlo del resto de ella. Se traza por fin la resultante P_2, que debe ser paralela á 1—6; pudiéndose comprobar su posición, mediante la construcción de un nuevo polígono funicular en un punto cualquiera de una de las tres fuerzas.

447. Se comprenderá ya la naturaleza del *cuarto y último problema parcial*, puesto que ejerciéndose el esfuerzo P_2 en el punto b' de la prolongación de la balanzadera, y obrando Q en el extremo opuesto de ella, la determinación de esta resistencia se reduce á la aplicación sencilla de las reglas correspondientes, á la guía C del movimiento circular alternativo que

(*) Marcamos la 3—6 con la letra Q'_2, aun cuando este valor sea el mismo Q_2, para evitar confusiones.

tiene la balanzadera. Se deberá emplear el mismo artificio usado en el párrafo 404, ya que las direcciones de P_2 y Q no se cortan en los límites del dibujo; cuyo artificio marcamos en la figura por líneas de trazos y puntos para encontrar la dirección de la resultante R, con cuyo auxilio puede trazarse ya el triángulo 1—6—7 que resuelve definitivamente la cuestión, al proporcionarnos el valor $Q = 1 - 7$ de la resistencia que se busca.

448. El cálculo hecho nos ha proporcionado el polígono teórico, del cual puede deducirse la *relación de esfuerzos teóricos*, y por lo tanto *la que existe entre las velocidades*, que es inversa de aquella. Ninguna dificultad ofrece la investigación de los esfuerzos réales, para los que debe tenerse en cuenta la dirección de las tangentes á los diversos círculos de rozamiento de todas las articulaciones. Aunque sin arreglo á escala alguna, marcamos en la *figura* 117 (*c*) el sentido que deben tener las diversas tangentes, á las que ponemos las mismas letras que tienen los esfuerzos teóricos que les son correspondientes, en la hipótesis de que el movimiento rectilíneo tenga el sentido que marca la flecha. La construcción de dicho polígono real nos permitirá encontrar la relación de esfuerzos y el *rendimiento*, por las fórmulas usadas en todos los mecanismos (*).

b.—Paralelógramo Peaucellier.

449. Descripción y propiedades.—Este ingenioso mecanismo realiza de un modo exacto la trasformación del mo-

(*) Hemos procurado hacer lo más sencilla posible la figura principal, y que el polígono de las fuerzas resulte de tal modo que puedan desligarse los diversos problemas parciales. Con tal objeto, hemos variado algún tanto las indicaciones que hace Mr. Hermann en su excelente obra que en otras ocasiones llevamos citada, y creemos que con este nuevo modo de presentar el problema, se habrá de conseguir el objeto principal que nos proponemos en estos estudios, cual es tratar todas las cuestiones con la claridad y concisión que sean compatibles con el carácter de generalidad que deben tener.

vimiento circular alternativo de una balanzadera en movimiento rectilíneo. Por esta razón vamos á indicar el modo como está constituído, sin detenernos á establecer la teoría que se relaciona con su apreciación.

La balanzadera *oa* (*fig.* 118), cuyo centro de rotación es el punto *o*, se articula en *a* con un rombo *abcd* que tiene los vértices también articulados; el vértice *d* se reune á una brida *o'd*, cuyo punto fijo *o'* está situado de tal modo, que el círculo de centro *o'* y radio *o'd* pase por el punto *o*. Por último, una segunda brida *oc*, de igual longitud que la balanzadera *oa*, liga el punto *c* con el *o*, estando articulada en ambos. Con el sistema descrito, el punto *b* se moverá sobre una recta *bb'* perpendicular á *oo'*.

450. Para demostrar esta importante propiedad, que caracteriza al mecanismo, observemos que los puntos *o*, *d* y *b* están en línea recta y que los dos últimos se encuentran situados sobre una circunferencia de centro *a* y radio *ad*, y por lo tanto, si se traza la tangente *ot* á esta circunferencia, se verificará

$$od.ob = \overline{ot}^2 = \overline{oa}^2 - \overline{at}^2 = \overline{oa}^2 - \overline{ad}^2$$

Pero si se unen los puntos *d* y *m*, se obtendrá un triángulo *odm* semejante al *obb'*, y su comparación dará

$$od.ob = om.ob'$$

cuya relación, combinada con la precedente, proporciona

$$ob' = \frac{\overline{oa}^2 - \overline{ad}^2}{om} = \text{constante}$$

lo que nos indica ser constante la posición del punto *b'*, proyección de *b* sobre la dirección *oo'*, y por lo tanto que el punto *b* se mueve sobre la recta *bb'* perpendicular á *oo'*.

ESTUDIO VI

APLICACIÓN Á LOS MECANISMOS

DEL TERCER GRUPO CINEMÁTICO

Ó

EMPLEO DE ÓRGANOS FLEXIBLES

CUADRO DEL ESTUDIO 6.º

PRELIMINARES.—Orden del estudio.

- MOVIMIENTOS RECTILÍNEOS.
  - Mecanismos de poleas simples.....
    - Polea fija.
    - Id. movible.
  - Id. de íd. combinadas.
    - Sistema de poleas.
    - Motones ó palanquines.
- MOVIMIENTOS CIRCULARES.
  - Ejes paralelos ...
    - Correas sin fin.
    - Cadenas sin fin.
    - Cables ó trasmisiones telodinámicas.
  - Id. no paralelos.....
    - Trasmisión por correas.
    - Id. por cables.
- MOVIMIENTOS COMBINADOS.
  - Torno y sus derivados.....
    - Torno ordinario.
    - Id. diferencial.

PRELIMINARES

451. Orden del estudio.—La naturaleza de los nuevos órganos que van á emplearse, como son las correas, cadenas, cuerdas y cables es tal, según se ha indicado en la teoría cinemática, que no presentan resistencia alguna á los esfuerzos que tiendan á disminuir su longitud, y por el contrario, resisten perfectamente á los que tratan de ejercer un alargamiento. Las condiciones de los mecanismos comprendidos en este grupo, deberán, por lo tanto, ser distintas de las correspondientes á los anteriores, ya que los órganos rígidos deben estar construidos de modo que resistan esfuerzos en uno y otro sentido; en otros términos, de modo que no se deformen, ni por los esfuerzos que tienden á alargarlos, ni por los que tienden á acortarlos.

Por tales razones, en los mecanismos que ahora han de ocuparnos, no podrán ser exclusivamente empleados los órganos flexibles, debiendo entrar en su constitución los cuerpos rígidos que sean indispensables, que, como se ha indicado en el párrafo 73, tienen teóricamente la forma cilíndrica, recibiendo el nombre de tambores ó poleas, y presen-

tando en la práctica las formas adecuadas al órgano flexible que debe usarse, los cuales han sido mencionados en el estudio tercero. Como es natural, dichas poleas ó tambores están provistos de las correspondientes guías del movimiento circular de que se hallan animados.

Mas deberá tenerse presente que este movimiento circular no constituye base para la clasificación común á todos los grupos, y que al tratar de la primera especie, que se refiere á dos movimientos rectilíneos, se considera implícitamente que estos movimientos son los correspondientes á los puntos de aplicación de la potencia y de la resistencia, si bien parte de la cuerda vaya adaptada sobre el tambor ó polea que la sirve de guía, y participe, como es natural, de su movimiento circular. En otros términos: las poleas ó tambores pasan en este caso á ser verdaderas guías del movimiento de los órganos flexibles, y en tal concepto las consideraremos en este estudio, cuya subdivisión es idéntica por otra parte á la que hemos hecho en los estudios anteriores.

CAPÍTULO PRIMERO

Primera especie.—Movimientos rectilíneos

452. Mecanismos comprendidos en esta especie.—Los subdiviremos en dos clases principales, según que entre en su composición una sola polea ó que entren varias, y de este modo el estudio quedará presentado en la forma siguiente:

Clase *A*.—Mecanismos de polea simple.

Clase *B*.—Mecanismos de poleas combinadas.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Mecanismos de polea simple

453. Tipos correspondientes á esta clase.—Son dos los que debemos considerar, dado el modo de usarse las poleas y dada la observación de que su eje puede ser de posición invariable ó tener un movimiento de ascenso ó descenso, correspondiendo estas propiedades del eje á los casos siguientes:

a.—Polea fija.

b.—Polea movible.

a.—Polea fija.

454. Fórmulas para el cálculo de este mecanismo.— Conocida su naturaleza y forma especial, según deban usarse cuerdas ó cadenas, indicaremos que su principal objeto es variar la dirección de un órgano flexible, que en general está destinado á la elevación de pesos. Las poleas pueden estar provistas de unos muñones centrales que giran dentro de las guías correspondientes, ó bien pueden tener practicado en su centro un orificio por el cual pasa el eje fijo, y que constituye por lo tanto la guía de movimiento de éste. Para fijar las ideas, consideraremos este último caso, representado en la *figura* 119, *lám.* 15. Se trata de vencer una resistencia Q ligada á uno de los extremos de la cuerda, aplicando en el otro extremo una potencia P que sea la extrictamente indispensable para satisfacer dicho objeto.

455. Para establecer la ecuación correspondiente á este mecanismo, que será aplicación directa de la que hemos encontrado como perteneciente á las máquinas en régimen, observemos que al ponerse la polea en movimiento, por efecto de la adherencia de la cuerda se desarrollan trabajos nocivos, que son debidos al rozamiento de muñones el uno, y á la rigidez de las cuerdas el otro, los cuales sabemos tomar en consideración, según las reglas generales que nos ha proporcionado la teoría dinámica. Si abc representa la circunferencia primitiva de la polea y la cuerda abraza el arco ab, los puntos a y b extremos de éste serán los de aplicación de las fuezas Q y P. Pero recuérdese la regla del párrafo 115 relativa á la rigidez de las cuerdas: según ella, el efecto de esta fuerza resistente equivale á un aumento en el brazo de palanca de la resistencia, y á una disminución en el de la potencia, siendo dicho aumento y disminución iguales al llamado radio de rigidez. Llamando $\rho_1 = aa' = bb'$ á esta magnitud, y $r = oa' = ob$ al radio de la polea, los brazos de palanca de las expresadas fuerzas vendrán representados por las magni-

tudes $oa' = r + \rho_1$ y $ob' = r - \rho_1$, las que deberán tenerse en cuenta al establecer la ecuación de trabajos.

Con respecto al rozamiento de muñón, nada habremos de indicar que no haya tenido frecuente aplicación en los mecanismos anteriores; y recordando que con la nomenclatura sentada en ellos dicho valor es $F = Nf = Rf_1$, deberá hallarse el valor de la resultante R, igual y directamente opuesta á la reacción desarrollada, marcada con la misma letra R en nuestra figura. Dicho valor es

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ)}$$

y de él se deduce el del rozamiento

$$F = f_1\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ)}$$

Para incluir este valor en la ecuación de trabajos, deberemos observar que su punto de aplicación es el m, distante del primitivo punto de apoyo de la polea una cantidad tal, que el ángulo de R con la normal N sea igual al de rozamiento φ (párrafos 106 y 108), y por lo tanto el brazo de palanca de esta fuerza será el mismo radio del muñón que representaremos por ρ.

456. Puede ya establecerse la ecuación de las máquinas en régimen $T_m = T_u + T_f$ en vista de que los caminos recorridos por los puntos a', b' y m durante una rotación α de la polea, son respectivamente

$(r + \rho')\alpha$..... para el punto a'.
$(r - \rho')\alpha$..... para el b'.
$\rho\alpha$..... para el m,

y según ellos, la mencionada ecuación toma la forma

$$P(r - \rho')\alpha = Q(r + \rho')\alpha + f_1\alpha\rho\sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(PQ)} \quad (a)$$

en la que puede suprimirse el factor α común á todos sus términos, y haciendo desaparecer el radical, despejar el valor

de P en la ecuación de segundo grado que resulta. Del doble signo que aparece en la fórmula, habrá de tomarse solamente el positivo, puesto que el otro nos proporciona para la potencia un valor menor que el correspondiente á las resistencias, lo que es contrario á las condiciones mecánicas del problema.

457. La ecuación (a) se simplifica notablemente en el caso frecuente de que *las fuerzas P y Q sean paralelas*. El valor de la cantidad subradical se reduce á $(P+Q)^2$, y la expresada ecuación toma la forma

$$P(r-\rho') = Q(r+\rho') + f_1\rho(P+Q) \qquad (a')$$

de la cual se deduce inmediatamente la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = \frac{r+\rho'+f_1\rho}{r-\rho'-f_1\rho} \qquad (b)$$

y si no se toma en consideración la rigidez de la cuerda, todavía aparece bajo la forma más sencilla

$$\frac{P}{Q} = \frac{r+f_1\rho}{r-f_1\rho} \qquad (b')$$

458. Se terminará la *apreciación del mecanismo* encontrando la relación de velocidades lineales y el rendimiento, según las reglas de que hemos hecho uso en todos los casos; así la primera se obtendrá de la (b'), haciendo $f_1 = o$, con lo que resulta

$$\frac{s_p}{s_q} = 1 \qquad (c)$$

cuya fórmula nos dice ser iguales los caminos recorridos por los puntos de aplicación de los esfuerzos, y por lo tanto las velocidades correspondientes, que está de acuerdo con lo indicado en la teoría cinemática.

Resulta el rendimiento de multiplicar invertidas las fórmulas (*c*) y (*b'*), con lo que se obtiene el valor

$$R.^{o} = \frac{r - f_1 \rho}{r + f_1 \rho} \qquad (d)$$

Nos indica esta expresión la conveniencia de disminuir en lo posible el radio ρ del ~~la polea~~ número; tanto, que si pudiera asignarse el valor $\rho = o$, condición irrealizable en la práctica, se obtendría la unidad para valor del rendimiento, como sucede á las máquinas teóricas. Es de observar que siendo inversas las fórmulas (*d*) y (*b'*), esta condición de que disminuya el valor de ρ proporciona valores decrecientes para la relación de esfuerzos, que por este concepto queda también favorecida; pues debe tratarse siempre de que la potencia necesaria para vencer una resistencia determinada sea lo menor posible (*).

Los *valores de los trabajos* desarrollados por cada una de las fuerzas, son ya perfectamente conocidos, puesto que sabemos la posición de cada uno de los puntos de aplicación; así, por ejemplo, el trabajo correspondiente al rozamiento desarrollado en una vuelta en el caso que P y Q sean paralelas, tendrá por valor

$$T_f = F\, 2\pi\rho = f_1 (P + Q)\, 2\pi\rho \qquad (e)$$

y si en un minuto da n vueltas, el que corresponde á este tiempo será:

$$T_f = n f_1 (P + Q)\, 2\pi\rho \qquad (e')$$

459. Cálculo gráfico.—Consideremos el caso en que las fuerzas P y Q formen un cierto ángulo, y recordemos las re-

(*) Hemos establecido las ecuaciones tomando en consideración tanto el rozamiento como la rigidez de cuerdas, por ser esta la primera ocasión que se nos presenta de incluir en los cálculos esta resistencia nociva; mas presentada esta aplicación, dejaremos de incluirla en adelante, para deducir directamente las fórmulas que, como las (*b'*) y (*d*), son de aplicación práctica.

También al presentar el cálculo gráfico, tomaremos en consideración en este ejemplo la rigidez de la cuerda, pero no lo efectuaremos en las aplicaciones subsiguientes.

glas dadas para tomar en consideración el rozamiento de muñones y la rigidez de las cuerdas. Según la regla marcada para esta última resistencia, deben variarse los brazos de palanca de las fuerzas teóricas, como indica la *figura* 120, y de este modo su punto *o* de intersección servirá de base para el trazado de la resultante R, que según la regla para el rozamiento de muñones, debe ser tangente al círculo de rozamiento de estos. Trazado este último, se podrá marcar la dirección de la resultante R escogiendo la tangente oR que desfavorezca la potencia; con lo que queda reducido el problema á la construcción del polígono de las fuerzas, para el que sirva de dato el valor y dirección de Q y las direcciones de R y P. Tomada la magnitud $0-1=Q$, la recta $1-2$ paralela á P nos da el valor de esta última, obteniendo en $0-2$ la resultante de P y Q.

Para la construcción del *polígono teórico*, basta considerar las direcciones P_0 y Q_0, tangentes á la circunferencia primitiva de la polea, cuyo punto de intersección o' debe unirse con el centro de esta para obtener la resultante teórica R_0. Marcada la magnitud $o'-1'=Q_0=Q$ y trazada la $1'-2'$ paralela á P_0, se obtiene el triángulo $o'-1'-2'$ como expresión del cálculo de los esfuerzos teóricos, cuya comparación con los reales nos da el medio de hacer la apreciación del mecanismo.

460. En el caso que *las fuerzas P y Q sean paralelas*, la construcción marcada en la *figura* 121 se reduce á encontrar una cuarta proporcional á las magnitudes Q, ab y bc (no tomando en consideración la rigidez de cuerdas), supuesto que el punto de contacto de la resultante R con el círculo de rozamiento, es el b en que este encuentra el diámetro ac. El valor de R resulta, como es natural, igual á $P+Q$ y el esfuerzo teórico cP_0 igual á la resistencia dada aQ, puesto que la cuarta proporcional es la que existe entre las magnitudes Q, ao y co, siendo iguales estas últimas (*).

(*) Se nos presenta ocasión de comprobar otra vez las ventajas que proporciona el cálculo gráfico, por la facilidad que existe al deducir directamente la

b.—Polea movible.

461. Fórmulas correspondientes.—Difiere este mecanismo del anterior, en que en lugar de quedar libres los dos ramales de la cuerda, se fija uno de ellos para que ejerciéndose la potencia en el otro, pueda obrar la resistencia directamente en el mismo eje de la polea; la que en este caso, representado en la *figura* 122, tendrá un movimiento de ascenso.

Las ecuaciones se deducirán, por lo tanto, de las obtenidas para la polea fija, debiendo sustituir en vez de Q el valor que corresponde á la tensión T del ramal fijo ab y en vez de R la resistencia Q. De este modo, y omitiendo la resistencia debida á la rigidez, la ecuación *(a)* toma la forma

$$Pr = Tr + f_1 \rho Q \qquad (f)$$

en la que se ha suprimido ya el factor común α á todos los términos. Al mismo tiempo, la que proporciona el valor de R que pasa á ser la resistencia útil Q, se reduce á

$$Q^2 = P^2 + T^2 + 2\,T\,P\,cos\,(TP) \qquad (g)$$

y de estas dos ecuaciones podrá deducirse la relación de esfuerzos correspondiente al caso en que P y T formen un cier-

---

fórmula *(b')* de la construcción marcada en la figura, pues según ella, la relación de esfuerzos toma el valor

$$\frac{P}{Q} = \frac{ab}{bc}$$

pero teniendo en cuenta que los valores de ab y ac son recpectivamente $ab = ao + ob$ y $bc = oc - ob$ y que el valor de ob es $\rho\,sen\,\varphi = \rho f_1$ ya encontrado para el radio de rozamiento, la proporción se trasforma en

$$\frac{P}{Q} = \frac{r + \rho f_1}{r - \rho f_1}$$

cuya fórmula es idéntica á la establecida en el estudio analítico.

to ángulo, bastando eliminar T entre ambas, como se hizo con R en la polea fija, ya que estas cantidades no sean datos de la cuestión.

462. Pero si P y T son paralelas, como sucede ordinariamente, la ecuación (g) se simplifica reduciéndose á

$$Q^2=(P+T)^2 \qquad Q=P+T \qquad (g')$$

y la eliminación resulta mucho más sencilla por ser de primer grado las ecuaciones (f) y (g'); basta sustituir en la primera el valor $T=Q-P$ deducido de la segunda para obtener la relación

$$\frac{P}{Q}=\frac{r+f_1\rho}{2r} \qquad (h)$$

que nos proporciona la apreciación del mecanismo; pues haciendo $f_1=o$ se obtiene

$$\frac{s_p}{s_q}=2 \qquad (i)$$

y multiplicando invertidas las dos últimas fórmulas

$$R.^o=\frac{r}{r+f_1\rho} \qquad (j)$$

deduciéndose de todas ellas consecuencias análogas á las halladas para la polea fija, y debiendo tener presente al encontrar los trabajos desarrollados, las consecuencias de la fórmula (i), según la cual, el camino recorrido por el punto de aplicación de la resistencia es la mitad del que corresponde á la potencia.

463. Comparación con la polea fija.—Si bien puede hacerse el examen comparativo de las relaciones de esfuerzos que corresponden á la máquina real, para deducir la bondad relativa de ambas poleas, será más cómodo hacer esta comparación con las relaciones á que obedecen las máquinas teóricas, puestas de manifiesto en las fórmulas (i) y (c). Estas,

que nos representan las relaciones de velocidades, son inversas, como se sabe, de las que existen entre los esfuerzos teóricos, pudiendo por lo tanto marcarse las relaciones de estos, que son:

$$\text{En la polea fija} \ldots\ldots\ldots \frac{P_0}{Q_0} = 1$$

$$\text{En la polea movible} \ldots\ldots \frac{P_0}{Q_0} = \frac{1}{2}$$

Resulta, que así como la polea fija en nada favorece al esfuerzo, en cambio la movible le favorece notablemente, necesitándose para vencer una resistencia determinada, una potencia mitad de ella. *La bondad de la polea movible con relación á los esfuerzos, es doble que en la polea fija, y esta última sólo satisfará al objeto de cambiar la dirección del esfuerzo, sin favorecer en nada la magnitud de éste.*

464. Cálculo gráfico.—Marcada la posición de la polea y el punto *a* donde debe quedar suspendida *(fig.* 122), la tangente *ab* á la circunferencia primitiva de aquella nos marcará la dirección de la tensión *T*. Como es un dato la magnitud de la resistencia *Q* y su dirección debe ser vertical por estar suspendida del eje de la polea, puede marcarse su posición, que por ser resultante de las fuerzas *P* y *T*, deberá ser tangente al círculo de rozamiento. Trácese, por lo tanto, este, y la tangente vertical que desfavorezca á la potencia, y se obtendrá de este modo el punto de concurso *o* de las tres fuerzas; pudiendo marcarse la posición de *P* por el trazado de la tangente *od* á la circunferencia primitiva.

El problema queda planteado en los términos ordinarios, pero sirviendo como dato la magnitud de la resultante *Q*, la cual es el punto de partida para la construcción del triángulo o—1—2 que resuelve el problema.

Para el trazado del *polígono teórico*, basta observar que la resistencia Q_0 debe pasar por el centro *c* de la polea. El nuevo punto de concurso de las fuerzas es *o'* y la dirección de la potencia teórica la de *o'd'*. Con estos datos se construye fá-

cilmente el triángulo $o' - 1' - 2'$ que es expresión del cálculo correspondiente á la máquina teórica, y que en unión del polígono real $o - 1 - 2$ nos proporciona la apreciación del mecanismo.

465. Si las *fuerzas P y T son paralelas*, como en la *figura* 123, se reduce la construcción á dividir la resistencia ó resultante Q en dos partes inversamente proporcionales á las magnitudes cb y ab, las cuales representarán respectivamente los valores de P y de T, según indica la figura; observándose también que la potencia teórica P_0 resulta ser la mitad de Q como habíamos deducido en el estudio analítico (*).

ARTÍCULO II

Clase B.—Mecanismos de poleas combinadas.

466. Tipos que comprende esta clase.—Si bien pueden hacerse muchas combinaciones con las poleas fija y movible, para que queden en condiciones de favorecer notablemente la potencia, todas ellas tienen por fundamento las que vamos á explicar, cuyo cálculo puede servir de norma en todos los casos (**). Distinguiremos las siguientes combinaciones:

a.—Sistema de poleas.

b.—Motones ó palanquines.

c.—Polea diferencial.

(*) De igual modo que en la polea fija, puede deducirse directamente la fórmula (h) bastando establecer la proporción $\frac{bb'}{cc'} = \frac{ab}{ac}$ y sustituir en vez de bb' y cc' sus respectivos valores P y T, haciendo lo propio con los de ab y ac en los términos indicados en la correspondiente nota.

(**) Las combinaciones á que se refiere el texto se encuentran perfectamente clasificadas en el tratado de *Mecánica Elemental* de D. Ramiro de Bruna, que sirve de texto en la Academia General Militar. Su cálculo no ofrecerá dificultad alguna, por reducirse, según la naturaleza del mecanismo, á alguna de las combinaciones que presentamos.

a.—Sistema de poleas.

467. Descripción y estudio analítico.—Se combinan frecuentemente las poleas movibles de tal modo, que la potencia en cada una sea precisamente la resistencia de la anterior. La polea inferior *A* (*fig.* 124) sostiene el peso que debe elevarse, y está rodeada por un cordón ó cadena que tiene una de sus extremidades fija en *a*, mientras que la otra extremidad está suspendida de la polea inmediata *B*, ejerciendo en ella el papel de resistencia. A su vez esta polea está rodeada por un nuevo cordón, fijo en *b* por una de sus extremidades, estando suspendida la otra de la siguiente polea movible. Se repiten efectos análogos en todas ellas hasta la última, cuyo cordón rodea á una polea fija *C* para cambiar el sentido de la potencia, y que pueda ejercerse ésta en las más favorables condiciones. En nuestra figura suponemos que existan únicamente dos poleas movibles, á pesar de lo cual generalizaremos las explicaciones para el caso en que sea cualquiera el número de ellas. Servirá de punto de partida la fórmula (*h*) correspondiente á la polea movible, de la cual, representando por *a* el segundo miembro que deberá suponerse constante para todas las poleas por ser iguales, se deducirá

$$P = a\,Q$$

y llamando T_1, T_2, T_3..... á las tensiones que sirven de esfuerzos intermedios entre unas y otras poleas, según indica la figura, podrán establecerse las siguientes ecuaciones (*)

$$\begin{aligned} P = T_1 &= a\,T_2 \\ T_2 &= a\,T_3 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \\ T_n &= a\,Q \end{aligned}$$

en las cuales representa *n* el número de poleas movibles.

(*) Suponemos que no exista rozamiento en la polea fija, para la mayor sencillez de los cálculos.

Multiplicando miembro á miembro todas estas ecuaciones quedarán eliminadas las candidades T_2, T_3 ..... obteniéndose la expresión

$$P = a^n Q$$

y de ella el valor de la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = a^n = \left(\frac{r + f_1 \rho}{2r}\right)^n \qquad (k)$$

Partiendo de esta relación puede determinarse cuanto es referente á la *apreciación del mecanismo*, como indican las siguientes fórmulas:

$$\frac{s_p}{s_q} = 2^n \qquad (l)$$

$$R.^0 = \frac{r^n}{(r + f_1 \rho)^n} \qquad (m)$$

La fórmula (l), inversa de la relación de esfuerzos teóricos, nos indica la ley de variación de estos á medida que vaya aumentando el número de poleas movibles; resultando que es conveniente para favorecer la potencia, aumentar cuanto sea posible dicho número.

468. Cálculo gráfico.—Conocidas las ideas que han presidido al cálculo de las poleas fija y movible, ninguna dificultad presenta la combinación que puede hacerse, que para su mejor inteligencia la marcamos en la figura, en la que ha servido de punto de partida la resistencia Q, siendo incógnita el valor que corresponde á P. No hemos marcado los esfuerzos teóricos, para la mayor sencillez; pero pueden deducirse inmediatamente con objeto de obtener la consecuencia final que hemos presentado en el estudio analítico, del cual es este una simplificación notable.

b.—Motones ó palanquines.

469. Descripción.—Se compone este mecanismo de dos armaduras, en cada una de las cuales van montadas varias poleas, siendo en general el mismo el número de las que contiene cada armadura. En unos casos las poleas son de diámetros desiguales y están montadas sobre distintos ejes; y en otros son iguales los diámetros de todas ellas, y tiene cada armadura un solo eje para todas sus poleas. El primero está representado en la *figura* 125 y el segundo en la 126, observándose en una y otra el modo de pasar el cordón de una á otra polea, y pudiendo verse también que debe quedar fija una armadura, mientras la otra tiene movimiento de traslación.

Estos aparatos se destinan para la elevación de grandes pesos y para ejercer esfuerzos considerables de tracción, empleándose principalmente los palanquines de la *figura* 126 por su pequeño volumen, en las faenas de Artillería. De todos modos, la potencia se ejerce en el extremo libre de la cuerda, y la resistencia actúa en un gancho de que va provista la armadura inferior. También la superior lleva otro gancho colocado en idéntica disposición, para poder suspender el aparato ó colocarlo del modo conveniente.

470. Estudio analítico.—Refiriéndonos á la disposición de la *figura* 126, por ser la más frecuentemente usada, llamemos como en el caso anterior, T_1 T_2..... las tensiones correspondientes á los diversos trozos del cordón, por el orden que van siendo arrollados, y sea P la correspondiente al extremo libre, que hace, según sabemos, el papel de potencia del mecanismo. Puesto que todas las poleas son iguales y de la misma construcción, las dos fuerzas aplicadas á cada una de ellas en los correspondientes trozos del cordón que las rodea, deberán satisfacer á la ecuación (b') correspondiente á la polea fija, en la cual r y ρ conservarán los mismos valores para todas las poleas. Llamando a al valor constante del segundo

miembro de esta ecuación y despejando el numerador del primer miembro, podremos escribir el grupo siguiente de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= a\,T_1 \\ T_3 &= a\,T_2 = a^2\,T_1 \\ T_4 &= a\,T_1 = a^3\,T_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ T_n &= a\,T_{n-1} = a^{n-1}\,T_1 \\ P &= a\,T_n = a^n\,T_1 \end{aligned}\right\} \quad (n)$$

en las cuales representa n el número total de poleas que existe entre ambas armaduras.

A estas ecuaciones deberá añadirse la necesaria para el equilibrio de la chapa movible, que estableceremos mediante la hipótesis de que todos los trozos del cordón sean paralelos, cual puede admitirse por ser muy pequeña la oblicuidad que pueden tener. Esta ecuación proviene de ser la resistencia total Q la resultante de todas las tensiones, y su valor, según la hipótesis hecha,

$$Q = T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_n$$

Podrán eliminarse fácilmente los valores de las tensiones T_1, T_2..... para obtener la relación de esfuerzos, bastando deducir del sistema (n) de ecuaciones, la suma $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ para lo cual deberemos agregar á dicho sistema la identidad $T_1, = T_1$ obteniéndose de este modo

$$Q = T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_n = T_1 + T_1 a + T_1 a^2 + \ldots\ldots + T_1 a^{n-1} \qquad (o)$$

sacando factor común á T_1 y haciendo la suma de los términos de la progresión que resulta, se deduce

$$Q = T_1 \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

y de esta puede despejarse el valor

$$T_1 = \frac{Q\,(a-1)}{a^n-1}$$

para sustituirlo en la última de las ecuaciones (n) no tomada hasta ahora en consideración, con lo que resulta

$$P = Q\,a^n\,\frac{a-1}{a^n-1}$$

quedado por fin deducida la relación de esfuerzos

$$\frac{P}{Q} = a^n\,\frac{a-1}{a^n-1} \qquad (p)$$

471. Al hallar *la relación de espacios recorridos* debe hacerse $f=o$ en la fórmula anterior, para tomar la relación inversa de (p); presentándose la particularidad de que siendo $a=1$ según se deduce de su expresión, obtenida en el párrafo 457, resulta igual á $\frac{o}{o}$ la relación que se busca. Mas puede salvarse la indeterminación, observando que al hacer en la ecuación (o) la hipótesis $a=1$ que nos ha conducido á tal resultado, el segundo miembro es la suma de n términos iguales á la unidad, y por consiguiente

$$Q_0 = n\,T_1$$

y de aquí el valor

$$T_1 = \frac{Q_0}{n}$$

que sustituído en la última de las ecuaciones (n) nos da la potencia teórica

$$P_0 = T_1 = \frac{Q_0}{n}$$

Es la relación de esfuerzos teóricos igual, por lo tanto, á la fracción $\frac{1}{n}$ y la de espacios recorridos

$$\frac{s_p}{s_q} = n \qquad (q)$$

472. Resulta, por último, el *rendimiento* según las reglas conocidas, igual á la expresión

$$R.^0 = \frac{a^n - 1}{na^n(a-1)} \qquad (r)$$

pudiendo discutirse los valores (p), (q) y (r), y compararlos con los obtenidos para las poleas fija y movible, deduciéndose la mayor bondad del mecanismo que nos ocupa.

473. Cálculo gráfico.—Representemos por A (*fig.* 127) la proyección de todas las poleas contenidas en la armadura superior, que para fijar las ideas supondremos sean dos solamente, y sea B la proyección de las que tiene la armadura inferior. Supongamos que el cordón está sujeto á un gancho de la armadura superior y de él pasa á arrollarse en e sobre una de las poleas inferiores, siguiendo después la dirección fdc..... de modo que hace girar á las poleas en sentido de las flechas marcadas en la figura. Dada la dirección que hemos prescrito y suponiendo dibujados los círculos de rozamiento de cada uno de los ejes, se podrá observar que la carga Q es la tangente de la izquierda trazada al círculo de rozamiento del eje inferior, y la reacción R que se desarrolla en la armadura superior, es la tangente á la derecha de su círculo de rozamiento.

Si conociéramos la tensión del primer trozo de cordón que suspendido de la armadura superior rodea el arco ef, fácilmente vendríamos en conocimiento de las tensiones siguientes, pues están relacionadas unas y otras del mismo modo que la potencia y resistencia de la polea fija. Supongamos,

pues, conocida dicha primera tensión, y para facilitar el cálculo, trácese una recta $o\,o'$ normal á los cordones, y tómese en $o-1$ la magnitud arbitraria que fijamos para dicha tensión. El cálculo ó construcción hecha en la polea fija, refiriéndonos ahora á los trozos de cordón que se arrollan en la dirección $e\,f$, puede trasportarse paralelamente á sí mismo á la recta $o\,o'$ en que se han marcado sus puntos a y b de intersección con Q y R, de tal modo, que la magnitud $a\,b$ será igual al diámetro del círculo de rozamiento. Dicho cálculo se reducirá por lo tanto á unir el punto 1 con a y la magnitud $o'-2$ que esta recta marque sobre $o'-d$ será la tensión del segundo trozo.

Como la segunda tensión $o'-2$ sirve de resistencia en la polea A y arrollándose la cuerda sobre el arco $d\,c$, pende de c el trozo donde se ejerce la tercera tensión, se obtendrá el valor de esta uniendo 2 con b y prolongando esta recta hasta su encuentro en 3, para marcar la magnitud $o-3$ correspondiente á este trozo. Repetida tal construcción alternativamente con los puntos a y b, se van obteniendo las diversas magnitudes $o'-4$, $o-5$..... y si es dos el número de poleas que contiene cada armadura, como hemos supuesto, esta última será la correspondiente al extremo libre de la cuerda.

474. Resulta de esta sencilla construcción que si $o-1$ fuese el verdadero valor de la primera tensión, las restantes magnitudes corresponderían á las demás tensiones, siendo la última $o-5$ el valor de la potencia que se busca. Pero existe la condición de ser Q la resultante de todas las tensiones, y por lo tanto igual á su suma, ya que suponemos á estas paralelas, por lo cual puede descomponerse como indica la figura, en partes proporcionales respectivamente á las cuatro primeras magnitudes encontradas, para obtener los valores T_1, T_2, T_3 y T_4 que á dichas tensiones corresponden. Finalmente, ya que la última magnitud guarda con P la misma relación que las primeras tienen con las tensiones, bastará completar la construcción de proporcionalidad que indica la figura, para obtener el valor de la potencia que se busca.

475. El cálculo de la máquina teórica, proporcionándonos valores iguales para todas las tensiones y para la potencia teórica, nos indicaría ser esta la cuarta parte de la resistencia, ó en general la enésima parte de esta, si n representa el número total de poleas que existe entre ambas armaduras; lo que está de acuerdo con las fórmulas halladas en el estudio analítico.

CAPÍTULO II

Segunda especie.—Movimientos circulares

476. Subdivisión de esta especie.—Aun cuando en todos los casos de movimientos circulares hemos considerado las diversas clases de ejes paralelos, ejes que se cortan y ejes que no se cortan ni son paralelos, al estudiar los mecanismos que deben verificar la trasmisión por medio de órganos flexibles, pueden las dos últimas clases englobarse en una sola, por realizar la trasformación de un modo idéntico en una y otra. Por esta razón subdividiremos los mecanismos de esta especie del modo siguiente:

Clase *A*.—Ejes paralelos.

Clase *B*.—Ejes no paralelos.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Ejes paralelos

477. Mecanismos que comprende esta clase.—Consideraremos los tres tipos siguientes de mecanismos que realizan la trasformación indicada:

a.—Correas sin fin.
b.—Cadenas sin fin.
c.—Cables ó trasmisiones telodinámicas.

a.—Correas sin fin.

478. Bases para el cálculo de esta trasmisión.—Conocida la naturaleza del mecanismo y su teoría cinemática que hemos presentado en el estudio primero, debemos hacer aplicación de las leyes que proporciona la teoría dinámica, fundándose en las cuales habrán de explicarse dos teoremas fundamentales. El primero, debido á Prony, se ocupa del resbalamiento de una cuerda ó correa sobre la superficie de un cilindro ó tambor, y el segundo, debido á Poncelet, se refiere á la variación de tensión que sufren los dos trozos de las cuerdas ó correas sin fin empleadas en las trasmisiones. Ambos teoremas los vamos á exponer sucesivamente, para desligar los diversos conceptos y que pueda presentarse con la mayor claridad el cálculo de este mecanismo.

479. Para estudiar el *teorema de Prony*, consideremos una cuerda ó correa arrollada sobre la superficie de un cilindro, solicitada en una de sus extremidades por una potencia P y en la otra por una resistencia Q. Para que la cuerda pueda resbalar sobre el cilindro, que supondremos fijo, la potencia P deberá vencer, como es natural, no sólo la resistencia Q, sino también el rozamiento desarrollado entre la cuerda y la superficie del cilindro, siendo su valor igual á la suma de ambas resistencias. La investigación de este rozamiento, fundada en las leyes generales establecidas en la teoría dinámica, nos proporcionará el valor de la potencia P; tratemos, pues, de encontrar dicha resistencia nociva.

Con tal objeto, considérense *(fig.* 128) dos elementos consecutivos ab y bc de la cuerda, y si representamos por T y T' las respectivas tensiones de estos elementos, es claro que el valor de T' diferirá de T en una cantidad que es precisamente la medida de la resistencia elemental que corresponde al

rozamiento. Esta resistencia elemental, que llamaremos dT, es producida, como se sabe, por la presión normal que puede representarse por N, y su valor es igual, según una regla bien conocida, al producto Nf, en que f es el coeficiente de rozamiento de la correa sobre el tambor. Pero si llamamos $d\alpha$ al ángulo de contingencia $T\,b\,T'$, el valor de N estará representado por $T'\,sen\,d\alpha$ ó simplemente por el producto $T\,d\alpha$, en vista de que T' difiere de T una cantidad infinitamente pequeña y que sucede lo mismo con respecto á los valores de $d\alpha$ y $sen\,d\alpha$. Puede, por fin, establecerse para valor aproximado del rozamiento elemental de la correa sobre el tambor, la expresión siguiente:

$$dT = fN = f\,T\,d\alpha$$

480. Integrando esta expresión entre los límites correspondientes á los extremos del arco abrazado por la correa, cuyos límites son P y Q para el valor de T, y o y α para el que corresponde al ángulo, se obtendrá el valor de P que se busca. La fórmula preparada para la integración, ó sea después de separadas las variables, es

$$\frac{dT}{T} = f\,d\alpha$$

é integrada entre los límites indicados,

$$lP - lQ = l\frac{P}{Q} = f\alpha$$

ó bien expresándola en otra forma,

$$\frac{P}{Q} = e^{f\alpha} \qquad (a)$$

en la que e representa la base del sistema de logaritmos Neperianos. En esta expresión se observa que el *valor de P crece*

muy rápidamente cuando α aumenta, deduciéndose por lo tanto que *para aumentar el rozamiento de las cuerdas ó correas, debe aumentarse cuanto sea posible el valor gradual del ángulo abrazado por éstas, cualquiera que sea el radio del tambor* (*).

Para mayor comodidad en los cálculos de la relación entre los valores de P y Q, ó en otros términos, entre las tensiones de los dos trozos de cuerda ó correa arrollados sobre un tambor, se inserta en el lugar correspondiente la *tabla número* 9, en la que se expresan los distintos valores que toma la expresión $e^{f\alpha}$ cuando varían las circunstancias en que puede encontrarse la trasmisión.

481. El *teorema de Poncelet* se refiere directamente á la comunicación del movimiento por medio de cuerdas ó correas sin fin, y para su explicación supondremos (*fig.* 129) una trasmisión de esta naturaleza. Es natural que el movimiento

---

(*) Para convencerse de la gran influencia que ejerce el valor gradual del ángulo α en el rozamiento de las correas, basta examinar los valores numéricos que corresponden á la relación $\frac{P}{Q}$ cuando varia α. Si para fijar las ideas se supone $f = 0{,}20$, los correspondientes cálculos proporcionan

Para una semicircunferencia, $\alpha = \frac{R\pi}{R} \ldots \frac{P}{Q} = 1{,}8744$

Para una circunferencia, $\alpha = 2\pi \ldots \frac{P}{Q} = 3{,}5136$

Si la cuerda da dos vueltas, $\alpha = 4\pi \ldots \frac{P}{Q} = 12{,}3453$

Si da tres vueltas, $\alpha = 6\pi \ldots \frac{P}{Q} = 43{,}3763$

Se ve palpablemente con esta tabla la posibilidad de equilibrar á una gran fuerza P con una pequeña resistencia Q, haciendo que la cuerda dé algunas vueltas sobre el tambor.

Si recíprocamente la fuerza P debe ceder á la acción del peso Q, como sucede con frecuencia, el rozamiento obrará favorablemente á P y en la fórmula (a) deben invertirse los valores de P y Q, resultando $\frac{Q}{P} = e^{f\alpha}$ de la cual se deduce que con una potencia muy pequeña puede hacerse equilibrio á grandes resistencias.

no podrá ser comunicado si no se da á las correas una tensión suficiente, que en un principio, ó sea en el estado de equilibrio, debe ser la misma para ambos trozos de correa. Esta *tensión primitiva*, que así se llama, se modifica desde el instante en que el movimiento se inicia, y esta modificación se explica mediante las consideraciones siguientes:

Si A es la polea conductora y B la conducida, y llamamos T_1 á la tensión primitiva, cuando el movimiento se inicie en el sentido de las flechas, el punto a desviará de su posición inicial alejándose de la polea B, y proporcionando al trozo ad un alargamiento, el cual hará que la tensión de este aumente en una cantidad proporcional á dicho alargamiento (*). Al mismo tiempo, el punto b de contacto del trozo bc se aproxima al punto c de tal modo, que hace se acorte dicho trozo la misma cantidad igual al alargamiento anterior; siendo consecuencia de ello, que disminuya la tensión de este trozo la misma contidad que había aumentado la del trozo ad. Consecuente á las indicaciones hechas, si llamamos T y T' respectivamente las tensiones del trozo conductor ad y del conducido bc y t al incremento experimentado por ambas, positivamente la primera y negativamente la segunda, se verificarán las dos siguientes igualdades

$$T = T_1 + t \qquad T' = T_1 - t$$

y sumándolas, se obtendrá la expresión

$$T + T' = 2\,T_1 \qquad (b)$$

la cual, traducida al lenguaje vulgar, dice que *la suma de tensiones de los dos trozos es constante durante el movimiento, é igual al doble de la tensión primitiva.*

Las dos propiedades demostradas constituyen, como he-

(*) Esta proporcionalidad entre alargamiento y tensiones, se demuestra en Resistencia de materiales.

mos dicho, la base para el cálculo de las correas, y sus ecuaciones, en unión con la correspondiente al mecanismo, proporcionan el medio de encontrar cuantos valores sean necesarios al establecer una trasmisión de esta naturaleza.

482. Teoría analítica de las correas sin fin.—Conocido por el estudio cinemático de esta trasmisión cuanto es referente á las velocidades tanto lineales como angulares, nos ocuparemos directamente de la relación de esfuerzos, y á este fin, supondremos que se trata de vencer una resistencia Q que obra tangencialmente á la polea B de radio r', empleando para ello una potencia P también tangencial á la polea A, cuyo radio es r. Para simplificar el cálculo, admitiremos que los trozos ad y bc son paralelos, circunstancia verdadera en algunos casos y aproximada en la mayoría de ellos, sobre todo si la distancia entre los ejes de las poleas es grande con relación á los radios de estas.

Siguiendo la marcha ordinaria empleada en el estudio analítico de todos los mecanismos, trataremos de encontrar los diversos términos de la ecuación de las máquinas en régimen, en la forma siguiente:

El trabajo motor correspondiente á una rotación ω de la polea A tiene por valor

$$T_m = P\,\omega\,r.$$

El trabajo útil afectará la misma forma, $T_u = Q\,\omega'\,r'$, siendo ω' la rotación que corresponde á la polea B, que según sabemos por la teoría cinemática (párrafo 78) está ligada con el valor de ω por la relación $\omega r = \omega' r'$, y por lo tanto, puede escribirse el trabajo útil, también bajo la forma

$$T_u = Q\,\omega\,r.$$

El trabajo nocivo es debido exclusivamente al rozamiento desarrollado en las guías del movimiento de rotación de ambas poleas, ya que la rigidez de las correas es tan peque-

ña que puede ser despreciada en todos los casos. Si llamamos R y R' á las resultantes de las fuerzas que obran sobre cada una de las poleas, y admitimos que los radios ρ y ρ' de sus ejes están ligados por la misma relación $\omega\rho = \omega'\rho'$ correspondiente á los de aquellas, la expresión formular del trabajo nocivo será según las reglas conocidas,

$$T_f = f_1 R\,\omega\rho + f_1 R'\omega\rho$$

debiendo marcar los valores que corresponden á ambas resultantes R y R'.

Estos valores se deducirán examinando las fuerzas que obran sobre cada una de las poleas, las cuales refiriéndose á la polea A serán P, T y T'; por consiguiente el valor de R será

$$R = \sqrt{P^2 + (T+T')^2}$$

y como en la polea B obran Q, T y T', se deducirá para valor de R'

$$R' = \sqrt{Q^2 + (T+T')^2}$$

Pueden sustituirse estos valores de R y R' en la expresión de T_f y escribir ya la ecuación de trabajos, con los que resultan para T_m, T_u y T_f, la que tomará la forma

$$Pr = Qr + f_1\rho\left(\sqrt{P^2+(T+T')^2} + \sqrt{Q^2+(T+T')^2}\right) \quad (c).$$

483. Para deducir de esta ecuación el valor que corresponde á la relación de esfuerzos, se hace preciso conocer las tensiones T y T', las cuales en unión de la tensión primitiva T_1 contribuyen al completo conocimiento de este mecanismo. En la investigación de estos valores, sirven de puntos de partida las expresiones (a) y (b), en unión de la que resulta al considerar solamente la polea B, cuyo movimiento es debido á la diferencia entre las tensiones T y T', única fuerza

que vence la resistencia Q. Suponiendo, por lo tanto, que no exista resistencia nociva en esta polea, para obtener por este medio una primera aproximación podremos escribir las tres ecuaciones necesarias en el cálculo de las tensiones; y á este efecto, llamemos K al valor $e^{f\alpha}$ de la ecuación (a) que aplicada á este caso tomará la forma $\frac{T}{T'} = K$; de este modo el sistema de ecuaciones que debe emplearse, es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{T}{T'} = K \\ &T + T' = 2T_1 \\ &T - T' = Q \end{aligned}\right\} \quad (\alpha).$$

De estas ecuaciones se deducen ya muy fácilmente los valores que se buscan, que son:

$$T = K\frac{Q}{K-1} \qquad (d)$$

$$T' = \frac{Q}{K-1} \qquad (e)$$

$$T_1 = \frac{Q}{2}\frac{K+1}{K-1} \qquad (f)$$

Es suficiente en todos los casos la aproximación que proporcionan estas fórmulas; mas si se deseara mayor exactitud bastará sustituir la tercera de la ecuaciones (α) por la que resulta al incluir en ella las resistencias nocivas correspondientes á la polea B.

484. Se completará la apreciación que creemos debe omitirse, sustituyendo los valores *(d)* y *(e)* en la ecuación *(c)* para obtener la relación de esfuerzos, y de ésta deducir el rendimiento por los procedimientos que nos son tan conocidos.

Si á las fórmulas que acabamos de obtener se une el cál-

culo puramente cinemático de la longitud de la correa que hemos presentado en el párrafo 80, habremos completado los datos necesarios para el establecimiento de una trasmisión por correas sin fin, puesto que el valor de K que aparece en nuestras fórmulas, es conocido por las tablas mencionadas al estudiar las bases de este cálculo, cuya naturaleza no varía en el caso que la correa esté cruzada, ó lo que es lo mismo, que sea distinto el sentido de las velocidades de ambos árboles.

485. Cálculo gráfico.—Las mismas bases que han servido de preparación para el estudio analítico, nos convienen como punto de partida. Presentemos el problema en la forma acostumbrada, y sea Q (*fig.* 129) la resistencia que debe vencerse por medio de una potencia P, de magnitud desconocida.

Si conociéramos las tensiones T y T' correspondientes á los dos trozos de la correa, se podrían reemplazar estas tensiones por su resultante, simplificando notablemente la cuestión. Pero si el valor de ellas no es conocido, nada más fácil que encontrar su dirección, valiéndonos de la *tabla núm.* 9, que nos da la relación $K = e^{f\alpha}$ que debe existir entre ambas tensiones para que el mecanismo pueda funcionar en buenas condiciones, ó sea sin que la correa resbale por las poleas. Basta para encontrar dicha dirección, hallar el punto o de intersección de los trozos de la correa (*), y trazar la diagonal del paralelógramo formado con las magnitudes $om = K$ y $on = 1$ referidas á la escala del dibujo. La dirección oR así obtenida es la misma que corresponde á la resultante de T y T', puesto

(*) Aun cuando en muchos casos no se encontrará este punto en los límites del dibujo, presentamos la figura considerando que esté comprendido en ellos, para su mejor inteligencia. Ninguna dificultad existe, por otra parte, al hacer la construcción geométrica necesaria para el trazado de la resultante en el caso á que aludimos, lo mismo que cuando sean paralelas las direcciones de T y T'. Estos problemas particulares deben también resolverse por el Alumno, para familiarizarse con tales construcciones geométricas, cuyo uso es muy frecuente en los cálculos gráficos.

que si se imagina el paralelógramo de estas tensiones, se verificará

$$\frac{T}{T'} = \frac{om}{on} = \frac{K}{1} = e^{f\alpha} .$$

486. El artificio empleado nos hace más fácil la subdivisión del problema en otros dos parciales, relativo el primero á la polea B, y el segundo á la polea A. En la primera, es resistencia la fuerza dada Q, y sirve como potencia la resultante R. En la segunda, es resistencia esta última, y potencia la definitiva P de nuestro problema. De este modo queda planteada la cuestión, y su cálculo se refiere ya á otros que nos son perfectamente conocidos, en los cuales debe tenerse en cuenta la influencia del rozamiento en los muñones de A y B, mayor en este mecanismo que en las demás trasmisiones que realizan esta misma trasformación de movimiento. No harán falta, por lo tanto, nuevos razonamientos para explicar la construcción, que haremos del modo siguiente:

Por el punto o_1 de intersección de Q y R, trácese la tangente $o_1 R_1$ al círculo de rozamiento de B en el sentido indicado en la figura, ó sea en el que desfavorece á la potencia R de esta polea; y el triángulo $1-2-3$ que construimos en la *figura* 129 *bis* sobre una recta $1-2=Q$ trazando $1-3$ paralela á R_1 y $2-3$ paralela á R, resuelve el *primer problema parcial* ó sea el correspondiente á la polea B.

Por el punto o_2 de intersección de R y P, trácese la tangente $o_2 R_2$ al círculo de rozamiento de A, de modo que desfavorezca también á la correspondiente potencia P, y el triángulo $2-3-4$ nos resuelve el segundo problema parcial, siendo $3-4$ paralela á R_2 y $2-4$ á P, cuyo valor se presenta como resultado definitivo del problema.

487. Resta determinar el valor de las tensiones T y T' necesarias en el establecimiento de esta trasmisión, para deducir de ellas el de la tensión primitiva $T_1 = \frac{1}{2}(T + T')$ que debe darse á la correa, para que el mecanismo funcione

en las condiciones debidas. Supuesto que es conocido el valor 2—3 de su resultante R y dada la dirección que cada una de dichas tensiones tiene, puede hacerse la descomposición indicada en el polígono 2—3—5 para resolver este problema complementario, y obtener los valores $T = 3—5$ y $T' = 2—5$ que se buscan (*).

488. Observaciones sobre esta trasmisión.—El empleo tan generalizado de las correas sin fin, nos obliga á hacer algunas indicaciones sobre este mecanismo, que deben tenerse en cuenta para su más perfecto conocimiento. Estas observaciones son relativas principalmente á la *tensión que debe darse á la correa*, la cual debe ser en general $0,^{kil}25$ por milímetro cuadrado de sección. La tendencia de los buenos constructores es de disminuir la tensión, aumentando la velocidad de las poleas; se disminuyen por este medio las resistencias nocivas, aumentando el trabajo útil en beneficio de la instalación mecánica.

Es de notar que el *alargamiento de las correas* por efecto de la tensión, proporciona una ligera pérdida de velocidad y por consiguiente de trabajo. En efecto, el trozo conductor se alarga, según sabemos, más que el conducido; y como por cada polea debe pasar la misma cantidad de materia en el mismo tiempo, la velocidad del trozo que abandona á la polea motriz, es superior á la que corresponde al trozo de correa que abandona á la polea conducida. Hay, por lo tanto, una pérdida de velocidad que puede ser notable cuando la trasmisión comprende muchas correas sucesivas. M. Kretz ha demostrado que es preciso aumentar en un 2 por 100 el diámetro de las poleas motrices, después de calculado por la relación encontrada en la teoría cinemática que indica la proporcionalidad inversa entre velocidades angulares y radios.

También debe ponerse de relieve cuanto es referente al *empleo de correas nuevas*, en las cuales se producen alargamien-

(*) Debe resolverse, como aplicación, el problema correspondiente al caso en que la correa esté cruzada.

tos muy irregulares durante un cierto tiempo, que á veces se prolonga dos ó tres meses. Se evita en parte este inconveniente, sometiéndolas antes de montar la trasmisión á una tracción tres ó cuatro veces mayor que el esfuerzo que debe actuar sobre ellas. Se repite esta operación durante algunos días, con lo cual se obtendrá regularidad en los alargamientos, se evitará el resbalamiento de la correa, y sobre todo, no habrá necesidad de acortarla con frecuencia.

489. *Comparando esta trasmisión con la de engranajes*, habrá de observarse que las pérdidas de trabajo que en éstos provienen del resbalamiento de los dientes, de los choques, etc., desaparecen en las correas sin fin. En cambio, en estas, para evitar el resbalamiento de la correa, es necesario ponerla con gran tensión, en cuyo caso los rozamientos desarrollados en los muñones absorben un trabajo considerable, superior al trabajo nocivo de un engranaje perfecto y bien engrasado. Los dientes de las ruedas de engranaje se rompen con facilidad, y las ruedas quedan inservibles cuando aquellos son de hierro; este inconveniente no existe en las poleas. La trasmisión por correas es mucho más suave y produce menos ruido; puede establecerse entre ejes que disten entre sí una cantidad igual á diez ó doce veces el diámetro de las poleas; los gastos de establecimiento y entretenimiento son mucho menores que en los engranajes. Por fin, según hemos hecho notar anteriormente, las correas no permiten establecer con toda precisión una relación determinada entre las velocidades de los dos árboles, y son impropias para la trasmisión de grandes esfuerzos irregulares.

490. Indicaremos, por último, las *precauciones para impedir que las correas resbalen sobre los tambores*, efecto que, como es natural, debe evitarse, por las pérdidas de trabajo que lleva consigo. Una necesidad del momento puede evitarse proyectando resina en polvo sobre la superficie interior de la correa; pero este artificio debe economizarse y practicarlo sólo cuando sea indispensable para que la máquina funcione en un intante dado, porque todas las sustancias resinosas ejercen

una acción perjudicial sobre el cuero. El medio de engrasar con sebo de buena calidad la superficie interior de la correa, es preferible al anterior, si bien no ejerce acción tan rápida. Por este tratamiento, la correa se hincha, se acorta y su tensión se aumenta, obteniéndose, naturalmente, el grado de adherencia necesario para impedir el resbalamiento, sin necesidad de recurrir al empleo de materias que, además de producir una adherencia artificial, son causa de deterioro del cuero de que está formada la correa.

Pero de todos modos, el engrasado sobre la cara interior presenta sus inconvenientes, siendo el principal facilitar la formación de costras sobre la llanta de la polea, debidas á la mezcla del polvo y la grasa. La adición de la resina da lugar á la formación de depósitos análogos, perjudiciales á la buena marcha. El sebo y aceite que suelen emplearse, á los cuales se daba preferencia hasta estos últimos tiempos, pueden ser reemplazados hoy con ventaja por el nuevo producto encontrado en el aceite mineral. Para obtener con este los mejores resultados, es necesario operar el engrasado sobre la cara exterior de la correa. En efecto, esta cara está sometida á un alargamiento mayor que la interna, y por consiguiente, está más expuesta á romperse; de ahí la necesidad de hacerla flexible por el engrasado, y á consecuencia de esta flexibilidad, la correa se pliega y aplica más fácilmente sobre la polea en todos los puntos del arco que ella abraza y se encuentra en condiciones mejores para la trasmisión del trabajo.

El engrasado de una correa puede hacerse con rapidez durante la marcha; sin embargo, conviene de vez en cuando desmontarla, á fin de poderla impregnar de aceite de una manera más completa, siendo conveniente que la correa se mantenga siempre en cierto estado de humedad, lo que aumenta su duración y favorece la regularidad de la marcha (*).

(*) En el caso de desmontar la correa, se debe empezar por limpiarla con agua tibia y desembarazarla de costras procedentes de grasas viejas, polvo, etcétera; hecho lo cual, y cuando está todavia húmeda ó seca simplemente la

b.—Cadenas sin fin.

491. Naturaleza y cálculo de esta trasmisión.—Cuando las fuerzas que han de trasmitirse son considerables, la velocidad exigua y los ejes se hallan muy distantes, se reemplazan las correas por cadenas, que realizan la trasformación de un modo idéntico al explicado para aquellas. Las más empleadas en este caso son las de Vaucanson, que hemos descrito en el estudio tercero, con las correspondientes poleas provistas de apéndices ó dientes.

Las cadenas ordinarias y de Galle, no son generalmente usadas como cadenas sin fin, y se emplean únicamente para reemplazar á las cuerdas en las distintas máquinas de fuerza, cuando los esfuerzos que deban vencerse sean muy grandes.

El cálculo de una trasmisión por cadenas sin fin es idéntico al que hemos presentado en el estudio de las correas; si bien debe considerarse también el rozamiento desarrollado en las diversas articulaciones de la cadena, que se tendrá en cuenta á tenor de lo marcado en el párrafo 110.

c.—Cables ó trasmisiones telodinámicas.

492. Generalidades sobre esta trasmisión.—Las trasmisiones por cables metálicos, que consisten ordinariamente en un cable sin fin arrollado sobre dos poleas, uno y otras de la forma explicada en el estudio tercero, no se diferencian bajo el punto de vista cinemático de las trasmisiones por co-

---

cara exterior, se da una mano de aceite mineral, frotándola con cuidado. En este estado, se lleva la correa á un local calentado moderadamente, y cuando se juzga que el aceite ha sido absorbido por el cuero, se la aplica una segunda mano, tomando las mismas precauciones.

Tanto estos datos como los que presentamos en el texto con relación á este asunto, son tomados de un reciente artículo publicado en el *Politechnischess* por Mr. Th. Voigt de Wurtzbourg y traducido en el *Boletín de la Asociación central de Ingenieros industriales.*

rreas; pero difieren de estas en que la tensión es producida por el mismo peso del cable, mientras que la tensión de las correas es debida generalmente á su elasticidad. Además, los cables se usan con objeto de trasmitir la energía á grandes distancias sin pérdida notable, y suelen marchar á grandes velocidades para aumentar de este modo uno de los dos factores cuyo producto constituye el trabajo mecánico, y por consiguiente éste, ó lo que es lo mismo, para hacer mayor la energía comunicada.

Este es el principal elemento de la trasmisión, en la cual las dos poleas principales están situadas generalmente en un mismo plano vertical; y si la distancia de centros es excesiva, convendrá sostener el cable por poleas intermedias. Se pueden emplear también cables sucesivos, y en este último caso deberán establecerse poleas de relevo con doble garganta, que sean á la vez poleas conducidas del primer cable y conductoras del segundo, evitándose con ello montar dos poleas sobre un mismo árbol (*). Una posición particular de las poleas principales es estar situadas casi verticalmente una sobre otra, y en este caso la tracción del cable sobre la polea inferior no puede ser suficiente para asegurar la adherencia, y por lo tanto el movimiento, haciéndose precisa una desviación por medio de poleas intermedias.

493. Siendo despreciable el alargamiento que experimenta el cable por efecto de una tracción momentánea, será suficientemente exacto, bajo el punto de vista teórico, hacer la consideración de que sea inextensible, y que no responde, por lo tanto, á la acción de las fuerzas que tienden á alargarlo. No obstante esta idea, que facilita los cálculos, es preciso tener en cuenta que un cable telodinámico en servicio, se alarga rápidamente por el uso constante, haciéndose preciso

(*) La distancia entre los ejes de dos poleas consecutivas, no debe ser menor de 50 metros ni exceder de 150. El diámetro de las poleas varía entre 2 y 5 metros. La velocidad en su circunferencia oscila ordinariamente entre 18 y 30 metros por segundo, pero puede llegar á 50 en casos excepcionales.

acortarlo para impedir resbalamientos sobre las poleas, evitar las irregularidades del movimiento, y aun para conseguir que el cable no llegue á arrastrar por el suelo con notable perjuicio para la trasmisión.

494. Teniendo en cuenta las ideas que llevamos apuntadas, podemos dividir el estudio de este mecanismo en dos, refiriéndose el primero á las *trasmisiones simples* y el segundo á las *trasmisiones compuestas*; y debiendo tener en cuenta que para el estudio de las primeras, en las que existen solamente las dos poleas principales, supondremos el caso más general de que la línea de centros ocupe una posición sensiblemente horizontal.

495. Trasmisión simple.—La teoría de esta trasmisión no presenta diferencias esenciales con la que hemos explicado para las correas sin fin; las mismas fórmulas y construcciones relativas á este mecanismo son aplicables á las trasmisiones telodinámicas. Mas habrá de tenerse en cuenta que obtenida la tensión por efecto del mismo peso del cable, la forma que afectan los dos trozos de éste no es rectilínea como en las correas; dicha forma es la que presenta la curva funicular conocida en Mecánica racional con el nombre de *catenaria*. Será preciso, por lo tanto, para fijar con exactitud las posiciones de todos los elementos del mecanismo, hacer aplicación de la ecuación de esta curva (*), siendo un punto el más importante, la determinación de la sagita ó flecha correspondiente á su punto más bajo, para que de su conocimiento se deduzca la altura á que deben colocarse las poleas, teniendo en cuenta que el cable no debe tocar al suelo, lo que produciría un resbalamiento sobre este y la consiguiente pérdida de trabajo (**).

Tal será el punto principal de partida para el cálculo de

(*) Véase Delaunay, párrafo 194.

(**) Los datos experimentales relativos á este asunto, indican la magnitud de la sagita ó flecha que en cada caso corresponde al mecanismo, encontrándose consignados en la *tabla núm.* 10.

este mecanismo, cuyo trazado puede verificarse con una aproximación suficiente, asemejando la curva formada por el cable á un arco de parábola. Para la construcción de esta curva, determinado que haya sido el punto más bajo c de ella *(figura* 130, *lám.* 16), se divide la abscisa cb en dos partes iguales, y se traza la recta ac', que determinará la dirección que tiene el primer elemento de la curva en el punto a de contacto con una polea. Divididas después las magnitudes cc' y $c'a$ en el mismo número de partes iguales, y unidos por rectas los puntos de división que tienen el mismo nombre, podrá ya hacerse con facilidad el trazado de la parábola, que será la curva envolvente de las diversas rectas 11, 22,..... que acaban de obtenerse.

496. Tanto la *teoría analítica* como el *cálculo gráfico* de este mecanismo pueden presentarse de un modo análogo al explicado para las correas sin fin, si bien teniendo en cuenta para este último, que en cada uno de los dos problemas parciales en que se subdivida, habrá de considerarse el papel de potencia ó resistencia que corresponda á cada una de las tensiones de los trozos conductor y conducido, ya que la resultante de ellas no pueda ser determinada en idéntica forma de la que corresponde á las correas. También habrá de tomarse en consideración el peso de las poleas, que por ser grande tiene bastante influencia en las presiones ejercidas sobre los soportes correspondientes. Con respecto al valor de las tensiones, habrá de observarse que al aplicar las fórmulas *(d)*, *(e)* y *(f)* se debe tener presente la distinta magnitud de K con respecto á la que adquiere en el caso de correas, y que depende del diferente valor que ha de asignarse á f en la expresión $K = e^{f\alpha}$. Para el valor ordinario que en las trasmisiones telodinámicas tiene el coeficiente f, resulta el de K próximamente igual á dos unidades (*), lo que simplifica no-

(*) Siendo el valor de f igual á 0,24, y admitiendo que el cable abrace una semicircunferencia, el valor de α será igual á π ó próximamente igual á 3, en cuyo caso $K = e^{f\alpha} = 2$, como se supone en el texto. Los valores que en él se obtienen para T, T' y T_1 son los que admite Reauleaux.

tablemente los cálculos, al reducirse las fórmulas mencionadas á las siguientes expresiones:

$$T = 2\,Q, \qquad T' = Q, \qquad T_1 = \frac{3}{2}\,Q.$$

Es de notar que en las trasmisiones simples que acaban de ocuparnos, las pérdidas que se obtienen por efecto de los trabajos nocivos desarrollados, no llegan á un 3 por 100 del esfuerzo trasmitido, á pesar de que en estos trabajos van incluídos, además del correspondiente al rozamiento, el de la resistencia del aire sobre los brazos de las poleas, y el de la rigidez del cable, los cuales se calculan por las reglas y fórmulas dadas en el estudio segundo.

Por dicha razón es preferible este mecanismo á las combinaciones de correas que pudieran establecerse para sustituirle, con el objeto principal de trasmitir la energía á distancias superiores de las que sirven como límite de las trasmisiones simples por correas sin fin (*).

(*) Se debe á M. Hirn la idea de las trasmisiones telodinámicas, que proporcionan notables beneficios á la industria, trasportando la energia á distancias considerables, que pueden considerarse como inaccesibles á los demás mecanismos conocidos, sin necesidad de recurrir al poderoso agente «la electricidad», que salva, como es sabido, toda clase de distancias.

La primera fábrica que ha establecido con algún éxito una trasmisión telodinámica, fué la antigua manufactura de Mr. Haussmann en Logelbach (Alsacia). Esta fué establecida con una cinta de cuero de 60 milímetros de ancho y un milímetro de espesor, que conducía una fuerza de 12 caballos, por medio de poleas de madera cuya velocidad era de 120 revoluciones por minuto, á la distancia de 80 metros. Esta trasmisión presentaba grandes inconvenientes, pero la sustitución de la cinta metálica por el cable, que se ha mencionado en el texto, y de las poleas imperfectas de madera por las que hemos descrito, ha proporcionado excelentes resultados, disminuyendo notablemente las pérdidas de energía, que no llegan á un 3 por ciento del esfuerzo trasmitido.

Muchos ejemplos pudiéramos citar de trasmisiones ya perfeccionadas; pero para formarse idea de las distancias á que operan y energía que trasmiten, bastará que citemos los siguientes:

497. Trasmisión compuesta.—Cuando las dos poleas de una trasmisión están demasiado distantes una de otra, es indispensable sostener el cable por poleas intermedias, cuya distancia no debe ser menor de 50 metros, ni exceder de 150.

Una para la fuerza de 60 caballos, á la distancia de 342 metros, para mover una fábrica de tejidos en Kaysersberg Colmar.

Otra para llevar la fuerza total de 274 caballos á una distancia de 1.400 metros, proyectada por el capitán de Artillería rusa, Mr. Wiener, con objeto de mover la fábrica de pólvora, que en sustitución de la de Okta, destruída por una explosión en 1864, se estableció al poco tiempo.

Otra trasmisión que merece citarse por la distancia á que se conduce la fuerza, es la establecida para explotación de las minas de Falun, en Suecia. El motor es de agua, y el esfuerzo de 100 caballos se trasmite á 5.000 metros de distancia.

Pero no hemos de pasar por alto en esta nota los trabajos verificados en este sentido por las fábricas que en España están á cargo del cuerpo de Artillería. Estas no han podido permanecer indiferentes ante los inventos de trascendencia, como es el que nos ocupa, y marchando bajo tal concepto á la cabeza de otros establecimientos análogos ó similares, no se dudó en aplicarlo en el primer caso práctico que se consideró ventajoso.

Tal aplicación tuvo lugar en la fábrica de armas de Toledo. Con motivo de la instalación de los talleres de construcción de cascos metálicos, proyectiles, carga de cartuchos y fabricación de cápsulas, se vió la necesidad de aumentar la fuerza motriz, y ningún medio más económico y conveniente bajo muchos puntos de vista que el de aprovechar el salto de agua más inmediato al Establecimiento, para establecer un motor hidráulico que por medio de un cable metálico llevara hasta los talleres donde era necesario, el trabajo mecánico desarrollado por aquel. La fuerza que debía aumentarse era de 17 á 20 caballos mecánicos, y la distancia del eje de trasmisión más avanzado de la fábrica al punto donde indefectiblemente debía colocarse el motor, de 74,6 metros. Las condiciones del motor hicieron fijar la velocidad del cable en 10 metros por segundo, y los datos experimentales marcaron para tensión máxima una cantidad próximamente igual al esfuerzo trasmitido.

Según los datos de resistencia, se encargó á Mr. Stein un cable de 48 alambres formado por seis ramales de ocho cada uno, además de los núcleos centrales de filástica correspondientes á cada ramal y á la totalidad del cable. Las poleas encargadas fueron de hierro colado, pesando las dos juntas 370 kilogramos, y su diámetro de dos metros, provistas de la correspondiente canal y asiento de gutta-percha.

Aplicada la ecuación de la catenaria con relación á un sistema coordenado, cuyo origen sea uno de los dos puntos fijos de la curva, y en que el eje de

En ciertos casos, podrá ser suficiente sostener en un sólo punto el trozo conducido, mientras que el conductor queda completamente libre; mas cuando convenga emplear varias poleas soportes, el trozo conductor tendrá generalmente una

---

las x sea horizontal, y tomando como puntos de partida la tensión de 150 kilogramos, el valor 0,43 kilogramos para peso de la unidad longitudinal del cable, y el dato experimental de que á la distancia que se verifica la trasmisión, la flecha ó sagita de la curva no debe bajar de $0^m,800$ ni exceder de $0^m,900$; hallada también la ordenada del punto más bajo, la cual, siendo $2^m,544$ el desnivel de las poleas (que las circunstancias de localidad no permitieron disminuir más) y 0,850 la sagita admitida, resulta igual á $3^m,394$, suma de estas cantidades, pudieron deducirse los valores siguientes:

Angulo de inclinación del primer elmento de la curva $= 8^0,1$.

Longitud de una rama de la curva desde el punto más bajo al de suspensión $= 49^m,231$.

Abcisa del punto más bajo $= 48^m,291$.

Determinados estos valores, se hizo fácil fijar la posición definitiva del conductor metálico, marcando por medio de renglones la posición del punto más bajo, su ordenada y la dirección de la tensión máxima.

Atendida la gran longitud del cable, se consideró muy conveniente el cálculo de su contracción por efecto de las bajas temperaturas, y admitiendo el coeficiente 0,00001234504 por cada grado centígrado, resultó ser aproximadamente de $0^m,110$ para una disminución de 55^0, respecto á la más elevada del sitio que corresponde á $0^m,055$ de movimiento lateral en la polea receptora.

A fin de precisar la tirantez del cable entre los límites más convenientes, tanto para su colocación primordial, como para corregir esta en lo sucesivo, si fuera preciso, se dispuso la polea receptora del movimiento, de modo que la fuera posible, por medio de un husillo, avanzar ó retroceder sobre sus cojinetes.

El cálculo de los trabajos nocivos demostró las ventajas de esta trasmisión sobre la que hubiera podido verificarse por los medios ordinarios de combinaciones de correas sin fin. Tomando los datos correspondientes á la trasmisión que nos ocupa, resultan los valores siguientes para dichos trabajos nocivos:

Rozamiento en los ejes de ambas poleas.....	$T_1 = 28^{kg},96$
Resistencia del aire sobre los brazos de las poleas.....	$T_2 = 1^{kg},532$
Rigidez del cable.....	$T_3 = 6^{kg},44$

para cuya investigación se han empleado las mismas fórmulas que hemos presentado en el estudio 2.º. La pérdida total será, según lo expuesto:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = 36^{kg},93.$$

polea menos que el conducido. En otros casos convendrá, por el contrario, que el número de poleas sea el mismo para los dos trozos; pero entonces deberán colocarse las poleas de cada uno de ellos situadas sobre la misma vertical, y no yus-

---

Si la trasmisión se hubiera efectuado por los medios ordinarios de correas sin fin, adoptando un diámetro de eje de 55^{mm} dotado de sus manguitos y soportes correspondientes, el trabajo perdido por el solo efecto de los rozamientos, resultaría:

$$T' = 441^{kg},86.$$

Resulta, pues, que esta pérdida en función de la efectiva que se ha obtenido, es

$$T' = 11,95\ T$$

como valor pone de manifiesto la notable ventaja que se encuentra por las menores pérdidas de trabajo que se obtienen en el sistema de cables.

Pero no es esta sola la ventaja obtenida. Si se compara su coste con el que hubiera producido la instalación de árboles motores para llevar el movimiento á tan considerable distancia, se observa que el de la trasmisión montada no ha excedido de 700 pesetas, al paso que una ordinaria no hubiese bajado de 2.200 por sólo el valor de los ejes de hierro forjado, manguitos y soportes de fundición, abstracción hecha de las obras de albañilería y de montura necesarias, que haría duplicar por lo menos dicha cantidad.

En vista del buen resultado obtenido con la instalación del cable de referencia y habiendo ocurrido en la misma fábrica la necesidad de trasmitir la fuerza á un nuevo eje situado á la distancia de 63,26 metros, se estableció para conseguirlo una nueva trasmisión de este género, bajo los siguientes datos:

Desnivel relativo de las poleas	$1^{m},200$
Flecha ó sagita	$0^{m},800$
Diámetro del cable	$0^{m},012$
Idem de las poleas	$1^{m},400$
Número de revoluciones por minuto	140
Fuerza en caballos	20

Tanto una como otra trasmisión funcionan con toda regularidad, habiéndose observado solamente un aumento de consideración en la flecha por efecto de la extensión del cable, lo que producía grandes ondulaciones en el movimiento; y á fin de conocer si aquella había perjudicado á la resistencia de los alambres, se sometieron estos á las mismas pruebas que otros sacados de un trozo de cable sin usar, encontrándose en repetidas experiencias no haber variado en lo

tapuestas, pues con esta última disposición, el cable se deteriora con más rapidez por efecto del rozamiento en los bordes de las poleas, y además está expuesto á desligarse de ellas fácilmente. La disposición que indicamos como conveniente, se halla representada en la *figura* 131, en la cual las poleas intermedias hacen solamente el papel de *poleas-guías*.

498. Pero á veces puede reemplazarse esta disposición por otra que se reduce á emplear una serie de *trasmisiones sucesivas*. Las poleas guías se sustituyen por poleas de doble garganta, que reciben la acción de un cable y la trasmiten por medio de otro á la polea siguiente, que se encuentra en las mismas condiciones. Se representan las proyecciones horizontal y vertical en la *figura* 132, observándose que el cable total se encuentra reemplazado por otros parciales de menos longitud, con lo que se obtiene la ventaja de mayor facilidad en la recomposición, si llegara á romperse, pues en este caso sería uno sólo de los trozos el que debiera ser sustituído ó recompuesto. Otra ventaja presenta esta disposición, y es que con ella será muy fácil utilizar parte de la fuerza motriz en alguna de las *poleas de relevo ó estaciones intermedias*, como se las llama para distinguirlas de las *poleas principales ó estaciones extremas*.

499. El empleo de las trasmisiones compuestas permite distribuir entre varios establecimientos la energía procedente de uno solo, bastando evidentemente hacer que de ciertas estaciones partan otras trasmisiones por cables de menor im-

---

más mínimo su resistencia á la extensión. El efecto producido en el cable era únicamente el de compresión sobre el núcleo de cáñamo, acusando una disminución en el diámetro de $0^m,0003$; pero se remedió volviendo á empalmar el cable después de acortarlo 550 milímetros, sin que haya sido preciso repetir la operación.

Creemos que los datos apuntados en esta nota, que quizá peque de un poco extensa, habrán de ser de suma utilidad para perfeccionarse en la marcha de los cálculos, y por lo menos tienen notable interés por referirse á una fábrica á cargo del cuerpo de Artillería, que posee una de las pocas trasmisiones de este género montadas en España.

portancia. Las estaciones de esta clase toman el nombre de *estaciones de división.*

500. Toda trasmisión con poleas guías, podrá ser calculada con arreglo á los mismos principios establecidos para las trasmisiones simples; pero observando en su trazado que las sagitas ó flechas de los diversos trozos guardan sensiblemente una relación inversa de las raíces cuadradas de sus longitudes respectivas; es decir, de las distancias que existan entre dos poleas sucesivas.

También la trasmisión con poleas de relevo se calcula estudiando cada uno de los cables como si existiese aislado; quedando reducido, como vemos, el cálculo de las trasmisiones compuestas, al de las simples. Para mayor facilidad en todos los casos, se insertan en la *tabla número* 10 los principales datos que son necesarios para el cálculo de las trasmisiones telodinámicas, lo que evita cálculos enojosos cuando se trate de montar un mecanismo de este género.

501. Observaciones relativas á esta trasmisión.—Muy variados pueden ser los problemas que se presenten al tratar de montar una trasmisión de este género, y para resolverlos deben tenerse presentes las consideraciones hechas y fórmulas encontradas para este caso, siguiendo siempre la marcha adecuada á la naturaleza de la cuestión que se resuelva. Para fijar las ideas y poder indicar la práctica de las operaciones en los casos ordinarios, supondremos que, como suele suceder, sean datos precisos la fuerza que debe trasmitirse y la velocidad á que debe marchar el cable que, como es sabido, no debe rebasar ciertos límites. Estos datos servirán para calcular las tensiones por medio de las fórmulas que hemos presentado, de las cuales se deduce inmediatamente por las fórmulas de resistencia, la que debe presentar el cable, y por lo tanto su naturaleza y condiciones.

Con todos estos datos como punto de partida, podrá recurrirse á las tablas cuyo tipo presentamos en la 10, que es correspondiente á determinados casos. Su aplicación permite deducir los valores del diámetro de las poleas, peso del cable

por unidad de longitud, diámetro de los hilos, etc., con los que podrá establecerse la ecuación de la curva que forma el cable. De esta ecuación se deducen los resultados prácticos necesarios para marcar con precisión los diversos puntos de la curva, siendo el más interesante el que ocupa la posición más baja.

Hacemos estas indicaciones para coordinar las ideas que hemos apuntado referentes al *establecimiento de una trasmisión telodinámica*, en la cual deben tenerse presentes, además de las indicaciones hechas en los párrafos 141 y 146, referentes á la forma de los cables y correas, las observaciones que hemos hecho en las notas, y las marcadas al final de la citada *tabla número* 10, á las cuales debemos añadir otras muy interesantes para la práctica de una instalación.

Se refiere la primera al medio más empleado para precisar la *tensión del cable*, con cuyo objeto suelen disponerse las poleas trasmisoras de modo que puedan avanzar y retroceder lateralmente, con lo que el mecanismo quedará en mejores condiciones. El diámetro del cable trasmisor debe reducirse cuanto sea posible, aumentando los diámetros de las poleas para obtener velocidades relativamente grandes, si bien será indispensable el empleo de poleas muy resistentes (hierro forjado ó acero) para evitar su rotura por los efectos de la fuerza centrífuga.

Otra observación es relativa á los *empalmes*, que deben hacerse con precisión, adoptando las precauciones necesarias para que su longitud sea la calculada de antemano (*).

En cuanto al modo de *preservar el cable de la oxidación*,

(*) Para verificar un empalme, se sujeta el cable, como á distancia de un metro de su extremo, al punto más bajo de la circunferencia de una de las poleas y abrazando después la otra, se pone en tensión por medio de un cabrestante, obrando sobre una cuerda de cáñamo sujeta al cable con una envoltura de filástica. En esta disposición, muy próxima á la definitiva, se gradua su longitud, se deshacen los dos extremos, se cortan los sobrantes del núcleo interior y se procede á la junción, que no debe ordinariamente verificarse en mayor extensión de un metro.

bastará untarlo con aceite secante repetidas veces, hasta que se forme una película sobre la superficie, la que será suficiente para conseguir dicho objeto durante mucho tiempo.

Por último, antes de colocar el cable, será conveniente someterlo á un esfuerzo de extensión mayor que el que debe soportar de ordinario, con lo que se evitan alargamientos durante su marcha, y por lo tanto tener que desmontar el mecanismo, para disminuir la longitud cuando se haya alargado más de lo conveniente.

ARTÍCULO II

Clase B.—Ejes no paralelos.

502. Mecanismos que han de explicarse.—No siendo tan apropiadas las cadenas para variar la dirección, como sucede á las correas y cables, solamente nos ocuparemos de estas dos últimas clases, ya que los cambios de dirección cuando se empleen aquellas, se pueden obtener fácilmente con el auxilio de engranajes cónicos, que nos han ocupado en otro estudio. Tanto en el caso de correas como en el de cables, nos concretaremos á la descripción, puesto que el cálculo depende directamente del que hemos explicado para ambas trasmisiones en el capítulo anterior.

503. Trasmisión por correas.—Cuando una correa reune dos poleas montadas sobre ejes paralelos, queda aquella guiada solamente por efecto de la forma de las poleas; no necesita, por lo tanto, de artificio especial para que la marcha se verifique de un modo continuo, sin que la correa se salga del sitio que constantemente debe ocupar. Los razonamientos hechos al tratar en el estudio tercero, de la forma que deben tener las poleas, son suficientes para comprender la exactitud de la idea apuntada. Pero cuando los ejes de rotación no son

paralelos, se hace preciso recurrir al empleo de *poleas-guías*, que cambian la dirección de la correa, asegurándola en su movimiento.

Sin embargo, en un caso especial puede la correa quedar guiada también sin recurrir á dichas poleas-guías, y este caso lo habremos de mencionar en primer lugar, por ser de uso muy frecuente en las instalaciones mecánicas. La condición única y suficiente para que se verifique dicho efecto, es que *el punto en que la correa abandone á cada polea, debe estar en el plano de la otra polea*. Esta condición no puede cumplirse, más que para las correas que deban marchar siempre en el mismo sentido. Representamos en la *figura* 133 tres proyecciones de esta disposición, aplicada á dos árboles que forman ángulo recto. Las flechas marcan el sentido del movimiento, y siguiendo las indicaciones de ellas, se vé muy fácilmente que el punto en que la correa abandona á cada una de las poleas, se encuentra en el plano que pasa por el medio de la otra polea; condición, según hemos dicho, para que la correa quede guiada en su movimiento.

504. Pasando ahora á la disposición general referente al *empleo de poleas guías*, indicaremos como regla especial para obtener una dirección conveniente de las correas, que *en cada polea, el punto de salida de la correa debe coincidir con el contacto entre esta polea y la línea de intersección de su plano medio con el de la polea siguiente*. La *figura* 134 representa, en proyección horizontal y vertical, una disposición de este género, que puede considerarse como la solución general del problema de trasmisión por correas con poleas-guías. La línea *ab* es la intersección de los planos medios de las poleas principales. Escogidos dos puntos arbitrarios *a* y *b* sobre esta línea, si trazamos las tangentes *ac* y *bd* á las poleas, las direcciones de las correas quedarán representadas por *cac* y *dbd*. Los planos formados por estas direcciones son los que conviene adoptar para planos medios de las poleas-guías, que deben establecerse respectivamente en contacto con las tangentes precedentes. Con esta disposición, el movimiento puede verificarse en

uno y otro sentido, como se comprueba aplicando para ambos la regla que hemos mencionado.

505. Trasmisión por cables.—Los cambios de dirección en las trasmisiones por cables, pueden verificarse también por medio de poleas-guías T (*fig.* 135), que ocupan una posición horizontal, combinadas con otras dos verticales T' y T'' que le aseguran en su posición; pero en la mayoría de los casos es preferible el empleo de poleas de relevo A y B (*fig.* 136), que en lugar de formar cuerpo, como sucede en la trasmisión ordinaria, se comunican el movimiento por medio de un engranaje cónico C.

CAPÍTULO III

Tercera especie.—Un movimiento rectilíneo y otro circular

ARTÍCULO ÚNICO

Torno y sus derivados

506. Diversas clases de tornos.—Siendo el torno el único mecanismo comprendido en la especie que nos ocupa, y aun cuando sus disposiciones pueden ser muy variadas, explicaremos solamente las que puede considerarse que forman tipo, como son las siguientes:

a.—Torno ordinario.

b.—Torno diferencial (*).

507. Descripción y teoría.—El torno se compone *(figura 137)* de un árbol cilíndrico *T* ó torno propiamente dicho, cuya sección es circular, que puede moverse alrededor de un eje

(*) No incluímos por ahora el torno con engranajes, porque su estudio es de combinación de mecanismos correspondientes á diversos grupos, y debe figurar independientemente de cada uno de estos, en el capítulo que trata de dichas combinaciones.

horizontal provisto de sus correspondientes guías de movimiento, colocadas en los soportes A y B. La resistencia Q que debe vencerse, se aplica á uno de los extremos de una cuerda, que arrollándose al torno, está fija á éste por el otro extremo, y la potencia se ejerce en una manivela M colocada en uno de los muñones al otro lado del soporte. Frecuentemente se coloca otra manivela en el otro extremo, y en este caso suele disponerse de modo que forme ángulo recto con la primera (*).

508. La teoría analítica y cálculo gráfico del torno se explican repitiendo una por una las consideraciones hechas en los párrafos 176 y siguientes, referentes al movimiento de un árbol horizontal en sus cojinetes. Las mismas fórmulas y construcciones son aplicables en este caso, mediante la consideración de que la resistencia Q_1 de la *figura* 63 sea vertical, debiendo variar solamente la construcción necesaria para encontrar la resultante de la resistencia Q_1 y del peso Q_2 del torno. La misma variación indicaremos para las *figuras* 65 y 65 *bis* correspondientes al caso práctico, ó sea el caso en que deben considerarse las reacciones correspondientes á ambos cojinetes, y por estas razones nos evitamos una repetición que no habría de proporcionar novedad alguna en las fórmulas que se obtengan y los resultados que se deduzcan. Solamente haremos observar, que para el estudio perfecto de este mecanismo debería tomarse en consideración también la rigidez de la cuerda que en él se emplea; pero no suele hacerse, porque la aproximación obtenida sin incluir dicha resistencia nociva, es suficiente en todos los casos de aplicación (**).

(*) El modo de ejercerse la potencia suele dar distintos nombres al torno; pero la teoría no presenta variación alguna. Así, dan vulgarmente el nombre de rueda de clavijas á otra disposición en que se coloca para ejercer la potencia una rueda de gran diámetro, en cuya circunferencia van colocadas clavijas muy sólidas, normales al plano de la rueda, á las cuales se coge un hombre y pretende subir, lo que hace girar la rueda cuando el momento de su peso supera á la suma de momentos de todas las resistencias.

(**) El torno es muy empleado en gran número de máquinas de fuerza, y sobre todo en las destinadas á elevación y arrastre de pesos, de las cuales se

509. Cuando el eje del torno es vertical, toma el nombre de *cabrestante* y afecta la disposición indicada en la *figura* 138, empleándose para el trasporte horizontal de pesos, y en algunos muelles para atracar embarcaciones. El cilindro descansa por su parte inferior en el correspondiente cojinete y se mantiene en posición vertical por medio de otro superior, por encima del cual sobresale el eje, cuya cabeza atraviesan varias palancas PP, sobre las cuales ejercen la potencia varios hombres actuando en sus extremos. La armadura del cabrestante debe asegurarse sólidamente durante la operación, por medio de algunos piquetes clavados en tierra; y como el aparato es de poca altura, no se hacen dar á la cuerda más que tres ó cuatro vueltas al cilindro; de modo que en lugar de fijar á este uno de sus extremos T, queda éste constituyendo un ramal libre, sobre el cual ejercen acción de retenida una ó varias personas. También la teoría es idéntica á la explicada, debiendo añadirse como trabajo nocivo el desarrollado en la superficie inferior del pivote que sirve de apoyo, cuya investigación hemos hecho en los párrafos 193 y siguientes del estudio tercero. En cuanto á la fuerza de retenida T, que será necesaria para contrarrestar la acción del peso Q que se trasporta, basta aplicar la fórmula (a) del párrafo 480, en la que se dará á α el valor correspondiente al número de vueltas que dé la cuerda sobre el cilindro.

b.—Torno diferencial.

510. **Descripción.**— Este mecanismo, llamado también *cabria de Lombard* (*), consiste *(fig.* 139) en dos cilindros ó tornos A y B del mismo eje, pero de radios diferentes, los

---

hace frecuente uso en las faenas de artillería. Las cabrias, gruas, etc., que más adelante explicamos, son otros tantos ejemplos de aplicación directa de este mecanismo.

(*) También se le llama *torno de los chinos*, porque en este país se empleaba desde tiempo inmemorial, para extraer agua de los pozos.

cuales se apoyan en dos cojinetes, por medio de los correspondientes muñones. La cuerda, unida por ambas extremidades á la superficie de uno y otro cilindro, se arrolla en un sentido al primero y en sentido contrario al segundo, de donde resulta que cuando uno de los trozos de ella se arrolla sobre el primer torno, el otro se desarrolla del segundo. Dicha cuerda sostiene á una polea movible C, de cuya chapa está suspendido el peso Q que debe elevarse. Por último, la fuerza motriz P se ejerce tangencialmente á la circunferencia de una rueda M ó en la extremidad de una manivela.

511. Propiedades del mecanismo.—Para estudiar la propiedad especial que da carácter á este aparato y que constituye la gran ventaja obtenida con él en la elevación de grandes pesos, fijémonos en primer lugar en su teoría cinemática, encontrando la relación de velocidades correspondientes á los puntos de aplicación de la potencia y resistencia. Si R representa el radio de la rueda M, y r, r' los de ambos cilindros, por cada vuelta de la rueda en sentido conveniente se arrollará la longitud $2\pi r$ de cuerda sobre el cilindro de radio r y se desarrollará $2\pi r'$ del otro cilindro; de consiguiente, la variación en la longitud de la cuerda estará representada por la magnitud $2\pi(r-r')$. Considerados los dos trozos de ella como paralelos, en lo que no se comete error sensible, sobre todo si su longitud es grande, se deducirá que repartiéndose dicha magnitud por igual en ambos trozos, la variación en la longitud de cada uno de estos, y por consiguiente el camino recorrido por la polea movible y su carga Q, será igual á $\pi(r-r')$. Pero el camino recorrido por el punto de aplicación de P es $2\pi R$ y por lo tanto la relación entre uno y otro, ó sea la de velocidades es

$$\frac{s_p}{s_q} = \frac{r-r'}{2R} = \frac{\frac{1}{2}(r-r')}{R} \qquad (a)$$

512. Pasando ya al estudio dinámico y recordando la proporcionalidad inversa entre esfuerzos y velocidades, que

es propidedad inherente á las máquinas teóricas, deduciremos que la relación de esfuerzos, abstracción hecha de las resistencias nocivas, está representada por la misma expresión (*a*), lo que puede enunciarse diciendo que *la relación de esfuerzos es la misma que existe entre la semidiferencia de los radios de ambos tornos, y el brazo de palanca de la potencia.* Puede, por lo tanto, hacerse esta relación tan pequeña como se desee, disminuyendo la diferencia $r - r'$, con lo que se favorecerá notablemente la potencia, ó en otros términos, *se podrán vencer grandes resistencias con pequeños esfuerzos.*

513. Fácil será la transición de la forma teórica (*a*) á la que sea expresión de la máquina real, ó establecer el cálculo gráfico de esta, mediante la combinación de los estudios referentes al torno y polea movible; pero este sencillo cálculo no ofrece ningún interés, una vez deducida ya la propiedad importante que caracteriza y da nombre al mecanismo.

ESTUDIO VII

MECANISMOS

PARA ESTABLECER, INTERRUMPIR Y MODIFICAR LOS MOVIMIENTOS

CUADRO DEL ESTUDIO 7.º

PRELIMINARES. Orden del estudio.

EMBRAGUES.
- Embragues manuales..
  - Ordinario.
  - De fricción.
  - Instantáneo.
  - De los cilindros de fricción.
  - De los engranajes.
  - De correas.
- Embragues automáticos.....
  - Por fricción de seguridad al esfuerzo.
  - Por id. de id. al movimiento.
  - Por dientes y fiadores.

MODERADORES..
- Volantes de aletas.
- Frenos.....
  - De carruajes ordinarios.
  - De caminos de hierro.
  - De cinta metálica.
  - De cuerdas.

VOLANTES.—Condiciones y cálculo.—Contrapesos.

REGULADORES..
- Regulador ordinario de fuerza centrífuga.
- Idem isocrono de fuerza centrífuga .....
  - Parabólico de Farcot.
  - Instantáneo.
  - Horizontal de Flaud.
- Reguladores de muelles.
  - De Poncelet.
  - De Molinié.

MODIFICADORES.
- De la relación de velocidades.
  - Conos de poleas.
  - Tambores cónicos.
  - Engranajes y correas.
- Del sentido del movimiento.—Embragues dobles.
- De magnitud y sentido.....
  - Por engranajes y embragues dobles.
  - Por topes y muelles.
  - Por muelles y contrapesos.

PRELIMINARES

514. Orden del estudio.—Entre los mecanismos que forman parte de una instalación mecánica completa, no sólo deben figurar los que trasportan la energía del motor al operador ú operadores, por los procedimientos indicados en los estudios precedentes, sino que se hace precisa en muchas ocasiones una variación de la velocidad, del esfuerzo ó del sentido del movimiento, que puedan verificarse á voluntad ó automáticamente, según las necesidades de cada uno de los elementos que constituyen la instalación; siendo también indispensable disponer de aparatos que puedan establecer ó interrumpir la marcha de uno ó varios mecanismos, para que empiecen á funcionar ó dejen de hacerlo la máquina ó máquinas operadoras á quienes comuniquen su movimiento.

515. Unos y otros aparatos van á ser objeto de este estudio, que verificaremos clasificándolos en el orden siguiente:

Primera especie.—Embragues.
Segunda id. —Moderadores.
Tercera id. —Volantes.
Cuarta id. —Reguladores.
Quinta id. —Modificadores.

516. Como todos estos mecanismos están constituídos mediante una combinación más ó menos sencilla de los que hemos estudiado, nos concretaremos en general á hacer su descripción, á no ser que el objeto á que están destinados haga necesarias nuevas explicaciones para deducir cuanto sea relativo al modo de funcionar y condiciones de su establecimiento.

CAPITULO PRIMERO

Primera especie.—Embragues.

517. Objeto y división.—Cualquiera que sea la naturaleza del motor que proporciona el movimiento á la serie de mecanismos contenidos en una instalación mecánica, se dispone en general un gran árbol en toda la longitud del taller, que recibe de aquel el movimiento directamente, y lo comunica en la forma adecuada, por medio de mecanismos que nos son conocidos, á las máquinas operadoras distribuídas convenientemente. Cuando existen varios talleres en la instalación, el *árbol principal* ó motor, comunica con otros *árboles secundarios*, cuyo movimiento trasmiten también á las operadoras del modo antedicho.

Pero sea una ú otra la manera de distribuir la energía para la ejecución de los trabajos mecánicos necesarios en la instalación, se hace preciso, como ya hemos indicado, que las diversas máquinas operadoras, ó el conjunto de las que son movidas por un árbol secundario, puedan á voluntad detener su movimiento, ó recibirlo cuando sea preciso. Se consigue tal objeto por medio de los *embragues*, que pueden tener tam-

bién aplicación como elementos constituyentes de las máquinas operadoras.

518. Dividiremos los embragues en dos clases principales, según que su objeto sea proporcionar á voluntad el movimiento ó detención, ó que estos efectos deban obtenerse automáticamente.

De este modo, el orden de estudio será el siguiente;

A.—Embragues manuales.
B.—Idem automáticos.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Embragues manuales.

519. Tipos pertenecientes á esta clase.—Tanto en la una como en la otra clase, explicaremos solamente los embragues que son más usados en la industria, sin hacer nueva clasificación, como pudiera verificarse, relativa á la naturaleza de los órganos que los constituyen. Los que han de ocuparnos en este artículo son los siguientes.

a.—Embrague ordinario.
b.—Idem de fricción.
c.—Idem instantáneo.
d.—Idem de los rodillos de fricción.
e.—Idem de los engranajes.
f.—Idem de correas.

520. a.—Embrague ordinario.—La disposición más usada en los talleres para reunir ó separar á voluntad dos árboles de rotación situados en prolongación uno de otro, se compone *(fig.* 140) de dos cajas cilíndricas *a* y *b* ligadas invariablemente á cada una de las extremidades de los árboles cuya conexión ha de establecerse ó interrumpirse. Dichas cajas van provistas en sus caras adyacentes de unos dientes de forma especial, dispuestos de tal modo, que cuando los

árboles están reunidos, los dientes de una caja entran en los vacíos de la otra. Uno de los árboles es suceptible de trasladarse á rozamiento suave en dirección de su eje, y este movimiento se consigue á favor de una palanca *g* que puede girar al rededor de su punto fijo *c*, y que termina por su extremo *d* en una horquilla que abraza la caja correspondiente al eje móvil, penetrando en un rebajo ó collar practicado en éste.

La maniobra se verifica actuando en el extremo libre de la palanca *g* para separar los dos árboles cuando se quiere interrumpir la comunicación, ó para reunirlos cuando esta deba establecerse; mas cuando la resistencia que el árbol movible presente al movimiento lateral sea grande, puede emplearse en sustitución de la palanca el mecanismo representado en la *figura* 141, compuesto de la biela *a b* articulada á la palanca *c d*, en cuya extremidad *d* ejerce su acción un tornillo que recibe el movimiento por medio de la manivela *m*. Es de observar que para la buena marcha de este mecanismo, el tornillo habrá de tener una guía *d'* de movimiento de rotación, que impida todo avance lineal, y que tanto dicha guía *d'* como la tuerca *d*, deben estar montadas sobre sus correspondientes muñones, como se ve en la figura, que permitan al tornillo una ligera oblicuidad, necesaria para el movimiento de la palanca.

521. Los dientes de estos embragues pueden presentar diferentes formas. Para mayor claridad, presentamos en la *figura* 142, *lám.* 17, independientemente del aparato, las diversas clases de perfiles empleados. Con la figura *a* ó con los dientes de flancos rectos, el movimiento de rotación puede trasmitirse en los dos sentidos; pero el embrague no puede efectuarse durante la marcha más que en el caso de un movimiento muy lento. La forma *b*, por el contrario, permite embragar durante la marcha, sea lento ó rápido el movimiento, pero sólo puede trasmitir éste en un sentido; y si pudiera chocar la ligera inclinación que tienen los flancos de los dientes, sobre los cuales se ejerce la presión al trasmitir el movimiento de un

árbol á otro, deberá tenerse presente que esta inclinación tiene por objeto hacer más fácil el embrague y desembrague, siendo tan pequeña, que no ejerce influencia en la buena conducción de los dientes. En la disposición *c*, los dientes están reforzados en su punta con el fin de evitar la rotura de uno ó varios de ellos, por efecto de los choques que pueden producirse cuando se verifica el embrague durante la marcha. Por último, la forma *d* presenta, como las dos precedentes, la ventaja de facilitar el embrague, permitiendo al mismo tiempo, como la primera, que la conducción pueda tener lugar en ambos sentidos.

522. b.—**Embragues de fricción.**—Los dientes con que están armadas las caras adyacentes en el embrague ordinario, pueden suprimirse siempre que se dé á dichas caras la forma de superficies cónicas iguales, cóncava la una y convexa la otra, como indica la *figura* 143. Apoyando estos conos el uno contra el otro por medio de una palanca, se desarrolla un gran rozamiento en sus superficies laterales, cuya magnitud puede ser suficiente para verificar el embrague y hacer solidarios ambos árboles. Presenta este embrague la gran ventaja de no tener la rigidez de los ordinarios, por ser el rozamiento la única fuerza que establece la conexión entre uno y otro árbol; de este modo, cuando se presente en la máquina una resistencia excepcional, los conos resbalarán uno sobre otro sin comunicarse el movimiento, lo que evita los choques y roturas que pueden verificarse en el embrague ordinario.

523. No siempre es cónica la forma que presentan las superficies en contacto; estas pueden estar constituídas por partes planas ó cilíndricas, que divididas en varios trozos las correspondientes á uno de los árboles, comprimen más ó menos la caja del otro por medio de unos muelles, palancas ó tornillos, que funcionan cuando se trata de aproximar ó separar ambas cajas, produciendo ó suprimiendo el rozamiento, única fuerza que proporciona el embrague. Pero la idea exclusiva de las diversas disposiciones que pueden emplearse, es aumentar en lo posible el número de puntos en contacto,

para que la fuerza de rozamiento sea mayor y pueda serlo también la energía comunicada de un árbol á otro (*).

524. c.—Embrague instantáneo.—Cuando hay necesidad de verificar bruscamente el desembrague de una máquina de gran potencia, sería incómodo y poco seguro el sistema empleado anteriormente para separar uno de otro los árboles de rotación. En este caso, se hace que las dos cajas lleven unos suplementos exteriores á los dientes, terminados por una parte plana el uno y por una curva el otro *(fig.* 144), de tal modo, que cuando los dientes están en contacto, queda entre ambos suplementos una ranura de ancho variable, que excede en el punto de máxima á la longitud de los dientes y disminuye progresivamente hasta ser nulo. Para la maniobra del desembrague, basta introducir en la ranura una barra *a* que puede deslizarse entre dos guías fijas, y en este caso, la misma rotación del árbol haciendo que la superficie inclinada resbale por el obstácnlo interpuesto, produce la separación deseada en un intervalo de tiempo menor que el correspondiente á una revolución del eje.

525. d.—Embrague de los cilindros de fricción.—Si dos rodillos ó cilindros de fricción *o* y *o'* *(fig.* 145) deben comunicarse el movimiento á voluntad, bastará emplear para su embrague y desembrague un mecanismo que proporcione en el momento deseado la presión mutua que entre ambos rodillos es necesaria para la trasmisión del movimiento. Se usa para este efecto una palanca AC movible alrededor de su punto fijo A, la cual forma cuerpo con el eje del rodillo o'. En el extremo C lleva una cuerda que, pasando por la polea

(*) En nuestro propósito de no incluir más que los mecanismos, que por decirlo así forman tipo, solamente presentamos la descripción detallada del embrague llamado cónico: los detalles correspondientes á otros embragues de fricción, pueden verse en la excelente obra de Mr. Reuleaux *Le Constructeur*, que varias veces hemos citado en el curso de estos estudios. También debe mencionarse el embrague de Weston, descrito por Shelley en la obra que ha traducido el comandante capitán de Artillería D. Antonio Cañada, titulada *Prácticas de taller.*

guía *D*, deja libre uno de sus ramales *E* para que pueda ejercerse sobre él el esfuerzo conveniente. Completa el mecanismo un tope *B*, sobre el cual se apoya la palanca cuando deja de ejercerse la acción en el extremo libre de la cuerda. Se comprenderá inmediatamente el modo de funcionar este mecanismo, bastando para que se establezca el movimiento ejercer un esfuerzo en el extremo *E*; en el momento que este deje de actuar, la palanca se apoyará en el tope *B*; el rodillo *o'* se separará del *o*, y el movimiento quedará interrumpido.

526. e.—**Embrague de los engranajes.**—Dos sistemas principales pueden seguirse cuando se trata de montar un engranaje que pueda engranar ó desengranar en el momento deseado. Uno de ellos consiste en hacer que uno de los ejes tenga movimiento de traslación en sentido longitudinal; en el otro sistema se hace que una de las ruedas sea loca con respecto á su árbol, con lo cual puede establecerse la comunicación por un procedimiento cualquiera.

527. El primer método, ó de *traslación del eje*, está representado en la *figura* 146. El árbol movible *A* lleva dos gargantas *m* y *n*, sobre cada una de las cuales se apoya una palanca de retenida *T*. En el caso que representa nuestra figura, no hay comunicación entre los árboles *A* y *B*; mas cuando se desea embragar, se eleva la palanca *T*; se traslada por medio de otra palanca (que no aparece en la figura) el árbol *A*, dejando caer la palanca de retenida sobre la segunda garganta *n*, cuya colocación es tal, que las ruedas dentadas quedarán engranando una con otra. La operación del desembrague es inversa de la que hemos explicado: la traslación del eje deberá verificarse de izquierda á derecha y la palanca de retenida pasará de la garganta *n* á la *m*.

528. Representamos en la *figura* 147 el segundo sistema de embrague para los engranajes, ó sea por medio de *rueda loca*. Goza de esta propiedad la que está montada sobre el árbol *A*, y de este modo, el movimiento que reciba del piñón montado en *B*, aun cuando comunicado á la rueda, no se trasmitirá al eje *A*. Para que la rueda sea solidaria de éste, se

emplea un manguito *m*, en cuyo interior hay practicada una ranura longitudinal que le permite resbalar sobre el saliente que le corresponde en el eje *A*, visible en nuestra figura. Dicho manguito lleva uno ó varios topes *n*, que pueden encajar á voluntad en los correspondientes orificios practicados en la rueda loca. La maniobra se verifica como en los embragues ordinarios, actuando sobre una palanca, cuyo extremo ahorquillado abraza la garganta que en su superficie exterior lleva el manguito; sirve esta, por lo tanto, como intermedio entre eje y rueda, que establece la conexión de ambos órganos.

529. Si los ejes de las ruedas dentadas no son paralelos, pueden emplearse análogos sistemas á los que hemos descrito para verificar el embrague y desembrague de uno y otro.

530. f.—**Embrague de correas.**—Las correas sin fin pueden ser empleadas en el embrague y desembrague de dos modos esencialmente diferentes. Consiste el primero en disminuir convenientemente la tensión de la correa, para que no pueda comunicar el movimiento aun cuando lo reciba una de las poleas en que está montada. El segundo sistema se reduce á hacer el trasporte de la correa desde una polea á otra loca, montada al lado de la primera.

531. El primer efecto, ó *variación de tensión*, puede conseguirse: 1.°, *por trasporte de un eje*, como representa la *figura* 148, en la que maniobrando con la cuerda *a*, se produce la elevación ó depresión del cojinete *b*, sobre el que actúa la palanca *bc*. Según la posición del cojinete, tendrá ó no la correa tensión suficiente para trasmitir el movimiento; 2.°, *por rodillos de tensión (fig.* 149), que consiste en un tambor ó rodillo *a* que tiene movimiento de rotación alrededor de su eje, montado en la extremidad de una palanca acodada *aob*, cuyo punto fijo es *o* y en cuyo extremo *b* se ejerce la acción conveniente para que el rodillo comprima ó no la correa cuanto sea necesario para que adquiera la debida tensión ó disminuya esta, según que deba verificarse ó no el embrague. En algunos casos se adiciona un contrapeso en la extremidad libre de la palanca acodada, que sea suficiente para mantener la tensión necesa-

ria sin necesidad de ejercer acción constante sobre ella; 3.°, *por polea de expansión*, representada en la *figura* 150. La llanta de la polea está formada de piezas independientes, reunidas al núcleo por medio de rayos oblicuos. Actuando sobre dicho núcleo, puede variar la oblicuidad de los rayos para obligar á la llanta á separarse más ó menos del eje, y que aumente ó disminuya por este efecto la tensión de la correa. Son verdaderas poleas de radio variable, y esta variabilidad puede obtenerse también por otros procedimientos distintos del representado en la figura.

532. Se obtiene el segundo efecto, ó *trasporte de la correa*, por medio de una palanca *a b* (*fig.* 151) llamada *pasa-correas*, cuyo extremo *b* está ahorquillado para abrazar la correa, y ejerciéndose la acción en el otro extremo ó mango *a*, se hace que la correa sea trasladada desde la polea fija á otra loca montada al lado de ella, cuando se quiera desembragar ó recíprocamente si se trata de hacer el embrague. Es necesario en todos los casos actuar sobre el ramal de entrada de la correa en la polea, y no sobre el de salida, pues de este modo no podría conseguirse el efecto deseado. También debe tenerse en cuenta que la rueda loca se ha de montar sobre el árbol conductor y en ningún caso sobre el conducido; porque si no, la correa no quedaría inmóvil después del desembrague, consumiéndose un trabajo innecesario y perjudicial en la mayoría de los casos.

ARTÍCULO II

Clase B.—Embragues automáticos.

533. Mecanismos correspondientes á esta clase.—Todos los embragues explicados en el artículo anterior, pueden hacerse automáticos ligando convenientemente la palanca ó barra donde se ejerce el esfuerzo, con alguno de los órganos de la máquina de que forman parte, para que produciendo su movimiento en uno ú otro sentido, se verifique el embrague

ó desembrague, según sea necesario. Conocida esta idea general, no hay necesidad de más detalles para la buena inteligencia de los embragues que nos ocupan, cuando sean derivados de los manuales, ó puedan considerarse como modificación sencilla de estos. Constituyen, por lo tanto, un primer tipo de embragues automáticos, que pueden emplearse en cuantas máquinas sean necesarios.

534. Existe un segundo tipo de embragues automáticos, que más bien pueden llamarse *embragues de seguridad*, por cuyo medio se verifica el embrague, cuando el órgano conductor marcha en un sentido determinado ú obedeciendo á la acción de un esfuerzo también determinado; pero cuando varía el sentido del movimiento para los primeros, ó bien cuando el esfuerzo rebasa los límites marcados en los segundos, el desembrague se verifica automáticamente. En otros términos: en los que llamamos embragues de seguridad, *el órgano conducido sólo obedece á la acción del conductor que obra directamente sobre él, cuando el esfuerzo no pasa de ciertos límites, ó cuando el movimiento se verifica en un sentido determinado.*

Pertenecen á esta categoría los mecanismos que á continuación se expresan:

a.—Embrague por fricción, de seguridad al esfuerzo.

b.—Idem por íd., de seguridad al movimiento.

c.—Idem por dientes y fiadores.

535. a.—Embrague por fricción, de seguridad al esfuerzo.—El principio fundamental de este embrague es el mismo que ha servido en los embragues manuales de fricción. El rozamiento desarrollado entre dos superficies en contacto es la fuerza que proporciona la comunicación del movimiento. El eje *A* (*fig.* 152) está terminado por una caja *mnpq*, en la que se halla encerrado un disco *rs*, unido invariablemente al eje *B*. Este disco *rs* está comprimido por otros dos de madera que se ven también en corte en nuestra figura, y el grado de compresión puede aumentarse ó disminuirse á favor de los pernos ó bolones que aseguran la tapa *nq* de la caja en que termina el eje *A*. Graduada la compre-

sión convenientemente, puede hacerse que el rozamiento desarrollado entre las superficies planas corresponda á un valor dado del esfuerzo que deba trasmitirse; resultando que cuando éste rebase dicho límite, deja de comunicarse el movimiento por ser insuficiente el rozamiento desarrollado; ó en otros términos, el desembrague se produce por sí mismo cuando el esfuerzo es superior al límite marcado.

536. b.—Embrague por fricción, de seguridad al movimiento.—El tipo que vamos á explicar es conocido con el nombre de *embrague de Dobo*, y está representado en proyección y corte por la *figura* 153. Sobre el árbol conducido *O* está montado un disco *A A* que puede resbalar á rozamiento suave en un anillo *B B*, ligado invariablemente al árbol ú órgano conductor. Sobre el disco *A A*, en el hueco comprendido entre el árbol y el saliente del anillo, hay un cierto número de piezas *M, M*.... giratorias alrededor de los ejes *c, c*.... fijos al disco, y terminados por el extremo próximo al anillo en arcos de círculo, cuyo radio es un poco menor que el del referido anillo. Unos muelles *r, r*.... fijos también al disco, comprimen ligeramente estas piezas, haciendo que se apoyen sobre el anillo en los puntos *m, m*.... extremos del arco que limita exteriormente dichas piezas.

Si se imprime un movimiento al órgano conductor, y por consiguiente al anillo, en sentido contrario á la flecha, éste resbalará sobre los arcos *m n*, puesto que el elemento de círculo que podría describir un punto *m* alrededor de *c*, es interior á la circunferencia de *B*, y por consiguiente, cediendo los muelles, el árbol no será arrastrado en su movimiento de rotación. Por el contrario, si la rotación se verifica en el sentido indicado por la flecha, el resbalamiento será imposible, puesto que el punto *m*, girando alrededor de *c*, tendería á penetrar en el anillo; se establece, por lo tanto, una conexión entre éste y el disco, que obliga á este último, y por consiguiente al árbol en que está montado, á girar en el sentido de la flecha.

Resulta, finalmente, que montado el aparato en la forma que indica la figura, el órgano conducido obedece á la acción

de las rotaciones positivas, mas no de las negativas, y esta circunstancia debe tenerse muy en cuenta cuando se trate de montar una trasmisión en que deba utilizarse tal propiedad y se desee un mecanismo que, como el que hemos descrito, no esté expuesto á choques violentos, que siempre constituyen verdadero inconveniente para la buena marcha de los mecanismos.

537. c.—**Embrague por dientes y fiadores.**— Tiene también por objeto producir el movimiento del órgano conducido en un sentido solamente. El órgano conductor suele en este caso ser una palanca *Ao* (*fig.* 154) que lleva articulada en uno de los puntos *c* una pieza de forma circular llamada *fiador*, el cual termina por un pequeño saliente *D*, que se llama *uña del fiador*. El órgano conducido es una rueda *M* provista de dientes que tienen la forma especial marcada en la figura, y sobre ellos se apoya el fiador mediante la acción de un muelle *r*, fijo por uno de sus extremos á la palanca. Cuando se hace mover á esta en el sentido de la flecha, la uña del fiador abraza uno de los dientes y arrastra consigo á la rueda *M* y demás órganos ligados á ella; pero si el movimiento es en sentido contrario, la uña resbala sobre el plano inclinado formado por el diente siguiente, penetra en el hueco que sigue, salva del mismo modo uno ó varios dientes, y durante esta marcha inversa no puede arrastrar consigo á la rueda. Se produce, por lo tanto, el embrague y desembrague de un modo alternativo, siempre que sea de esta naturaleza el movimiento que se imprime á la palanca. Este mecanismo es muy empleado en la industria, y afecta diversas formas, según los usos á que se destina. Mas cuando se emplea una palanca de esta naturaleza para producir el esfuerzo motor en un tornillo ú otra máquina que esté solicitada constantemente por una resistencia que le obligue á girar en sentido contrario de la flecha cuando la potencia no ejerza su acción, se hace preciso adicionar un nuevo fiador *c'E* que solicitado también hacia la rueda por medio de un muelle *r'*, ejerce una acción de retenida cuando el esfuerzo deja de actuar.

538. Este mecanismo tiene á veces una forma todavía más sencilla, en la cual el mismo muelle *r* hace el efecto del fiador. Así sucede con el que se conoce en la industria con el nombre de *carraca*, que representamos en la *figura* 155. El muelle fiador *L* acciona sobre los dientes de la rueda *C* para imprimirla movimiento de rotación en un sentido determinado; mas cuando se hace variar éste, resbala dicho muelle por los planos inclinados de los dientes, sin proporcionar movimiento alguno á la rueda (*).

539. El muelle del fiador suele suprimirse siempre que puede ser sustituída su acción por el mismo peso del fiador, ó lo que es lo mismo, cuando esta fuerza sea suficiente para que la uña vaya penetrando en los diversos huecos que quedan entre los dientes. Constituye en este caso lo que se llama un *trinquete*, que representamos en la *figura* 156, *lám.* 18. La acción del fiador ó trinquete se ejerce de un modo idéntico al explicado en los casos anteriores; pero es preciso, dada la posición de la figura, que permanezca constantemente apoyado en la parte superior de la rueda, para que la uña pueda arrastrar á ésta.

A veces se desea que el movimiento pueda verificarse en ambos sentidos, y para conseguirlo se da al trinquete la forma simétrica que indica dicha figura, con objeto de que pueda apoyarse á un lado y otro de la palanca ó barra en que se halla montado.

540. En todos los aparatos descritos, la rueda puede girar solamente cuando la palanca donde se ejerce el esfuerzo marcha en un sentido determinado. Resultan intermitencias grandes en el movimiento de la rueda; y cuando se desea que no existan, se hace uso de la *palanca de Lagarousse (fig.* 157) *ó palanca de doble fiador*. La palanca *AC* gira alrededor del punto *i* y lleva dos fiadores *CD* y *C'D'*, articulados respecti-

(*) El mecanismo á que hace referencia el texto, es un taladro de mano, cuya descripción puede verse en el tratado de los Sres. Larraya y Lanaja, titulado *Trabajo de metales y maderas.*

vamente en los puntos C y C'. Cuando se la da un movimiento en sentido de la flecha, manda el fiador CD, y el $C'D'$ resbala sobre los dientes. Por el contrario, si el movimiento es inverso, mandará $C'D'$, y CD resbalará sobre los dientes de la rueda. Esta última recibe, por lo tanto, el movimiento en la doble oscilación de la palanca, por el embrague y desembrague alternativo que se verifica entre las uñas de los fiadores y los dientes de la rueda. La disposición de los fiadores puede ser análoga á cualquiera de las explicadas anteriormente, y así, según los casos, estarán provistos ó no de muelles que los mantengan en contacto constante con la rueda, y aun esta última podrá llevar ó no fiador de retenida para impedir el movimiento que pudiera tener en sentido inverso de la flecha.

541. Para terminar con el tipo de mecanismos que nos viene ocupando, indicaremos que todos los explicados tienen el inconveniente (que en algunos casos debe tomarse en consideración) de producir, cuando son de grandes dimensiones, un ruido insoportable causado por el choque del fiador cada vez que salva algún diente para penetrar en el hueco siguiente. Además de este inconveniente, existe el relativo al desgaste, tanto de los dientes como de la uña del fiador, durante los mismos instantes á que hacemos referencia. Se evitan ambos inconvenientes con el *embrague mudo* representado en la *figura* 158. Los dientes de la rueda son casi rectos, simétricos, y no presentan más que una ligera inclinación con respecto al radio. Alrededor del eje de esta rueda puede girar, independientemente de ella, una palanca acodada $Fomn$. En F se articula un fiador FD, cuya extremidad D puede penetrar en los huecos que dejan entre sí los dientes de la rueda. Alrededor del eje o gira igualmente la palanca oA, en cuya extremidad A se aplica la fuerza motriz; esta palanca y el fiador están ligados por una pequeña biela CY articulada en sus extremidades. Finalmente, dos topes m y n fijos á la palanca acodada, limitan el juego de la palanca motriz. Cuando desciende la extremidad A, la uña del fiador penetra en los huecos de la rueda y hace mover á ésta. En el momento

que se inicia el ascenso, el fiador es arrastrado por la biela *C Y* y la uña verifica el desembrague; mas cuando la palanca llega al tope *n*, arrastra consigo á la palanca acodada, que gira también independientemente de la rueda. Al descender nuevamente la palanca motriz, el fiador, solicitado por la biela, desciende y penetra en un nuevo hueco de la rueda, á la que arrastra otra vez en su movimiento. El efecto que en éste produce el tope *m*, es indicar la posición de la palanca, para la cual, penetrando el fiador en la rueda, puede verificarse el embrague y producir el movimiento. Este embrague no produce ruido alguno, y el desgaste de sus dientes es menor que en los anteriores; pero las intermitencias son más largas que en ellos.

CAPÍTULO II

Segunda especie.—Moderadores.

542. Objeto y división.—Una de las precauciones inherentes á algunas clases de mecanismos, es disponer de los medios convenientes para oponerse á toda aceleración de velocidad que pudiera ser perjudicial al movimiento de la máquina, y á veces peligrosa. Los aparatos que cumplen este efecto, toman el nombre de *moderadores*.

El empleo de estos aparatos se extiende á los casos en que deba suspenderse el movimiento ó retardarlo por cualquier causa. Con efecto, para la suspensión del movimiento ó detención de la máquina, no bastará hacer uso de los embragues, que separan uno de otro los órganos conductor y conducido; con este sólo mecanismo, el último órgano que citamos y los aparatos unidos á él, continuarían marchando en virtud de la fuerza viva ó energía adquirida, hasta la extinción completa de ésta, que se habrá de verificar en virtud de la trasformación de ella en trabajo resistente. Se hace necesario, por consiguiente, tanto en este caso como en el que se deba retardar el movimiento ó impedir su aceleración, incrementar artificialmente las resistencias para conseguir el objeto que se desea: en otros términos, es indispensable presen-

tar una nueva resistencia al movimiento de la máquina, para que absorba la fuerza viva ó energía que esta posee.

543. Esta idea sirve de base á la descripción de todos los moderadores que hemos de explicar, los que dividiremos en dos clases principales, según la naturaleza de la resistencia que se introduce para retardar el movimiento. Las clases de moderadores á que nos referimos son las siguientes:

A.—Volantes de aletas.
B.—Frenos.

En la primera clase, es la resistencia del aire la que se emplea como moderador del movimiento, y en la segunda el rozamiento de un cuerpo sólido que se pone en contacto con los órganos cuyo movimiento debe retardarse.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Volantes de aletas.

544. Descripción y teoría.—Este moderador, que según hemos dicho pone en juego como fuerza retardatriz á la resistencia del aire, se compone *(fig.* 159) de un árbol de rotación *cc* al que van adaptados varios brazos terminados por placas metálicas muy delgadas, ó *aletas a, b*, cuyo plano es ordinariamente perpendicular á la dirección del movimiento. La ligazón de las aletas con sus brazos respectivos suele verificarse por medio de un pivote ligeramente cónico que se introduce á rozamiento duro en una cavidad de la misma forma practicada en el brazo. Con esta disposición, serán susceptibles las aletas de tener á voluntad una cierta inclinación con respecto á la dirección del movimiento, lo que permitirá disminuir convenientemente la intensidad de la resistencia del medio. El árbol del volante está ligado con la máquina á que debe adaptarse por un mecanismo especial,

no marcado en la figura, que suele ser generalmente de tornillo sin fin.

545. Cuando el sistema se pone en movimiento, la resistencia del medio en que se mueve obra sobre cada una de las aletas, con una intensidad que, según hemos dicho en el estudio 2.º, párrafo 124, puede representarse por la fórmula

$$F = K\delta A\, v^2$$

en la que es conocida la significación de las diversas cantidades; ó bien poniendo en evidencia la velocidad angular que llamaremos ω y representando por r la distancia del centro de las aletas al eje de rotación, por la fórmula equivalente

$$F = K\delta A\omega^2 r^2.$$

Si representamos por P la potencia constante que actúa sobre el sistema á una distancia p del eje de giro, el efecto que produciría, si obrase sola, sería acelerar indefinidamente la velocidad; pero creciendo muy rápidamente la resistencia del aire, según la fórmula que hemos presentado, llegará un instante en que el trabajo elemental de esta resistencia sea igual al trabajo elemental de la fuerza P; en este momento cesa la aceleración de la velocidad (*). Esta llegará, por lo tanto, á su máximo cuando se verifique

$$P p\, \omega dt = n(K\delta A\, \omega^2 r^2)\, r\omega dt \qquad (a)$$

en cuya expresión representa n el número de aletas; de ella se deduce el valor

$$\omega^2 = \frac{Pp}{nK\delta A r^3} \qquad (b)$$

que será tanto menor cuanto mayores sean n, A y r.

(*) Véanse los principios de la teoría dinámica de los mecanismos contenidos en el artículo I, estudio 2.º de este tratado.

546. En realidad, este límite de velocidad es siempre menor que el límite teórico, atendido á que el rozamiento en los apoyos ó guías del movimiento del eje y las demás resistencias nocivas que pueda presentar la máquina, obran también como moderadores. Como es natural, debiéramos haber tenido en cuenta estas resistencias nocivas al establecer la ecuación (*a*); pero se ha hecho tantas veces aplicación de su estudio, que creemos innecesario complicar el cálculo, mucho más, cuanto que no habríamos de obtener nuevas consecuencias. Téngase también en cuenta que hemos supuesto al plano de las aletas normal á la dirección del movimiento, y que por lo tanto, en el caso de oblicuidad, quedará modificada la fórmula *(b)* poniendo en evidencia el ángulo correspondiente.

ARTÍCULO II

Clase B.—Frenos.

547. **Tipos correspondientes á esta clase.**—La resistencia que modera el movimiento en estos aparatos, es debida á un cuerpo sólido, sea rígido ó flexible, que se oprime contra el órgano ú órganos en movimiento, produciendo una fuerza de rozamiento tanto mayor cuanto más elevado sea el grado de compresión. Este puede obtenerse por un mecanismo cualquiera, que varía según la índole de la máquina á que se deba aplicar el freno. Aun cuando son muchas las disposiciones que suelen presentar, explicaremos solamente las que están comprendidas en el cuadro siguiente (*):

a.—Freno de carruajes ordinarios.
b.—Freno de caminos de hierro.
c.—Freno de cinta metálica.
d.—Freno de cuerdas.

(*) Omitimos hablar de los frenos neumáticos y de los hidráulicos, porque su estudio debe incluirse en el de la neumática y de la hidráulica respectivamente.

548. **Freno de carruajes ordinarios.**—Cuando se enrayan las ruedas de un carruaje cualquiera, ó se coloca la rastra en un carruaje de artillería, se cambia el rozamiento de rodar en otro de resbalar, que como se sabe, es de mayor intensidad. Constituye tal disposición un verdadero freno que proporciona nueva resistencia al movimiento, y hace que se retarde éste, como es necesario sobre todo, en las bajadas cuya inclinación rebasa cierto límite. Sin embargo, el sistema expuesto presenta el inconveniente de proporcionar una intensidad constante para el rozamiento, la que depende exclusivamente de la carga total del carruaje, y por lo tanto no se puede variar á voluntad, como es indispensable para que el freno actúe en buenas condiciones.

549. Presentamos en la *figura* 160 la disposición que puede tener el *freno ordinario*, cuyo uso está muy generalizado, salvo las modificaciones necesarias para cada tipo de carruaje. Consiste el aparato en una barra horizontal *aa* terminada en sus extremidades por dos piezas ó *zapatas bb* que se adaptan ó no á voluntad sobre las llantas de las ruedas traseras del carruaje, obteniéndose la compresión por medio de un tornillo cuya maniobra se verifica con la ayuda de una manivela. El grado de compresión se gradúa por el mayor ó menor número de vueltas que se da al tornillo, cuyo movimiento puede obtenerse también por otra combinación conveniente de mecanismos que permitan hacer la maniobra sin descender del carruaje.

550. Esta disposición puede aplicarse también á una máquina cualquiera, bastando para ello modificar convenientemente la forma de las zapatas y los mecanismos que verifican su apoyo contra una de las ruedas ó poleas que tenga aquella. Como cuestión general, tanto en este freno como en los que hemos de explicar á continuación, presentaremos la de encontrar el tiempo que tardará la máquina en pararse desde el momento en que empieza la maniobra, y el espacio recorrido en dicho tiempo.

A este efecto, llamaremos R_1 la resistencia ordinaria que

presenta la máquina, relacionada á la superficie de rozamiento; R_2 el rozamiento producido por el freno, que dependerá de la presión normal que se ejerza, mediante la relación conocida $R_2 = fN$; v_0 la velocidad de la superficie sobre que obra el freno en el intante en que empieza á ejercer su acción; s el camino recorrido por el punto de aplicación del rozamiento, hasta conseguir la detención de la máquina; t el tiempo empleado y $M = \frac{P}{g}$ la masa correspondiente. La fuerza viva que posee la máquina en el momento que el freno empieza á obrar tendrá por valor Mv_0^2 y la ecuación de fuerzas vivas tomará la forma:

$$\frac{1}{2} Mv_0^2 = (R_1 + R_2)\, s$$

de la cual se deduce inmediatamente

$$s = \frac{Mv_0^2}{2(R_1 + R_2)} \qquad (c)$$

para expresión del camino recorrido.

El tiempo correspondiente á este camino, ó tiempo que tarda el freno en ejercer su acción, se calcula teniendo en cuenta que la fuerza retardatriz $R_1 + R_2$ comunica á la máquina una aceleración retardatriz, cuyo valor es:

$$j = \frac{R_1 + R_2}{M}$$

luego la ley de velocidades en este movimiento retardado, será:

$$v = v_0 - \frac{R_1 + R_2}{M}\, t$$

y haciendo $v = o$ se deduce

$$t = \frac{Mv_0}{R_1 + R_2} \qquad (d)$$

para valor del tiempo que se buscaba.

551. b.—**Freno de caminos de hierro.**—En la composición de un tren, se intercala de distancia en distancia un vagón freno, cuyas cuatro ruedas van provistas de las correspondientes zapatas iguales, y simétricamente colocadas con relación al plano diametral que es normal á la vía. La maniobra en el *freno ordinario*, que así se llama al representado en la *figura* 161, se verifica actuando sobre el sistema de palancas *abcdef* por medio de un mecanismo de manivela y tornillo no marcado en la figura y colocado en el interior del vagón.

La teoría es idéntica á la que hemos explicado anteriormente y las precauciones principales correspondientes al uso de este aparato, se refieren al cuidado que deben tener los guarda-frenos de mover el tornillo gradualmente, sin procurar que la parada sea brusca; pues dada la velocidad de los trenes, el choque que tendría lugar por esta causa, pudiera producir perniciosos efectos (*).

552. También es empleado el *freno trineo* para moderar la velocidad de los trenes descendentes por planos inclinados.

(*) Para hacerse cargo de los efectos que puede producir una detención brusca, indicaremos un dato curioso proporcionado por Mr. Gentil, y es que el choque producido equivaldría á caerse de un piso entresuelo, si el tren lleva una marcha de 25 kilómetros por hora, como sucede á los de mercancías; de un piso principal, si la marcha es de 30 kilómetros; de un segundo, cuando sea de 40; de un tercero, si es de 50, y por fin, de un piso cuarto, si la velocidad es 60 kilómetros por hora, como sucede á los express.

Con respecto al *número de frenos* que deben entrar en la composición de un tren, haremos observar, que además del que lleva el ténder, debe haber en cada tren de viajeros, marchando á la velocidad media de 40 á 60 kilómetros por hora, uno por cada cinco en pendientes de 0,003 á 0,005 y uno por cada cuatro en pendientes máximas de 0,005 en adelante. Para los trenes de mercancías, debe ser el número de frenos respectivamente 1 por 8, 1 por 7 y 1 por 6 vagones. Se procura poner después del ténder, uno ó dos á la cabeza, alguno intermedio y los demás á cola del tren, ya en los vagones más pesados que llevan carga ó en los coches de tercera.

Debe tenerse en cuenta que no hacemos referencia á los frenos neumáticos, pues con este sistema, todos los vagones del tren van provistos de freno, y su maniobra se verifica por una sola persona.

Consiste en patines de madera que se apoyan sobre el carril entre cada dos de las tres ruedas, por cada lado de un vagón especial convenientemente cargado, llamado vagón-freno. Movidas las palancas de los patines, se procura sobre los carriles una fuerte presión que levanta las ruedas, con lo cual el vagón-freno queda convertido en un verdadero trineo, cuyo rozamiento es proporcional al peso del mismo. La *figura* 162 representa el freno que nos ocupa, cuya maniobra se verifica por medio de la manivela *a* y el tornillo *b* (*).

553. Por último, indicaremos que también se usa el *freno automotor*, para cuya maniobra se utiliza la presión que tiene lugar sobre los resortes por el choque de los topes que llevan los vagones, haciendo parar el tren tan sólo por el efecto de interrumpir la entrada del vapor en la locomotora (cerrar el regulador) y dar freno al tender. El árbol del freno lleva dos palancas, cuyos extremos se prolongan contra los topes del vagón posterior. Estas palancas sirven de punto de apoyo á un resorte, por lo cual funciona el freno desde que los topes se chocan y entran en sus cajas (**).

554. c.—**Freno de cinta metálica.**—En muchos mecanismos se emplea este freno, que consiste *(fig.* 163) en una cinta flexible de acero que rodea al volante de la máquina, para verificar sobre él una compresión por medio de la palanca de maniobra *p*. La resistencia que por este medio se opone al movimiento ó rozamiento desarrollado en el contacto

---

(*) Este freno es también llamado freno Laignel y es empleado en los ferrocarriles de Lieja y de Sama de Langreo á Gijón. Pertenece al mismo sistema el freno Didier.

(**) El freno automotor más perfeccionado es el de Guerin, que hace competencia con gran éxito á otros sistemas alemanes y americanos.

Pero entiéndase que entre todos los frenos, el más potente es el que se obtiene con el empleo del contra-vapor, cuyo uso se aprende en la parte del curso que trata de las máquinas de vapor. Para evitar los grandes inconvenientes que presenta el uso del contra-vapor seco, se emplea mezclado con el agua de la caldera, tal como lo puso en práctica para las pendientes del Guadarrama y Pirineo, el inventor Mr. Ricour, Ingeniero Jefe del ferrocarril del Norte.

de la llanta de la rueda con la cinta, depende de la tensión que esta adquiere cuando se verifica la maniobra, y su cálculo es consecuencia directa de los principios que han servido de base para el estudio de las correas. Se emplea con gran éxito en los aparatos elevatorios.

555. Este freno es de una gran potencia y su uso se extiende también á los molinos de viento, pero con una sencilla modificación, que consiste en interponer entre la cinta y la llanta de la rueda unas duelas de madera unidas á la cinta, la que, á pesar de ello, conserva suficiente flexibilidad para hacer que se adapte el contorno interior de las duelas sobre la llanta y produzca el rozamiento necesario á la detención gradual de la máquina.

556. **Freno de cuerdas.**—Se utiliza el gran rozamiento producido por las cuerdas al desarrollarse sobre un tambor cilíndrico, para constituir un verdadero freno que suele emplearse en los barcos cuando están animados de poca velocidad, aun cuando su masa sea considerable, y por lo tanto también su fuerza viva. Con este objeto se hace uso de una cuerda fija por uno de sus extremos al barco; el otro extremo, después de dar varias vueltas á un cilindro vertical establecido en la orilla ó muelle, se sostiene con la mano ejerciendo acción de retenida; un pequeño esfuerzo bastará para equilibrar una gran tensión que desarrolle el barco, y conocida ésta, fácil será encontrar dicho esfuerzo, ya que una y otro están ligados por la relación (*a*) del párrafo 480, estudio sexto. La tensión ejercida por el barco, no será en general dato directo; pero su investigación depende del establecimiento de la ecuación de fuerzas vivas, de la que serán conocidas todas las cantidades que entran en ella.

La operación práctica para que la detención no sea brusca, como es indispensable, consiste en dar primero una vuelta á la cuerda sobre el cilindro; el esfuerzo que pueda hacerse no es entonces suficiente para detener el barco, que continúa su marcha; pero esta se retarda sucesivamente por el resbalamiento de la cuerda sobre el cilindro; entonces se arro-

lla la cuerda en mayor número de vueltas, el hombre calcula así instintivamente y sin necesidad de recurrir al cálculo que hemos indicado, la tensión que debe ejercer en la extremidad de la cuerda para conseguir paulatinamente la detención del barco, evitando cambios bruscos y también la rotura de dicho órgano flexible.

557. La misma propiedad se utiliza para descender sin peligro desde una altura bastante grande, pudiéndose salvar en un caso de apuro, por ejemplo, en un incendio. En este caso, se suspende el hombre á una cuerda que hace pasar por un cilindro de madera fijo, y teniendo el otro extremo en la mano, podrá moderar el descenso y aun detenerse en un punto cualquiera; se obtiene de este modo uno que pudiéramos llamar *freno improvisado*.

558. Por último indicaremos que pueden presentarse infinidad de aplicaciones de la propiedad que viene ocupándonos, y entre ellas el descenso de objetos pesados, como piezas de artillería por planos inclinados, para el cual basta fijar dos cuerdas en la parte superior y dar una ó dos vueltas á los extremos del objeto cuya velocidad de caída trate de moderarse. Si el número de vueltas es el conveniente, bastará la acción de retenida de una sola persona colocada en cada una de las extremidades libres y en la parte superior del plano inclinado, para que la velocidad no se acelere en el descenso.

CAPÍTULO III

Tercera especie.—Volantes

ARTÍCULO ÚNICO

559. Objeto y descripción.—Cuando una máquina está destinada á moverse durante un tiempo algo considerable, importa mucho que su movimiento sea uniforme, ó al menos que se separe poco de la uniformidad; porque de este modo no sólo se trasmitirá convenientemente la energía á la máquina motora, sino que ésta la distribuirá con regularidad entre las operadoras, para que efectúen en buenas condiciones el trabajo á que están destinadas. Ya en el estudio segundo ha podido entreverse esta circunstancia, al establecer la ecuación general de fuerzas vivas aplicada á las máquinas, y marcada en él con el número (1), en la cual, para que la energía total ó trabajo recibido se trasforme íntegra en trabajo útil, ó en otros términos, para que los valores de T_u y T_m sean iguales, no sólo es indispensable anular el término T_f, sino también hacer que sea cero el primer miembro $\Sigma\, {}^1/_2\, m v_1^2 - \Sigma\, {}^1/_2\, m v_0^2$, lo cual no se consigue sin que las velocidades v_1 y v_0 sean iguales, ó en otros términos, sin que el movimiento sea uniforme.

560. Entre los varios medios que existen de conseguir tal objeto de regularizar el movimiento de una máquina, de modo que se eviten las variaciones de la velocidad ó que por lo menos sean insensibles estas variaciones, uno de ellos es montar sobre uno de los árboles de trasmisión una rueda más ó menos grande, de cerco pesado ligado al eje por medio de rayos, á la que se da el nombre de *volante*. Se comprende á primera vista que, dando á este órgano mecánico una masa suficientemente grande, las variaciones de energía ó fuerza viva que puede tener la máquina, producirán pequeñas variaciones en la velocidad, y tanto menores cuanto mayor sea la masa á que aludimos.

561. Condiciones á que deben satisfacer los volantes.—Comprobaremos la idea que acaba de verterse, y aun la completaremos cuanto sea posible, aplicando á un volante la ecuación general de las máquinas (1), presentada en el estudio segundo, y supongamos, para facilitar la inteligencia, que toda la masa del sistema está concentrada en el cerco ó llanta. Si llamamos ΔT al segundo miembro de la ecuación general, que representa, como es sabido, el exceso del trabajo motor sobre el resistente, ó en otros términos, la diferencia entre la energía recibida y el trabajo efectuado, y al mismo tiempo ponemos en evidencia en el primer miembro el valor de la velocidad angular, para lo cual basta igualar la velocidad v al producto ωr, en que r representa el que puede llamarse *radio medio* del volante, la ecuación mencionada podrá pasar por las siguientes trasformaciones:

$$\Delta T = {}^1/_2 \Sigma m (v_1^2 - v_0^2) = {}^1/_2 \Sigma m r^2 (\omega_1^2 - \omega_0^2) = {}^1/_2 Y (\omega_1^2 - \omega_0^2)$$

después de haber sustituído en vez de $\Sigma m r^2$ ó momento de inercia del volante, su valor, que llamamos Y.

Como la condición inherente al volante debe ser, según hemos dicho, anular las variaciones de la velocidad, para que esta sea constante y el movimiento uniforme, debe ponerse

en evidencia en la ecuación anterior el valor $\omega_1 - \omega_0$, á cuyo efecto damos al segundo miembro la forma

$$\tfrac{1}{2} Y (\omega_1 + \omega_0)(\omega_1 - \omega_0)$$

y observando que la cantidad $\frac{\omega_1 + \omega_0}{2}$ no es otra cosa que la velocidad media que corresponde al período que se considera, ó velocidad de régimen, podemos llamarla ω, con lo cual la ecuación general de los volantes toma la forma

$$\Delta T = Y \omega (\omega_1 - \omega_0) \quad (a)$$

562. Pueden deducirse de esta ecuación las condiciones generales inherentes á los volantes, y para ello basta despejar el valor $\omega_1 - \omega_0$, cuya expresión será

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{\Delta T}{Y \omega}$$

con lo cual se observa que el primer miembro, ó sea la variación de velocidad, será tanto más pequeña (á igualdad de ΔT) cuanto mayores sean los valores de Y y de ω. Es decir, que un volante cumplirá tanto mejor su efecto cuanto mayor sea su momento de inercia, y cuanto mayor sea también la velocidad de régimen. Pero dependiendo el momento de inercia de la masa del volante, cuyo valor en función del peso es $\frac{P}{g}$, y viniendo su valor en función del radio, podremos expresar del siguiente modo las consecuencias que de la fórmula se han deducido.

Las condiciones que debe cumplir un volante quedarán tanto mejor satisfechas, cuanto mayores sean su peso, su radio y su velocidad de régimen.

563. Con respecto á las *condiciones prácticas de su establecimiento*, indicaremos que convendrá colocarlo muy cerca del

órgano de la máquina, cuyas variaciones de velocidad sean más ostensibles, con lo que se conseguirá una menor alteración en el movimiento de los demás mecanismos. Lo más común es montarlo cerca del órgano motor, ó del útil operador, según que sea uno ú otro la causa primordial de las variaciones que la velocidad pueda experimentar. Mas si uno y otro órgano están simultáneamente expuestos á dicha variación, se podrán poner en la máquina hasta dos volantes, de no hallar otro medio más ventajoso de regularizar el movimiento; pues debe observarse que como pieza muy pesada y de grandes dimensiones, según hemos dicho, consumirá inútilmente parte de la energía comunicada á la máquina.

564. Cálculo analítico de un volante.—La ecuación (*a*) contendrá los elementos necesarios para el cálculo de un órgano de esta naturaleza, siempre que se tenga en cuenta que el valor de *Y* puede ponerse en función del peso, este también en función del volúmen y, como es consiguiente, de las diversas dimensiones que pueda tener.

Para dicho cálculo será indispensable fijar un cierto límite de tolerancia, digámoslo así, en las variaciones de la velocidad, el cual se puede expresar en general por una fracción $\frac{1}{n}$ llamada *coeficiente de variación de la velocidad* (*), cuyo coeficiente nos expresa la relación que existe entre la

---

(*) El valor de este coeficiente, varía con la naturaleza de la máquina, pudiendo citarse como muy admitidos en los casos que se expresan, los números siguientes:

De $\frac{1}{40}$ á $\frac{1}{60}$ para las máquinas que reclaman una gran regularidad, como por ejemplo, las de tejidos ó hilados.

De $\frac{1}{32}$ para las máquinas útiles y cuantas no requieran una gran regularidad.

De $\frac{1}{15}$ á $\frac{1}{25}$ para las máquinas soplantes, sierras, etc., y en general para las que ejecutan trabajos poco delicados.

mayor variación que puede tolerarse y la velocidad de régimen; ó expresado analíticamente

$$\frac{1}{n} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{\omega}.$$

De esta expresión puede deducirse el valor

$$\omega_1 - \omega_0 = \frac{\omega}{n}$$

que sustituído en la ecuación (*a*) nos proporciona la fórmula

$$\Delta T = \frac{Y\omega^2}{n} \qquad (b)$$

que servirá para el cálculo de un volante, bien sea establecido ó en proyecto. En el primer caso, ó cálculo de un volante establecido, bastará despejar el valor de ω y sustituir los que tienen las demás cantidades que nos son conocidas; y en el segundo, ó cálculo de un volante en proyecto, deberá ponerse en evidencia el peso, sustituyendo el valor correspondiente al momento de inercia Y, que como es natural, variará con la forma que tenga la llanta, cuya sección más general es elíptica ó rectangular. De dicha fórmula podrá deducirse ya el valor del peso ó el del radio, después de asignar á uno de ellos un valor prudencial.

565. Es muy general fijar el valor del radio según las condiciones puramente locales y particulares de la máquina y deducir el correspondiente al peso, salvando de este modo la indeterminación que presenta este problema. El valor de la velocidad de régimen, generalmente dado también *à priori*, se deduce del número N de vueltas que la máquina dé en la unidad de tiempo, que por lo regular es el minuto, obteniéndose

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} = \frac{\pi N}{30}$$

cuyo valor puede también sustituirse en la fórmula (*b*) si se quiere poner en evidencia el de *N*.

566. Cálculo gráfico.—Supuesto que los volantes deben adaptarse á aquellos mecanismos que presentan irregularidades en su marcha, nada más natural al hacer el estudio gráfico de este órgano mecánico, que mirarlo bajo el punto de vista de su ligazón con uno de los mecanismos ya estudiados. Consideremos, por lo tanto, una manivela, cuyas condiciones de movimiento nos son perfectamente conocidas, y que como se indicó al hacer su estudio, necesita el poderoso auxiliar del volante, para que el movimiento se aproxime á la uniformidad deseada.

Sea (*fig.* 164) *ca* la manivela, *ab* la biela y *bb'* la barra que tiene movimiento rectilíneo, en la cual se aplica la potencia. Supóngase que la resistencia *Q* obra tangencialmente al círculo de radio *cm*, y supóngase montado en el árbol *c*, próximo á la manivela, un volante cuyo radio medio sea el de la circunferencia *NN* que lo representa.

Si en todos los problemas que hemos resuelto suponíamos uniformidad en el movimiento, y por lo tanto era dada una de las fuerzas *P* ó *Q* para trazar el polígono cerrado que nos proporciona la otra, en este problema serán datos las direcciones y magnitudes de ambas fuerzas; pero será preciso que intervenga en el cálculo otra nueva, la fuerza de inercia, que según el teorema de Alembert proporciona en unión de las otras el llamado equilibrio dinámico, y por cuyo medio se resuelven fácilmente cuantas cuestiones puedan presentarse análogas á la que nos ocupa (*).

567. Hagamos, pues, intervenir en el cálculo de este

(*) Es el teorema de Alembert el poderoso auxiliar del cálculo gráfico, y excusamos poner de relieve las ventajas que con su aplicación se obtienen, al expresar que debe existir equilibrio entre las fuerzas reales y las de inercia. No variará en nada la doctrina sentada para los casos estudiados en los mecanismos ordinarios, en que no se toman en consideración estas últimas. El polígono de las fuerzas debe cerrarse con unas y otras.

mecanismo, además de las fuerzas exteriores cuya naturaleza conocemos por haber intervenido en todos los cálculos mecánicos, la inercia del volante, cuya acción no debe considerarse como una fuerza única, sino más bien como un par, puesto que los elementos de su masa están repartidos con uniformidad alrededor de su eje c, y supongamos las fuerzas F y F' del par aplicadas en dos puntos n y n', diametralmente opuestos en la circunferencia NN, trazada con el radio medio, ó por otro nombre radio de inercia del volante.

Suponiendo, para no complicar la figura, que no exista rozamiento alguno, sigamos la marcha general prescrita para el cálculo gráfico, y partiendo de la potencia dada $P = 1-2$, constrúyase en primer lugar el triángulo $1-2-3$, que nos da la tensión $T=2-3$ de la biela y la presión normal $N=1-3$ sobre las guías. Como la fuerza Q es conocida en magnitud y dirección, podrá ser inmediata la construcción del segundo triángulo $2-3-4$, obtenido por el trazado de $2-4$, igual y paralela á Q. El lado $3-4$ nos representa en magnitud y dirección la reacción correspondiente al árbol c, cuya posición se obtendrá trazando la co paralela á dicha recta, ya que el círculo de rozamiento se ha reducido al punto c.

568. Pero la reacción co no concurre en el mismo punto que las direcciones mQ y ab de las fuerzas Q y T. El equilibrio no podrá existir entre tres fuerzas, y para restablecerlo se hace precisa la intervención de las fuerzas de inercia F y F'. La condición para determinar estas fuerzas será, por lo tanto, según los principios conocidos de Mecánica racional, que la resultante del par (F,F') formado por ellas, y de la fuerza Q, sea igual y directamente opuesta á la resultante de las otras dos, cuyas direcciones son oc y oa, y cuyas magnitudes R y T están marcadas en el polígono; pero la resultante de estas fuerzas es la paralela oQ' trazada por o al lado $2-4$ y su valor es el mismo $2-4=Q$ que prescribe el polígono, y por lo tanto, podemos resolver el nuevo problema auxiliar que se presenta, mediante la condición de que *la resultante del par y de la fuerza* Q *sea igual y directamente opuesta á* Q'.

La investigación de las fuerzas de inercia resulta, por lo tanto, sumamente sencilla, dada la condición que acabamos de indicar, y basta prolongar F y Q' hasta su encuentro en o_1 y verificar lo mismo con F' y Q hasta que se corten en o_2 para obtener la dirección $o_1 o_2$ de la resultante de estas fuerzas. Esta dirección servirá de base para construir el triángulo $2-4-5$ que nos proporciona en $2-5$ la magnitud de cada una de las fuerzas de inercia F y F', que componen el par aplicado al volante.

569. Debe tenerse en cuenta en todos los casos el sentido que corresponde á las fuerzas de inercia, que unas veces obran como fuerzas aceleratrices y otras como retardatrices, según las posiciones que tenga la manivela. En el caso de nuestra figura, la acción es retardatriz, cual se deduce al observar que el momento de la resultante oQ' es mayor que el de la resistencia mQ y que, por lo tanto, el movimiento de la manivela tiende á acelerarse, lo que es natural dada la posición que ocupa el brazo ca.

De todos modos, conocida la magnitud de las fuerzas F, F', ninguna dificultad existe ya para encontrar la aceleración del movimiento en el caso de un volante construído, pues basta recordar los principios de Mecánica racional, según los cuales se obtiene el valor de la aceleración angular en función de las fuerzas que hemos encontrado y del momento de inercia correspondiente al volante (*). Recíprocamente, conocida dicha ley, podrá hallarse el momento de inercia, y de él deducir las dimensiones correspondientes, en función de las que pueden considerarse como datos de la cuestión, de un modo análogo al explicado en el cálculo analítico.

570. Observaciones relativas á los volantes.—Uso de

(*) Delaunay, párrafo 247. La aceleración angular tiene por valor en este caso $\frac{d\omega}{dt} = \frac{F.2r}{Y}$ siendo r el radio de inercia. El segundo miembro de esta expresión es completamente conocido, pudiéndose hacer su construcción gráfica por los procedimientos que nos son familiares.

los contrapesos.— Siendo los volantes, según la teoría explicada, verdaderos depósitos de energía, la que almacenan bajo la forma de fuerza viva ó energía potencial, cuando la comunicada á la máquina excede al trabajo resistente, y restituyen bajo la forma de este último cuando el valor de la energía comunicada no sea el suficiente, resulta como elemento principal en el cálculo analítico de un volante el conocimiento del término ΔT, cuyo valor dependerá de la naturaleza de la máquina.

Difícil será marcar reglas fijas que puedan servir para prefijar dicha cantidad, pues cada mecanismo presenta un género distinto de irregularidad de acción entre la potencia y resistencia. Por esta razón, y á pesar de la generalidad de las fórmulas que hemos encontrado, tiene ventajas en ciertos casos el cálculo gráfico, haciendo uso en otros de fórmulas empíricas que salvan de un modo ó de otro, pero siempre mediante las cantidades que entran en su constitución, las dificultades que pueden presentarse (*). También se podrán utilizar las tablas que incluímos en el lugar correspondiente, marcándolas con el *número* 11, las cuales contienen cuantos

---

(*) Los fórmulas más admitidas por el general Morín para los volantes en los casos que se expresan, son las siguientes:

MÁQUINAS DE VAPOR SIN EXPANSIÓN Y CON Ó SIN CONDENSACIÓN

$$P = 5600 \times \frac{n\,C}{N\,v^2} \quad \text{en la que}$$

P representa el peso del volante, ó más bien el de su cerco ó corona;
v velocidad referida á $1''$, de la superficie cilindrica media del cerco, entendiéndose que es la media con relación á las que lo limitan interior y exteriormente;
C fuerza nominal en caballos de vapor;
n coeficiente de regularidad;
N número de vueltas que dé en $1''$ el árbol en que se ha de montar el volante.

El coeficiente 5600 es, en números redondos, el admitido por Morín para las máquinas sin balanzadera, y algo mayor que el término medio de los que asigna á las de balanzadera en los tres casos que no toma en consideración.

datos son necesarios para el cálculo de los volantes en las distintas clases de máquinas de vapor.

571. En algunos casos, puede no ser suficiente la acción del volante para evitar las irregularidades en la marcha de una máquina; así sucede, por ejemplo, cuando entran en su constitución un cierto número de piezas excentricas con re-

---

MÁQUINAS DE VAPOR CON EXPANSIÓN Y CON Ó SIN CONDENSACIÓN

$$P = K \frac{n C}{N v^2}$$

Las letras tienen igual significación que en la fórmula anterior.
Los valores del coeficiente K varían con el grado de expansión.

Si esta principia en el momento después de haber recorrido el émbolo la mitad de la altura del cilindro..... $K = 7080$
Si cuando ha recorrido la tercera parte..... $K = 8166$
Y si la cuarta parte..... $K = 9128$

MARTILLOS DE FORJA FRONTALES

De 3000 á 3500 kg. de peso y dando de 70 á 80 golpes por minuto..... $P = \frac{20000}{R^2}$

De 4000 á 4900 kg. y dando igual número de golpes..... $P = \frac{30000}{R^2}$

MARTILLOS DE FORJA Á LA ALEMANA

De 600 á 800 kg. de peso, comprendido el del mango, y dando de 100 á 110 golpes por minuto..... $P = \frac{15000}{R^2}$

NARTILLOS DE FORJA BASCULARES, LLAMADOS MARTINETES

De 500 kg. de peso y dando de 150 á 200 golpes por minuto. $P = \frac{9000}{R^2}$

De 360 kg. y dando igual número de golpes..... $P = \frac{6000}{R^2}$

En todas estas fórmulas R representa el radio del volante.

SIERRAS CIRCULARES DE GRAN DIÁMETRO

$$P = \frac{30000}{v^2}$$

v representa la velocidad de la circunferencia mayor de la sierra.

lación al eje principal, y dotadas de movimiento alternativo. Se evita la influencia perniciosa de ellas por medio de los *contrapesos*.

Para comprender las ventajas de este órgano mecánico, consideremos una manivela *AB* (*fig.* 165), cuyo centro de gravedad sea *g*; cuando la manivela desciende, su peso, aplicado al centro de gravedad, se añade á la presión ejercida para ponerla en movimiento y éste tiende á acelerarse; en cambio, cuando la manivela asciende, su peso produce un trabajo resistente y el movimiento se retarda. En todos los casos, el peso de la manivela se opone á la uniformidad. Por esta razón, en los aparatos bien construídos se emplean manivelas tales como la *CD* de la misma figura, equilibradas por un contrapeso *E*, dispuesto de tal modo que el centro de gravedad del sistema quede situado sobre el eje de giro. Dicho punto permanecerá, por esta circunstancia, inmóvil durante la rotación, y el trabajo de la pesantez será constantemente nulo; y si la presión ejercida sobre la manivela es constante, el movimiento obtenido será uniforme.

572. Las ventajas de los contrapesos se ponen más en evidencia en los casos de máquinas que marchen á gran velocidad, pudiendo citar como ejemplo las locomotoras, por ser máquina bastante conocida. Considerando una de ellas en marcha y animada de un movimiento uniforme, su centro de gravedad, en lugar de marchar con movimiento también uniforme, ó en otros términos, con un fijeza relativa, tendrá ciertas oscilaciones dependientes de los órganos movibles que forman parte de la máquina, como son las bielas, manivelas, émbolos,

---

LAMINADORES

$$P = K\frac{130000\,C}{Nv^2}$$

Para máquinas de 80 á 100 caballos	.....	$K = 20$
— de 60 —	.....	$K = 25$
— de 30 á 40 —	.....	$K = 80$

etc., de tal modo, que cuando estos órganos asciendan, ascenderá el centro de gravedad del sistema, y cuando avancen, también avanzará dicho punto. Resulta de estas consideraciones la existencia de ciertos movimientos no previstos y perjudiciales á la buena marcha de la máquina, que en el caso actual pueden reducirse á los cuatro siguientes: 1.° Movimiento de vaivén en sentido del camino recorrido. 2.° Rotación del sistema alrededor de un eje trasversal á la vía. 3.° Rotación alrededor de un eje paralelo á la vía. 4.° Rotación alrededor de un eje vertical.

No bastará reducir cuanto sea posible la masa de los órganos capaces de producir efectos tan peligrosos, debidos, como es natural, á las fuerzas de inercia desarrolladas por ellos. Estas fuerzas nocivas crecen proporcionalmente á la masa y al cuadrado de la velocidad, y en las máquinas que nos ocupan, este último elemento suele tener un valor de alguna consideración. Los contrapesos, ya que en absoluto no hagan desaparecer dichos efectos, los atenúan algún tanto. Su colocación debe ser diametralmente opuesta al botón de las manivelas motrices, de modo que formen con estas un conjunto perfectamente centrado con respecto al eje de rotación de las ruedas principales.

573. Para terminar este importante asunto, indicaremos como resumen de las ideas apuntadas, una regla práctica que será de suma utilidad, y que debe tenerse muy en cuenta en toda clase de mecanismos; es la siguiente:

Para que los órganos que entren en la constitución de una máquina cualquiera no den lugar á perturbación alguna en el movimiento, es necesario y suficiente que las fuerzas de inercia que provienen de aquellos, se hagan constantemente equilibrio (*).

(*) Para mayor desarrollo de estas ideas, podemos citar los trabajos de MM. Lechatellier et Conche, y los de M. H. Arnoux. (Véanse los *Anales des mines* de 1867.)

CAPÍTULO IV

Cuarta especie.—Reguladores

574. Generalidades.—La mayor parte de las máquinas están sujetas, por efecto de exigencias especiales de la instalación mecánica, á ciertas variaciones de consideración en la energía ó trabajo motor que deben consumir; lo cual sucede, por ejemplo, en el caso que deba comunicarse esta energía á varias operadoras, de las cuales una ó algunas necesitan dejar de funcionar durante algún tiempo más ó menos largo. En este caso, calculada la energía disponible para vencer el trabajo resistente que corresponde á todas ellas, en el momento que se disminuya el número de las que deban funcionar, quedarán sujetas las restantes á un aumento considerable en la velocidad por la disminución de las resistencias que deben vencerse.

Es necesario, por lo tanto, disponer de un aparato que haga variar convenientemente la energía comunicada á la máquina, el que podrá ser movido á mano ó automáticamente. La naturaleza y disposición que deba tener, dependerá, como es natural, de la clase de motor empleado; y cuando deba moverse á mano, un juego cualquiera de mecanismos

que favorezca la potencia cuanto sea necesario, proporcionará más ó menos acceso á la fuerza motriz, por efecto de la mayor ó menor abertura que deje el distribuidor de ella, como suele llamarse el aparato mencionado (*). Pero cuando deba ser movido automáticamente, ó sea por medio de la misma máquina, se hará necesario el empleo de un mecanismo que sirva como intermedio, digámoslo así, entre esta última y el distribuidor, de tal modo que cuando la velocidad varíe por efecto de la cantidad de energía comunicada ó gastada, el citado aparato ponga por sí solo en movimiento al distribuidor, dándole el sentido conveniente para que deje más ó menos acceso á la fuerza motriz. Al mecanismo de referencia se le da el nombre de *regulador* (**).

575. Existe, como se vé, una notable diferencia entre el volante y el regulador, aun cuando ambos tiendan en último resultado al mismo fin, de obtener un movimiento lo más regular que sea posible. Pondremos más de relieve esta diferencia, haciendo notar que *el volante circunscribe á estrechos límites las variaciones pequeñas de la velocidad cuando el trabajo de la máquina es regular*, mientras que *el regulador limita las variaciones de la velocidad media, cuando el trabajo que debe efectuarse está sujeto á ciertas irregularidades.*

576. En nuestro propósito de no describir más que los reguladores más usados en la industria, ó que formen tipo, seguiremos en el estudio de ellos el orden que á continuación se expresa:

A.—Regulador ordinario de fuerza centrífuga.
B.—Reguladores isócronos de fuerza centrífuga.
C.—Reguladores de muelles.

(*) En los motores hidráulicos, cumplen este efecto las compuertas que se elevan ó bajan por medio de un mecanismo sencillo; y en las máquinas de vapor, las llaves ó válvulas que suelen tener movimiento de rotación.

(**) En Inglaterra se suele dar el nombre de regulador al que hemos llamado distribuidor, reservando el de gobernador (governor) para el aparato que ahora nos ocupa.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Regulador ordinario de fuerza centrífuga.

577. Descripción.—Este regulador, conocido también con el nombre de *regulador de Watt ó péndulo cónico*, consta (*fig.* 166, *lám.* 19) de un árbol vertical en el que están articuladas dos varillas ab y $a'b'$, de cuyos extremos libres penden las masas m y m', por lo regular de forma esférica. En los puntos b y b' situados en las varillas de tal modo que $ab = a'b'$, se hallan articuladas otras dos varillas ó bielas iguales entre sí, que van á unirse por articulación también al manguito cd. Y como ordinariamente se hace en la práctica $bc = ba$, la figura formada por las cuatro varillas articuladas resulta próximamente la de un rombo.

El manguito cd lleva en d una garganta que es abrazada por el extremo ahorquillado de una palanca drs, que comunica con el distribuidor del motor. La disposición relativa de estos órganos es tal, que teniendo el eje vertical una rotación dependiente del movimiento de la máquina por medio del engranaje cónico gg', la palanca no participa de este movimiento, porque su horquilla d permite la libre rotación del manguito; y como este es loco con respecto al árbol vertical en que se halla montado, si tiene un movimiento de ascenso ó descenso, lo comunicará á la palanca drs. Es este último el único movimiento de que puede participar la referida palanca, y de esta propiedad depende el modo de funcionar el aparato.

578. Supongamos, para fijar las ideas, que la posición de la figura corresponde á la marcha en régimen de la máquina, por cuya razón la posición de la palanca será relativa á la abertura ordinaria que debe tener el distribuidor. Imaginemos ahora que por aumento en la potencia ó por disminución de la resistencia principia á acelerarse el movimiento, de cu-

ya aceleración participará el árbol vertical, ya que recibe el movimiento directamente de la máquina por medio del engranaje gg. Es indudable que cuando tal suceda, las bolas m y m' se separarán por efecto de la fuerza centrífuga, no sin hacer que el manguito cd camine hacia el vértice superior, resbalando por el árbol, y como consecuencia de este movimiento ascensional, se levantará el extremo rd de la palanca; cuya ligazón con el distribuidor debe ser tal, que en este momento disminuya la abertura que dé acceso al motor, dando por resultado inmediato el que la máquina tienda de nuevo á tomar la velocidad de régimen.

579. Teoría del regulador de fuerza centrífuga.— Para establecerla, deben estudiarse con independencia las dos cuestiones principales que se presentan, y son: 1.ª Determinar la figura constante que el aparato debe conservar cuando la máquina marche con la velocidad de régimen. 2.ª Calcular el peso que deben tener las bolas, para que el regulador funcione procurando el ascenso ó descenso del manguito, en el momento en que la velocidad de régimen se incremente positiva. ó negativamente en una fracción dada de esta velocidad. En ambas cuestiones se suele despreciar el peso de las varillas que forman el rombo articulado, para tomar en consideración solamente el peso de las bolas.

580. *Primera cuestión.*=Representemos el aparato en esqueleto, como se ve en la *figura* 167. Llamemos ω á la velolidad angular de régimen del regulador, y sea P el peso de cada una de las bolas, cuyos centros respectivos están representados por los puntos m y m'. Desde los puntos b' y m' bajemos las perpendiculares $b'h$ y $m'H$ y establezcamos para abreviar, las notaciones siguientes:

$$ab=a.....am'=b.....ah=h.....aH=H.....m'H=r.$$

Supuesta la máquina en régimen, y siendo por lo tanto uniforme el movimiento de rotación del regulador, cada una de las varillas am' y am, la primera, por ejemplo, puede con-

siderarse como en equilibrio relativo bajo la acción del peso P de la bola, de la fuerza centrífuga que tiene por expresión

$$F = M\frac{v^2}{r} = \frac{P}{g}\omega^2 r$$

y de la reacción que en este caso se ejerce en el punto *a;* teniendo en cuenta que se puede despreciar la reacción procedente de la varilla *b'd*, ya que suponemos que el manguito no tiene movimiento de ascenso ni descenso sobre el eje principal.

Si se toman los momentos de estas fuerzas con relación al punto *a*, el momento de la reacción desconocida que se ejerce en este punto será nulo; el momento de P tendrá por valor Pr y el de la fuerza centrífuga será $\frac{P}{g}\omega^2 rH$. En vista, por lo tanto, del signo correspondiente á cada uno de estos momentos, la ecuación de equilibrio tomará la forma

$$\frac{P}{g}\omega^2 rH = Pr$$

de la cual se deduce inmediatamente el valor

$$H = \frac{g}{\omega^2} \qquad (a)$$

que es independiente del peso de las bolas y de la longitud *am'*. Determinada esta altura quedará conocida la separación de las bolas, siempre que figure como dato la longitud *am'*; por consiguiente podrá fijarse la posición del manguito por consideraciones puramente geométricas, que nos permiten conocer exactamente la figura del aparato que corresponde á la velocidad de régimen.

581. *Segunda cuestión.*—Trátase de determinar el peso que deben tener las bolas, con la condición de que el man-

guito empiece á elevarse en el momento que la velocidad angular adquiera un nuevo valor ω' que exceda á ω en una fracción $\frac{1}{k}$ de esta última, de suerte que se verifique

$$\omega' = \omega + \frac{\omega}{k} = \omega\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

ó bien designando por n la cantidad encerrada entre paréntesis

$$\omega' = n\omega$$

Para este cálculo, y supuesto que no se puede, como en el caso anterior, despreciar la reacción que proviene de la varilla db', puesto que el manguito debe tener un movimiento ascensional, tratemos de ver cuáles son las fuerzas que obran sobre el aparato, y á este efecto, observemos que la varilla db' está sometida á las que recibe en d y en b', procedentes del eje vertical la primera y de la varilla am' la segunda. Estas reacciones son iguales y directamente opuestas, lo que exije que tengan la dirección común db'. Análoga observación puede hacerse con respecto á la varilla db. Sea $2Q$ la fuerza vertical que el manguito debe vencer para elevarse, que dependerá del juego de mecanismos que comuniquen con el distribuidor y de la naturaleza de éste. Dicho manguito está solicitado por la referida fuerza $2Q$ y por las reacciones que recibe de las varillas db' y db, las cuales son iguales y contrarias á las acciones que el manguito ejerce sobre tales varillas. Por lo tanto, si llamamos α al ángulo dam' y si R representa una cualquiera de estas reacciones, su valor será

$$R = \frac{Q}{\cos\alpha} \qquad (b)$$

Finalmente, la varilla principal am' está sometida á la acción de cinco fuerzas, que son:

1.° Las fuerzas P y $F = \frac{P}{g}\omega'^2 r$ que obran en sentido vertical la primera y horizontal la segunda.

2.° Las componentes vertical y horizontal de la reacción R que proviene de la varilla db' y actúa en b'; estas componentes son iguales respectivamente, á $R\cos\alpha$ la vertical cuyo valor, según la fórmula *(b)* es igual á Q, y á $R\,sen\,\alpha$ la horizontal, cuyo valor según la misma fórmula es igual á $Q\,tg\,\alpha$.

3.° La reacción que se ejerce en a.

582. Estableceremos la ecuación de equilibrio dinámico que corresponde á esta varilla am', ó sea la ecuación de momentos con respecto al punto a, observando á este fin que es nulo el momento de esta última fuerza, y marcando en la figura para mayor claridad las cuatro fuerzas qne deben considerarse, cuales son: P, $F = \frac{P}{g}\omega'^2 r$, Q y $Q\ tg\alpha$. Dicha ecuación toma la forma

$$P r - \frac{P}{g}\omega'^2 r H + Q a\,sen\,\alpha + Q\,tg\,\alpha . a\cos\alpha = o:$$

y si en ella se ponen en evidencia los valores

$$r = b\,sen\,\alpha \ldots\ldots \omega' = n\omega \ldots\ldots H = \frac{g}{\omega^2},$$

se divide por $r = b\,sen\,\alpha$ y se hacen las consiguientes reducciones, se deduce

$$P - P n^2 + 2Q\frac{a}{b} = o$$

ó la ecuación equivalente

$$P(n^2 - 1) = 2Q\frac{a}{b}.$$

Sustitúyase ahora en esta ecuación el valor de $n = 1 + \frac{1}{k}$

y despreciando el cuadrado de $\frac{1}{k}$, que será una cantidad muy pequeña, se obtendrá:

$$\frac{2P}{k} = 2Q\frac{a}{b}$$

de la cual se deduce finalmente

$$P = kQ\frac{a}{b} \qquad (c)$$

Se observa con esta fórmula, que el peso de las bolas es sensiblemente proporcional á la resistencia que debe vencer el manguito, al denominador k de la fracción que expresa el grado de irregularidad, y á la relación $\frac{a}{b}$ que existe entre las distancias ab' y am.

583. Si la velocidad disminuyera con relación á la de régimen, la resistencia del manguito se ejercería en sentido contrario: sería preciso cambiar Q en $-Q$, y al mismo tiempo hacer

$$\omega' = \omega\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

lo que equivale también á cambiar k en $-k$, y por ambos motivos subsistirá el mismo el valor de P que proporciona la fórmula *(c)*.

584. En el cálculo precedente se ha despreciado el peso de las varillas. La fuerza centrífuga desarrollada será, por lo tanto, un poco mayor que la debida á la acción de las bolas solamente. Pero por una parte la diferencia es muy pequeña, y por otra este exceso es necesario para vencer los rozamientos en las articulaciones, que no se han tenido en cuenta, y por esta razón hay compensación de errores que proporciona á nuestro cálculo una exactitud suficiente en todas las aplicaciones.

585. **Modificación del regulador de Watt.**—En algunas ocasiones, por efecto de circunstancias especiales inherentes á la máquina en que debe montarse el regulador, se hace necesario que el manguito esté situado por encima del punto de cruce de las varillas principales; en este caso se emplea la disposición indicada en la *figura* 168, en la cual las barras de la misma longitud Bc y $B'c'$ están ligadas invariablemente á las varillas principales BA' y $B'A$, con respecto á las cuales están ligeramente inclinadas. Las pequeñas varillas ó bielas iguales Dc y $c'D'$, determinan la unión con el manguito DD' que actúa sobre la palanca EE' que mueve el distribuidor. La figura $BcDc'$ resulta ser un rombo. El cálculo de este m ecanismo no presenta diferencias esenciales con el que ya hemos explicado.

ARTÍCULO II

Clase β. — Reguladores isocronos de fuerza centrífuga.

586. **Objeto y división de estos reguladores.** — El regulador de Watt presenta un inconveniente que debe tenerse en cuenta muchas veces. Este inconveniente es debido á la posición relativa que tienen las bolas y el manguito, según la cual la velocidad de régimen para que se ha calculado el regulador, corresponde siempre á una misma posición del manguito, ó lo que es igual, á una misma abertura del distribuidor. En ciertas industrias se hace necesario poder variar el esfuerzo motor, conservando la misma velocidad de régimen, á cuyo objeto no responde el regulador de Watt. Es preciso, para satisfacer tal objeto, que pueda elevarse ó bajarse el manguito, sin que se altere sensiblemente la diferencia de nivel, que hemos llamado H en el artículo anterior; puesto que si H es constante, también lo será la velocidad ω de ré-

gimen, que está ligada con H, según en el mismo artículo se ha dicho, por la fórmula

$$H = \frac{g}{\omega^2}$$

587. Se consigue este efecto con los llamados *reguladores isocronos*, cuyos principales tipos vamos á describir en el orden siguiente:

a.—Regulador parabólico de Farcot.
b.—Regulador instantáneo de Foucault.
c.—Regulador horizontal de Flaud.

588. a.—**Regulador parabólico de Farcot.** — El principal medio de conseguir el isocronismo de un regulador, es hacer que los centros de las bolas describan, en un plano que pase por el eje principal, no un arco de círculo, como sucede en el regulador ordinario, sino una parábola, cuya ecuación sea $y = 2Hx$, pues es sabido que la subnormal en ella goza de la propiedad de ser constante é igual á la mitad del parametro, y dicha subnormal será, según la ecuación escogida, el mismo valor á que hace referencia el párrafo 586. Esta solución ha sido realizada de un modo exacto en el regulador de Franke, que no describimos por ser muy poco usado en la práctica, indicando solamente que en él las bolas se hallan sujetas á recorrer un arco de parábola, por resbalamiento sobre una guía que presenta esta figura; pero los inconvenientes de este regulador, debidos principalmente al rozamiento desarrollado, son tan grandes, que se prefiere la solución siguiente, debida al hábil ingeniero Mr. Farcot.

589. Imaginemos que se haya trazado la parábola indicada en la ecuación anterior, y sean a, b, a' y b' (*fig.* 189) los puntos correspondientes á las posiciones extremas que puedan ocupar las bolas: reemplácense los pequeños arcos parabólicos ab, y $a'b'$ por arcos de círculo que se aproximen á ellos, en cuyos centros respectivos o y o' puedan articularse las varillas principales del regulador. Estos centros o y o' se

hallan situados en un suplemento oo' que forma cuerpo con el eje principal. Dada la posición de las articulaciones, las varillas se cruzan en un punto c, situado sobre el eje, y su ligazón con el manguito dd' se verifica por medio de las varillas ó bielas ed y $e'd'$, que pueden estar también cruzadas como indica la figura, sirviendo de guía á estas últimas un arco de círculo mn, á lo largo del cual pueden resbalar.

Cuando el manguito tenga un movimiento de ascenso ó descenso sobre el eje, el punto c de cruce de las varillas también variará de posición, pero permaneciendo siempre sobre él, y las bolas recorrerán los arcos de círculo ab y $a'b'$, ó sensiblemente la parábola marcada en la figura. Por consiguiente, y en vista de la variabilidad simultánea de las bolas y del punto c, la proyección de la distancia cr sobre el eje, ó lo que es lo mismo, la magnitud H, á que nos habíamos referido en el regulador ordinario, que no es otra cosa que la subnormal de la parábola, permanecerá sensiblemente constante. Se cumple, según vemos, la condición fundamental de los reguladores isócronos, y por consiguiente, podrá hacerse variar notablemente la fuerza de la máquina, sin que varíe sensiblemente la velocidad de régimen (*).

590. b.—**Regulador instantáneo de Foucault.**—Los dos reguladores que hemos estudiado tienen el inconveniente de no responder inmediatamente al efecto de abrir ó cerrar el distribuidor, y este inconveniente proviene de que las masas sometidas á la fuerza centrífuga sufren una acción retardatriz, por tener que elevarse algún tanto al mismo tiempo que se separan del eje; la coexistencia de estos dos movimientos de elevación y separación de las bolas, exigirá, por lo tanto, un exceso en la potencia necesaria para mover el manguito.

(*) En apoyo de esta aserción, indicaremos que en el informe dado por Mr. Tresca sobre las experiencias verificadas con el regulador Farcot, expresa que, á pesar de haber cambiado la fuerza de la máqnina en que se ensayó, desde 3 á 20 caballos de vapor, no se notó la más ligera variación en la velocidad de régimen.

Pero si esta es la principal causa de la poca actividad que tienen dichos reguladores, si el movimiento de las bolas es debido á la acción de la fuerza centrífuga, es natural obtener una acción más inmediata, haciendo que el camino descrito por estas esté situado en la misma dirección de las fuerzas, ó lo que es igual, en un plano horizontal. El movimiento de ellas será exclusivamente de separación del eje, y esta separación debe producir el ascenso ó descenso del manguito. Obedeciendo á esta idea, ha conseguido Mr. Foucault obtener un regulador que cumpla al mismo tiempo con las condiciones de *isocronismo y prontitud* (*), que son necesarias en muchas ocasiones.

591. En este regulador, el rombo articulado $SBMB'$ (*fig.* 170) está ligado al árbol principal por su vértice inferior S. En el vértice opuesto M está articulado el manguito N; las bolas están fijas en la extremidad inferior de las varillas principales MD y MD', de manera que sus centros están constantemente situados sobre un mismo plano horizontal, dada la relación geométrica que liga todas las magnitudes del aparato. Por último, dos muelles r, r' ligan las bolas al eje de tal modo, que cuando la fuerza centrífuga deja de ejercer su acción, las bolas se aproximan cediendo á la acción de dichos muelles. La ligazón de estos al eje se verifica por medio de dos suplementos a y a', fijos á este último, en cuyos extremos van sujetos dichos muelles, como indica la figura, para cuya mejor inteligencia dibujamos una vista de esta parte del aparato por su parte inferior, sin la cual es difícil comprender la posición relativa de tales órganos. Como se ve en ella, Foucault sustituye las bolas por dos masas cilíndricas D y D', cuya forma se presta mejor á la buena ligazón con el resto del mecanismo.

(*) No debe confundirse la *prontitud* con la *sensibilidad;* la primera depende de que el regulador obedezca en muy corto tiempo á los cambios de velocidad, y la segunda no es otra cosa que la mayor ó menor fracción de velocidad que pueda producir movimiento al manguito.

La velocidad de rotación dependerá de la relación de las masas D y D' á la elasticidad de los resortes, y la condición de isocronismo quedará tanto mejor satisfecha cuanto más cuidado se haya puesto en fijar la longitud que puedan tener los resortes después de extendidos, con arreglo á la que tengan los suplementos á que van sujetos. La prontitud del regulador es debida, por fin, según se ha indicado, á anularse el trabajo de la pesantez, por recorrer las masas D y D' un camino situado en un plano horizontal, por cuya razón se da también á este regulador el nombre de *regulador de plano fijo* (*).

592. c.—**Regulador horizontal de Flaud.**—Si bien las condiciones teóricas y prácticas de este regulador son análogas á las del que acabamos de explicar, haremos su descripción por la diferencia característica en la posición del eje, que en lugar de estar colocado verticalmente es horizontal.

Se compone también de un rombo articulado (*fig.* 171) cuyos lados ab y $a'b'$ están unidos al eje en a y a'; los cd y $c'd'$ están unidos al manguito dd'. Las bolas están reemplazadas por dos masas de forma lenticular que tienden á separarse del eje mediante la influencia de la fuerza centrífuga. El manguito, que tiende á aproximarse á la extremidad aa' resbalando á lo largo del eje, está retenido por un resorte en hélice fijo al otro lado de este último.

En este aparato, como en el anterior, el trabajo de la pesantez es constantemente nulo, puesto que al separarse las bolas del eje, la elevación de una de ellas queda rigorosamente compensada con el descenso de la otra.

(*) Para más detalles relativos á este regulador y á otros varios que cumplen en mayor ó menor grado las diversas condiciones inherentes á tan necesarios aparatos, véase la notable obra titulada *Recueil des travaux scientifiques* de León Foucault (Paris, 1878).

ARTÍCULO III

Clase 5.ª—Reguladores de muelles

593. Condiciones de estos reguladores. — Cuando la resistencia que presenta á moverse el distribuidor es algo considerable, hace falta emplear, en unión de los reguladores de fuerza centrífuga, un cierto número de mecanismos especiales que favorezcan la potencia, ó lo que es igual, permitan que la acción de la fuerza centrífuga pueda producir la elevación del manguito. Se complican demasiado por este medio unos mecanismos cuya primera condición debe ser la sencillez, y que sin ella se introducen gran número de resistencias nocivas para la máquina de que forman parte.

Los reguladores de muelles evitan este último inconveniente por la mayor potencia directa, digámoslo así, que puede obtenerse con ellos, al estar fundada su acción en el empleo de un muelle de cierta potencia, que acusará las variaciones de la velocidad por efecto de su flexibilidad, constituyendo el elemento esencial de tales aparatos. Pudiera chocar que en esta clase de reguladores no hayamos incluído los dos últimos que se han explicado, en cuya constitución entran también muelles; mas debe observarse que estos órganos no forman en tal caso el elemento principal de acción, y sí solamente un elemento secundario que es preciso adicionar para conseguir que las condiciones de los reguladores queden cumplidamente satisfechas.

En el estudio de esta clase, solamente nos ocuparemos de los reguladores Poncelet y Molinié, únicos que forman tipo y que pueden considerarse como base fundamental de cuantos están comprendidos en ella.

593. Regulador Poncelet.—Consta *(fig.* 172) de dos árboles paralelos *A* y *D*, en los que se hallan montados los piñones *B*, *H* y las ruedas *C* y *G*; de estas dos, que son de igual

diámetro, la G es loca. El piñón H, de mayor altura que el B, aunque del mismo diámetro, está roscado interiormente, y no es otra cosa que la tuerca de un tornillo constituído por el mismo árbol A, roscado en cierta extensión. Dicho piñón H termina en un manguito H' que es abrazado por el extremo ahorquillado de la palanca que comunica con el distribuidor, al cual trasmitirá su movimiento cuando experimente una traslación en sentido de la longitud del eje A.

Completan el aparato un muelle EE' montado sobre el eje superior D, con el que forma cuerpo, y un tope ó pitón FF' fijo á la rueda G, siendo la longitud de este tope tal, que pueda el muelle apoyarse en toda ella para trasmitir á la rueda loca el movimiento que proporciona la máquina directamente al eje A. (Para no olvidarse de esta circunstancia, y aun cuando no suele ser este el mecanismo de trasmisión, dibujamos una polea ordinaria sobre el árbol A).

594. Comprendida la descripción, veamos la manera de funcionar este sencillo aparato. Supongamos que la máquina tiene la velocidad de régimen. El movimiento es comunicado al árbol A y lo recibe á su vez el D por el intermedio del engranaje BC. El muelle participa de este último movimiento, y permaneciendo con una flexión constante, hace moverse á la rueda loca G, por el apoyo que tiene sobre el pitón FF'. Resulta que las ruedas C y G girarán con igual velocidad, como si ambas estuviesen fijas al eje D, cuya condición cumplen también los piñones B y H, por ser de igual diámetro; por lo tanto, las velocidades angulares de la tuerca H y de su tornillo, son iguales, y aquella no tendrá ningún avance longitudinal con relación á este último.

Imaginemos que varía la marcha de la máquina, y para fijar las ideas supóngase que se acelera el movimiento; en este caso el muelle EE' adquirirá una flexión mayor, pues estando libre ó loca la rueda G, tenderá á quedar con la velocidad que anteriormente llevaba. Esta rueda se retarda con respecto á la C, sucediendo lo mismo al piñón H con relación al B. Este último efecto equivale á decir que la tuerca H tie-

ne un movimiento retardado con respecto al que tiene el tornillo, y será consecuencia de ello que aquella experimente una traslación en sentido de las generatrices de este último, la cual se trasmite por el manguito H' y palanca correspondiente al distribuidor, para que cerrándose en parte, proporcione menor acceso al motor. En cambio, si la velocidad de la máquina disminuye, disminuirá también la flexión del muelle, y la rueda G quedará acelerada con respecto á c. La tuerca tendrá también movimiento más acelerado que el del tornillo, y experimentará por fin una traslación en sentido contrario á la anterior, que producirá una mayor abertura del distribuidor.

595. Regulador Molinié.—En este regulador, el muelle está sustituído por un depósito de aire que ejerce acción análoga á aquel, por ser flexibles sus paredes. Es este depósito un verdadero fuelle $A\,B$ (*fig.* 173), que en el estado de régimen de la máquina recibe por el orificio C una corriente constante de aire, que sale en su totalidad por los orificios D y E practicados en la tapa superior. La abertura de estos orificios puede graduarse á voluntad para que corresponda la cantidad de aire que salga por ellos con la que entre por el orificio C (*). Terminaremos la descripción indicando que la tapa inferior del depósito $A\,B$ es fija, y movible la superior, llevando esta última una barra central F que comunica con el distribuidor.

596. Si la velocidad de la máquina aumenta, también aumentará la cantidad de aire inyectada por C; mas como por D y E solo puede salir una cantidad determinada, se acumulará una mayor en el depósito $A\,B$, cuya tapa superior se elevará comunicando el movimiento á la barra F, y esta al distribuidor para que tenga menor acceso el motor. Por el

---

(*) No dibujamos en la figura el procedimiento para inyectar el aire por C, por corresponder su estudio á la neumática; pero baste saber que no es otra cosa que un fuelle de alimentación continua, que recibe el movimiento directamente de la máquina.

contrario, disminuyendo la velocidad de régimen, disminuye la entrada del aire por C; y como la salida por D y E es constante, descenderá la tapa superior y el distribuidor quedará más abierto.

597. Para terminar con el estudio de los reguladores, indicaremos que á veces puede suceder que la disminución en la velocidad sea debida á un aumento de resistencia muy considerable y permanente, en cuyo caso se gastará toda la fuerza motriz ó mayor cantidad de la que se produzca ó que hubiese disponible, llegando un momento en que la máquina se pare ó poco menos. Para obviar este inconveniente, no queda otro medio que, ó disminuir la resistencia útil, ó dar á la máquina todo el alimento que necesite.

CAPÍTULO V

Quinta especie.—Modificadores

598. Generalidades y división de estos mecanismos.— Aun cuando todos los aparatos que explicamos en este estudio pueden considerarse como verdaderos modificadores, pues bien sea de una manera ó de otra hacen cambiar las condiciones del movimiento, estableciéndolo ó interrumpiéndolo unos, y otros moderando ó regularizando la velocidad, los objetos especiales á que aquellos se destinan les hace recibir los nombres particulares con que los hemos clasificado. Los que incluímos en la categoría de modificadores, y tratamos de explicar en este capítulo, los definimos indicando que *tienen por objeto variar á voluntad, y en una relación determinada de antemano, unas veces la magnitud de la velocidad, otras el sentido, y otras también la magnitud y sentido de ella.*

599. Dada esta definición, dividiremos los modificadores en tres categorías distintas, según que su objeto sea uno ú otro de los que hemos indicado, haciendo el estudio de ellos por el orden siguiente:

A.—Modificadores de la relación de velocidades.
B.—Modificadores del sentido del movimiento.
C.—Modificadores de magnitud y sentido.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Modificadores de la relación de velocidades

600. Mecanismos comprendidos en esta clase.—Los tipos principales empleados en las instalaciones mecánicas, únicos que han de ocuparnos, están comprendidos en el siguiente cuadro:

a.—Conos de poleas.

b.—Tambores cónicos.

c.—Engranajes y poleas.

601. a.—Conos de poleas.—Si uno de los árboles de un taller debe experimentar variaciones en su velocidad, que sean determinadas de antemano, se montan sobre él un cierto número de poleas que se correspondan con otras montadas en el árbol motor, y que tengan unas y otras las magnitudes correspondientes á la relación de velocidades que en cada uno de los casos debe existir. La disposición ordinaria de estas poleas está representada en la *figura* 174, que contiene tres pares de poleas (a,a') (b,b') y (c,c') dispuestas á continuación las de un mismo eje, y formando generalmente un solo cuerpo. La correa sin fin bb', debe servir para todos los pares de poleas, y con tal objeto se hace que la suma de radios sea constante en todos los pares. Es muy común montar también una polea loca al lado del cono motor, para cuando deba suspenderse la comunicación entre los dos árboles.

602. b.—Tambores cónicos.—Cuando se desea que la relación de velocidades pueda variar de un modo contínuo entre dos límites dados, se reemplazan los dos conos de poleas por dos tambores cónicos AB y $A'B'$ (*fig.* 175), que pueden considerarse como el límite de aquellos, cuando aumente indefinidamente el número de poleas.

Pero es necesario entonces mantener la correa en la posición que se le asigne, lo que se consigue por medio de un

guía-correas mn análogo á los pasa-correas, sin cuyo aditamento tendería la correa á aproximarse á la base mayor de cada tambor, y quedaría colocada oblícuamente, dilatándose más y más cada vez.

603. c.—Engranajes y correas.—Otro de los sistemas empleados para producir el mismo efecto, está constituído del modo siguiente: sobre el eje A (*fig.* 176, *lám.* 20) hay montada una polea P y una rueda de engranaje R, que comunica su movimiento á otra rueda también dentada r montada sobre el árbol B que ha de recibir el movimiento. Una segunda polea P' del mismo diámetro que la precedente, está montada sobre un árbol hueco que rodea al eje AA; dicho árbol lleva en su extremidad otra rueda dentada R' que engrana con la r' montada sobre el eje B. Por último, si solamente han de ser tres las magnitudes de las velocidades que debe recibir el árbol B, existirán, en condiciones análogas, una tercera polea P'', un eje hueco y rueda dentada R'', que engrana con la r'' montada en B. El movimiento lo recibe una cualquiera de las poleas P, P', ó P'' por medio de una correa sin fin, que puede trasportarse con la ayuda de un pasa-correas; siendo conveniente también que exista una polea loca F á continuación de aquellas, para que cese de moverse el árbol B. Si la correa está colocada sobre la polea P, el movimiento de rotación se trasmite al árbol B por el intermedio del engranaje (R,r); si pasa á la polea P', la trasmisión será debida al engranaje (R',r'), y por último, cuando mande P'', será el engranaje (R'',r'') el que comunique el movimiento. En todos los casos, siendo una misma la velocidad del arbol AA, tomará el BB tres velocidades diferentes, que dependerán de la relación que existe entre los radios de las ruedas del engranaje que trasmita el movimiento.

ARTÍCULO II

Clase B. — Modificadores del sentido del movimiento

604. Embragues dobles. — Si los *árboles de rotación son paralelos* (*fig.* 177), se monta sobre ellos un engranaje ordinario (R,R') y otro (r,r') provisto de una rueda parásita intermedia r''. El embrague doble M, movido por la palanca ok, puede hacer que una de las ruedas R' ó r', sea, á voluntad, solidaria del árbol conducido BB. En nuestra figura es solidaria la r', y el árbol B recibe su rotación por el engranaje (r,r'.) Excusado es indicar que la existencia de la rueda parásita hace que el sentido de la rotación de B sea contrario al que tendría en el caso de mandar el engranaje (R,R'), ó lo que es lo mismo, cuando sea la rueda R' solidaria del árbol BB.

605. Si los *árboles son perpendiculares*, el mecanismo afecta la forma de la *figura* 178, en la cual puede el embrague doble hacer que una de las ruedas cónicas r ó r', sea, á voluntad, solidaria del árbol conducido BB, al que comunicarán en sentido contrario, el movimiento que reciben del árbol conductor A, por medio de la rueda R.

ARTÍCULO III

Clase C. — Modificadores de magnitud y sentido

606. Mecanismos comprendidos en esta clase. — Como es natural, el aparato que debe modificar á un mismo tiempo la magnitud y sentido de la velocidad, podrá estar constituído mediante una combinación de los mecanismos comprendidos en las dos clases precedentes; pero existen además otras combinaciones, ó modificaciones mejor dicho, de los mecanis-

mos explicados en los distintos estudios, de las cuales vamos á indicar los tipos más empleados. Las combinaciones pertenecientes á esta clase, las reduciremos á las siguientes:

a.—Modificación por engranajes y embragues dobles.

b. Idem por topes y muelles.

c.—Idem por muelles y contrapesos.

De estos tipos, el primero es derivado de los aparatos explicados en los dos anteriores artículos; siendo los dos últimos consecuencia, como hemos dicho, de combinaciones especiales de otros mecanismos que se han dado á conocer en el curso de estos estudios.

607. a.—Modificación por engranajes y embragues dobles.—El mecanismo que hemos explicado en el artículo anterior y representado en la *figura* 177, puede servir para el objeto de esta clase, bastando solamente cambiar en él la relación de los radios r y r'. Pero la modificación es de mayor cuantía al tomar como tipo el de la *figura* 178. En este caso será conveniente darle la disposición que representa la *figura* 179. Las dos ruedas cónicas r y r', locas con respecto al árbol B, son de diámetros desiguales, y engranan respectivamente con otras dos ruedas, cónicas también, montadas sobre el árbol A. Un doble embrague M que puede funcionar por medio de la palanca N, hace que una de las ruedas r ó r', sea solidaria del árbol B. En el caso de la figura, lo es la r y la comunicación del movimiento del árbol conductor A se verifica por medio del engranaje (R,r). Cuando el embrague comunique con r', mandará el sistema (R',r') haciendo variar no solamente el sentido de la rotación, sino también la relación de velocidades, siempre que la relación entre los radios de las ruedas R' y r' difiera de la que existe entre los correspondientes al engranaje (R,r).

Por último, puede también servir como base el sistema empleado en la *figura* 176, en la que se emplea el embrague de correas, bastando hacer cónicas las ruedas de engranaje que figuran en ella. En este caso afecta la forma de la *figu-*

ra 180, y constituye la base principal de una de las máquinas más empleadas en la industria (*).

608. b.—**Modificación por topes y muelles.**—Entre las varias combinaciones pertenecientes á este tipo, la más usada es la que forma parte de las máquinas conocidas con el nombre de *machinas*, que tienen por objeto clavar pilotes en el terreno. Un cuerpo pesado M (*fig.* 181) tiene un movimiento de ascenso que le proporciona una cuerda á cuyo extremo está suspendido, la que pasa por una polea fija en la parte superior de los montantes AB y $A'B'$, para ejercerse la acción en el otro extremo, bien á mano ó bien por medio de un torno. El cuerpo M es conducido en su movimiento rectilíneo de ascenso por medio de unas guías de movimiento rectilíneo que llevan los montantes. Cuando llega á la parte superior, debe caer por su propio peso, para que produzca sobre la cabeza del pilote el efecto de un martillo. Esta caída será conveniente que se verifique sin necesidad de soltar la cuerda que le sostiene, por lo peligroso que sería este retorno verificado siempre con gran velocidad, ya que el peso de M suele ser considerable.

609. Para que la caída se verifique del modo que indicamos, se suspende el cuerpo M por medio de unas tenazas $bc\,b'c'$, cuyo enganche con él está favorecido por la acción de los muelles a y a'. Estas tenazas van unidas á una armadura hhh, en cuyo gancho superior se sujeta la cuerda que produce el ascenso del conjunto. En la plataforma superior BB' colocada sobre los montantes, existe una abertura N cuya sección va disminuyendo progresivamente; los costados de

---

(*) Véase el excelente tratado de los Sres. Larraya y Lanaja, párrafos 622 y 623. Aparece este mecanismo formando parte de una máquina de cepillar. La sola diferencia con el que representamos, es la colocación de la polea loca que está situada entre las dos P y P'. El árbol B lleva un tornillo sin fin que produce el movimiento de traslación de la mesa, la cual hace funcionar automáticamente el pasa-correas, al chocar contra unos topes unidos al vástago de este.

esta abertura hacen el oficio de verdaderos topes, porque introduciéndose en ella al terminar su ascenso los extremos *b* y *b'* de las tenazas, se verifica una compresión en ellos, en virtud de la cual, vencen la acción de los muelles y se zafa la masa *M* de las mordazas que la sostienen. La caída de la masa es, por lo tanto, automática, y se verifica sin necesidad de cambiar el sentido del movimiento de la cuerda que la sostiene. Además se ha variado la velocidad, que ahora corresponderá al movimiento acelerado que adquiere dicho cuerpo, al caer libremente por la acción de su peso.

610. c.—**Modificación por muelles y contrapesos.**—Cúmplenos examinar otro tipo muy importante de aparatos modificadores, del cual se hace mucho uso en las máquinas modernas de vapor, empleándolo como complemento indispensable de los aparatos de distribución. La idea del sistema empleado en las llamadas *distribuciones modernas*, consiste en proporcionar un movimiento de rotación, dependiente de la misma máquina, á la llave ó grifo que ha de dar acceso al vapor, haciendo después que por medio de un contrapeso ó por la acción de un muelle de gran potencia, tenga dicha llave una rotación sumamente rápida en sentido contrario, para que cierre el paso al expresado motor.

611. Uno de los mecanismos más perfeccionados que proporcionan el expresado efecto, y que por variar de un modo tan notable la velocidad del órgano principal en su movimiento retrógrado está comprendido en nuestra clasificación, es el que representamos en la *figura* 182 (*). Consta de una pequeña balanzadera de forma especial *ab*, montada sobre el árbol de rotación *c* que ha de producir el movimiento del apa-

(*) El mecanismo á que se refiere el texto, es correspondiente á la máquina sistema Corliss, de 120 caballos, perfeccionada por sus constructores M. Schneider y compañía. La reputación universal que hoy día gozan las máquinas de este sistema, debida sin duda alguna á la suma perfección de los mecanismos que ponen en movimiento á los distribuidores, hacen que los presentemos como tipo principal de tales aparatos, que hemos visto funcionar con admirable precisión en el gran taller de aserrar maderas establecido por el

rato distribuidor, siendo al propio tiempo loca con respecto á este árbol. Dicha balanzadera recibe el movimiento alternativo por medio de una biela de conexión d articulada en uno de sus extremos (*). En el otro extremo hay también articulada una placa de acero e que sirve de alojamiento al cuchillo ó fiador e' fijo á la palanca $e'mc$ que forma cuerpo con el árbol c del distribuidor. Dicha placa está á su vez unida á una horquilla hc', cuyos dos brazos estan ligados por un eje ó botón c', que puede marchar entre las guías gg' que están articuladas á una nueva palanca nPQ, fija en una posición determinada por medio de una varilla QQ' que comunica con el regulador de la máquina. La horquilla h está solicitada hacia el cuchillo ó fiador e', al que sostiene por efecto de un muelle h', el cual deja de ejercer su acción para que el cuchillo se zafe, en el momento que el extremo c' de la primera venga á chocar contra un tope g' de que van provistas las guías gg'. Por último, una varilla vertical X, terminada por un contrapeso en su parte inferior, está articulada en un punto m de la palanca $e'mc$, á la cual obliga á descender independientemente de la balanzadera, en el momento que el fiador e' se zafe de la horquilla h y quede en libertad de acción.

612. Descrito este ingenioso aparato, examinemos cuál es su modo de funcionar. Supuesta la máquina en régimen, la palanca QPn, y por consiguiente el tope g' tienen una posición invariable que depende de la que corresponde al regulador. Si la biela conductora d tiene un movimiento descendente, ascenderá el extremo a de la balanzadera, arrastrando

---

Real Patrimonio en las inmediaciones del pueblo de Balsain. También se han montado muy recientemente cuatro máquinas del mismo sistema, para el alumbrado eléctrico de los Grands Magasins du Primtemps, en París, destruídos por un formidable incendio en 1881, y reconstruídos en el año siguiente.

(*) El movimiento de esta biela se obtiene por medio de una semi-balanzadera montada en la parte inferior, que lo recibe á su vez de la excéntrica montada sobre el árbol principal de la máquina. Esta sola excéntrica es la que pone en movimiento los cuatro distribuidores del vapor, de los que dos son para la admisión y dos para el escape.

en su ascenso á la palanca $e'mc$ cuyo extremo ó fiador e' está embragando con la horquilla h; gira, en una palabra, todo el conjunto de mecanismos situado á la izquierda del eje, y gira por lo tanto éste, en el sentido correspondiente á las rotaciones positivas; (se abre el distribuidor y da acceso al motor). Pero continuando este ascenso, durante el cual el botón c' resbala por las guías en el sentido indicado por la flecha, llegará un momento en que dicho botón choque contra el tope g' y haciendo ceder al muelle h', zafarán horquilla y fiador, quedando este libre, y descendiendo rápidamente por la acción del potente contrapeso situado en el extremo de la varilla X. La palanca $e'mc$ gira en este caso independientemente de la balanzadera, que hemos dicho ser loca con respeto al eje c, y proporciona á este último una rotación casi instantánea, en sentido negativo; (cierre rápido del distribuidor). La balanzadera continuará su movimiento alternativo, y cuando haya descendido el extremo a, se verificará de nuevo el embrague de horquilla y fiador, para reproducirse una y otra vez los efectos que acabamos de indicar.

613. Como cuestión íntimamente ligada con el estudio que hemos hecho de los reguladores, indicaremos el modo de variar la posición del tope g' para modificar la amplitud de la rotación que puede proporcionarse al árbol c, y por consiguiente al distribuidor; (expansión variable por el regulador). Con este objeto, la palanca que mueve el manguito del regulador está sustituída por dos barras verticales aa' y bb' (*figura* 182 *bis*), de las que una tiene la forma representada por el perfil cc'. Las barras Q' y Q'' de dos aparatos iguales al que anteriormente hemos descrito (distribuidores de admisión), están solicitadas por un muelle, para que sus extremidades, talladas en forma de cuchillos, puedan apoyarse constantemente sobre las levas correspondientes al perfil cc'. La posición que en nuestra figura tienen los cuchillos sobre las levas, es relativa á la velocidad de régimen; si esta tiende á aumentar, las bolas del regulador, separándose, elevarán el manguito y con él las varillas aa' y bb'; las levas r y r' arras-

tradas en este movimiento, obligarán á las varillas Q' y Q'' á separarse de bb'. Esta acción permite al tope g' de la *figura* 182 variar de posición, y hacer que dure menos tiempo la rotación positiva del eje principal; (disminución del período de admisión del vapor). Si la velocidad de la máquina disminuye, se producirá un efecto contrario al que hemos indicado.

ESTUDIO VIII

INDICADORES MECÁNICOS

CUADRO DEL ESTUDIO 8.º

PRELIMINARES.—División del estudio.

- INDICADORES CINEMÁTICOS.
  - De velocidad....
    - Ordinarios.
    - Contadores de vueltas.
  - Del movimiento..
    - Registrador de tira de papel.
    - Id. de disco giratorio.
    - Id. de diapasón.
- INDICADORES DINÁMICOS..
  - De esfuerzos.
    - Balanzas.....
      - Ordinaria.
      - Romana.
      - Báscula de Quintenz.
    - Dinamómetros..
      - De muelle ordinario.
      - De resorte en espiral.
      - De dos muelles.
      - Manivela dinamométrica.
  - De trabajos...
    - Dinamómetros de tracción.
      - Registrador.
      - Contador.
    - Id. de rotación..
      - Registrador.
      - Contador.
      - Freno dinamométrico.

PRELIMINARES

614. Objeto y división de este estudio.—Todos los mecanismos que hasta ahora hemos dado á conocer, tienen aplicación directa en las máquinas industriales y forman parte integrante de ellas, pudiendo constituir, por su reunión más ó menos compleja, lo que se llama una instalación mecánica.

Debemos ahora hacer un estudio especial de otros mecanismos que pueden llamarse complementarios, porque no siendo indispensables para la marcha de ninguna máquina en particular, permiten deducir por observación la medida de ciertos coeficientes, ó la determinación de ciertas leyes de suma utilidad para el mecanismo. A estos aparatos de medida es á los que damos el nombre de *indicadores mecánicos*, y puesto que las cantidades cuyo conocimiento puede interesar no son otras que espacios lineales ó angulares, tiempos, velocidades, fuerzas y trabajos, ó sea los elementos más usados en los cálculos cinemáticos y dinámicos, será conveniente para seguir una marcha acorde con los estudios fundamentales ó primeros que hemos expuesto, hacer una clasificación de estos aparatos, relativa bien á los usos cinemáticos, según la definición de esta rama de la mecánica, ó bien al empleo

dinámico que puedan tener. La división á que nos referimos es la siguiente:

Primera especie.—Indicadores cinemáticos.
Segunda especie.—Idem dinámicos.

615. La primera especie comprenderá los mecanismos destinados á la medida de velocidades y leyes de un movimiento, toda vez que debemos descartar de estos estudios cuanto sea relativo exclusivamente á espacios lineales ó angulares y tiempos, por ser perfectamente conocidos los aparatos destinados á estos usos (*), y la segunda especie se referirá á la medida de esfuerzos y trabajos.

(*) Nos referimos á los aparatos ordinarios, pues el conocimiento de otros para las medidas sumamente precisas de tiempos muy pequeños y velocidades excesivamente grandes, pertenece al dominio del curso de artillería, donde se dan á conocer los diversos aparatos electrobalísticos, empleados con tales objetos.

CAPÍTULO PRIMERO

Primera especie.—Indicadores cinemáticos

616. División de estos indicadores.—Dado el objeto que hemos expresado en el párrafo anterior, solamente habremos de ocuparnos de los procedimientos ó aparatos más empleados para la medida de la velocidad ó de la ley del movimiento de una máquina, dividiendo, por lo tanto, los indicadores comprendidos en esta especie, ó cinemáticos, en las dos clases siguientes:

A.—Indicadores de velocidad.
B.—Idem del movimiento.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Indicadores de velocidad

617. Fundamento y división.—Los procedimientos empleados para la medida exclusiva de la velocidad, están fundados todos en la definición de ella y tendrán por objeto especial la determinación del espacio recorrido en un tiempo determinado, para que, dividido el primero por el segundo,

pueda venirse en conocimiento del elemento que se busca. Si el movimiento es uniforme, podrá referirse la experiencia á un tiempo grande con objeto de obtener mayor precisión; pero no existiendo uniformidad, será indispensable hacer las observaciones durante intervalos de tiempo tanto más pequeños cuanto más diste de la uniformidad perfecta. El caso más frecuente en la práctica es el primero, y á él nos habremos de referir en este artículo, no sin que las ideas vertidas en él puedan referirse al movimiento variado, para el cual suele también hacerse la medida del espacio recorrido en un tiempo relativamente grande, deduciendo por división el valor de la que puede llamarse *velocidad media* correspondiente al trayecto considerado. Pero cuando se deseen indicaciones más precisas, relativas á este último caso, será más conveniente recurrir á los aparatos que en el artículo siguiente se explican, para obtener con su auxilio la ley del movimiento, de la cual puede deducirse el valor de la velocidad en cualquier instante.

618. Los aparatos cuya descripción vamos á dar en este artículo, los dividiremos en dos tipos principales, según se refieran á los movimientos de traslación ó rotación, del modo siguiente:

a.—Indicadores ordinarios.

b.—Contadores de vueltas.

Es de notar que el primer tipo á que aludimos, si bien se indica como referente al movimiento de traslación, puede hacerse extensivo también á los de rotación; mas no suele usarse para esta clase de movimientos.

619. a.—**Indicadores ordinarios.**—Los que incluímos bajo este nombre, pueden más bien considerarse como *indicadores improvisados*, puesto que basta para las observaciones dos señales de naturaleza correspondiente á la del órgano en movimiento, y un reloj de segundos. Si por ejemplo se desea conocer la velocidad media de un carruaje ó de un tren en caminos de hierro, bastará colocar dos piquetes ó banderolas en dos puntos del trayecto, cuya distancia se haya me-

dido de antemano, y hacer la observación del tiempo que tarda el vehículo en recorrer dicha distancia. Este procedimiento, como dejamos dicho, será tanto más exacto cuanto mayor sea la distancia marcada, y su error principal dependerá de la dificultad en la observación del tiempo. Esta dificultad se salva con el empleo de cronómetros especiales que puedan iniciar su movimiento y suspenderlo en el momento que se desee, bastando tocar un botón que sale al exterior, para que tales efectos se verifiquen. Las observaciones con estos aparatos serán de suma precisión, y el error cometido con ellos podrá despreciarse en los usos ordinarios á que nos referimos (*).

620. b.—**Contador de vueltas.**—La observación del número de vueltas que da un árbol de rotación en un tiempo determinado, puede hacerse directamente si el movimiento es lento; pudiendo deducirse de dicho número la velocidad angular media correspondiente á dicho intervalo de tiempo, ya que su valor, según definición, tendrá por expresión $\frac{2\pi N}{T}$ en la que representa N el número de vueltas observado, y T el tiempo correspondiente. Pero si el movimiento es rápido, será indispensable recurrir al empleo de aparatos que marquen dicho número, á los cuales se les da el nombre de contadores de vueltas.

621. El contador más sencillo ó *contador ordinario*, está constituído del modo siguiente: El árbol cuya velocidad desea

(*) Existen cronómetros de la naturaleza indicada en el texto y aun otros todavía más precisos, que iniciando también su movimiento en el momento deseado, pueden marcar sobre la esfera por medio de un estilete que lleva un pequeño depósito de tinta y un orificio capilar como punta ó índice, los puntos correspondientes al paso por varias señales, para deducir por la distancia entre uno y otro el tiempo correspondiente á cada trayecto. Estos cronómetros registradores, que así puede llamárseles, son conocidos con el nombre de contadores de puntería y suelen apreciar fracciones de segundo que llegan hasta un sexto de esta pequeña unidad de tiempo. De esta naturaleza son los que se suelen usar para las experiencias balísticas.

medirse va provisto de un dado ó tope, que en cada revolución hace avanzar un solo diente de una rueda de engranaje, montada sobre un árbol paralelo á él; de la misma manera, esta rueda, por medio de otro tope, hace avanzar, á cada vuelta suya, un diente de una segunda rueda; ésta hace avanzar á una tercera, y así sucesivamente. Cada una de estas ruedas tiene diez dientes, y además llevan un cuadrante, movible con ellas, en el que van marcadas las diez cifras 0, 1, 2..... 9, igualmente distantes; cada vez que la rueda avanza una división, una de estas cifras reemplaza á la precedente para ponerse en presencia de un pequeño índice ó referencia, que permite hacer las lecturas, las que serán unidades en la primera rueda, decenas en la segunda y así sucesivamente.

622. El contador que acabamos de explicar, tiene el inconveniente de ser difícil desligarlo del árbol principal para poner en cero las referencias de todas las ruedas, dificultándose también la operación de pararlo en un momento dado. Estos inconvenientes se evitan con el *contador de Aman-Sainte*, del que representamos dos vistas en la *figura* 183; su árbol principal lleva un tornillo sin fin, que engrana con un tren de engranajes, en el cual los piñones tienen diez dientes y las ruedas ciento; de este modo cada diente de la primera rueda *A*, llamada de decenas, corresponderá á una vuelta del tornillo, y cada uno de los números marcados en la figura representará decenas. En la segunda rueda *B*, corresponderá cada diente á diez vueltas, y los números representarán centenas. Los índices ó referencias se han marcado en la figura con las letras *m* y *n*. El procedimiento de embrague y desembrague, consiste en el muelle *c*, fijo por un extremo al mango *P*, y ejerciendo su acción sobre la uña *D* que lleva la armadura donde van montadas las ruedas. Una ligera presión sobre esta uña, basta para forzar el muelle y verificar el desembrague. Este aparato se usa colocándolo en la extremidad del árbol de rotación cuya velocidad debe medirse, de tal modo, que una punta cuadrada *G*, se introduzca un poco por medio de un golpe ó presión en el centro del eje. Es necesa-

rio, durante la colocación, ejercer una presión sobre la uña *D*, que no debe suspenderse hasta que se inicie la experiencia, y deba por lo tanto verificarse el embrague.

623. Todavía hemos de señalar un inconveniente que presenta el aparato que acabamos de describir, y es relativo al mucho volumen que ocuparía en el caso que deba contarse un gran número de vueltas, ó que esté compuesto de varias cifras. El *contador de Mr. Deschiens*, evita este inconveniente, y proporciona al mismo tiempo una lectura directa del número correspondiente, operación que se verifica en el anterior examinando cifra por cifra. Representamos este aparato en la *figura* 184: está encerrado en una caja metálica rectangular, cuya tapa superior lleva un cierto número de aberturas, debajo de las cuales vienen á presentarse las diversas cifras para que pueda hacerse la lectura directa. Estas cifras están grabadas en las llantas de varios tambores cilíndricos, colocados á continuación unos de otros, y locos con respecto al eje común; cada uno de estos tambores ó discos, lleva las diez cifras de o á 9.

La comunicación del movimiento se verifica por medio del árbol *o*, que sobresale de la caja, el que puede recibirlo del árbol de la máquina cuya velocidad desee medirse, por medio de una correa sin fin. El mecanismo, para que la primera rueda ó de unidades dé un décimo de vuelta, ó pase un número por cada vuelta del árbol principal, y que cada una de las ruedas siguientes verifique lo mismo con respecto á su anterior de la derecha, es el siguiente: el primer disco de la derecha, que representamos por *a*, está dentado en su cara exterior y engrana interiormente con un piñón *b*, montado sobre una excéntrica *c* y loco con respecto á ella. La excéntrica está montada sobre el árbol principal *o*, y los huecos de la rueda *a* tienen la forma especial que indica la figura de la derecha, cuya forma es correspondiente á la que presentan los dientes del piñón *b*. Los números de dientes de rueda y piñón, se diferencian en una unidad, siendo 10 el primero y 9 el segundo. El piñón va provisto de un pequeño dado ó

saliente *cs*, guiado entre dos topes cilíndricos *t* que forman cuerpo con el soporte del árbol, y de este modo podrá tener un movimiento oscilatorio dependiente del de la excéntrica, de tal modo que, en cada revolución del árbol correspondiente á una oscilación del piñón, engranarán con la primera rueda los dientes más alejados del eje de figura, proporcionándola un décimo de vuelta por cada una que dé el eje principal, dada la diferencia entre los números de dientes de rueda y piñón.

Es necesario ahora que cuando el árbol dé la décima vuelta, se comunique el movimiento al segundo disco ó de las decenas, para que dé también un décimo de vuelta, y esto se consigue haciendo que las caras de los dos discos que se encuentran en presencia una de otra estén provistas, la del disco de decenas, de 20 dientes, y la del disco de las unidades, de dos dientes, dispuestos, como se ve, en xx' de tal modo, que el hueco que queda entre ellos penetre algo en el disco. Con la rueda de las decenas engrana un piñón *p* de ocho dientes, loco con respecto á su eje: cuatro de estos dientes tienen una longitud igual á los de la rueda de decenas, más la altura de los salientes de la rueda de unidades; los otros cuatro tienen una longitud igual á los de la rueda de decenas, más la profundidad del hueco abierto en la de unidades. Con esta disposición, se observa que á la novena vuelta, el saliente x vendrá á apoyarse sobre un diente corto del piñón, y á la décima, el hueco que existe entre x y x' abrazará un diente largo de este último, que engrana á su vez con la rueda de decenas, á la que hará dar un décimo de vuelta; igual efecto se reproducirá cuando el árbol principal haya dado otras diez vueltas, y así sucesivamente. Por último, la ligazón entre las siguientes ruedas, se verifica de idéntico modo á la explicada para unidades y decenas, pudiéndose obtener en pequeño volumen un cierto número de ruedas que marquen número de vueltas relativamente grande.

624. La vuelta á cero se obtiene fácilmente abriendo la caja, y haciendo trasladar á la izquierda las ruedas y piñones,

lo que hace que queden independientes unas y otros para darles el giro que sea necesario. Este movimiento no puede tener lugar cuando la caja está cerrada, por efecto de una horquilla que lleva la tapa, la cual se apoya sobre el eje, limitando el juego del último disco de la izquierda.

625. Otro tipo muy sencillo de contador de vueltas, es el llamado *contador de ruedas diferenciales*, que se compone de dos ruedas dentadas móviles sobre un mismo eje horizontal, agrupadas de tal modo, que parecen constituir un sólo disco, y engranando ambas con un mismo tornillo sin fin. Una de estas ruedas tiene 100 dientes y la otra 99 solamente; resulta de esto que, cuando el tornillo da cien vueltas, la primera rueda ha dado una y la segunda ha quedado retrasada con respecto á ésta el espacio correspondiente á un diente; cuando el número de vueltas llega á 200, la segunda rueda habrá quedado retrasada en dos dientes y así sucesivamente. El tornillo está dispuesto de tal modo que pueda desengranar á voluntad con las ruedas para ponerlas en cero, y es el que se hace comunicar con la máquina cuyo número de vueltas desea conocerse.

Establecida la comunicación con esta última, se hace funcionar el aparato durante el tiempo que sea necesario, al fin del cual se hace desengranar el tornillo ó se interrumpe la comunicación, haciendo las observaciones siguientes: 1.ª, el número de dientes de la primera rueda que ha pasado delante de un índice fijo á la caja ó armadura del aparato; 2.ª, el número de dientes que la segunda rueda queda retrasada con respecto á la primera. El segundo número representará las centenas de vuelta y el primero el número de vueltas que excede de dichas centenas, pudiendo contarse de este modo hasta 9999 vueltas.

Este aparato es recomendable por su sencillez, y se emplea con preferencia á los otros en los dinamómetros contadores. (También se usa para los molinetes que se explican en hidráulica con objeto de medir la velocidad de las corrientes).

626. Explicaremos, por último, un contador especial, empleado exclusivamente en el aritmómetro ó máquina de calcular, á la que sirve de fundamento. Dicho aparato, al que llamaremos *contador de aritmómetro*, sirve para marcar el número de vueltas que da una pequeña manivela, ó el producto de un número por otro determinado; y el conjunto de un cierto número de contadores de este género, ligados de un modo conveniente, es lo que constituye tan ingeniosa máquina que, mecánicamente hablando, no es otra cosa que un *tren de contadores*.

Consta el contador de aritmómetro de un tambor cilíndrico *a* (*fig.* 285) giratorio alrededor de su eje horizontal $c\,c'$; este tambor está dentado en un espacio menor que la mitad de su superficie lateral, siendo los dientes en número de nueve; el primero de ellos $m\,n$ ocupa toda la longitud del cilindro; el segundo $m_1\,n_1$, los ocho novenos de esta longitud; el tercero, los siete novenos, y así sucesivamente hasta el último, que solamente ocupa un noveno de la longitud del tambor. Un piñón cilíndrico $b\,b'$, con diez dientes, y cuyo eje es paralelo al del tambor, engrana con éste; pero puede resbalar á lo largo de su eje, que con este objeto tiene forma prismática, y colocarse en presencia de la primera novena parte del tambor, ó trozo $m\,m_1$ provisto de un diente, ó de la segunda $m_1\,m_2$ que lleva dos, ó de la tercera, y así sucesivamente.

Cuando el piñón $b\,b'$ esté en presencia del primer trozo $m\,m_1$, solamente engranará con el diente más largo del tambor, y por cada vuelta de éste dará dicho piñón un décimo de vuelta. Si se coloca delante del segundo trozo $m_1\,m_2$, el engrane se verificará con dos dientes, y de este modo cada vuelta del tambor proporcionará al piñón $b\,b'$ dos décimos de vuelta. En presencia del tercer trozo, se obtendrán tres décimos de vuelta por cada uno del tambor, y así sucesivamente. Resulta de cuanto llevamos dicho, que si se marcan sobre la caja del aparato los números 1, 2, 3..... en sentido de la longitud del eje del piñón, correspondiendo precisamente con cada uno de los trozos de tambor á que hemos hecho referencia,

dichos números marcarán las décimas de vuelta que dará el piñón por cada una de las vueltas que dé el tambor. En otros términos, si el botón índice que acompaña al piñón se detiene delante del número n, serán n los décimos de vuelta que dé por cada una del tambor, y si este da n' vueltas, será, por lo tanto, el producto nn' el que marque el número de décima de vuelta.

Un disco numerado con las cifras 0, 1, 2.....9 está en comunicación con el eje dd' del piñón, por medio de un engranaje cónico, y en él se marcarán, como es natural, los productos de referencia. El número n ha hecho el papel de multiplicando; el número de vueltas del cilindro, el multiplicador, y se ha obtenido el producto por tan sencillo mecanismo.

Combinando un cierto número de contadores de esta especie, á los cuales se comunica el movimiento por una misma manivela, se pueden hacer operaciones con números de muchas cifras, siendo preciso combinar los contadores elementales de tal modo, que los discos que marcan el producto hagan funcionar el mecanismo inmediato de la izquierda en el momento que pasen de nueve á cero, con objeto de que se agregue el número necesario del orden inmediato superior (*).

ARTÍCULO II

Clase 3.—Indicadores del movimiento.

627. Objeto y división.—El mejor medio de conocer la ley de un movimiento, es disponer de aparatos que la expresen gráficamente, ó sea por medio de un estilete compuesto de

(*) La máquina más perfecta de calcular que se conoce en el dia, es el aritmómetro de Mr. Thomas á que hacemos referencia. El dibujo completo de esta ingeniosa combinación de mecanismos, resultaría muy confuso, y preferimos indicar solamente su fundamento, para completar la descripción á la vista del mismo aparato. Con él pueden hacerse las cuatro operaciones fundamentales de aritmética y aun las de elevación á potencias y extracción de raíces, derivadas inmediatamente de ellas.

un lapicero ó pequeño pincel, que dé marcada la curva que sea expresión gráfica de dicha ley, y de su examen detallado podrán deducirse todas las condiciones del movimiento. A dichos aparatos se les da el nombre de *registradores*, y según la naturaleza de cada uno de ellos, los dividiremos del modo siguiente:

a.—Registrador de tira de papel.

b.—Idem de disco giratorio.

c.—Idem de diapasón.

El primero se emplea para movimientos rectilíneos, el segundo para los de rotación, y el tercero puede emplearse indistintamente para unos y otros.

628. a.—**Registrador de tira de papel.**—Se emplea, como hemos dicho, para los movimientos rectilíneos. El cuerpo en movimiento va provisto de un lapicero ó pincel *m* (*fig.* 186, *lám.* 21) cuya punta está obligada por medio de un muelle, que no se ve en la figura, á permanecer en contacto con una tira de papel *rs*. Esta tira está animada á su vez de un movimiento de traslación en sentido de la flecha, que le proporcionan dos rodillos *B* y *C*, de los cuales el último recibe el movimiento que proviene de un aparato de relojería, por el intermedio de un tambor cónico *E* y otro cilíndrico *D*, ligados por una cuerda que se desarrolla del uno para arrollarse en el otro. El mecanismo de relojería comunica directamente con el tambor *D* por medio de una cadena sin fin (*).

629. La forma tronco-cónica que presenta el tambor *C*, es indispensable en todos los aparatos registradores de tira de papel, para obtener la uniformidad en el movimiento de esta. En efecto, si se admite que el movimiento del aparato de relojería sea uniforme, y por consiguiente que lo sean también las rotaciones del tambor *D*, y de los *E* y *C* ligados á él, supuesto que *E* fuera cilíndrico, no sería constante la

(*) En el aparato que posée el gabinete de la Clase, el tambor *D* está montado en prolongación del *B*, pero con independencia completa de este. Por esta razón lo dibujamos separado de él, y de este modo se evitan las confusiones que pudiera haber al estar en la posición indicada.

velocidad del papel, puesto que su valor viene expresado por el producto de la velocidad angular constante, por la distancia de aquel al eje de *C*, la que va variando á medida que se arrolla mayor cantidad de papel, y tiene por valor el radio de *C* más *n* veces su espesor, suponiendo que se hayan dado *n* vueltas. Si se hace tronco-cónico el tambor *E*, y se da á su base menor un radio igual al de *C* y á la base mayor un valor igual al que tenga *C* después de arrollada toda la tira de papel ó sea igual á dicho radio más *n* espesores, se podrá trazar sobre el tronco de cono una espiral de *n* vueltas donde se vaya arrollando la cuerda. Con esto se conseguirá que la expresada cuerda obre constantemente á la misma distancia del eje que el papel, y como su velocidad es constante, lo será también la de éste, no obstante la disminución de la velocidad angular que tendrá de este modo el cilindro *C*. Complementa el aparato otro cilindro ó rodillo *A*, que tiene por objeto guiar el papel con el menor rozamiento posible, proporcionando al mismo tiempo un apoyo al lapicero ó estilete *m* para que no rompa el papel por la presión que sobre él produce.

630. Descrito el mecanismo, observemos que si el papel estuviera fijo, el lapicero ó estilete marcaría una línea recta *A Y*, *figura* 186 *bis*, en dirección del movimiento rectilíneo que se estudia; y recíprocamente, si el lapicero fuese el fijo y se moviese el papel, la línea recta tendría la dirección *A X;* esta última nos servirá como eje de abscisas, para el estudio de la curva que marca el lapicero, cuando tanto él como el papel estén animados de un movimiento determinado. Aun cuando en mayor escala que la *figura* 186, representa la 186 bis la curva correspondiente á un movimiento rectilíneo alternativo de que esté animado el lapicero, y en ella, las ordenadas representan caminos recorridos por este último y las abscisas que corresponden á los recorridos por el papel son cantidades proporcionales á los tiempos, ya que el movimiento se supone uniforme. Bastará tomar como unidad de tiempo contada sobre la abscisa, la magnitud que corresponde á la velocidad absoluta del papel, para que puedan deducirse

también la velocidad y aceleración del cuerpo móvil á que va unido el lapicero; en una palabra, para que puedan conocerse todas las características del movimiento de este.

631. b.—**Registrador de disco giratorio.**—Este aparato, debido á Poncelet, sirve para determinar experimentalmente la ley del movimiento de rotación de un árbol. Se compone de un platillo circular, perpendicular y concéntrico al árbol de rotación *o* (*fig.* 187), y solidario de este último, cuyo movimiento recibe. Un lapiz ó pincel recibe, por la acción de un movimiento de relojería, una rotación uniforme alrededor de un eje paralelo *o'*, y su punta trazaría sobre el platillo el círculo *NN'*, si el platillo permaneciese inmóvil. Pero no existiendo esta inmovilidad, el lapicero marcará una curva *MM'* que servirá para deducir la ley del movimiento.

Con efecto; cuando el lapicero ha marcado el punto *M*, estaba á la distancia *Mo* del centro del platillo, y como este centro es fijo, se encontraba en el espacio sobre el círculo *MN*. Pero la trayectoria absoluta del lapiz está marcada por el círculo de radio *o'N*; luego ocupaba en este instante la posición *N*, intersección de los círculos de radios *oM* y *o'N*. Del mismo modo se encuentra la posición absoluta de *M'*, que es el punto *N'* situado sobre el mismo círculo *o'N*; resultando, finalmente, que durante el tiempo marcado por la rotación uniforme *NN'* del lápiz, ó sea el movimiento de relojería, el platillo ha girado un ángulo igual á *MoM'*. La construcción de arcos de círculo análogos á los de radios *oM* y *oM'* proporcionará nuevos valores de los ángulos correspondientes á tiempos determinados, pudiendo deducirse las velocidades angulares y la velocidad media del árbol de rotación, y obteniéndose, en fin, por el examen de la curva *MM'*, todas las particularidades del movimiento de este último.

632. c.—**Registrador de diapasón.**—Los movimientos de relojería empleados en los registradores anteriores, no proporcionan uniformidad perfecta, y cuando se desee corregir los errores que por tal concepto resultan, puede recurrirse al procedimiento siguiente, empleado por Wertheim.

Un platillo metálico movido por el mecanismo de relojería, se halla cubierto de una ligera capa de negro de humo. Al mismo tiempo que el estilete marca la curva principal, un diapasón ejecuta sus vibraciones en un plano paralelo al plano del platillo, y un estilete fijo á uno de sus extremos, marca un trazo sobre este último. El diapasón está colocado de manera que el estilete oscile según un radio del platillo, cuando éste está en reposo; pero durante el movimiento, la punta marcará una curva ondulada, como la que representamos en la *figura* 187 *bis*. Los puntos de máxima y mínima de los radios vectores de esta curva, corresponderán al principio y al fin de estas oscilaciones; y dado el isocronismo del movimiento vibratorio, trascurrirá el mismo intervalo de tiempo desde cada máximo al siguiente. Este tiempo es siempre muy pequeño, $\frac{1}{250}$ de segundo, por ejemplo. Midiendo, por lo tanto, los ángulos comprendidos entre los radios de máxima, se conocerá el ángulo descrito por el platillo durante una serie de intervalos iguales cada uno á $\frac{1}{250}$ de segundo; y si se admite que el movimiento del platillo pueda ser considerado como uniforme en cada uno de estos intervalos, se podrá dividir el ángulo correspondiente en diez partes iguales, y obtener los ángulos descritos por el platillo en tiempos iguales á $\frac{1}{2500}$ de segundo. Esta subdivisión puede llevarse todavía á mayor grado, empleando con tal objeto un micrómetro ó un micróscopo (*).

Debe tenerse la precaución de dar al platillo una velocidad suficientemente grande, para que el ángulo descrito durante una vibración del diapasón sea también muy grande, y como consecuencia, que puedan hacerse las mediciones con la precisión debida.

(*) Este procedimiento ha sido propuesto por el Comandante Schultz, y es usado en los aparatos de precisión que han de describirse en el curso de artillería.

CAPÍTULO II

Segunda especie.—Indicadores dinámicos

633. Generalidades y división.—En los preliminares de este estudio se ha indicado el objeto especial de estos aparatos, que es la determinación ó medida de los esfuerzos y de los trabajos, en la cual habremos de tener presente las unidades empleadas en unos y otros, que son para los esfuerzos el *kilogramo* y para los trabajos el *kilográmetro*, que no es otra cosa que el trabajo efectuado por un esfuerzo de un kilogramo, cuando su punto de aplicación recorre en dirección del esfuerzo un espacio igual á un metro.

En el estudio de las máquinas es muy frecuente también considerar la energía consumida ó el trabajo efectuado en un período determinado de tiempo, y entonces se puede formar idea de ella, tomando como tipo los valores medios de la energía consumida ó desarrollada por la máquina en cada segundo.

Podrían expresarse también estos valores en kilográmetros, pero tendría esta unidad en muchos casos el inconveniente de proporcionar números de uso incómodo á causa de su magnitud, y se salva el inconveniente empleando la unidad *caballo de vapor*, equivalente á 75 kilográmetros producidos en un segundo.

Téngase presente que, al tomar como tipo para la unidad de trabajo las unidades respectivas del esfuerzo y del espacio recorrido en su dirección, pueden adoptarse otras distintas de las marcadas para el kilográmetro, obteniéndose unidades de un orden más elevado. La más empleada de este género es el *dinámodo ó tonelámetro*, que corresponde á un esfuerzo de una tonelada ó 1000 kilogramos y á un espacio de un metro. (*) De todos modos, cuando el trabajo esté expresado en una unidad cualquiera, bien fácil será reducirlo á otra superior ó inferior, conocida la equivalencia de unas y otras que acabamos de exponer.

634. Indicaremos la marcha que va á seguirse en este capítulo, que depende del objeto á que están destinados los aparatos que en él se explican, á los cuales se da el nombre general de *dinamómetros*, ya se empleen para la medida de esfuerzos ó en la determinación de los trabajos desarrollados, y así se clasificarán del modo siguiente:

A.—Indicadores de esfuerzos.
B.—Indicadores de trabajos.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Indicadores de esfuerzos

635. Idea general de estos aparatos.— Siendo el peso de los cuerpos una de las clases de esfuerzos que pueden considerarse, podrá ser incluído en la categoría de estos di-

(*) Está generalizado el uso de la acepción *fuerza de una máquina* para expresar la energía disponible de ella ó trabajo máximo que es capaz de desarrollar. Esta denominación es viciosa, dada la acepción de la palabra fuerza, pero no será fácil que exista confusión alguna, si al seguir esta costumbre vulgar se añaden los números correspondientes y las unidades en que vienen marcados; así, cuando en las etiquetas que suelen llevar las máquinas marque *fuerza* = 50 *caballos*, debe sobreentenderse la sustitución de la palabra *fuerza*, por la de *energía* ó *trabajo*.

namómetros el aparato que lleva el nombre de *balanza*, cuyas propiedades están fundadas en la teoría elemental de las palancas, y cuya forma varía según el medio de verificar las observaciones. Están comprendidas también en esta categoría las que reciben el nombre de *básculas*, fundadas en las mismas propiedades, si bien son una combinación más ó menos complicada de palancas, que tiene por objeto equilibrar objetos muy pesados, por medio de pesos tipos relativamente pequeños.

636. Pero estos aparatos no se prestan fácilmente á las experiencias que deben practicarse con las máquinas, y por esta razón se recurre al empleo de los llamados propiamente *dinamómetros*, cuyo principio fundamental consiste en la elasticidad de un muelle de acero, que estando sostenido por uno de sus extremos, ó apoyado en ambos, soporta un esfuerzo en el otro extremo ó en su centro, según que se considere el primer caso ó el segundo. Mientras este esfuerzo no pase de cierto límite, que depende de la naturaleza del material empleado en la construcción del muelle (límite de elasticidad), existirá proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación que produce, llamada *sagita ó flecha* (*), y por tal razón la magnitud de la flecha servirá en todos los casos para formarse idea del esfuerzo, bastando conocer la que corresponda á un esfuerzo unidad, que debe estar marcada en el aparato, ó determinarse por una experiencia preliminar. Es muy general que los dinamómetros lleven una graduación correspondiente á los diversos esfuerzos, y de este modo la experiencia preliminar puede referirse exclusivamente á la comprobación de la exactitud de estas graduaciones, lo que puede verificarse por medio de *esfuerzos tipos* ó esfuerzos ya conocidos correspondientes á las diversas indicaciones marcadas en el aparato.

637. En vez de la lámina flexible, puede emplearse una

(*) Es un principio de proporcionalidad que se explica en resistencia de materiales.

cinta metálica en figura de hélice, á la que se llama resorte, pudiéndose utilizar en todos los casos el juego de mecanismos que sea necesario, para amplificar las lecturas y dotar al aparato de mayor sensibilidad.

Explicada la idea general que sirve de fundamento á unos y otros aparatos, haremos el estudio de ellos clasificándolos del modo siguiente:

a.—Balanzas.

b.—Dinamómetros.

En cada uno de los cuales explicaremos las diversas disposiciones que pueden dárseles según el objeto á que están destinados, ó la forma en que se verifiquen las observaciones.

a.—Balanzas.

638. División.— Fundadas, como hemos dicho, en las propiedades elementales de las palancas, reciben diversas formas según que se emplee uno sólo ó varios de estos órganos, y aun en el primer caso, según que los brazos de la palanca empleada sean iguales ó desiguales. Estas ideas permiten la división en los tres tipos siguientes, que puedan considerarse como fundamentales de las muy variadas formas que se encuentran en las balanzas.

α.—Balanza ordinaria.

β.—Idem romana.

γ.—Báscula de Quintenz.

639. α.—Balanza ordinaria.—Se compone (*fig.* 188), de una palanca de primer género *a b* de brazos iguales, á la que se da el nombre de *fiel*. Esta palanca se apoya en un soporte vertical por medio de dos cuchillos dispuestos del modo explicado en el art. 3.°, cuyo objeto es disminuir el rozamiento en los apoyos y aún anularlo á ser posible. De las extremidades *a* y *b*, penden dos platillos *c* y *d*, donde se colocan el cuerpo que quiere pesarse en el uno, y en el otro los pesos tipos que han de hacerle equilibrio. Por último, existe una aguja ligada al fiel en su punto medio, la que corre por un arco

graduado que va unido invariablemente al montante. La posición de la aguja sobre el punto medio de este arco, indica la horizontalidad del fiel, ya que una y otro son perpendiculares por construcción, expresando al propio tiempo la igualdad entre los pesos colocados en ambos platillos; pues la ecuación de equilibrio que puede establecerse, ó sea la de momentos con respecto al centro de suspensión, indica que siendo iguales en esta posición los brazos de palanca de las fuerzas verticales aplicadas en a y b, iguales serán también dichos esfuerzos, ó sea los pesos que se consideran.

640. Tres condiciones principales deben concurrir en una balanza ordinaria, para que los pesos-tipos colocados en un platillo sean la medida exacta del peso del cuerpo colocado en el otro; estas condiciones, que vamos á examinar separadamente, son *precisión, estabilidad y sensibilidad.*

641. Condiciones de precisión.—Se dice que una balanza es *precisa* cuando dos pesos iguales colocados en los platillos no alteran la horizontalidad del fiel, cualquiera que sea su valor común. Sea $a\,b$ *(fig.* 189) el fiel que suponemos horizontal, por efecto de su propio peso; sea g su centro de gravedad, p su peso, o el centro de suspensión, l y l' los brazos del fiel y d la distancia del punto o á la vertical del centro de gravedad. Coloquemos dos pesos iguales P en los platillos, y según la definición de la precisión, la horizontalidad del fiel debe subsistir. Establezcamos, según esto, la ecuación condicional de equilibrio ó ecuación de momentos alrededor del punto o, la que toma la forma

$$Pl + pd = Pl'.$$

ó bien la equivalente

$$P(l - l') + pd = o$$

El término pd es una cantidad constante, por cuya razón debe serlo también el otro; mas como tiene un factor varia-

ble P, será necesario que el segundo factor se anule, ó lo que es lo mismo, que se verifique $l = l'$. El término pd resulta también igual á cero, lo que exige que d lo sea, ya que p no puede cumplir con esta condición. Podemos expresar en lenguaje vulgar las condiciones de exactitud de las balanzas, indicando que *los dos brazos del fiel deben ser iguales, y los centros de gravedad y suspensión encontrarse sobre una misma perpendicular al fiel.*

642. Cuando las condiciones que acabamos de enunciar no se verifican, el aparato toma el nombre de *balanza falsa*, y con ella no pueden verificarse las pesadas en las condiciones ordinarias; pero, sin embargo, proporcionan resultados exactos, recurriendo á uno de los artificios siguientes:

1.° Colocar el cuerpo que ha de pesarse en uno de los platillos y equilibrarlo con arena ó granalla de plomo, colocada en el otro. Retirar el cuerpo y reemplazarlo por pesos-tipos que restablezcan el equilibrio. Estos pesos representarán con toda exactitud el del cuerpo, sea ó no la balanza falsa. A este método se le da el nombre de *método de las dobles pesadas*.

2.° Pesar dos veces el cuerpo, pero colocándole en distinto platillo, con lo que puede deducirse el verdadero peso por el siguiente cálculo. Sean l y l' los dos brazos del fiel, x el peso desconocido, P los pesos-tipos de la primera pesada y P' los correspondientes á la segunda. La ecuación que exprese el equilibrio en la primera pesada, es

$$xl = P\,l'$$

y la que manifiesta el mismo efecto en la segunda

$$xl' = P'l$$

Multiplicando estas dos igualdades, miembro á miembro, y extrayendo la raíz cuadrada, se obtiene

$$x = \sqrt{PP'}$$

cuya fórmula nos dice que *el peso buscado es la media proporcional de los correspondientes á ambas pesadas.*

Debemos observar que este segundo método supone que los centros de gravedad y suspensión están colocados en una misma perpendicular al fiel; por consiguiente, es menos general y más incómodo que el primero, ya que este no supone realizada ninguna de las condiciones de precisión y no exige ningún cálculo.

643. Condiciones de estabilidad. — Según enseña la Mecánica racional, para que el equilibrio sea estable es preciso que el centro de gravedad esté situado debajo del centro de suspensión. Si esta condición se cumple en una balanza precisa, al colocar pesos desiguales en los platillos no conservará el fiel su horizontalidad y descenderá hacia el lado del platillo más cargado, una cantidad que habrá de depender de la diferencia entre ambos pesos, manteniéndose en equilibrio, pero en la posición inclinada que acabamos de indicar.

644. Si el centro de gravedad coincidiera con el de suspensión, la balanza estaría en equilibrio en cualquier posición horizontal ó inclinada, siempre que los pesos colocados fueran iguales, y al ser desiguales el fiel ocuparía una dirección vertical. A estas clases de balanzas se las da el nombre de *balanzas indiferentes.*

645. Por último, si el centro de gravedad se encuentra por encima del de suspensión, el equilibrio que pudiera realizarse sería instable; la más mínima causa lo perturbaría, y el fiel daría media vuelta para venir á colocarse el centro de gravedad debajo del de suspensión. Esta clase de balanzas, llamadas *balanzas locas,* tampoco pueden usarse en la apreciación de los pesos.

646. Condiciones de sensibilidad.— Se dice que una balanza es *sensible,* cuando una pequeña diferencia entre los pesos colocados en ambos platillos produce una inclinación notable en el fiel. La balanza es tanto más sensible cuanto mayor es la inclinación correspondiente á un mismo peso adicional, ó en otros términos, cuanto menor es el peso que pro-

duce una inclinación determinada. Este peso, suponiéndole correspondiente á una inclinación que sea apreciable á la simple vista, es el que marca el *grado de sensibilidad* (*). El problema que se presenta para examinar las condiciones que harán aumentar la sensibilidad de una balanza, ó hacer que aprecie pesos más pequeños, se reducirán á encontrar la inclinación α del fiel, que sea correspondiente á un peso adicional p y buscar las circunstancias que aumenten α ó disminuyan p.

647. Con este objeto, representemos por $a'b'$ (*fig.* 190) la posición de equilibrio del fiel, que tomará una cierta inclinación bob' cuando el peso $P+p$ de un platillo exceda en p al peso P colocado en el otro. La ecuación de equilibrio ó de momentos con respecto al centro o de suspensión, para esta nueva posición ab, toma la forma

$$P.oa'' + \omega.og'' = (P+p).ob''$$

en la cual se ha llamado ω al peso del aparato.

Simplificándola y observando que $oa'' = ob''$, resulta

$$\omega.og'' = p.ob''$$

de la cual se deduce inmediatamente

$$p = \omega.\frac{og''}{ob''} = \omega.\frac{og.\,sen\,\alpha}{ob.\,cos\,\alpha} = \omega\,t.g\,\alpha.\frac{og}{ob}$$

después de haber sustituído por og'' y ob'' sus valores, deducidos de las propiedades trigonométricas de los triángulos ogg'' y obb''. Llamando d y l á las magnitudes respectivas de og y ob, y dividiendo por $tg\,\alpha$, obtendremos la forma definitiva de la que puede llamarse *ecuación de sensibilidad*, que es

$$\frac{p}{tg\,\alpha} = \omega\,\frac{d}{l}$$

(*) Por esta razón se dice *esta balanza es sensible al miligramo, ó una décima de miligramo*, etc.

En esta ecuación se observa que disminuirá p ó aumentará $tg\,\alpha$ ó en otros términos, aumentará la sensibilidad de una balanza, disminuyendo ω y d y aumentando l. Estas condiciones las traducimos al lenguaje vulgar, diciendo:

Una balanza será tanto más sensible cuanto más largo y ligero sea el fiel, y cuanto más se aproxime su centro de gravedad al de suspensión.

Por otra parte, de dicha fórmula se podrá deducir la cantidad que sea incógnita de la cuestión cuando se trate del cálculo de una balanza, teniendo en cuenta los que deben ser datos de ella.

648. Se construyen balanzas que cumplen en muy alto grado las condiciones que hemos dicho, apreciando fracciones de peso muy pequeñas, y á tales aparatos se les da el nombre de *balanzas de precisión*. Estas balanzas difieren de las ordinarias en la naturaleza de los cuchillos que sirven para la suspensión del fiel y platillos, y en los apoyos de ellos. Los cuchillos son de acero templado y los apoyos son de ágata, presentando además una disposición particular para que no se apoyen unos sobre otros mientras no se hacen experiencias, lo que se consigue por medio de un tornillo que suele estar colocado en el pié del aparato y que, por una trasmisión sencilla, hace que el apoyo se verifique sobre *soportes accidentales* en forma de uñas, y no sobre la plancha de ágata. Es general en dichas balanzas, que pueda variarse el grado de sensibilidad, elevando ó bajando una pequeña masa lenticular que forma la tuerca de un tornillo practicado en la aguja perpendicular al fiel.

649. Las balanzas cuyas condiciones sean contrarias á las indicadas en la ecuación de sensibilidad, ó aquellas en que α sea pequeño ó d grande, reciben el nombre de *balanzas perezosas*, y su uso debe proscribirse por la muy poca sensibilidad de que son susceptibles.

650. *6.*—**Balanza romana.**—Se diferencia de la anterior en la variabilidad del brazo de palanca donde debe suspenderse el peso-tipo. Consta *(fig.* 191), de una palanca de

primer género de brazo desiguales BC; en la extremidad del brazo menor AC, lleva un cuchillo, del que se suspende un gancho para colocar el cuerpo que debe pesarse y sobre el brazo mayor AB, que está graduado, puede resbalar un peso constante M que hace equilibrio á aquel. La suspensión se verifica también por medio de un gancho ó argolla O y los cuchillos correspondientes.

La graduación del aparato se verifica mediante el establecimiento de la ecuación de momentos con respecto al punto de suspensión A; en la cual, dando al peso P los valores de 1, 2, 3..... unidades, se despejarán los que correspondan á los diversos brazos de palanca del cuerpo movible M. Los números anotados en la barra AB, indicarán los valores que se buscan mediante la lectura de la graduación en que se haya colocado el cuerpo movible M, para obtener el equilibrio entre él y el que debe pesarse. (*)

Con objeto de no dar á la romana una longitud considerable, es muy frecuente adaptarle una segunda anilla O', más aproximada que O al punto C. De este modo, invirtiendo el aparato y suspendiéndolo de O', el cuerpo M podrá hacer equilibrio á mayores pesos que se suspenden del extremo C. Una segunda graduación marcará los valores de dichos pesos.

651. γ.—Báscula de Quintenz.—Tiene por objeto verificar la medida de grandes pesos, haciéndoles equilibrio con otros mucho menores, que suelen ser una fracción determinada de aquellos cuyo valor $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100} \ldots\right)$ es variable según los usos á que está destinada la báscula.

Se consigue tal objeto, mediante el empleo de palancas combinadas, cuya disposición ordinaria es la siguiente: El tablero donde se coloca la carga Q (*fig.* 192), ejerce á la vez su acción sobre dos puntos diferentes: el primero es el E, donde obra por medio de un cuchillo sobre la palanca FD que

(*) Nos dispensamos de hacer los cálculos correspondientes, por la gran sencillez que presentan.

tiene su punto fijo en F; el segundo pertenece á otra palanca AC, cuyo punto de giro es o, y sobre ella obra en su punto A, por el intermedio de la barra rígida H que se apoya por su parte inferior en un talón de que va provista la varilla q, suspendida de A por medio de los correspondientes cuchillos. La primera palanca FD, trasmite también su acción á la AC por medio de otra varilla DB, suspendida en un punto B, más distante que A del centro de suspensión O. Por último, un platillo suspendido en la extremidad C de la palanca principal, sirve para colocar los pesos-tipos; y dos índices ó referencias m y n, que deben estar en presencia uno de otro, hacen el mismo efecto que la aguja en las balanzas ordinarias.

652. Para establecer la teoría de este aparato, llamemos p, p' y q las acciones desconocidas que se ejercen respectivamente sobre la palanca FD y sobre cada una de las varillas; el equilibrio de dicha palanca estará expresado por la condición

$$p.FE = p'.DF$$

Por otra parte, si llamamos P los pesos-tipos que hacen equilibrio al cuerpo Q, la palanca BC proporcionará

$$P.oC = p'.oB + q.oA$$

y sustituyendo en vez de p' su valor, sacado de la anterior ecuación

$$P.oC = p.\frac{FE}{DF}.oB + q.oA$$

pero las condiciones de construcción de la báscula son tales, que se verifica en ella la condición

$$\frac{FE}{DF} = \frac{oA}{oB}$$

y sustituyendo este valor en la ecuación anterior, tomará la forma

$$P.oC = p.oA + q.oA = (p+q).oA.$$

Es de observar que actuando la carga Q en la forma que hemos indicado, ó sea repartida entre el punto E y varilla q, el valor de Q será igual á $p + q$, y por lo tanto, puede reducirse todavía la ecuación anterior á la forma

$$P.oC = Q.oA$$

de la cual se deduce

$$Q = P.\frac{oC}{oA}$$

Resulta que el peso del cuerpo es igual al valor de los pesos-tipos, multiplicado por la relación $\frac{oC}{oA}$; y si se construye este aparato de modo que dicha relación tenga un valor suficientemente grande (10, 100, 1000.....), podrá verificarse la medida de grandes pesos, con la condición indicada al principio, de que les haga equilibrio un peso menor. Se adopta para valor de la relación $\frac{oC}{oA}$ uno de los números que hemos marcado entre paréntesis, para mayor sencillez de las observaciones. A dicho número se le puede dar el nombre de *coeficiente de la báscula*.

b.—Dinanómetros.

653. División.—Explicado ya el fundamento y objeto de estos aparatos, haremos una división de ellos, que se refiera á la forma empleada para los muelles que entran en su construcción. Esta división, que marca el orden que hemos de seguir, es la siguiente:

α.—Dinanómetro de muelle ordinario.

β.—Idem de resorte en espiral.

γ.—Idem de dos muelles.

δ.—Manivela dinamométrica.

654. α.—**Dinamómetro de muelle ordinario.**—Se compone (*fig.* 193) de una lámina de acero de forma curva $L\,L$, á

cuya hoja superior se fija un arco A' que atraviesa sin rozamiento la extremidad de la hoja inferior, en la cual va fijo otro arco A, que atraviesa también sin rozamiento la extremidad de la hoja superior. En el extremo libre del arco A se coloca un anillo ó argolla d y en el del arco A' un gancho c; el anillo sirve para suspender los cuerpos cuyos pesos hayan de medirse. Una vez graduado el aparato por medio de pesos-tipos, de 1, 2, 3..... kilogramos por ejemplo, puede hacerse la apreciación de otro cualquiera, por el examen de la graduación que marque la cara superior e de la hoja superior.

655. Cuando se trata de medir un esfuerzo de tracción, por ejemplo, el que se pueda ejercer en el extremo de una cuerda, se dispone el aparato como indica la *figura* 194, y se anota el punto de división donde se detiene la lámina e, para obtener en kilogramos el valor que se desee.

656. δ.—**Dinamómetro de resorte en espiral.**—Está compuesto de una caja cilíndrica, dentro de la cual se halla encerrado el resorte, cuya extremidad superior d (*fig.* 195), está fija á un punto de la base superior de la caja; el extremo inferior del resorte termina en un disco A, que puede marchar á rozamiento suave dentro de la caja cilíndrica, siendo guiado por ésta. La suspensión de este dinamómetro se verifica por un mango ó argolla B, unido por una varilla al disco A, y el cuerpo que ha de pesarse se suspende de un gancho colocado en la tapa inferior de la caja. Las graduaciones pueden marcarse sobre la misma barra, examinando la cantidad que ésta sobresale de la tapa cd; pudiendo usarse el aparato del mismo modo que hemos explicado para el anterior.

657. γ.—**Dinamómetro de dos muelles.**—El más sencillo de los comprendidos en este epígrafe es el representado en la *figura* 196, y consta de dos láminas de acero flexibles de forma parabólica (*), articuladas en sus extremidades. En el

(*) En el dinamómetro imaginado por Mr. Poncelet, los muelles tenian sección constante, pero Morin los ha modificado dándoles la forma de sólidos

punto medio *a* de una de ellas, se suspende el peso que ha de medirse, fijando el dinamómetro por medio de una argolla colocada en el medio *b* de la otra lámina. El esfuerzo lo marca una graduación que lleva la regla *c*, de la cual uno de los extremos está fijo á la lámina ó muelle superior. Las lecturas se refieren á la mayor ó menor separación de ambas láminas.

Se amplifican las observaciones por el procedimiento empleado en el *dinamómetro de Regnier*, en el cual las láminas principales *ab* y *cd* (*fig.* 197) tienen la forma especial marcada en la figura, y están reunidas por arcos rígidos *A* y *B*. La lámina *ab* lleva un sector, en cuyo centro *o* se fija una aguja que recorre un arco graduado; en contacto con la aguja se halla una palanca acodada *gif*, que oscila alrededor del punto *i*; en *f* se articula una varilla rígida *fe*, unida por un botón fijo al muelle *cd*. Como el brazo *if* es menor que *ig*, las variaciones se hallan todavía más amplificadas en el limbo del sector. Se usa este aparato suspendiéndolo por *A* y colgando en *B* el peso que debe medirse; por la acción de éste, se alargan los muelles y disminuye la distancia que los separa; estas variaciones de distancia, amplificadas como hemos dicho, miden el valor del peso suspendido, ó la intensidad de una fuerza aplicada en el punto *B*.

658. δ.—**Manivela dinamométrica.**—Se emplea este aparato para determinar el esfuerzo que ejerce una persona al actuar sobre una manivela. El mango *A* de la que representamos en la *figura* 198, se encuentra fijo en el extremo de una lámina flexible *B C*, la cual se adapta al extremo del árbol que quiere ponerse en movimiento, por medio de los tornillos de presión *t*. Cuando se origina el movimiento de rotación actuando sobre el mango, se determina la flexión del

---

de igual resistencia, que se deduce ser parabólica en el estudio de la *Resistencia de materiales*. Esta forma proporciona para un mismo esfuerzo flexiones dobles de las que se obtendrían con la sección uniforme, aumentando notablemente la precisión del aparato.

muelle, cuya deformación puede medirse por medio de un arco de círculo *m n*, convenientemente graduado, que gira con la manivela sin participar de la flexión del muelle, y basta ver á qué punto de la división corresponde una aguja indicadora que posee este último, para conocer el número de kilogramos que representa el esfuerzo empleado.

ARTÍCULO II

Clase β.—Indicadores de trabajos

659. Generalidades sobre estos aparatos.—Siendo el trabajo de una fuerza igual al producto de ésta por el espacio recorrido en su dirección, cualquier aparato comprendido en la clase anterior podrá servir para el objeto que nos ocupa, siempre que se le adicione uno de los indicadores comprendidos en la primera especie, ó indicadores cinemáticos. El primero nos proporcionará el esfuerzo, y el segundo nos dará á conocer directa ó indirectamente el camino recorrido, siendo fácil ya deducir cuál sea el valor del trabajo.

Pero el uso combinado de dos aparatos de distinta especie presenta siempre inconvenientes, sobre todo cuando se trata de practicar un cierto número de experiencias, en las cuales es necesario ocuparse de un sin fin de detalles inherentes al modo de funcionar uno y otro. Por esta razón, el objeto de este artículo quedará cumplido englobando convenientemente en una sola, dos de las clases de aparatos á que nos referimos, y á este fin tenderá el estudio que vamos á presentar.

660. Como la disposición de los aparatos de esta clase, que reciben también el nombre de *dinamómetros*, varía notablemente según la naturaleza del movimiento que tenga lugar, será conveniente dividirlos en dos grupos, que se referirán, el uno al caso en que deban medirse esfuerzos de tracción, como los que se verifican por el ganado al tirar de un

carruaje, y el otro al caso de las máquinas ordinarias, tomando los nombres siguientes:

a.—Dinamómetros de tracción.

b.—Idem de rotación.

Uno y otro grupo podrá subdividirse á su vez en tipos diferentes, según la naturaleza del indicador cinemático que empleen, y así se obtendrán *dinamómetros registradores y dinamómetros contadores,* marcando gráficamente los primeros el valor del trabajo, y debiendo deducirse éste en los segundos por las observaciones que se pueden verificar. Pasaremos revista á cada uno de los grupos indicados, examinando, como hemos dicho, el modo de combinar los indicadores cinemáticos con los que anteriormente hemos explicado.

a.—Dinamómetros de tracción.

661. Dinamómetro registrador de tracción.—Este dinamómetro es debido al general Morín, que ha escogido para verificar la combinación á que hemos aludido en nuestra explicación general, un dinamómetro de esfuerzos, *tipo* γ, ó sea compuesto de dos muelles articulados en sus extremos, y un indicador de movimiento del *tipo a,* en el que se emplea tira de papel. Al conjunto se le da la forma que indican en perspectiva y proyección respectivamente las *figuras* 199 y 200, *lám.* 22, en las cuales se ve ligada una de las láminas flexibles á la argolla *a,* por intermedio del suplemento macizo *b.* La otra lámina se liga al carruaje, sirviendo para ello el suplemento *c* y anillo *d,* que puede introducirse en un perno que se dispone convenientemente en dicho vehículo y debe tener la resistencia proporcionada al esfuerzo que debe desarrollarse (*).

(*) Tanto estas dos figuras como la 201, corresponden al dinamómetro adquirido recientemente por la academia del Cuerpo. Con él hemos hecho dos series de experiencias, encaminadas principalmente á encontrar la relación del tiro á la carga en los carruajes de artillería, habiendo podido observar en ellas las excelentes condiciones de construcción del aparato. En la nota del párrafo 667 detallamos las experiencias hechas y las precauciones para su manejo

El indicador cinemático va unido al suplemento fijo *c*, viéndose en *d'* el aparato de relojería, en *e* y *f* los dos rodillos sobre que se arrolla el papel, en *g* el tambor tronco-cónico y en *m n* la trasmisión por cadena sin fin entre el aparato de relojería y el tambor cilíndrico *n*. Una pequeña palanca *i* sirve para iniciar ó suspender el movimiento de relojería, y por consiguiente el de la tira de papel, y un pequeño freno de contacto *r* gradúa convenientemente la velocidad de ella, oprimiendo más ó menos el tornillo que lo sujeta. Lleva el aparato tres lapiceros: uno de ellos unido por medio de una escuadra al suplemento movible *b* y los otros dos ligados á una armadura dependiente del suplemento fijo *c*. El primero de ellos ó movible, está solicitado por un muelle en espiral para verificar constantemente su apoyo sobre el papel, cuya circunstancia concurre también en uno de los lapiceros fijos. El último de estos está, por el contrario, solicitado hacia la parte superior, y solamente hace señales en el papel cuando se ejerce una presión en el botón que lleva colocado sobre él: á este último le damos el nombre de *lapicero ó estilete de referencias*. Por último, indicaremos que el aparato lleva en la parte anterior de la armadura unos tornillos topes *K* para evitar que los muelles lleguen á sus límites de elasticidad, por lo cual puede dárseles el nombre de *tornillos de seguridad*, con cuyo empleo no se romperá el aparato aun cuando el esfuerzo exceda del límite para que está calculado.

662. Para *operar con el dinamómetro*, es preciso unirlo al carruaje, lo cual puede conseguirse mediante una sencilla modificación que hemos hecho en un armón para convertirlo en carruaje de experiencias, que representamos en la *figura* 201. En la tabla de piso se ha adaptado un perno, donde se sujeta el dinamómetro por su anillo *d*, y la vara de guardia ha sido sustituída por otra más corta que se ve en la figura, que lleva unos rebajos para que penetren en ellos los botones inferiores de la parte anterior de la armadura. De este modo queda la lámina posterior con una fijeza relativa sobre el carruaje, sirviendo á la vez la vara de guardia como verdadera guía del

movimiento de la armadura anterior, que en otro caso, y sin la altura que se ha dado á dicha vara de guardia, tendería á descender, haciendo que el esfuerzo se ejerciera en malas condiciones para la resistencia del aparato.

663. Arrollado el papel sobre el rodillo *f*, pegado el extremo libre sobre el otro rodillo *e*, y preparado el aparato de relojería, puede verificarse ya la experiencia después de haber marcado previamente sobre el terreno un suficiente número de puntos de referencia por medio de banderolas ó piquetes que disten entre sí diez metros por ejemplo. En marcha el carruaje y en movimiento también la tira de papel, se van marcando puntos con el estilete de referencias cada vez que se pasa en presencia de una de las señales, para dar por terminada la experiencia cuando todo el papel se haya desarrollado de *f* y arrollado en *e*.

664. Tanto en este dinamómetro como en los otros de su mismo género, el lapicero movible marcará sobre el papel una curva, cuyas ordenadas contadas en sentido del ancho, representarán cantidades proporcionales á los esfuerzos desarrollados, y las abscisas serán también proporcionales á los caminos recorridos, mientras el lapicero fijo habrá marcado una línea recta que podrá considerarse como eje de abscisas. El área comprendida entre este eje, la curva y las ordenadas extremas correspondientes á la primera y última señal del terreno, representará el trabajo total desarrollado en el referido trayecto, y para medirlo bastará determinar el área por uno cualquiera de los procedimientos que nos son perfectamente conocidos.

665. La *medición del área* exigiría cálculos demasiado largos, si se empleara una de las fórmulas de Simpson ó Poncelet, ó una operación también muy larga si se usa un planímetro. Se abrevian las operaciones por el método siguiente, llamado *de las pesadas*, que aunque tampoco es exacto, proporciona suficiente aproximación. Está fundado en la homogeneidad de la tira de papel, según la cual, las áreas de dos trozos cualesquiera de él serán proporcionales á sus pesos

respectivos; por consiguiente, si se corta el trozo total comprendido entre las ordenadas extremas, podrá conocerse fácilmente su peso, que llamaremos P, por medio de una balanza de precisión, y su área A por ser un rectángulo. Recortando después el trozo marcado por la curva, podrá también determinarse su peso p y venir en conocimiento del área a por la relación

$$\frac{P}{p} = \frac{A}{a}$$

de la que se deduce

$$a = \frac{A\,p}{P}.$$

666. Resta examinar la equivalencia entre el área a y el trabajo desarrollado, para cuyo efecto es indispensable recurrir á una *experiencia complementaria* de graduación del dinamómetro, ya que no es común el que los de esta naturaleza lleven las graduaciones marcadas, y aun cuando así sea, es preciso rectificarlas por las variaciones que pueden experimentar por efecto del uso. Esta graduación es fácil, bastando usar el aparato del modo indicado para los dinamómetros de esfuerzos, y medir la flecha ó sagita que corresponde á un esfuerzo determinado, para deducir por una proporción el esfuerzo que corresponde al ancho total del papel. Este esfuerzo expresado en kilógramos, multiplicado por el espacio recorrido en metros, nos da el trabajo total que corresponde al área A, y de él puede deducirse el trabajo x que buscamos, mediante la proporción

$$\frac{A}{a} = \frac{T}{x}$$

de la que se deduce

$$x = T\frac{a}{A} = T\frac{p}{P}.$$

Téngase en cuenta para el uso de esta fórmula, que es preciso fijar las magnitudes de los esfuerzos y espacios recorridos

en las unidades que hemos marcado, con lo cual el trabajo x vendrá expresado en kilográmetros.

667. Debemos manifestar también, que se suelen usar estos dinamómetros para medir el esfuerzo medio desarrollado por el motor, bastando á este fin dividir el trabajo que acaba de encontrarse por el camino recorrido (*).

(*) Nos detenemos tanto en la explicación de este dinamómetro, por lo interesante que es al oficial de Artillería el conocimiento de las relaciones entre el esfuerzo del tiro y la carga, correspondientes á los carruajes en uso. A pesar de ello, hemos omitido ciertos detalles impropios para figurar en el texto, pero que creemos conveniente dar á conocer, para evitar una repetición de los tanteos y observaciones que hemos necesitado hacer en el curso de las experiencias. Trataremos de resumirlos lo más posible, en la forma siguiente:

Preparación del aparato. Pegado un extremo del papel sobre el rodillo *f*, se arrolla sobre él, valiéndose de la pequeña manivela que lleva, y se pega el otro extremo al segundo rodillo *e*. Se pone en movimiento el papel haciendo marchar el aparato de relojería, hasta que toda la tira se haya arrollado sobre *e*, en cuyo caso se interrumpe la marcha del mecanismo por medio de la palanquita *i*. Hecho esto, se arrollará de nuevo sobre el tambor ó rodillo *f*, valiéndose de su correspondiente manivela, repitiendo hasta tres ó cuatro veces ambas operaciones, para proporcionar al papel la suficiente flexibilidad.

Pueden aprovecharse los movimientos directos ó del aparato de relojería, para engrasar todos los ejes. En los movimientos anteriores se ha hecho caso omiso de los lapiceros, que se colocarán terminadas que sean las indicadas operaciones, y una vez en su posición respectiva se repite otro cierto número de veces la operación de arrollar y desarrollar sobre el rodillo *e*, mecánicamente la primera y á mano la segunda. Los movimentos directos se aprovechan en esta ocasión, para graduar la presión que debe darse al pequeño freno *r*, con objeto de que la velocidad del movimiento tenga un valor prudencial, correspondiente al aire á que debe verificarse la experiencia; así, si ha de ser al trote, la presión debe ser bastante menor que empleando el paso, para que la velocidad aumente en relación con la del carruaje.

Preparación del terreno. Con la longitud que tienen las tiras de papel que nos han remitido con el aparato, y con la velocidad que hemos visto ser más conveniente para éste, dada la ordinaria al paso, corresponde la longitud de la tira á un trayecto de 100 metros. Se medirá esta distancia, colocando jalones de trecho en trecho, creyendo suficiente la distancia de 10 metros entre dos señales consecutivas. Si el aire es más violento, pueden duplicarse la distancia total y las parciales. Debe medirse también la pendiente del terreno, dato muy interesante de la experiencia. Esta medición la hemos hecho con el nivel de

668. Indicaremos, por último, que puede emplearse otro procedimiento para proporcionar el movimiento á la tira de papel, y consiste en sustituir el mecanismo de relojería por uno que sea combinación de tornillo y correa sin fin, que ligada con el cubo de la rueda, proporciona una rotación dependiente de esta. Pero encontramos más imperfecto este pro-

---

Lefebvre, que presenta la gran ventaja de dar directamente el valor de la pendiente por metro.

Modo de hacer la experiencia. Inmediatamente después de iniciado el movimiento del aparato de relojería, póngase en marcha el carruaje, partiendo de un punto que diste de la primera señal la cantidad suficiente para que al llegar á ella esté ya el vehículo en régimen. El operador, sentado en el armón, irá marcando sobre el papel, y valiéndose del lapicero de referencias, tantas señales como jalones ó piquetes se hayan colocado. Se da fin á la experiencia, retirando á mano el papel y repitiendo la operación con uno nuevo para tener mayor exactitud en los resultados.

Es conveniente ir marcando también por medio de un cronómetro los tiempos que correspondan á cada intervalo, para deducir el valor de la velocidad en cada uno de ellos, y el de la velocidad media de todo el trayecto. Para las experiencias hechas, nos ha servido el contador de puntería, que se encomendaba al cuidado del ayudante de la experiencia, montado también en el armón.

Debe tenerse en cuenta, que al repetir la experiencia sólo hace falta la primera parte de la preparación del aparato, á no ser que se haya de variar el aire, en cuyo caso debe modificarse la presión del freno.

Graduación del dinamómetro. Esta operación es preliminar, digámoslo así, de los trabajos de gabinete. La hemos verificado suspendiendo el dinamómetro de una cabria y colgando de su argolla una bomba de 32; marcada la desviación del lapicero movible en la tira de papel, y repetida esta experiencia mediante la suspensión de dos bombas, hemos obtenido por la ley de proporcionalidad el resultado siguiente:

Carga correspondiente á una flecha de $0^{m},01$..... $37^{kg},4948$

Este número ha sido comprobado repetidas veces, midiendo con escrupulosidad por medio de compases de precisión, las flechas obtenidas, y verificando también varias veces el peso correspondiente al conjunto de bombas, mordazas y ganchos de suspensión empleados con ellas.

Trabajos de gabinete. Se reducen á recortar el papel por las ordenadas correspondientes á las señales extremas y pesar el trozo comprendido entre ellas por medio de una balanza de precisión. Recortar de nuevo el papel, contorneando la curva obtenida, y pesar el trozo comprendido entre ella y el eje de abscisas que ha marcado el lapicero fijo. Si la curva estuviera poco marcada en al-

cedimiento usado en dinamómetros del mismo género, por la dificultad en montar una trasmisión precisa, que permita establecer una comparación exacta entre las magnitudes del papel y del terreno.

669. Dinamómetro contador de tracción.—Los dina-

---

guno de sus puntos, debe cortarse por la ordenada correspondiente á la señal anterior, y la experiencia se referirá solamente al trayecto que á dicha señal corresponda. (Esta observación justifica la precaución que recomendamos, de marcar señales en el terreno que disten por lo menos 10 metros; de no hacerlo así, tendrían que repetirse en su totalidad las experiencias cuyas indicaciones gráficas no quedaran marcadas en parte, bien por la expresada causa ó por otra imprevista).

Verificadas y comprobadas las pesadas hechas, apliquense las fórmulas que presentamos en el texto para deducir el valor del trabajo.

En las experiencias que hemos practicado, no solamente hemos deducido este resultado, sino que también se ha medido la ordenada en el arranque, y las ordenadas máxima y mínima de la curva, para deducir los esfuerzos correspondientes.

He aquí la forma dada á los cálculos verificados por los alumnos, los cuales hemos confrontado con la mayor escrupulosidad.

EXPERIENCIAS CON EL DINAMÓMETRO REGISTRADOR DE TRACCIÓN

Cañón A c. 8. Lr. = Carruaje md. 1863. Rf. 1868.

Pendiente del trayecto recorrido, 6'7 por 100

Aire, paso.

Carga, armón y cureña con su pieza.

Tiro compuesto de guías y tronco.

Curva ó diagrama obtenido, tira núm. 2.

Longitud del terreno correspondiente al trozo bien marcado de la curva, 50^{m}

Velocidad media en todo el trayecto $= 1^{m},50$ por $1''$

P = peso total del papel $= 63^{gr},212$.

p = peso del papel — trabajo $= 35^{gr},641$,

Carga correspondiente á la altura total $0^{m},0708$ del papel $= 265^{kg},463$.

Trabajo ideal correspondiente al rectángulo total, $T = 265,463 \times 50 = 13273^{kg},15$.

Trabajo real desarrollado en $50^{m} = t = T\frac{p}{P} = 7483^{km},84$.

Trabajo real desarrollado en $1'' = 224^{km},54$.

Esfuerzo medio durante la marcha $= \frac{t}{50} = 149^{kg},670$.

mómetros registradores presentan la gran ventaja de dar á conocer las variaciones del esfuerzo producido por el motor, mediante el examen de la curva obtenida; pero cuando deban prolongarse las experiencias más allá del trayecto que permita la longitud del papel, ó bien cuando solamente se desee

---

Esfuerzo máximo correspondiente á $0^{m},0471$ de ordenada $= 176^{kg},600$.
Idem mínimo ídem á $0^{m},0192$ de ordenada $= 71^{kg},990$.
Idem de arranque correspondiente á $0^{m},0632$ de ordenada $= 236^{kg},967$.

Experiencias verificadas en Segovia el año 1886, *y consecuencias de ellas.* Las experiencias hasta ahora practicadas y que han servido para formar las tablas que presentan los diversos autores, se han referido generalmente á la investigación de la relación que existe entre el esfuerzo del ganado y la carga de arrastre, ó del tiro á la carga por abreviar el lenguaje, haciendo variar la naturaleza de los terrenos donde se experimentaba.

Esta variación ha producido diferencias considerables en el valor de la relación encontrada, las cuales no serán menos sensibles cuando se trate de variar las pendientes sobre que marchan los carruajes, á cuyo caso no se había referido experiencia alguna. Por esta razón, y dada la poca precisión de las fórmulas teóricas, que deben siempre afectarse de coeficientes determinados por la experiencia, hemos preferido referir las nuestras á este último caso, para deducir las consiguientes conclusiones relativas al problema de la tracción en los carruajes de artillería, y obtener también los mencionados coeficientes. Aun cuando el número de experiencias no ha sido tan grande como hubiéramos deseado, ya que el objetivo principal era instruir á los alumnos en el manejo del aparato, se ha procurado al menos que las conclusiones que aparecen en la tabla que hemos formado tengan la mayor exactitud, multiplicando los datos relativos á cada una de las pendientes.

Se han distribuído las experiencias en dos series, encaminadas cada una al objeto indicado, y tendiendo su conjunto á examinar las variaciones que presenta el problema de la tracción cuando se hace aumentar ó disminuir la carga de arrastre. La primera serie de experiencias se ha hecho, por lo tanto, con un armón y cureña después de haber desmontado la pieza y empleando para el tiro tan sólo una pareja de mulas. Se ha referido la segunda serie al caso de una pieza arrastrada por dos parejas. Variando en uno y otro caso la pendiente, que hemos medido con la mayor escrupulosidad, se han determinado por los procedimientos ya expresados los esfuerzos correspondientes al arranque del ganado, y sus valores máximo, medio y mínimo durante la marcha. De ellos se ha deducido la relación del tiro á la carga, refiriéndola, como es natural, al esfuerzo medio que se había calculado.

Anotamos en la *tabla número* 12 los resultados de ambas series de expe-

conocer la cantidad total de trabajo, se hace uso de los dinamómetros contadores, llamados también, por la naturaleza de sus indicaciones, *dinamómetros totalizadores*.

670. En el que representamos en la *figura* 202, *lám.* 23,

---

riencias, habiendo marcado en ella, además de los datos expresados, los referentes á la velocidad del carruaje y á los trabajos desarrollados por el ganado, tanto en un intervalo de cien metros, como en un segundo.

Como puede observarse, ha sido más completa la segunda serie, habiendo experimentado un pequeño número de pendientes en la primera; mas hemos considerado que era muy suficiente, pues sólo la inspección comparativa de los valores anotados en una y otra para la relación del tiro á la carga, hace ver que esta queda favorecida en el primer caso, ó sea cuando es menor la carga de arrastre. Basta con observar que el valor de dicha relación es o'10 en la primera serie para la pendiente de 7'4 por 100 y o'126 en la segunda para la de 7 por 100. También el número o'05, correspondiente á la pendiente de 3'7 de la primera serie, es menor que los marcados en la segunda para las pendientes de 2 en adelante.

Refiriéndonos ya exclusivamente á la segunda serie, debemos observar que la relación del tiro á la carga ha variado en dichas experiencias entre los números o'032 y o'126, pudiendo tomarse el promedio o'08 como tipo para las pendientes que deben salvarse. También podemos comparar el esfuerzo de arranque ejercido por el ganado con el del valor medio que ha consumido durante la marcha, resultando que esta relación oscila entre los números uno y cinco; y si se admite este último como límite del valor de ella, deduciremos que si el esfuerzo medio es, como llevamos dicho, menor que $\frac{1}{10}$ de la carga de arrastre, el de arranque no llegará á valer los $\frac{5}{10}$, ó sea la mitad de dicha carga. Si por fin se comparan también con el esfuerzo medio los valores de los esfuerzos máximos desarrollados durante la marcha del carruaje, se obtendrán números mitad próximamente de los encontrados en el caso anterior.

Hemos calculado todavía otra tabla, que insertamos con el mismo número á continuación de las anteriores, para establecer comparaciones precisas entre los resultados que proporciona la experiencia y los obtenidos por medio de las fórmulas aplicables á este caso. Nos hemos servido á este efecto de la fórmula

$$\frac{P}{Q} = \cos\alpha \frac{\varepsilon + f_1 \rho}{r\cos\delta + \operatorname{sen}\delta\,(\varepsilon + f_1\rho)} + \operatorname{sen}\alpha$$

deducida de las (b'') y (b_1) que presentamos en los párrafos 344 y 348, asignando á las letras que entran en ella los valores correspondientes al carruaje empleado, que ha sido del modelo 1863 reformado al 68, deduciendo para los

sirve como base el mismo dinamómetro de esfuerzos que se ha empleado para el anterior; cuyas dos lá inas flexibles vienen marcadas en corte por los rectángulos m y m', de las cuales la primera está reunida al carruaje por la armadura pp', y la

---

valores de α que corresponden á las pendientes de la experiencia, los datos consignados en la referida tabla.

La comparación de estos datos con los que proporciona la experiencia y que apuntamos al lado de ellos, nos hace ver que para las pendientes fuertes es mucho mayor la diferencia de los resultados teóricos á los prácticos, que en el caso de pequeñas pendientes. Dicha diferencia es, con efecto, de 4 milésimas para la pendiente mínima ó de 0 por 100, y de 5, 5, 7, 17, 20 y 29 para las de 1 hasta 7 respectivamente.

Deducimos de estas diferencias, que debe variar el coeficiente de corrección que se adopte para la fórmula teórica, pudiendo tomarse un promedio de los que se obtengan para las pendientes débiles y otro entre los que correspondan á las mayores. Las relaciones entre los resultados prácticos y los teóricos, calculadas para las diversas pendientes marcadas en esta tabla, están anotadas en la última columna y son respectivamente 1'14, 1'13, 1'10, 1'12, 1'25, 1'26, 1'27 y 1'29, encontrándose el número 1,12 como promedio de las cuatro primeras y 1,27 como perteneciente á las cuatro últimas. Consignamos, pues, estos valores, como coeficientes de corrección relativos respectivamente á las pendientes de 0 á 3 por 100 el primero y á las de 4 á 7 el segundo.

Resumiremos ya los resultados de nuestras experiencias, expresándolos en la forma siguiente:

1.º *La reducción de la carga hace disminuir la relación entre el esfuerzo necesario para el arrastre y el peso de aquella.*

2.º *El valor de la relación expresada tiene un promedio que no llega á* 0'10 *para las pendientes regulares, pudiendo adoptarse dicho tipo en los cálculos que deban hacerse.*

3.º *El esfuerzo de arranque tiene por límite cinco veces el valor del que se desarrolla durante la marcha, pudiendo servir de tipo dicho número, ó sea* $\frac{1}{2}$ *de la carga de arrastre.*

4.º *Los coeficientes de corrección de que deben afectarse las fórmulas teóricas, tienen un promedio igual á* 1'12 *para las pendientes de* 0 *á* 3 *por* 100 *y* 1,27 *para las de* 4 *á* 7.

Estas conclusiones, si bien no deben considerarse como bases fijas para los cálculos, por ser relativas á los casos experimentados, creemos puedan servir como punto de partida, hasta que nuevas y más numerosas experiencias las corroboren ó modifiquen.

segunda se ve ligada por medio del argollón *A* á la polea *B* donde se ejerce el esfuerzo.

El indicador cinemático que forma parte de este aparato, es un contador de vueltas, perteneciente al tipo que hemos explicado con el nombre de contador de ruedas diferenciales, cuya caja representamos en la figura con las letras *C*.

El medio de ligar uno con otro y con el carruaje, es el siguiente: en el brazo horizontal de la varilla recodada *b c d* unida á la lámina anterior *m*, se halla montada la ruedecita *a*, que obligada á seguir el movimiento del muelle al doblarse, se separa del eje vertical *E E'* tanto más cuanto mayor sea el esfuerzo. Dicha rueda *a* se halla por su canto en contacto con un plato *P*, montado en la extremidad del árbol *g* que recibe un movimiento de rotación dependiente del carruaje, por medio de la correa sin fin *f*. De este modo, la ruedecita *a* girará por efecto del rozamiento desarrollado en su contacto con el platillo, y la velocidad de rotación será tanto mayor cuanto mayor sea la de éste y la distancia á que dicha rueda se encuentra del eje *E E'*, siendo de observar que cuando no se ejerce esfuerzo alguno, la posición de ella corresponde al centro del platillo, y su velocidad de rotación sería nula, aun cuando tuviera movimiento este último. Finalmente, el eje *b c*, donde se halla montada la rueda *a*, está en comunicación con el contador, lo que puede verificarse de un modo directo; para lo cual bastaría hacer que el tornillo estuviese montado sobre el mismo árbol, de tal modo que este pueda trasladarse en dirección de su longitud sin trasladar al tornillo, ó lo que es lo mismo, que la ligazón de tornillo y eje se verifique por ranura y lengüeta (*).

671. Por la descripción que acabamos de hacer, se comprende desde luego que siendo el número de vueltas que dé la rueda *a* en la unidad de tiempo proporcional á la velocidad

(*) Nos parece la más sencilla esta disposición, con la cual se evita el empleo de engranajes, que siempre complican algún tanto la trasmisión del movimiento.

de rotación del plato P y á la distancia á que se halle separada del eje E, habrá de serlo al esfuerzo y al camino recorrido por el punto de aplicación de éste, y por lo tanto, las graduaciones que marque el contador cumplirán con igual condición, pudiendo representar los valores del trabajo desarrollado, ó cantidades proporcionales á éste.

672. Para operar con este aparato, debe iniciarse el movimiento del carruaje haciendo que la rueda a no esté en contacto con el platillo, lo que se consigue suspendiendo contador y rueda a por medio de una pequeña palanca. Cuando el vehículo tiene su marcha en régimen y va á empezar la experiencia, se deja descansar sobre el disco el contador, con lo que la rueda a empezará á girar proporcionalmente á la rotación del eje del carruaje, y á la distancia de su punto de apoyo al eje del disco. Se anotará además la hora en que empieza la experiencia, durante la cual se irán marcando, para espacios recorridos que sean conocidos, kilómetros, por ejemplo, los tiempos trascurridos y las graduaciones del contador, cuya anotación debe hacerse también al terminar la experiencia.

Las cantidades de trabajo desarrolladas se obtienen multiplicando el número de vueltas que señala el contador, por el coeficiente del instrumento, y por la relación $\frac{R}{r}$ del radio de la rueda del carruaje al de la polea de trasmisión que lleve su cubo (*).

(*) La Academia de Ingenieros militares posee un dinamómetro de esta naturaleza, cuyo coeficiente es 0,961. El máximo esfuerzo que se puede medir con él es de 400 kilogramos, ó sea la fuerza de tiro de cuatro caballos. Para las experiencias se necesita montarlo en un avantrén especial, que se halla descrito en los Anales del Conservatorio de Artes, (cuaderno de Octubre de 1860). El contador de vueltas tiene en su exterior dos agujas que permiten hacer cómodamente la lectura, existiendo además unos pequeños estiletes que, oprimidos contra la esfera por medio de un botón, marcan en ella una señal que permite dejar registrado el paso por los postes kilométricos del camino donde se opera, para hacer las lecturas con mayor comodidad.

b.—Dinamómetros de rotación.

673. Dinamómetro registrador.—El indicador de esfuerzos que sirve de base á este aparato, es un muelle ó lámina de acero flexible que se ve representado en la *figura* 203 con las letras PP'. Este muelle va fijo invariablemente por su punto medio al árbol de rotación DE y reunido también por sus extremos á una polea B por medio de unos cuchillos, que le sujetan fuertemente mediante la compresión de los tornillos m. La polea B es loca con respecto al árbol DE, y éste recibe el movimiento dependiente de la máquina cuyo trabajo se quiere medir, por medio de una polea fija C y una correa sin fin. La polea A que se ve al lado de C, es también loca y sirve para interrumpir el movimiento del dinamómetro, trasladando á ella la correa por medio de un pasa-correas. Se comprende por lo dicho, que cuando gira la polea C arrastrando en su movimiento al árbol DE, este arrastrará á su vez á la polea B por el intermedio del muelle, no sin que éste adquiera una flexión proporcional al esfuerzo desarrollado, cuya flexión experimentará también variaciones dependientes del valor de dicho esfuerzo.

El indicador cinemático que fórma la segunda parte de este dinamómetro, es un registrador de tira de papel montado sobre un bastidor KK', que gira con el árbol, y el movimiento del papel se obtiene por medio de un engranaje helicoidal, cuyas dos ruedas se ven representadas respectivamente en aa' y cc'. La primera de estas ruedas va montada en un manguito H, loco con respecto al árbol, y puede fijarse al soporte Q' por medio de un pasador tt' que tropieza con el tope g unido al manguito. La segunda rueda cc' va montada sobre el mismo eje bb' que el tambor d, para comunicar el movimiento á los rodillos del modo explicado al tratar de los indicadores cinemáticos. Con la disposición indicada, al girar el árbol DE, y con él el bastidor KK', la rueda cc' arrastraría al manguito H, si no estuviera montado el pasa-

dor tt'; pero una vez introducido éste, se fija el manguito por el apoyo del tope g sobre dicho pasador, y la rueda cc' adquiere una rotación dependiente de la velocidad de arrastre que le proporciona el bastidor, y por consiguiente de la que tiene el árbol DE. Resulta, por fin, que el movimiento del papel es dependiente del que tiene la máquina, y su velocidad ligada con la de ésta por una relación determinada.

Completaremos la descripción, indicando que el lapicero ó pincel X, que ha de marcar la curva, va unido á uno de los brazos de la polea B, existiendo otro estilete ó lapicero Z montado sobre la armadura, que marcará una línea recta correspondiente á la posición que ocupa el lápiz móvil cuando el esfuerzo es nulo. Esta línea podrá ser considerada como eje de abscisas, y las magnitudes contadas en su dirección representarán espacios recorridos por la máquina, siendo las ordenadas de la curva proporcionales á los esfuerzos desarrollados. La posición del lapicero fijo puede rectificarse por medio del pequeño tornillo q.

674. Para operar con este aparato, se le coloca como intermedio de la trasmisión entre el árbol motor y el que recibe las resistencias que la máquina debe vencer. La polea C recibe el movimiento por medio de correa sin fin, como hemos dicho, y lo trasmite la B por el mismo procedimiento. En el momento que se introduzca en su alojamiento el pasador tt', empezará el movimiento de la tira de papel, y el lapicero X marcará la curva que desea obtenerse, debiendo retirar el pasador cuando se deba dar fin á la experiencia, ó cuando esté para terminar el desarrollo del papel. Se hace funcionar el pasa-correas para detener el dinamómetro y retirar la tira, con la cual se procede ya de un modo análogo al indicado en el dinamómetro de tracción.

675. Dinamómetro contador.—Explicada ya la manera de adaptar los contadores á un dinamómetro de tracción, y el medio de conexión empleado, no necesitamos nueva figura para comprender el modo de funcionar un aparato de este género, basado en los mismos principios que aquel y necesi-

tando las mismas precauciones. Se podrá, por medio del dinamómetro contador, totalizar la cantidad de trabajo de un árbol de rotación en un tiempo determinado, si bien no puedan conocerse las variaciones á que el esfuerzo ha estado sometido durante la experiencia. (*)

676. Dinamómetro de rozamiento, ó freno dinamométrico de Prony.—Este aparato sirve para medir el trabajo resistente que desarrollan varias máquinas operadoras sobre un mismo árbol motor, y consta *(fig. 204)*, de dos piezas de madera ó *quijadas* BB, $B'B'$, que afectando la forma de cojinetes, se adaptan al árbol de rotación ó á una polea ligada invariablemente á él, oprimiendo á uno ú otro por medio de los pernos mn y $m'n'$ y las tuercas correspondientes. La quijada ó mordaza superior BB, se prolonga por medio de una palanca BE que forma cuerpo con ella, estando limitado el movimiento de esta palanca por medio de dos topes D y D'. Por último, un platillo de balanza suspendido en la extremidad E de la palanca, sirve para suspender los pesos-tipos que proporcionan el conocimiento del trabajo que se busca.

677. Para operar con el freno, se empieza por comprimir poco á poco las mordazas ó quijadas B y B', apretando las tuercas m y m', suprimiendo al mismo tiempo y poco á poco también, la comunicación entre el árbol o y las máquinas útiles cuyo trabajo debe medirse; arrastrado el freno por la polea, vendrá á chocar contra el tope superior si la rotación se verifica en sentido de la flecha, proporcionando nueva resistencia al movimiento del árbol, de bida al rozamiento desarrollado por las mordazas contra él ó contra la polea AA' en nuestra figura. Cuando haya quedado interrumpida la comu-

---

(*) Creemos innecesaria la explicación detallada de este dinamómetro, por el conocimiento que se tiene de sus elementos constituyentes y del modo de ligazón de ellos, que es análogo al empleado en el dinamómetro anterior. Igual observación haremos extensiva á la manivela dinamométrica, que omitimos para evitar tantas repeticiones, y á la que suele adaptarse un aparato registrador.

nicación con las máquinas útiles, y suprimido por lo tanto todas las resisistencias que deben medirse, se aprietan más las tuercas, hasta que vuelva el árbol á tomar la velocidad angular que tenía antes de colocar el freno, lo que puede hacerse por tanteos, y mediante una exacta medida del número de vueltas que dé el árbol en un tiempo dado.

678. En este estado, el rozamiento desarrollado por el aparato produce necesariamente un trabajo resistente igual al de las resistencias que se han suprimido, puesto que no variando la energía comunicada, y no variando tampoco la velocidad de la máquina, el trabajo resistente no habrá sufrido alteración alguna. Se trata, por lo tanto, de medir el trabajo desarrollado por el rozamiento del freno, y á este efecto, una vez en régimen el árbol *o*, se suspenden pesos en el platillo hasta que la palanca BE quede en equilibrio sin recibir presión alguna de los topes D y D'. En realidad, este estado de equilibrio es muy difícil que subsista en la práctica, por la variabilidad de la fuerza de rozamiento debida á la alteración de las superficies en contacto; pero si se colocan poco á poco los pesos en el platillo, se observará que para un cierto valor P' de dichos pesos, la palanca permanece en contacto con el tope superior; para otro valor P'' que se diferencie muy poco de P', está en contacto con el tope inferior; y, por último, que un valor P comprendido entre P' y P'', proporciona al freno ciertas oscilaciones, no estando en contacto constante con uno ni con otro tope. Este valor P es el que conviene aproximadamente para establecer el equilibrio perfecto, y servirá de base para los cálculos, que pueden ya verificarse del modo siguiente.

679. Llamemos F al rozamiento desarrollado en los contactos de las quijadas, ó sea á la fuerza tangencial á la superficie cilíndrica de la polea ó del árbol que se opone á la rotación de éste; sea p el peso total del freno, r el radio de la polea, L la distancia entre el peso P y el eje de rotación *o*, y, por último, l la distancia entre las verticales que pasan por el punto *o* y el centro de gravedad. Supuesto el freno en equi-

librio, la ecuación que exprese la existencia de éste será la de momentos con respecto al punto o, que toma la forma

$$Fr = PL + pl$$

pero el trabajo que se busca es equivalente al del rozamiento, y por lo tanto tiene por expresión

$$T = Fn.\ 2\pi r = 2\pi n(Fr) = 2\pi n(PL + pl)$$

en la que n representa el número de vueltas del árbol en la unidad de tiempo. Su valor en función de P y p se obtendrá, según esto, multiplicando por $2\pi n$ el segundo miembro de la ecuación establecida y afectará la forma

$$T = 2\pi n\ (PL + pl) \qquad (a)$$

680. En esta fórmula son conocidas todas las cantidades que entran, por la experiencia hecha en la forma que hemos indicado; solamente pudiera presentar alguna dificultad el valor del término pl, por ser algo complicada la investigación de la posición que corresponde al centro de gravedad, que puede hacerse según enseña la Mecánica racional. Pero será más cómodo recurrir al empleo de una experiencia complementaria, que consiste en separar el freno del árbol, y colocarlo como representa la *figura* 205, apoyado por la quijada superior sobre un cuchillo horizontal K. El extremo E se suspende de uno de los platillos mn de una balanza situada encima del freno, y en el otro platillo de ella se colocan pesos ω hasta que restablezcan el equilibrio. El valor ω representará, por lo tanto, el peso que actúa en el punto E de que está suspendido el aparato, y la ecuación de momentos correspondiente al equilibrio actual de éste, tendrá la forma

$$\omega L = pl$$

cuyo valor pl, sustituído en la fórmula (a), nos dá la definitiva

$$T = 2\pi L n\ (P + \omega) \qquad (b)$$

que puede considerarse como verdadera solución práctica del problema que nos ocupa, ya que todas las cantidades que entran en ella se determinan muy fácilmente por las experiencias que hemos explicado.

681. Como complemento indispensable de estas experiencias, indicaremos que es necesario durante la experiencia principal mantener constantemente humedecidas las superficies en contacto, para evitar la excesiva elevación de temperatura. Debe emplearse á este efecto el agua en que se haya disuelto una pequeña cantidad de jabón.

682. El freno de Prony sufre en ciertos casos algunas modificaciones que tienen por objeto hacer su uso más cómodo. La representada en la *figura* 206 es debida á Mr. Kretz, el que reemplaza las quijadas por un conjunto de piezas de madera articuladas sólidamente unas á otras por medio de una armadura metálica. La compresión se produce por una tuerca *a*, en la que penetran dos tornillos de pasos contrarios, unidos á las piezas extremas *b* y *c*. Otra de las modificaciones introducidas por este sabio ingeniero, consiste en hacer que la palanca horizontal *d* termine en un arco de círculo *ee*, cuyo centro es el eje de rotación *o* del aparato, y suspender el peso *P* por medio de una cuerda fija al extremo superior del arco; de este modo, el brazo de palanca de dicho peso tendrá un valor constante, á pesar de las oscilaciones del aparato, lo que no sucediendo en el freno ordinario, produce en él una causa de error. (*)

(*) Aún cuando existen otros muchos aparatos dinamométricos, creemos suficiente para las necesidades prácticas el conocimiento de los que hemos explicado, omitiendo por lo tanto hablar de otros muy ingeniosos como el de Bourdon, el de White, y, por último, del pandinamómetro de Hirn. Este último está fundado en el conocimiento del ángulo de torsión que corresponde al árbol de la máquina, el que no puede medirse sin salvar grandes dificultades que han impedido la generalización de tan ingenioso aparato.

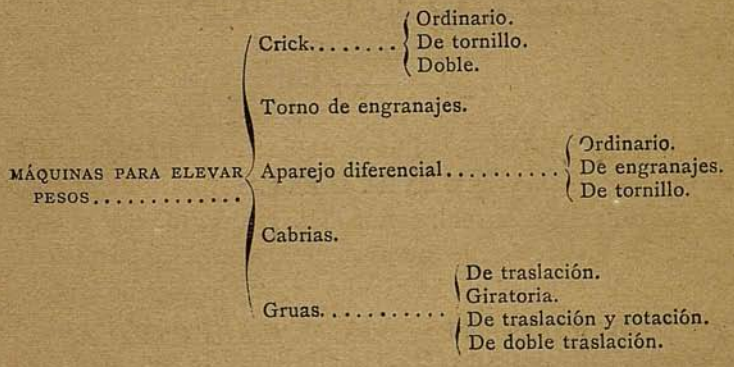
ESTUDIO IX

COMBINACIONES

DE LOS

DIVERSOS GRUPOS Y ESPECIES

CUADRO DEL ESTUDIO 9.º



CAPÍTULO ÚNICO

MÁQUINAS PARA ELEVAR PESOS

683. Generalidades.—Las combinaciones más elementales de los mecanismos que en los diversos estudios hemos calculado, se refieren á la realización del trabajo industrial cuyo objeto es la elevación de pesos á una altura determinada. Esta clase de trabajo, no exigiendo en modo alguno que los cuerpos cuya elevación desea obtenerse varíen de forma ni dimensiones, no necesita el conocimiento de las máquinas útiles ó herramientas destinadas á tal objeto; será aplicación exclusiva de nuestros entudios (*) y como tal la presentamos en el que vamos á emprender, procurando englobar del modo más conveniente los cálculos correspondientes á cada uno de los mecanismos que formen parte de la máquina que se explique.

En los estudios anteriores hemos presentado diversas combinaciones referentes á mecanismos comprendidos en un

(*) Esta es la razón que obliga á todos los autores de Mecánica á colocar tales máquinas en las aplicaciones de este curso y no en las del curso de Industria, en el cual se explican las que tienen por objeto variar la forma de los cuerpos, valiéndose de útiles ó herramientas de forma adecuada á la obra industrial que ha de verificarse.

mismo grupo cinemático, y en ellas ha quedado prescrita la marcha que debe seguirse para el cálculo de las que ahora han de ocuparnos. *La potencia de un mecanismo es resistencia en el que le precede.* He aquí en pocas palabras la base de todos los cálculos, tanto analíticos como gráficos, que en este estudio pueden practicarse, que será dato suficiente para evitar repeticiones que se refieran á los estudios anteriores. En este deseo, omitiremos en todos los casos la teoría analítica, ya que su establecimiento sólo necesita el de la serie de ecuaciones correspondientes á cada mecanismo, sin variación alguna, y de ellas será consecuencia directa la resolución de los dos problemas que se refieren al *cálculo de la máquina construída* ó al *estudio de la máquina en proyecto.*

684. En el primer problema, ó *cálculo de la máquina construída,* se deducirá el valor de la potencia necesaria para elevar un peso determinado, ó recíprocamente el peso que podrá elevarse empleando un esfuerzo dado, según que el problema que deba resolverse sea directo ó inverso.

685. El segundo problema, ó *estudio de la máquina en proyecto,* se referirá á la investigación de las relaciones que deben existir entre los diversos elementos de la máquina, dados que sean la potencia disponible para ella, y el peso máximo que se ha de elevar. Este problema presentará en general cierta indeterminación, y para salvarla será indispensable fijar el valor de alguno de los elementos constituyentes, sobre lo cual no pueden establecerse reglas determinadas, por depender de las condiciones particulares relativas al empleo de la máquina, espacio que ha de ocupar, etc. De todos modos, tampoco podrá completarse el estudio perfecto de este problema, cuyo complemento se encuentra en la Resistencia de materiales que marca de un modo definitivo las dimensiones de las diversas piezas de una construcción fija ó de un mecanismo, en vista de los esfuerzos á que una ú otro están sometidos.

686. Pero si en el estudio analítico es suficiente el que de cada mecanismo hemos presentado, no sucede lo mismo

en todos los casos del cálculo gráfico, cuyo objeto principal es englobar las diversas construcciones de tal modo, que puedan abarcarse de una sola ojeada cuantos extremos son relativos al estudio que se debe hacer. Presentando este cálculo, según varias veces hemos comprobado, las grandes ventajas de rapidez y precisión; presentando también la no menos apreciable de dejar grabados en la figura los valores de las relaciones de esfuerzos, velocidades y trabajos y los de las reacciones desarrolladas en los diversos puntos, en una palabra, de cuantos esfuerzos obran sobre la máquina, no dejaremos de recomendar su empleo en todos los casos, el que será sumamente sencillo, y se reducirá á la adición ó agregación de los polígonos de las fuerzas correspondientes á cada mecanismo. Practicaremos este cálculo en un tipo de cada una de las clases de máquinas que se van á explicar, limitándonos en los otros á una descripción ligera de sus elementos constituyentes, ya que son conocidos en detalle los diversos mecanismos que deban agruparse. Siguiendo esta marcha, consideramos que este estudio será suficiente para formarse idea del medio de combinación más sencillo de los cálculos correspondientes á los mecanismos de las diversas clases y especies, y constituirá, por decirlo así, la ligazón entre nuestros estudios y el de la resistencia de materiales, al presentar de relieve y en una sola figura los diversos esfuerzos y reacciones de cada una de las máquinas, que sirven de punto de partida para dicho estudio.

687. Máquinas que han de explicarse.—Concretaremos nuestras aplicaciones á las máquinas que más comunmente se destinan al indicado objeto de elevación de pesos, las cuales estudiaremos por el orden siguiente:

A.—Crick.
B.—Torno de engranajes.
C.—Aparejo diferencial.
D.—Cabrias.
E.—Grúas.

ARTÍCULO PRIMERO

Clase A.—Crick

688. Mecanismos agrupados en esta máquina.—Es el crick una combinación más ó menos sencilla del engranaje de cremallera y de guías de movimiento rectilíneo. Ocupando la cremallera una posición vertical, será susceptible de elevar pesos más ó menos considerables, según que se favorezca más ó menos la potencia que se aplica en la extremidad de una manivela. El medio más empleado para favorecer la potencia, es emplear un tren de engranajes para comunicar el movimiento á la barra. También se puede recurrir al empleo de cricks combinados.

Otra combinación empleada es la de tornillo sin fin y las guías de movimiento correspondientes, obteniéndose el mismo efecto de elevación de pesos, y favoreciendo la potencia en una cantidad correspondiente al brazo de la manivela que se emplee para producir el movimiento.

689. Según sea una ú otra la combinación que se efectúe, resultan los tipos siguientes, cuya explicación ha de ocuparnos.

a.—Crick ordinario.

b.—Crick del tornillo.

c.—Crick doble.

690. a.—**Crick ordinario.**—La *figura* 207, *lám.* 24, representa este aparato, compuesto de barra dentada $A\,B$, tren de engranajes $C\,D$ movido por una manivela aplicada al piñón D y guías de movimiento $m\,n$. La resistencia obra en una de las uñas B ó B' en que termina la barra.

El conjunto está encerrado en una caja de la forma indicada en la figura. Según los datos ya conocidos, la potencia quedará tanto más favorecida cuanto mayores sean los radios de la manivela y ruedas, y menores los de los piñones. Se

adapta también un fiador que obra sobre una rueda montada en el árbol de la manivela, para que ejerza acción de retenida y el peso no descienda cuando deja de actuar el esfuerzo.

Puede simplificarse este aparato reduciendo el número de ruedas dentadas á un solo piñón, en cuyo caso toma el nombre de *crick simple*, dándose el de *crick compuesto* al que hemos representado en la figura.

691. Para el *cálculo gráfico* nos referiremos al crick simple, ya que la diferencia con el cálculo del compuesto se reduce únicamente al de un tren de engranajes que ya hemos estudiado.

La *figura* 208 nos marca el modo de combinación más sencillo. Las rectas R_1 y R_2 representan las reacciones desarrolladas en las guías de movimiento al aplicar una resistencia Q en la uña inferior. La línea aX, que forma un ángulo de 75° con la línea de centros cc' del engranaje de cremallera, es la potencia del primer problema parcial que debe resolverse, relativo á las cuatro fuerzas Q, R_1, R_2 y X. Como para su equilibrio, ha de ser la resultante de dos de ellas igual y directamente opuesta á la de las otras dos, la recta $o_1 o_2$ que reune los puntos de intersección de estas fuerzas dos á dos, representa la dirección de tal resultante. El polígono 1—2—3—4 es la expresión del primer problema parcial, y la fuerza $3—4=X$ la ligazón entre este problema y el segundo. Suprimimos en el segundo problema parcial la reacción en los muñones del piñón, por no complicar la figura, cuya supresión la haremos extensiva á las otras máquinas que se han de calcular. Si P es la dirección de la potencia definitiva, oR será la reacción en el piñón, y el triángulo 3—4—5 resolverá definitivamente el problema. La fuerza $4—5=P$ será la potencia necesaria para elevar la resistencia dada Q.

692. b.—**Crick de tornillo.**—Es una aplicación sencilla del mecanismo del tornillo y tuerca en el caso de fijeza relativa de esta última, que puede tener movimiento de rotación, pero no de traslación. Lo representamos en la *figura* 209. El soporte del aparato está constituído por una columna de hie-

rro *a b* con su pié triangular, terminada en una cabeza *c* y reforzada con tres varillas de hierro *a d*. El tornillo va provisto de dos uñas, una en la parte superior y otra en la inferior, y esta última sale al exterior por una ranura practicada en toda la longitud de la columna central. En la cabeza *c* está practicado el alojamiento de la tuerca *d*, cuya guía de movimiento consiste, análogamente á lo que se dijo al tratar de este mecanismo, en una garganta circular, en la que ceban las puntas redondeadas de dos tornillos que permiten el giro de la tuerca impidiendo su movimiento de traslación. La potencia se ejerce en una manivela que puede embarrar en orificios practicados en la circunferencia exterior de la tuerca.

El cálculo que hemos presentado en la *figura* 101 no sufre variación alguna, á pesar de referirse al caso de inmovilidad en la tuerca, pudiendo en todo caso aumentar en el número de las resistencias la desarrollada en el alojamiento de la tuerca, análoga á la explicada para los árboles verticales en su rangua.

693. c.—**Crick doble.**—Consta de dos cricks de tornillo reunidos sobre una misma base *M N* (*fig.* 210), en cuyas cabezas superiores *A* y uñas inferiores *B* existen unos tornillos que tienen por objeto fijar á voluntad sobre unas ú otras, una viga tubular de hierro *C D*, qne se asegura por medio de las tuercas *t*. Esta viga tiene por objeto soportar el peso que ha de elevarse, á cuyo efecto se dispone de modo que la carga se verifique en el centro de ella. Las uñas inferiores de ambos tornillos salen al exterior, por unas ranuras practicadas en los soportes tronco-cónicos de uno y otro.

El movimiento ascensional de los tornillos es tal, que la viga tiene una traslación perfecta; y esto se consigue con el mecanismo representado en la *figura* 210 *bis*, que representa un corte del aparato por el plano horizontal *E F*. Consta este mecanismo de un doble tornillo horizontal *E F*, cuyas roscas contrarias engranan con los piñones-tuercas *r* y *s*. El árbol *E F* del doble tornillo recibe movimiento por medio de las manivelas *H*, y los piñones, como sucede en el crick anterior,

pueden girar pero sin tener movimiento de ascenso. Para evitar el rozamiento desarrollado durante esta rotación en los contactos de las caras inferiores de los piñones, análogo, como hemos dicho, al de un árbol vertical en su rangua, existen pequeños rodillos tronco-cónicos situados entre canales circulares del piñón y su apoyo, los cuales cambian en rozamiento de rodar, el de resbalar que en otro caso habría de verificarse.

Por último, se evita también el rozamiento desarrollado en la guía ó caja del tornillo cuando el cuerpo se eleva por la acción de las uñas inferiores, colocando un pequeño rodillo *X* en cada una de dichas uñas, de modo que la presión dependiente de la acción excéntrica de la carga se ejercerá sobre los expresados rodillos, trasformando el rozamiento de resbalar en rozamiento de segunda especie ó de rodar, como es conveniente para disminuir el efecto de las resistencias nocivas (*).

694. Es de notar, tanto en este crick como en el explicado anteriormente, que la inclinación de las hélices de los tornillos debe ser tal, que no sea posible su descenso expontáneo cuando deja de aplicarse la potencia; lo cual se consigue, según hemos visto en el párrafo 385 del estudio 4.°, haciendo que dicha inclinación sea menor que el ángulo de romiento que dan las tablas para los materiales de que están construídos tornillo y tuerca (**).

(*) La existencia de estos rodillos evita también la flexión que los tornillos pudieran tener, al obrar la carga en las uñas inferiores.

(**) La descripción que acabamos de hacer, se refiere al proyecto de dos aparatos de este género debidos al ilustrado Comandante Capitán del Cuerpo, D. José Milán, para sustituir á las antiguas escaletas, cuya aplicación al material moderno de artillería exige el empleo de grandes esfuerzos, y aun á veces que se refuerce la escaleta en los términos convenientes.

Los cricks de esta clase construídos por la fábrica de Trubia son dos, uno de 10 toneladas y otro de 30, el primero para el servicio de las baterías de sitio, y el segundo para las de plaza y costa. Las pruebas verificadas con ambos aparatos no han dejado duda alguna con respecto á su buena resistencia y excelente aptitud para los efectos que debían cumplir. El modo de verificar la ma-

ARTÍCULO II

Clase β.—Torno de engranajes.

695. Descripción.—Concurren á la composición de esta máquina tan generalizada, los mecanismos de torno y de engranajes, variando de muy diversos modos la forma y disposición de estos últimos, según que desee favorecerse más ó menos la potencia; pero tendiendo siempre á realizar la idea de que los engranajes empleados ocupen el menor espacio posible.

Representamos en la *figura* 211 la disposición más usada para el torno de engranajes, del que nos dispensamos otra explicación por considerar suficiente la que hemos presentado; bastando indicar que es lo más general colocar dos manubrios *a* y *b* en los extremos del eje donde ha de actuar la potencia, y un fiador *c* que ejerza acción de retenida cuando deje de actuar el esfuerzo.

696. Para su cálculo nos referiremos al explicado en el torno y en los engranajes ó trenes de ellos, evitándonos una nueva figura, por ser idéntica á la de este último caso. Resultará, según es sabido, tanto más favorecida la potencia, cuanto menores sean los radios del torno y piñones, y mayores los de las ruedas y manivelas.

697. Cuando el peso sea de mucha consideración, se sustituye el tambor del torno por una sencilla rueda dentada,

---

niobra es sumamente sencillo, y por último, el trasporte del aparato es muy cómodo por su pequeño volumen y peso, y porque en los casos necesarios se puede desarmar con suma facilidad, y reducir su volumen notablemente.

Pueden verse más detalles de estas interesantes máquinas de fuerza en el *Memorial de Artillería*, série 3.ª, tomo 14, pág. 116, en que el Capitán Milán da cuenta de sus importantes trabajos sobre este asunto, los cuales no han sido infructuosos, al haber sido declarados reglamentarios los aparatos de referencia.

cuyos dientes van engranando con los diversos eslabones de una cadena Galle, que es la empleada en este caso para suspender el peso, usando poleas de forma adecuada. El extremo libre de la cadena se arrolla á otra polea si la longitud es pequeña, ó bien, pasando por las poleas-guías que sean necesarias, queda suspendido ó encerrado en una caja adecuada á la forma del aparato.

Esta modificación es muy empleada hoy día en las máquinas de gran potencia, cuya descripción ha de ocuparnos en este estudio; siendo por otra parte indispensable adoptarla cuando se sustituye la cuerda del torno por una cadena; pues caso de arrollarse ésta en su totalidad sobre el tambor del torno, aumentaría notablemente el radio de este con el número de vueltas de la cadena, desfavoreciendo la potencia, cuyo efecto es completamente opuesto al que desea obtenerse. En la maniobra se emplea siempre un engranaje ó tren de engranajes dispuesto convenientemente, siendo su cálculo idéntico al de los tornos ordinarios.

ARTÍCULO III

Clase c.—Aparejo diferencial

699. Tipos pertenecientes á esta clase.—Las máquinas comprendidas en esta agrupación, resultan de combinar el mecanismo conocido con el nombre de *torno diferencial* con el de la polea en sus diversas clases, pudiendo agregarse también, para favorecer más la potencia, bien un sistema de engranajes ó de tornillo sin fin. Resultan los tres tipos principales de aparejos diferenciales, á los que pueden darse los nombres siguientes:

a.—Aparejo ordinario.
b.—Idem de engranajes.
c.—Idem de tornillo.

700. a.—Aparejo ordinario.—Consta *(fig. 212, lám. 25)*

del torno diferencial *a*, que afecta en este caso la forma de dos poleas de distinto diámetro, en cuyas gargantas se hacen entradas para los eslabones de una cadena sin fin que pasa á la polea móvil *b*, donde se suspende el peso *Q*. La potencia se ejerce en la polea fija ó rueda de maniobra *c* por medio de la cuerda sin fin *d d'*. Con esta disposición y las fuerzas encontradas de la cadena, queda el aparato en continuo y constante equilibrio, no siendo necesario más que la fuerza de un hombre para elevar los mayores pesos. Se usa este aparato suspendiendo el gancho *m* de un punto fijo, y colocando en el *n* los pesos que deben elevarse.

701. El *cálculo de esta máquina de fuerza* es combinación sencilla de los explicados para sus mecanismos constituyentes, y lo representamos en la *figura* 213. Suspendida la carga ó resistencia *Q* de la polea movible *b*, bastará hacer el estudio de esta para deducir, como se observa en dicha figura, los valores de las tensiones T_1 y T_2 representadas respectivamente por las magnitudes $T_1 = 1-2$ y $T_2 = 2-3$. Estas obran á su vez sobre el torno diferencial *a a*, en cuya circunferencia actúa la potencia auxiliar P_1 correspondiente á uno de los ramales de la misma cuerda. La reacción *R* en los muñones restablecerá el equilibrio con estas tres fuerzas, y siendo todas paralelas, el medio más cómodo de encontrar el valor desconocido de P_1 será recurrir al trazado del polígono funicular $\alpha\beta\gamma\delta$, para cuyo efecto hemos escogido como polo el punto *o*, con cuya elección resulta la figura sumamente sencilla. Marcamos sobre los mismos lados del polígono funicular las direcciones que les corresponden, lo cual nos evita toda explicación relativa á su trazado. El valor $3-4=P_1$ es la potencia auxiliar que debería ejercerse si no existiera la rueda de maniobra *c*. Con esta se favorece más la potencia, y hemos encontrado el valor *P* necesario para ella, por una cuarta proporcional, cuya construcción se halla marcada por el triángulo *m n r*.

702. b.—**Aparejo de engranajes.**—La rueda de maniobra *C* en este aparejo (*fig.* 214) es excéntrica con el torno di-

ferencial, y comunica á éste su movimiento por medio de un engranaje interior que se ve en la figura, y cuyo piñón está montado sobre el árbol de la rueda *C*. Como es natural, favorecerá más la potencia que el aparejo ordinario, y tanto más cuanto menor sea la relación de radios del piñón y rueda dentada. El uso de este mecanismo es idéntico al del anterior, pudiendo elevarse con él mayores pesos, como puede comprobarse haciendo el cálculo correspondiente.

703. c.—**Aparejo de tornillo.**—Solamente se diferencia del anterior en la sustitución del engranaje por un tornillo sin fin. La rueda de maniobra *c* (*fig.* 215) está, por lo tanto, dispuesta de modo que su eje tenga dirección perpendicular al eje de las poleas, y un tornillo sin fin montado en ella engrana con la rueda dentada *a* para producir la elevación de la resistencia que actúa en la polea movible. Este aparato sostiene también automáticamente la carga, como hemos dicho para los anteriores, y en él es condición característica la situación del tornillo engranando con la parte inferior de la rueda, con lo que se consigue tenerla siempre bien lubrificada, y poder dar mayores dimensiones á la polea ó rueda de maniobra *c* para favorecer más la potencia (*).

Tampoco ofrece dificultad su cálculo, conocido que es el del aparejo ordinario y el correspondiente al tornillo sin fin.

(*) Mientras escribíamos las cuartillas anteriores, hemos recibido á un mismo tiempo el núm. 248 de *La Semana industrial*, y el notable trabajo del Coronel teniente coronel del Cuerpo D. Julio Fuentes, titulado *Instrucciones para el servicio de las baterías armadas con cañones Krupp de* 30,5 *y* 26 *centímetros, de* 35 *calibres de longitud*, á la altura, como todos, de su envidiable reputación. En ambos se cita como una novedad el aparato que hemos descrito, recomendándolo el Sr. Fuentes para el servicio de dichas baterías. Un modelo de este género figuraba en la interesante colección de aparatos de elevación del último concurso agrícola de París, y según la *Revue Industrielle*, las pruebas verificadas confirman su resistencia y gran duración.

ARTÍCULO IV

Clase 5.ª—Cabria

704. Descripción.—En este aparato se combinan los mecanismos de torno, polea fija y polea movible, del modo siguiente: Las dos piernas *a a'* y *b b'* (*fig.* 216, *lam.* 26) están reunidas por tres teleras *m*, *n* y *p*, entre las que va situado el molinete ó torno *c c*, con el que forman cuerpo dos ruedas de embarre *c*, ejerciéndose el esfuerzo en los mangos de las palancas *d*, que pueden embarrar en los diversos orificios practicados en dichas ruedas. El conjunto va sostenido por un tercer pié *q q'* llamado *peón*, al que puede reunirse á voluntad, por medio de un pivote que penetra en un anillo ó morterete practicado en el herraje de la cabeza de la cabria.

La cuerda arrollada por uno de sus extremos al torno, pasa después por una polea fija ó polea de cabeza *o*, y suspende á la polea movible, asegurándose por su otro extremo al peón por medio de un gancho *r*. Se comprende fácilmente el modo de funcionar este aparato, que lleva también un fiador para ejercer acción de retenida en la rueda correspondiente montada sobre el eje del torno. De este modo podrán desembarrarse las palancas y dejar de ejercerse el esfuerzo, quedando suspendido de los ganchos de la polea movible el peso que se está elevando.

705. Puede usarse también la cabria haciendo abstracción del peón, y á este efecto lleva una argolla *z*, á la que pueden atarse dos cuerdas ó vientos que sujetan las piernas en una posición oblicua para que quede al aire la polea movible y pueda elevarse la carga, del punto y á la altura que sea conveniente.

706. La cabria suele también afectar otra forma más fácil de improvisar en momentos dados, y es la representada en la *figura* 217. Está compuesta de un pié derecho, al que va

unido formando cruz un travesaño horizontal ó pescante *a b*, reforzado con dos tornapuntas *c* y *d*. Un torno de engranaje y fiador *m* está colocado en la parte inferior del aparato, y el ramal libre de su cuerda pasa por tres poleas-guías situadas en los extremos de la cabeza y brazos de la cruz, para suspender el peso por medio de la polea movible *n*. La estabilidad de la cabria se obtiene por medio de las cuerdas ó vientos *r* y *s*, cuyos extremos se aseguran á puntos fijos inmediatos al aparato.

707. Cálculo gráfico.—Nos referiremos á la primera disposición explicada para la cabria, ya que la segunda sólo difiere en principio, en que se han aumentado dos poleas guías á la única que contiene aquella. Sea *c* el torno *(fig. 218)*, *o* la polea fija y *o'* la polea movible, cuyos mecanismos colocamos más próximos unos á otros de lo que corresponde á la escala en que están dibujados, para reducir las dimensiones de la figura, ya que la idea del cálculo en nada depende de la distancia que los separe.

El cálculo de la polea movible nos ha servido como punto de partida, por suponer dada la carga *Q* que debe elevarse. La construcción se ve marcada en la figura, si bien no era indispensable, ya que la referimos al polígono teórico (*). La tensión T_1, expresada por la magnitud 1—2, sirve como resistencia para la polea fija, en la cual debe trazarse la resultante, siendo preciso recurrir en todos los casos de esta máquina de fuerza á las construcciones auxiliares necesarias para el caso en que las fuerzas T_1 y T_3 no se encuentren en las límites del dibujo (**). Trazamos el triángulo 1—2—3 sobre la posición de 1—2 para obtener el valor T_3=2—3, que sirve como punto de partida en el cálculo del torno, represen-

(*) Como solamente tratamos de presentar la forma más apropiada del polígono de las fuerzas, nos referimos exclusivamente al polígono teórico, puesto que habiendo practicado tantas veces el cálculo del rozamiento de muñón, ninguna dificultad existirá al tomar en consideración esta resistencia nociva.

(**) Cuando se tomen en consideración los rozamientos, podrá servir la construcción auxiliar que hemos explicado para la *figura* 105.

tado por el triángulo 2 — 3 — 4. La fuerza 3 — 4 = P representa la potencia que se busca.

ARTÍCULO V

Clase 3.ª — Grúas

708. Carácter distintivo y división.—Si bien dedicadas estas máquinas, lo mismo que las anteriores, á la elevación de pesos, se diferencian de aquellas en que cumplen el doble objeto de elevarlos y trasportarlos después á distancias determinadas, dependientes de la construcción de las gruas. Se refiere su empleo al embarque y desembarque de objetos pesados, y en los grandes talleres industriales al trasporte de éstos, de una á otra de las máquinas útiles ó herramientas, para que puedan someterse á las distintas operaciones de su fabricación. (*)

(*) Son pequeñas relativamente las distancias á que pueden trasportarse los objetos con esta clase de aparatos. Mas cuando la necesidad exije trasportes á distancia, suelen emplearse como complemento de ellos, los carruajes ordinarios ú otros de forma adecuada al objeto ú objetos que deban conducirse. Pero es más cómodo todavía, y hoy día se va generalizando, el empleo de los ferrocarriles portátiles de vía muy estrecha (0,50 metros á 0,60), los que, pudiendo emplazarse sin prévia preparación del terreno y por el simple apoyo sobre éste, prestan notables servicios en los establecimientos industriales de cierta extensión, en el artillado de las plazas de guerra, en los trabajos de ataque de las mismas, y aún en campaña para el abastecimiento de los ejércitos y otras necesidades.

La vía de este ferrocarril, al que en el mundo industrial suele darse el nombre genérico de *El Decauville*, que es el del autor, se compone de tramos rectos y curvos. Los primeros tienen diversas longitudes (desde 1,25 á 5 metros), para poder acomodar la vía á todas las distancias, y los segundos afectan la forma de arcos de círculo con radios que varían de 4 á 30 metros. Los carriles están unidos entre sí por medio de unas traviesas de acero de forma especial, con objeto de que cada uno de los tramos pueda apoyarse en tierra á la vez sobre ellas y sobre las bases de los primeros. Como llevamos dicho, el terreno no necesita preparación prévia, bastando el simple apoyo de los tramos, y únicamen-

Dado tal objeto, y según las necesidades de su servicio especial, será indispensable dotarlas, además del movimiento elevatorio que les es peculiar, de un movimiento de traslación que trasporte el peso de uno ó otro punto de un taller, ó de uno de rotación que verifique igual efecto, pudiendo, en fin, tener también un movimiento combinado de la misma ó de distinta especie. Según esta idea, haremos una división de las grúas en los tipos diferentes que á continuación se expresan:

a.—Grúas de traslación.

b.—Idem giratorias.

c.—Idem de traslación y rotación.

d.—Idem de doble traslación.

709. a.—**Grúas de traslación.**—En principio están compuestas de un carruaje ó *cabriolé*, donde va montado un torno, pudiendo tener movimiento sobre unos rails convenientemente dispuestos. La amplitud de este movimiento ó *alcance de la grúa* depende del servicio que debe prestar; y puede ser relativo también á la totalidad de la armadura.

---

te en el caso que sea muy blando, será necesario hacer uso de tablones colocados de trecho en trecho.

Para el empalme de los diversos tramos entre sí, emplea el constructor una disposición especial que permite á las curvas servir igualmente para inclinar á la derecha ó á la izquierda, y á aquellos el que puedan acoplarse de igual manera por cualquiera de sus extremos, facilitando notablemente la colocación de la vía. Consiste dicho medio, al que Decauville llama *junta híbrida*, en proveer cada extremo de un tramo de una junta macho y otra hembra; es decir, que el carril de la derecha contiene una junta macho, formada por dos chapas laterales ú orejetas, que rebasan la junta del carril, y el de la izquierda presenta la junta hembra, constituida por una orejeta que, como aquella, rebasa al carril en unos tres centímetros. El otro extremo del tramo presenta juntas análogas, pero invertidas con respecto á las primeras.

Las operaciones de colocar ó de levantar la vía y trasportarla son muy sencillas y cómodas, bastando dos hombres colocados entre carriles y traviesas para cada tramo de 5 metros y uno solo para los más pequeños. Esta facilidad permite levantar la vía por retaguardia de un convoy de vagonetas en marcha, é irla tendiendo por vanguardia para prolongar más y más su trayecto.

Existen también, para los cambios de vía, tramos compuestos con dos di-

En la *figura* 219 representamos el tipo más elemental de las grúas de traslación, que suelen recibir en su totalidad el nombre de *cabriolés*. Su armadura está constituída por piés derechos y puentes horizontales, como se observa en la figura, en la que T representa el cabriolé propiamente dicho ó torno portátil que suspende el peso Q y lo trasporta en dirección longitudinal. El movimiento de traslación se obtiene á mano, ó por medio de otro torno fijo y dispuesto convenientemente.

710. Si es de necesidad *verificar la maniobra desde la parte inferior*, se la puede dar la disposición de la *figura* 220. La cuerda a', que pasa por la polea P', proporciona movimiento al cabriolé $A\,A'$ en sentido de la flecha, y la cuerda a, que fija en A pasa por la polea P, y otra montada en el mismo eje

---

recciones y placas giratorias de diversos tipos para poder unir varias vías diferentes, ó bien trozos de una misma vía.

El material de tracción consta de vagonetas de diversas clases, de dos y tres ejes, que pueden aparearse según las necesidades. Unas están dotadas con soportes giratorios para que pueda facilitarse el trasporte de los objetos pesados, sin que sean óvice los cambios de vía; hay vagones de báscula para el trasporte de tierras, minerales ú otros objetos divididos; vagones planos y trucks de mayor resistencia, provistos unos y otros de sus correspondientes frenos, cajas de engrase y otros accesorios.

Tal como á la ligera hemos descrito este material, cuya comodidad y baratura ha hecho que su adopción sea universal, ha sido adquirido por la Escuela Central de Tiro de Artillería, para su uso y el del regimiento de Sitio, que puede ejercitarse en su colocación y manejo. El cuerpo de ingenieros militares, lo emplea en Guipúzcoa y Pamplona, así como tambien algunas empresas particulares, entre las que podemos citar la Sociedad Española de dinamita.

En el extranjero está todavía más generalizado, ascendiendo á 40 el número de Decauvilles que ha adquirido en Francia el ministerio de la Guerra para las necesidades de las plazas fuertes, polígonos y escuelas de tiro, fábricas de pólvora, arsenales, etc.

Por fin, en las últimas campañas ha prestado importantes servicios este material, al que se agregan en tal caso pequeñas locomotoras y vagones para el trasporte de heridos, víveres, municiones, etc., pudiendo citar entre otras, las guerras de los rusos é ingleses en el Asia, los franceses en el Tonkin, los italianos en Massouah, y con respecto á los usos exclusivamente artilleros, el ramal construído por los prusianos alrededor de la plaza de Metz y otro durante el sitio de París entre Nanteuil y Laqui.

que P', le hace marchar en sentido contrario. El ascenso se obtiene por medio de una polea movible C, cuya cuerda, fija por un extremo en el punto F, pasa por la polea-guía B' y contorneando á la C, es guiada por las B y R para ejercer la acción sobre el extremo libre b. De este modo, no es obstáculo esta cuerda para la libre traslación del objeto pesado Q.

711. Otro tipo explicaremos de esta especie de grúas, en el cual *tiene movimiento la totalidad de la armadura*, pudiéndose también desarmar para ser trasportada de un punto á otro y armarla en el sitio conveniente como sucede á las cabrias ordinarias. (*)

Hállase constituída (*fig.* 221, *lám.* 27) por dos piernas tronco-piramidales en forma de castillete, formadas de varios cuerpos por medio de hierros de sección angular, reforzados con planchuelas simétricamente dispuestas á modo de cruces de San Andrés. En cada cuerpo superior existe un cajón AB, $A'B'$, que encierra el mecanismo del movimiento de ascenso, el que se produce según hemos de ver, por los mecanismos dispuestos en el cuerpo inferior, donde existe otro cajón con anágolo objeto.

Una viga CD ó puente horizontal de forma parabólica (sólido de igual resistencia), se suspende por medio de dos argollones situados en sus extremos á las cadenas Galle, fijas en cada pierna al cajón del mecanismo. La viga está constituída también por chapas angulares y simétricas con relación al eje que une los puntos de suspensión, y por dobles chapas verticales reforzadas por otras inclinadas. En el centro de la viga se suspende un balancín MN, que puede girar

(*) La grúa que vamos á describir es debida á los ilustrados Comandante Ordoñez y Capitán Milán, que han construído en la fábrica de Trubia tres modelos de ella, uno de 60, otro de 30 y otro de 8 toneladas. Según la Memoria publicada en el *Memorial de Artillería*, les sirvió como base única para dicho proyecto, una vista fotográfica de la empleada por la casa Krupp para el servicio de los cañones de medio y pequeño calibre. La descripción que hacemos está tomada de la expresada Memoria.

alrededor de dos ejes, para soportar en mejores condiciones el cuerpo que debe elevarse. (*)

712. El ascenso y descenso de la viga, y por consiguiente del objeto pesado, se obtiene aisladamente en cada pierna por medio de una manivela *a*, que trasmite su rotación con el auxilio de un par de piñones cónicos *b* de igual diámetro, á un tornillo vertical *c* y sistema de engranajes fijo al cajón superior de las piernas, al que directamente se sujeta el ramal de la cadena Galle que sustenta la viga, cuyo libre curso se facilita en cada pierna por medio de las correspondientes guías de movimiento rectilíneo fijas á ellas.

Los ramales libres de la cadena son guiados de este modo mientras recorren la elevación del castillete, y para evitar que la cadena, al elevar la viga totalmente, caiga al suelo, lo que constituiría un serio inconveniente para la traslación de la grúa, se hace descansar su extremo en el cajón inferior, fijo á la base de cada pierna y abierto por su parte superior.

713. El movimiento de traslación se obtiene á favor de las ruedas en que descansan las piernas, las que están montadas dos á dos en un mismo eje. Estas ruedas apoyan en carriles permanentes ó portátiles fijos al terreno, verificándose la maniobra de traslación de la grúa por medio de manivelas conjugadas *d*, sistema de engranajes *e* y tornillos sin fin *r*, que engranan con ruedas dentadas reunidas á las principales que soportan al aparato.

Completaremos la descripción de la grúa, cuya maniobra es fácil comprender dadas las indicaciones hechas, haciendo observar la facilidad del trasporte por caminos ordinarios, para lo cual basta desarmar el aparato y utilizar las ruedas *R* que aparecen en la figura (**).

(*) Se representa en la figura una pieza de artillería, ya que estas grúas son destinadas á la elevación de tales objetos.

(**) Para las maniobras de instalación y manejo de la grúa, consúltese la Memoria citada, inserta en el *Memorial de Artillería*, serie 3.ª tomo 13, entrega 3.ª

714. El cálculo de las grúas de traslación es bien sencillo, por referirse su disposición á combinaciones cuyo estudio ya se ha practicado, como trenes de engranajes, poleas fijas, movibles, tornos, etc., y por esta razón nos dispensamos de presentar nuevas figuras, que son perfectamente conocidas, tanto por las que se refieren á este estudio, como por las correspondientes á los estudios anteriores.

715. b.—**Grúas giratorias.**—Refiriéndonos en primer lugar á las grúas que pueden llamarse *de un solo apoyo*, y que representamos en la *figura* 222, *lám.* 28, indicaremos que el cuerpo principal ó armadura de la grúa, está constituído por un soporte vertical $A\,B\,C$, que penetra en un macizo de mampostería constituyendo la rangua del aparato, en cuya rotación alrededor del eje de dicho soporte se sustituye al rozamiento de resbalar por otro de rodar, á favor de los rodillos r, que tienen movimiento en una caja situada en la parte superior de la rangua.

Unida al árbol $A\,B$ está una pieza oblicua t, llamada tirante, en cuya extremidad libre se halla colocada la polea fija P, de que se ha de suspender el peso por medio de la movible P'. Se refuerza el conjunto por medio de otra barra ó *pescante* $B\,B$, que reune la extremidad libre del tirante con la inferior del soporte.

716. La maniobra de ascenso y descenso se verifica con el auxilio de un torno de engranajes R montado en la armadura, al que se arrolla la cuerda ó cadena que suspende el peso, no sin pasar antes por las poleas-guías que sea necesario, si el *vuelo ó alcance* $A\,P$ de la grúa fuese demasiado grande. Se suele dar á mano el movimiento de rotación alrededor del eje vertical $A\,C$, ya que están disminuídas las resistencias nocivas, según hemos dicho, por medio de los rodillos r.

717. Según puede observarse, el cálculo gráfico de los mecanismos, que en esta máquina son empleados exclusivamente en la elevación de la carga, es análogo al explicado para la cabria, y en igual forma podrá practicarse para las demás grúas, por cuya razón lo omitiremos en adelante. So-

lamente presentará variación, en este caso, el cálculo del esfuerzo necesario para producir la rotación de la totalidad del aparato, que procuraremos presentar en la forma más sencilla.

718. Como preliminar de este cálculo, será necesario encontrar los valores de las reacciones desarrolladas en el apoyo, y refiriéndonos á la misma figura, marcaremos en primer lugar la posición de la resultante de la carga ó resistencia Q y del peso G del aparato que obra en el centro de gravedad. Esta resultante $Q+G$ se encuentra muy fácilmente por cualquiera de los procedimientos de composición de fuerzas paralelas, y servirá como punto de partida para la investigación de las reacciones. Para encontrar los valores de estas últimas, basta trazar la recta Ro normal á la superficie de contacto con los rodillos, y el punto o de intersección con la fuerza $Q+G$ nos proporcionará un punto de la reacción total que se ejerce en la rangua. Unido dicho punto con el centro C de esta última, se obtendrá la recta Co para dirección de dicha reacción R_1, encontrándose el valor de esta y el de la R por medio del triángulo $o-1-2$, cuyos lados son respectivamente paralelos á $Q+G$, á R y á R_1.

La reacción total R_1, descompuesta horizontal y verticalmente, nos dará en los mismos lados $1-2$ y $o-1$ los valores de las fuerzas horizontal y vertical que obran sobre el apoyo C. Esta última fuerza vertical, aplicada en el punto C é igual precisamente á la carga total $o-1=Q+G$, es la que da lugar al rozamiento del árbol vertical en su rangua, el cual, según sabemos, equivale á la acción de un par llamado *par de rozamiento*, que obra sobre una circunferencia de radio igual á los dos tercios del radio de las superficies circulares en contacto, y cuyo valor se encuentra por las reglas prescritas para este caso en el estudio 4.º, párrafo 195. Pero siendo la componente horizontal de R_1 igual y de sentido opuesto á la reacción $R=1-2$ que se ejerce sobre los rodillos, se deduce que estas dos fuerzas constituyen un par que hace equilibrio al formado por la componente vertical de R_1 que actúa en el punto C, y la carga total $Q+G$.

719. Con estas ideas podemos ya referirnos á la *figura* 223, en la que hemos representado en mayor escala por *a a* la circunferencia de contacto con los rodillos, por *b b* la que corresponde al contacto con la rángua, por *c,c*..... los rodillos, y por último, por circunferencias de puntos, la de aplicación del par de rozamiento y la del círculo de rozamiento. Hemos trazado la tangente 1—2 al círculo de rozamiento, y tomado sobre ella con arreglo á escala el valor que tiene la fuerza del mismo nombre en la figura anterior. Se ha trazado también el par de rozamiento FF_1 valiéndose para encontrar el valor de sus fuerzas, del triángulo auxiliar 1—3—4 construído en la *figura* 122. La composición del par y la fuerza 1—2 proporciona una resultante 4—5, igual y paralela á 1—2, según la Mecánica racional enseña. Esta composición se ha hecho en nuestra figura, trazando la recta $2—3 = F$, uniendo los puntos 3 y 1, y trazando por el punto o_1 de intersección de F y 1—2 una paralela á 1—3, que proporciona por su intersección o_2 con F_1, el punto por donde debe trazarse la resultante 4—5 paralela á 1—2.

Resta tomar en consideración el rozamiento en los contactos de los rodillos, á cuyo efecto, y según las reglas correspondientes, bastará trazar por los centros c' y c'' de los dos rodillos que suponemos en contacto, las direcciones $R'c'$ y $R''c''$ de las presiones que sobre ellos se ejercen, desviando de los contactos y en sentido del movimiento, una cantidad igual al coeficiente de rozamiento de segunda especie.

720. Es sencilla ya la resolución del problema definitivo, en el que suponemos dada la dirección de la potencia P, que debe ejercerse para proporcionar una rotación á la grúa en sentido de la flecha. Las cuatro fuerzas P, R', R'' y 4—5, serán las que deben hacerse equilibrio, y los valores de las tres primeras podrán encontrarse por la construcción del polígono 4—5—7—6.

Para su trazado se han unido los puntos o_4 y o_5 de intersección de estas fuerzas dos á dos, construyéndose el triángulo 4—5—6 mediante el trazado de la 4—6 paralela á

P, y 5—6 paralela á $o_5—o_4$. La recta 4 — 6 = P resuelve definitivamente el problema, y el nuevo triángulo 5—6—7, obtenido por las paralelas 5—7 y 6—7 á las reacciones R' y R'' nos proporciona los valores de éstas.

721. Otro modelo de grúa de un solo apoyo, llamada *grúa tubular*, representamos en la *figura* 224.

Consiste en un arco de círculo compuesto de planchas ensambladas unas con otras, y reforzadas las juntas con planchas ordinarias en forma de T. Se halla asentada sobre una plataforma de hierro, mantenida con grandes pernos, en medio de la cual está el collar que sujeta el vástago de giro. Este penetra en su rangua, abierta en la mampostería, hasta llegar á una plancha ó zapata sobre la cual gira. La maniobra es análoga á la explicada para el modelo anterior, y el aparato elevatorio está compuesto de igual modo. Las ventajas de esta clase de grúas consisten en la gran seguridad y facilidad con que levantan voluminosos y pesados cuerpos hasta el mismo remate de la máquina, sin visible sensación en ninguna de sus partes; teniendo además la circunstancia de no sufrir alteración en la figura, á causa de su elasticidad, por grandes ó pesados que sean los cuerpos con que se la cargue. (*)

722. Está comprendida en esta categoría la *grúa de dos apoyos* (*fig.* 225), que solo se diferencia de las anteriores en que está sustituída la guía de movimiento de rotación, por dos, situadas una en la parte superior y otra en la inferior. Su empleo se referirá, como es natural, á los casos en que no pueda darse gran profundidad á la rangua, ó que sea fácil y más cómoda la colocación que indicamos para los apoyos.

723. La reunión de dos grúas de esta última clase constituye la llamada *grúa doble* (*fig.* 226, *lám.* 29), en la que una de ellas hace contrapeso á la otra, pudiéndose verificar un doble

(*) Este modelo fué presentado en la exposición general de Londres de 1853 por su autor M. Fairbairn, obteniendo en ella justo privilegio. Es muy empleado en los muelles, para la carga y descarga de barcos.

trabajo cuando se hagan funcionar á un mismo tiempo. El mecanismo de esta grúa, que también recibe el nombre de *grúa de doble alcance*, es análogo al explicado para las ordinarias, y el giro se verifica alrededor del pivote central por medio de dos collares ó manguitos *a* y *b*.

724. Explicaremos como último tipo de grúa giratoria la *grúa de contrapeso* sistema Krupp, empleada para elevar muy grandes pesos (80 toneladas), en el servicio de la artillería de costa. Nos referiremos á la *figura 227*, que representa esta grúa, en la descripción siguiente:

Sobre la plataforma circular *A* está la basa *B*, y ambas tienen una superficie anular, hueca, semitórica, en la que se alojan unas esferas de acero que constituyen el apoyo de la basa y permiten el movimiento de rotación sobre la plataforma alrededor del eje de figura.

Sólidamente unida á la plataforma *B* está la pieza *C*, que lleva los pernos de articulación de los puntales *P*, piés derechos *Q* y tornapuntas *Cn* de la grúa.

También va unido á la pieza *C* un marco *E'* que viene á terminar en el pie derecho *F*, al que se une otro marco *E*, sobre el cual está el torno. La figura indica los tirantes que sirven de unión y apoyo á las distintas partes de la máquina; debiendo advertir que, á excepción de los marcos *E*, *E'* y pie derecho *F*, los demás son dobles, aunque vistos en proyección vertical representan uno solo en la figura.

El movimiento de rotación de la grúa alrededor del eje de la basa *B* con la carga elevada, se consigue con las esferas de acero y las ruedas *R* y *R'* que apoyan sobre carriles de hierro.

725. El aparato elevatorio está constituído por el torno situado en *E''*, y dispuesto en la forma que hemos indicado para los tornos que, como éste, han de emplear en la elevación una cadena Galle. Esta cadena es sucesivamente conducida por los dientes de las ruedas *n*, *m'* y *x*, para soportar el motón *M*, terminando en el extremo en que se unen los dos puntales *P*. Dos cadenas del mismo sistema y mucho más

delgadas, no representadas en la figura, están articuladas en el extremo *m* de la más gruesa, rodean un tambor montado en *C* y vuelven á encontrarla en el punto *m'*.

La combinación de los engranajes del torno trasmite á la cadena el movimiento obtenido á mano por medio de dos manivelas, pudiendo conseguirse tres distintas velocidades al variar la disposición de las manivelas y engranajes, según convenga al peso de la carga que se eleva, á saber: un movimiento rápido para elevar únicamente el motón *M* ó pesos pequeños, y para el descenso de la carga; otro más lento para cargas que no pasen de 20 toneladas, y un tercero pausado para los pesos, hasta el límite de 80 toneladas. El torno está, además, provisto de su correspondiente freno de fricción, para contener el descenso de la carga si fuese necesario.

726. El movimiento de las manivelas en el sentido conveniente, produce el del extremo *m* de la cadena hácia *E*, y el engrane sucesivo de todos los eslabones con los dientes de la rueda torno, marchando el punto *m* hácia *n* y atrayendo las dos cadenas delgadas el extremo *m*, para mantener siempre la tensión de la cadena más gruesa, la cual va resbalando sobre ruedas colocadas en *E*, hasta que *m* llega á *C*, en cuyo momento ha llegado el motón *M* al límite de su curso ascendente.

Si las manivelas se mueven en sentido opuesto, el punto *m* marcha desde *C* hacia el torno, y las cadenas delgadas atraen á la gruesa en dirección de *n* á *m'* manteniéndola en tensión. El peso del motón *M* y de las ruedas que como contrapeso del motón van montadas en su eje, es suficiente para mantener en tensión la cadena en el espacio *m' x*. Cuando la cadena ha llegado á la posición que tiene en la figura, el motón *M* ha alcanzado el límite de su curso descendente.

727. Para contrarrestar la acción del peso que se ha de elevar, evitando el empleo de las ranguas profundas de que van provistas las grúas ordinarias de un solo apoyo, se colocan en una plataforma, dispuesta para ello sobre el extremo opuesto del marco *E*, detrás del torno, unos lingotes de fun-

dición que sirven de contrapeso. Para levantar sucesivamente cada uno de ellos y colocarlo en su posición *e*, hay unos rails *a* sobre los piés derechos *b*, que sirven para el movimiento de un pequeño cabriolé provisto de un aparejo diferencial, cuyo motón lleva unas mordazas para sujetar los contrapesos. Un solo hombre, manejando este aparato, puede imprimir al lingote el movimiento vertical y el horizontal, ya en la dirección de *a*, ó perpendicularmente, para colocarlo en la posición conveniente. El número de contrapesos debe ser tal, que la grúa esté equilibrada, para que la presión de las ruedas *R* y *R'* sobre sus carriles sea muy ligera, lo cual puede apreciarse observando la compresión de los muelles *D*. Puede calcularse que son necesarios tantos contrapesos como toneladas de peso suspende el motón *M*, siendo el alcance ó saliente de la grúa mitad de la distancia *CE''*. (*)

728. c.—**Grúas de traslación y rotación.**—La armadura de ellas tiene una forma análoga á las grúas rotativas, pero el puente ó tirante superior suele ser horizontal, y presenta la disposición conveniente para que una carretilla ó pequeño cabriolé pueda marchar en sentido de su longitud. Un modelo de ellas se ve en la *figura* 228, *lám.* 30.

En la extremidad del apoyo vertical *A A*, que representamos aislado en la *figura* 228 *bis*, se halla colocado el puente horizontal *B B*, reforzando la unión de ámbos por medio de un tornapunta *C C*. La rotación del conjunto se halla favorecida por medio de rodillos como en el primer modelo de grúas rotativas, y de igual modo que en aquél, puede verificarse á mano.

La traslación del pequeño cabriolé *D*, que marcha sobre rails colocados en el puente horizontal, se consigue por la acción de un tornillo ordinario *E*, cuya extremidad *E'* recibe

(*) Para los detalles relativos á las maniobras que pueden verificarse con este aparato, así como á las operaciones de armarlo y desarmarlo, véase la Memoria del Capitán del Cuerpo D. Teodoro Ugarte, inserta en el *Memorial de Artillería*, serie 3.ª, tomo XI, entrega 6.ª, de donde está tomada esta descripción.

el movimiento por medio de una cadena sin fin, que liga entre sí á la rueda E' con otra colocada en la parte inferior. Esta maniobra se verifica con el auxilio de un volante F, al que se da movimiento con el manubrio correspondiente. El movimiento comunicado al tornillo se traduce en una traslación del cabriolé D, por llevar éste una tuerca fija en su parte central.

El aparato elevatorio es un torno de engranajes y fiador, cuya proyección horizontal representamos aislada en la *figura* 229, suponiendo que se haya dado un corte á la grúa por la línea XY. Cada par de engranajes se halla situado á distinto lado de la armadura, y el fiador actúa sobre la rueda M dispuesta en el árbol parásito N. La cadena del torno sigue la dirección indicada en la *figura* 228, para suspender á la polea movible Q después de pasar por las poleas guías que se ven dibujadas en dicha figura. El extremo de la cadena se sujeta á un gancho R que lleva la polea movible, y, por último, se verifica la maniobra de elevación actuando en las manivelas P. (*)

729. Grúas de doble traslación.—Constan de un gran cabriolé que puede marchar en sentido determinado, y en él tiene movimiento de dirección perpendicular al anterior, otro cabriolé de menores dimensiones, montado sobre el primero.

En este último, ó pequeño cabriolé, está situado el torno ó aparato elevatorio.

En el tipo que representamos en la *figura* 230, *lám.* 31, los rails principales se hallan colocados á lo largo de los muros laterales de un taller, y de este modo la longitud del gran cabriolé AA, es igual al ancho de dicho taller y la amplitud de su movimiento corresponde á la longitud de este último. (**)

(*) El modelo que hemos descrito corresponde á una de las grúas que posee la fábrica de Trubia, si bien en ella han hecho alguna modificación para que pueda resistir mayores cargas, dado el mayor peso de las piezas que hoy se construyen en dicha fábrica.

(**) Se refiere nuestra explicación al aparato que posee la fundición de bronces que á cargo del Cuerpo de Artillería se halla establecida en Sevilla. Lo notable de esta grúa y la particularidad de englobar en ella una gran variedad de

Las ruedas *B B*, en número de cuatro, le proporcionan movimiento de traslación sobre sus correspondientes rails, y la armadura está reforzada por medio de tornapuntas *C C*. Por último, otros rails *D D* guían el movimiento del pequeño cabriolé, y el tablado *F F* facilita el trabajo sin riesgo del operario.

El movimiento en sentido longitudinal del taller se obtiene del modo siguiente. La polea *a* recibe la acción del motor general y la comunica por correa sin fin á la polea *a'*, montada en la extremidad del gran árbol *b b*, cuya longitud es igual á la amplitud total de la traslación. Con este árbol gira la polea *c*, que comunica su movimiento á la *c'*, también por correa sin fin, y ésta por el piñón cónico *d* á un embrague para que mande una de sus ruedas cónicas *d'* ó *d''* según el frente del taller á que debe dirigirse el cabriolé, pues montado este embrague sobre el eje trasversal *e e*, se trasmitirá la rotación á los piñones *o* y ruedas *o'* unidas á dos de las ruedas principales *B* que marcharán por este efecto sobre los rails, arrastrando en su movimiento al gran cabriolé.

730. Deben hacerse notar ciertas particularidades relativas á esta trasmisión, y una de ellas es la necesidad de que la polea *c* pueda trasladarse sobre el árbol *b b* á medida que avanza ó retrocede el cabriolé, lo cual se conseguirá mediante una ranura practicada en dicho árbol, en la que penetra el correspondiente tope, á favor del cual se ha de verificar la rotación de la polea. Otra particularidad digna de mencionarse es relativa á los apoyos que de trecho en trecho debe tener el árbol *b b* para evitar el pandeo dependiente de su gran longitud. Estos apoyos, dispuestos con fijeza absoluta, impedirían la traslación, limitándola al espacio comprendido entre uno y otro; mas están constituídos por dos brazos de forma idéntica dispuestos en escuadra, que pueden girar alrededor de su

---

mecanismos, hace que escojamos este ejemplo como el tipo más á propósito para nuestros estudios. Introducimos algunas variaciones en el dibujo y omitimos algunos detalles que no afectan en nada á la constitución principal del aparato, y que consideramos convenientes para la mejor inteligencia de nuestras explicaciones.

eje ó vértice, de tal modo, que cuando un tope ligado al cabriolé choque con uno de los brazos, hace desencajar á éste, y girando la escuadra alrededor de su vértice, se presenta el segundo brazo á reemplazar al primero en el papel de sostener el eje. Igual circunstancia tiene lugar en el paso por todos los soportes, que podemos llamar fijos, produciéndose tal efecto bien en la marcha ordinaria ó bien en la retrógrada.

731. El segundo cabriolé, cuya armadura tiene la forma especial $\alpha\alpha$, se halla provisto de cuatro ruedas 6, que marchan sobre los rails trasversales por efecto de una trasmisión que explicaremos en sentido inverso á la anterior, para su mejor inteligencia. La rueda dentada r unida á una de las ruedas 6, recibe el movimiento del piñón r', montado sobre el eje de las tres poleas n, de las que la central es loca. Otras tres poleas n' de la misma naturaleza, están ligadas con estas por medio de una correa directa y otra cruzada, dispuestas de tal modo, que cuando una comunica el movimiento la otra esté abrazando á las poleas locas; lo cual puede conseguirse con un solo pasacorreas que hace funcionar el único operario encargado de la maniobra. Las poleas n' están montadas en el mismo eje de la m, que puede llamarse polea principal ó motriz del pequeño cabriolé y que recibe el movimiento del árbol general por una disposición sumamente ingeniosa, que no impide los movimientos trasversales, como sucedería con una trasmisión ordinaria de correa ó de engranaje.

Esta disposición á que aludimos consiste en dos correas sin fin, dispuestas del modo siguiente: la primera correa, representada en la proyección vertical por líneas fuertes, establece ligazón entre las dos poleas extremas p y q del gran cabriolé, de las que p está montada sobre el gran árbol $b\,b$, y en el intervalo de ellas pasa un ramal por las poleas s y m y el inferior por las t y t'. De este modo, el movimiento de la correa se verifica en dirección de las flechas 1—2—3—4—5, y la polea m tiene la rotación negativa que indica la flecha dibujada en ella. La segunda correa, marcada con líneas de trazos y puntos, está establecida también entre las mismas po-

leas extremas, y sus ramales se cruzan, pasando uno de ellos por las poleas m y s' y el otro por unos pequeños rodillos montados sobre el mismo árbol que t y t', pero independientes de éstos. La dirección de su movimiento la representamos por las flechas marcadas con los números acentuados 1 al 5, observándose que la rotación comunicada á m se verifica en el mismo sentido que con la correa anterior. Se consigue con esto que las dos correas funcionen á un mismo tiempo y que la polea m quede perfectamente centrada y conducida en el movimiento de trasmisión que habrá de tener cuando el pequeño cabriolé marche en un sentido ú otro. Al lado de la polea p existe otra loca, y el consiguiente pasacorreas para el traslado de las que ahora nos han ocupado.

732. Réstanos explicar la trasmisión del aparato elevatorio, del que es también polea principal la m, cuyo movimiento acabamos de indicar. Sobre el eje de dicha polea m está montado un embrague cónico, compuesto de tres ruedas x_1 x_2 x_3, cuya conexión con otras dos z y z' se interrumpe ó establece á voluntad en la forma conveniente. En los ejes verticales de dichas ruedas z y z' hay montados dos tornillos sin fin que engranan con las grandes ruedas y é y' de que va provisto el torno w, del cual se suspende el peso por medio de una polea movible. Cuando el embrague está en la disposición marcada en la figura, mandan las dos ruedas x_1 y x_3 para producir el ascenso de la carga, y cuando se haga engranar la x_2 manda ésta á la y' solamente, para obtener el descenso. Una posición intermedia del embrague hará que el torno no tenga movimiento alguno. Por último, un freno de contacto, cuya maniobra se verifica por medio de la maniqueta δ, modera el ascenso ó descenso de la carga.

733. El modo de funcionar este aparato ha podido comprenderse perfectamente al ir describiendo los elementos de que consta. La maniobra puede verificarla un solo operario, el que elevará las cargas, trasportándolas de un punto á otro del taller, para depositarlas sobre la máquina operadora que debe verificar su trabajo.

TABLAS

Tabla número 1.

ROZAMIENTO DE PRIMERA ESPECIE

Valores del coeficiente de rozamiento, ángulo de rozamiento y coeficiente modificado, en los diversos casos.

CASO PRIMERO.—**Las superficies en contacto son planas.**

MATERIAS EN CONTACTO	DISPOSICIÓN DE LAS FIBRAS	ESTADO DE LOS CONTACTOS	VALORES DE f		VALORES DE φ		VALORES DE f_1
			De partida	Durante el movimiento	De partida	Durante el movim.º	
Roble sobre roble	Paralelas	Sin lubrificar	0,62	0,48	31°48′	25°39′	0,43
	Idem	Frotadas con jabón duro	0,44	0,16	23°45′	9°6′	0,15
	Perpendiculares ó cruzadas	Sin lubrificar	0,54	0,34	28°35′	19°0′	0,32
	Idem	Mojadas con agua	0,71	0,25	35°30′	14°10′	0,23
	Verticales las del cuerpo que se mueve y horizontales las del otro.	Sin lubrificar	0,43	0,19	23°20′	10°55′	0,18
Roble sobre olmo	Paralelas	Idem	0,38	»	20°49′	»	»
Olmo sobre roble	Idem	Idem	0,69	0,43	34°40′	23°20′	0,40
	Idem	Frotadas con jabón duro	0,41	»	22°20′	»	»
	Perpendiculares	Sin lubrificar	0,57	0,45	29°50′	24°20′	0,41
Fresno, abeto, haya y serbal sobre roble	Paralelas	Idem	0,53	0,36 á 0,40	28°0′	19°48′ á 21°50′	0,34 á 0,37
Hierro dulce sobre roble	Idem	Idem	0,62	0,62	31°48′	31°48′	0,53
		Mojadas con agua	0,65	0,26	33°2′	14°35′	0,24
		Frotadas con jabón duro	»	0,21	»	11°52′	0,20
Hierro colado sobre roble	Idem	Sin lubrificar	»	0,49	»	26°10′	0,44
		Mojadas con agua	0,65	0,22	33°2′	12°30′	0,21
		Frotadas con jabón duro	»	0,19	»	10°46′	0,18
Latón sobre roble	Idem	Sin lubrificar	0,62	0,62	31°48′	31°48′	0,53
Hierro dulce sobre olmo	Idem	Idem	»	0,25	»	14°10′	0,23
Idem colado sobre olmo	Idem	Idem	»	0,20	»	11°20′	0,19
Cuero negro adobado ó correa	Sobre una superficie plana de roble	Idem	0,74	0,27	36°30′	15°10′	0,24
	Sobre un tambor cilíndrico de roble	Perpendiculares	0,47	»	25°11′	»	»

Cuero curtido sobre hierro colado y sobre bronce	De plano ó de canto	Idem	»	0,56	»	29°15′	0,49
		Mojadas con agua	»	0,36	»	19°48′	0,34
		Untuosas y mojadas con agua	»	0,23	»	12°58′	0,22
		Lubrificadas con aceite	»	0,15	»	8°32′	0,14
Cuero curtido de buey sobre hierro colado	Idem	Mojadas con agua	0,62	»	31°48′	»	»
		Lubrificadas con aceite, sebo ó manteca	0,12	»	7°0′	»	»
Cuero adobado negro, ó correa, sobre una polea de hierro colado	El cuero de plano	Sin lubrificar	0,28	»	15°39′	»	»
		Mojadas con agua	0,38	»	20°49′	»	»
Cáñamo en hebra ó en cuerda sobre roble	Paralelas	Sin lubrificar	»	0,52	»	27°29′	0,46
	Perpendiculares	Mojadas con agua	»	0,33	»	18°16′	0,31
Hierro dulce sobre Hierro colado	Paralelas	Sin lubrificar	0,19	0,18	10°46′	10°13′	0,17
Hierro dulce sobre Bronce	Paralelas	Sin lubrificar	0,16	0,15	9°6′	8°32′	0,14
Hierro colado sobre hierro colado	»	Idem	»	0,31	»	17°20′	0,29
		Mojadas en agua	»	0,20	»	11°20′	0,19
Bronce sobre Bronce	Paralelas	Sin lubrificar	»	0,22	»	12°30′	0,21
Bronce sobre Hierro colado			»	0,16	»	9°6′	0,15
Bronce sobre Hierro dulce							
Roble, olmo, peral silvestre, hierro colado, hierro dulce, acero y bronce, resbalando uno cualquiera sobre otro ó sobre sí mismo	»	Lubrificadas de cuando en cuando con aceite, sebo, manteca de puerco ó con unto del que se emplea para engrasar los ejes de los carruajes	»	0,07 á 0,08	»	4°35′	0,07 á 0,08
Roble, olmo, hierro dulce, hierro colado y bronce, resbalando uno sobre otro ó sobre sí mismo	»	Ligeramente untuosas al tacto	»	0,15	»	8°32′	0,14
		Lubrificadas con sebo	0,10	»	6°0′	»	»
		Lubrificadas con aceite ó manteca de puerco	0,15	»	8°32′	»	»
		Sin lubrificar	0,74	0,64	36°30	32°37′	0,54
Caliza blanda sobre caliza blanda	»	Con una ligera capa de mortero compuesto de tres partes de arena fina y una de cal hidraúlica	0,74	»	36°30′	»	»
Caliza dura sobre Caliza blanda	»	Sin lubrificar	0,75	0,67	37°0′	33°50′	0,56
Caliza dura sobre Caliza dura			0,70	0,38	35°0′	20°49′	0,35
Roble sobre Caliza blanda	Las fibras de la madera perpendiculares á la cara de la piedra	Idem	0,63	0,38	32°20′	20°49′	0,35
Roble sobre Caliza dura			0,64	0,38	32°37′	20°49′	0,35
Hierro dulce sobre Caliza blanda	Paralelas	Idem	0,49	0,69	26°10′	34°40′	0,57
Hierro dulce sobre Caliza dura		Idem	0,42	0,24	22°50′	13°30′	0,23
		Mojadas con agua	»	0,30	»	16°42′	0,28

Caso Segundo.—Rozamiento de muñones

Materias en contacto	Estado de los contactos	Valores de f cuando el lubrificante es renovado		Valores de f_1 cuando el lubrificante es renovado	
		Periódicamente	Continuamente	Periódicamente	Continuamente
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de lo mismo	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
	Lubrificadas con las mismas materias y mojadas con agua	0,08	»	0,08	»
	Untuosas	0,14	»	0,13	»
	Untuosas y mojadas con agua	0,14	»	0,13	»
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de bronce	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo	0,07 á 0,08	»	0,07 a 0,08	»
	Untuosas	0,16	»	0,15	»
	Untuosas y mojadas con agua	0,16	»	0,15	»
	Muy poco untuosas	0,19	»	0,18	»
Muñones de hierro colado sobre cojinetes de guayaco	Sin lubrificar	0,18	»	0,17	»
	Lubrificadas con aceite de olivas ó manteca de puerco	»	0,09	»	0,09
	Untuosas	0,10 á 0,14	»	0'10 á 0'13	»
Muñones de hierro dulce sobre cojinetes de hierro colado	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
Muñones de hierro dulce sobre cojinetes de bronce	Lubrificadas con aceite de olivas, manteca de puerco ó sebo	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054	0,07 á 0,08	0,030 á 0,054
	Untuosas y mojadas con agua	0,19	»	0,18	»
	Muy poco untuosas	0,25	»	0,23	»
Muñones de hierro dulce sobre cojinetes de guayaco	Lubrificadas con aceite de oliva ó manteca de puerco	0,11	»	0,10	»
	Untuosas	0,19	»	0,18	»
Muñones de bronce sobre cojinetes de lo mismo	Lubrificadas con aceite de olivas	0,10	»	0,10	»
	Lubrificadas con manteca de puerco	0,09	»	0,09	»
Muñones de bronce sobre cojinetes de hierro colado	Lubrificadas con aceite de olivas ó sebo	»	0,030 á 0,052	»	0,030 á 0,052
Muñones de guayaco sobre cojinetes de hierro colado	Lubrificadas con manteca de puerco	0,12	»	0,11	»
	Untuosas	0,15	»	0,14	»
Muñones de guayaco sobre cojinetes de guayaco	Lubrificadas con manteca de puerco	»	0,07	»	0,07

Tabla número 2.

ROZAMIENTO DE SEGUNDA ESPECIE

Valores del coeficiente en los diversos casos

CLASE DE RODILLOS	TERRENO SOBRE QUE SE MARCHA	VALORES DEL COEFICIENTE PARA RADIOS DE 1^{m}
Rueda de carruaje	Camino recien enguijarrado y con arena...	0,0634
	Idem empedrado en el estado ordinario....	0,0414
	En perfecto estado.....	0,0150
	Empedrado bien cuidado, al paso.....	0,0185
	Idem — — trote.....	0,0238
	En tablas de encina, en bruto.....	0,0102
Ruedas fundidas	Carriles de madera rectilíneos y salientes..	0,0023
	Escorias viejas de hierro.....	0,0038
	Carriles planos de hierro, salientes y engrasados. Ordinariamente.	0,0012
	Carriles planos de hierro, salientes y engrasados. Continuo.....	0,0010
Rodillos	De olmo sobre empedrado unido.....	0,0094
	Idem sobre encina perfectamente igualada.	0,0016
	Idem sobre guayacán.....	0,0010
	Fundido sobre granito igual.....	0,0010
	De encina sobre empedrado seco.....	0,0009
	Idem sobre embaldosado.....	0,0007
	Idem con el ajuste de un mortero.....	0,0007

Tabla número 3.

Valores de la resistencia del aire en distintos casos

1.° Plano que se mueve en dirección de su velocidad:

$$A\ (0{,}036 + 0{,}084\ v^2)$$

A..... superficie del plano.
v..... velocidad.

2.° Plano inclinado con respecto á la dirección del movimiento:

$$A\ \frac{a}{90^0}\ (0{,}036 + 0{,}084\ v^2)$$

a..... inclinación del plano con respecto á la velocidad, comprendida entre los límites $a = 90^0$ y $a = 65^0$

3.° Resistencia del aire sobre un tren de caminos de hierro:

$$A.\ 0{,}0927\ v^2$$

A..... sección máxima del tren.

4.° Descenso de un paracaídas:

$$A.\ 1{,}936\ (0{,}036 + 0{,}084\ v^2)$$

A..... proyección horizontal del paracaídas.

5.° Paracaídas invertido:

$$A.\ 0{,}768\ (0{,}036 + 0{,}084\ v^2)$$

6.° Rueda de aleta:

$$A\ (0{,}0434 + 0{,}1002\ v^2)$$

A..... superficie de las aletas.
v..... velocidad en su centro de gravedad.

Tabla número 4.

Orden de bondad de los aceites empleados en la lubrificación de las máquinas.

1. **Aceite de esperma.**—Es el mejor para la maquinaria en general, y más especialmente cuando tenga ajustes exactos y se mueva con gran velocidad ó con ligera presión.

2. **Aceite de piés de carnero.**—Para maquinaria en general.

3. **Aceite de colza.**—Para máquinas grandes, exceptuándose los casos de grandes velocidades ó presiones ligeras.

4. **Aceite de pie de buey.**—Puede emplearse ventajosamente mezclado con sebo, para lubrificar los émbolos de los cilindros de vapor y otras partes de máquina que hayan de sufrir un calor regular.

5. **Aceite de olivas.**

6. **Aceite de palma.**—Se emplea una mezcla de éste y grasas animales para los ejes de los carruajes de ferrocarril, bajo el nombre de *grasa de palma para ferrocarriles.*

7. **Aceite de foca.**—También aceite de ballena.

Tabla núm. 5

Datos numéricos relativos á los engranajes que no están expuestos á choques violentos.

1. **Número de dientes.**

En el engranaje epicicloidal.. $N_1 \geqq 10\left(1+\frac{r_1}{r_2}\right)$

En íd. de evolventes. $N_1 \geqq 16+2\frac{r_1}{r_2}$

En íd. de linterna... $N_1 \geqq 7+4\frac{r_1}{r_2}$

Para la aplicación de estas fórmulas, debe tenerse en cuenta que N_1 representa el número de dientes del piñón, y r_1 el radio del mismo.

2. **Valores del lleno.**

Para dientes de fundición..... $l = 0'105\sqrt{P}$

Id. íd. de cobre ó bronce.... $l = 0'131\sqrt{P}$

Id. íd. de madera..... $l = 0'183\sqrt{P}$

P representa el esfuerzo en kilogramos que una rueda ejerce sobre la otra, y el valor de l viene expresado en centímetros.

3. **Espesor de los dientes en sentido paralelo al eje de rotación.**

Para velocidades menores de 1'50..... $4\,l$

Id. íd. mayores de 1'50..... $5\,l$

Id. engranajes expuestos á mojarse..... $6\,l$

4. **Valor del saliente.**

No debe exceder de 1'50 del asignado al lleno.

5. **Valor del paso.**

El más empleado es..... $2'10\,l$

en la hipótesis de que el juego sea igual á $\frac{1}{10}$.

Tabla número 6.

Dimensiones de los engranajes cilíndricos expuestos á choques violentos.

Fuerza en caballos.	Número de vueltas por minuto.	Radios.	Número de dientes.	Paso.	Ancho.	Naturaleza de los dientes
300	25 / 100	3724 / 939	230 / 58	102	356	F — F
270	60 / 12	498 / 2490	19 / 95	158	525	F — F
240	13,3 / 44	2790 / 843	208 / 68	79	406	F — F
192	1,33 / 15,14	10193 / 897	704 / 62	91	381	F — F
192	15,14 / 50	2691 / 815	208 / 63	81	381	F — F
140	30 / 55	1485 / 815	132 / 72	71	218	F — F
140	30 / 54,5	1690 / 905	138 / 76	77	330	F — F
120	1,51 / 13,3	7391 / 838	560 / 80	79	381	F — F
90	26 / 80	2170 / 705	228 / 74	60	150	M — F
82,5	54 / 83	1400 / 910	114 / 74	78	2120 / 300	M — F
50	4.0 / 7,32	1282 / 700	96 / 52	83	270	F — F
20	7,74 / 40	2170 / 420	248 / 48	55	160	F — F

OBSERVACIONES

1.ª Las dimensiones de los radios, paso y ancho vienen expresadas en milímetros.

2.ª El ancho á que se refiere la tabla, está contado en sentido paralelo al eje de rotación.

3.ª El trabajo indicado es el valor real en caballos, y no el nominal.

4.ª Los números separados por una línea horizontal, corresponden: el superior á la rueda conductora, y el inferior á la conducida.

5.ª Las marcas F — F representan que los dientes son ambos de fundición, y la M — F que son de madera los dientes de la rueda conductora, y de fundición los de la conducida.

Tabla número 7.

Dimensiones de los engranajes cónicos expuestos á choques violentos.

Fuerza en caballos.	Número de vueltas por minuto.	Radios.	Número de dientes.	Paso.	Ancho.	Naturaleza de los dientes.
300	93 / 50	620 / 1160	50 / 93	78	330	F — F
300	100 / 111,8	755 / 679	55 / 49	68	254	F — F
240	44 / 44	1067	75	89	457	F — F
200	41 / 80	1500 / 765	98 / 50	96	300	M — F
130	93 / 124	795 / 630	80 / 60	62	204	M — F
100	93 / 144,7	595 / 380	70 / 45	53	160	M — F
50	93 / 218	645 / 275	75 / 32	54	160	M — F

OBSERVACIONES

1.ª Las dimensiones de los radios, paso y ancho vienen expresadas en milímetros.

2.ª El ancho á que se refiere la tabla, está contado en sentido paralelo al eje de rotación.

3.ª El trabajo indicado es el valor real en caballos, y no el nominal.

4.ª Los números separados por una línea horizontal, corresponden: el superior á la rueda conductora y el inferior á la conducida.

5.ª Las marcas F—F representan que los dientes son ambos de fundición, y la M—F que son de madera los dientes de la rueda conductora y de fundición los de la conducida.

Tabla número 8.

Valores del coeficiente de adherencia que corresponde á las locomotoras.

En buen tiempo, con la carga máxima y carriles secos..	$\frac{1}{5}$
En invierno, ó en casos de lluvia menuda, y en todos tiempos en los túneles de gran longitud.	$\frac{1}{9}$
En los casos más desfavorables, en los caminos hulleros ó cuando los carriles están tapizados de hojas de árbol ú otra materia que tenga algo de lubrificante..	$\frac{1}{12}$
Valor medio, cuando no existen circunstancias desfavorables	$\frac{1}{7}$
Locomotoras carreteras, llamadas locomóviles de parque.....	0'36

Tabla número 9.

Valores de la expresión e^{fx} *para correas arrolladas sobre tambores en distintas condiciones.*

Relación del arco envuelto por la correa con la circunferencia completa.	Correas nuevas sobre tambores de madera.	VALORES DE LA EXPRESIÓN E^{fx}				
		Correas en el estado comun		Correas húmedas sobre poleas de fundición	Cuerdas sobre tambores ó tornos	
		Sobre tambores de madera.	Sobre poleas de fundición.		En bruto.	Pulimentadas.
0,20	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,30	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,40	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,50	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,60	6,59	5,88	2,87	4,19	6,58	3,47
0,70	9,00	7,90	3,43	5,32	9,01	4,27
0,80	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,90	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,00	23,14	19,16	5,81	10,89	23,90	7,95
1,50	»	»	»	»	111,31	22,42
2,00	»	»	»	»	535,47	63,23
2,50	»	»	»	»	2575,80	178,52

Tabla número 10.

DATOS REFERENTES Á LAS TRASMISIONES TELODINÁMICAS

Tabla que da, para los casos ordinarios de la práctica, el número de caballos que puede trasmitir un cable de 36 hilos, marchando con una velocidad de 25 m por segundo, y el diámetro mínimo que deben tener las poleas.

A =			20 m		30 m		40 m		50 m		60 m		80 m		100 m		120 m	
d	p	δ	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R	N_0	2R
m m	k	m m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m	ch	m
4	0,062	0,50	0,7	0,70	1,2	0,70	1,9	0,75	2,7	0,80	3,5	0,85	4,2	0,90	5,1	1,00	6,0	1,15
4,8	0,090	0,60	1,0	0,85	1,8	0,85	2,8	0,90	3,9	0,95	5,1	1,00	6,1	1,10	7,4	1,20	8,7	1,40
5,6	0,122	0,70	1,3	0,95	2,4	1,00	3,8	1,05	5,3	1,10	6,9	1,15	8,3	1,25	10,0	1,40	11,0	1,60
6,4	0,160	0,80	1,8	1,10	3,2	1,15	4,9	1,20	7,0	1,25	9,0	1,30	11,0	1,45	13,0	1,60	15,5	1,80
7,2	0,203	0,90	2,2	1,25	4,1	1,30	6,3	1,35	8,9	1,40	11,5	1,50	14,0	1,60	16,5	1,80	19,5	2,05
8,0	0,250	1,00	2,7	1,40	5,0	1,45	7,7	1,50	11,0	1,55	14,0	1,65	17,0	1,80	20,5	2,00	24,0	2,30
9,6	0,360	1,20	4,0	1,65	7,2	1,70	11,0	1,80	15,5	1,85	20,5	2,00	24,5	2,15	29,5	2,40	35,0	2,70
11,2	0,490	1,40	5,4	1,95	9,8	2,00	15,0	2,10	21,5	2,20	27,5	2,30	33,0	2,50	40,0	2,80	47,5	3,20
12,6	0,640	1,60	7,0	2,20	13,0	2,30	19,5	2,40	28,0	2,50	36,0	2,65	43,5	2,90	52,5	3,20	62,0	3,65
14,4	0,810	1,80	8,9	2,50	16,0	2,55	25,0	2,70	35,5	2,80	46,0	2,95	55,0	3,25	66,5	3,60	78,5	4,10
16,0	1,000	2,00	11,0	2,75	20,0	2,85	31,0	3,00	43,5	3,10	56,5	3,30	68,0	3,60	82,0	4,00	96,0	4,55
17,6	1,210	2,20	13,5	3,05	24,0	3,15	37,5	3,30	53,0	3,40	68,5	3,60	82,0	3,95	99,0	4,40	115,0	5,00
19,2	1,440	2,40	16,0	3,30	29,0	3,40	44,5	3,60	63,0	3,70	81,5	3,95	98,0	4,30	120.0	4,80	140,0	5,45
20,8	1,690	2,60	18,5	3,60	34,0	3,70	52,0	3,90	74,0	4,00	95,5	4,30	115,0	4,70	140,0	5,20	165,0	5,90
22,4	1,960	2,80	21,5	3,85	39,0	4,00	60,5	4,20	85,5	4,35	110,0	4,60	135,0	5,05	160,0	5,60	190,0	6,40
24,0	2,250	3,00	24,5	4,15	45,0	4,30	69,0	4,55	98,0	4,65	125,0	4,95	155,0	5,40	185,0	6,00	215,0	6,85
h o =			1 m 05		1 m 15		1 m 20		1 m 25		1 m 50		2 m 00		2 m 50		3 m 00	
φ =			1 m 50		1 m 60		1 m 80		2 m 00		2 m 50		3 m 35		4 m 15		5 m 00	
			0 m 75		0 m 90		1 m 05		1 m 15		1 m 25		1 m 35		1 m 40		1 m 50	

NOTACIONES CORRESPONDIENTES Á LA TABLA

N_0 —Trabajo trasmitido en caballos.
$2R$—Diámetro mínimo de las poleas.
d —Diámetro del cable.
p —Peso del cable por metro.
δ —Diámetro de los hilos que componen el cable.
A —Distancia entre las poleas ó alcance del cable.
h —Límites entre los cuales conviene mantener la flecha durante el reposo.
φ^0 —Diferencia aproximada de las flechas durante el movimiento.

OBSERVACIONES

1.ª En los casos de distancias superiores á 120^m se tomarán para N_0 los valores que corresponden á dicho número 120. La diferencia de las flechas φ permanecerá la misma, y la flecha de reposo deberá mantenerse entre $\frac{1}{40}$ y $\frac{1}{24}$ del alcance.

2.ª Cuando el esfuerzo trasmitido por el cable es muy irregular, conviene emplear cables más pesados que los que proporcionará la tabla, lo que equivale á calcular el cable para una fuerza más grande que la fuerza media trasmitida.

3.ª Por el contrario, para los esfuerzos sumamente regulares se emplearán cables más ligeros que los deducidos de las indicaciones de la tabla.

Tabla número II.

Dimensiones y peso de los volantes para máquinas de vapor.

MÁQUINAS DE BAJA PRESIÓN					PRESIONES MEDIAS CON EXPANSIÓN AL TERCIO Y CONDENSACIÓN					ALTAS PRESIONES CON EXPANSIÓN AL TERCIO Y CONDENSACIÓN				
Fuerza en caballos	Número de vueltas por 1'.....	Diámetro del volante.....	Velocidad media por 1''.....	Peso de la llanta	Fuerza en caballos	Número de vueltas por 1'.....	Diámetro del volante.....	Velocidad media por 1''.....	Peso de la llanta	Fuerza en caballos	Número de vueltas por 1'.....	Diámetro del volante.....	Velocidad media por 1''.....	Peso de la llanta
		Metros.	*Metros.*	*Kilog.*			*Metros.*	*Metros.*	*Kilóg.*			*Metros.*	*Metros.*	*Kilóg.*
1	68	1,00		180	1	57	1,32	3,93	260	1	66	1,03	3,50	323
2	47	1,54	3,76	450	2	54	1,57	4,32	456	4	50	1,74	4,55	1012
3	41	1,82	3,90	715	4	48	1,98	4,94	844	10	43	2,46	5,50	2010
4	38	2,10	4,14	912	8	43	2,60	5,85	1148	20	39	3,20	6,51	3160
6	32	2,57	4,28	1524	12	39	3,00	6,12	1848	32	36	3,82	7,20	4480
8	30	2,93	4,59	1880	16	38	3,30	6,54	2224	40	34	4,22	7,48	5480
10	28	3,21	4,70	2400	20	36	3,62	6,80	2780	50	33	4,66	8,02	6150
16	25	3,85	5,02	3776	24	35	3,85	7,03	3192	60	31	5,04	8,15	7620
20	24	4,20	5,25	4480	32	34	4,12	7,31	3528	70	30	5,38	8,43	8540
24	23	4,55	5,47	5184	40	33	4,54	7,82	4104	80	29	5,74	8,70	9520
32	22	5,16	5,94	6130	50	32	4,94	8,25	4770	90	27	6,08	8,59	11790
40	21	5,70	6,25	7240	60	30	5,40	8,46	5885	100	26	6,38	8,68	13300
50	20	6,30	6,58	8550	70	28	5,86	8,57	7280	120	25	6,92	9,05	15240
60	20	6,78	7,10	8820	100	24	7,22	9,07	11600	140	23	7,45	8,97	19740
70	19	7,23	7,18	10570	120	23	7,95	9,56	13080	160	22	7,96	9,15	22720
100	17	8,40	7,47	15800	150	21	8,72	9,57	17850	200	20	8,86	9,26	30400

Tabla número 12.

Resultados de las experiencias verificadas en Segovia el año 1886 con el dinamómetro registrador de tracción.

PRIMERA SERIE DE EXPERIENCIAS

Carga, armón y cureña sin pieza. Tiro, una pareja.

Pendiente por 100	Aire	Velocidad media	Esfuerzos en kilogramos				Trabajos en kilográmetros		Relación del tiro á la carga
			Arranque	Medio	Máximo	Mínimo	Total en 100 mt.	Medio en 1 mt.	
3,7	Paso	1,40	150,00	43,65	105,00	5,62	4365	61	0,05
5,8	»	1,50	178,47	49,03	121,73	21,27	4903	73	0,06
6,5	»	1,50	198,00	78,57	178,10	24,37	7857	117	0,09
7,4	»	1,76	217,47	96,81	193,60	29,04	9681	170	0,10

SEGUNDA SERIE DE EXPERIENCIAS

Carga, armón y cureña con pieza. Tiro, dos parejas.

Pendiente por 100	Aire	Velocidad media	Esfuerzos en kilogramos				Trabajos en kilográmetros		Relación del tiro á la carga
			Arranque	Medio	Máximo	Mínimo	Total en 100 mt.	Medio en 1 mt.	
0	Paso	1,50	208,23	38,40	81,32	19,12	3840	57	0,032
0,5	»	1,50	210,71	43,26	87,85	28,42	4326	64	0,036
1	»	1,45	212,31	51,61	92,43	30,54	5161	74	0,043
2	»	1,50	215,97	62,51	97,86	31,12	6251	93	0,053
3	»	1,50	219,83	68,13	112,71	41,87	6813	102	0,065
4	»	1,50	225,00	101,50	135,73	52,21	10150	152	0,085
5	»	1,45	229,42	117,62	143,62	59,43	11762	170	0,098
6	»	1,50	233,53	133,21	161,37	65,36	13321	199	0,111
6,7	»	1,50	236,96	149,67	176,60	71,99	14967	224	0,124
7	»	1,50	244,41	151,25	187,48	83,21	15125	226	0,126

Datos que proporciona la teoría en comparación con los de la experiencia.

Pendientes por 100	RELACIÓN DEL TIRO Á LA CARGA		Diferencias	Coeficientes de corrección
	Valor calculado	Valor experimental		
0	0,028	0,032	4	1,14
1	0,038	0,043	5	1,13
2	0,048	0,053	5	1,10
3	0,058	0,065	7	1,12
4	0,068	0,085	17	1,25
5	0,078	0,098	20	1,26
6	0,087	0,111	24	1,27
7	0,097	0,126	29	1,29

ÍNDICE

Pág.

PRÓLOGO V
INTRODUCCIÓN I
CONSIDERACIONES GENERALES 5

ESTUDIO PRIMERO

Teoría cinemática de los Mecanismos.

PRELIMINARES 11
CAPÍTULO PRIMERO.—Primer grupo: Mecanismos de contacto 15
Artículo 1.º—Primera especie: Dos movimientos rectilíneos 15
Artículo 2.º—Segunda especie: Dos movimientos circulares 18
A.—Ejes paralelos.—I, Movimiento de rodar.—II, Movimiento mixto 18
B.—Ejes que se cortan.—I, Movimiento de rodar.—II, Movimiento mixto 26
C.—Ejes que ni se cortan ni son paralelos 34
Artículo 3.º—Tercera especie: Un movimiento rectilíneo y otro circular 37
CAPÍTULO II.—Segundo grupo: Mecanismos de biela 41
Artículo 1.º—Primera especie: Dos movimientos rectilíneos 42
Artículo 2.º—Segunda especie: Dos movimientos circulares 43
A.—Ejes paralelos 43
B.—Ejes que se cortan 46
Artículo 3.º—Tercera especie: Un movimiento rectilíneo y otro circular 49
CAPÍTULO III.—Tercer grupo: Empleo de órganos flexibles 53
Artículo 1.º—Primera especie: Dos movimientos rectilíneos 55
Artículo 2.º—Segunda especie: Dos movimientos circulares 55
Artículo 3.º—Tercera especie: Un movimiento rectilíneo y otro circular 58

ESTUDIO 2.º

Teoría Dinámica de los Mecanismos.

PRELIMINARES 63
CAPÍTULO PRIMERO.—Efecto útil de los Mecanismos 67
Artículo 1.º—Ecuaciones y condiciones de máximo efecto 67
Artículo 2.º—Rendimiento y reglas para su investigación 75
CAPÍTULO II.—Resistencias pasivas 80
Artículo 1.º—Rozamiento de primera especie ó de resbalar 82
A.—Las superficies en contacto son planas.—Valores del rozamiento y reglas para los cálculos gráficos 83
B.—Superficies curvas.—Valores y reglas.—Rozamiento de cadenas 88
Artículo 2.º—Rozamiento de segunda especie ó de rodar.—Valores y reglas 93
Artículo 3.º—Rigidez de cuerdas, correas y cables metálicos.—Expresiones analíticas y métodos gráficos 97
Artículo 4.º—Choques y vibraciones 101
Artículo 5.º—Resistencia del medio en que se mueven las máquinas 103

ESTUDIO 3.º

Aplicación á los órganos generales de los Mecanismos.

PRELIMINARES 107
CAPÍTULO PRIMERO.—*Artículo único*: Descripción de los órganos siguientes: Soportes, arboles de rotación, tornillos y tuercas, pernos ó bolones, manivelas, palancas, balanzaderas, bielas, correas, cuerdas, cadenas, cables, poleas, ruedas de engranaje guías de movimientos y engrasadores 109
CAPÍTULO II.—Movimiento en los órganos guiados 125
Artículo 1.º—Movimiento rectilíneo 125
A.—Descendente en un plano inclinado; cálculos analítico y gráfico 126
B.—Ascendente en un plano inclinado; cálculos analítico y gráfico 131
C.—Guías ordinarias: cálculos analítico y gráfico 135
Artículo 2.º—Movimiento de rotación 139

A.—De un árbol horizontal.—Casos teórico y práctico.—Cálculos analítico y gráfico 139
B.—De un árbol vertical.—Cálculos analítico y gráfico..... 152

ESTUDIO 4.º

Aplicación á los Mecanismos derivados del primer grupo cinemático, ó mecanismos de contacto.

PRELIMINARES..... 161
CAPÍTULO PRIMERO.—Primera especie: Movimientos rectilíneos.—*Artículo único.*—Cuña..... 163
A.—Teoría analítica.—Velocidades, esfuerzos y rendimiento. 165
B.—Cálculo gráfico.—Polígonos teórico y real.—Apreciación. 170
C.—Resúmen del estudio.—Bases para los subsiguientes..... 172
CAPÍTULO II.—Segunda especie: Movimientos circulares..... 175
Artículo 1.º—Clase *A*: Ejes paralelos..... 175
a.—Cilindros de fricción.—Apreciación del Mecanismo..... 176
b.—Engranajes cilíndricos..... 177
Estudio geométrico.—α. Engranaje epicicloidal exterior.—β. De evolventes.—γ. Interior.—δ. De linterna..... 178
Apreciación analítica.—Velocidades, esfuerzos y trabajos.—Fórmulas en función del número de dientes..... 191
Cálculo gráfico.—Reglas que se deducen..... 196
Observaciones relativas á los engranajes.—Engranajes de precisión 201
c.—Trenes de engranajes.—Estudios analítico y gráfico..... 205
d.—Trenes epicicloidales exteriores é interiores..... 213
e.—Levas de martillos.—Trazados teórico y práctico..... 216
Artículo 2.º—Clase *B:* Ejes que se cortan..... 220
a.—Conos de fricción..... 221
b.—Engranajes cónicos.—Apreciación..... 222
Artículo 3.º—Clase *C:* Ejes que ni se cortan ni son paralelos..... 225
a.—Hiperbolóides de fricción..... 226
b.—Engranaje hiperboloide..... 226
c.—Tornillo sin fin.—Apreciación analítica y cálculo gráfico.. 228
d.—Combinaciones de engranajes..... 238
CAPÍTULO III.—Tercera especie: Movimientos combinados..... 239
Artículo 1.º—Clase *A:* Movimiento rectilíneo paralelo al plano de la rotación..... 239
a.—Rodillos.—Cálculo y aplicaciones..... 240
Trasporte por medio de rodillos.—Fórmulas y cálculo gráfico. 241
Carruajes.—α. De dos ruedas.—β. De cuatro ruedas.—γ. Locomotoras..... 243

b.—Cremalleras.—α. Derivada del engranaje epicicloidal.—β. Del de evolventes.—γ. Del de husillos 251
c.—Cremalleras dobles 254
d.—Levas.—Naturaleza y cálculo.—α. Depilones.—β. De movimiento uniforme.—γ. De movimiento variado.—δ. De movimiento alternativo intermitente.—ε. De marcha variable... 255
Artículo 2.º—Clase *B:* Movimiento rectilíneo perpendicular al plano de la rotación 262
a.—Tornillo ordinario.—Apreciación analítica y cálculo gráfico 263
b.— Idem doble. — Idem ídem ídem.... 270
c.— Idem diferencial.—Descripción y propiedades..... 271

ESTUDIO 5.º

Aplicación á los Mecanismos derivados del segundo grupo cinemático, ó mecanismos de biela.

PRELIMINARES..... 275
CAPÍTULO PRIMERO.—Primera especie: Movimientos rectilíneos.
Artículo único.—Biela que marcha sobre dos guías..... 277
CAPÍTULO II.—Segunda especie: Movimientos circulares..... 279
Artículo 1.º—Clase *A:* Ejes paralelos..... 279
a.—Biela y manivela con balanzadera.—Análisis y gráfico... 280
b.—Idem íd. con pedal..... 287
c.—Manivelas paralelas..—Cálculo gráfico..... 288
Artículo 2.º—Clase *B:* Ejes que se cortan.—Junta universal..... 289
CAPÍTULO III.—Tercera especie: Movimientos combinados..... 293
Artículo 1.º—*A:* Mecanismos de manivela y biela..... 293
a.—Manivela simple.—Cálculos.—Comparaciones... 294
b.—Idem. doble.— íd. íd..... 299
c.—Excéntrica circular simple.—Cálculo gráfico..... 302
d.—Idem íd. doble..... 305
Artículo 2.º—*B:* Balanzadera y paralelógramo..... 306
a.—Paralelógramo de Watt.—Cálculo gráfico..... 307
b.—Idem de Peaucellier..... 313

ESTUDIO 6.º

Aplicación á los mecanismos del tercer grupo cinemático, ó empleo de órganos flexibles.

PRELIMINARES..... 317
CAPÍTULO PRIMERO.—Primera especie: Movimientos rectilíneos 319
Artículo 1.º—Clase *A:* Mecanismos de polea simple..... 319

a.—Polea fija.—Cálculos analítico y gráfico 320
b.—Polea movible.—Cálculos y comparación con la fija 325
Artículo 2.º—Clase *B*: Mecanismos de poleas combinadas..... 328
a.—Sistema de poleas.—Estudios analítico y gráfico..... 329
b.—Motones ó palanquines.—Idem íd. íd..... 331
CAPÍTULO II.—Segunda especie: Movimientos circulares..... 337
Artículo 1.º—Clase *A:* Ejes paralelos..... 337
a.—Correas sin fin.—Cálculos y observaciones..... 338
b.—Cadenas sin fin..... 350
c.—Cables.—Trasmisiones simple y compuesta..... 350
Artículo 2.º—Clase *B:* Ejes no paralelos.—Trasmisión por correas. —Idem por cables..... 361
CAPÍTULO III.—Tercera especie: Movimientos combinados.—*Artículo único.*—Torno y sus derivados..... 365
a.—Torno ordinario..... 365
b.— Idem diferencial..... 367

ESTUDIO 7.º

Mecanismos para establecer, interrumpir y modificar los movimientos.

PRELIMINARES..... 373
CAPÍTULO PRIMERO.—Primera especie: Embragues..... 375
Artículo 1.º— Clase *A:* Embragues manuales.—*a.* Ordinario.— *b.* De fricción.—*c.* Instantáneo.—*d.* De los cilindros de fricción.— *e.* De los engranajes.—*f.* De correas..... 376
Artículo 2.º—Clase *B:* Embragues automáticos.—*a.* Por fricción, de seguridad al esfuerzo.—*b.* Por ídem, de seguridad al movimiento.—*c.* Por dientes y fiadores..... 382
CAPÍTULO II.—Segunda especie: Moderadores..... 389
Artículo 1.º—Clase *A:* Volantes de aletas..... 390
Artículo 2.º—Clase *B:* Frenos.—*a.* De carruajes ordinarios.— *b.* De caminos de hierro.—*c.* de cinta metálica.—*d.* De cuerdas. 392
CAPÍTULO III.—Tercera especie: Volantes.—*Artículo único.*—Sus condiciones.—Cálculos analítico y gráfico..... 399
CAPÍTULO IV.—Cuarta especie: Reguladores..... 411
Artículo 1.º—Clase *A:* Reguladores ordinarios de fuerza centrífuga.—Teoría y modificaciones..... 413
Artículo 2.º—Clase *B:* Reguladores isócronos de fuerza centrífuga.—*a.* Parabólico de Farcot.—*b.* Instantáneo.—*c.* Horizontal de Flaud..... 419

Artículo 3.º—Clase *C:* Reguladores de muelles.—Poucelet.—Molinié 424
CAPÍTULO V.—Quinta especie: Modificadores 429
Artículo 1.º—Clase *A:* Modificadores de la relación de velocidades.—*a.* Conos de poleas.—*b.* Tambores cónicos.—*c.* Engranajes y correas 430
Artículo 2.º—Clase *B:* Modificadores del sentido del movimiento.—Embragues dobles 432
Artículo 3.º—Clase *C:* Modificadores de magnitud y sentido.—*a.* Por engranajes y embragues dobles.—*b.* Por topes y muelles.—*c.* Por muelles y contrapesos 432

ESTUDIO 8.º

Indicadores mecánicos.

PRELIMINARES 441
CAPÍTULO PRIMERO.—Primera especie: Indicadores cinemáticos 443
Artículo 1.º—Clase *A:* Indicadores de velocidad 443
a.—Ordinarios 444
b.—Contadores de vueltas 445
Artículo 2.º—Clase *B:* Indicadores del movimiento 451
a.—Registrador de tira de papel 452
b.—De disco giratorio.—*c.* De diapasón 454
CAPÍTULO II.—Segunda especie: Indicadores dinámicos 457
Artículo 1.º—Clase *A:* Indicadores de esfuerzos 458
a.—Balanzas.—α. ordinaria 460
β. romana 465
γ. Báscula de Quintenz 466
b.—Dinamómetros.—α. De muelle ordinario 468
β. De resorte en espiral.—γ. De dos muelles 469
δ. Manivela dinamométrica 470
Artículo 2.º—Clase *B:* Indicadores de trabajos 471
a.—Dinamómetros de tracción.—Registrador 472
Contador 478
b.—Dinamómetros de rotación.—Registrador 484
Contador 485
Freno de Prony 486

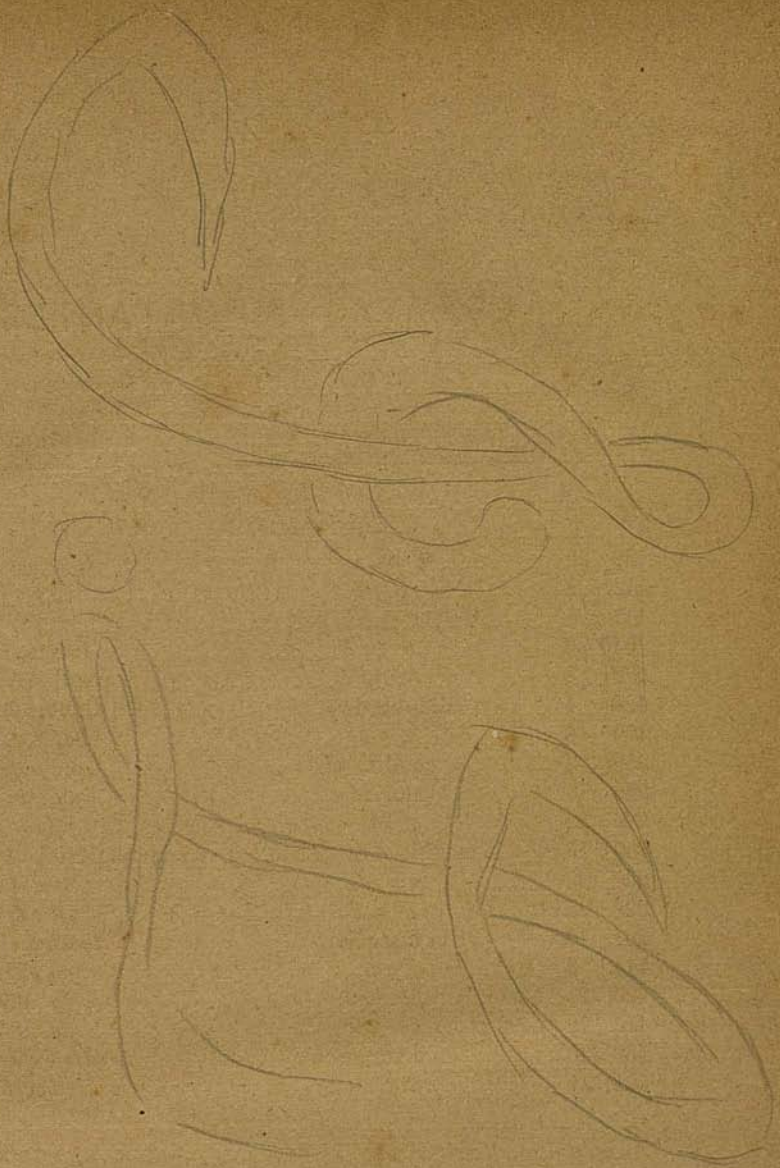
ESTUDIO 9.º

Combinaciones de los diversos grupos y especies.

CAPÍTULO ÚNICO.—Máquinas para elevar pesos..... 493
Artículo 1.º—Clase *A:* Crick.—*a.* Ordinario..... 496
b. De tornillo..... 497
c. Doble..... 498
Artículo 2.º—Clase *B:* Torno de engranajes..... 500
Artículo 3.º—Clase *C:* Aparejo diferencial.—*a.* Ordinario..... 501
b. De engranajes..... 502
c. De tornillo..... 503
Artículo 4.º—Clase *D:* Cabria..... 504
Cálculo gráfico..... 505
Artículo 5.º—Clase *E:* Gruas..... 506
a. De traslación..... 507
b. Giratoria..... 511
c. De traslación y rotación..... 517
d. De doble traslación..... 518

TABLAS.

Número 1.—Valores del coeficiente de rozamiento de 1.ª especie, ángulo de rozamiento y coeficiente modificado..... 524
Núm. 2.—Id. del coeficiente de rozamiento de 2.ª especie..... 527
Núm. 3.—Resistencia del aire en distintos casos..... 528
Núm. 4.—Orden de bondad de los aceites empleados en la lubricación de las máquinas..... 529
Núm. 5.—Datos numéricos relativos á los engranajes que no están expuestos á choques violentos..... 530
Núm. 6.—Dimensiones de los engranajes cilíndricos expuestos á choques violentos..... 531
Núm. 7.—Dimensiones de los engranajes cónicos expuestos á choques violentos..... 532
Núm. 8.—Valores del coeficiente de adherencia que corresponde á las locomótoras..... 533
Núm. 9.—Valores de la expresión e^{fx} para correas arrolladas sobre tambores, en distintas condiciones..... 534
Núm. 10.—Datos referentes á las trasmisiones telodinámicas.... 535
Núm. 11.—Dimensiones y peso de los volantes..... 537
Núm. 12.—Resultados de las experiencias verificadas en Segovia el año 1886 con el dinamómetro registrador de tracción..... 538



ERRATAS IMPORTANTES

Pág.	Línea	DICE	DEBE DECIR
35	17	$\frac{m}{m-x}$	$\frac{x}{m-x}$
138	20	Q sen α s	$Q fs.$ sen α
142	8	Q y r	Q y r'
147	5	r' y r''	r y r'
151	33	fuerza R	fuerza R_1
172	2	angulo C	angulo (N, Q)
185	4	dientes de o_2	dientes de o_1
193	6	o_1 y o_3	o_1 y o_2
258	32	condición	conducción
266	16	valor de α	valor de φ
266	22	(c)	(c')
269	19	r' á la magnitud $o4$ y r á la oa.	r á la magnitud $o4$ y r' á la oa.
320	33	$r = oa'$	$r = oa$
328	25	P y T	P y Q
361	13	la dirección	de dirección
414	3	gg	gg'
420	28	*fig.* 189	*fig.* 169
450	12	*fig.* 285	*fig.* 185
469	10	cara superior	cara exterior
521	10	trasmisión	traslación

PRECIO DE LA OBRA

ENCUADERNADA EN TELA

En España, 20 pesetas, franco de porte.
En Ultramar, 30 pesetas.
En el Extranjero, 25 pesetas.

OBRAS DEL MISMO AUTOR

Guía del Oficial de Artillería.—(3 *tomos en cuarto.*)

En España 20 pesetas, franco de porte
Ultramar y Extranjero, 30 pesetas.

Lecciones elementales de Perspectiva, 2,50 pesetas.

Se hallan de venta en las principales librerías, y en la Dirección general de Artillería, por D. Facundo Rodríguez.

Los pedidos al Autor, calle de Argensola, 19, 3.° izquierda.

No se hará rebaja alguna si el pedido no llega á diez ejemplares.