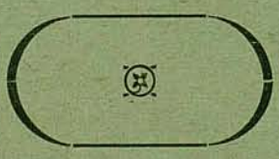
TEORÍA
DE LA
ELASTICIDAD

POR

TIMOSHENKO



Tomo I

260
6a
.A.S.
307/1

BIBLIOTECA DE SEVILLA
SECCION 6ª 260

INDICE DEL PRIMER TOMO.

Parte primera.

PRINCIPIOS Y FORMULAS FUNDAMENTALES.

		Folios.
1º	Elasticidad, continuidad, homogeneidad e isotropía.....	1.
2	Tensiones.....	2.
3	Notaciones correspondientes a las fuerzas y las tensiones	3.
4	Componente de la tensión.....	5.
5	Componentes de la deformación.....	6.
6	La ley de HooKe.....	8.

Parte segunda.

DE LA ELASTICIDAD, BIDIMENSIONAL, TENSIONES Y DEFORMACIONES.

7	Regimen elástico plano.....	13.
8	Deformación plana.....	13.
9	Tensiones en un punto.....	16.
10	Ecuaciones diferenciales de equilibrio.....	21.
11	Condiciones de contorno.....	22.
12	Ecuaciones de compatibilidad.....	23.
13	Función de tensión.....	25.

Capitulo II

PROBLEMAS EN COORDENADAS RECTANGULARES RECTILINEAS.

14	Soluciones polinómicas.....	28.
15	El principio de Saint-Venabt.....	32.
16	Determinación de los corrimientos.....	34.
17	Flexión de una viga volada con carga en su extremidad libre	34.
18	Flexion de una viga uniformemente cargada.....	39.
19	Otros casos de flexión de vigas bajo cargas continuas....	44.

Capitulo III

PROBLEMAS EN COORDENADAS POLARES.

21	Ecuciones generales.....	46.
22	Distribución axilsim'etricas de fatigas.....	49.
23	Flexión simple de barras de ejes curvilineos.....	52.
24	Las componentes de la deformación expresadas en coordenadas polares	56.

Folios.

25 Distribución simetrica de fatigas: corrimientos..... 57.

26 Discos giratorios..... 60.

27 Flexión de una mensula curva gargada en su extremo libre 63.

28 Influencia de orificios circulares sobre la repartición de esfuerzos en las placas..... 68.

29 Fuerza concentrada en punto de borde rectilíneo..... 73.

30 Caso general de carga normal al borde rectilíneo de una placa..... 79.

31 Cuna cargada en su vórtice..... 82.

32 fuerza concentrada sobre una viga..... 84.

33 Tensiones en un disco circular..... 87.

34 Placa de extensión limitada cargada en un punto..... 90.

Capítulo IV.

METODOS ELASTICOS ENERGÉTICOS.

39 Energía potencial elastica..... 94.

40 El principio de los trabajos virtuales..... 97.

42 El teorema de Castigliano..... 105.

42 El principio del mínimo trabajo..... 110.

43 Aplicaciones del principio del mínimo trabajo. Placas rectangulares..... 111.

- - - - - - -

ESCUELA DE INGENIEROS DE SEVILLA BIBLIOTECA SECCIÓN ... Nº

- TEORIA DE LA ELASTICIDAD -

PRINCIPIOS Y FORMULAS FUNDAMENTALES

1. Elasticidad, continuidad, homogeneidad e isotropía.- La elasticidad de los materiales se manifiesta en las estructuras ingenieriles por la desaparición de las deformaciones producidas por fuerzas exteriores de intensidad inferior a cierto límite, cuando éstas dejan de actuar. Los materiales de construcción poseen esa propiedad en diverso grado, el cual nunca es absoluto; pero en este libro supondremos que bajo las condiciones antedichas, la recuperación de las formas de los cuerpos sujetos a la acción de fuerzas exteriores es completa, esto, es, que en todos los desarrollos los tratamos como si fuesen perfectamente elásticos.

En nuestro estudio haremos caso omiso de la estructura molecular de la materia y admitiremos su continuidad, homogeneidad e isotropia en todo el ámbito del cuerpo elástico, lo cual significa que la mínima porción separada de él posee, sin distinción de lugar ni orientación, las mismas propiedades fisicas y mecanicas que caracterizan a su conjunto.

La experiencia demuestra que aun cuando, por lo común, los materiales no satisfacen las antedichas hipótesis, las conclusiones de la teoria de la elasticidad - que las acepta como básicas y simplificadoras -, correctamente aplicadas al cálculo de estructuras, dan resultados muy exactos. Así, cuando las dimensiones de un cuerpo sean grandes en relación con las de sus elementos estructurales, la hipótesis de la homogeneidad puede ser admitida con gran exactitud, y si ellos estan dispuestos al azar, puede aquel considerarse isótropo; eso ocurre, por ejemplo, con el acero, material de importancia constructiva primordial, cuya contextura cristalina -revelada por el microscopio- está formada de elementos heterogéneos, dotados de propiedades mecanicas vectoriales: la extrema pequeñez de sus cristales -del orden de la millenésima de centimetro cúbico- y la desordenada orientación en que se encuentran, explican que las propiedades

mecanicas de una pieza de dimensiones ordinarias tengan la significación de valores medios de las correspondientes a los cristales singulares.

Cuando por el contrario, a consecuencia de procesos tecnologicos, predomina una cierta orientación de los cristales de un metal -v.gr. el cobre laminado en frio- sus porpiedades elásticas -difieren de una a otra dirección; lo cual caracteriza a la anisotropía.

2. Tensiones.- Supongamos que el cuerpo representado en la figura 1 se encuentra en equilibrio. Bajo la acción de las fuerzas exteriores, $P_1, \ldots, P_7$, aplicadas al mismo, se desarrollan esfuer-

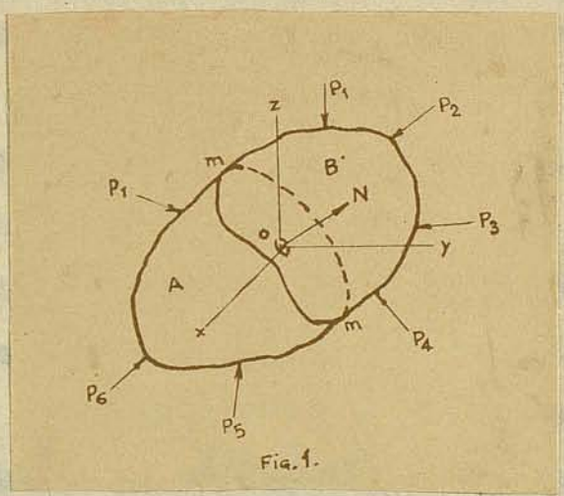


Fig. 1.

zos interiores entre las distint-as partes de ese cuerpo. Para - determinar la magnitud de tales esfuerzos en un punto cualquiera, O, del cuerpo considerado, imaginémoslo dividido en dos partes, A y B, por medio de una sección plana, mm, que contenga a dicho punto. Si consideramos una de esas regiones, por ejemplo, la A, se puede establecer que se encuentra en equilibrio bajo la acción de las - fuerzas exteriores $P_5, \ldots, P_7$ y las fuerzas interiores repartidas en la sección trasversal mm, que representan las acciones - del material de la parte B sobre el material de la parte A. Se supondrá que esas fuerzas estan distribuidas en una forma continua - en la sección mm, a la manera que lo está una presión hidróstática o la presión del viento en la superficie sobre la cual obra. La - magnitud de tales esfuerzos se define generalmente por su intensidad, o sea, el cociente de la fuerza por el área del elemento superficial en que ella actua. Cuando se trate de esfuerzos interio-

res llamaremos a esta intensidad, tensión.

Si se trata de una barra prismática sometida a una tracción - bajo la acción de fuerzas uniformemente repartidas que se aplican en sus extremidades -que es el caso mas simple- las fuerzas - interiores tambien estaran distribuidas de manera uniforme en - cualquiera de sus secciones transversales, como por ejemplo la - mn (Figura 2). por lo tanto la correspondiente tensión puede obtenerse en ese caso dividiendo la intensidad de la fuerza P de tracción por el área A de la sección recta.

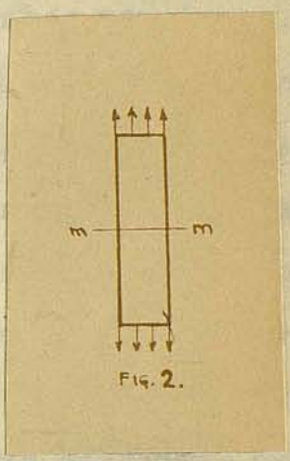


Fig. 2.

En el caso de la figura 1 los esfuerzos no se - distribuyen uniformemente en la sección m m, como ocurre en el ejemplo anterior, y para obtener el valor de la tensión que corresponde a un elemento superficial, de área δA, que circunda al punto O de dicha sección, admitiremos que las - fuerzas que actuan a traves de ese elemento como consecuencia de la acción del material de la parte B sobre el - material de la parte A, se reducen a una resultante δP y supondremos luego que el área elemental δA disminuye en forma continua, de manera que la magnitud de la tensión que corresponde al punto O de la sección mn, es el valor límite de la relación $\delta P / \delta A$. Por lo que hace a la dirección de la tensión, será la que tenga - en el límite la resultante δP. En general, la dirección de la tensión que actua sobre un elemento superficial δA, forma un angulo con el plano del mismo y usualmente la descompondremos en dos componentes: una, perpendicular al elemento, que será la tensión normal y la otra, en el plano del elemento δA, a la que se denomina tensión tangencial.

3. Notaciones correspondientes a las fuerzas y las tensiones.- -Dos generos de fuerzas exteriores pueden actuar sobre los cuerpos: las fuerzas superficiales y las fuerzas másicas. Las primeras se distribuyen sobre la superficie del cuerpo a la manera de la presión mutua entre dos cuerpos o la presión hidrostática. Las fuerzas másicas se reparten, en cambio, en el volumen del cuerpo, como ocu-

rre con las fuerzas gravitorias y magneticas o con las fuerzas de inercia en el caso de un cuerpo en movimiento. Por lo general, descompondremos las fuerzas superficiales especificas, esto es, por unidad de área, en tres componentes paralelas a los ejes coordenados y emplearemos para ella las notaciones X, Y, Z. Las componentes de las fuerzas másicas por unidad de volumen o fuerzas ponderàles especificas, en las mismas direcciones, seran designadas por X,Y,Z.

Para designar la tensión normal emplearemos la letra σ y para - la tensión tangencial, la letra τ; por medio de subindices denotaremos la dirección del plano sobre el cual actuan estas tensiones. Si consideramos un cubo elemental en el punto O, figura 1, con sus aristas paralelas a los ejes de una terna ortogonal, las notaciones correspondientes a las tensiones que actuan sobre las caras del cubo son las que se indica en la figura 3, en la que se señala asimismo los sentidos positivos asignados a aquéllas. Así, por ejemplo, para las caras perpendiculares al eje y, las componentes normales de la - tensión que en ellas actúa, se designan por σ_y, cuyo subíndice denota, como se ha dicho, que la cara correspondiente es perpendicular - al eje y, La tensión normal se considera positiva cuando produce una extensión, es decir, cuando se trata de tracción, y negativa cuando provoca un acortamiento, es decir, cuando se trata de compresión.

El esfuerzo tangencial se descompone en dos componentes paralelas a los ejes coordenados, cuyos simbolos llevan dos subíndices: el - primero, que señala la dirección de la normal al plano considerado y el segundo, la propia durección de la componente. Por ejemplo, considerando nuevamente las caras perpendiculares al eje y, la componente de dirección x será τ_{yx} y la de dirección z, τ_{yz}. Se atribuye - a las componentes de la tensión tangencial, que actua en una de las caras del elemento, - el sentido de los semiejes positivos cuando una solicitación de tracción que actúe sobre la misma cara tenga sentido positivo. Si la tensión de tracción es de sentido opuesto al del semieje positivo debera asignarse sentido negativo a las compo-

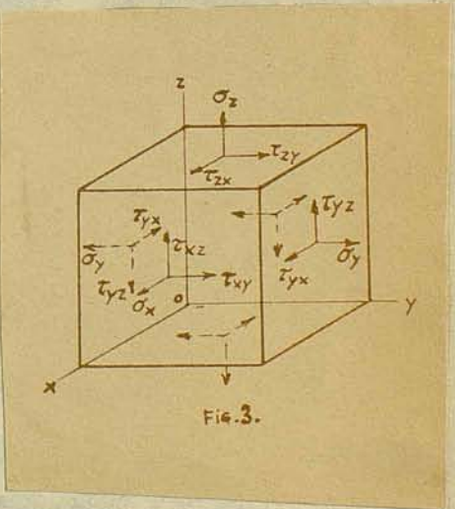


Fig.3.

nentes del esfuerzo tangencial. De acuerdo con esta regla, los sentidos positivos de todas las componentes de la tensión que actuan sobre la cara de la derecha del elemento cúbico representado en la figura 3 coinciden con los sentidos de los semiejes positivos. Por el contrario, en la cara izquierda del elemento los sentidos positivos están invertidos.

4.- Componentes de la tensión.- Con arreglo a lo que se ha establecido en el parrafo anterior, resultará que para cada uno de lostres pares de caras paralelas de un elemento cúbico tal como el de la figura 3 se necesita un símbolo que represente a la componente normal de la tensión y otros dos para denotar las dos componentes del esfuerzo tangencial. Se requiere, por lo tanto, el empleo de tres símbolos para las tensiones normales que actuan sobre las caras de un cubo elemental, a saber, σ_x , σ_y , σ_z , y seis símbolos para los esfuerzos tangenciales.

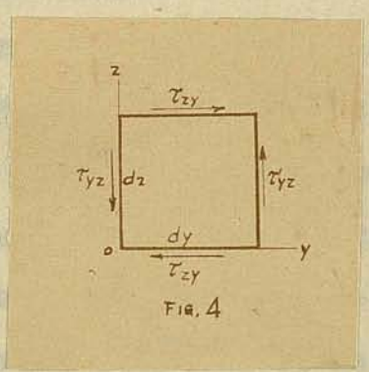


Fig. 4

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$

De la consideración del equilibrio del elemento se concluye que el número de símbolos para las tensiones tangenciales puede ser reducido a tres. En efecto, tomando momentos de las fuerzas que actúan sobre el bloque elemental cón relación al eje x, por ejemplo solamente habra que considerar las tensiones que indica la figura 4, puesto que en este caso las fuerzas másicas, como el peso del bloque elemental, son despreciables en relación con las superficiales, pues al tender a cero las dimensiones del paralelepípedo, dichas fuerzas disminuyen como el cubo de sus dimensiones, mientras que las fueras superficiales disminuyen como el cuadrado de dichas dimensiones, o sea, que las fuerzas másicas son infinitésimos de orden superior con relación a las fuerzas superficiales. Analogamente, los momentos que se originan a causa de la desigual distribución de las fuerzas normales son infinitésimos de orden superior con relación a los momentos de las tensiones tangenciales y se anulan en el limite. Además, se puede considerar que las fuerzas que actuan en cada cara son iguales al producto del área de la misma por la tensión que corresponde a su punto medio, de manera que si dx, dy, dz son las dimen

siones del elemento considerado, la correspondiente ecuación de - equilibrio será, tomando momentos con relación al eje x:

$$\tau_{zy}\, dx\, dy\, dz = \tau_{yz}\, dz\, dy\, dx$$

Las otras dos ecuaciones se obtienen de manera análoga y, luego de simplificar, resulta:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{zy} = \tau_{yz} \qquad (1)$$

Es decir, que las componentes de los esfuerzos tangenciales perpendiculares a la arista de intersección de dos caras del bloque elemental sobre las cuales actúan, son iguales entre si, lo que confirma nuestro aserto.

Por lo tanto, las seis cantidades $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}$ son suficientes para denotar las tensiones que actuan en los planos coordenados que pasan por el mismo. Por esta razón se las denomina componentes de la tensión en el punto considerado.

Como se demostrará mas adelante (párrafo 52), mediante estas seis componentes puede ser determinado el esfuerzo que corresponde a cualquier plano que pase por el punto dado.

5.- Componentes de la deformación.- Al estudiar la deformación de un cuerpo elástico se supondrá la existencia de vínculos suficientes para impedir su movimiento como cuerpo rígido, esto es, que todo corrimiento de sus particulas obedece necesariamente a la existencia de una deformación.

En este libro, solamente se considerarán pequeñas deformaciones, tales como las que ocurren en las estructuras reales. Por lo general, descompondremos los pequeños corrimientos de las particulas de un cuerpo que experimenta una - deformación, en las direcciones de los - ejes coordenados x, y, z y llamaremos u, v, w, a las componentes respectivas. Se admitirá que estas componentes son cantidades infinitesimas que varian en forma continua en el ámbito del cuerpo considerado.

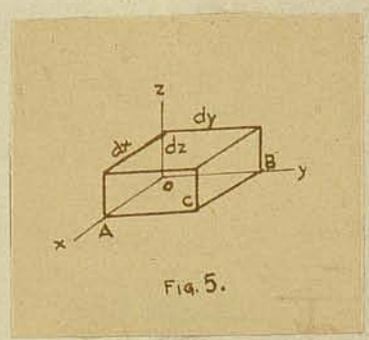


Fig. 5.

Consideremos un elemento de dimensiones dx, dy, dz, de un cuerpo

elástico (figura 5). Si este sufre una deformación y son u, v, w las componentes del corrimiento del punto O, el del punto A, contiguo al mismo, sobre el eje x y en la dirección de éste, será - $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ expresión en la cual $\frac{\partial u}{\partial x} dx$ es el incremento de la - función u correspondiente al incremento de la variable x, o lo - que es lo mismo, el aumento de longitud del elemento OA debido a la deformación. La extensión o alargamiento especifico en el punto O del cuerpo en la dirección x, es $\frac{\partial u}{\partial x}$.

De manera análoga se establece que los alargamientos especificos en las direcciones y y z, están expresados por las derivadas parciales $\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Consideremos ahora la deformación angular que se produce entre los elementos OA y OB, figura 6. Si u y v son los corrimientos - del punto O en las direcciones x e y, los trayectos del punto A en la dirección y y del punto B en la dirección x serán $v + \frac{\partial v}{\partial x} dx$ y $u + \frac{\partial u}{\partial y} dy$ respectivamente. Como consecuencia de estos corrimientos, la nueva dirección O'A' del elemento OA forma con la primitiva un angulo pequeño, que se indica en la figura, y cuyo valor es $\frac{\partial v}{\partial x}$; analogamente se establece que O'B' formará con OB el angulo $\frac{\partial u}{\partial y}$. Resulta, pues, que el angulo AOB, inicialmente recto, ha disminuido en una cantidad $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$. Esta es la deformación tangencial o distorsión del angulo de los planos xz e yz. Del mismo modo se obtienen las distorsiones de los angulos que forman los planos xy y xz y los planos yx e yz.

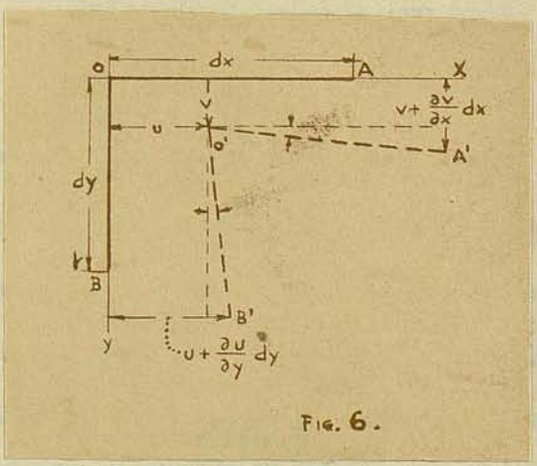


Fig. 6.

Representaremos con la letra griega ε , el alargamiento especifico (o simplemente: alargamiento) y con γ la deformación angular

especifica, distorsión o deslizamiento. Las direcciones de las deformaciones se indicaran afectando al símbolo respectivo los mismos subíndices con que se distingue a las componentes de la tensión tangencial. De lo que antecede, resulta, así

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Se de mostrará mas adelante (párrafo 58) que si se conoce los alargamientos especificos para tres direcciones ortogonales y las deformaciones angulares especificas correspondientes a las mismas direcciones, se puede calcular la deformación correspondiente a una dirección cualquiera y la distorsión del ángulo de dos direcciones cualesquiera. Las seis cantidades $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$ reciben el nombre de componentes de la deformación.

6.- La ley de Hooke.- Las relaciones entre las componentes del esfuerzo y las componentes de la deformación correlativa han sido experimentalmente establecidas y estan expresadas por la llamada ley de Hooke.

Imaginemos un paralelepípedo rectangular infinitésimo de caras paralelas a los ejes coordenados y que esté sujeto a la acción de una tensión normal σ_x, uniformemente distribuida sobre dos caras opuestas.. La experiencia demuestra que si se trata de un material isótropo, no se produce distorsión alguna de los angulos del bloque elemental y que el alargamiento especifico originado por el esfuerzo aplicado está dado por la ecuación:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_x}{E} \qquad (a)$$

en la cual E es el módulo de elasticidad longitudinal, o directo, o módulo de Young. Los materiales que emplea el ingeniero en las construcciones poseen módulos elásticos de valores muy altos en relación con las tensiones admisibles, de manera que el alargamiento unitario (a) es una cantidad muy pequeña. Por ejemplo, para el acero de construcción, no alcanza generalmente a valer 0,001.

La dilatación del elemento considerado en la dirección x está acompañada de acortamientos transversales: (Ley de Navier)

$$\varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \qquad (b)$$

expresiones en las cuales μ es una constante que se llama coeficiente de Poisson (o coeficiente transversal). Como valor de este coeficiente, para muchos materiales se adopta 0,25; para acero corriente de construcción se toma generalmente el valor 0,3.

Las ecuaciones (a) y (b) pueden emplearse tambien cuando se trate de un esfuerzo de compresión, y dentro del intervalo elástico, tanto el módulo de elasticidad como el coeficiente de Pisson son iguales para la tracción y la compresión.

Si el elemento antes considerado está sometido a la acción de tensiones normales $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ uniformemente distribuidas sobre las caras, las ecuaciones (a) y(b) nos permitirán obtener la deformación resultante. La experiencia demuestra que para ello tenemos - que superponer las deformaciones que origina cada una de las tres tensiones. Con arreglo a este metodo de superposición, se tendrá:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \qquad (3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

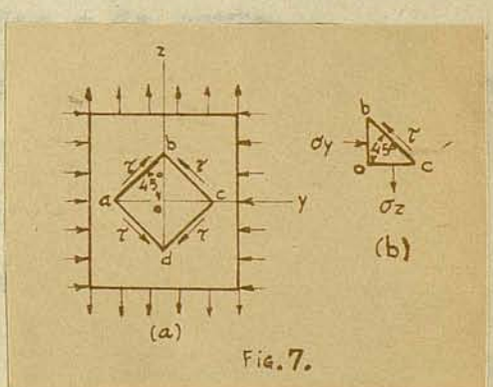
En lo sucesivo emplearemos a menudo el método de superposición para el calculo de las deformaciones y tensiones totales, que la aplicación de varias fuerzas origina. Este método es legitimo mientras las deformaciones sean pequeñas y los corrimientos consiguientes no afecten sustancialmente la acción de las fuerzas exteriores y en tal supuesto despreciaremos las pequeñas modificaciones de las dimensiones de los cuerpos deformados, y tambien los pequeños corrimientos de los puntos de aplicación de las fuerzas exteriores y basaremos nuestros cálculos en las dimensiones iniciales y en la forma original del cuerpo. Para obtener los corrimientos resultantes - procederemos por superposición, como para la deducción de las ecuaciones (3); y las expresiones correspondientes serán funciones lineales de las fuerzas exteriores.

Hay, empero, casos excepciones en los cuales no es legitimo despreciar las pequeñas deformaciones, tal como sucede cuando actuan - simultaneamente sobre una barra delgada fuerzas longitudinales y -

laterales; las primeras producen tracción o compresión simple, pero pueden afectar considerablemente al flexionamiento de la barra cuando además de ellas actúan tambien fuerzas laterales. Al calcular la deformación de la barra así solicitada, debe tomarse en cuenta, entonces, el efecto de la flecha de flexión en el valor del momento de las fuerzas exteriores aun cuando dichas flechas sean muy pequeñas. En este caso la deformación resultante no es una función lineal de las fuerzas y por lo tanto no puede determinarse por simple superposición.

En las ecuaciones (3), que son la expresión general de la ley de Hooke para el caso de materiales isótropos, las relaciones entre deformaciones y tensiones están completamente definidas mediante dos constantes físicas, E y . Estas mismas constantes permiten definir tambien la relación entre la deformación tangencial y la tensión tangencial o de desgarramiento.

Para establecer esa relación consideremos el caso particular de la deformación de un paralelepípedo rectangular, en el cual . Separando un elemento abcd por medio de planos paralelos al eje x e inclinados 45 grados respecto a los ejes y y z (figura 7 a), y proyectando las fuerzas en las direcciones bc y la normal a la misma (figura 7 b), se ve que la tensión normal sobre las caras del elemento mencionado es nula y que el esfuerzo tangencial que actúa en las mismas vale.



El estado elastico así definido recibe el nombre de resbalamiento simple (deslizamiento o corte puro).

El alargamiento del elemento vertical Ob es igual al acortamiento de los elementos horizontales Oa y Oc, y despreciando un infinitésimo de segundo orden llegamos a la conclusión de que durante la deformación del cuerpo las dimensiones ab y bc permanecen invariables. El angulo de las caras ab y bc se modifica y el valor de

la correspondiente distorsión puede deducirse del triángulo Obc.
Despues de la deformación se tiene

Reemplazando los valores deducidos de las ecuaciones (3), a saber:

y teniendo en cuenta que para una pequeña deformación angular ,

llegamos a la expresión

(4)

que es la relación que vincula la deformación angular con el esfuerzo tangencial y las constantes técnicas y .
A menudo se emplea la notación (5)

En ese caso, la ecuación (4) será

La constante G, definida por la ecuación (5), se denomina módulo de elasticidad transversal, módulo de rigidez o de corte.
Si sobre las caras de un elemento actuan fatigas tangenciales, como se indica en la figura 3, la variación del ángulo que forman los pares de ejes coordenados dependerá unicamente de las componentes de la tensión tangencial paralelas a esos ejes, y se tendrá

(6)

Los alargamientos especificos (3) y las distorsiones (6) son independientes entre sí y por lo tanto el caso general de deformación, que ocurre bajo la acción de tres componentes normales y tres componentes tangenciales de esfuerzos, puede obtenerse por superposición de los tres alargamientos dados por las ecuaciones (3) y las tres - deformaciones transversales que dan las ecuaciones (6).

Algunas veces es necesario expresar las componentes de las tensiones en función de las componentes de las deformaciones en lugar

de tener éstas en función de aquellas, tal como las dan las ecuaciones (3) y (6). Se obtiene ese resultado de la siguiente manera: sumando ordenadamente las ecuaciones (3), y empleando las notaciones

(7)

se llega a la siguiente relación entre la dilatación cúbica e y la suma de las tensiones normales:

(8)

Si se tratara de una presión hidrostática uniforme, p, se tendría

y la ecuación (8) nos da, entonces,

expresión que relaciona la dilatación cúbica e y la presión hidrostática p.

La cantidad E/3 (1 - 2) se denomina módulo de elasticidad volumétrico.

Empleando las notaciones (7) y despejando en las ecuaciones (3), se tiene

(9)

y si escribimos

(10)

y tenemos en cuenta la ecuación (5) , las relaciones (9) se transforman en

(11)

PARTE SEGUNDA

DE LA ELASTICIDAD BIDIMENSIONAL.

TENSIONES Y DEFORMACIONES

7.-Régimen elástico plano.- A menudo, todas las tensiones que figuran en problemas de teoria de la elasticidad de interés para el ingeniero son paralelas a un plano, lo que caracteriza al regímen elástico o estado de tensión plano o doble y es motivo de considerable simplificación. Tal ocurre por ejemplo, cuando se trata de una placa delgada sometida a la acción de fuerzas paralelas a los planos - que la limitan, aplicadas en su contorno y uniformente distribuidas en su espesor (figura 8). Las componentes del esfuerzo, (de dirección z) son en ese caso nulas en ambos lados de la placa y, sin error apreciable, puede asimismo admitirse que tambien son nulas en todo su grosor, esto es, que se trata de una distribución plana de tensiones o, lo que es lo mismo, de un estado elástico plano. Tambien se puede aceptar que las otras tres componentes,

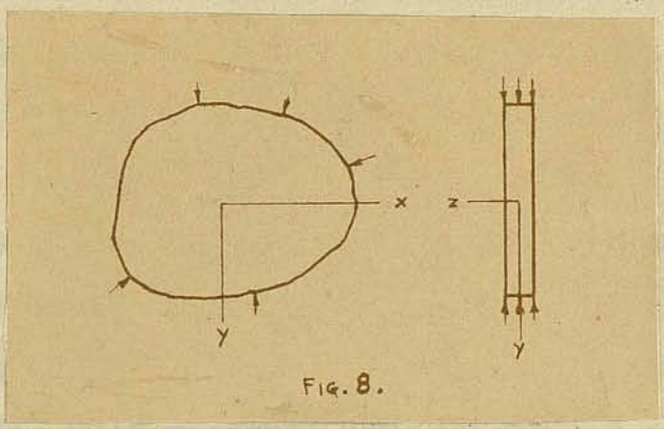


FIG. 8.

, son practicamente constantes si la placa es delgada y de espesor uniforme, es decir, si se trata de un medio bidimensional, en el cual la extensión en dirección z carece de importancia. En lo - que sigue, consideraremos esta dimensión igual a la unidad.

8.-Deformación plana.- El caso opuesto al que hemos tratado en el - párrafo anterior, esto es, el de los cuerpos muy extendidos en la - dirección z, admite la misma simplificación. Si sobre un cuerpo cilíndrico o prismatico alargado actuan fuerzas cuyas rectas de acción son perpendiculares a la dirección de la dimensión predominante y cuyas intensidades no varian a lo largo de la misma, la porción del só-

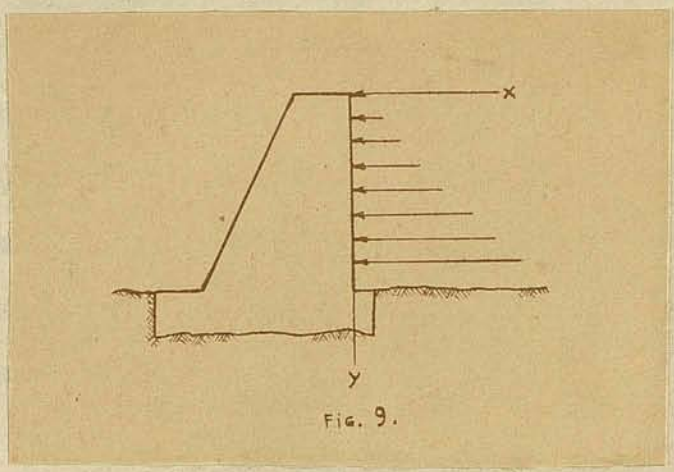


Fig. 9.

lido considerablemente alejada de sus extremidades experimenta practicamente una deformación plana y los corrimientos de todos los puntos del cuerpo deformado tienen lugar en planos perpendiculares a su longitud.

En numerosos problemas de importancia en la construcción la deformación es esencialmente plana. Ello sucede, por ejemplo, en el caso de un muro de contención, a lo largo del cual actúa una presión lateral distribuida uniformemente (figura 9). Se ve facilmente que las deformaciones que experimenta esta estructura tienen lugar en planos normales al eje longitudinal. Las secciones normales muy alejadas de las extremidades permanecen planas y al estudiar el estado elástico que se origina es suficiente considerar una rebanada o elemento del muro comprendido por dos secciones transversales muy próximas. Otro ejemplo de deformación plana es el de una alcantarilla cargada uniformemente a lo largo de su eje (figura 10).

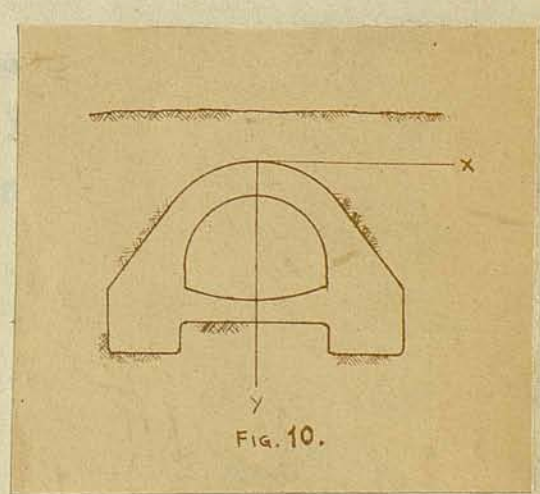


Fig. 10.

Si una extensión uniforme dirigida según el eje del cuerpo se superpone a la deformación plana, no por ello el problema se complica. Un ejemplo se tiene en el caso de un tubo cilíndrico sometido a una presión interior uniforme. Otro ejemplo es el de un rodillo cilíndrico, comprimido por fuerzas que actúan en un plano diametral y uniformemente distribuidas a lo largo del mismo (figura 11): en las secciones normales del cilindro muy alejadas de sus extremidades se producirá una deformación pla

na a la cual se superpone una expansión uniforme en la dirección - del eje del cilindro. Si adoptamos como dirección z la que corresponde a la dimensión predominante, esa dimensión carecerá de importancia en los casos de deformación plana, y en lo que sigue consideramos generalmente un elemento comprendido por - dos secciones normales al eje z separadas por la distancia igual a uno.

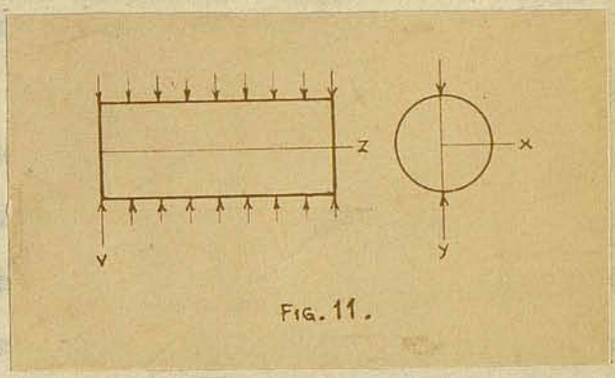


FIG. 11.

Los ejemplos que anteceden evidencian que todas las secciones normales de un prisma sujeto a una deformación plana se deforman igualmente y, por lo tanto, las componentes u y v del corrimiento son funciones de x y de y solamente, y el trayecto es nulo. Resulta, - pues, aplicando las ecuaciones (2):

(a)

Si a la deformación plana se superpone una extensión uniforme de dirección z, se tendrá constante. La primera de las ecuaciones (a) nos dice que las tansiones tangenciales proporcionales a son nulas.

La tensión normal puede determinarse en función de y empleando la Ley de Hooke ecuaciones (3) y si el corrimiento longitudinal es impedido, la condición = 0, correspondiente, nos conduce a

de donde (b)

Estas tensiones normales, al actuar sobre las secciones transversales, mantienen una deformación plana.

Se verá mas adelante que, como ocurre con los problemas correspondientes al estado plano de tensión, la solución de un problema de deformación plana se reduce a la determinación de tres componentes de

la tensión:

9.-Tensiones en un punto.- Sea O un punto de una placa en estado plano de tensión o de deformación, en el cual suponemos conocidas las componentes de la tensión (figura 12). Mediante las ecuaciones de la estática podremos determinar, en función de aquellas, la tensión que actua en cualquier plano que pase por dicho punto yque sea perpendicular a la placa. Para ello consideremos el plano BC, paralelo al eje z, inclinado respecto a los ejes x e y y muy próximo al punto O, de manera que con los planos coordenados determina un prisma triangular elemental, OBC. En la hipótesis de la variación continua de las tensiones en el ámbito del cuerpo, a medida que el elemento considerado disminuya de tamaño tendiendo al límite cero, las tensiones que actúan sobre el plano BC tenderán al valor de las que corresponden al plano paralelo al mismo y que pasa por O.

Al establecer las condiciones de equilibrio del minúsculo prisma triangular,puede despreciarse la fuerza másica por tratarse de una cantidad infinitesimal de orden superior (véase 4). Por la misma razón, se podrá desechar la variación de las tensiones en las caras y admitir que estan uniformemente distribuidas en ellas de manera que las fuerzas que actúan sobre el prisma triangular se obtendrán multiplicando las áreas de las caras por las componentes de las tensiones respectivas. Sea A el área de la cara BC, cuya normal N tiene por cosenos directores l y m con respecto a los ejes x e y, respectivamente, esto es,que

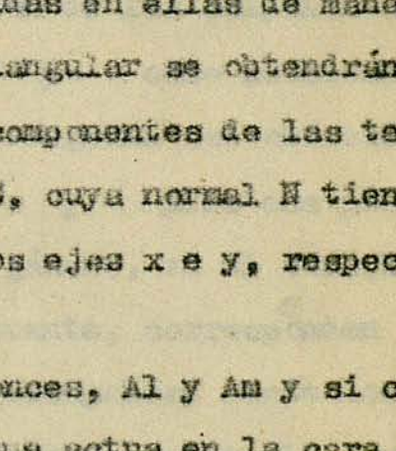


Fig. 12.

Las áreas de las caras OB y OC, serán, entonces, Al y Am y si con X e Y denotamos las componentes de la tensión que actua en la cara BC, las ecuaciones de equilibrio del elemento prismático nos dan

(12)

Estas ecuaciones permiten calcular las componentes de la tensión que actúa en un plano definido por los cosenos directores l y m siempre que se conozcan las tres componentes de la tensión en el punto O.

Si designamos con a el ángulo que forma la Normal N con el eje x o sea que l = cos a y m= sen a, las componentes normal y tangencial de la tensión que actúa en el p.ano BC serán,de acuerdo con las ecuaciones (12).

(13)

Siempre se podrá elegir el ángulo x de manera tal que se reduzca a cero el esfuerzo tangencial τ y para este caso resultará

o bien

(14)

Las dos direcciones para las cuales el esfuerzo tangencial es - nulo pueden determinarse mediante esta última ecuación. Se denominan direcciones principales y son perpendiculares entre sí, y las tensiones normales correspondientes se llaman tensiones principales.

Si se adopta como ejes x e y y las direcciones principales, la tensión tangencial resulta nula y las ecuaciones (13) se simplifican, transformandose en

(13')

Se puede representar graficamente la variación de las componentes del esfuerzo en función del ángulo tomando y como coordenadas. A cada plano corresponderá un punto del diagrama asi obtenido cuyas coordenadas representarán los valores de y para ese plano. En la figura 13 tenemos un diagrama de ese género, en el cual,los puntos A y B, de abscisas y , respectivamente, corresponden a los planos perpendiculares a las direcciones principales. Puede demostrarse que para un plano cualquiera, BC, al que corresponde el ángulo (Fig.12), las componentes de la tensión están representadas por las coordenadas de un punto de la circunferencia de circulo cuyo diámetro es $\overline{AB}$. Para hallar ese punto tan solo hay que medir, a partir - de A y en el sentido de crecimiento de los angulos a en la figura 12 un arco que subtienda un ángulo igual a 2 . Si D es el punto asi determinado, resultará de la figura:

Comparando estas expresiones con las ecuaciones (13') se comprueba que las coordenadas del punto D dan los valores numéricos de las componentes de la tensión que actúa en el plano BC, cuya indicación es . Para obtener la coincidencia de signo de la componente tangencial llevaremos las positivas hacia arriba y consideraremos los esfuerzos tangenciales como positivos cuando el sentido de rotación del par que originan es el del movimiento de las agujas del reloj, como ocurre para las caras bc y ad del elemento abcd (figura 13b). Las tensiones tangenciales que obran en las caras ab y dc del mismo elemento son de sentido contrario y por lo tanto se consideran como negativas.

Al girar el plano BC alrededor de un eje perpendicular al plano xy (figura 12) en el sentido de lasagujas de un reloj, con lo que el ángulo varia desde cero hasta /2, el punto D (figura 13) se mueve desde A hacia B, de manera que la semicircunferencia inferior nos da la variación de la tensión correspondiente a todos los valores de entre dichos límites. La semicircunferencia superior da las tensiones para .

Prolongando el radio CD hasta el punto D_1 (figura 13), esto es, tomando el ángulo + 2 en lugar de 2 , se obtienen las tensiones correspondientes al plano perpendicular a BC (figura 12). Se comprueba así que las tensiones tangenciales que actúan en dos planos perpendiculares son iguales en valor absoluto, como se había demostrado anteriormente. Por lo que respecta a las tensiones normales, se ve en la figura que $\overline{OF_1} + \overline{OF} = 2\overline{OC}$, o sea, que la suma de las tensiones normales que se desarrollan en dos planos perpendiculares, permanece constante y es independiente de la variación del ángulo .

La tensión tangencial máxima se deduce del diagrama de la figura 13 y esta dada por la ordenada máxima de la circunferencia, o lo que es lo mismo, por su radio, de manera que

(15)

Dicha tensión obra en el plano para el cual = /4, o sea, en el plano bisector del angulo que forman las dos tensiones principales.

El diagrama que nos ocupa puede utilizarse tambien en el caso en -

que una o las dos tensiones principales sean negativas o de compre-

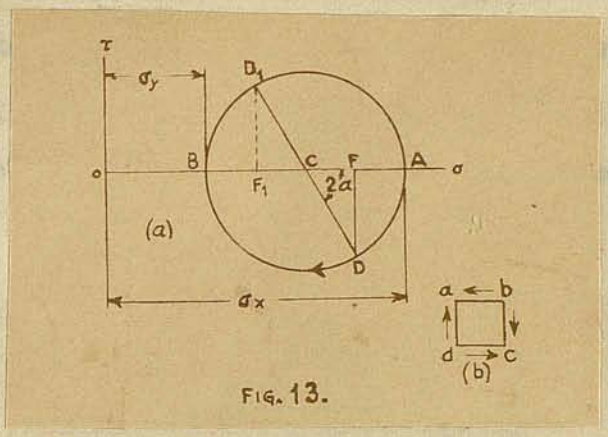


FIG. 13.

sión, y basta solo cambiar el signo de la abscisa para la tensión negativa. De esa manera, la figura 14a corresponde al caso en que las dos tensiones principales son negativas, mientras que la Fgi .14b se refiere al caso de resbalamiento simple.

De las figuras 13 y 14 se deduce que la tensión en un punto puede descomponerse en dos: una tracción o compresión uniforme, cuya magnitud está dada por la abscisa del centro del circulo, y la otra de corte puro, cuya magnitud es el radio del circulo. Cuando se superponen varios estados elásticos planos, los esfuerzos de tracción o de compresión se pueden sumar algebraicamente. Las tensiones de corte puro deben sumarse teniendo en cuenta las direcciones de los planos en los cuales se desarrollan. Se demuestra que al superponer dos sistemas de resbalamiento puro cuyos planos de máxima tansión forman un ángulo , el sistema resultante constituye tambien un caso de resbalamiento puro. Por ejemplo, en la figura 15 se determina la tensión que se desarrolla en un plano definido por el ángulo y que está originada por dos resbalamientos simples de magnitudes , que actúan: uno en los planos xz e yz (figura 15a) y el otro en los planos que forman con estos últimos, el ángulo (figura 15b). En la figura 15a las coordenadas del punto D representan la tensión del corte y la tensión normal en el plano $\overline{BB}$ originadas por el primer sistema, mientras que las coordenadas de D_1 (figura 15b) dan las tensiones en

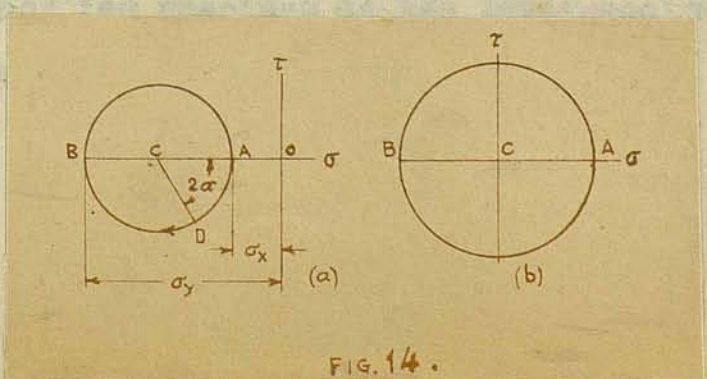


FIG. 14.

este plano para el segundo sistema. La suma geométrica de $\overline{OD}$ y de $\overline{OD_1}$ es $\overline{OG}$, que representa la tensión resultante en el plano, a causa de ambos sistemas, y las coordenadas de G serán las tensiones tangencial y normal. Debe advertirse que la magnitud de $\overline{OG}$ es independiente del ángulo . Por lo tanto, la superposición de dos estados de

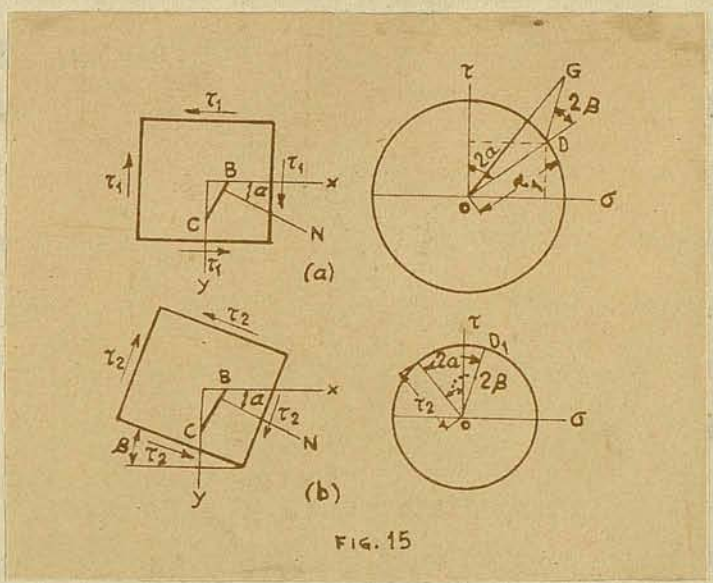


FIG. 15

resbalamiento simple origina un círculo de Mohr de resbalamiento - simple cuya magnitud es $\overline{OG}$; en cuanto a la inclinación de los planos de corte máximo respecto a xz e yz, está dada por un ángulo igual a la mitad del ángulo GOD.

Para determinar las tensiones principales cuando se conoce las componentes de la tensión que corresponden a dos planos - perpendiculares entre sí (figura 12), puede utilizarse tambien un diagrama como el de la figura 13. En este caso (figura 16) comenzamos por marcar dos puntos D y D_1, representativos del estado elástico correspondiente a los dos planos coordenados y con ellos se obtiene el diámetro del círculo DD_1;

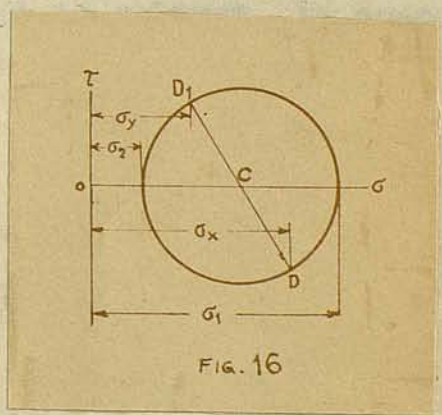


FIG. 16

dibujada la circunferencia, las tensiones principales y están dadaspor las abscisas de las intersecciones de la curva con el eje correspondiente. De la figura resulta:

En cuanto a la tensión tangencial máxima, está dada por el radio de la circunferencia, i.e.:

(17)

De esta manera, todas las caracteristicas del estado elástico correspondiente a un punto pueden obtenerse con solo conocer las tres componentes .

10.-Ecuaciones diferenciales de equilibrio.- Estudiemos ahora la variación de las componentes del esfuerzo especifico, en función de la posición del punto. Para ello, estableceremos las ecuaciones de equilibrio de un paralelépípedo rectangular de dimensiones dx, dy, 1. En la figura 17 se indica las tensiones que actúan en el centro de las caras del paralelepípedo, asi como su sentido respectivo. Aqui tendremos en cuenta las variaciones de las componentes de la tensión originadas por los incrementos dx, dy de las coordenadas y, en virtud de la pequeñez de las caras del elemento considerado, admitiremos que la fuerza que actúa en cada una es igual al producto de su área por la magnitud de la tensión en su centro.

La fuerza másica que actúa sobre el elemento considerado no puede ser despreciada en este caso como lo fuera en el planteo de las ecuaciones de equilibrio del prisma triangular (figura 12), pues ella es del mismo orden de magnitud que los términos que corresponden a la variación de las componentes de las tensiones. Si llamamos X e Y a las componentes de dicha fuerza por unidad de volumen, la ecuación

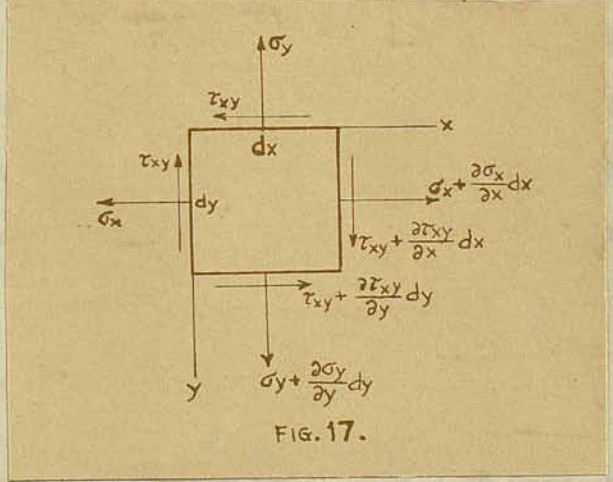


FIG. 17.

de equilibrio correspondiente a la proyección de las fuerzas que actúan sobre el elemento en la dirección del eje x, es

La segunda ecuación de equilibrio se obtiene de una manera análoga

y ambas se reducen, despues de simplificar, a :

(18)

En las aplicaciones prácticas, generalmente aparece como única fuerza intrínseca el peso del cuerpo, asi que llamando a la masa especifica correspondiente, las ecuaciones (18) se transformarán en

(19)

Estas son las ecuaciones diferenciales de equilibrio correspondientes a probles elásticos bidimensionales.

11.-Condiciones de contorno.- Las ecuaciones (18) o (19) deben ser satisfechas en todos los puntos del cuerpo considerado. Ahora bien, las componentes de la tensión varian de punto a punto de la placa y al llegar a sus bordes deberan equilibrar las fuerzas exteriores aplicadas en el mismo de modo tal que dichas fuerzas puedan ser - consideradas como una continuación de la distribución interna de los esfuerzos. Las condiciones de equilibrio en el borde de la placa pueden deducirse de las ecuaciones (12).

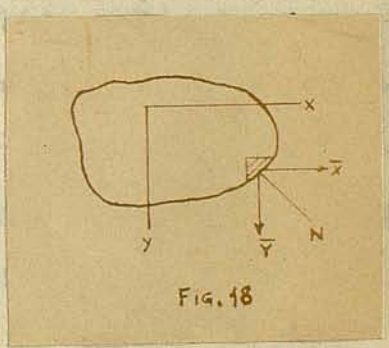


FIG. 18

Suponiendo al prisma triangular elemental OBC de la figura 12 dispuesto de manera que la cara BC coincida con un elemento superficial del contorno de laplaca, como se ve en la figura 18, y llamando X e Y a las componentes de las fuerzas superficiales por unidad de superficie en ese punto del contorno, dichas ecuaciones serán para este caso

(20)

en las cuales l y m son los cosenos directores de la normal N al - contorno.

En el caso particular de una placa rectangular, se toma, por lo general, los ejes coordenados paralelos a sus cantos, y las condiciones de contorno expresadas en (20) pueden simplificarse. Por ejem

plo, tomando un borde de la placa paralelo al eje x, tendremos para esta parte del contorno la normal N paralela al eje y, de modo que $l = 0$ y $m = \pm 1$, con lo cual las ecuaciones (20) se reducen a

Se deberá tomar el signo positivo cuando la normal N tenga el sentido del semieje positivo de las y, y el signo negativo para el sentido contrario de N. De aqui resulta que las componentes de las tensiones que se desarrollan en el contorno de la placa son iguales a las componentes de las fuerzas superficiales, referidas a la unidad de área periférica.

12.- Ecuaciones de compatibilidad.- El problema de la teoria de la elasticidad consiste por lo común en la determinación del estado elástico que se origina en un cuerpo sujeto a la acción de determinadas fuerzas. En los casos de solicitación doble o plana es necesario para ello resolver las ecuaciones diferenciales de equilibrio (18), y la solución deberá satisfacer las condiciones de contorno dadas por las dos ecuaciones (20) . Dichas ecuaciones, que han sido deducidas de las condiciones de equilibrio estático aplicables a cuerpos absolutamente rigidos, no bastan para determinar las tres componentes del esfuerzo especifico, , que en ellas figuran: el problema es estaticamente indeterminado y para resolverlo es necesario tomar en consideración la deformación elástica del cuerpo.

La expresión matemática de la condición de compatibilidad de una distribución de tensiones con la existencia de unas funciones continuas u, v, w, que definan la deformación del cuerpo, se deducirá de las ecuaciones (2). En los problemas bidimensionales solo deberá considerarse tres componentes de la deformación, a saber:

(a)

Para obtener la relación que debe existir entre estas tres componentes de la deformación, cuyos valores no pueden ser arbitrarios desde el momento que las tres estan expresadas mediante dos funciones, u y v, partiremos de las relaciones (a). Si derivamos la primera de ellas dos veces con respecto a y, la segunda dos veces con respecto a x y la tercera una vez con respecto a x y otra vez con respecto a

y, resulta:

(21)

Esta ecuación diferencial se llama condición de compatibilidad, y deberá ser satisfecha por las componentes de la deformación para asegurar la existencia de funciones u y v, vinculadas a aquellas por las ecuaciones (a). Aplicando la ley de Hooke [ecuaciones (3)], podremos transformar la condición (21) en una relación entre las componentes de la tensión.

Si se trata de un estado elástico plano (§ 7), las ecuaciones (3) se reducen a:

Además [ecuación (4)],

Reemplazando estos valores en (21) y simplificando, se llega a:

(b)

Por medio de las ecuaciones de equilibrio podemos dar a esta ecuación una forma diferente . En primer término, consideremos el caso en que el peso del cuerpo es la única fuerza másica, al cual corresponden las ecuaciones de equilibrio (19). Diferenciando la primera de éstas con respecto a x y la segunda con respecto a y y luego sumándolas, se tiene

Por sustitución de estos valores en la ecuación (b) se llega a la ecuación de compatibilidad en función de las componentes del esfuerzo:

(22)

Si se procede análogamente con las ecuaciones generales de equilibrio (18), se tendrá:

(23)

En el caso de una deformación plana [§ 8, fórmula (b)], se tiene

y de acuerdo con la ley de Hooke [ecuaciones (3) y (4)] resultará

Sustituyendo en la ecuación (21) y teniendo en cuenta, como antes, las ecuaciones de equilibrio (19), concluimos que la ecuación de compatibilidad (22) es válida tambien en el caso de la deformación plana. Para el caso de fuerzas másicas en general, las ecuaciones (21) y (18) nos permiten escribir la ecuación de compatibilidad bajo la forma siguiente:

(24)

Las ecuaciones de equilibrio (18) o (19), conjuntamente con las condiciones de contorno (20) y una de las ecuaciones de compatibilidad que quedan consignadas, constituyen un sistema de ecuaciones que, por lo general, permite la determinación completa de la distribución de las tensiones en un problema bidimensional. Mas adelante se tratan los casos particulares en los que es necesario agregar otras consideraciones (§ 35). Es interesante destacar que cuando las fuerzas másicas son constantes, en las ecuaciones que determinan la distribución de las tensiones no aparecen las constantes elásticas del material, lo que quiere decir que la distribución de las tensiones es igual para todos los materiales isótropos, con tal que las ecuaciones sean suficientes para la completa determinación de las tensiones. Esta conclusión es de mucha importancia práctica, pues, como veremos más tarde (§ 38), por procedimientos basados en el uso de luz polarizada, se puede hallar las tensiones que se producen en materiales transparentes como el vidrio y la xilonita, y los resultados asi obtenidos pódrán ser en muchos casos inmediatamente aplicados a cualesquiera otros materiales, tales como el acero, por ejemplo.

Señalaremos, asi mismo, que cuando las fuerzas másicas son constantes, la ecuación de compatibilidad (22) es de aplicación tanto a los casos de tensión plana como a los de deformación plana. En consecuencia, la distribución de las tensiones será igual en ambos casos, siempre que se trate de contornos idénticos y de un mismo sistema de fuerzas exteriores.

13.- Función de tensión.- Según se ha visto, podemos resolver problemas de elasticidad plana por un procedimiento que se reduce a hallar las soluciones que satisfagan a la ecuación de compatibilidad y a las condiciones de borde, conjuntamente con las integrales de las ecuacio-

nes diferenciales de equilibrio. Si lo aplicamos, en primer lugar, al caso en que la única fuerza de volumen sea el peso del cuerpo, las ecuaciones que habrá que resolver son (vide ecuaciones 19 y 22):

(a)

(b)

a las cuales se deberá añadir las condiciones de borde (20).

El método corriente para la resolución de estas ecuaciones se basa en la introducción de una nueva función, llamada función de tensión. Facilmente se comprueba que las ecuaciones (a) quedan satisfechas - por una función $\Phi(x,y)$, relacionada con las componentes de la tensión por medio de lasexpresiones siguientes:

(25)

De esa manera podremos obtener diversas soluciones para las ecuaciones de equilibrio (a),entre las cuales, aquella que satisfaga tambien a la ecuación de compatibilidad (b) será la verdadera. Reemplazando en la ecuación(b) las expresiones (25) de las componentes del esfuerzo, concluimos que la función de tensión es la solución de la - ecuación

(26)

Resolver un problema de elasticidad en dos dimensiones, en el cual - sea el peso la única fuerza másica, consiste, pues, tan solo, en buscar una solución de la ecuación (26) que satisfaga a la condición de contorno (20) , correspondiente al caso particular planteado. En los capitulos siguientes este método se aplica para resolver una serie de problemas de interés práctico.

Consideremos ahora el caso mas general de varias fuerzas másicas y admitamos que ellas deriven de un potencial. Entonces las componentes X e Y de las ecuaciones (18) estarán dadas por las ecuaciones

en las cuales V es la función potencial.Las ecuaciones (18) se trans-

forman en

Estas son de la misma forma que las ecuaciones (a) y quedarán - satisfechas tomando

(27)

donde Φ es la función de tensión. Reemplazando estas últimas en la ecuación de compatibilidad (23) que corresponde a un estado elástico plano, se llega a

(28)

Para el caso de una deformación plana se puede obtener una ecuación análoga, utilizando un procedimiento similar.

CAPITULO II

PROBLEMAS EN COORDENADAS RECTANGULARES RECTILINEAS

14.-Soluciones polinómicas.- Como hemos visto en el Cap. I, la solución de los problemas que se refieren a estados elásticos planos en los cuales las fuerzas másicas sean constantes o nulas queda reducida a la integración de la ecuación diferencial (26):

(a)

cuenta tenida de las condiciones de contorno (20) que correspondan al caso particular.

Cuando se trata de chapas rectangulares largas y angostas, son de gran interés las soluciones de forma polinómica. En efecto, puede resolverse un buen número de problemas de importancia práctica utilizando, para satisfacer la ecuación (a), polinomios de diversos grados, con coeficientes calculados adecuadamente.

En primer término, consideremos un polinomio de segundo grado:

(b)

que, evidentemente, satisface a la ecuación (a). De las ecuaciones (25) deducimos, haciendo = 0 ;

Las tres componentes de la tensión resultan, pues, constantes en cualquier punto del cuerpo, esto es, que la función de tensión (b) representa una combinación de tensiones uniformes de tracción o de compresión (según sean los signos de a_2 y b_2) en dos direcciones perpendiculares, y una tensión tangencial uniforme. Las fuerzas que actuan en el contorno deben igualar a las tensiones correspondientes a los puntos de la misma, conforme a lo demostrado en el § 11. En la figura 19, que representa el caso de una chapa rectangular de bordes paralelos a los ejes coordenados, puede apreciarse dichas fuerzas; los sentidos marcados para las fatigas corresponden a coeficientes a_2, b_2, c_2, positivos.

Consideremos ahora como función de tensión a un polinomio de ter-

cer grado:

(c)

Este polinomio satisfaca tambien a la ecuación (a). Empleando las ecuaciones (25) y haciendo = 0, llegariamos a las expresiones siguientes:

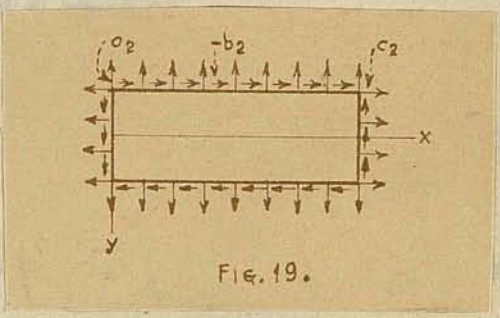


Fig. 19.

La figura 20 se refiere al caso de una placa rectangular sometida a flexión simple, como resulta al igualar a cero todos los coeficientes, con excepción de d_3. En cambio, si solamente a_3 es distinto de cero, se obtiene un caso de flexión por acción de esfuerzos normales que actúan sobre los costados de la placa, de ecuaciones $y = \pm c$. Si se tomara los coeficientes b_3 o c_3 diferentes de cero, ello significaria que, además de tensiones normales, actuarian tensiones tangenciales en los bordes laterales de la chapa. La figura 21, por ejemplo al caso en el cual todos los coeficientes de la función (c), con excepción de b_3, son nulos. El sentido de las tensiones que indica la figura correspondiente al signo - positivo, para b_3. A lo largo de los bordes $y = \pm c$, las tensiones de tracción y compresión, respectivamente, se distribuyen uniformemente y las tensiones de corte son proporcionales a x; sobre el canto $x = l$, actúa solamente la tensión de corte constante $-b_3 l$, y en la cara $x = 0$ no actúa tensión alguna. Una distribución de tensiones análoga resultaria si se tomara para el coeficiente c_3 un valor diferente de cero.

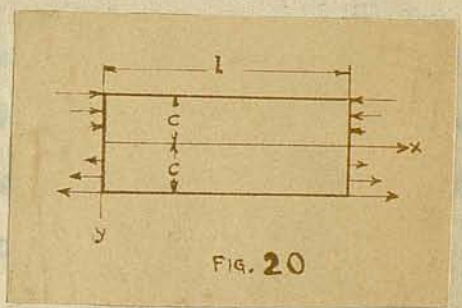


Fig. 20

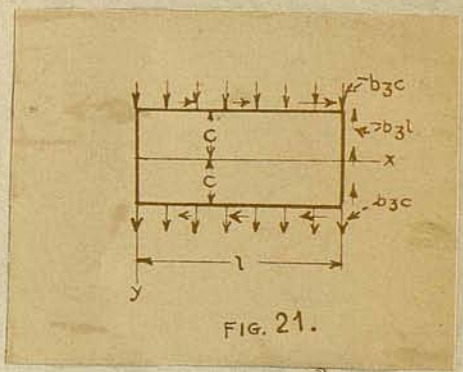


Fig. 21.

Si como función de tensión se adopta polinomios de grado superior al tercero, ya no es posible dar a los coeficientes valores arbitra-

rios como en el caso de polinomios de segundo o tercer grado, en - que hay libertad de elección, porque la ecuación (a) queda satisfecha para cualesquiera valores asignados a los coeficientes, en tanto que aquí solo lo estará si existen ciertas relaciones entre ellos. Tomemos, por ejemplo, para la función de tensión un polinomio de - cuarto grado:

(d)

Por sustitución en la ecuación (a), resulta como única solución

$$e_4 = - (2c_4 + a_4).$$

En este caso, las componentes de la tensión son:

Los coeficientes $a_4, \ldots, d_4$, que figuran en estas expresiones, son arbitrarios, y asignandoles valores adecuados se obtienen diversos casos de carga sobre una chapa rectangular. Por ejemplo, igualando a cero todos los coeficientes con excepción de d_4, resulta

(e)

Si se dá el signo positivo a d_4, resulta una distribución de fuerzas como la que indica la figura 22, la cual origina las tensiones (e). En los lados longitudinales $y = \pm c$ existe una distribución uniforme de tensiones de desgarramiento, y en las extremidades las tensiones de corte se distribuyen de acuerdo con una ley parabólica. Los esfuerzos tangenciales que actúan en el contorno de la placa se reducen a un par de fuerzas, equilibrante del que originan las fuerzas normales a lo largo de borde $x = l$ de la - chapa, par que, suponiendo que el espesor de la chapa es igual a la unidad, valdrá:

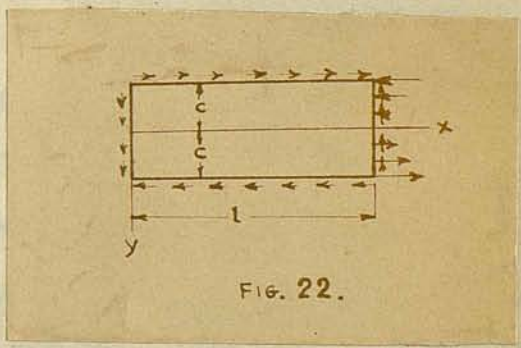


FIG. 22.

Supongamos ahora que se adopta para la función Φ la forma de un polinomio de quinto grado, a saber:

(f)

Por sustitución en la ecuación (a), resultan como soluciones:

así que, en este caso, las componentes de la tensión tendrán por - expresiones, las siguientes:

De los valores que se asigne a los coeficientes arbitrarios $a_3, \ldots, d_5$, resultarán las soluciones correspondientes a las diversas condiciones de carga de la chapa. Si, por ejemplo, suponemos nulos todos los coeficientes con excepción de d_5, se tendrá

(g)

Las fuerzas normales estan uniformemente distribuidas en los bordes longitudinales de la chapa (Fig. 23a). A lo largo de la cara x = 1 las fuerzas normales siguen en parte una ley lineal y en parte una - ley parabólica (cúbica). En cuanto a los esfuerzos de corte, responden a una ley parabólica a lo largo de la cara x = 1 y son proporcionales a x en los bordes longitudinales. La figura 23b presenta la distribución de las tensiones.

En lo que sigue daremos algunos ejemplos de interés práctico de - superposición de las soluciones elementales de la ecuación (a), examinadas en este párrafo; en efecto, la suma de varias soluciones particulares de la ecuación diferencial mencionada, constituye, en virtud - del caracter de ésta, una nueva solución.

15.- El principio de Saint-Venant.- Las soluciones de los distintos casos de chapas rectangulares considerados en el párrafo precedente han sido obtenidas dando a la función Φ, de tensión, formas muy sencillas. Cada una de ellas satisface a todas las ecuaciones de la elasticidad, pero su exactitud está condicionada a una cierta distribución de las fuerzas de superficie. Asi, por ejemplo, en el caso de la flexión simple representado en la figura 20, era necesario que el momento flexor estuviese producido por esfuerzos de tracción y compresión aplicados a las extremidades de la pieza con arreglo a una ley lineal, esto es, que sus valores fueran proporcionales a las distancias de cada punto al eje neutro. La sujección de la extremidad de la pieza, caso que exista, no deberá influir en la deformación de la superficie plana que la limita. Pero si tales condi-

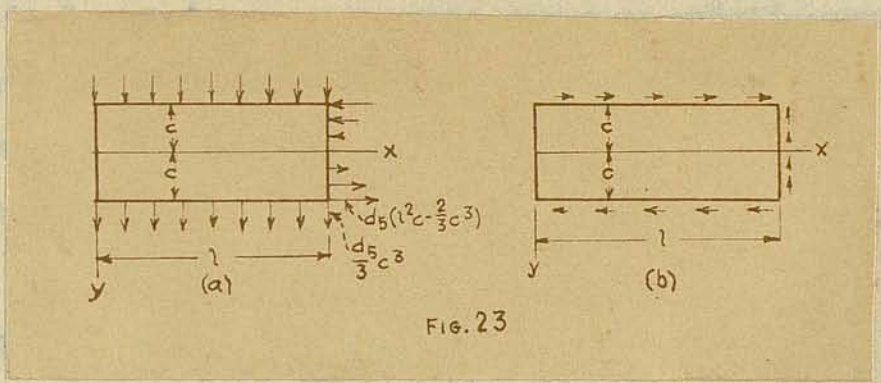


FIG. 23

ciones no se cumplen, esto es, si el momento flexor se aplica de una manera diferente, o si la sustentación impone a la sección terminal otros esfuerzos, la solución dada al problema en el 14 deja de ser exacta.

Sin embargo, la utilidad práctica de dicha solución no está limitada a caso tan especial, sino que puede aplicarse con suficiente exactitud a casos de flexión en los cuales no se satisfagan rigurosamente las condiciones premisas respecto a las extremidades de la pieza. La posibilidad de extender la aplicación de la solución de que se trata está basada por lo común en el llamado principio de de Saint-Venant. Este principio establece que si las fuerzas que actúan sobre un elemento de la superficie de un cuerpo elástico son sustituidas por un sistema de fuerzas estáticamente equivalente, aplicado sobre el mismo elemento, el influjo de la nueva distribución de cargas en la magnitud de las tensiones, aunque localmente substancial, resulta

prácticamente despreciable a una distancia relativamente grande con respecto a las dimensiones lineales de la superficie sobre la cual - actúa el sistema de fuerzas sustituyente. Por ejemplo, en el caso de la flexión simple de una barra de sección rectangular alargada, cuyas dimensiones son pequeñas en comparación con su longitud, la manera de aplicar el momento flector afecta a la distribución de las tensiones - en las secciones próximas a los extremos, pero carece de efecto en - las secciones distantes, en las cuales la distribución de tensiones será prácticamente la que refleja la solución a que se refiere la figura 20.

En el caso de la solicitación originada en una barra por una tracción axil, tambien resulta aplicable el principio: mientras en la - proximidad de las extremidades, la distribución de las tensiones depende del modo de aplicar la fuerza, para las secciones transversales distantes de los extremos se puede aceptar prácticamente una distribución uniforme de tensiones. En el 20 se dan algunos ejemplos demostrativos de este aserto, los cuales permiten, a la vez, apreciar la rapidez con que la distribución de tensiones se hace prácticamente uniforme.

16.- Determinación de los corrimientos.- Mediante la aplicación de la ley de Hooke -ecuaciones (3)- puede obtenerse las componentes de la deformación, una vez determinadas las componentes de la tensión por la aplicación de las ecuaciones anteriores. Determinaremos, asi, los trayectos u y v por medio de las siguientes ecuaciones:

(a)

Mas adelante encontraremos numerosos ejemplos de la aplicación de - estas ecuaciones, cuya integración, en cada caso particular, no ofrece dificultades. Se ve en seguida que si se agrega a los valores de u y v, respectivamente, las funciones lineales:

(b)

en las cuales a, b y c son constantes, las componentes de la deformación dadas por las ecuaciones (a) no se alteran, lo cual significa - que los corrimientos no estan completamente determinados por las tensiones y deformaciones, sino que a los recorridos que éstas originan se puede superponer otro, análogo al que experimenta un cuerpo rígido

Las constantes a y c de las ecuaciones (b) representan un movimiento de traslación del cuerpo y la constante b, un pequeño ángulo de giro del cuerpo, rígido alrededor del eje z. Si el movimiento como cuerpo rígido fuera realmente impedido en forma absoluta, a, b, y c se reducirían a cero.

En el § 12 se ha demostrado que la distribución de las tensiones en el caso de que las fuerzas másicas sean constantes es la misma, tanto para una distribución plana de tensiones como para una deformación plana. En cambio, loss corrimientos elásticos son diferentes, desde que en el primer caso las componentes de la deformación que figuran en las ecuaciones (a) están dadas por las expresiones:

mientras que en el caso de la deformación plana las componentes de la deformación son (vide § 8, ecuación (b)) :

Al estudiar algunos problemas especiales se indicará el procedimiento de integración de las ecuaciones (a).

17.- Flexión de una viga volada con carga en su extremidad libre.- Sea una viga en voladizo, de sección rectangular delgada, que supondremos de ancho igual a uno, flexada por acción de una fuerza aplicada a su extremidad libre (figura 24).

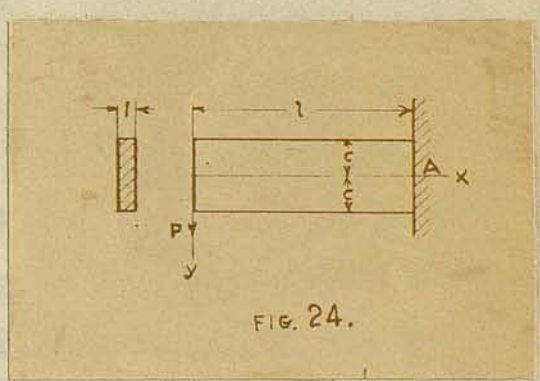


FIG. 24.

Los bordes superior e inferior de la viga no están sujetos a la acción de fuerza alguna, y a lo largo de la extrmidad que corresponde a x = 0 actúan esfuerzos cortantes cuya resultante es P. Mediante una adecuada combinación de un estado de resbalamiento simple con las tensiones dadas por las ecuaciones (e) del § 14 (figura 22), se puede satisfacer las condiciones antedichas. Procediendo así, obtenemos las siguientes expresiones:

(a)

Esta última ecuación nos permite escribir la condición de que los bordes $y = \pm c$ estén libres de la acción de toda fuerza, como sigue:

de la cual resulta

Para que la condición de carga que se ha supuesto en la extremidad libre quede satisfecha es necesario que las tensiones tangenciales distribuidas en ella equilibren a la fuerza P, esto es

El signo negativo que precede a la integral resulta de la regla de los signos adoptada para las tensiones tangenciales. La fatiga en la cara $x = 0$ es positiva si está dirigida hacia arriba - (vide § 3).

De la ecuación anterior resulta, luego de integrar:

Llevando a las ecuaciones (a) los valores obtenidos para d_4 y b_2 se tiene

Ahora bien, si se tiene en cuenta que $2/3\ c^3$ es el momento de inercia, I, de la sección transversal de la viga volada, se podrá escribir:

(b)

La coincidencia de esta solución con la que se deduce en forma elemental en los tratados de resistencia de materiales, es completa, No debe olvidarse que ella es exacta tan solo cuando las fuerzas cortantes estan distribuidas en las extremidades de la viga de acuerdo con la misma ley parabólica que las tensiones de desgarramiento y la intensidad de los esfuerzos normales en el empotramiento es proporcional a y. Si las fuerzas no obedecieran a la distribución supuesta para las extremidades de la viga volada, las ecuaciones (b) no serian aplicables correctamente para determinar la distribución

de las tensiones en dichas extremidades; pero, en virtud del principio de de Saint-Venant, pueden considerarse suficientemente satisfactorias para las secciones transversales situadas a distancia considerable de dichas caras.

Consideremos ahora los corrimientos que corresponden a las tensiones que dan las ecuaciones (b), La aplicación de la ley de Hooke nos conduce a las siguientes expresiones:

La integración de las ecuaciones (c) y (d) permite determinar las componentes u y v del corrimiento. Integrando las ecuaciones (c) obtenemos las expresiones:

en las cuales f (y) y f_1 (x) representan funciones desconocidas de y y de x. Por sustitución de u yv en las ecuaciones (d) se llega a

En estas expresiones, e y d son constantes que satisfacen a la ecuación

(e)

De aqui resultan, pues, las siguientes expresiones para f (y) y $f_1(x)$:

las que sustituidas en las expresiones que hemos hallado para u y v, conducen a las siguientes:

(g)

Las constantes d, e, g, h pueden ahora determinarse por medio de la ecuación (e) y las tres condiciones de vínculo que son necesarias para impedir que la viga pueda moverse en el plano xy como un cuerpo rígido. Supongamos que el baricentro A de la sección transversal

esté fijo: entonces, u y v son nulas para $x = l$ e $y = 0$, y de las ecuaciones (g) resultaría

$$g = 0, \qquad h = -\frac{Pl^3}{6EI} - dl.$$

La ecuación correspondiente a la elástica se obtiene sustituyendo y por 0 en la segunda de las ecuaciones (g). De esta manera,

(h)

La determinación de la constante d de esta última ecuación exige el empleo de la tercera condición de vínculo, para eliminar la posibilidad de una rotación de la viga en el plano xy, alrededor del punto fijo A. Esta sujeción puede ser realizada de diversas maneras. - Consideremos, en primer lugar, que un elemento del eje de la viga - está fijado en la extremidad A: en este caso, la condición de vínculo se escribe

(k)

En segundo lugar, consideremos el caso en que se fije un elemento - vertical de la sección transversal en el punto A. Entonces, la condición de vínculo es

(l)

Para el primer caso la ecuación (h) permite escribir:

$$d = -\frac{Pl^2}{2EI}$$

y la ecuación (e) nos da

$$e = \frac{Pl^2}{2EI} - \frac{Pc^2}{2IG}$$

Si reemplazamos todas las constantes en las ecuaciones (g), encontraremos

(m)

La ecuación de la elástica de flexión resulta

(n)

la cual da para la flecha correspondiente a la extremidad cargada -

$(x = 0)$, el valor $Pl^3/3EI$, que coincide con el que se deduce habitualmente en los textos elementales de resistencia de materiales.

Se puede poner en evidencia el curvado o traslación longitudinal en las secciones transversales provocada por las tensiones de desgarramiento, mediante la consideración del corrimiento u en la extremidad empotrada $(x = l)$. Las ecuaciones (m) nos dan para dicho plano:

y la figura 25a permite apreciar la forma que adquiere la sección transversal a consecuencia de dicha deformación. Por efecto del esfuerzo tangencial , un elemento situado en el punto A del plano considerado gira un ángulo $\frac{3P}{4cG}$ en el sentido de las agujas de un reloj, alrededor de dicho punto y en el plano xy.

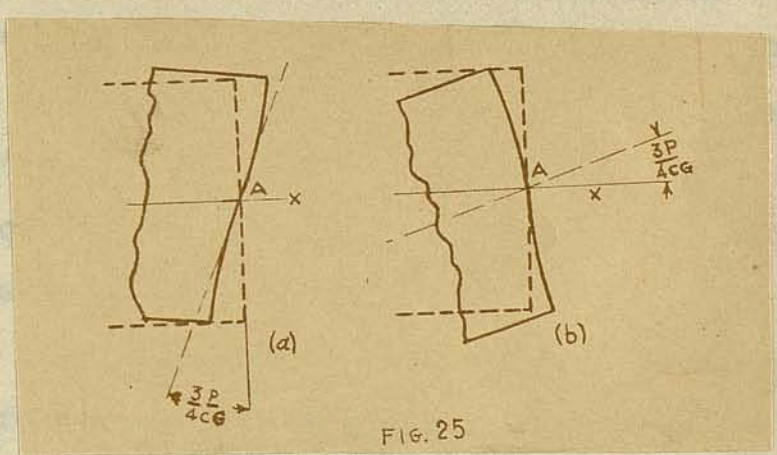


FIG. 25

Si en lugar de fijar un elemento horizontal del eje se considera realizada la fijación de un elemento vertical de la sección transversal, en A (figura 25b), se tendrá, de acuerdo con la condición de vínculo expresada por la ecuación (1) y la primera del grupo (g):

$$e = \frac{Pl^2}{2\,EI}$$

Reemplazando en la ecuación (e), se tiene:

$$d = -\frac{Pl^2}{2\,EI} - \frac{Pc^2}{2\,IG}$$

y por sustitución en la segunda de las ecuaciones (g), encontramos

(r)

Comparada esta ecuación con la (n) se deduce que debido al giro de la extremidad A del eje de la pieza volada (figura 25b) sus deformaciones verticales aumentan en la cantidad

Esta cantidad representa, pues, el llamado efecto de las fuerzas - cortantes en la flexión de la viga (flecha adicional).

En realidad, las condiciones de las extremidades empotradas de - las vigas difieren en lapráctica de las que muestra la figura 25: la sección fija carece en general de libertad de deformación y la distribución de las fuerzas en esa extremidad no concuerda con la - que expresan las ecuaciones (b). A pesar de ello, esa solución resulta satisfactoria cuando se aplica a distancia considerable de las - extremidades de vigas voladas suficientemente largas. En el 41 se estudia con mas detalle la distribución de las tensiones en el empotramiento, asi como la flexión adicional debida al esfuerzo cortante.

18.- Flexión de una viga uniformemente cargada.- Consideremos ahora el caso de una viga de sección rectangular angosta y de ancho - igual a uno, apoyada en sus extremidades, a las que supondremos sujeta a flexión bajo una carga uniformemente repartida, de intensidad q, como indica la fig. 26. Para las caras superior e inferior de la viga, se tienen las condiciones:

Para las extremidades $x = \pm 1$, las condiciones son:

Las dos ultimas ecuaciones del grupo (b) significa que no existe - fuerza longitudinal ni por flector aplicado a las extremidades de la viga. Las condiciones (a) y (b) pueden ser satisfechas combinando - ciertas soluciones de forma polinómica como las obtenidas en el 14. Comencemos aplicando la solución representada por las ecuaciones (g) y que ilustra la figura 23. con el objeto de anular los esfuerzos de tracción a lo largo de la cara $y = c$ y los esfuerzos tangenciales a lo largo de las caras $y = \pm c$, superponemos la compresión simple de la solución (b), 14, y las tensiones

figura 21. De esa manera se llega a las expresiones

(c)

Teniendo en cuenta las condiciones (a), resulta:

y de aqui los coeficientes:

Si llevamos éstos a las ecuaciones (c) y advertimos que $2c^3/3$ es

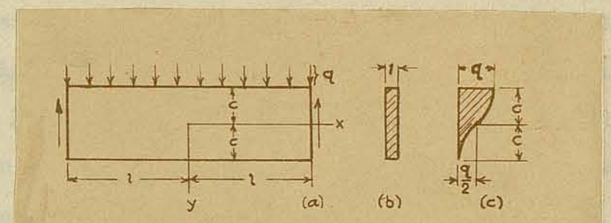


FIG. 26.

igual al momento de inercia I de la sección transversal rectangular de ancho igual a uno, encontraremos:

Puede comprobarse facilmente que estas componentes de la tensión no solamente satisfacen a las condiciones (a) para las caras horizontales sino tambien a las dos primeras del grupo (b), que corresponden a las bases extremas. Con el objeto de que desaparezcan los pares de fuerzas de las extremidades de la viga, se superpone a la solución - (d) una flexión simple, como indica la figura - 20, y mediante la respectiva ecuación de condición, para $x = \pm l$, se determina la constante d_3; esto es:

de la cual :

y finalmente

(29)

Esta expresión se compone de dos términos: el primero no es otra cosa que el esfuerzo tal como resulta de aplicar la teoria elemental de la flexión, mientras que el segundo término constituye la corrección necesaria. Esta corrección, independiente de x, es pequeña en comparación con la máxima tensión normal de flexión, siempre que la luz de la viga sea considerable en relación con su altura, de manera que, en vigas de ese tipo, la teoria elemental de la flexión proporciona un valor suficientemente exacto para las tensiones . Es de señalar que la solución que contiene la expresión (29) es exacta solamente cuando en las extremidades $x = \pm 1$ las fuerzas normales estan distribuidas de acuerdo con la ley

o lo que es lo mismo, que los valores de las fuerzas normales en las extremidades coinciden con los de para $x = \pm 1$, conforme a la ecuación (29). Estas fuerzas tienen como resultantes una fuerza y un par iguales a cero, y por lo tanto, de acerdo con el principio de de Saint-Venant, pueden despreciarse sus efectos sobre las tensiones que corresponden a secciones separadas de los extremos por una distancia considerable, por ejemplo, del orden de la altura de la viga. Por lo tanto, la solución (29) resulta suficientemente exacta en esos puntos para el caso en que las fuerzas $\bar{X}$ no existan.

La discrepancia entre la solución exacta que da la expresión (29) y la solución aproximada que se concreta al primer término de la misma, se debe al hecho de que al desarrollar el cálculo de la solución aproximada se admite que las fibras longitudinales de la viga estan sujetas a tracción simple, mientras que, como lo denota la solución (d), existen entre las fibras esfuerzos de compresión , que obe-

decen a la distribución que muestra la figura 26c y a los cuales corresponde achacar el término correctivo que contiene la ecuación (29).

En cuanto a las tensiones de desgarramiento , la tercera de las ecuaciones (d) proporciona su distribución en una sección transversal de la viga, la cual coincide con la que se obtiene aplicando la teoría elemental.

Los corrimientos u y v se pueden calcular por el método indicado en el § 17. Suponiendo que en el baricentro de la sección transversal media de la viga (x = 0, y = 0), el corrimiento horizontal es nulo y que el vertical sea igual a la flecha de flexión , aplicando las soluciones (d) y (29) se llega a:

La expresión consignada para el valor de u significa que la superficie neutra de la viga no pasa por sux eje, ya que, debido a la tensión de compresión

el eje está sujeto a un esfuerzo de tracción al que corresponde la deformación y de ahí resulta

La ecuación de la linea elástica se obtiene aplicando la expresión de v:

y suponiendo luego que la deformación es nula en las extremidades del eje ($x = \pm l$),

(30)

El factor que precede a la llave es el valor que se obtiene para la flecha aplicando la teoria elemental bajo el supuesto de que las secciones transversales de la viga permanezcan planas durante la flexión. El segundo término dentro de la llave representa la corrección que corresponde al llamado efecto de la fuerza transversal. Derivando dos ve-

ces con respecto a x, la ecuación (f), de la linea elástica, se - obtiene para su curvatura la siguiente expresión:

(31)

que nos permite establecer que la curvatura no es exactamente proporcional al momento flector . El término adicional encerrado por la llave tiene el significado de una corrección que se debe aplicar a la fórmula elemental corriente. Un estudio mas - amplio de la curvatura de las vigas lleva a la conclución de que la correción indicada por el término que incluye la expresión (31)puede emplearse en todos aquellos casos de carga de intensidad variabl en forma continua. En el § 32 se estudiará el efecto de las fuerzas transversal en la deformación de una viga sujeta a flexión bajo una carga concentrada.

Rankine y Grashof calcularon por via elemental el efecto de la fuerza transversal en la curvatura de la linea elástica de las vigas. Considerando como deformación transversal máxima en el eje - neutro de una viga rectangular de ancho unitario, bajo la acción - de una fuerza transversal Q, el valor , el correspondiente incremento de la curvatura está dado por su derivada con respecto a x, o sea . De acuerdo con el cálculo elemental, - se llega a la siguiente expresión para la curvatura corregida:

Se observa que el valor de la corrección asi obtenida es exagerado en comparación con el que dá la expresión (31).

Más exacto resulta emplear en lugar de la deformación transversal máxima un valor medio, al cual se llega mediante la aplicación del método de la energia de deformación (41) y que es igual a $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{Q}{2cG}$.

El término correctivo de la ecuación de la curvatura (31) no puede atribuirse tan solo al esfuerzo de corte, pues deriva del hecho de que las tensiones de compresión, , no estén uniformemente distribuidas segun la altura de la viga, El ensanchamiento lateral - que estas tensiones producen en la dirección x, disminuye de arriba abajo, de manera que se origina una curvatura inversa (de convexi-

dad hacia arriba). Si a esta curvatura se une el efecto de la fuerza transversal, quedará explicado el término correctivo de dicha - ecuación.

19.- Otros casos de flexión de vigas bajo cargas continuas.- Podemos abordar la resolución de diversos casos de flexión de vigas sometidas a cargas distribuidas segun leyes de variación continua, aumentando el grado de los polinomios que representan las soluciones de los problemas del régimen elástico plano.

Adoptando, por ejemplo, como solución un polinomio de sexto grado, combinado con las soluciones obtenidas en el § 14, podremos determinar las - tensiones que origina una presión hidróstática en una estructura vertical empotrada, como el muro de la figura 27, y demostrar que el siguiente sistema de esfuerzos especificos satisface todas las condiciones de equilibrio en sus paramentos:

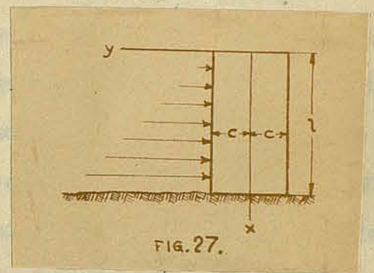


FIG. 27.

En estas expresiones q es el peso especifico del liquido, de manera que la intensidad de la carga a la profundidad x es qx; la fuerza transversal y el momento flexor a la misma profundidad tienen por - expresiones $qx^2/2$ y $qx^3/6$, respectivamente. Puede advertirse que los primeros términos de las expresiones correspondientes a y son los que para estas tensiones resultan de aplicar la teoria elemental.

En el coronamiento de la estructura ($x = 0$), la tensión normal es nula y la tensión tangencial,

Estas fatigas, aunque distintas de cero, son suficientemente - pequeñas en toda la sección y su resultante es nula, así que la condición en ella se aproxima a la de una extremidad libre de fuerzas exteriores.

Para que el peso de la estructura en la distribución de tensiones se agrega en la primera de las ecuaciones (a) el término $-q_1 x$, en la cual q_1 es el peso específico del material de aquella. La solución que así se obtiene ha sido puesta para el calculo de las tensiones en los diques de fábrica, de sección rectangular; pero no satisfacen a las condiciones que corresponde a la sección de asiento del muro. La solución que las ecuaciones (a) representan será exacta cuando en dicha sección las fuerzas actuantes se repartan como las tensiones , dadas por aquellas ecuaciones; pero en los casos reales la base del dique está trabada con la fundación y las condiciones son entonces diferentes de las que esta solución contempla. De acuerdo con el principio de Sant-Venat, se puede admitir que el efecto de dicho vínculo es despreciable del nivel de la misma; pero en el caso de un dique de mampostería no se puede dechar dicho efecto, puesto que generalmente el espesor del muro, 2c, no es pequeño en comparación con la altura l.

Si se adopta para la función de tensión un polinomio de septimo grado, se podrá obtener los esfuerzos que se producen en una viga sujeta a una distribución de cargas que obedezca a una ley parabólica.

CAPITULO III

PROBLEMAS EN COORDENADAS POLARES

21.- Ecuaciones generales.- El empleo de coordenadas polares resulta muy ventajoso para desarrollar el análisis de las tensiones que se presentan en anillos circulares , discos, barras de eje circular y sección rectangular angosta, etc.

En coordenadas polares, la posición de un punto en el plano medio de una placa queda determinada (figura 37) por sus distancia al origen O ó radio vector, r, y la anomalía o ángulo O, que forma el radio vector con un eje fijo, Ox o eje polar, del mismo plano:

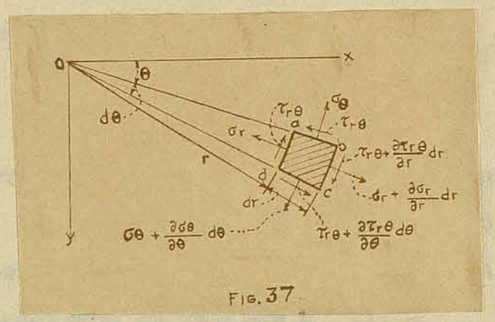


Fig. 37

Vamos a estudiar el equilibrio de un elemento abcd, que supondremos separado de la placa por medio de secciones planas,perpendiculares a la misma, y practicadas segun los radios Oc y Ob, definidos por sus anomalías O y O + dO, y dos superficies cilindricas de generatrices normales al plano de aquella, a la que cortan segun ad y bc y cuyos radios son r y r + dr. Designaremos por y , respectivamente, las componentes de la tensión normal en las direcciones del radio y de la tangente normal al mismo. Para denotar la componente del esfuerzo de desgarramiento emplearemos el simbolo . En la figura 37 se indica el sentido positivo de cada una de las componentes de la tensión.

Si se supone el espesor de placa igual a uno y se admite una repartición uniforme de las tensiones en las caras laterales del elemento considerado, la fuerza normal que actúa en dirección radial sobre la cara ad del elemento será . Tomando en cuenta la variación de la componente la fuerza resultante sobre la cara bc

del elemento, es

Las fuerzas normales que actúan en las caras ab y cd son y dr, respectivamente y su resultante, dirigida radialmente, es igual a , si se desprecian los infinitésimos de orden superior. Las fuerzas cortantes que actúan en las caras ab y cd del elemento tienen por resultante una fuerza de dirección radial igual a

Se supone que tambien existe una fuerza másica de intensidad R por unidad de volumen y recta de acción radial, de manera que la fuerza intrínseca correspondiente al elemento abcd, es Rrdrdθ.

La resultante de las fuerzas de dirección radial está dada por - la ecuación del equilibrio:

La ecuación de equilibrio del elemento, correspondiente a la dirección tangencial, puede obtenerse en forma analoga. Si se desprecian los infinitésimos de orden superior y se simplifica dividiendo por drdθ, las dos ecuaciones se reducen a

(33)

Estas ecuaciones son las que corresponden a las de número (18) 10 , en coordenadas polares. Si no existe fuerza másica alguna, puede emplearse la función de tensión Φ (r,θ) para resolver las ecuaciones (33). Mediante la sustitución correspondiente se demuestra que esas ecuaciones quedan satisfechas tomando los valores siguientes:

(34)

Cuando R es nula, toda función ϕ, de r y θ, sustituida en las ecua-

se obtiene la ecuación de compatibilidad, (a), expresada en coordenadas polares:

Esta ecuación diferencial entre derivadas parciales nos permitirá resolver problemas de elasticidad plana en coordenadas polares, - para diversas condiciones de límite. En lo que sigue, se desarrolla algunos ejemplos de problemas de esa naturaleza.

22.- Distribución axilsimétrica de fatigas.- En el supuesto de que el eje de simetria de los esfuerzos especificos sea perpendicular al plano xy en el punto O, las componentes de la tensión, independientes de , variarán solamente en función der. Se sigue tambien que, por razones de simetria, la tensión tangencial deberá desaparecer y, entonces, las ecuaciones de equilibrio (33) se reducen a la primera, lascual nos da, al eliminar el segundo término:

(36)

Si la fuerza intrínseca R es nula, podemos emplear la función , de tensión, la que, por razones de simetria, dependerá solamente de r, y entonces la ecuación de compatibilidad (35) deviene:

(37)

ecuación diferencial ordinaria que puede transformarse en una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, si se introduce una nueva variable t, que obedezca a la condición $r = e^t$. De esta manera puede obtenerse facilmente la solución general de la ecuación (37), que tendrá cuatro constantes de integración, las que se deberá determinar con arreglo a las condiciones de contorno. Es fácil comprobar por via de sustitución que la solución general es:

(38)

De esta ecuación pueden ser deducidas las soluciones de todos los problemas en que la distribución de tensiones sea simétrica y no existan fuerzas másicas. De las ecuaciones (34) resultan las correspondientes componentes del esfuerzo:

Para que las tensiones en el origen (r= 0) no resulten infinitas, es necesario que en la ecuación anterior las constantes A y B desaparezcan. Resultan pues, que en una placa sin fuerzas másicas y que no presente un agujero coincidente con el origen solo puede existir una distribución de tensión axilsimétrica, a saber, la de

constante; lo que significa que la placa está sujeta a una tracción o a una compresión uniformes en todas las direcciones de su plano.

Si existiera un agujero en el origen, aparecerían, además de la mencionada anteriormente, otras soluciones deducidas de las expresiones (39).

Haciendo, por ejemplo, B igual a cero en dichas ecuaciones, resulta:

(40)

Esta solución se adapta al caso de distribución de tensiones que se origina en un cilindro hueco sometido a presión uniforme interior y exteriormente.

Si denotamos con a y b los radios de las superficies cilíndricas interna y externa, y con p_i y p_o las presiones uniformes respectivas, las condiciones de contorno serán (figura 38):

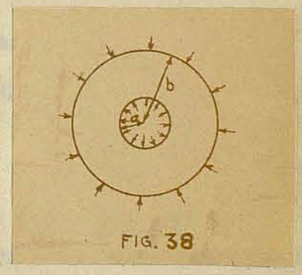


FIG. 38

así que sustituyendo en la primera de las ecuaciones (40) obtendremos las siguientes ecuaciones para determinar A y C:

de las cuales:

Si se reemplaza en las ecuaciones (40) estos valores, resultan

las expresiones

(41)

La deformación que las tensiones dadas por las formulas (41) provocan en un elemento del cilindro separado por dos secciones transversales próximas noimpiden la deformación de los elementos vecinos, lo cual justifica que se haya considerado en el desarrollo - que antecede la existencia de un estado doble de tensión en el elemento de que se trata. En efecto, las ecuaciones (41) evidencian que la suma es independiente de r y, por lo tanto, constante en todo el espesor de la pared, de donde resulta que dichas tensiones producen un alargamiento o acortamiento uniforme en la dirección del eje del cilindro, cuyas secciones rectas permanecen planas.

En el caso particular de que la presión exterior p_e no exista, las ecuaciones (41) se transforman en

(42)

Resulta de éstas, que es siempre una compresión y ,un esfuerzo tractor, que alcanza su máximo en la superficie interior - del cilindro, en la cual

(43)

La tensión ( ) máx. es siempre mayor en valor absoluto que la presión interior, a la cual tiende al aumentar b, de manera que nunca puede ser inferior a p_i por mucho material que se agregue exteriormente.

En los textos elementales de resistencia de materiales se hace aplicación de las ecuaciones (42) y (43) para el proyecto de máquinas.

El caso correspondiente a un cilindro agujereado excéntricamente ha sido tratado por G. B. Jeffery. Llamando a al radio del agujero b al de la superficie cilíndrica exterior y e a la distancia entre los ejes de ambos, la máxima tensión que se origina cuando el ci-

lindro está sometido a la presión interior p_i es la que corresponde al punto de la superficie interior en que es mínimo el espesor, si e < 1/2 a, y equivale al esfuerzo anular en dicho punto, esto es:

Si e = 0, este valor resulta igual al que da la ecuación (43).

23.- Flexión simple de barras de eje curvilíneo.- Sea una barra de eje circular y sección rectangular angosta y constante, flexada

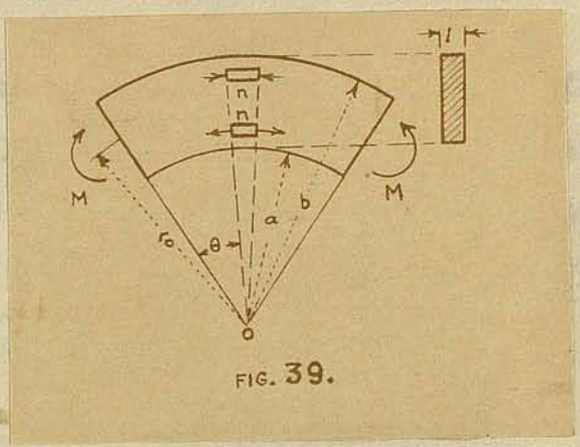


FIG. 39.

en el plano de curvatura por acción de los pares de fuerzas M, aplicados en sus extremidades (figura 39). El momento flector es en este caso constante a todo lo largo del prisma y resulta natural suponer que la distribución de tensiones sea la misma en todas las secciones transversales de dirección radial; por lo tanto, se puede aplicar la formula (38) para resolver el problema. Si llamamos b y a a los radios de las superficies límites convexa y cóncava, respectivamente, y consideramos el ancho de la sección transversal rectangular igual a uno, las condiciones de contorno son

La ecuación (1) significa que sobre los bordes curvos que limitan la barra no actúan fuerza normal alguna; la condición (2) expresa que las tensiones normales en las extremidades dan origen tan solo al par de fuerzas M, y la relación (3) indica que no hay fuerzas tangenciales aplicadas al contorno de la pieza. Utilizando la primera de las ecuaciones (39), conjuntamente con las condiciones de limite expresadas por las relaciones (a), se llega a

(b)

La condición (2) del grupo de fórmulas (a) nos conduce a:

(c)

y reemplazando la función $\bar{\Phi}$ por sus expresión (38), encontramos:

Por comparación de esta última con (b) es fácil ver que (c) queda satisfecha, y las fuerzas aplicadas a las extremidades pueden reducirse a un par de fuerzas con tal que las condiciones expresadas - por (b) queden cumplidas. Para que el par flector sea igual a M, es necesario que se cumpla la condición

Ahora bien

y como de la ecuación (c) resulta

la fórmula (d) nos dará

o bien, reemplazando el valor de $\bar{\Phi}$ que da la expresión (38) se - llegará a

Con esta ecuación y las dos señaladas con la letra (b) quedan completamente determinadas las constantes A, B, C, Resolviéndolas, se tiene

En las expresiones anteriores se ha introducido, para simplificar, el símbolo

(g)

Sustituyendo los valores de las constantes A, B y C que dan las formulas (f) en las expresiones de las componentes de la tensión (39) resulta:

(44)

Estas fórmulas de la distribución de las tensiones, que satisfacen todas las condiciones de límite (a) para la flexión simple, representan la solución exacta del problema, con tal que la distribución de esfuerzos normales en las extremidades sea la que expresa la segunda ecuación del grupo (44). Si las fuerzas que originan el par flector M obedecen a otra distribución en las extremidades de la barra, las tensiones en dichas extremidades no serán las que dan las formulas (44) ; pero, de acuerdo con el principio de de Saint-Venant, las diferencias son muy pequeñas y se pueden despreciar a suficiente distancia de los extremos, cual sería una del orden de la altura de la barra, por ejemplo.

Resulta de interés práctico comparar la solución que dan las formulas (44) con las que generalmente se consigna en los libros de resistencia de materiales. Si la altura de la barra, b-a, es pequeña en comparación con el radio de su eje: (b + a) /2, se adopta generalmente la distribución de tensiones que corresponde a barras de eje rectilíneo. Si la altura de la barra no es pequeña, se suele aceptar en la práctica que sus secciones transversales permanecen planas durante la flexión, de donde resulta que la distribución de las tensiones normales en las secciones transversales sigue una ley hipérbólica. En todos los casos se puede representar los valores máximos y mínimo de la tensión por una expresión de la forma

(h)

La tabla siguiente nos da los valores numéricos del factor m calculados por los dos métodos elementales mencionados, y por la fórmula exacta (44).

Valores del coeficiente m de la ecuación (h)

$\frac{b}{a}$	Ley lineal de distribución de tensiones	Ley hiperbólica de distribución de tensiones.	Solución exacta
1,3	+ 66,67	+ 72,98; - 61,27	+ 73,05; - 61,35
2	∓ 6,000	+ 7,725; - 4,863	+ 7,755; - 4,917
3	∓ 1,500	+ 2,285; - 1,095	+ 2,292; - 1,130

Los valores consignados en esta tabla indican que la solución elemental basada en la hipótesis de la conservación de las secciones

planas despues de la deformación conduce a resultados muy exactos.

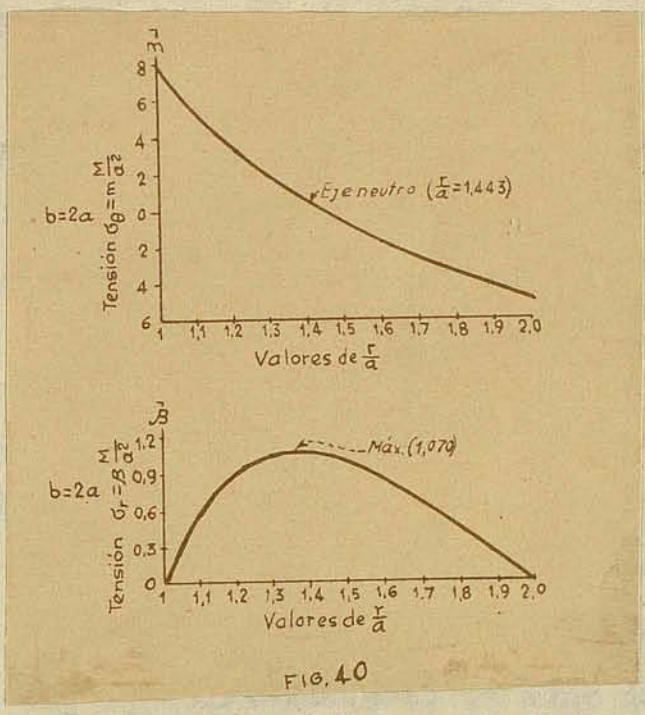


FIG. 40

Veremos mas adelante que en el caso de la flexión simple dicha hipótesis se cumple en realidad y que la discrepancia entre las soluciones elemental y exacta proviene del hecho de que en la primera se desprecia la componente de la tensión y se acepta que las fibras longitudinales de la barra flexada estan sujetas a extensión o compresión simples.

La primera de las ecuaciones (44) nos dice que la tensión es siempre positiva cuando la flexión tiene el sentido que indica la figura 39. La misma conclusión surge inmediatamente teniendo en cuenta el sentido de las tensiones que actúan en los elemntos n - m, indicados en la figura 39. Las resultantes de los correspondientes esfuerzos tangenciales son de dirección radial y tienden a separar las fibras longitudinales y a provocar tensiones de tracción en esa dirección; éstas aumentan al aproximarse a la capa neutra y alcanzan su máximo en proximidad de la misma. Este máximo es simmpre muchommenor que ( )máx. Por ejemplo, para b/a = 1,3 ( )máx. = 0,060 ( )máx.; para b/a = 2, ( )máx.= 0,138 ( )máx.; para b/a = 3, ( )máx. = 0,193 ( )máx. La figura 40, en la cual se representa graficamente la distribución de y para b/a = 2, nos hace ver la desviación que con respecto al eje neutro y hacia el centro de curvatura experimenta el punto en que aparece la máxima tensión.

24.- Las componentes de la deformación expresadas en coordenadas polares.- Para estudiar los corrimientos en coordenadas polares, designemos por u y v las componentes de los trayectos, en las direcciones radial y tangencial, respectivamente. Si u es el corrimiento radial que sufre la cara ad del elemento abcd (figura 37), el corrimiento radial de la cara bc será y, por lo tanto, el alargamiento especifico del elemento abcd en dirección del radio, es

(45)

Debe observarse, con respecto a la deformación en dirección de la tangente, que ella, depende no solamente del corrimiento v sino tambien del que se produce en dirección radial o sea u. Suponiendo, - por ejemplo que los puntos a y d del elemento abcd (figura 37) experimenten tan solo el corrimiento u, el arco ad alcanzará el valor (r + u)d y la deformación en dirección de la tangente resultará, entonces:

Los corrimientos de dirección tangencial de las caras ab y cd del elemento abcd diferirán en y, correlativamente, la deformación tangencial debida al corrimiento v será igual a dv/rd. La deformación tangencial total es, pues:

(46)

Para determinar la distorsión del elemento considerado, supongamos sea a'b'c'd' la posición del mismo despues de la deformación (figura 41). El ángulo que forman las direcciones ad y a'd' a causa del corrimiento en dirección radial u es igual a y, analo-

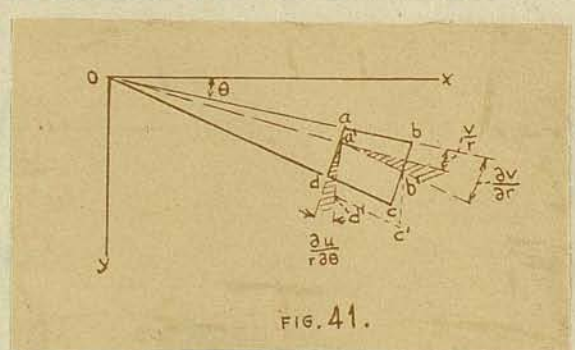


FIG. 41.

gamente, el angulo que forman a'b' y ab es igual a . Debe notarse que tan solo la parte de este angulo sombreada en la figura contribuye a la deformación transversal, ya que la otra parte, igual a v/r, representa el deslizamiento angular debido a la rotación del

elemento abcd como cuerpo rígido alrededor del eje que pasa por O. La variación total que experimenta el ángulo dab, o sea la distorsión, resultará, por lo tanto,

(47)

Las expresiones de la Ley de Hooke son para el caso, y en el supuesto de que se trate de un estado plano de tensión, que entraña la inexistencia de fatigas , de dirección normal al plano de la placa:

(48)

Reemplazando en ellas las componentes de la deformación, dadas por (45), (46) y (47), obtendremos ecuaciones en números suficientes para determinar u y v.

25.-Distribución simétrica de fatigas: corrimientos.- Si sustituimos en la primera de las ecuaciones (48) las componentes de la tensión que dan las formulas (39) y, puesto que ,tendremos:

La integración de esta ecuación nos da:

(a)

en la cual f ( ) es función de unicamente. De la segunda de las ecuaciones (48) obtenemos mediante la formula (46):

de cuya integración resulta

(b)

en la cual, f_1 (r) es función de r solamente. Si reemplazamos los valores que dan las ecuaciones (a) y (b) en la ecuación (47) y tenemos presente que vale cero, desde que lo es encontraremos

de la cual

(c)

En esta expresión F, H y K son constantes que deben ser determinadas con arreglo a las condiciones que limiten la movilidad en la -

barra curva o anillo. Reemplazando los valores que dan las ecuaciones (c) en (a) y (b) se obtiene las siguientes expresiones para los corrimientos:

(49)

Los valores de las constantes A, B y C varian para cada caso particular. Sea, por ejemplo, el caso de la flexión simple. Si suponemos rigidamente fijados el baricentro de la sección transversal adoptada como origen para la medición para los ángulos (figura 39) y un elemento del radio correspondiente, las condiciones de vínculo serán

(d)

Si llevamos estos valores a las expresiones (49) obtendremos para el cáculo de las constantes de integración F, H y K las siguientes ecuaciones:

De aqui se sigue que F = H = 0, y para el corrimiento v se obtiene

(50)

Esto significa que el corrimiento de una sección transversal consiste en una traslación, -K sen , igual para todos sus puntos y además un giro de su plano igual a 4B /E, efectuado alrededor del centro de curvatura 0 (figura 39). Como vemos, las secciones transversales permanecen planas en el caso de la flexión simple, tal como se supone corrientemente en la teoria elemental de la flexión de barras curvas.

Obtenidas las expresiones (49) de los corrimientos, veamos el significado de la suposición formulada en el 22, cuando hicimos igual a cero la constante B de las ecuaciones (39) que dan la solución general del caso de la distribución simétrica de tensiones en una sección anular completa, con la que llegamos a una solución del problema de Lamé. La contribución de B al corrimiento v, es el término -

4Br /E. Este término no es uniforme, o sea que admite mas de un valor, desde que si aumenta en 2 ,llegamos a un mismo punto despues de dar una vuelta completa al anillo. Ahora bien, una expresión multiforme para un corrimiento, admisible para un sector de corona circular, es fisicamente absurdo en el caso de un anillo completo, y por lo tanto se debe tomar B = 0 en la solución general (39).

El anillo completo o corona circular es un ejemplo de un cuerpo o campo multiplmente conexo, ya que puede ser cortado en diversos lugares transversalmente sin que quede dividido en dos partes. Al determinar las tensiones en cuerpos de ese genero, llegamos general mente a la conclusión de que las condiciones de limite referentes a las fatigas no bastan para establecer la distribución de tensiones y por lo tanto deben tomarse en cuenta ecuaciones adicionales que expresen las condiciones para que el valor de los corrimientos sea único (véase 35).

Podemos explicar el significado físico de las soluciones multiformes considerando las tensiones inciales posibles en un cuerpo pluralmente conexo. Si mediante dos cortes que sigan secciones radiales adyacentes retiramos un sector del anillo (figura 42) y unimos luego los bordes por soldadura u otro medio , se ontiene un anillo con tensiones iniciales, lo que quiere decir que sin la presencia de fuerzas exteriores existen esfuerzos en el anillo. Si es el ángulo en el centro, muy pequeño, que forman las secciónes radiales de corte, para reunir las extremidades planas del anillo será necesario realizar un corrimiento tangencial

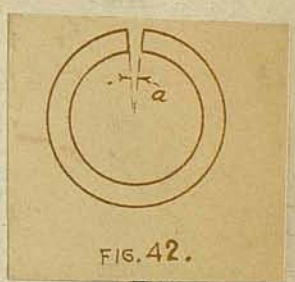


FIG. 42.

(e)

El mismo corrimiento, obtenido para el valor = 2 en la ecuación (50), será:

(f)

Las dos expresiones anteriores nos permiten obtener:

(g)

La constante B que figura en el término multiforme de la fórmula (50) tiene ahora un valor definido, que depender'a de los medios que se haya empleado para provocar en el anillo las tensiones ini-

ciales. Reemplazando (g) en las ecuaciones (f) del 23, obtendremos la expresión que corresponde al momento flector que es necesario introducir para volver a unir las extremidades del anillo de la figura 42, a saber:

(h)

Conociendo el momento flector, las tensiones iniciales en el anillo se puede calcular utilizando la ecuación (44), que corresponde a la flexión simple.

26.- Discos giratorios.- El conocimiento de la repartición de las tensiones en los discos circulares giratorios es de gran importancia práctica. Si el espesor del disco es pequeño en relación con su radio , se podrá desechar la variación de las tensiones radiales y anulares, de punto a punto del espesor, y el problema admite entonces una solución fácil. En el caso de un espesor constante se puede aplicar la ecuación (36) y, despreciando el peso del disco, solamente sería necesario considerar como fuerza másica la fuerza de inercia. Si designamos con la masa especifica del material del disco y con la velocidad angular del cuerpo,

(a)

y entonces la ecuación (36) toma la forma

(b)

Esta ecuación quedará satisfecha si deducimos las componentes del esfuerzo, de una función de tensión, F, del siguiente modo:

(c)

Para el caso en que exista simetría, las componentes de la deformación, de acuerdo con las ecuaciones (45) y (46), serán

Eliminando u entre estas ecuaciones, se llega a

(d)

Utilizando las expresiones (48) de las componentes de la deformación elástica en función de los esfuerzos, y las ecuaciones (c), se demuestra que la función de tensión F deberá satisfacer a la siguiente ecuación

(e)

Se verifica por sustitución que la solución general de esta ecua-

ción es:

(f)

y mediante las ecuaciones (c) se llega a

(g)

Las constantes de integración C y C_1 se determinan mediante las - condiciones de límite.

Si se trata de un disco lleno debemossponer $C_1 = 0$, pues de otra manera las tensiones dadas por las formulas (g) serian de valor infinito en el centro. En cuanto a la constante C, se determina teniendo en cuenta la condición que corresponde a la periferia del disco ($r = b$). Si en ésta no existen fuerzas aplicadas tendremos.

y de aqui

Las componentes de la tensión resultan de las fórmulas (g):

(51)

Las tensiones alcanzan su máximo en el centro del disco; alli valen:

(52)

Cuando el disco tiene un agujero circular de radio a en su centro las constantes de integración de las ecuaciones (g) se obtienen teniendo en cuenta las condiciones de limite que corresponden a los bordes interno y externo. Si no obra fuerza exterior alguna en ellos se tendrá

(h)

de donde resulta

Por sustitución en las ecuaciones (g),

(53)

La tensión radial máxima se obtiene para $r = \sqrt{ab}$, donde

(54)

La máxima tensión segun la tangente corresponde al borde interno del disco, y vale

(55)

Como puede verse, este valor de la tensión es mayor que ( )máx. Si el radio a del agujero circular disminuye tendiendo a cero, la tensión máxima de dirección tangencial tiende a un valor doble del que corresponde a un disco lleno (52), lo que significa que las tensiones máximas se duplican al practicar un pequeño agujero circular en el centro de un disco giratorio. Más adelante (28) se considera este fenómeno, llamado de concentración (o acumulación) de tensiones de tensiones en correspondencia de un orificio.

El método de cálculo que hemos desarrollado para el caso de los discos de espesor constante puede extenderse tambien a los discos de espesor variable, en el supuesto de que no haya variación de tensiones en todo su grosor. Si llamamos h al espesor del disco, variable con el radio r, la ecuación de equilibrio de un elemento como el que está representado en la figura 37 será

(k)

Esta ecuación queda satisfecha haciendo

donde F es nuevamente una función de tensión.

Si sustituimos estas expresiones de las tensiones en la ecuación de compatibilidad (d), llegaremos a la siguiente ecuación para la función de tensión F:

El problema de determinar la repartición de las fatigas en un disco de espesor variable, queda asi reducido a la solución de la ecuación (l). En el caso particular en el cual la variación del espesor esté representada por la ecuación

(n)

en la que C es una constante y n un número cualquiera, la integración de la ecuación (l) puede hacerse facilmente. La solución general tiene la forma

en la cual

en tanto que a y son las raices de la ecuación de segundo grado

y las cantidades A y B, las constantes de integración que se determinan mediante las condiciones de contorno.

Los casos reales de discos giratorios de diversas formas pueden ser resueltos con suficiente aproximación dividiendolos en parte y tratando de ajustar a cada una de llas una curva del tipo (m).

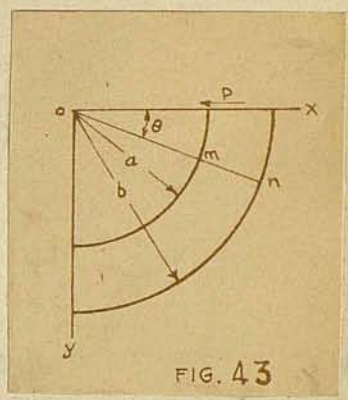


FIG. 43

Diversos autores que han estudiado el caso del disco cónico, calculan dividiendolos en partes y considerando a cada una de ellas como un disco de espesor uniforme.

27.-Flexión de una ménsula curva, cargada en su extremo libre.- Trataremos en primer lugar un caso sencillo: el de una barra de sección rectangular angosta y directriz circular, empotrada en su extremidad inferior y flexada por la acción de una fuerza P que se aplica en dirección del radio correspondiente a su base libre, superior (figura 43). El momento flextor en una sección transversal mn es proporcional a sen y, de acuerdo con la teoria elemental de la flexión de barras curvas, la tensión normal es proporcional al momento flector, de manera que si esto es válido tambien para la solución exacta, suposición que los resultados justifican, la segunda de las ecuaciones (34) nos permite establecer que la función de tensión que satisface a la ecuación

(a)

deberá ser proporcional a sen . Haciendo entonces,

$$\Phi = f(r) \operatorname{sen} \theta, \qquad (b)$$

y sustituyendo en la ecuación (a), encontramos que f (r) debe satisfacer a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

(c)

Esta ecuación puede ser transformada en una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes (véase 22) y su solución general es:

(d)

en la cual A, B, C y D son constantes de integración que se determinan de acuerdo con las condiciones de contorno. Si sustituimos en la ecuación (b) la solución dada por la expresión (d) y utilizamos las fórmulas generales (34) llegaremos a las siguientes expresiones de las componentes de la tensión:

(56)

Se ha supuesto que los bordes exterior e interior de la barra curvada (figura 43) estan libres de fuerzas exteriores, y tal condición exige:

$$= \quad = 0 , \quad \text{para} \quad r = a \ \text{y} \quad r = b,$$

o sea, que de acuerdo con las ecuaciones (56),

(e)

Con arreglo a la ultima condición, la suma de los esfuerzos tangenciales distribuidos en la base libre de la barra equilibran a la fuerza P. Considerando el ancho de la sección transversal igual a uno - o bien a P como carga por unidad de espesor de la placa - obtendremos para $\theta = 0$:

o bien

(f)

De las ecuaciones (e) y (f) resulta

(g)

en las cuales

Sustituyendo en las ecuaciones (56) los valores de las constantes de integración dados en (g), se llega a las expresiones de las componentes de la tensión. Para la extremidad superior de la barra, $\theta = 0$, encontramos

(h)

Para la extremidad inferior, = /2,

(k)

Las expresiones (56) constituyen la solución exacta del problema - unicamente para el caso en que la distribución de esfuerzos en las extremidades de la barra curva sea la que expresan las ecuaciones (h) y (k). Cualesquiera otras distribuciones originarán en las vecindades de los extremos unas tensiones diferentes de las que nos da la solución (56); pero de conformidad con el principio de de - Saint-Venant, dicha solución tendrá validez a cierta distancia. Los cálculos demuestran que la teoria simplificada, que se basa en el supuesto de la conservación de las secciones planas durante la flexión, da aquí tambien resultados satisfactorios.

La figura 44 muestra la distribución de las tensiones tangenciales a lo largo de la sección transversal = 0 para los casos b= 3a 2a y 1,3a. En esta gráfica las abscisas representan las distancias al borde interior (r = a), medidas segun un radio; y las ordenadas los coeficientes que es necesario aplicar a la tensión media de corte P/(b-a) para obtener la tensión de corte correspondiente al punto considerado. El valor 1,5 de ese factor nos da la tensión tangencial máxima calculada de acuerdo con una distribución parabólica, para - vigas rectilineas de sección rectangular. Segun evidencia la figura, la distribución de las tensiones de corte se aproxima a la ley parab'olica cuando la altura de la sección transversal es pequeña. En estructuras de arcos y bóvedas de proporciones usuales, puede aceptarse como suficientemente exacta la distribución parabólica de las - tensiones tangenciales que corresponde a las barras rectilineas de sección rectangular.

Consideremos ahora los corrimientos que provoca la fuerza P (figura 43). Empleando las ecuaciones (45) a (48) y sustituyendo en - ellas los valores de las componentes de la tensión dados por las - expresiones (56), encontramos

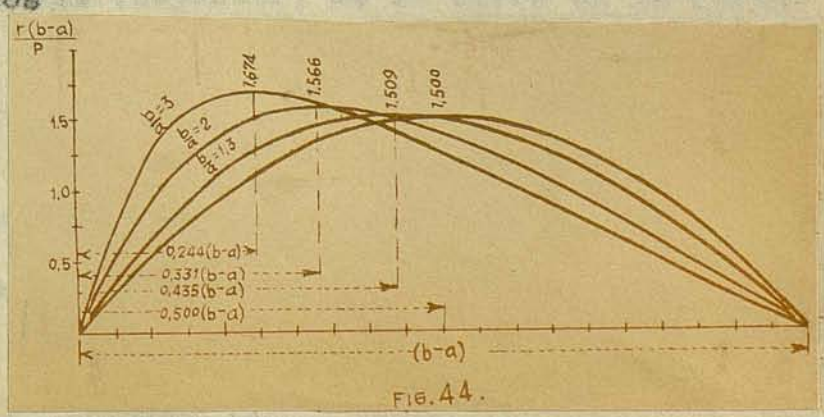


FIG. 44.

(l)

Por integración de la primera de estas ecuaciones llegamos a

(m)

donde f ( ) es una función de únicamente. Si en la segunda de las ecuaciones (l) reemplazamos el valor de r que nos da (m), así como el de e integramos, llegaremos a:

(n)

en la cual, F(r) es una función de r únicamente. Sustituyendo ahora (m) y (n) en la tercera de las ecuaciones (l), obtendremos la ecuación

Esta ecuación queda satisfecha poniendo

(p)

en las cuales H, K y L son constantes arbitrarias que deben determinarse de conformidad con las ecuaciones que interpreten las condiciones de vínculo.

De las ecuaciones (m) y (n) resultan, pues, para las componentes de los corrimientos:

(q)

El corrimiento de la base libre (superior) de la barra en la dirección del radio, se obtiene reemplazando por 0 en la expresión que dá la componente u, con lo cual

(r)

Por lo que respecta a la constante L, su valor resulta de la condición correspondiente al empotramiento (figura 43). Para = /2 tene

mos v = 0 y = 0, y por lo tanto resulta de la segunda de las ecuaciones (e)

(s)

Finalmente y teniendo en cuenta la relación (g) se obtiene como - flecha de flexión para la base libre:

(57)

Mas adelante se dan algunas aplicaciones de esta formula. Cuando b tiende al valor a y, en consecuencia, la altura de la barra curva, h = b - a, es pequeña en comparación con a, podremos usar la expresión.

Reemplazando en (57) y despreciando los términos de grado superior al tercero, obtendremos

Fórmula concordante con la que da la teoria elemental para el caso de que se trata.

Dando a la función de tensión Φ la forma

$$\Phi = f(r) \cos \theta,$$

y procediendo en la forma análoga, se obtiene la solución correspondiente al caso de una fuerza vertical y un par de fuerzas, aplicados a la sección terminal superior de la barra (figura 43). Si de la expresión de dicha solución restamos las tensiones originadas - por el par (ver § 23), nos quedará el valor de los esfuerzos producidos por una fuerza vertical aplicada a la extremidad libre de la pieza. Si obra en esta una fuerza de dirección oblicua, la solución se obtiene utilizando las que corresponden a una carha vertical y otra horizontal, por aplicación del principio de superposición.

En lo que antecede se ha supuesto siempre que las ecuaciones (e) quedan satisfechas y que los bordes cilindricos de la barra no estan sujetos a la acción de fuerza alguna. Si se adopta para las - expresiones (e) valores diferentes de cero resulta el caso en que - sobre los bordes cuvilineos se distribuyen fuerzas normales y tangenciales proporcionales a sen θ y cós θ. Mediante la combinación de las respectivas soluciones con las que se han obtenido para la flexión simple y la flexión producida por una fuerza aplicada en

una sección terminal, nos podemos aproximar a las condiciones de carga que corresponde a una bóveda cubierta de arena o de tierra.

28.-Influencia de orificios circulares sobre la repartición de esfuerzos en las placas.- Sea una placa sometida a tracción uniforme de magnitud S y de dirección x (figura 45). Si se practica un pequeño agujero circular en el centro de la placa, la distribución de las tensiones en la vecindad del taladro será alterada; pero, de acuerdo con el principio de de Saint-Venant, la modificación será despreciable en aquellos lugares cuyas distancias sean grandes comparadas con el radio a del orificio.

Consideremos, pues, la zona de la placa limitada por una circunferencia concéntrica del orificio y cuyo radio, b, sea grande, com-

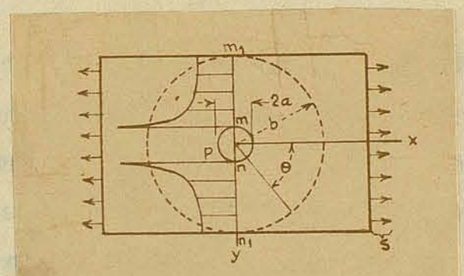


FIG. 45.

parado con a. Las tensiones a la distancia b serán realmente las - que en la placa sin orificio origina el estado de carga supuesto y, por lo tanto, estarán dadas por

(a)

Estos esfuerzos, al actuar en la periferia del anillo de radio exterior r = b e interior r = a, provocarán en su interior tensiones que podemos considerar compuestas de dos partes. La primera se debe a la componente constante, 1/2S, de las fuerzas normales, y - las tensiones que produce pueden calcularse por medio de las ecuaciones (41), § 22. La otra parte se compone de las fuerzas normales 1/2S cos 2 ϕ y las fuerzas de corte -1/2S sen 2 ϕ, y engendra esfuerzos que pueden ser deducidos de una función de tensión de la forma

$$\Phi = f(r) \cos 2\phi \qquad (b)$$

Sustituida ésta en la ecuación de compatibilidad,

se llega a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

cuya integral general es:

La función de tensión resulta entonces:

(c)

y las correspondientes componentes del esfuerzo serán, de acuerdo con las ecuaciones (34):

(d)

Las constantes de integración deberán determinarse en este caso con arreglo a las condiciones (8) que rigen para el contorno exterior, asi como tambien a la que establece que el borde del agujero está - libre de fuerzas exteriores. Esas condiciones nos darán por resultado las expresiones siguientes:

Resueltas estas ecuaciones y en el supuesto de a/b = 0, lo que significa una placa infinitamente extensa, obtendremos:

(e)

Sustituidos en las ecuaciones (d) estos valores de las constantes, y agregando las fatigas que estan originadas por la tracción uniforme 1/2S en el contorno exterior, calculadas con arreglo a las ecuaciones (41), se tiene:

Los valores y se aproximan a los que dan las ecuaciones (a)

cuando r es muy grande.

En el contorno del orificio, r = a, y entonces,

Como puede verse, es máximo para = /2 o = 3 /2, esto es, en las extremidades m y n del diámetro perpendicular a la dirección de la fuerza de tracción (figura 45). En estos puntos, = 3S, valor máximo de la tensión de tracción, que equivale, según se ve, al triple de la tensión uniforme aplicada a las extremidades de la placa.

Para los puntos p y q, siendo igual a y a 0, respectivamente, econtramos:

$$= - S,$$

o lo que es lo mismo, en estos puntos existe una tensión de compresión de dirección tangencial.

Para la sección transversal de la placa que pasa por el centro, del agujero circular y es perpendicular al eje de las x, = /2, y en ese caso las ecuaciones (58) nos dan:

El efecto del agujero es, evidentemente, de caracter muy localizado y la tensión tiende muy rapidamente al valor S, con el aumento de r. En la figura 45 la distribución de estas tensiones está indicada por el rayado. El caracter localizado de las tensiones que se originan alrededor del orificio justifica la aplicación de la solución (e), deducida para una placa infinitamente extensa, al caso de una de ancho finito. Si el ancho de la placa no baja de cuatro veces el diámetro del agujero, el error que resulta de aplicar las fórmulas (58) al cálculo de ( )máx. no excede de 6 por ciento.

La considerable concentración de tensiones en el contorno de un agujero circular tiene gran importancia práctica. El caso de las aberturas practicadas en los puentes de los barcos puede citarse -

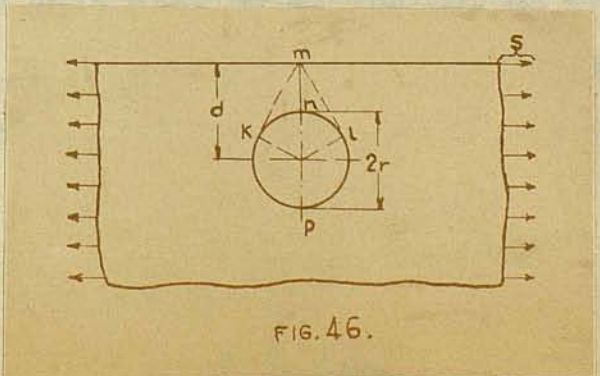


FIG. 46.

como ejemplo, pues su presencia da origen a altas concentraciones - de las tensiones de tracción o compresión que experimenta el puente cuando el casco trabaja a la flexión; las olas al chocar repetidamente, originan ciclos de tensiones que pueden determinar, en los lugares fuertemente solicitados, grietas de las llamadas de fatiga. Si se quiere eliminar las tensiones elevadas en el contorno del agujero, se lo puede reforzar con un talón.

G.B. Jeffery ha estudiado el caso en que exista un agujero circular en proximidad del borde limitante de una placa plana semiindefinida sujeta a una tracción (figura 46). Si designamos con S la tracción uniforme paralela al borde rectilíneo de la placa, con d a la distancia a dicho borde del centro del agujero, y con r al radio de éste, los valores de la tensión máxima en n, asi como las que corresponden a los puntos m y p, para diversas relaciones d/r estan consignados en la siguiente tabla.

Puntos	$\frac{d}{r}$					
	1,34	1,54	1,81	2,15	2,58	3,11
m	-1,96S	-0,895S	-0,269S	0,134S	0,405S	0,591S
n	4,37S	3,92S	3,61S	3,40S	3,25S	3,16S
p	3,27S	3,20S	3,15S	3,12S	3,09S	3,07S

Como puede observarse, a medida que aumenta la distancia del agujero al borde rectilíneo de la placa, las tensiones en los puntos n y p se aproximan al valor 3S, que corresponde al caso de un agujero muy distante de sus bordes, segun ya vimos.

El caso de unapresión normal uniforme, p_i, sobre el contorno del orificio constituye un problema de interés práctico, el cual ha sido tambien estudiado por G.B. Jeffery. Su solución permite hallar - las tensiones que se producen en la vecindad de un agujero para remache al introducir bajo presión el roblón, en estado plástico por acci'on del calor. Si el agujero está lejos del borde rectilíneo, la tensión en suncontorno resulta, con arreglo a las ecuaciones (42) (§ 22):

Cuando el taladro está próximo al borde rectilíneo, las tensiones tangenciales dejan de ser constantes en el contorno del agujero, y su valor máximo, en los puntos k y l, está dado por la fórmula

(59)

Comparemos este valor con el de la tensión de tracción que se produce en el punto m del borde de la placa y que está dado por la fórmula

(60)

Para $d = r\sqrt{3}$, las dos expresiones dan el mismo valor. Si $d > r\sqrt{3}$, la tensión máxima se produce en el borde del agujero, y si es menor, la tensión máxima corresponde al punto m.

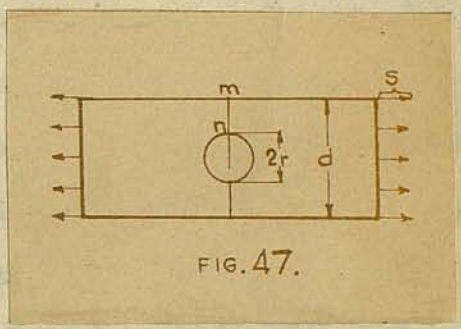


FIG. 47.

R. C. J. Howland ha estudiado el caso de un agujero circular practicado en el eje de simetría de una placa de ancho finito (figura 47). Para $2r = 1/2d$, por ejemplo dicho autor encontró $= 4{,}3S$ en el punto n y $= 0{,}75S$ en el punto m.

Una vez conocida la solución (d) correspondiente a la tracción o compresión monoaxiles, se puede obtener fácilmente la solución del caso en que actúen fuerzas simultáneamente en dos direcciones perpendiculares. Para ello, se procede por superposición. Si se trata, por ejemplo, de tensiones de tracción iguales a S aplicadas en dos direcciones normales, se encuentra en el contorno del agujero una tensión positiva $= 2S$ (§ 26, p.82).

Si se combina una tracción S en la dirección x (figura 48) con una compresión -S en la dirección y, resulta un caso de resbalamiento simple; las ecuaciones (58) nos dan para el caso los valores de las fatigas anulares en los bordes del agujero, a saber:

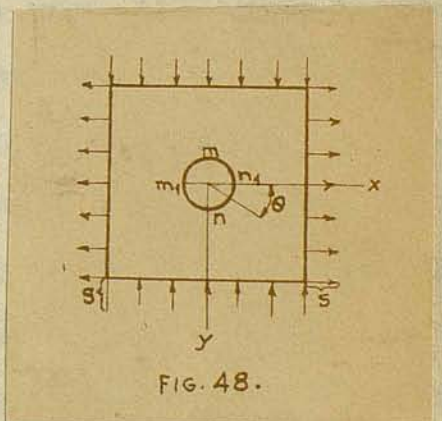


FIG. 48.

En los puntos n y m, esto es, para $\theta = \pi/2$ ó $\theta = 3\pi/2$, resulta $= 4S$. En n_1 y m_1, o sea, para $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$, se tiene $= -4S$. Por lo tanto, en una placa de dimensiones considerables sujeta a desgarramiento simple, la máxima tensión de dirección tangencial en los bor-

des del orificio es el cuádruple de la tensión de resbalamiento - simple aplicada a la placa.

El método que se ha desarrollado en lo que antecede para calcular las tensiones que se originan en torno a un pequeño orificio - circular se puede aplicar tambien cuando la placa está sujeta a una flexión simple. Por medio de un exténsímetro muy sensible, E. Preuss ha podido comprobar experimentalmente la teoría, yatambien puede - efectuarse su comprobación por métodos ópticos utilizando modelos - transparentes y luz polarizada. C. Weber, por su parte, ha investigado el caso de una placa con dos perforaciones circulares iguales y M. Sadowsky ha tratado el/de una hilera de agujeros circulares. El caso de una placa de extensión indefinida con un orificio circular a cuyo contorno se aplican fuerzas exteriores ha sido estudiado por W. G. Bickley, en tanto que G. Kolosoff, C.E. Inglis y T. Pöschl se han ocupado en la solución del caso en que el agujero es eliptico. Si uno de sus ejes principales coincide con la dirección del esfuerzo S, en las extremidades del eje del oricio perpendicular al primero, el valor de la tensión está dado por

(61)

en la cual 2a es el eje de la elipse de dirección perpendicular a la tensión y 2b, el otro eje (véase § 50). Si a = b, el resultado obtenido corresponde al caso del agujero circular. Si a supera mucho a b, la máxima tensión en el borde del agujero eliptico resulta muy grande. Un agujero muy angosto cuya dimensión predominante sea perpendicular a la dirección de la tensión, provoca una alta concentración de tensiones, lo que explica por qué las grietas perpendiculares a la dirección de las fuerzas aplicadas tienden a extenderse. La propagación de las grietas puede ser detenida mediante taladros practicados en sus extremidades, porque asi se elimina la pronunciada curvatura que origina la concentración de los esfuerzos.

29.- Fuerza concentrada en un punto del borde rectilíneo.- Estudiemos ahora el caso de una fuerza concentrada P, aplicada normalmente y sobre el borde plano horizontal AB (fig. 49a) de una placa plana semiindefinida y que, como se indica en la fig. 49 b, se supone distribuida uniformemente en su espesor. Se considera a este igual a uno,

de manera que P resulta la carga por unidad de espesor.

Se origina en estas condiciones una distribución de tensiones - que, por sus caracteristicas, recibe el nombre de distribución radial simple. En un elemento C, que dista r del punto de aplicación de la fuerza, actúa un esfuerzo de compresión simple de dirección radial e intensidad

(62)

En cuanto a la tensión de dirección tangencial y la tensión de desgarramiento , son enèeste caso nulas.

Se ve facilmente que estos valores de las componentes de la tensión satisfacen a las ecuaciones de equilibrio (33) [§ 21]; tambien quedan satisfechas las condiciones de limite porque y son nulas a lo largo del borde rectilineo de lachapa, que está libre de fuerzas exteriores. En el punto de aplicación de la fuerza (r = 0), alcanza un valor infinito. La resultante de las fuerzas que actúan sobre una superficie cilindrica de radio r debe equilibrar

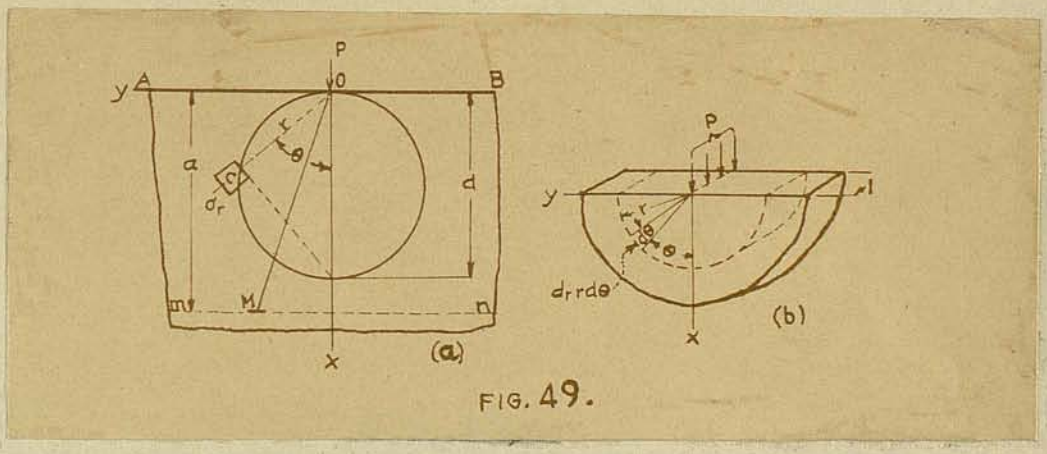


FIG. 49.

a la fuerza P (figura 49b) y se obtiene por integración de las componentes verticales elementales, cos , que obran sobre cada elemento, rd, de la superficie. Procediendo de esta manera, encontramos

Para probar que la expresión (62) constituye la solución exacta del problema, debemos hacer intervenir tambien la ecuación de compatibilidad (35). Dicha solución se deduce de la función de tensión

(a)

como puede verificarse a continuación, utilizando las ecuaciones (34)

(62')

que, como se ve, coincide con lasolución (62). Se puede comprobar facilmente que la ecuación (35) queda satisfecha,llevando a ella la función (a), asi que ésta representa efectivamente la función de - tensión correcta y, asimismo, las ecuaciones (62') dan la verdadera repartición de las tensiones.

Si se considera una circunferencia de diámetro cualquiera d, cuyo centro esté sobre el eje de las x y sea tangente al eje de las y en el punto O (figura 49a), se verificará, cualquiera sea el punto considerado, d cos ϕ = r. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación (62),

o sea, que la tensión es la misma en todos los puntos de esa curva, con excepción del punto O, de aplicación de la fuerza.

En un punto cualquiera, M, de un plano horizontal mn a la distancia a del borde de la placa, las componentes normal y tangencial de la tensión se calculan partiendo del valor de la compresión simple en la dirección radial. Tendremos asi (figura 49a),

(63)

En la figura 50 se representa graficamente la distribución de las tensiones y a lo largo del plano horizontal. mn.

En el punto de aplicación de la carga, teoricamente, la tensión es infinitamente grande, ya que se trata de una fuerza de valor infinito que actua en un área infinitamente pequeña. En la práctica, se produce un fenomeno de flujo plástico de cierta magnitud en el - entorno del punto de aplicación, de manera que la carga váene a repartirse en un area de extensión finita. Si imaginamos que la porción de material que experimenta el fenómeno de la fluidez es separado de la placa mediante una pequeña perforación cilindrica (figura 49b), las ecuaciones de la elasticidad podrán aplicarse a la porción restante de la placa.

En el caso de una fuerza P aplicada tangencialmente al borde rec-

tilineo de una placa plana semiinfinita (figura 51), puede llegarse a unasolución análoga. Las componentes de la tensión para este caso

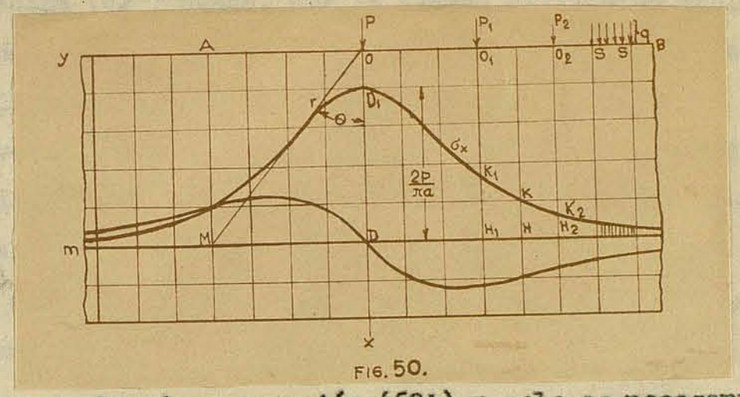


FIG. 50.

pe deducen de la misma ecuación (62') y solo es necesario tomar como eje polar la recta de acción de la fuerza, como se ve en la figura. Calculando la resultante de las fuerzas que actúan en una superficie

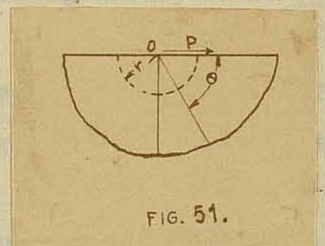


FIG. 51.

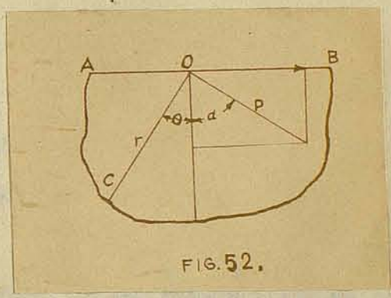


FIG. 52.

cilíndrica, que en la figura se indica por linea cortada, tendremos:

Esta resultante equilibra a la fuerza exterior P, y como las componentes y de la tensión en el borde plano son nulas, resulta que la solución (62') satisface las condiciones de borde.

Cuando se trata de fuerzas oblicuas el problema se resuelve por superposición, aplicando las soluciones que corresponden a las fuerzas vertical y horizontal concentradas. La tensión de dirección radial en cualquier punto C (figura 52), se obtiene partiendo de las ecuaciones (62'). Descomponiendo la fuerza P, que forma el ángulo a con la vertical, en sus componentes P cos a y P sen a, vertical y horizontal respectivamente, resultará de acuerdo con la mencionada ecuación:

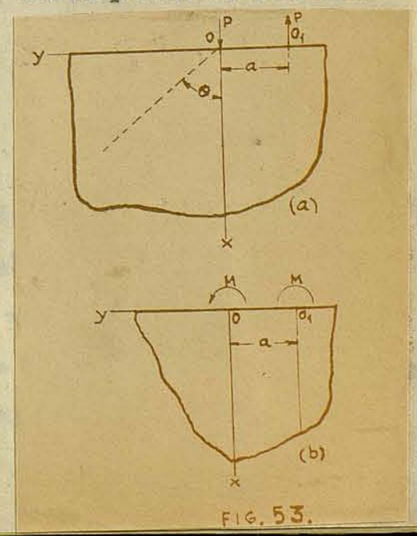


FIG. 53.

La ecuación (62') puede, por lo tanto, utilizarse cualquiera sea - la dirección de la fuerza, siempre que en cada caso se tome como eje polar la recta de acción de la fuerza.

Una vez conocida la ley de distribución de las tensiones, los corrimientos correspondientes se determinan por el procedimiento corriente, aplicando las ecuaciones (45) a (47) [§ 24].

Para una fuerza perpendicular al borde plano de la placa (figura 49), tendremos

(c)

Por integración, de la primera de estas ecuaciones se obtiene:

(d)

en la cual f ( ) es una función de unicamente. Sustituyendo en la segunda de las ecuaciones (c) e integrando, resulta

(e)

en la cual F (r) es función de r solamente. Reemplazando en la tercera ecuación del grupo (c) los valores de u y de v obtenidos en - (d) y (e), se llega a

(f)

En estas expresiones, A, B y C son constantes de integración que deben determinarse con arreglo a las condiciones de vínculo de la pieza. Reemplazando en las ecuaciones (d) y (e), tendremos para los corrimientos:

(g)

Supongamos que, como condición de vínculo de la placa de la figura 49, se verifica que los puntos situados en el eje x no admiten corrimiento lateral, esto es, que para = 0, v = 0, con lo cual la segunda de las ecuaciones (g) nos da A = 0 y C = 0; mediante estos valores de las constantes de integración, el corrimiento vertical de los -

puntos del eje x resulta, entonces,

(h)

Para determinar la constante B, vamos a suponer que un punto del eje x que diste d del origen, no pueda moverse verticalmente. En la ecuación (h) se tendrá r = d, y luego:

Conocidas todas las constantes de integración, las ecuaciones (g) permitirán calcular el trayecto de cualquier punto de la placa semiinfinita.

Si, por ejemplo, quisieramos conocer los corrimientos que experimentan los puntos del borde de la placa, tendríamos: Para calcular los corrimientos horizontales, la primera de las ecuaciones (g) nos da con $\theta = \pm \pi/2$:

(67)

Esta nos dice que todos los puntos del borde rectilineo experimentan iguales corrimientos, dirigidos hacia el origen, lo cual puede ser considerado fisicamente factible, ya que -como se recordará- hemos supuesto haber suprimido la parte de material limitada por una superficie cilindrica de radio pequeño en torno al punto de aplicación de P (figura 49b), a la cual no son aplicables las ecuaciones de la elastiaidad. En realidad, esa porción de material experimenta una - deformación plástica, que permite los corrimientos (67) a lo largo del canto rectilineo. En cuanto a los corrimiento verticales que corresponden al borde rectilineo, se calculan aplicando la segunda de las ecuaciiones (g). El trayecto hacia abajo a una distancia r del origen se obtiene recordando que v es positivo si el movimiento se efectua en el sentido del crecimiento de los ángulos θ y que la deformación es simétrica respecto al eje de las x. De esa manera, obtendremos:

(68)

Aplicada al origen, esta ecuación da para el corrimiento un valor infinitamente grande; pero puede obviarse esta dificultad si suponemos, como antes, que una porción del material que circunda al punto de aplicación de la carga es separada cortando segun una superficie cilindrica de radio pequeño. Para otros puntos del borde, al aplicar

la ecuación (68) resultan para los trayectos, valores finitos.

30.-Caso general de carga normal al borde rectilíneo de una placa.- Si suponemos que las ordenadas de las curvas de la figura 50 (29) son los valores de las tensiones originadas por una fuerza unitaria por ejemplo, 1 kgs., dichas curvas serán las líneas de influencia - de las tensiones o sea que la tensión ,originada por - la fuerza de intensidad P en un punto H del plano mn, se obtiene - multiplicando por P la ordenada HK.

Si sobre el borde horizontal, AB, de la placa semiinfinita que - consideramos, actúan varias fuerzas verticales, P, P_1, P_2,..., se - obtienen las tensiones originadas en el plano mn sumando los valores que corresponden a cada una de ellas, las cuales resultan de - trasladar las curvas de y construidas para la fuerza P, de manera que su origen sea el punto de aplicación respectivo, en este caso O_1, O_2, etc. Por ejemplo, La tensión normal producida por la fuerza P_1, en el punto D del plano mn, es igual al producto de la - ordenada $\overline{H_1K_1}$ por P_1. Analogamente y para el mismo punto D, la tensión que origina P_2 será $\overline{H_2K_2}$. P_2 y así sucesivamente. La tensión normal total en D, originada la acción simultanea de P, P_1, P_2,... es

La curva $D_1K_1K_2$ de la figura 50 es, pues, la línea de influencia - de la tensión normal en el punto D, y por la misma razón la curva es la línea de influencia de las tensiones tangenciales en el punto D del plano mn.

Por medio de estas curvas pueden obtenerse fácilmente las componentes de la tensión en el punto D para cualquier combinación de - fuerzas verticales aplicadas sobre el borde AB de la placa considerada.

La tensión normal originada en el punto D por una carga uniformemente distribuida de intensidad q que actúa sobre una porción $\overline{ss}$ del borde rectilíneo (figura 50), se determina multiplicando por q el área de la parte de diagrama correspondiente, rayada en este caso en la figura, y que llamaremos superficie de influencia.

El problema de la carga uniformemente repartida puede tambien ser

resuelto introduciendo una función de tensión de la forma

(a)

en la cual A es una constante. Las componentes de la tensión son para este caso:

(b)

Para la placa semiindefinida, esto se traduce en la distribución de cargas representada en la fig. 54a: una fuerza transversal de intensidad -A, uniformemente distribuida en el borde dela placa, y una carga normal uniformemente distribuida de intensidad A , que cambia bruscamente de signo en el origen O. Para asignar a las fuerzas su sentido correcto, nos guiaremos por los signos de las compo-

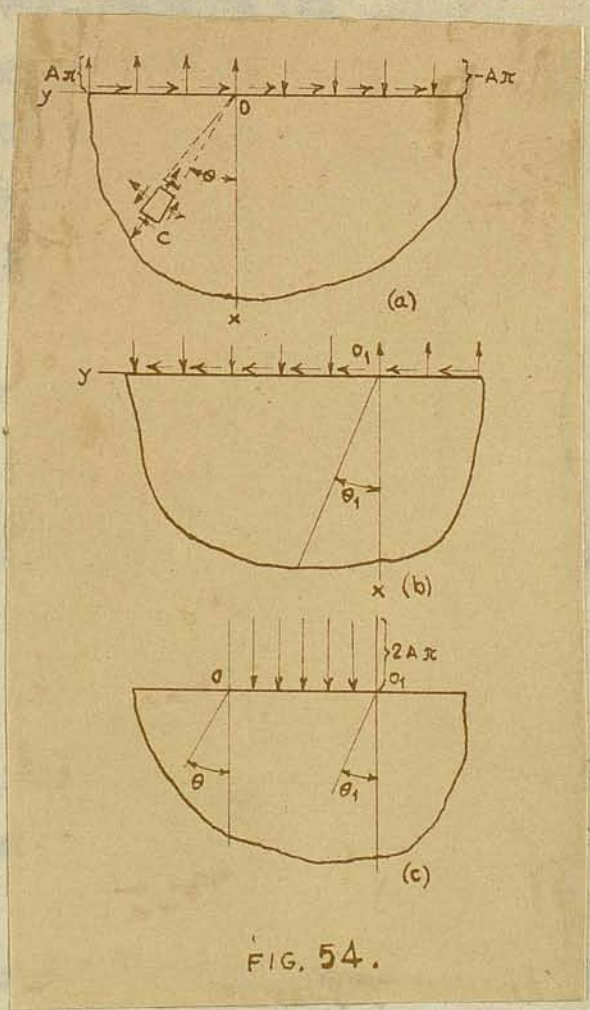


FIG. 54.

nentes de la tensión que actúan en un elemento C.

Trasladando el origen a O_1 y cambiando el signo de la función de tensión Φ, se tendrá la distribución de cargas que indica la fig. 54b. Por superposición de los dos casos de distribución de cargas -

de las figuras 54a y 54b, se obtiene el caso de una carga uniforme sobre una porción del borde rectilíneo de la placa, segun se indica en la figura 54c. La intensidad q de la carga uniformemente repartida se determina tomando

La tensión en cualquier punto de la placa semiinfinita estará dada entonces por la función de tensión

(c)

Las deformaciones del borde rectilíneo pueden calcularse, cualquiera sea la distribución de la carga, utilizando la ecuación (68), que fué deducida en el § 29 para el caso de una fuerza concentrada. Llamando q a la intensidad de la carga aplicada verticalmente (figura 56), la deformación en un punto O que dista r de la superficie de cargaelemental qdr, sombreada en la figura, será, segun la ecuación (68),

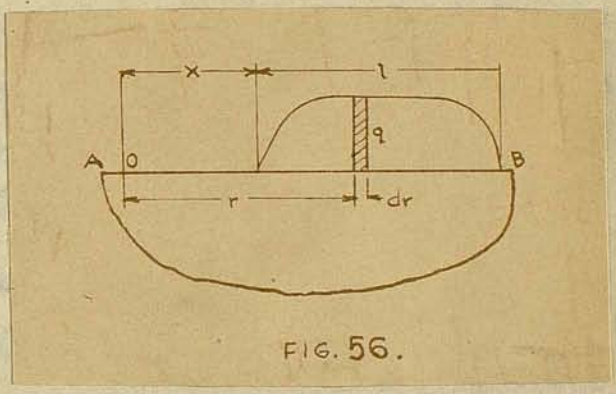


FIG. 56.

y la deformación total en el mismo punto:

(g)

Si la carga estuviese uniformemente repartida, la intensidad q seria constante y entonces

(h)

Para un punto situado dentro de la zona cargada (figura 57), se tendrá analagamente:

(i)

La ecuación(g) puede emplearse tambien para determinar la intensidad q de la carga distribuida que origina una depresión dada en el borde rectilíneo. Admitiendo, por ejemplo, que la deformación es constante en la longitud cargada (figura 58), se puede demostrar que la distribución de la presión a lo largo de la misma está dada por

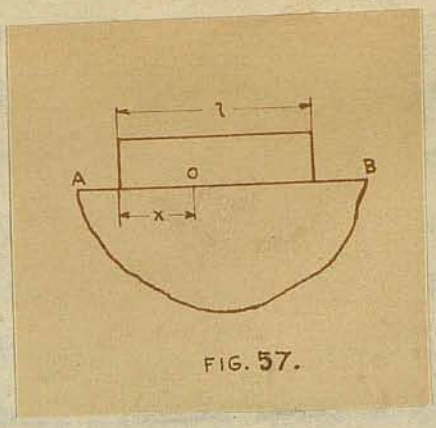


FIG. 57.

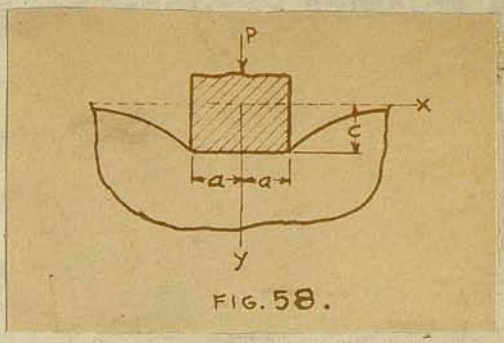


FIG. 58.

por la ecuación:

31.-<u>Cuña cargada en su vértice.-</u> La distribución de esfuerzos denominada radial simple, que hemos encontrado al estudiar en el § 29 el caso de una fuerza concentrada, puede utilizarse tambien para el cálculo de la fatiga que origina una fuerza concentrada actuante sobre la arista de una cuña triangular. Cuando hay simetria, como en el caso de la figura 59, las condiciones que corresponden a las caras $\theta = \pm a$, quedan satisfechas por los sieguientes valores de las componentes de la tensión (se considera la unidad de longitud de cuña normalmente al plano xy):

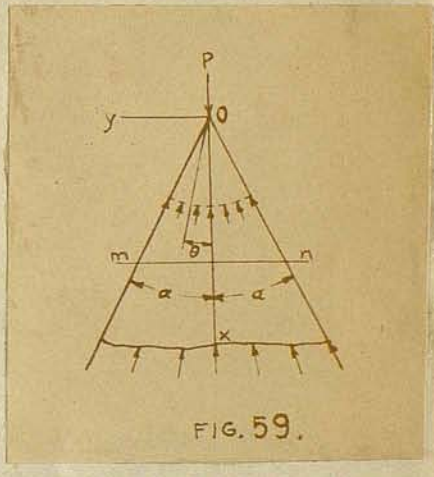


FIG. 59.

(a)

La constante k se determinará de manera que quede satisfecha para el punto O la condición de equilibrio entre la fuerza exterior y la resultante de las presiones transmitidas a la superficie cilindrica que se indica en la figura por la linea de trazos. La ecuación resulta, de esa manera:

de la cual,

Teniendo en cuenta las ecuaciones (a), resultará:

(69)

Haciendo $x = \pi/2$, se llega a la solución (62), que corresponde a la

placa semiindefinida.

Como puede verse, la distribución de las tenciones normales sobre una sección transversal mn no es uniforme, y la relación del valor de la fatiga en los puntos m o n, a la máxima tensión correspondiente al centro de la misma sección transversal, resulta igual a $\cos^4 \alpha$.

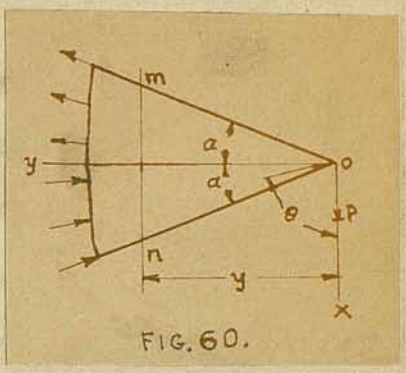


FIG. 60.

Si la fuerza es perpendicular al eje del la cuña (figura 60) se puede emplear la misma solución (a) si el ángulo α se mide a partir de la recta de acción de aquélla, tomada como eje polar. La constante k se determina partiendo de la ecuación de equilibrio

de la cual obtenemos:

y,por lo tanto, la tensión en dirección radial está dada por

(70)

En una sección transversal mn, las tensiones normal y tangencial - que origina la fuerza P, normal a la bisectriz de la cuña son:

(b)

Si el ángulo a es pequeño, puede escribirse

y llamando I al momento de inercia de la sección transversal mn, de las ecuaciones (b) resulta

(c)

Para valores pequeños de α, el factor $\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\right)^3 \operatorname{sen}^4 \theta$ puede tomarse muy aproximadamente igual a uno y entonces la expresión de la fatiga

coincide con la que da la teoria elemental de la flexión. La máxima tensión tangencial corresponde a los puntos m y n y su valor es doble del que da la teoria elemental para el baricentro de la sección rectangular de una viga.

En posesión de las soluciones de los dos casos que se representan en la figuras 59 y 60, podemos resolver el problema para una fuerza P de dirección cualquiera en el plano xy, descomponiendola en dos componentes y aplicando la ley de superposición.

Debe tenerse en cuenta que las soluciones (69) y (70) son exactas tan solo en el caso en que la cuña este soportada en su extremidad fija, por fuerzas dirigidas radialmente y cuya distribución obedezca a dichas ecuaciones. De otra manera, las soluciones solamente pueden considerarse exactas a mucha distancia del apoyo.

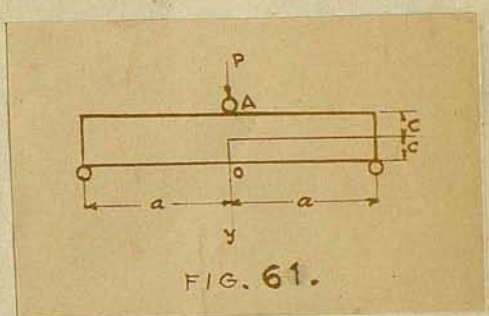


FIG. 61.

32.-Fuerza concentrada sobre una viga.- De gran interés práctico es el problema de la distribución de tensiones en una viga sobre la cual actúa una fuerza concentrada. En el § 19, se ha demostrado que la distribución de esfuerzos que una carga uniformemente distribuida origina en las vigas de sección rectangular angosta puede calcularse con exactitud satisfactoria utilizando la teoria elemental de la flexión. En la proximidad del punto de aplicación de una fuerza concentrada ocurre, empero, una perturbación local de la distribución de las tensiones que hace necesario un estudio mas detenido. Carus Wilson estudió experimentalmente por primera vez estas tensiones localizadas. Por medio de ensayos realizados con una viga rectangular de vidrio libremente apoyada en sus extremidades y cargada en el medio (figura 61) y utilizando la luz polarizada (§ 38), demostró que en el punto A, de aplicación de la carga, la distribución de las tensiones se aproxima a la que produce una fuerza concentrada en una placa semiindefinida; a lo largo de la sección transversal AD, la tensión normal, , no obedece a una ley lineal, y en el punto D, opuesto al de aplicación de la fuerza, el esfuerzo de tracción es inferior al que resultaria de aplicar la teoria elemental de la flexión.

Esos resultados han sido explicados por G. G. Stokes recurriendo a ciertas suposiciones empíricas. Segun dicho autor, el sistema representado por la figura 61 puede obtenerse superponiendo los dos sistemas que muestra la figura 62: las tensiones radiales de compresión que actúan en las secciones mn, np y pq de una placa semiindefinida (figura 62a) son anuladas por tracciones radiales, iguales, que obran en los costados de la viga rectangular apoyada en n y en p (figura 62b). Para realizar el caso tratado por Stokes, se debe

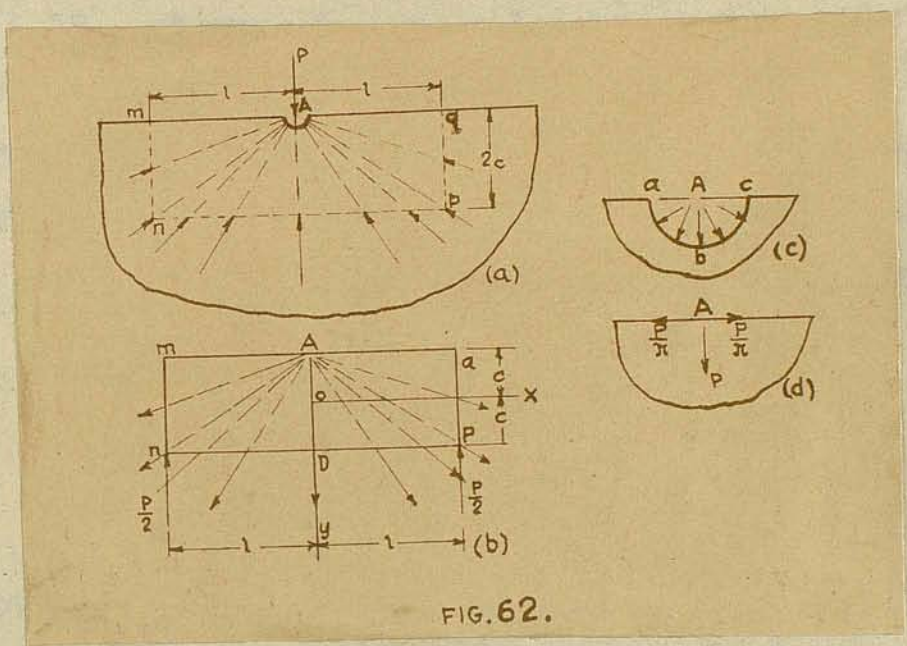


FIG. 62.

superponer las tensiones en esa viga, a las que corresponden a una placa semiindefinida.

Aplicando la fórmula elemental de la flexión al cálculo de las tensiones se tendrá: el momento flector en la sección transversal media AD de la viga, es igual a la diferencia entre el momento de la reacción P/2 y el momento de las fuerzas de tracción de dirección radial correspondientes a la mitad de la viga, que se calcula fácilmente, pues esta distribución radial es estáticamente equivalente a la de las presiones sobre el cuadrante ab de la superficie cilíndrica abc alrededor del punto A (figura 62c) o bien, teniendo en cuenta la ecuación (62), equivale a una fuerza horizontal P/π y una fuerza vertical P/2 aplicadas en el punto A (figura 62d). Por lo tanto, el momento flector, deque se trata, será:

y las tensiones de flexión correspondientes (como antes, P es la fuerza por unidad del espesor de la placa):

A estas tensiones debe sumarse las tensiones de tracción uniformemente distribuídas, P/2 c, que origina la tracción P/ .

En la sección transversal AD, las tensiones normales calculadas por este procedimiento elemental son, pues:

fórmula que coincide con la que Stokes propone ensu trabajo.

Puede lograrse una aproximación mayor si se usa las ecuaciones (32') (§ 19), observando que en la cara inferior de la viga existe una distribución continua de carga (figura 62b). De acuerdo con las ecuaciones (62), la intensidad de esa carga en el punto D es P/ c, de manera que sustituyendo en (32') y combinando con el valor de σ_x arriba consignado, se llega como segunda aproximación a:

(a)

Para obtener las tensiones totales a lo largo de la sección AD, debe agregarse a estas ultimas expresiones las fatigas:

(b)

como para el caso de la placa plana semiinfinita.

La comparación de los valores dados por las ecuaciones (a) y (b) con una solución mas exacta (véase el cuadro de factores en este mismo parágrafo), demuestra que aquéllas permiten una excelente aproximación en todos los puntos, salvo en D, en la cara inferior de la viga, para el cual corresponde una corrección de la fórmula de la viga simple flexada, igual a

en tanto que la solución mas exacta da solamente $-0{,}133\,\frac{P}{c}$.

J. Boussinesq raalizó la primera tentativa para llegar a una solución mas exacta del problema y para ello utilizó la solución de Flamant para la placa semiindefinida (vide § 29), mediante correcciones sucesivas. Comienza por anular las tensiones sobre el contorno -

np (figura 62a), superponiendo un sistema de tensiones iguales y de signo contrario; luego considera que la viga es una placa semi-indefinida que se extiende por encima de la línea rp y emplea nuevamente la solución de Flamant. Como este sistema correctivo introduce tensiones suplementarias sobre la cara superior de la viga, la elimina por una nueva aplicación de la mencionada solución y así sucesivamente. La convergencia obtenida con este proceso es muy lenta y sus resultados, poco satisfactorios.

L.N.G. Filon ha dado una solución del mismo problema por medio de series trigonométricas. Los resultados que dicho autor obtuvo en diversos casos particulares de carga concentradas (ver 20), concuerdan bastante bien con los de algunas investigaciones mas recientes.

H. Lamb se acercó aún m'as a la solución del problema. Considerando una viga de longitud indefinida, sobre la que actua hacia abajo y hacia arriba, alternadamente, fuerzas iguales equidistantes, Lamb pudo simplificar la solución del problema bidimensional y obtuvo ecuaciones de las piezas el'asticas para diversos casos. Demostró, asímismo, la gran exactitud de la teoría elemental de la flexión de Bernoulli-Euler cuando la altura de la viga es pequeña en comparación con su longitud, y también que la corrección del efecto de la fuerza transversal de Rankine y Grashof (18) es algo exagerada y debe ser reducida a una cuarta parte.

§3.-Tensiones en un disco circular.- Consideremos primeramente un caso sencillo: el de dos fuerzas iguales y de sentidos opuestos, que actuan en las extremidades de un diámetro,AB,de la pieza(fig.69 Si se admite que cada una de las fuerzas P-que supondremos corresponden a la unidad de espesor del disco-origina una distribución radial simple de tensiones ecuación(62) , podremos calcular las fuerzas que habrá que aplicar a la periferia del disco con el objeto de mantener dicha distribución. En un punto cualquiera,M,de la circunferencia obrarán compresiones de direcciones r y r_1 e intensidades respectivamente,

Como r y r_1 son perpendiculares entre sí, y se tiene siendo d el diámetro del disco:

podemos concluir que las dos tensiones principales en M son compresiones iguales a $2P/\pi d$. Por lo tanto, en cada uno de los planos perpendiculares al plano del disco en el punto M actúa la misma tensión de compresión y para mantener el par de distribuciones radiales simples de tensiones que se ha supuesto existen, será necesario aplicar a la circunferencia del disco fuerzas normales de compresión de intensidad constante e igual a $2P/\pi d$.

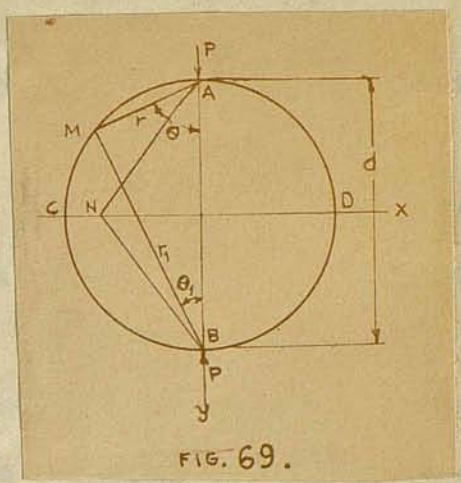


FIG. 69.

Si sobre la periferia del disco no actúan fuerzas exteriores, la tensión en cualquier punto se obtiene, pues, agregando a las dos distribuciones radiales simples de tensiones antes mencionadas, una tracción en el plano del disco, de magnitud $2P/\pi d$.

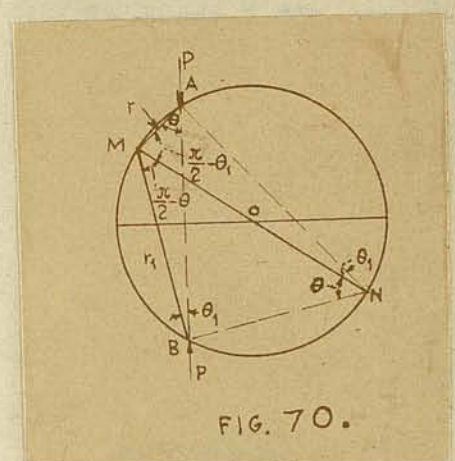


FIG. 70.

Consideremos ahora los esfuerzos que se producen en la sección diametral horizontal del disco que pasa por N. Por razones de simetría podemos afirmar que en este plano no habrá esfuerzos tangenciales; en cuanto a la tensión normal que resulta de las dos compresiones radiales e iguales, valdrá:

en la cual, r es la distancia $\overline{AN}$ y θ el ángulo que forma AN con el diámetro vertical. Si se superpone a esta última fatiga la tracción uniforme $2P/\pi d$, la tensión normal toal en el plano horizontal que pasa por N, resulta

o bien, si se tiene en cuenta que

llegaremos a

(b)

La tensión máxima de compresión a lo largo del diámetro CD se produ-

ce en el centro del disco y su valor es allí:

En las extremidades del diámetro desaparece la tensión de compresión .

Pasaremos a estudiar ahora el caso en que dos fuerzas iguales y opuestas obran a lo largo de una cuerda AB (figura 70). Suponiendo nuevamente dos distribuciones simples radiales que parten de A y B, la tensión en un plano tangente a la circunferencia en el punto M, se obtiene por superposición de dos compresiones radiales, , de direcciones r y r_1 respectivamente. La normal MN a la tangente en M es el diámetro del disco, de manera que MAN y MBN son triángulos rectángulos y los ángulos que forma la normal MO con r y r_1 son $\pi/2-\theta$ y $\pi/2-\theta$ respectivamente. Las tensiones normal y tangencial que corresponden a un elemento del contorno en el punto M serán, por lo tanto,

(c)

Se puede simplificar estas ecuaciones observando que en los triángulos MAN y MBN se verifica:

Sustituyendo en las ecuaciones (c), encontramos las tensiones:

(d)

La figura 70 nos dice que sen ($\theta + \theta_1$) permanece constante en toda la periferia y, por lo tanto, para mantener la distribución radial de tensiones que se ha supuesto, será necesario aplicar fuerzas de compresión uniformemente repartidas, de intensidad igual a $2P/\pi d$ sen ($\theta + \theta_1$).

En el caso de un disco cuyo contorno no reciba una compresión uniforme, se llega a la solución con solo superponer a las dos distribuciones radiales simples

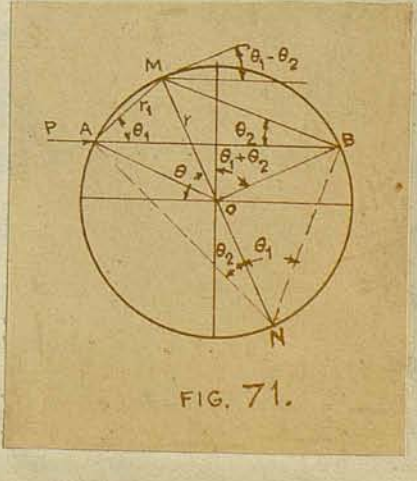


FIG. 71.

arriba indicadas, una tracción uniforme cuya intensidad sea 2P/ d sen (+) .

34.-Placa de extensión limitada, cargada en un punto.- La repartición de fatigas originadas por la aplicación de una fuerza P, que actúa en el plano medio de una placa de extensión ilimitada (fig.73

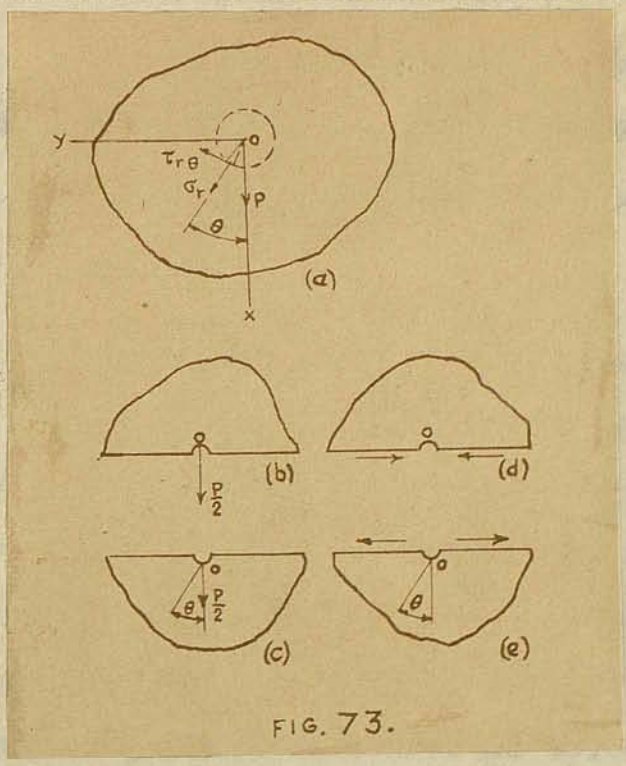


FIG. 73.

se obtendrá fácilmente por superposición de sistemas que ya hemos estudiado, lo que no quiere decir que se pueda resolver el problema superponiendo simplemente las soluciones que corresponden a la placa semiinfinita en la forma que muestran las figuras 73b y 73c. En efecto, si bien los corrimientos verticales son iguales en ambos casos, los que se producen horizontalmente a lo largo de los bordes rectilíneos, son diferentes, pues, mientras que en el caso de la figura 73b divergen desde el punto O, en el 73c, tienen sentido contrario. Las ecuaciones (67) (29) nos permiten calcularlos y, así, se obtiene en ambos casos el valor

(a)

La diferencia entre los corrimientos horizontales que acabamos de mencionar puede ser eliminada combinando los casos 73b y 73c con los casos 73d y 73e. En éstos, actúan tensiones tangenciales a lo largo de los bordes rectilíneos, y los corrimientos pueden obtenerse aplicando los resultados obtenidos en el problema de una barra curva flexada que se representa en la figura 43 (27),que se asimila al caso de la placa de extensión semiinfinita cuando el radio de la curva circular interior de la barra tiende a cero mientras

que el radio exterior aumenta indefinidamente. La ecuación (57) -página 88- nos da el valor del corrimiento que tiene lugar a lo largo del borde rectilíneo de esta placa en la dirección de la fuerza cortante que actúa sobre el mismo:

(b)

El valor de la constante de integración D debe ser ajustado de manera que desaparezca el corrimiento resultante de las expresiones (a) y (b). Se desprende, pues, conforme a esa condición:

(c)

Se obtiene así, como resultado de la superposición de los casos 73b, 73c, 73d y 73e, el de una placa de extensión indefinida cargada en un punto (figura 73a). Las tensiones correspondientes se obtienen ahora fácilmente, superponiendo las fatigas que se presentan en una placa semiinfinita cuando obra sobre su borde una fuerza normal P/2 (ver § 29), con las tensiones en la barra curva, en cuyas expresiones figura la constante de integración D.

Teniendo en cuenta la diferencia de ejes polares considerados en las figuras 43 y 73, y utilizando las ecuaciones (56), las tensiones en la barra curva valdrán, cuando el ángulo φ se mide tal como indica la figura 73:

Si se combina estos valores con los que da la fórmula (62')para los esfuerzos que origina la carga P/2 se obtiene para la placa de extensión ilimitada la siguiente distribución de tensiones:

(72)

Supongamos ahora que en el punto O de la placa considerada (figura 73a) cortamos un pequeño elemento limitado por una superficie cilín

drica de radio r: proyectando las fuerzas que actúan sobre dicha superficie en las direcciones x e y, tendriamos:

Estas expresiones nos dicen que las fuerzas aplicadas en la periferia cilíndrica del elemento representan la carga P aplicada en el punto O.

Las componentes de la tensión en coordenadas cartesianas se desprenden de las ecuaciones (72), aplicando las ecuaciones (13) (19). De esa manera, resulta:

(73)

Estas formulas resuelven el caso de una fuerza concentrada y permiten obtener, por medio del principio de superposición, las soluciones correspondientes, a otros casos de carga. Sea. por ejemplo, el caso que representa la figura 74, en el cual dos fuerzas iguales y opuestas avtuan sobre una placa de extensión indefinida, aplicadas en dos puntos O y O_1, cuya distancia, d, es muy pequeña. La tensión que se presenta en cualquier punto M se obtiene superponiendo los esfuerzos que originan las fuerzas aplicadas en O y O_1.

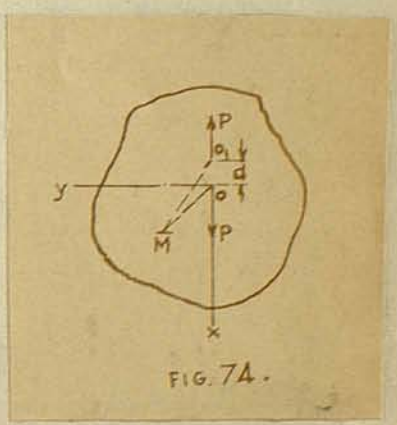


FIG. 74.

Si en dichompunto consideramos un elemento plano orientado perpendicularmente al eje x, la tensión normal producida por las dos fuerzas que hemos supuesto será

en la cual representa la tensión normal que origina en el elemento la fuerza cuyo punto de aplicación es O. El resultado anterior nos dice que las componentes de la tensión para el caso de la figura 74 se hallan efectuando la derivación de las ecuaciones

(73). Procediendo así, se tiene:

(74)

Salta a la vista que las componentes de la tensión disminuyen rapidamente cuando r aumenta, y cuando r es grande en relación con d, resultan practicamente despreciables, como era de prever, con arreglo al principio de de Sant-Venant, por tratarse de dos fuerzas en equilibrio, aplicadas a puntos muy próximos.

El problema que indica la figura 75 puede ser resuelto por superposición de dos reparticiones de esfuerzos como las que dan las formulas (74). Se obtendrian para este caso las componentes:

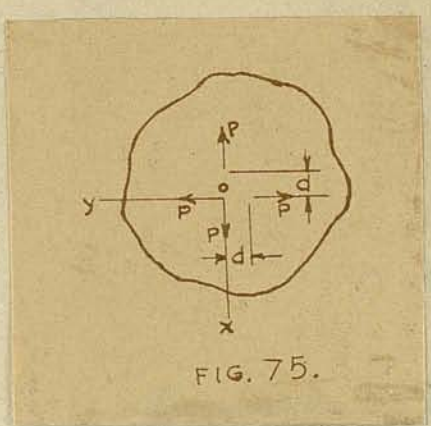


FIG. 75.

La misma distribución de tensiones tiene por expresión en coordenadas polares:

(75)

En el § 22 habiamos hallado la solución (42) para el caso de un cilindro de pared espesa sometido a la acción de una presión interior. Si el diámetro exterior del mismo se hace infinitamente grande, la solución (75) puede hacerse concordar con aquella.

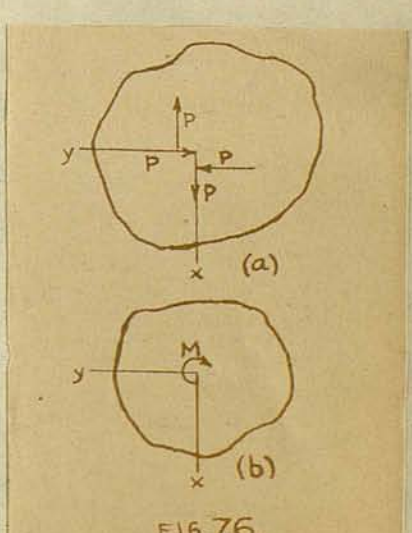


FIG. 76.

Tambien podremos resolver el caso representado por la figura 76a. Se obtiene de la misma manera las componentes de la tensión:

(76)

Estas tensiones serian las mismas que produce un par de fuerzas M, aplicado en el origen (figura 76b).

C A P I T U L O IV

METODOS ELASTICO - ENERGETICOS

39.-Energia potencial elástica.- Durante la deformación que un cuerpo elástico experimenta bajo la acción de fuerzas exteriores, éstas realizan cierta cantidad de trabajo, que se tranforma en energia de deformación o energia potencial elástica del cuerpo. Para calcularla, consideremos un elemento infinitésimo, de forma de paralelepípedo rectangular (figura 91a), al que supondremos sometido solamente a tensiones normales σ. La fuerza de tracción que actúa en la dirección x sobre el elemento será entonces σ_x dydz y el alargamiento correspondiente, . Entre ambas cantidades existe la relación que refleja el diagrama figura 91b, de manera que el trabajo de la fuerza durante la deformación está dado por el área del triángulo - OAB, esto es $\frac{1}{2}$ ( ) ( ). Escribiendo que este trabajo - equivale a la energia potencial acumulada en el elemento dxdydz a causa de la deformación elástica, a la cual llamaremos dV, se tendrá

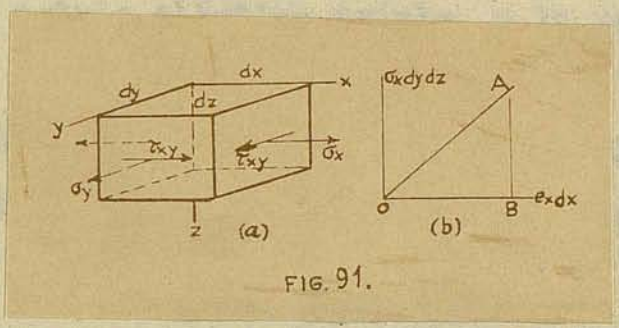


FIG. 91.

(a)

El mismo razonamiento se aplica al caso mas general del estado plano de tensión, en que sobre el elemento considerado actúan las tensiones , y (figura 91a). Para calcular la energia potencial elástica tendremos en cuenta que ella no depende del orden de aplicación de las fuerzas sino de sus intensidades finales y supondremos que todas aumentan en forma simultánea y con la misma rapidez, de modo que la relación entre cada una de ellas y la correspondiente dilatación puede representarse por un diagrama análogo al de

la figura 91b. El trabajo que efectuan todas las fuerzas resulta entonces igual a la energia de deformación almacenada en el elemento y se obtendrá sumando las expresiones similares a la que se designa con la letra (a), teniendo en cuenta que es ahora la deformación que se produce en la dirección x a causa de las tres tensiones que obran simultaneamente. Tendtemos, por lo tanto, para un estado elástico plano:

(b)

Para un estado triple de tensión encontraremos, de una manera análoga,

(c)

La energia de deformación que corresponde a la unidad de volumen en un estado elástico triple, a la que llamaremos V_2, será

(d)

Echando mano de las fórmulas (3) y (6) (ley de Hooke, § 6), podremos expresar V_2 en función de las componentes del esfuerzo únicamente, como sigue:

(80)

En el caso de un estado elástico plano, y entonces

(81)

Si llevamos a la expresión (d) las ecuaciones (11), obtendremos el valor de V_2 en función de las componentes de la deformación - unicamente, esto es:

(82)

en la cual (§ 6):

Fácil es demostrar que la derivada de la energia de deformación (82) con respecto a una cualquiera de las componentes de la deformación es igual a la correspondiente componente de la tensión. Derivando con respecto a , por ejemplo, y teniendo en cuenta la ecuación (11), llegamos a

que demuestra nuestro aserto.

La energia potencial elástica total de un cuerpo elástico deformado, V, se obtiene partiendo de la energia de deformación por unidad de volumen,, V_e, e integrando, esto es:

(83)

Se puede expresar V ya sea en función de las componentes de la tensión o de las componentes de la deformación, según se emplee la expresión de V_e dada por la ecuación (80) o por la ecuación (8
como puede verse en las aplicaciones que a continuación desarrollamos.

Para la determinación de las tensiones admisibles basadas en los esfuerzos limites de rotura, se emplea a veces la energia potencial elástica que corresponde a la unidad de volumen, y que es caracteristica de cada material.

Con objeto de armonizar tal criterio con el hecho de que los materiales isótropos son capaces de soportar grandes presiones hidróstáticas sinexperimentar ruptura elástica, se ha propuesto considerar dividida en dos partes la energia de deformación: una, la correspondiente al cambio de volumen, y la otra,que seria debida a la deformación, y que es la unica que se toma en cuenta para determinar la resistencia.

Como lo expresa la ecuación (8), la modificación de volumen que provoca un estado lástico, es proporcional a la suma de las tres componentes del esfuerzo normal, de manera que si esta suma es cero, la deformación será isovolumen. Cada una de dichas componentes puede ser, a su vez, dividida en dos sumandos:

en las cuales

(e)

es decir que

de manera que, segun se ha expresado, la solicitación producirá unicamente un deslizamiento y la variación de volumen será una función de la tracci'on uniforme p, únicamente, pues las componentes de la tensión tangencial motivan deformaciones que no significan cambio de volumen. De la ecuación (8) re-

sulta que la parte de la energia total que corresponde a aquel - cambio de volumen es:

(f)

Restando esta expresión de la (80), y teniendo en cuenta la identidad

podemos expresar la parte de energia total debida a la distorsión bajo la forma:

(84)

En el caso de una tracción simple de dirección x, tan solo es distinta de cero y la energia de deformación que corresponde a la distorsión resulta entonces, de acuerdo con la fórmula (84), . En el caso de un resbalamiento simple, v. gr. entre los planos xz e yz, es la única tensión diferente de cero y la energia debida al deslizamiento es $\frac{1}{2G}$

Admitiendo como cierto que para cualquier sistema de tensiones la rotura ocurre cuando la energia de deformación correspondiente a la distorsión alcanza un cierto límite (caracteristico de cada - material), la relación entre el valor critico para el esfuerzo de tracción único y tensión tangencial única se obtendrá mediante la ecuación

que sale de igualar los valores antes hallado, y de la cual resulta:

(g)

Para el caso del acero, los ensayos demuestran que la relación - entre los limites de fluidez registrados para tracción y desgarramiento, concuerda muy bien con la que se ha obtenido mediante el desarrollo teórico que antecede.

40.-<u>El principio de los trabajos virtuales.-</u>El principio de los trabajo virtuales se emplea con ventaja en la solución de diversos problemas de elasticidad. Para el caso de una pártícula, dicho principio establece que si un punto material sometido a un - conjunto de fuerzas se encuentran en equilibrio, el trabajo total de esas fuerzas es nulo en toda traslación virtual. Se considera

como traslación virtual de una partícula que puede moverse libremente en cualquier dirección, todo corrimiento infinitesimal de la misma. Si , , son las componentes de una traslación virtual en las direcciones x, y, z, respectivamente, y las sumas de las proyecciones de las fuerzas en las mismas direcciones, el principio de los trabajos virtuales permite escribir las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones que quedan satisfechas para cualquier traslación virtual se si verifica:

Llegamos, asi, a las conocidas ecuaciones del equilibrio del punto-masa.

Al aplicar el principio de los trabajos virtuales, las fuerzas que actuan se consideran como constantes durante una traslación virtual y si alguna de las fuerzas que obran en un punto dado fuese una reacción elástica, v. gr., la reacción de una barra en el caso de la articulación de una viga de celosía, admitiremos que los corrimientos virtuales son tan pequeños como para que la variación de su intensidad o dirección puede ser despreciada.

Un cuerpo elástico, en reposo bajo la acción de fuerzas de superficie y másicas, constituye un conjunto de partículas, cada una de las cuales está sometida a un sistema de fuerzas en equilibrio. En toda traslación virtual, el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre una partícula es nulo, y por lo tanto tambien lo será el trabajo de la totalidad de las fuerzas del sistema. En el caso de un cuerpo elástico se entenderá por traslación virtual todo pequeño corrimiento compatible con la condición de continuidad de la materia que lo constituye y con los vínculos que pudiesen ser establecidos para los puntos de su superficie. Si, por ejemplo, se establece como condición la inmovilidad de una parte de la superficie del cuerpo, dígase la extremidad empotrada de una viga, o bien un corrimiento muy pequeño, la traslación virtual para esa parte debe ser igual a cer.

Vamos a examinar, como ejemplo de aplicación, el caso de una pla-

ca sometida a un estado plano de tensión. Denotaremos con u y v a las componentes de los corrimientos efectivos debidos a las - cargas y con y a las componentes de una traslación virtual que se efectua a partir de la posición de equilibrio de la - pieza bajo carga, las cuales son cantidades infinitamente pequeñas arbitrarias que satisfacen a las condiciones de continuidad - propias de una deformación elástica, id. est, funciones continuas de x e y.

Cualquiera sea el sistema de traslaciones que se lleve a efecto, el trabajo realizado para vencer las acciones mutuas entre - las partículas es igual a la energia de deformación almacenada - por el cuerpo, esto es, la energia potencial elástica que corresponde a aquellas traslaciones. Por lo tanto, si en lugar de u y v tomamos y , el trabajo realizado para vencer los vínculos internos será igual a la energia de deformación consiguiente a u + , v + , menos la energia de da deformación que corresponde a u y a v. La influencia de los corrimientos virtuales u, v, en las componentes de la deformación, se expresa por:

y la respectiva modificación de la energia potencial de deformación por unidad de volumen se desprende de la ecuación (82):

La variación de energia potencial de deformación correspondiente a todo el cuerpo se obtendrá mediante , en la cual la integración se debe extender al área total de la placa.

Como ha quedado establecido, la variación de la energia potencial de deformación es la medida del trabajo efectuado para vencer las acciones mutuas que se ejercen entre las partículas. Para obtener este trabajo se debe cambiar el signo de aquélla, asi que la expresión del trabajo efectuado durante la traslación virtual por las fuerzas que estamos considerando será:

(b)

Al efectuar el cálculo del trabajo de las fuerzas exteriores durante una traslación virtual, debe tomarse en cuenta kas fuerzas

aplicadas en el contorno de la placa, asi como las fuerzas másicas. Supongamos que el espesor de la placa sea igual a uno y designemos por $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ a las componentes de las fuerzas que obran en el contorno de la pieza, referidas a la unidad de área; para el trabajo de estas fuerzas durante el corrimiento virtual cuyas componentes son y , puede, sin más, escribirse la expresión:

(c)

en la cual la integración se extiende a todo el contorno, s, de la placa.

De una manera análoga, se tendrá como trabajo de las fuerzas - másicas

(d)

en esta expresión X e Y son las componentes de la fuerza ponderal especifica, y, como en el caso anterior, la integración se extiende a toda el área de la placa.

La condición que expresa la nulidad del trabajo total desarrollado durante la traslación virtual resulta de las expresiones (b), (c) y (d) y es la siguiente:

(85)

Como seha dicho, al aplicar el principio de los trabajos virtuales, las fuerzas dadas y las componentes de las tensiones reales que corresponden a la posición de equilibrio se consideran como - constantes durante la traslación virtual, asi que el signo puede colocarse fuera de los integrales en la ecuación (85); procediendo de tal guisa y cambiando todos los signos, se tendrá la - nueva expresión:

(85')

en la cual el primer término entre corchuetes es la energia potencial de deformación; la suma de los términos segundo y tercero representa la energia potencial que corresponde a las fuerzas que - actúan sobre el cuerpo, sú para el estado en que no existe tensión alguna ($u = v = 0$), dicha energia potencial se toma igual a cero; finalmente, la expresión completa dentro de corchetes representa - la energia potencial total de sisnema.

Por lo tanto, si se compara diversos valores de los corrimientos

u y v, puede establecerse que las traslaciones que realmente tienen lugar en un sistema elástico sujeto a la acción de fuerzas exteriores dadas son aquellas que anulan la variación de la energia - potencial total del sistema para cualquier corrimiento virtual que ocurra a partir de la posición de equilibrio, esto es, que la energia potencial total del sistema en la posición de equilibrio es - un máximo o un minimo. Para dilucidar si se trata de un máximo o - de un mínimo, es necesario tomar en cuenta los infinitésimos de - orden superior que habian sido despreciados en el desarrollo anterior (al suponer que en todo corrimiento virtual permanecian constantes las fuerzas y las tensiones). Si de esa manera puede demostrarse que para toda traslación virtual la variación la de energia potencial del sistema es positiva, se tratará de un caso minimo, y si ella fuera siempre negativa, se estaria en el caso de un máximo. Toda traslación virtual del sistema que lo aparte del equilibrio estable exige un trabajo positivo, de manera que, en este caso, la energia potencial total del sistema en equilibrio es un mínimo.

En el caso de un estado elástico triple, se puede llegar facilmente a una ecuación análoga a la (85).

El principio de los trabajos virtuales es particularmente útil para determinar la deformación que en un cuerpo elástico origina un sistema de fuerzas determinado. Unos cuantos ejemplos, cuya solución es ya muy conocida, ilustran la aplicación del método de - que se trata.

Consideremos, en primer lugar, la elástica de un hilo elástico y perfectamente flexible (figura 92) estirado por acción de las - fuerzas S entre dos puntos fijos, A y B, y sujeto a una carga vertical distribuida, de intensidad q. Suponemos que la tensión inicial del hilo es suficientemente grande como para que el incremento de esfuerzo tractor debido a la extensión adicional durante la flexión pueda despreciarse. Por lo tanto, el aumento que experimenta la energia potencial de deformación a causa de la flexión se -

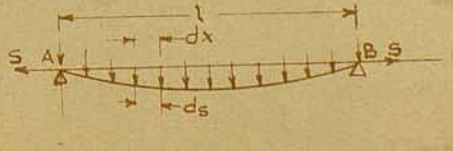


FIG. 92.

obtiene multiplicando la intensidad inicial de la fuerza S de - tracción por el alargamiento queexperimenta el hilo. Considerando las coordenadas conforme indica la figura 92, se tiene

El alargamiento del hilo está dado por

y el incremento correlativo de la energia potencial de deformación será, según queda dicho,

(e)

Si añadimos a la expresión (e) la energía debida a la tensión inicial, se obtendrá la energia potencial total. En este caso el principio de los travajos virtuales conduce a la ecuación siguiente, que corresponde a la (85):

(f)

Calculando la subintegral que figura en el segundo término se tendrá

y la integración por parte nos da, teniendo en cuenta que en las extremidades del hilo = 0:

Sustituyendo en la ecuación (f), se obtendrá:

o bien

Esta ecuación unicamente quedará satisfecha para cualquier traslación virtual , sá se verifica

(g)

Se llega, así, a la conocida ecuación diferencial de un hilo cargado verticalmente.

El principio de los trabajos virtuales puede aplicarse no salamente para - establecer la ecuación diferencial de - la linea elástica como en el ejemplo anterior, sino tambien para el cálculo di-

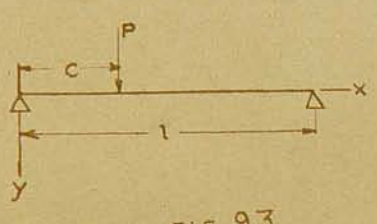


FIG. 93.

recto de las flechas. Tomemos por ejemplo, una barra prismática libremente apoyada en sus extremos y cargada con una fuerza P (figura 93). En el caso más general, la expresión de la elástica de deformación de una barra en las condiciones indicadas puede representarse en forma de serie trigonométrica, como sigue:

(h)

expresión que llevada a la conocida fórmula que dá la energia potencial de deformación de una barra prismática flexada, nos conduce a

(k)

Para obtener un corrimiento virtual respecto a la linea elástica real, demos a un coeficiente de la serie (h), un incremento - infinitesimal:

(l)

La correspondiente variación de la energia potencial de deformación, resultará entonces, con arreglo a la ecuación (k):

(m)

y el trabajo de la fuerza exterior P durante el corrimiento virtual (l) será, teniendo en cuenta que x = c,

(n)

De acuerdo con las expresiones (m) y (n), la ecuación del trabajo virtual resulta entonces:

y de ahí:

Sustituyendo en la serie (h) el valor hallado, llegamos a la ecuación de la linea elástica:

(o)

Esta serie converge rapidamente, asi que para obtener una aproximación satisfactoria basta calcular unos pocos términos. Si, por ejemplo, la carga P actúa en la mitad de la luz (c = 1/2), la flecha que ella origina será:

Con el primer término de la serie, se tiene para la flecha:

El valor exacto para el coeficiente del denominador es 48, lo - nos dice que el error cometido al considerar solamente el primer término de la serie resulta de 1,5 por 100, aproximadamente.

En su teoria sobre la rotura de los materiales frágiles, A.A. Griffith ha aplicado conceptos generales relativos a la energia total de un sistema. Como se sabe la resistencia de los materiales es considerablemente menor que lo que se podria suponer, a juzgar por la intensidad de las - fuerzas intermoleculares: por deducciones teóricas, el autor citado encontró para

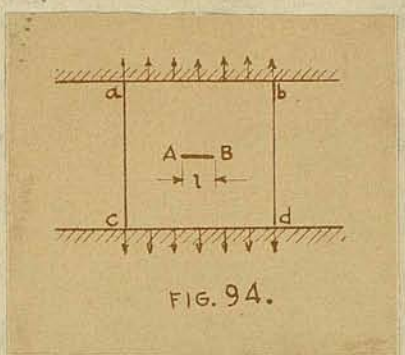


FIG. 94.

cierta clase de vidrio una resistencia a la tracción del orden de $1{,}125 \times 10^5$ kg/cm^2, mientras que los ensayos de tracción de barras del mismo material dieron solamente $0{,}018 \times 10^5$ kg/cm^2. Para explicar esa discrepancia, Griffith supone que en el material existan fisuras o fallas microscópicas, que dan origen a fuertes elevaciones de tensión,y, consiguientemente la extensión de las grietas. Para sus cálculos considera qu e en una placa abcd, figura 94, existe una fisura microscópica, AB, de forma de agujero eliptico muy angosto y cuyo eje mayor, de largo l, es normal a la dirección del esfuerzo de tracción aplicado, S, que está uniformemente repartido a lo largo de los bordes fijos de la placa, ab y cd. A consecuencia del agujero, la energia de deformación que inicialmente corresponde a dicho esfuerzo sufre un decremento, el que - puede ser calculado aplicando la ecuación correspondiente al caso de un agujero eliptico y que, para una placa de espesor igual a - uno, da

(p)

El esfuerzo critico de tracción para el cual la grieta AB comienza a extenderse puede entonces determinarse por medio de la ecuación (85); para ese corrimiento, ya que las fuerzas exteriores no producen trabajo, puesto que los bordes cargados de la placa están - fijos y que las intrinsecas pueden ser despreciadas, dicha ecuación deviene:

(q)

En consecuencia, la energia potencial permanece invariada.

En el caso de producirse una grieta, deberemos considerar, al aplicar tal aserción, no solamente la energia de deformación (p) sino tambien la que llamaremos energia de superficie, que es aquella energia potencial que corresponde a la tensión superficial que no existe en la superficie limitante de los cuerpos sólidos, lo mismo que en los liquidos. Para la clase de vidrio que usaba Griffith en sus experimentos, calculó una energia potencial, T, referida a la unidad de superficie, del orden de $2,2 \times 10^{-4}$ kg/cm^2.

De la ecuación (q) podemos concluir ahora/el valor qritico de la tensión S es aquel para el cual el decremento de la energia de deformación, debido a la extensión de una grieta, iguala al incremento de la energia de superficie. Aplicando la fórmula (p), obtenemos:

de la cual

(r)

Los resultados de los ensayos realizados con probetas en las que, por medio de una punta de diamante, se practicaba fisuras de largo conocido, demostraron una coincidencia muy satisfactoria con los valores calculados por medio de la fórmula (r). Tambien se ha demostrado experimentalmente que si se adopta precauciones tendientes a evitar fallas microcópicas, puede obtenerse resistencias mucho mayores que las corrientes. Algunas varillas de vidrio que ensayó Griffith revelaron una resistencia de rotura por tracción del orden de $0,63 \times 10^5$ kg/cm^2, que supera a la mitad de la cifra teórica antes citada.

41.-<u>El teorema de Castigliano.</u>- En el párrafo anterior se ha comparado la configuración de un cuerpo elástico en estado de equilibrio bajo determinadas fuerzas másicas y condiciones de contorno, con las conformaciones contiguas a aquella, que el mismo adquiere al ser apartado de la posición de equilibrio mediante las traslaciones virtuales , . Quedó alli establecido que las verdaderas traslaciones que corresponden a la posición de equilibrio estable son aquellas que hacen minima la energia potencial total del

sistema.

Consideremos ahora, en lugar de los corrimientos, las tensiones que corresponden a la posición de equilibrio, y tomemos tambien como ejemplo el caso de un estado elástico plano. Como sabemos, las ecuaciones diferenciales de equilibrio (18) con el agregado de las condiciones de borde (20), no bastan para determinar las componentes de la tensión, . Tambien hemos visto que adoptando diversas expresiones para la función de Airy, Φ, - que figura en las ecuaciones (25), o sea

podemos encontrar una variedad de distribuciones de esfuerzos que satisfagan a las ecuaciones del equilibrio y a las condiciones de borde. Se plantea entonces la cuestión: ¿cómo distinguir entre todas las distribuciones de tensiones estáticamente posibles la verdadera?

Sean las verdaderas componentes de la tensión correspondientes a la posición de equilibrio y incrementos infinitamente pequeños de las mismas, de manera que las nuevas componentes de la tensión, es decir
satisfagan las mismas ecuaciones de equilibrio (18). Resstando - entonces las ecuaciones de uno de los sistemas de las del otro, hallaremos que la variación de las componentes del esfuerzo habrán de satisfacer a las siguientes ecuaciones de equilibrio:

(a)

A esta variación de las componentes de la fatiga corresponderá - cierta variación en las fuerzas de superficie. Sean
las variaciones infinitamente pequeñas de dichas fuerzas; las - condiciones de contorno (20) nos darán entonces:

(b)

Para establecer en cuánto varía la energia potencial del cuerpo a causa de las antedichas modificaciones de las componentes - de la tensión, expresemos la energia de deformación por unidad - de volumen en función de las componentes de la tensión (81), y

la variación de la energia a que nos referimos será, entonces,

(c)

en la cual

y, por lo tanto,

y la variación total que afecta a la energia de deformación a - causa de las modificaciones de las compoenntes del esfuerzo es, entonces:

(d)

Calculemos esta variación de la energia haciendo intervenir para ello las condiciones de contorno (b). El primer término de la - expresión (d) da, al integrar por parte.

(e)

en la cual la expresión representa la diferencia de los valores que tiene la función en dos puntos opuestos del contonrno, tales como A y B enmla figura 95. Tenemos, entonces:

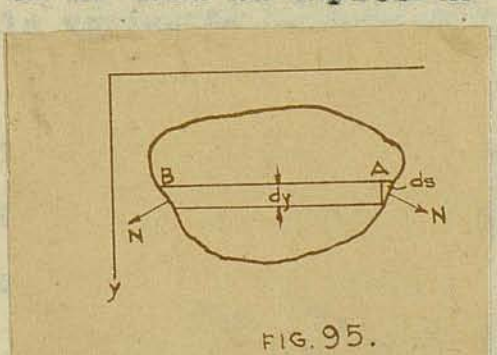


FIG. 95.

donde cosNx = l es el coseno del ángulo que forma la normal exterior N con el eje de las x, y ds, un elemento de contorno. De la ecuación (f) resulta, integrando, y teniendo en cuenta la observación anterior:

con lo que la ecuación (e) se tranforma en:

(g)

La primera de las integrales se extiende a lo largo del contorno de la placa y la segunda, al área de la misma.

Análogas transformaciones del segundo y tercer términos de la expresión (d) nos permiten escribir:

(h)

Por sustitución de (g) y (h) en la ecuación (d) obtenemos la expresión:

en la cual la primera integración se efectua a lo largo del contorno y la segunda se extiende a toda el área de la placa. Utilizando las ecuaciones (a) y (b) obtendremos, finalmente la siguiente expresión para el incremento de la energia potencial debido a la variación de las componentes de la tensión:

(86)

El segundo miembro de esta ecuación representa el trabajo producido por la variación de las fuerzas exteriores a lo largo de los recorridos efectivos.

Si en lugar de una distribución continua de fuerzas superficiales, tuvieramos cargas concentradas, la integral de la ecuación (86) deberia ser reemplazada por una sumatoria, Si P_1, P_2,..., son cargas concentradas independientes y d_1, d_2,..., los corrimientos reales de los puntos de aplicación de dichas cargas en la dirección de sus rectas de acción, la ecuación mencionada se tranforma en

(87)

En lo que antecede hemos estudiado el caso de las variaciones

mas generales de las componentes de la tensión que satisfagan a las ecuaciones de equilibrio (a). Examinemos ahora un caso especial: aquel en que los incrementos de las componentes de la tensión sean de tal naturaleza que ellos pueden ser realmente producidas en un cuerpo elástico por medio de adecuadas variaciones - de las fuerzas exteriores. Supondremos que las componentes de la tensión se expresan en función de las cargas exteriores P_1, P_2,..., y consideraremos aquellas modificaciones de las componentes de la tensión consecuentes de las que experimentan dichas fuerzas, a saber, Limitandonos a los casos en que las componentes del esfuerzo son funciones lineales de las fuerzas exteriores P_1, P_2,..., y sustituyendo estas funciones en la ecuación (80), obtenemos la expresión de la energia de deformación como una función homogenea cuadrática de dichas fuerzas.

Deberá tenerse en cuenta que las reacciones de los apoyos, que pueden ser determinadas con arreglo a las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo rígido, estan expresadas en función de las cargas dadas P_1,P_2,..., y no aparecerán en la expresión de la energia potencial elástica. Si existen vinculos superfluos, las respectivas - reacciones deberán ser consideradas como fuerzas estáticamente independientes, conjuntamente con las fuerzas P_1,P_2, etc.

Partiendo de una expresión de la energia potencial de deformación en función de las fuerzas exteriores, se tendrá, como incremento de la misma, consiguiente al que experimenta cada una de las fuerzas:

ecuación que con la (87) nos da

(i)

Ahora bien, como se ha dicho antes, las fuerzas P_1,P_2,..., son est'aticamente independientes, de manera que sus modificaciones,

son completamente arbitrarias; así, pues, podemos igualar a - cero todas menos una y entonces la ecuación (i) exigirá que se verifique:

(88)

queda así comprobado que si la energía potencial de deformación de un sistema elástico, V, está expresada en función de fuerzas exteriores estáticamente independientes, $P_1, P_2, P_3, \ldots$, el corrimiento real del punto de aplicación de una fuerza en su propia dirección es igual a la derivada parcial de dicha función con respecto a la misma fuerza. Tal, el célebre teorema de Castigliano.

42.-El principio de mínimo trabajo.- En el § 41 hemos llegado a la ecuación (86), partiendo de cualesquiera variaciones de las componentes de la tensión, susceptibles de satisfacer las ecuaciones de equilibrio. Admitamos ahora variaciones tales que las fuerzas superficiales no se modifiquen; entonces, habrá que reemplazar las ecuaciones de contorno, (b), de dicho párrafo, por estas otras:

y la ecuación (86) se transforma en:

(89)

Lo que se traduce expresando que cuando las componentes de la tensión originada en un cuerpo cargado en su contorno varían sin que se alteren las ecuaciones de equilibrio ni las condiciones de borde, las verdaderas componentes de la tensión son aquellas que hacen nula la variación de la energía potencial elástica. Se puede demostrar que tales valores correctos de las componentes de la tensión hacen mínima la energía potencial elástica, por lo que la ecuación (89) es la expresión del llamado principio de mínimo trabajo.

Dicha ecuación es también válida si a lo largo de una parte del contorno, rígidamente enlazada por medio de sustentaciones fijas, las fuerzas exteriores superficiales varían a consecuencia de modificaciones en las componentes de la tensión. En efecto, bajo tales hipótesis, esa porción del contorno no admite crecimientos, lo que se traduce en la anulación del segundo miembro de la ecuación (86), de manera que se obtiene, nuevamente, la ecuación (89).

El principio de mínimo trabajo se usa muy a menudo para resolver en forma elemental sistemas estáticamente indeterminados. Si X, Y, Z,... son fuerzas o pares de fuerzas que obran sobre elemen-

tos o vínculos superfluos de un sistema elástico, se puede calcular las incógnitas hiperestáticas partiendo de la condición de - que la energia potencial del sistema expresasa en función X, Y, Z, ... , sea mínima, es decir, mediante las ecuaciones

(90)

En los parrafos siguientes aplicaremos el principio de minimo trabajo a la resolución de diversos problemas de elasticidad bidimensional.

43.-Aplicaciones del principio de minimo trabajo. Placas rectangulares.- Vamos a tratar, por ejemplo, el caso de una placa rectangular. Se ha visto en el § 20 que mediante la aplicación de las - series trigonométricas es posible satisfacer las condiciones relativas a dos lados de una placa rectangular: las soluciones asi - obtenidas pueden ser de interés práctico si se aplican a una placa de poca altura en relación con su longitud; pero si ambas dimensiones son del mismo orden de magnitud, deberan ser consideradas las condiciones en los cuatro costados. Para resolver problemas de esta clase se puede algunas veces aplicar ventajosamente - el principio de minima energia.

Supongamos que sobre las extremidades de la placa rectangular se ejerce una tracción de manera que las fuerzas alli aplicadas - obedezcan a una repartición parabólica (figura 96). En este caso, las condiciones de limite son:

Para $x = \pm a$

(a)

Para $y = \pm b$

La energia de deformación correspondiente a una placa cuyo espesor se toma igual a uno es, con arreglo a la ecuación (81).

(b)

Debe destacarse que en el caso de un recinto simplemente conexo como el que aqui se considera, la distribución de las fatigas no depende de las caracteristicas elásticas o constantes técnicas - del material (§ 12), por manera que haciendo igual a cero el coe-

ficiente de Poisson, , los cálculos se simplificarán notablemente. Introduciendo, pues, la función de tensión y sustituyendo en (b) los valores

encontramos

(c)

La expresión exacta de la función de tensión será aquella que satisfaga las condiciones (a) y haga que la energía de deformación (c) sea mínima.

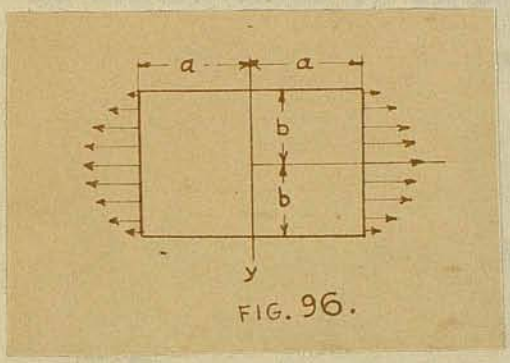


FIG. 96.

Si para la determinación del mínimo de (c) aplicamos el cálculo de variaciones, llegaremos a la ecuación (26) para la función de tensión (13); pero aquí emplearemos otro procedimiento, que nos permitirá obtener una solución aproximada. Como función de Airy, adoptaremos una serie,

(d)

que satisfaga a las condiciones de límite (a) y en la cual

son constantes que habrá que determinar posteriormente. Llevando esta serie a la expresión (e) obtendremos V como una función de segundo grado en El valor de las constantes podrá calcularse entonces con arreglo a las siguientes condiciones de mínimo, que serán ecuaciones lineales en ...:

(e)

Por lo general, una adecuada elección de las funciones , ... permitirá obtener una solución satisfactoriamente aproximada empleando tan solo unos pocos términos de la serie (d). En nuestro caso, las condiciones de límite (a) quedan satisfechas haciendo:

ya que, operando, obtenemos:

Las restantes funciones: , ,..., deben ser elegidas de manera que las correspondientes tensiones desaparezcan en el contorno. Nos

asegurareмos de ello efectuando a todas esas funciones, del factor $(x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2$, cuyas derivadas segundas con respecto a x y a y se anulan para los lados $y = \pm b$ y $x = \pm a$, respectivamente; mientras que desaparece en correspondencia de los cuatro bordes de la placa. Se podrá tomar, pues, como expresión de la función de tensión, la siguiente:

(f)

La serie contiene solamente las potencias pares de x e y porque la distribución de tensiones es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados. Si nos limitamos al primer término, , de la serie (f), tendremos:

De la primera de las ecuaciones (e) llegamos, entonces, a:

Para una placa cuadrada (= b), resultará:

$$= 0{,}04253 \frac{S}{a^6} ,$$

y las componentes de la tensión valdrán:

En la figura 97, la curva II representa la distribución de en la sección transversal x = 0, en tanto que la repartición parabólica que hemos supuesto para los esfuerzos en las extremidades de la placa está reflejada por la curva I.

Calculemos ahora con tres términos de la serie (f) para lograr una aproximación mayor, Las ecuaciones (e) que sirven para el cálculo de las constantes serán, entonces:

(g)

(g)

Estas ecuaciones nos dan para una placa cuadrada, o sea, para - a = b:

La repartición de la componente del esfuerzo en la sección - transversal x = 0 está dada por la ley

y representada graficamente en la figura 97 por la curva III.

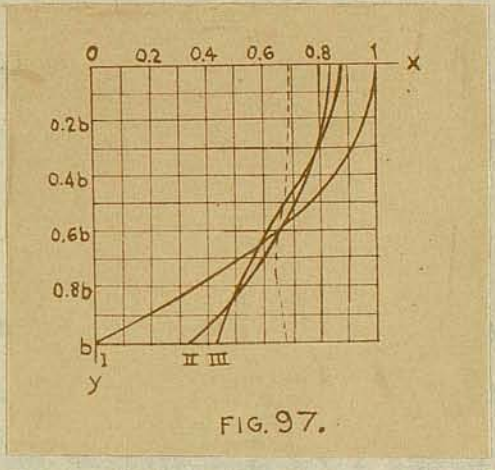


FIG. 97.

La repartición de esfuerzos en la sección transversal x = 0 se va haciendo mas uniforme a medida que aumenta la longitud de la placa. Para a = 2b, por ejemplo, se deduce de las ecuaciones (g) los siguientes valores:

Para la mencionada sección transversal, se consigna a continuación algunos valores de :

$\frac{y}{b}$ = 0 0,2 0,4 0,6 0,8 1,0

= 0,690 S 0,684 S 0,669 S 0,653 S 0,649 S 0,675 S

En la figura 97 se indica con lineas de trazos esta repartición de esfuerzos, que, como vemos, se aparta muy poco de la tensión - media, 2/3S.

Para contemplar otras reparticiones simétricas de esfuerzos en

los bordes x = ± a sólo tendremos que adoptar otra función en la expresión (f) y unicamente se deberá modificar los segundos miembros de las ecuaciones (g).

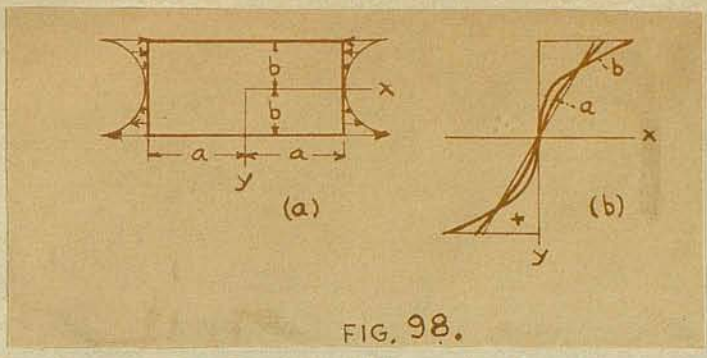


FIG. 98.

Como ejemplo de distribución asimétrica con relación al eje x, consideremos el caso de una pieza flexada, figura 98, en la cual la repartición de esfuerzos en las secciones extremas siguen la ley: y se representa por la curva b, figura 98b. Evidentemente, el sistema de tensiones será impar respecto al eje x y par con respecto al eje y. Se satisfacen estas condiciones dando a la función de tensión la forma

(h)

Como antes, el primer término satisface para las condiciones de límite. Si aplicamos la ecuación (h) con cuatro coeficientes ... , , en las ecuaciones (e), encontramos para una placa cuadrada (a = b):

(k)

expresión en la cual = x/a y = y/b. La distribución de tensiones en la sección transversal media, para la cual x = 0, está representada por la curva a de la figura 98b, y como se ve, es sensiblemente lineal.