ELEMENTOS

DE

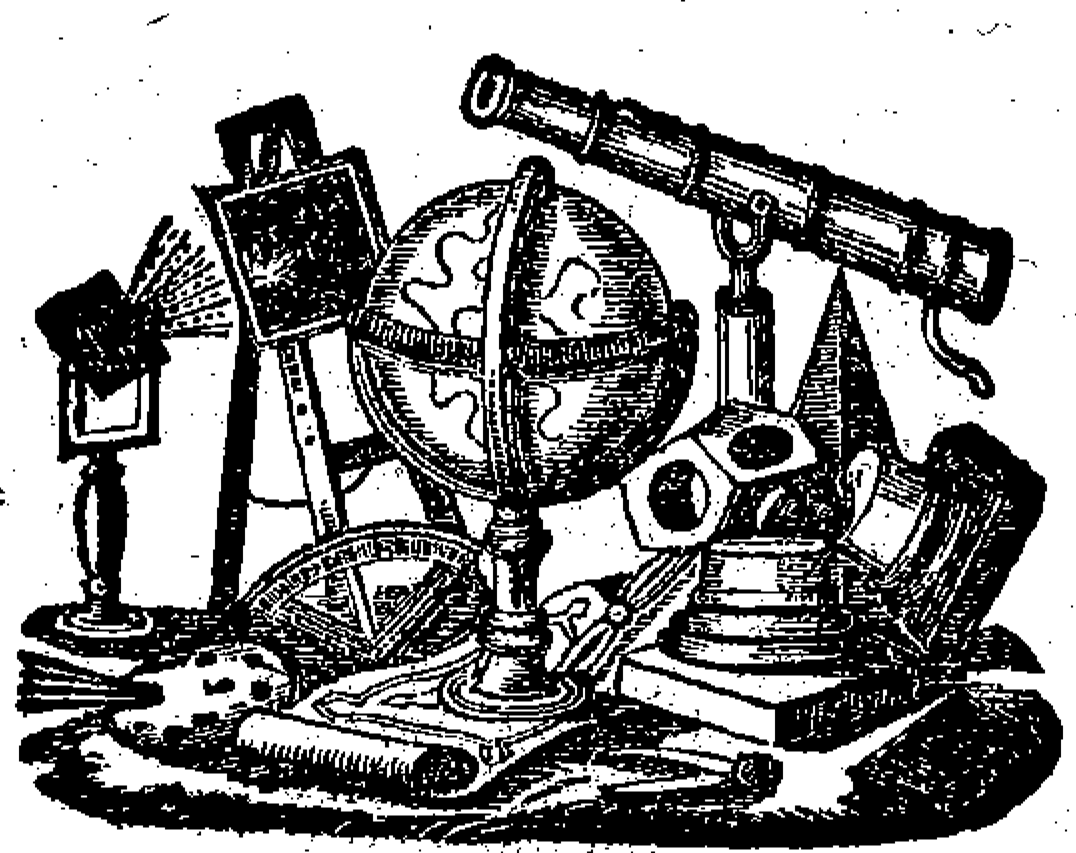
MATEMATICAS PURAS Y MIXTAS:

POR

DON ALBERTO LISTA.

Quidquid præcipies, esto brevis.
HORAT.

TERCERA EDICION.



TOMO II.

MADRID:
IMPRENTA DE DON NORBERTO LLORENCI.
1838.

PROLOGO

DE LA TERCERA EDICION.

En esta tercera edicion no he hecho tantas adiciones y correcciones al álgebra como á la aritmética, porque la parte esencial, que consiste en los métodos generales y en la interpretacion de las expresiones *exóticas*, me parece que está explicada en la primera edicion con la suficiente claridad. Asi que he hecho muy pocas alteraciones en los artículos de las *Observaciones sobre las ecuaciones de primer grado, de las ecuaciones de segundo grado, y del teorema de los límites.*

No he hecho mas que coordinar los problemas, poner en todos las ecuaciones y la resolucion para alivio de los principiantes, y exponer extensamente la resolucion de algunas cuestiones difíciles, que estaba no mas que indicada en la primera edicion. He aumentado el número y la dificultad de los ejemplos que sirven para ejercitar las reglas del cálculo, ampliando algun tanto las explicaciones cuando me ha parecido necesario.

La adicion mas considerable es el último artículo, que no se hallaba en la primer edicion, y en el cual me he propuesto demostrar por el método algebráico casi todos los teoremas de la aritmética, y generalizar las teorías de los números. A la verdad, ni la naturaleza de un tratado, escrito para la enseñanza, ni el corto círculo á que se extienden los principios del álgebra elemental, me han permitido exponer los sublimes descubrimientos de Fermat, Gauss, Wilson y Legendre. Me he contentado con indicar los primeros principios de la teoría de los números á los que se complacen en las combinaciones aritméticas; y con hacer ver prácticamente, no solo la facilidad con que el álgebra demuestra aquellas verdades que parecieron en la aritmética tan dificiles de comprender, sino tambien la sagacidad con que estudia y desentraña las propiedades mas recónditas de los números, inaccesibles á la simple aritmética, cuando los somete á la accion infalible de su idioma.

Los artículos de letra pequeña son ó explicaciones mas latas de los principios, ó cuestiones y aplicaciones nuevas: asi ó bastará leerlos, ó deberán omitirse hasta el segundo repaso del álgebra.

ALGEBRA.

ARTÍCULO 1º

Objeto de esta ciencia.

1. Algebra es aquella ciencia que expresa por medio de caractéres generales las operaciones que ligan entre sí las diversas cantidades que hay que considerar en una cuestion. El artificio algebráico consiste en expresar tanto las cantidades conocidas ó *datos* del problema, como las desconocidas ó *incógnitas*, por símbolos arbitrarios, que comunmente son las letras de los diferentes alfabetos; ligarlas por medio de los signos que indican las diferentes operaciones que deben ejecutarse sobre dichas cantidades, y en virtud de raciocinios, que el uso y las reglas convierten en un cálculo tan mecánico como los de la aritmética, inferir qué operaciones deben hacerse sobre las cantidades conocidas para deducir de ellas el valor de las incógnitas.

Sirva de ejemplo la cuestion siguiente: *buscar dos números que sumen* 100, *y se diferencien en* 40.

Sea x el menor de estos dos números; el mayor será $x+40$: y como la suma de los dos debe ser igual á 100, será $x+x+40=100$, ó $2x+40=100$.

Quitando de ambos miembros 40, será $2x=60$; y partiendo ambos miembros por 2, será $x=30$; luego el número menor será 30, y el mayor 70. En efecto, la suma de ambos es 100. La cuestion se ha resuelto con mucha sencillez por solo haber introducido el signo x en lugar del número menor.

Mas no se limita el álgebra á resolver con sencillez las cuestiones: su principal objeto es generalizarlas y extenderlas á todos los casos particulares de una misma especie. El buen calculador deberá presentar la cuestion anterior bajo esta forma: *buscar dos números, dada su suma y diferencia*, y la resolverá del modo siguiente:

Sea s la suma, d la diferencia, y x el número menor: el mayor será $x+d$: y como la suma de los dos debe ser igual á s, será $2x+d=s$. Quitando d de ambos miembros, será $2x=s-d$. Partiendo ambos miembros por 2, será $x=\frac{s-d}{2}$, ó $x={}^1/_2 s-{}^1/_2 d$, valor del número menor. Añadiéndole d para tener el número mayor, este será ${}^1/_2 s-{}^1/_2 d+d$, ó ${}^1/_2 s+{}^1/_2 d$.

Examinemos la significacion de estas dos expresiones ${}^1/_2 s-{}^1/_2 d$ y ${}^1/_2 s+{}^1/_2 d$. Como no son numéricas, no resuelven ningun problema particular; pero hacen mas, porque dan la siguiente regla general: *el número menor es igual á la semisuma menos la semidiferencia; y el número mayor es igual á la semisuma mas la semidiferencia*. Esta regla es aplicable á todos los casos particulares de la misma especie. Asi, si se piden dos números que sumen 100, y se diferencien en 40, el menor será 50—20 ó 30, y el mayor 50+20 ó 70. Si se piden dos números que sumen 80, y se diferencien en 27, el menor será $40-13^1/_2$, ó $26^1/_2$, y el mayor $40+13^1/_2$, ó $53^1/_2$ etc.

Llámanse *fórmulas* las expresiones que indican las operaciones que han de hacerse con los datos para tener el valor de las incógnitas. Las fórmulas del problema anterior son ${}^1/_2 s-{}^1/_2 d$ y ${}^1/_2 s+{}^1/_2 d$.

Obsérvese que los raciocinios que hemos hecho para resolver la cuestion propuesta no son mas que las traducciones en escritura algebráica de los raciocinios mas largos y complicados, que hubiera sido necesario hacer en lenguage comun para resolver la misma cuestion, y son los siguientes:

	Traduccion.
1.º El número mayor es igual al número menor mas la diferencia.	$x+d$.

2.º El mayor mas el menor compone dos veces el menor mas la diferencia, y esto es igual á la suma. $2x+d=s.$

3.º Quitando de ambas sumas iguales la diferencia, el doble del número menor será igual á la suma menos la diferencia. . . . . $2x=s-d.$

4.º Partiendo estas dos cantidades iguales por 2, será el número menor igual á la semisuma menos la semidiferencia. . . . . $x={}^1\!/_2 s-{}^1\!/_2 d.$

5.º Añadiendo al número menor, que es la semisuma menos la semidiferencia, la diferencia, será el número mayor la semisuma mas la diferencia menos la semidiferencia, ó la semisuma mas la semidiferencia. . . . . $x+d=\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}d.$

La ventaja del lenguage algebráico sobre el comun consiste en su *concision*; porque siendo mas conciso, es mas fácil de escribir, presenta las ideas con mas prontitud, y evita el trabajo de la memoria.

2. Dos son, pues, las principales ventajas del álgebra; la primera, que simplificando los raciocinios que hay que hacer sobre las cantidades, extiende el dominio de las matemáticas á las cuestiones mas complicadas: la segunda, que el resultado algebráico ó la fórmula sirve de regla para resolver todas las cuestiones de la misma especie; pues tengan los datos el valor que tuvieren, las fórmulas indican las operaciones que deben hacerse sobre ellos para tener los valores de las incógnitas.

2º *Algoritmo, ó expresion y simplificacion de las operaciones.*

3. La suma, resta, multiplicacion y division no se efectúan en las cantidades algebráicas, solo se indican. Pero es de suma importancia simplificar esta indicacion todo lo posible; y este es el objeto del *algoritmo*, ó de la suma, resta, multiplicacion y division *algebráicas*.

La suma de cantidades iguales, como $a+a+a+a$, se expresa poniendo la a una sola vez, y anteponiéndole el número de cantidades sumadas. Así $a+a+a+a=4a$. El número que antecede á una letra se llama *coeficiente* suyo, y denota que la letra está multiplicada por él.

La reunion de dos ó mas letras significa el producto de las cantidades que representan: abc equivale á $a\times b\times c$: $4abt$ equivale á $4\times a\times b\times t$: $^3/_5ab$ equivale á $^3/_5\times a\times b$.

Cuando en el producto hay letras iguales, se pone cada letra una sola vez, y sobre ella un poco á la derecha el número de letras iguales: este número se llama *exponente* de la letra. Así $4aabbb$ se escribirá $4a^2b^3$. El exponente, pues, es el índice de la potencia, á que está elevada la letra.

Cuando varias cantidades están sumadas ó restadas, cada una de ellas se llama *término*, y el conjunto de todas *polinomio*. *Binomio* es el que consta de dos términos: *trinomio* el que consta de tres etc. $4a^2b-5ab^3+7bc$ es un trinomio. *Monomio* es un término solo.

4. Términos semejantes son los que constan de un mismo número de factores literales respectivamente iguales. En el polinomio $4ab^3-5a^3b+6a^3b+9ab^3$, $4ab^3$ y $9ab^3$ son semejantes entre sí: $-5a^3b$ y $6a^3b$ son semejantes entre sí: $4ab^3$ y $-5a^3b$ no son semejantes.

Los términos semejantes se reducen á uno solo, considerando el conjunto de letras como un factor comun, que está repetido en cada uno las veces que indica su coeficiente; y sumando despues ó restando estos coeficientes, segun tengan un mismo signo ó signo contrario. El resultado de la suma ó resta será el coeficiente del producto de las letras; será aditivo ó tendrá el signo $+$, si la suma de coeficientes positivos es mayor que la de los negativos: en el caso contrario tendrá el signo $-$ ó será sustractivo.

En el ejemplo anterior diré: $4ab^3+9ab^3$ son $13ab^3$, $-5a^3b+6a^3b$ queda en a^3b. Así aquel polinomio se reduce á $13ab^3+a^3b$; $4a^2b-5a^2b+a^2b$ es cero.

5. La suma de las cantidades algebráicas se expresa poniendo las unas á continuacion de las otras, unidas con el signo $+$, haciendo antes la reduccion de términos semejantes si los hay.

Ejemplo.

$$\begin{array}{l} 4a^2b-5abc+9b^2 \\ 7b^2-4a^2b-8abc \\ 6t-2a^2b-6abc \\ \hline \end{array}$$

$16b^2-2a^2b-19abc+6t$ es la suma expresada con la mayor sencillez posible.

6. Para restar las cantidades algebráicas se escribirá el minuendo, y á continuacion el subtrahendo con los signos mudados.

Dem. Háyase de restar de a, $b-c$. El resíduo no se alterará aunque á minuendo y subtrahendo se añada la cantidad c: luego la operacion se reduce á restar de $a+c$, b: el resíduo es $a+c-b$, es decir, igual al minuendo mas el subtrahendo con los signos mudados: luego etc.

Ejemplo. Restando de $4a^2-9ab+7b^2$, $3a^2+7ab-6c^2$, el resíduo es $4a^2-9ab+7b^2-3a^2-7ab+6c^2=a^2-16ab+7b^2+6c^2$.

Acomoda muchas veces presentar con los signos mudados dós ó mas términos de un polinomio: entonces se les encierra en un paréntesis, y se le pone fuera el signo $-$, que denóta que estan restados de lo demas de la cantidad; pues verificada la resta tendrian aquellos términos su signo primitivo. Asi $a-b+c$ equivale á $a-(b-c)$; $4a-3b-3c=4a-(3b+3c)$.

7. Para multiplicar los monomios, se multiplican con cierto orden los factores de que constan. Primero se multiplican entre sí los factores numéricos, es decir, los coeficientes: las letras desiguales se escriben juntas; y si hay una misma letra en ambos factores, se suman sus

exponentes, porque en el producto debe entrar aquella letra como factor tantas veces como entre en el multiplicando mas tantas veces como entre en el multiplicador.

Adviértase que á un termino que esté sin coeficiente, se le entiende el coeficiente 1, y á una letra que esté sin exponente, se le entiende el exponente 1.

Ejemplo. $5a^3b^4cm \times 7a^2bc^2z = 35a^5b^5c^3mz$.

8. Para multiplicar dos polinomios se multiplicará cada término del uno por todos los del otro; y cada producto parcial tendrá el signo $+$, si los dos términos de que proviene tienen un mismo signo; y tendrá el signo $-$, si dichos dos términos tienen signo contrario.

Dem. Háyase de multiplicar $a+b$ por $c+d$, que se indica asi $(a+b)\ (c+d)$. Esta operacion quiere decir repetir $a+b$, c número de veces, y luego d número de veces, y sumar los productos. Ahora bien: $a+b$ multiplicado por c es $a \times c$ mas $b \times c$ ó $ac+bc$: por la misma razon $(a+b)d = ad+bd$, y el producto total será $ac+bc+ad+bd$. Se ve pues que cuando en los factores no hay signo negativo, todos los términos del producto son positivos.

2º Si se hubiera de multiplicar $(a-b)\ (c-d)$, esto equivale á multiplicar $(a-b)c$, luego $(a-b)d$, y restar este producto del anterior. Ahora bien, $(a-b)c$ es $ac-bc$: porque si de cada a hay restada una b, de a repetida c número de veces deberá restarse b repetido c número de veces ó bc. Por la misma razon $(a-b)d = ad-bd$. Restando este producto del anterior, será $(a-b)\ (c-d) = ac-bc-ad+bd$.

Aunque los polinomios fueran diferentes de los propuestos se podrian reducir á la misma forma que estos tienen haciendo igual a la suma de los términos positivos de un factor, $=c$ la de los positivos del otro, $=b$ la suma de los negativos del primero, é $=d$ la de los negativos del segundo: cuando en el producto anterior pusiéramos por a, b, c, d sus valores, como en estos valores no entra ningun signo $-$, veríamos que al multiplicarse cada término del multiplicando por cada término del multiplicador, todos los productos parciales, procedentes de factores de un mismo signo, toman el signo $+$, y los procedentes de factores de distinto signo toman el signo $-$: luego etc.

Ejemplo de la multiplicacion de los polinomios.

$$
\begin{array}{l}
4a^2-3ab+7b^2 \\
(2a^2-6ab+3b^2) \\
\hline
\left.\begin{array}{l}
8a^4-6a^3b+14a^2b^2 \\
\quad -24a^3b+18a^2b^2-42ab^3 \\
\qquad +12a^2b^2-9ab^3+21b^4
\end{array}\right\} = 8a^4-30a^3b+44a^2b^2-51ab^3+21b^4.
\end{array}
$$

9. La regla de multiplicar nos da los siguientes teoremas:

1º Elevando el binomio general $a+b$ al cuadrado, ó multiplicándolo por sí mismo, da $a^2+2ab+b^2$: luego el cuadrado de un binomio consta del cuadrado de su primera parte, duplo de la primera parte por la segunda, y cuadrado de la segunda.

2º Elevando el binomio $a+b$ al cubo, ó multiplicando su cuadrado $a^2+2ab+b^2$ por el mismo binomio $a+b$, resulta $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$: luego el cubo de un binomio consta del cubo de la primera parte, triplo del cuadrado de la primera por la segunda, triplo de la primera por el cuadrado de la segunda y cubo de la segunda.

3º Multiplicando $a+b$ por $a-b$ resulta a^2-b^2: luego la suma de dos cantidades, multiplicada por su diferencia, produce la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

4º Si se multiplican varios factores binomios, cuya primer parte sea igual en todos, y la segunda diferente, como $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$..... el producto que tomado hasta 4 factores, es $x^4+(a+b+c+d)\,x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\,x^2+(abc+abd+acd+bcd)\,x+abcd$, tendrá las propiedades siguientes:

El primer término será igual á la primera parte elevada á la potencia que indica el número de factores; pues debe ser el producto de los primeros términos de los factores; es decir, de tantas x como factores hay.

El último término debe ser igual al producto de las segundas partes, que son los segundos términos de los factores.

Desde el primer término al último, deben disminuir los exponentes de la primer parte de unidad en unidad.

Habrá tantos términos como factores hay más uno, contando como un solo término todos aquellos en que x esté elevado á una misma potencia.

Cada término debe contener tantos factores literales como factores binomios hay en el producto.

El coeficiente del segundo término debe ser la suma de las segundas partes; porque en cada producto de este término, que tiene una x menos que el primero, no debe entrar mas que una de las segundas partes; y como el producto será siempre el mismo, aunque las letras a, b, c, d se permuten, es necesario que el coeficiente de dicho término sea tal que no se altere por dicha permutacion. Esto no sucede sino á la suma de las segundas partes $a+b+c+d$: luego este coeficiente es la suma de las segundas partes.

El coeficiente del tercer término debe ser la suma de los productos de dos en dos que se pueden formar con las segundas partes. Porque este término contiene dos x menos que el primero; y por tanto cada producto suyo debe contener dos de los factores a, b, c, d ...... ; y como la permutacion de estas letras no debe alterarlo, será forzosamente la suma de los productos de dos en dos que se pueden formar con dichas letras $ab+ac+ad+bc+bd+cd$.

Del mismo modo se demostrará que el coeficiente del cuarto término es la suma de los productos de tres en tres de las segundas partes, el del quinto la suma de los productos de cuatro en cuatro de las mismas etc.

10. La division de las cantidades monomias debe hacerse por reglas inversas á las de la multiplicacion; es decir, partiendo los coeficientes y restando los exponentes de las letras iguales: en cuanto á las letras desiguales, las del dividendo quedarán en el numerador, y las del divisor en el denominador.

Ejemplos. $\frac{12a^3b^2c}{3ab}=4a^2bc$: $\frac{4ac^3de^3}{8bd^3e}=\frac{ac^3e^2}{2bd^2}$: la letra d queda en el denominador, donde tenia el mayor exponente: porque suprimiendo un factor d en numerador y denominador, en el numerador no queda d, y en el denominador donde habia d^3, quedará d^2.

11. Para partir los polinomios es necesario ante to-

das cosas buscar en el dividiendo (producto del divisor dado por el cociente incógnito) un término que provenga de la multiplicacion de otros dos, uno del divisor, y otro del cociente, sin reduccion alguna. Este término es seguramente en el que tiene mayor exponente una de las letras, porque procede ciertamente de la multiplicacion de los dos términos del divisor y cociente, en que tiene dicha letra mayor exponente. Dispongo, pues, los términos del dividendo y divisor de manera que los exponentes de una letra disminuyan en ambos desde el primer término hasta el último, lo que se llama *ordenar un polinomio con respecto á una letra*; y partiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, tendré el primer término del cociente.

Multiplico este término por todo el divisor, resto el producto del dividendo, y me quedará el producto del divisor por los términos que faltan del cociente.

El mismo raciocinio haré en este nuevo producto, y partiendo su primer término por el primero del divisor, tendré el segundo término del cociente; y del mismo modo hallaré los demas. La operacion acaba cuando en una de las restas queda cero de resíduo, y entonces la division algébrica es exacta: ó cuando el exponente de la letra que ordena es menor en el primer término del dividendo parcial que en el divisor, en cuyo caso es la division inexacta, pues aquel término no ha podido proceder de la multiplicacion del primer término del divisor por una cantidad entera. En este caso se forma un quebrado del resto y divisor, y se añade al cociente obtenido.

Cuando en las divisiones parciales de los términos, algunos de ellos ó ambos tengan el signo —, deberá dársele al cociente un signo tal, que su multiplicacion por el primer término del divisor produzca el primer término del dividendo: esto se conseguirá dando al cociente el signo + si los términos que se parten tienen un mismo signo, y el signo — si lo tienen diverso.

Si la letra que ordena se halla con un mismo exponente en varios términos, se estimarán todos como uno solo, poniendo la letra con su exponente fuera de un paréntesis, y dentro de él la suma de las cantidades que la multiplican en aquellos términos.

Ejemplos.

1º

$$\begin{array}{l|l}
4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\
\hline
-4a^6+10a^4b^2-4a^3b^3 & 2a^3+5ab^2-2b^3 \\
\hline
+10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
-10a^4b^2+25a^2b^4-10ab^5 & \\
\hline
-4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
+4a^3b^3-10ab^5+4b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

2º

$$\begin{array}{l|l}
a^4-b^4 & a-b \\
\hline
-a^4+a^3b & a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\
\hline
a^3b-b^4 & \\
-a^3b+a^2b^2 & \\
\hline
a^2b^2-b^4 & \\
-a^2b^2+ab^3 & \\
\hline
ab^3-b^4 & \\
-ab^3+b^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

3º

$$\begin{array}{l|l}
a^4+(b-5c)a^3-(4b^2-6c^2)a^2+(b^3-5bc^2-5b^2c+c^3)a+b^4-c^4 & a^2-(2b+2c)a+b^2-c^2 \\
\hline
-a^4+(2b+2c)a^3-(b^2-c^2)a^2 & a^2+(3b-3c)a+b^2+c^2 \\
\hline
+(3b-3c)a^3-(5b^2-7c^2)a^2+(b^3-5bc^2-5b^2c+c^3)a+b^4-c^4 & \\
-(3b-3c)a^3+(6b^2-6c^2)a^2-(3b^3-3bc^2-3b^2c+3c^3)a & \\
\hline
+(b^2+c^2)a^2-(2b^3+2bc^2+2b^2c+2c^3)a+b^4-c^4 & \\
-(b^2+c^2)a^2+(2b^3+2bc^2+2b^2c+2c^3)a-b^4+c^4 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

4.º

$$
\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & (2b-c)a^2-(b^2+bc)a+b^3 \\
\hline
-(4b^2-4bc+c^2)a^4+(2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(2b^4-b^3c)a^2 & (2b-c)a^2+(b^2+bc)a-b^3 \\
\hline
(2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(3b^4+b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & \\
-(2b^3+b^2c-bc^2)a^3+(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2-(b^5+b^4c)a & \\
\hline
-(2b^4-b^3c)a^2+(b^5+b^4c)a-b^6 & \\
+(2b^4-b^3c)a^2-(b^5+b^4c)a+b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Se empieza partiendo el coeficiente de a^4 que es $4b^2-4bc+c^2$, por el de a^2 que es $2b-c$; y resulta $2b-c$: por tanto el cociente de los primeros términos de ambos polinomios es $(2b-c)a^2$. Multiplicado por el divisor y restado del dividendo, la reduccion de los términos, que contienen una misma potencia de a, se hace del modo siguiente: los términos que contienen a^2, tienen ambos el signo $-$; sumo sus coeficientes, y resulta $3b^4+b^3c+b^2c^2$. Si ambos tienen diferente signo, se elige el que se quiera para el resultado, y se resta del coeficiente que tiene el signo elegido el coeficiente que tiene el signo contrario.

12. La division algebráica da los teoremas siguientes:

1.º $\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\dots\dots+a^{m-1}$: porque disminuyendo de unidad en unidad en cada término el exponente de la x, y aumentando el de la a, cuando desaparezca x del término del cociente, este será a^{m-1}, que multiplicado por $-a$ produce $-a^m$, que restado del dividendo lo desvanece: luego la diferencia de dos potencias de un mismo grado dividida por la diferencia de sus raices da un cociente exacto, cuya forma es la série $x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}+\dots\dots+a^{m-1}$.

2.º Haciendo en la fórmula anterior $a=1$, será $\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\dots\dots+1$; luego si una potencia disminuida en una unidad se divide por su raiz, disminuida tambien en una unidad, el cociente es exacto é igual á la unidad sumada con las potencias sucesivas de la misma raiz, desde la primera hasta la que es inferior en una unidad á la potencia que dicha raiz tiene en el dividendo.

Aplicacion numérica: $\frac{3^5-1}{3-1}=1+3+3^2+3^3+3^4$; como se puede comprobar.

Si un polinomio ordenado con respecto á una letra x se divide por el binomio $x-a$, el resto de la particion será el mismo polinomio, substituyendo en él á la letra que lo ordena la letra a. Este teorema se explica y comprueba con el ejemplo siguiente:

Si partimos $x^2+2bx+c^2$ por $x-a$, haciendo la particion, da de cociente $x+2b+a$, y el resto es $a^2+2ba+c^2$, es decir, el dividendo mismo mudada la x en a.

Dem. Sea el polinomio general $x^m+px^{m-1}+qx^{m-2}+\ldots\ldots +tx+u$. Dividiéndolo por $x-a$, el primer término del cociente será x^{m-1}: y el primer término del dividendo que queda será $(a+p)x^{m-1}$: despues de la segunda particion el primer término que queda es $(a^2+pa+q)x^{m-2}$: al fin de la tercera queda $(a^3+pa^2+qa+r)x^{m-3}$: luego despues de m, número de particiones, desaparecerá del resto la x, y quedará $a^m+pa^{m-1}+qa^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+ta+u$: luego etc.

3º. *De las fracciones algebráicas.*

13. Las fracciones algebráicas se calculan como las numéricas.

Ejemplos. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$; $\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac+b}{c}\times\frac{mq+p}{q}=\frac{(ac+b)(mq+p)}{cq}$; $\frac{5b^2}{6a^3}:\frac{3b}{5ac}=\frac{25bc}{18a^2}$. $a+\frac{x-2a}{5}=\frac{5a+x-2a}{5}=\frac{3a+x}{5}$; $\frac{p}{y}-\frac{z^2}{3p^2}=\frac{3p^3-z^2y}{3p^2y}$: $3a-\frac{ab}{a+b}=\frac{3a^2+2ab}{a+b}$; $\frac{4c^2}{m^3}\times 3m=\frac{12c^2}{m^2}$; $x=\frac{a+b}{p}$; $p=\frac{px-a-b}{p^2}$.

La investigacion del máximo comun divisor para la reduccion de las fracciones algebráicas polinomias, ofrece algunas dificultades, que se desvanecen, teniendo presentes estos dos principios:

1.º Si un polinomio es divisible por un factor, independiente de la letra que lo ordena, este factor ha de ser comun á todos los términos del polinomio: pues vemos que al multiplicar un polinomio por un factor, independiente de la letra que lo ordena, no se altera el orden de los exponentes de dicha letra, y parece el factor en todos los términos del producto.

2.º El máximo comun divisor de dos cantidades no se altera aunque se multiplique ó parta una de ellas por una cantidad que no tenga ningun factor comun con la otra; porque no añadiendo esta multiplicacion, y no suprimiendo esta particion, ningun factor comun á ambas, no se podrá alterar la mayor medida comun, que es el producto de todos los factores comunes á ambas cantidades. Asi la mayor medida de 50 y 30 es la misma que la de 50 y 10, porque el 3, por quien he partido el 30, no es factor del 50. Tambien dicha mayor medida comun es la misma que la de 350 y 30, porque el 7 no es factor del 30.

En las cantidades algebráicas se ve lo mismo. Sean ac, bc las dos cantidades algebráicas, y supongamos que a y b son primos entre sí y con c; es evidente que podremos multiplicar la segunda por d, siendo d primo con a y c, y partir la primera por a; en cuyo caso se reducirán á bdc y c, cuya medida comun es c, la misma que tenian las dos cantidades propuestas.

Sentado esto, comenzaré á buscar el mayor divisor comun de los dos polinomios propuestos, viendo si tienen algun factor comun, ya numérico, ya algebráico, que sea independiente de la letra que ordena. Este factor aparecerá fácilmente, porque debe ser comun á todos los términos de ambos polinomios. Si lo hay, se pondrá aparte, como factor del comun divisor, y partiré ambos polinomios por él.

Despojados por esta particion del factor independiente, buscaré el factor comun que tengan, dependiente de la letra que ordena, por la sucesiva particion, como se enseñó en aritmética. Para evitar los quebrados que podrian resultar en los cocientes, observaré estas dos reglas: 1ª Partir el divisor por toda cantidad que sea comun á sus términos, y que no tenga ningun factor comun con el dividendo: 2ª Multiplicar despues el dividendo por los factores necesarios para que su primer término sea divisible por el primero del divisor.

Cuando se llegue á una division exacta, el último divisor será el factor comun que tienen los dos polinomios dependiente de la letra que ordena: se multiplicará por el factor independiente, si lo hubo, y se tendrá el máximo comun divisor que se pedia.

Pero si continuando la division se llega á un resto independiente de la letra que ordena, esto probará que los polinomios no tienen ningun factor comun dependiente de dicha letra; y por tanto no tendrán mas divisor comun que el factor independiente si lo hubo.

Ejemplos. Reducir á mínimos términos el quebrado $\frac{6a^3-6a^2y+2ay^2-2y^3}{12a^2-15ay+3y^2}$. No hay factor independiente, suprimo en el denominador el factor 3, y queda en $4a^2-5ay+y^2$. Multiplico el numerador por 2 para que su primer término sea divisible por $4a^2$: el numerador quedará en $12a^3-12a^2y+4ay^2-4y^3$: partiendo, tengo el cociente $3a$ y el resto $3a^2y+ay^2-4y^3$. Multiplícolo por 4 para que su primer término sea divisible por $4a^2$, y es $12a^2y+4ay^2-16y^3$. Parto, y el cociente es $3y$ y el resto $19ay^2-19y^3$. Como en este tiene la letra que ordena menor exponente que en el primer término del divisor, partiré el divisor por el resto, suprimiendo antes en este el factor independiente $19y^2$. Partiendo pues $4a^2-5a+y^2$ por $a-y$, sale el cociente exacto $4a-y$: luego $a-y$ es el mayor divisor comun de los términos de la fraccion propuesta: partiéndolos por él quedará reducida á $\frac{6a^2+2y^2}{12a-3y}$.

Otro.

Sea la fraccion propuesta $\frac{4a^4-4a^2b^2+4ab^3-b^4}{6a^4+4a^3b-9a^2b^2-3ab^3+2b^4}$. No hay factor comun independiente. El divisor comun de numerador y denominador es $2a^2+2ab-b^2$ que la reduce á $\frac{2a^2-2ab+b^2}{3a^2-ab-2b^2}$.

Otro.

Sea la fraccion $\frac{54a^2b-24b^3}{45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4}$; hay el factor independiente $3b$. Dividiendo por él ambos polinomios quedan reducidos á $15a^3+a^2b-3ab^2+2b^3$ y $18a^2-8b^2$. El divisor comun de estos es $3a+2b$: luego el de los polinomios propuestos es $3b(3a+2b)$. Para reducir la fraccion será mejor partir sus términos, primero por $3b$, y despues por $3a+2b$, y se reduce á $\frac{6a-4b}{5a^2-3ab+b^2}$.

Sea en fin la fraccion

$$\frac{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}.$$

Hay el factor independiente $b+c$. Partiendo ambos polinomios por él, busco el divisor comun de $a^2(b-c)-ab(2b-c)+b^3$ y $a^3(b+c)-a^2b(2b+c)+ab^3$, que es $a-b$. Obsérvese que las particiones necesarias para hallarlo son de la misma especie que las de los ejemplos tercero y cuarto que pusimos en la division de los polinomios. En la primer particion hay que multiplicar el dividendo por $b-c$. El divisor comun de los polinomios propuestos es $(b+c)(a-b)$, y la fraccion se reduce á $\frac{a(b-c)-b^2}{a^2(b+c)-ab^2}$

4º *Ecuaciones de primer grado con una sola incógnita.*

21. *Ecuacion de primer grado* es aquella en que el mayor exponente de la incógnita es 1, como $3x-4=2x$. *Ecuacion del 2º grado*, en la que el mayor ex-

ponente de la incógnita es 2: del 3º en la que es 3 etc. La ecuacion $3x^2-5x^3=x^4-9x-35$ es *ecuacion del 4º grado*.

16. Para resolver un problema es necesario, primero, hallar una ecuacion en que esten indicadas las relaciones de la incógnita con las cantidades conocidas: segundo, deducir de esta ecuacion el valor de la incógnita. *Poner el problema en ecuacion* es cifrar en una ecuacion las relaciones entre incógnitas y datos. *Despejar la incógnita ó resolver la ecuacion* es hallar el valor de la incógnita, deducido de la ecuacion del problema.

17. Para poner el problema en ecuacion *deben indicarse con la incógnita las mismas operaciones que se harian con su volor numérico, si fuera conocido, para comprobar la condicion del problema*. El siguiente ejemplo hará entender bien esta regla.

Se pregunta: ¿cuánto debia un comerciante, que habiendo pagado en una ocasion la mitad de la deuda, en otra el tercio y en otra la duodécima parte, queda todavía á deber 630 duros?

Si se dijese que la deuda era al principio de 1200 duros, para ver si esto era cierto, es decir, para ver si este número satisfacia á la condicion del problema, sacaria su mitad, su tercera, su duodécima parte, las sumaria, añadiria 630 duros; y si esta suma era igual á la deuda 1200, era señal de que el número 1200 era el número pedido. Pues suponiendo que dicho número es x, indico con la x, por medio de los signos algebráicos las mismas operaciones que he hecho con el número 1200; y resulta $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+630=x$, y esta es la ecuacion del problema propuesto.

18. Para despejar la incógnita en una ecuacion del primer grado se observarán las reglas siguientes:

1ª Si hay quebrados en la ecuacion, redúzcanse dichos quebrados á un mismo denominador, y suprímase este: para esto deberán multiplicarse los términos enteros por el comun denominador. La supresion del comun denominador equivale á multiplicar ambos miembros por él.

En el ejemplo anterior 12 es el comun denominador. La ecuacion despejada de quebrados es $6x+4x+x+7560=12x$.

2ª Pásense á un miembro todos los términos que contienen la incógnita, y á otro todos los que no la contienen, y múdesele el signo al término que pasa de un miembro á otro; porque esto equivale á restar aquel término de ambos miembros, y no altera la igualdad.

La ecuacion anterior, pasando las x al segundo miembro, es $7560=x$; luego la deuda era de 7560 duros.

3ª Si hecha la trasposicion de los términos queda la incógnita con algun multiplicador, la incógnita será igual al otro miembro dividido por dicho multiplicador.

Ejemplo.: Un padre tiene cuadrupla edad de su hijo, y sus edades suman 45 años: ¿qué edad tiene cada uno? Sea x la edad del hijo, la del padre será $4x$: su suma $5x=45$; de donde $x={}^{45}/_{5}=9$, edad del hijo. La del padre es 36 años.

19 Teorema. *En una ecuacion de primer grado la incógnita solo puede tener un valor.*

Dem. Sea la ecuacion general de primer grado, ya despejada de quebrados, $ax+b=cx+d$: sea $x=m$: esto es, que sustituyendo en lugar de x, m, la ecuacion quede satisfecha: será $am+b=cm+d$. Si hay otro número n, que sustituido por x en la ecuacion, la satisfaga tambien, será $an+b=cn+d$. Restando estas dos últimas ecuaciones, será $am-an=cm-cn$, ó $a(m-n)=c(m-n)$; luego $a(m-n)-c(m-n)=0$, ó $(a-c)(m-n)=0$; luego ó $a-c$ ó $m-n$ debe ser cero; pero $a-c$ no puede ser cero; pues si a fuese $=c$, la ecuacion propuesta se reduciria á $b=d$, y no habria en ella incógnita: luego es preciso que $m=n$; es decir, que solo el número m sustituido por la incógnita satisface á la ecuacion.

Ejemplos de ecuaciones resueltas.

$^6/_5x-90+^2/_3x=^4/_3x-82 \ldots\ldots x=15.$

$^2/_7x+9=^1/_3x-10 \ldots\ldots\ldots x=399.$

$\frac{ax}{b}+\frac{cx}{f}+m=px+\frac{cx}{f}+n \ldots\ldots x=\frac{b(n-m)}{a-bp}.$

5º *Problemas de primer grado que se resuelven con una sola incógnita.*

20. I. Diofanto, insigne matemático, pasó la sexta parte de su edad en la niñez, y la duodécima en la adolescencia: se casó; y habiendo vivido sin hijos la séptima parte de su vida y cinco años mas, tuvo un hijo, que vivió la mitad de la edad del padre, y que murió cuatro años antes que Diofanto. ¿De qué edad murió este?

Sea x dicha edad: $\frac{x}{6}$ pasó en la niñez, $\frac{x}{12}$, en la adolescencia, $\frac{x}{7}+5$ casado sin hijos, $\frac{x}{2}$ mientras vivió su hijo, y cuatro años le sobrevivió: luego su edad total $x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+\frac{x}{2}+9$. Multiplico por 84 para quitar quebrados, y será $84x=14x+7x+12x+42x+9.84$: de donde $9x=9.84$, y $x=84$.

II. Preguntándole á uno qué edad tenia su hijo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de la edad que tenia seis años há, quedará su edad actual. ¿Cuánta era esta?

Sea x su edad actual, $x-6$ la que tenia seis años antes. Resto de $2x$, $3(x-6)$ ó $3x-18$, y será $18-x=x$, de donde $x=9$.

III. Un comisionado de comercio salió de Barcelona con géneros que valian una cierta suma. Llegó á Zaragoza, donde gastó la mitad de la suma, y ganó en la venta de sus géneros 20 doblones. Pasó á Burgos, donde gastó la cuarta parte de lo que llevaba, y ganó 15 doblones. De alli pasó á Oviedo, donde gastó el tercio de lo que tenia, y ganó 16 doblones. Llegó á la Coruña, y gastó la sexta parte de lo que tenia, y ganó 18 doblones. Se embarcó para Cádiz; y pagado el flete, que fue de cinco doblones, halló que habia doblado la suma con que salió de Barcelona. ¿Cuánta era esta?

Sea x esta suma. De Zaragoza salió con $x + \frac{x}{2} + 20$, ó $\frac{x+40}{2}$. En Búrgos gastó $\frac{x+40}{8}$, y ganó 15: luego salió de Burgos con $\frac{3x+240}{8}$. En Oviedo gastó $\frac{x+80}{8}$, y ganó 16: luego salió de allí con $\frac{x+144}{4}$. En la Coruña gastó $\frac{x+144}{24}$, y ganó 18: luego se embarcó con $\frac{5x+1152}{24}$. Restando los cinco doblones del flete, debe quedar $2x$: luego $\frac{5x+1152}{24} - 5 = 2x$. Quito quebrados, y es $5x+1152-120=48x$, de donde $43x=1032$, y $x=24$ doblones, suma con que salió de Barcelona.

IV. ¿Cuál es el número cuyo tercio es excedido de 20, en lo que 30 excede á dicho número?

Sea dicho número x: será $20 - \frac{x}{3} = 30 - x$, y $x=15$.

V. En todo relox el minutero está sobre la manilla á las 12. ¿Cuándo volverán á encontrarse?

Cuando la manilla esté en la una, el minutero volverá á estar en las 12. Sea pues x el camino de la manilla desde la una al punto de encuentro: el del minutero será $1+x$: y como el minutero anda doce veces mas que la manilla en tiempo igual, será $1+x=12x$, de donde $x = {}^{1}/_{11} = 5\,{}^{5}/_{11}$ minutos: luego volverán á encontrarse á la 1^{h} $5^{m}\,{}^{5}/_{11}$.

VI. Hurtaron dos 60 doblones: al partirlos, riñeron, y arrebató cada uno lo que pudo: puestos en paz, dió el primero al segundo la cuarta parte de lo que habia arrebatado; y el segundo al primero la tercera parte de lo que habia arrebatado, y asi quedaron con partes iguales. ¿Cuánto arrebató cada uno? El primero 24 doblones, y el segundo 36. La ecuacion es $\frac{3x}{4}+\frac{60-x}{3}=30$.

21. Es preferible resolver los problemas *algebráicamente*, es decir, sustituyendo letras en lugar de los números conocidos: entonces el valor de la incógnita, deducido de la ecuacion, no será un número, sino una fórmula, que servirá de regla para resolver todos los casos particulares de la misma especie.

Ejemplo. El problema del número 18, regla tercera, propóngase asi: el padre tiene m número de veces mas edad que el hijo: la suma de ambas edades es a: ¿qué edad tiene cada uno? Sea x la edad del hijo; la del padre será mx: su suma $mx+x=a$, de donde $x=\frac{a}{m+1}$: es decir, *la edad del hijo igual á la suma dada partida por la denominacion del múltiplo mas 1*. Con esta regla podemos resolver todos los problemas semejantes al propuesto, sin necesitar de nueva ecuacion. Por ejemplo: si el padre debe tener séptupla edad del hijo, y la suma de ambas debe ser 40, la edad del hijo será $\frac{40}{7+1}=5$, y la del padre 35.

La resolucion algebráica trae otra ventaja, y es que su ecuacion puede servir para resolver no solo el problema propuesto, sino todos aquellos en que, permaneciendo una misma la condicion, se considere como incógnita alguna de las cantidades que entran en dicha ecuacion, y como conocidas las demas. Por ejemplo, la ecuacion anterior $mx+x=a$ resuelve este problema general. *De estas tres cosas, la suma de las edades de un padre y un hijo, las veces que el padre tiene mas edad que el hijo, y la edad del hijo, dadas dos determinar la tercera.* No hay mas que despejar en la ecuacion la letra que se suponga desconocida. Asi es como el álgebra cifra en breves fórmulas una teórica entera.

El problema V, resuelto generalmente, presenta una fórmula muy elegante para hallar todos los puntos de encuentro de la manilla con el minutero. Supongamos que la primera esté en la hora a, cuando el minutero está en las 12. Sea x el camino de la manilla desde la hora a hasta el punto de encuentro: el del minutero en el mismo tiempo será $a+x$, de donde $a+x=12x$, y $x=\frac{a}{11}$. Asi los encuentros sucesivos despues de la 1, 2, 3.......... 11, serán á las $1\,{}^{1}/_{11}$, $2\,{}^{2}/_{11}$, $3\,{}^{3}/_{11}$, $4\,{}^{4}/_{11}$....... $11\,{}^{11}/_{11}$ ó 12.

VII. Dadas las edades de un padre y un hijo, determinar el número de años que deberán vivir para que la edad del padre sea m número de veces múltipla de la del hijo.

Sea a la edad del padre, b la del hijo, x los años que deberán vivir para que $a+x=(b+x)m$ ó $a+x=bm+mx$: será $x=\frac{a-bm}{m-1}$: fórmula que se puede aplicar á cualquier caso particular.

VIII. Buscar un número que dividido por otros dos, los cocientes tengan una diferencia dada.

Sean a y b los divisores, d la diferencia de los cocientes, x el número pedido. La ecuacion es $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=d$: de donde $x=\frac{abd}{b-a}$.

IX. Con un número dado de cartas a se forma un número dado b de montones, teniendo cada uno el número de puntos c, contados de modo que la carta inferior de cada monton valga el punto que significa, y las demas valga cada una por 1: sobra el número de cartas d, y se pide la suma de puntos de las cartas inferiores, que llamo x.

Las cartas inferiores valen x número de puntos:

añadiendo el número de cartas superiores, que es $a-d-b$, de las cuales cada una vale un punto, se tendrá el total de puntos, que es el número de montones b multiplicado por c puntos de cada uno: por tanto la ecuacion es $x+a-d-b=bc$, de donde $x=b(c+1-(a-d)$.

X. Uno quiere repartir el dinero que tiene entre varios pobres: si les da á cada uno a, le falta c para hacer la distribucion: si les da á cada uno b, le sobra d, despues de hecha la distribucion: ¿cuántos eran los pobres, y qué dinero tenia?

Sea x el número de pobres: la ecuacion es $ax-c=bx+d$ y $x=\frac{c+d}{a-b}$.

XI. Dividir un número dado en partes proporcionales á varios números dados. (Este problema es la regla de compañías generalizada).

Sea a el número dado, los proporcionales sean m, n, p etc., y x la parte del número que ha de ser proporcional á m. La ecuacion es $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}+\text{etc.}=a$: de donde $x=\frac{ma}{m+n+p+\text{etc.}}$ ó $m+n+p+\text{etc.}:m::a:x$, proporcion semejante á la que resuelve la regla de compañías.

XII. Dados los tiempos que tarda cada una de dos fuentes en llenar un estanque, determinar cuánto tardarán en llenarle las dos corriendo á la par.

Sea a el tiempo que tarda en llenarlo la primera, b el tiempo que tarda la segunda, y x el tiempo en que lo llenarán las dos juntas. En el tiempo x la primer fuente llenará la parte $\frac{x}{a}$ del estanque, y la segunda la parte $\frac{x}{b}$ del mismo; y como entre ambas deben llenarlo todo en dicho tiempo, será $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1$, representando por 1 la capacidad del estanque. De esta ecuacion $x=\frac{ab}{a+b}$.

XIII. Un pescador promete á su hijo darle un cierto número de cuartos en premio por cada vez que saque peces en la red, con tal que el hijo le pague otro cierto número de cuartos por cada vez que no los saque. Al cabo de un determinado número de redadas ajustan cuentas, y queda debiendo el uno al otro un número de cuartos conocido tambien. Se pregunta, ¿cuántas veces sacó la red vacía, y cuántas con pescado?

Sea a el número total de redadas, b los cuartos de premio, c los de pérdida, d lo que quedó ganando ó perdiendo el hijo despues de ajustadas las cuentas, y x el número de veces que salió la red vacía: será $a-x$ el número de veces que sacó pescado.

Perdió por consiguiente cx, porque c número de cuartos en x, número de redadas inútiles, compone cx, número de cuartos que perdió; y ganó $ab-bx$, esto es, $a-x$, número de redadas útiles, multiplicado por b número de cuartos que ganó en cada una. La diferencia entre estas dos cantidades es la pérdida ó ganancia líquida: si ganó diremos $ab-bx-cx=d$, y $x=\frac{ab-d}{b+c}$. Si perdió será $cx-ab+bx=d$, y $x=\frac{ab+d}{b+c}$. Vemos pues que ambos casos están comprendidos en una misma fórmula, con solo mudar el signo de d, ó hablando en el lenguage usado en el álgebra, con solo hacer negativa la d. Si quedaron en paz, $d=o$, y $x=\frac{ab}{b+c}$.

XIV. Buscar un número, cuyas partes de una cierta denominacion multiplicadas entre sí dén el mismo producto que las partes del mismo número de una denominacion mayor en una unidad que la primera.

Sea x el número: cada parte suya de la denominacion m, vale $\frac{x}{m}$, y el producto de todas es $\left(\frac{x}{m}\right)^m$. Cada parte de la denominacion $m+1$ vale $\frac{x}{m+1}$, y el producto de todas es $\left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$. Como ambos productos deben ser iguales, será $\left(\frac{x}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$ ó $\frac{x^m}{m^m} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)^{m+1}}$. Quitando quebrados es $(m+1)^{m+1} x^m = m^m x^{m+1}$ ecuacion del grado $m+1$ que se reduce al primer grado, partiendo ambos miembros por x^m: resulta $(m+1)^{m+1} = m^m x$, de donde $x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}$.

XV. Dos jugadores se ponen á jugar con una misma cantidad de dinero: el primero pierde a, el segundo pierde b; y la cantidad que queda al primero es m número de veces múltipla de la que queda al segundo. ¿Con qué dinero se pusieron á jugar?

Sea x dicho dinero. La ecuacion es $x - a = m(x - b)$, y $x = \frac{mb - a}{m - 1}$.

XVI. Se pide dividir el número a en varias partes tales, que la primera exceda á la segunda en b, la segunda á la tercera en c, la tercera á la cuarta en d ect.

Sea x la parte menor y n el número de partes: la ecuacion es $nx + b + 2c + \ldots\ldots = a$, de donde $x = \frac{a - b - 2c - 3d - \ldots}{n}$. Si x es la parte mayor, seria $x = \frac{a + b + 2c + 3d + \ldots}{n}$.

XVII. ¿Cuál es el número que sumado primero con a, y despues con b, tienen estas sumas la razon de $m : n$?

El número es $\frac{an - bm}{m - n}$.

XVIII. Un Oficial queriendo disponer su tropa en batallon cuadrado, le sobra a número de soldados. Añade 1 soldado por fila é hilera, y le falta b número de soldados para formar este segundo cuadro: ¿cuántos soldados tenia?

Sea x el número de soldados que habia: con $x-a$ soldados formó el primer cuadro, cuyo lado fue $=\sqrt{(x-a)}$. Pudo formar el segundo cuadro con $x+b$ soldados, y su lado fue $=\sqrt{x+b}$; y como este lado excedia al primero en 1 unidad, será $\sqrt{(x+b)} = 1+\sqrt{(x-a)}$.

Elevando al cuadrado ambos miembros, será $x+b=1+2\sqrt{x-a}+x-a$, ó reduciendo y despejando á $\sqrt{(x-a)}$, es $\sqrt{(x-a)}=\frac{a+b-1}{2}$. Elevando al cuadrado ambos miembros, será $x-a=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2$ y $x=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2+a$. Esta fórmula manifiesta que el problema es imposible, si a y b son ambos pares ó ambos impares.

XIX. Uno reparte su hacienda de modo que al primero de sus hijos toque a, y la parte p del resto: al segundo $2a$ y la parte p del resto; al tercero $3a$ y la parte p del resto etc. Todos salen con partes iguales. ¿Cuánta era la hacienda, cuánto tocó á cada uno, y cuántos eran los hijos?

Sea x la hacienda: la parte del primero será $a+\frac{x-a}{p}$, ó $\frac{ap+x-a}{p}$.

La del segundo será $2a+\frac{x-2a-\frac{ap+x-a}{p}}{p}=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$: estas dos partes deben ser iguales: luego $\frac{ap+x-a}{p}=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$; de donde $x=ap^2-2ap+a$, ó $x=a(p-1)^2$, valor de la hacienda.

La parte del primero, que es la cuota de todos, es $a+ap-2a$, ó $a(p-1)$, y el número de hijos es $p-1$.

Este problema puede resolverse suponiendo que la cuota es x, y esta será la parte del primero: la parte p del resto que tocó al primero será $x-a$, el resto $px-ap$, y la hacienda $px-ap+a$, porque todavía no se habia sacado de la hacienda mas que la cantidad a.

La parte del segundo es $2a+\frac{px--ap+a--2a--x}{p}$ que debe ser $=x$. De esta ecuacion resulta $x=a(p--1)$.

La hacienda $px--ap+a$, es $a(p^2--p--p+1)$, ó $a(p--1)^2$, como antes.

Tambien puede ponerse la incógnita por el número de hijos: sea x el número de hijos: la parte del último, y por consiguiente la cuota será ax; porque en la parte del último no puede haber resto. Si lo hubiera, como solo se le debiera dar la parte p del resto, quedaria algo de la hacienda contra el supuesto.

Siendo la parte del primero ax, su parte p del resto es $ax--a$, su resto $apx--ap$, la hacienda $apx--ap+a$, la parte del segundo $2a+\frac{apx--ap+a--2a--ax}{p}=ax$, de donde $x=p--1$: la cuota ax es $a(p--1)$, y la hacienda $apx--ap+a$ es $a(p^2--p--p+1)=a(p--1)^2$.

XX. Un comerciante emplea todos los años a, número de duros, en el gasto de su casa; pero en virtud de su comercio aumenta cada año su capital en la parte p de lo que le queda, deducido aquel gasto. Al cabo de n, número de años, ha multiplicado por m su capital: ¿cuánto era al principio?

Sea x el capital con que empezó: $x—a$ será lo que le quedó, deducida la cantidad a. Ganó la parte p de $x—a$: luego multiplicó el resto por $1+\frac{1}{p}$: haciendo $1+\frac{1}{p}=q$, para la mayor sencillez del cálculo, será su capital al fin del primer año $qx—qa$.

Quitándole a, y multiplicando el resto por q, al cabo del segundo año tuvo $q^2x—q^2a—qa$: al cabo del tercero, $q^3x—q^3a—q^2a—qa$, y al cabo de n, número de años, su capital era $q^nx—qa(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots+1)$ ó $q^nx—qa.\frac{q^n--1}{q--1}$ (12), y como esto debe ser $=mx$, será $x=\frac{qa(q^n--1)}{(q--1)(q^n--m)}$.

Aplicacion. Sea $a=3000$, $p=3$, $n=3$, $m=2$, será $x=44400$.

La ecuacion fundamental manifiesta que la diferencia entre $q^n x$, cantidad que hubiera adquirido el capitalista si no hubiera deducido nada de su caudal, y mx, cantidad que tiene realmente, es $=qa.\frac{q^n-1}{q-1}=qa(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+...+1)$, es decir, á la suma de las cantidades que hubieran producido la a del primer año en n años, la a del segundo en $n-1$, etc.

Si consideramos atentamente el problema, vemos que debe ser así, porque segregando el capitalista de su negociacion una a al principio de cada año, se priva de las existencias que le corresponden al cabo de n años, que son sucesivamente aq^n, aq^{n-1}, aq^{n-2}, ...qa; cuya suma restada de $q^n x$, cantidad que hubiera obtenido no segregando nada, debe ser igual á mx.

Esta manera de establecer la ecuacion es mas elegante, porque se obtiene sin calcular las cantidades que quedan al fin de cada año, de las cuales hemos inferido por induccion la que quedará al cabo de n años.

Vemos, pues, que la solucion de un problema, aunque sea por medios complicados, nos sirve de guia para deducirla de reflexiones mas sencillas y elegantes.

XXI. Un capitalista aumenta todos los años su caudal en su parte p, y extrae al fin de cada año la cantidad a: al cabo de n años ha multiplicado su caudal por m: ¿cuánto era al principio?

La ecuacion es $mx=q^n x-a\frac{q^n-1}{q-1}$, que manifiesta haberse podido deducir de reflexiones análogas á las del problema anterior. Con la primer segregacion se priva de la existencia correspondiente á a al cabo de $n-1$ número de años; porque empieza la segregacion un año despues que en el problema anterior. Con la segunda se priva de aq^{n-2}, con la tercera de aq^{n-3}, ...con la última solo de a. La suma de estas existencias perdidas es $a.\frac{q^n-1}{q-1}$, y la ecuacion será $mx=q^nx-a.\frac{q^n-1}{q-1}$.

La diferencia entre las existencias perdidas en ambos problemas es aq^n-a, y asi debe ser; porque siendo la existencia perdida en cada año en la primer hipótesi igual á la perdida el año anterior en la segunda, no debe haber entre ambas pérdidas otra diferencia que la que existe entre la cantidad perdida en el primer año en la primera hipótesi, y la perdida en el último año en la segunda, siendo iguales las pérdidas intermedias en ambas hipótesis. Aunque en la primera sea mayor la pérdida, como la cantidad que necesite el capitalista para sostener su casa el primer año se ha de deducir de alguna parte, la pérdida de los intereses que dicha cantidad le produciria desvanece la ventaja aparente de la segunda hipótesis.

XXII. Un comerciante quiere asegurar un cargamento, y recibir en caso de pérdida la totalidad de él de los aseguradores, lo que podrá ser si la ley mercantil permite asegurar no solo el capital sino tambien el premio del seguro. En una parte le piden a por 100 por el seguro: en otra le piden b por 100, en caso de que su capital se salve, y d por 100 mas, en caso de que se pierda. Se pregunta qué relacion debe existir entre a, b y d, para que en el caso de salvamento pague lo mismo á un asegurador que á otro.

El *seguro* es un tanto por ciento que el capitalista paga al asegurador, ya perezca su capital, ya se salve, con la condicion de que en el primer caso el asegurador le ha de pagar su capital. Por ejemplo, yo envio á América un cargamento, cuyo valor es de 60000 duros, y lo aseguro á 5 por 100 contra los riesgos del viage, yo debo pagar el 5 por 100 de 60000, que es 3000 duros; pero si mi capital perece, me lo debe devolver el asegurador. En el caso presente, si el capital se pierde, el asegurador deberá pagarme 57000 duros, deduciendo los 3000 del seguro que siempre le debo pagar.

Pero si quiero que se me devuelvan íntegros los 60000, en este caso deberé asegurar no solo el capital efectivo, sino ademas un capital *entendido* correspondiente al premio del seguro. Deberé decir: si para que me vuelvan 95 debo asegurar 100, para que me vuelvan 60000 ¿cuánto deberé asegurar? $\frac{60000 \times 100}{95}$ ó $63157\frac{17}{19}$. El 5 por 100 de este capital, que es el que se asegura, es $3157\frac{17}{19}$, que debe pagar en todos casos. En el de pérdida recibe íntegro el capital 60000. Este convenio de un capital ficticio es ventajoso al asegurador en caso de salvamento, y al aseguradо en caso de pérdida. Sentado esto, si el capitalista ha de asegurar no solo el capital (que supondremos 100, representado por la letra c), sino tambien el premio del seguro, de modo que pagado este premio reciba 100, deberá decir: si por $c-a$ pago a, por c ¿cuánto pagaré? $\frac{ac}{c-a}$. Deberá, pues, asegurar $\frac{c^2}{c-a}$, cuyo a por c es $\frac{ac}{c-a}$.

En el caso de premio parcial y sobrepremio, deberá decir: si por $c-b-d$ pago $b+d$, por c ¿cuánto pagaré? $\frac{c(b+d)}{c-(b+d)}$. Deberá, pues, asegurar $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, cuyo b por c (que es lo que paga en caso de salvamento) es $\frac{bc}{c-(b+d)}$.

La ecuacion es $\frac{ac}{c-a}=\frac{bc}{c-(b+d)}$, de donde $d=c-\frac{bc}{a}$.

Ejemplo. Si $a=10$ y $b=8$, $d=20$, es decir, que en caso de salvamento, lo mismo es asegurar á 10 por 100 premio absoluto, que á 8 por 100 y 20 por 100 mas en caso de pérdida. En efecto, en el caso del premio absoluto 10 por 100, tiene que asegurar $111\frac{1}{9}$, cuyo 10 por 100 es $11\frac{1}{9}$; y en el caso de 8 por 100 parcial y 20 de sobrepremio, tiene que asegurar $138\frac{8}{9}$, cuyo 8 por 100 es $11\frac{1}{9}$.

Vemos, pues, que en caso de salvamento el asegurado, pagando b por 100 de premio parcial sobre la cantidad asegurada $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, paga lo mismo que si hubiese asegurado $\frac{c^2}{c-a}$ al premio absoluto a por 100. Si el cargamento se pierde, en ambos casos recibe c del asegurador; porque en el primero $\frac{c^2}{c-a}-\frac{a}{c}\times\frac{c^2}{c-a}=c$, y en el segundo pagando $b+d$ por 100 de $\frac{c^2}{c-(b+d)}$, será $\frac{c^2}{c-(b+d)}-\frac{b+d}{c}\times\frac{c^2}{c-(b+d)}=c$.

Tambien vemos que por cada unidad que disminuya el premio parcial b, aumenta el sobrepremio d la cantidad $\frac{c}{a}$. Así lo mismo es asegurar á 8 de premio parcial y 20 de sobrepremio, que á 7 de premio parcial y 30 de sobrepremio, á 6 de premio parcial y 40 de sobrepremio etc.

Tambien se ve que el premio absoluto debe ser mayor que el premio parcial; y que los sobrepremios deben estar en la misma razon que las diferencias de cada premio parcial al absoluto.

6º *Observaciones sobre las ecuaciones de primer grado.*

21. En toda ecuacion de primer grado el valor de la incógnita puede reducirse al cociente de dos diferencias; pues siendo la fórmula general de dichas ecuaciones, ya despejadas de quebrados, $ax+b=cx+d$,

resulta $x=\frac{d-b}{a-c}$. Esta fórmula admite cinco casos esencialmente diversos.

Caso 1º Cuando ambas sustracciones son posibles, es decir, $d>b$ y $a>c$: entonces el valor de la incógnita satisface á la ecuacion y al problema.

2º Cuando ninguna de ellas puede hacerse, es decir, $d<b$ y $a<c$; entonces, aun cuando expresásemos el valor de la incógnita por $\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, ni sabriamos qué quieren decir estas dos cantidades negativas aisladas, ni cuál debe ser su cociente.

Pero obsérvese que la imposibilidad de hacer estas sustracciones procede de haber hecho en la ecuacion la trasposicion de las x al primer miembro; pues haciéndola al segundo resulta $b-d=cx-ax$ y $x=\frac{b-d}{c-a}$, valor en el cual pueden verificarse las dos sustracciones, y que satisface á la ecuacion y al problema. Como este valor no se diferencia del primero sino en la variacion de los signos, podemos mirar el cociente de las dos cantidades negativas como si fueran positivas, lo que concuerda con las reglas de la multiplicacion de los signos y convenir en las siguientes reglas:

1ª Es lícito mudar el signo á los dos términos de un quebrado, lo que equivale por otra parte á multiplicarlos por la cantidad aislada -1.

2ª Es lícito mudar el signo á todos los términos de una ecuacion, lo que equivale á trasponerlos todos ó á multiplicar ambos miembros por -1.

Estas reglas se fundan en que, aunque las cantidades negativas aisladas no representan cantidades existentes ni operaciones posibles, su introduccion en el cálculo no admite inconveniente y lo facilita. Son signos de convencion que se someten á las leyes del álgebra, como si fuesen cantidades verdaderas, asi como las palabras *absurdo*, *disparate*, *imposible* se someten á las leyes de la gramática, aunque nada verdadero representan, porque son útiles en la locucion; pues con ellas se pueden formar frases y proposiciones ciertas y evidentes como esta: *un círculo cuadrado es un disparate. Círculo cuadrado y disparate* son voces que nada existente significan; y sin embargo por su reunion forman una proposicion cierta. Del mismo modo, aunque $-(b-d)$ y $-(c-a)$ nada signifiquen, podemos decir que $x=\frac{-(b-d)}{-(c-a)}$, porque siguiendo las reglas del cálculo algebráico, esta ecuacion equivale á $x=\frac{b-d}{c-a}$.

3ª Puede suceder que una de las dos sustracciones sea posible y la otra no, como si $d<b$ y $a>c$. Entonces la ecuacion $ax+b=cx+d$ tiene el término $ax>cx$ y el término $b>d$, y es imposible que $ax+b$ sea igual á $cx+d$. Y como en este caso el valor de x resulta negativo, se infiere que *cuando el valor de x resulta negativo de una ecuacion, el problema es imposible.*

Pero como este valor negativo ha de satisfacer algebráicamente á la ecuacion, si en ella variamos el signo de x, será $b-ax=d-cx$, ecuacion posible, aunque perteneciente á otro problema diferente del que expresa la primer ecuacion $ax+b=cx+d$: luego siempre que el *valor de la incógnita resulte negativo, no resolverá el problema propuesto que declara por imposible, sino otro, cuya propuesta se inferirá de la ecuacion, mudando en ella el signo de x.*

Ejemplo. ¿Cuál es el número cuyo tercio y quinto sumados y disminuidos de 7 han de dar el mismo número? Ecuacion: $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}-7=x$, de donde $x=-15$. Mudo pues el signo de x en la ecuacion, y resulta $-\frac{x}{3}-\frac{x}{5}-7=-x$, ó cambiando todos los signos $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+7=x$, de donde $x=15$. Luego el problema propuesto era imposible, y el valor negativo hecho positivo resuelve el siguiente problema: ¿cuál es el número cuyo tercio y quinto sumados con 7 han de dar el mismo número?

El valor -15 de x es lo que se llama una cantidad negativa aislada; y ya hemos visto que estas cantidades nada significan sino la absurdidad del problema que las ha producido; pero tambien hemos visto que combinadas entre sí como en el caso 2º pueden dar resultados verdaderos, sometiéndolas á las reglas comunes del cálculo: por consiguiente, las reglas de los signos que hemos explicado (desde 5 hasta 11) para las cantidades negativas unidas con otras positivas, sirven tambien para las cantidades negativas aisladas; y sus resultados serán, ya absurdos, ya verdaderos, segun que sean positivos ó negativos. El ejemplo siguiente manifestará la utilidad de las cantidades negativas aisladas.

Supongamos que 10, partido por el número a, y dándole al cociente una unidad mas que lo que le toca, deje el resto $-b$, cantidad absurda, que manifiesta que hemos tomado un cociente mayor que el verdadero: se pide el resto que dejarán 10^2, 10^3, 10^4,..... partidos por el mismo número a.

Sea q el cociente verdadero de $\frac{10}{a}$ y r el resto verdadero será $10=aq+r$; pero siendo $r+b=a$ (*Aritmética*, 11), será $10=aq+a-b$, ó $10=a(q+1)-b$.

Elevando al cuadrado será $10^2=a^2(q+1)^2-ab(q+1)+b^2$: luego el resto verdadero de 10^2, partido por a, será b^2; es decir, $-b\times-b$, aplicando al resto absurdo $-b$ la regla de los signos.

Luego si conozco el resto absurdo (ó por *defecto*) de $\frac{10}{a}$, tendré el verdadero (ó por *exceso*) de 100, que es 10^2, multiplicando el resto absurdo $-b$ por sí mismo, ó elevándolo al cuadrado.

Si multiplicamos $10^2=a^2(q+1)^2-2ab(q+1)$

$+b^2$ por $10=a(q+1)-b$, se verá, sin hacer la multiplicacion, que el único término no divisible por a, será el producto de b^2 por $-b$, ó $-b^3$, ó $(-b)^3$: luego el resto absurdo $-b$, elevado al cubo, me dará el resto absurdo de 10^3 ó de 1000. El de 10000, ó 10^4, será b^4 verdadero; el de 10^5 será $(-b)^5$ . . . . . y en general el resto de 10^m, será $(-b)^m$, por exceso ó por defecto, esto es, verdadero ó absurdo, segun m sea par ó impar. Luego puede extenderse á los restos negativos, ó por defecto, la regla que dimos para los positivos, ó por exceso (*Aritm.* 16).

Vemos, pues, que el cálculo de las cantidades negativas aisladas es útil: 1º, porque algunas veces da resultados verdaderos: 2º, porque, aun cuando los da absurdos, es fácil deducir el verdadero. En efecto, conocido el resto por defecto, es fácil de averiguar el resto por exceso.

4º El denominador es cero cuando $c=a$, entonces $x=\frac{d-b}{o}$: este cociente no existe: pues ninguna cantidad, por grande que sea, multiplicada por cero, dá otra cosa que cero. El *infinito* en matemáticas es el cociente de una cantidad partida por cero, y se expresa con este signo, ∞. En este caso la ecuacion $ax+b=cx+d$ es imposible, siempre que b no sea $=d$: luego el valor *infinito de la incógnita declara absurdo el problema.*

Pero esta absurdidad procede de haber supuesto posible un caso, al cual se van acercando otras hipótesis diferentes, sin llegar nunca á él; porque suponiendo que la diferencia entre a y c disminuya gradualmente hasta ser $=0$, los valores que en estos grados vaya teniendo la x irán aumentando á proporcion que disminuya el denominador $a-c$: luego el caso de ser $a=c$, que resulta imposible, es el límite de todas las diminuciones posibles de $a-c$: luego el *valor infinito de la incógnita, declarando imposible el pro-*

blema, denota el límite á que se va acercando alguna de las condiciones del problema.

Ejemplo. Sale Pedro de un lugar caminando diariamente a leguas. Despues de b dias sale Juan en su alcance, caminando c leguas por dia, de un pueblo en la direccion del camino de Pedro, y adelantado al pueblo de donde salió Pedro en d leguas: ¿cuándo se encontrarán?

Sea P el lugar de que sale Pedro, J el lugar de que sale Juan y E el punto en que se encuentran. La direccion de ambos movimientos es desde P hácia E.

Sea x el tiempo que tardará Juan en encontrarse con Pedro.

Pedro, desde que salió de P hasta que llegó á E, estuvo en camino $b+x$, número de dias, y á razon de a, número de leguas diarias, anduvo $ab+ax$, número de leguas.

Juan en x dias, á razon de c, número de leguas diarias, anduvo cx, número de leguas; y como Pedro caminó d leguas mas que Juan, será $ab+ax=cx+d$, de donde $x=\frac{ab-d}{c-a}$.

Aplicacion. Sea $a=c=8$, $b=6$, $d=1$: $x=\frac{47}{0}=\infty$, problema imposible. En efecto, si Pedro llevaba 47 leguas adelantadas cuando Juan salió, y Juan andaba todos los dias tanto como Pedro, jamás le debe alcanzar. Mientras menor sea el exceso de la velocidad de Juan sobre la de Pedro, tanto mas lejano estará el punto de encuentro. Pero si aquel exceso llega á ser nulo, que es el caso del límite designado por el valor infinito de la incógnita, será imposible el encuentro.

Otra aplicacion. Sea $a=9$, $c=5$, $d=20$, $b=4$. Resulta $x=-4$; luego el problema es absurdo. Mudando el signo de x en la ecuacion, resulta $ab-ax=d-cx$; es decir, que los caminos ax, cx, andados por

Pedro y Juan desde que salió Juan, deben restarse, el primero del camino que ya habia andado Pedro, y el segundo de d: lo que no puede ser si no se supone que Pedro en el momento que salió Juan volvió á andar hácia el pueblo J, que J caminaba hácia P, y que el punto de encuentro está en el camino de J, á P, á los 4 dias que salió Juan. En efecto, Pedro llevaba andadas 36 leguas cuando salió Juan, y por consiguiente se hallaba á 16 leguas á la derecha de J; volvió atrás, y en las 4 jornadas que señala el valor de x anduvo 36 leguas, y por consiguiente volvió á P. Juan en las 4 jornadas anduvo 20 leguas, y se encontró con Pedro en P.

Otra. Sea $a=9$, $c=5$, $d=40$, $b=4$: resulta $x=\frac{-4}{-4}=1$. En efecto, Pedro en los 4 primeros dias llevaba andadas 36 leguas, y le faltaban 4 para llegar á J. Como x vale 1, en un dia se adelantó Pedro 5 leguas al pueblo de donde salió Juan: Juan anduvo aquel dia 5 leguas, y por tanto se encontraron.

Si Pedro y Juan salen de un mismo pueblo $d=0$, y la fórmula es $x=\frac{ab}{c-a}$.

5º Pueden ser iguales á cero el numerador y el denominador, siendo $a=c$, $b=d$: entonces $x=0/0$, cociente que indica todos los números posibles; porque todo número, multiplicado por el divisor cero, produce el dividendo, que es cero. La ecuacion fundamental en este caso es $ax+b=ax+b$, ecuacion que es verdadera, sea cual fuere el valor de x. Luego si *el valor de la incógnita es $0/0$, todos los valores posibles de ella satisfarán la ecuacion, y el problema tendrá infinitas soluciones.*

Un problema se llama indeterminado cuando se puede resolver de muchos modos: determinado cuando solo hay un valor de la incógnita que lo satisfaga.

Verifiquemos los principios que hemos sentado en el siguiente problema:

Conocido el camino diario de dos correos, y la distancia á que se hallaba el uno del otro antes de salir, hallar el camino que tendrán que andar para encontrarse.

Supongamos que empiezan á caminar á un mismo

E'' $\quad A \quad$ E $\quad B \quad$ E'

tiempo y en direccion contraria, el primer correo desde A hácia B, caminando diariamente a leguas, y el correo segundo desde B hácia A, caminando diariamente b leguas. Sea E el punto de encuentro, y la distancia $AB=d$.

Sea $AE=x$, $BE=d-x$: el primer correo tardará en llegar á E, $\frac{x}{a}$; el segundo $\frac{d-x}{b}$, y como estuvieron en camino el mismo tiempo, será $\frac{x}{a}=\frac{d-x}{b}$, de donde $x=\frac{ad}{a+b}$, $d-x=\frac{bd}{a+b}$.

Pero si el primer correo se puso en camino h, número de dias antes que el segundo, será $\frac{x}{a}=\frac{d-x}{b}+h$, de donde $x=\frac{a(d+bh)}{a+b}$; $d-x=\frac{b(d-ah)}{a+b}$.

Si entrambos correos salen á un mismo tiempo y en una misma direccion hácia E', que supongo que es el punto de encuentro, sea $AE'=x$, $BE'=x-d$, y la ecuacion fundamental será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}$, de donde $x=\frac{ad}{a-b}$, $x-d=\frac{bd}{a-b}$. Si $b=a$, $x=\infty$ y el problema imposible, lo que es evidente. Si $d=0$, y $b=a$, $x=\frac{0}{0}$, y el encuentro se verifica en todos los puntos del camino. Si $b>a$, x es negativo, y el problema imposible. Mudando el signo de x en la ecuacion fundamental, es $-\frac{x}{a}=-\frac{x+d}{b}$, ó $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}$, lo que supone que el segundo correo anduvo mas camino que el primero, y por consiguiente que la direccion comun de ambos fue desde B hácia E'', y su encuentro á la izquierda de A.

Si el primer correo se puso en camino h, número de dias antes que el segundo, será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}+h$, de donde $x=\frac{a(d-bh)}{a-b}$, $x-d=\frac{b(d-ah)}{a-b}$. Si $d=ah$ y $a=b$, el encuentro se verifica en todos los puntos. Si solamente hay la condicion $a=b$, $x=\infty$ y el problema imposible.

Si $a>b$ y $d>ah$, el problema es posible; porque d será mayor que bh.

Si $a<b$ y $d<ah$ será $d<bh$, el problema es posible; porque los valores de x y $x-d$ resultan positivos.

Si $a>b$ y $d<bh$ será $d<ah$, y los valores de x y $x-d$ serán negativos. Mudo sus signos en la ecuacion fundamental, y será $-\frac{x}{a}=-\frac{x+d}{b}+h$, ó $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}-h$; en este caso el movimiento será hácia E'' y el segundo correo saldrá h dias antes que el primero.

Si $a<b$ y $d>bh$, y por tanto $d>ah$, x es negativa, la ecuacion es $\frac{x}{a}=\frac{x+d}{b}-h$, caso ya examinado.

Si $a<b$, $d<bh$, y $d>ah$, x es positivo y $x-d$ negativo, lo que indica que el segundo correo caminaba en la direccion de B á A, y que h es la suma de los tiempos.

Si el segundo correo se puso en camino h dias antes que el primero, será $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}-h$, de donde $x=\frac{a(d+bh)}{a-b}$, $x-d=\frac{b(d+ah)}{a-b}$. Si $b=a$, es imposible el encuentro; si $a<b$, x y $x-d$ son negativos, la ecuacion es $\frac{x}{a}=\frac{x-d}{b}+h$; y por tanto es preciso que el primer correo salga antes, si se han de encontrar.

7º *Resolucion de los problemas determinados con muchas incógnitas.*

22. Cuando hay muchas incógnitas en un problema, es necesario para que sea determinado que el número de ecuaciones sea igual al de incógnitas; pues si hubiera dos incógnitas (por ejemplo) en una sola ecuacion, seria necesario determinar arbitrariamente una de ellas para poder despejar la otra; y esta determinacion arbitraria multiplicaria al infinito el número de soluciones, y haria indeterminado el problema.

Tres métodos hay para hallar el valor de muchas incógnitas en otras tantas ecuaciones:

1º Despéjese una misma incógnita en todas las ecuaciones: igualando sus valores dos á dos, resultará una ecuacion menos y una incógnita menos; porque la que se despejó primero no se hallará ya en ninguna ecuacion. Esto es lo que se llama *eliminar* una incógnita entre varias ecuaciones, deducir de ellas otras ecuaciones, en las que no se encuentre dicha incógnita.

Repítase la misma operacion sobre las ecuaciones que resulten, hasta que resulte una sola incógnita en una sola ecuacion. Hallado en esta el valor de dicha incógnita, por él se podrán hallar los de las otras.

Sirva de ejemplo el problema siguiente: se encargó á un arriero la conduccion de varios vasos de tres diferentes tamaños, á condicion de que pagase por cada vaso que rompiese una cantidad igual al precio de su conduccion. Hizo tres viages: en el primero transportó 5 vasos pequeños, 6 medianos, y 9 grandes; rompió los pequeños, y recibió por precio de la conduccion 68 reales. En el segundo viage llevó 12 pequeños, 4 medianos, y 10 grandes; rompió los medianos, y recibió 68 reales. En el tercer viage llevó 16 vasos pequeños, 10 medianos, y 3 grandes; rompió los grandes, y recibió 54 reales. ¿Cuál era el precio de conduccion de cada vaso pequeño, de cada vaso mediano, y de cada vaso grande?

Sea x el precio de conduccion de cada vaso pequeño, y el de cada vaso mediano, z el de cada vaso grande.

En el primer viage ganó $6y$ por la conduccion de los medianos, $9z$ por la de los grandes, y perdió $5x$ por haber quebrado los pequeños; luego la ecuacion será: $6y+9z-5x=68$. Igualmente se tendrá

$$\left.\begin{array}{l}12x-4y+10z=68\\16x+10y-3z=54\end{array}\right\}$$ en atencion á los otros dos viages.

Despejando la y en todas tres será $y=\frac{68-9z+5x}{6}$, $y=\frac{6x+5z-34}{2}$ (porque la segunda ecuacion es toda divisible por 2) $y=\frac{54-16x+3z}{10}$.

Igualando el segundo valor de y, que es el mas sencillo, á los otros dos resultarán las dos ecuaciones con dos incógnitas $\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{68-9z+5x}{6}$, $\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{54-16x+3z}{10}$. Partiendo los denominadores por 2 (lo que equivale á multiplicar por 2 ambas ecuaciones), tendré $6x+5z-34=\frac{68-9z+5x}{3}$, $6x+5z-34=\frac{54-16x+3z}{5}$.

Quitando quebrados es $18x+15z-102=68-9z+5x$, $30x+25z-170=54-16x+3z$. Trasponiendo y reduciendo es $13x+24z=170$, $46x+22z=224$. Despejando la z en ambas es $z=\frac{170-13x}{24}$, $z=\frac{112-23x}{11}$. Igualando sus valores y despejando de quebrados, resulta $1870-143x=2688-552x$. Trasponiendo y reduciendo es $409x=818$, de donde $x=2$, precio de conduccion de los vasos pequeños.

Sustituyo por x su valor en el de $z=\frac{112-23x}{11}$, y será $z=\frac{66}{11}=6$, precio de conduccion de los vasos grandes.

Sustituyo por x y z sus valores en el de $y=\frac{6x+5z-34}{2}=\frac{8}{2}=4$, precio de conduccion de los vasos medianos.

129. Despéjese en una de las ecuaciones el valor de una incógnita, y sustitúyase por dicha incógnita en las demas ecuaciones. Quedará una ecuacion menos y una incógnita menos, y la incógnita primera quedará eliminada. Este método se llama *método de las substituciones*.

Ejemplo. La pólvora se compone de salitre, azufre y carbon. El triplo del peso del salitre debe ser igual á 13 veces el del carbon mas 5 veces el del azufre: y el quíntuplo del peso del salitre debe ser igual á 37 veces el peso del azufre menos siete veces el del carbon. Se pregunta, ¿qué cantidades deben mezclarse de salitre, azufre y carbon, para componer 100 libras de pólvora.

Sea x la cantidad de salitre, y la de azufre, z la de carbon. Las ecuaciones son $x+y+z=100$, $3x=13z+5y$, $5x=37y-7z$. Despejo la x en la primera, $x=100-y-z$. Sustituyendo su valor en las otras dos es $300-3y-3z=13z+5y$, $500-5y-5z=37y-7z$. Trasponiendo y reduciendo es $300=16z+8y$, $500=42y-2z$. Partiendo la primera por 4 y la segunda por 2, es $75=4z+2y$, $250=21y-z$. Despejo la y en la primera, y es $y=\frac{75-4z}{2}$. Sustituyo su valor en la segunda, y es $250=\frac{1575-84z}{2}-z$, ó $500=1575-84z-2z$, de donde $86z=1075$, y $z=12\frac{1}{2}$, y sucesivamente $y=12\frac{1}{2}$, $x=75$.

3º Para eliminar una incógnita de dos ecuaciones, multiplíquese cada una por el coeficiente que dicha incógnita tiene en la otra: resultarán dos ecuaciones, en que dicha incógnita tendrá un mismo coeficiente: restándolas, desaparecerá dicha incógnita. Así, eliminando una misma incógnita de cada dos ecuaciones, quedará una ecuacion menos y una incógnita menos.

Ejemplo. Hay tres cargas de granos. La primera tiene 30 fanegas de centeno, 20 de cebada, y 10 de trigo, y vale 230 pesetas. La segunda tiene 27 fanegas de centeno, 24 de cebada, y 18 de trigo, y vale 270 pesetas. La tercera tiene 7 fanegas de centeno, 11 de cebada, y 12 de trigo, y vale 121 pesetas. ¿Cuál es el precio del centeno, el de la cebada, y el del trigo?

Sea x el precio de la fanega de centeno, y el de la cebada, z el del trigo. Las ecuaciones serán:

$$30x+20y+10z=230\text{, ó } 3x+2y+z=23$$
$$27x+24y+18z=270\text{, ó } 9x+8y+6z=90$$
$$7x+11y+12z=121.$$

Despejo la z en la primera ecuacion, y su valor es $z=23-3x-2y$, y la elimino entre la primera y la segunda ecuacion, multiplicando la primera por 6, y restando la segunda. Despues la elimino entre la segunda y la tercera, multiplicando la segunda por 2, y restando del producto la tercera: y tendremos $9x+4y=48$

$$11x+5y=59.$$

Despejo la y en la primera, y es $y=\frac{48-9x}{4}$. Elimino la y entre ambas, multiplicando la primera por 5, la segunda por 4, y restando de la primera la segunda, lo que da $x=4$, precio del centeno, y sucesivamente $y=3$, precio de la cebada, $z=5$, precio del trigo.

Propondremos muchos ejemplos para ejercicio de los alumnos.

I. Una persona tiene monedas en ambas manos. Si pasa una de la derecha á la izquierda, habrá igual número de monedas en ambas manos: si pasa una de la izquierda á la derecha, habrá en esta m número de veces mas monedas que en la izquierda. ¿Cuántas tiene en cada mano?

Sea x el número de monedas de la derecha, y el de la izquierda. Las ecuaciones serán $x-1=y+1$, $x+1=my-m$. Eliminando la x, será $2=my-y-m-1$, de donde $y=\frac{m+3}{m-1}$, y $x=\frac{3m+1}{m-1}$.

II. Un carro está cargado con 50 bombas de dos diversos calibres: las del primero pesan cada una 72 libras, y las del segundo 50. El peso de todas es 2698 libras: ¿cuántas bombas hay de cada calibre?

Ecuaciones: $x+y=50$, $72x+50y=2698$. Valores: $x=9$, $y=41$.

III. Se piden dos números que sumen 570, y que la suma de la mitad, octava y duodécima parte del primero sea igual á la suma del tercio, sexta y novena parte del segundo.

Las ecuaciones son: $x+z=570$, $\frac{x}{2}+\frac{x}{8}+\frac{x}{12}=\frac{z}{3}+\frac{z}{6}+\frac{z}{9}$. Valores: $x=264$, $z=306$.

IV. Uno deja en su testamento 120000 duros, 12000 á cada sobrino, y 9000 á cada sobrina; y hecho el reparto, no queda nada del caudal. Si hubiera dejado 9000 á cada sobrino y 12000 á cada sobrina, hubieran sobrado 9000 duros de la herencia: ¿cuántos eran los sobrinos y cuántas las sobrinas? Ecuaciones $12000x+9000z=120000$, $9000x+12000z=111000$. Valores: $x=7$, $z=4$.

V. Se han comprado tres caballos: el valor del primero, sumado con la mitad del de los otros dos, compone 25 duros: el segundo, con el tercio de los otros dos, vale 26 duros: el tercero, con la mitad de los otros dos, vale 29 duros. ¿Cuánto vale cada uno?

Sea el valor del primero x, el del segundo y, el del tercero z. Las tres ecuaciones serán $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=25$, $y+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}z=26$, $z+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=29$; que despejadas de quebrados son $2x+y+z=50$, $x+3y+z=78$, $x+y+2z=58$. Eliminando la x entre primera y segunda da $5y+z=106$. Eliminando la misma entre segunda y tercera da $2y-z=20$. Eliminando la z de estas dos ecuaciones, es $7y=126$, $y=18$, $z=16$, $x=8$.

VI. Antonio, Benito y Cárlos se ponen á jugar: en la primer partida doblaron Benito y Cárlos su puesta, perdiendo Antonio esta ganancia. En la segunda doblaron Antonio y Cárlos lo que tenian, perdiendo Benito lo que ganaron: en la tercera doblaron Antonio y Benito, perdiendo Cárlos lo que ganaron. Salieron todos con 16 duros: ¿con cuántos empezaron á jugar?

Sea x la cantidad con que empezó Antonio, y la de Benito, y z la de Cárlos. En la primer partida quedó Antonio con $x-y-z$, Benito con $2y$, y Cárlos con $2z$. En la segunda quedó Antonio con $2x-2y-2z$, Benito con $2y-x+y+z-2z$, ó $3y-x-z$, y Cárlos con $4z$. En la tercera quedó Antonio con $4x-4y-4z=16$, Benito con $6y-2x-2z=16$, y Cárlos con $4z-2x+2y+2z-3y+x+z$, ó $7z-x-y=16$. Simplificando primera y segunda ecuacion, resulta $x-y-z=4$, $3y-x-z=8$, $7z-x-y=16$. Eliminando la x es $2y-2z=12$, y $6z-2y=20$, ó $y-z=6$, $3z-y=10$. Eliminando la y es $2z=16$, ó $z=8$; $y=14$, $x=26$.

VII. Un brigadier tiene tres batallones, uno de españoles, otro de portugueses, otro de ingleses. Quiere asaltar una plaza, y ofrece repartir á la tropa, si se apodera de ella, 2707 doblones, dando tres doblones á cada soldado del batallon que entre primero, y repartiendo el resto con igualdad entre los demas. Hecha la cuenta se ve, que si los españoles entran primero, toca á doblon y medio á cada uno de los demas soldados; si entran primero los portugueses, toca á cada uno de los otros á doblon, y si entran primero los ingleses, toca á cada uno de los otros á $^3/_4$ de doblon. ¿Cuántos soldados tiene cada batallon?

Sea x el número de españoles, z el de portugueses, u el de ingleses. Las ecuaciones son $3x+{}^3/_2z+{}^3/_2u=2703$, $3z+x+u=2703$, $3u+{}^3/_4x+{}^3/_4z=2703$, de donde $x=265$, $z=583$, $u=689$.

VIII. Entre 49 personas, en cuyo número hay hombres, mugeres y niños, han gastado 40 reales: cada hombre gastó 4 reales; cada muger 3, y entre cada 5 niños gastaron 1 real. El número de niños es el cuádruplo de la suma de hombres y mugeres aumentada en una unidad. ¿Cuántos hombres, mugeres y niños habia?

Ecuaciones: $x+y+z=49$, $4x+3z+\frac{u}{5}=40$, $u=4x+4z+4$. Valores: $x=5$, $z=4$, $u=40$.

IX. Tres amigos han puesto á la lotería. Los billetes del primero y del segundo costaron juntos 21 pesetas; los del primero y tercero 24; los del segundo y tercero 27; ¿cuánto costó cada billete?

Ecuaciones: $x+z=21$, $x+u=24$, $z+u=27$. Valores: $x=9$, $z=12$, $u=15$.

X. Hallar cuatro números tales, que la suma de los tres primeros componga 50; el primero sumado con el séxtuplo del cuarto sea igual al tercero; la mitad del primero sumada con el triplo del segundo sea igual al décuplo del cuarto, y el tercio del primero sea igual á la mitad del segundo.

Las ecuaciones son: $x+y+z=50$, $x+6u=z$, $^1/_2x+3y=10u$, $^1/_3x={}^1/_2y$. Valores: $x=12$, $y=8$, $z=30$, $u=3$.

XI. En una Villa hay 600 habitantes repartidos en cuatro barrios. En el primer barrio hay doble número de habitantes que en el cuarto; en el segundo y tercero reunidos hay tantos habitantes como en el primero y cuarto, y el número de habitantes del tercer barrio es los $^5/_7$ del segundo. ¿Cuántos habitantes hay en cada barrio?

Las ecuaciones son: $x+y+z+u=600$, $x=2u$, $y+z=x+u$, $z=^5/_7y$. Valores: $x=200$, $y=175$, $z=125$, $u=100$.

8º *Problemas indeterminados*.

23. Todo problema en que hay mas incógnitas que ecuaciones, es forzosamente indeterminado: porque si hay m, número de incógnitas, y n, número de ecuaciones, como de estas solo se pueden eliminar $n-1$, número de incógnitas, quedarán en la última ecuacion $m-n+1$, número de incógnitas; y siendo $m>n$, quedará mas de una incógnita en la última ecuacion. Será, pues, preciso determinar arbitrariamente todas las incógnitas de la última ecuacion menos una; y esta determinacion arbitraria hará infinito el número de soluciones.

Ejemplo. Se piden cuatro números cuya suma sea 100, y que multiplicados respectivamente por los números 1, 2, 3, 4, la suma de los productos sea 100.

Las ecuaciones son $x+y+z+u=100$,
$x+2y+3z+4u=1000$.

Las incógnitas son cuatro; las ecuaciones dos. De dos ecuaciones solo se puede eliminar una incógnita: luego vendré á parar á una sola ecuacion con tres incógnitas. En efecto, eliminando la x tendré $y+2z+3u=900$, única ecuacion. En ella es preciso determinar arbitrariamente 2 de las incógnitas; por ejemplo la z y la u para conocer la y, y despues la x. Cada determinacion arbitraria produce una nueva solucion del problema.

En todo problema que tenga mas ecuaciones que incógnitas, eliminadas estas quedará una ó mas ecuaciones entre los datos. Si los datos son tales que verifican estas ecuaciones de *condicion*, las ecuaciones propuestas se identifican unas con otras, y se reducen á tantas como incógnitas hay. Si los datos no verifican las ecuaciones de condicion, el problema es absurdo.

Ejemplo. Se piden dos números cuya suma sea a, la diferencia b, y el producto p. Las tres ecuaciones son $x+z=a$, $x-z=b$, $xz=p$. Despejadas la x y z en las dos primeras, sus valores son $x=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b$, $z=\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b$. Sustituidos sus valores en la 3.ª, resulta la ecuacion de condicion $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}b^2=p$ ó $a^2-b^2=4p$, que dice que el cuadrado de la suma menos el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuádruplo de su producto. Si los datos no verifican esta condicion, el problema es absurdo, como si se pidiesen dos números, cuya suma sea 100, la diferencia 40, y el producto 12. Si la verifican, una de ellas seria inútil, como si la suma fuese 7, la diferencia 1, y el producto 12.

24. Resolver en números enteros una ecuacion indeterminada con dos incógnitas.

Sea la ecuacion $ax+by=c$. Los coeficientes a y b deben ser primos entre sí; pues si no lo fuesen, y tuviesen un factor comun d, que no lo fuese del segundo miembro c, x é y, no podrian ser enteros; porque partiendo toda la ecuacion por d, como $\frac{a}{d}$ y $\frac{b}{d}$ son enteros: si lo son x é y, el primer miembro será entero, no siéndolo el segundo $\frac{c}{d}$, lo que es absurdo. Asi la ecuacion $6x+9y=7$, no puede ser satisfecha con valores enteros de x y de y. La ecuacion $3x+9y=21$ puede serlo; pues partida por 3 es $x+3y=7$, en que los coeficientes de x é y son números primos entre sí.

Esto supuesto, sea $x=m$, $y=n$ dos valores de las incógnitas que satisfagan á la ecuacion: será $am+bn=c$, que restada de la ecuacion propuesta da $a(x-m)+b(y-n)=0$; $x-m=-\frac{b(y-n)}{a}$. Como el primer miembro $x-m$ debe de ser entero, debe serlo tambien el segundo: luego el producto $b(y-n)$ debe ser divisible por a: y como b no tiene ningun factor comun con a, es necesario que el otro factor $y-n$ sea divisible por a. Sea pues $y-n=at$, siendo t un número entero y arbitrario: será $x-m=-bt$: luego $x=m-bt$, $y=n+at$, fórmulas en que, conociendo los valores de m y n, y dando todos los valores enteros posibles á t, se tendrán las infinitas soluciones enteras que tendrá el problema.

Para hallar los valores de m y n, ó una solucion entera del problema, despejando la x en la ecuacion, y sacando los enteros del quebrado, á que es igual el quebrado que forme el resto, se igualará á un entero cualquiera E. En esta nueva ecuacion despéjese la y; sáquense los enteros, y el quebrado que forme el residuo iguálese á E'. Despéjese la E, y continúese la misma operacion, hasta que el valor de una de las indeterminadas E, E', E'' etc. resulte entero. Dése un valor cualquiera á la indeterminada que resulte en este valor; y determinando por él las anteriores y la y y la x, se tendrán los valores de m y n: y por las fórmulas $x=m-bt$, $y=n+at$, se obtendrán las soluciones del problema en números enteros.

Problema 1º. Dada una fraccion, como $^{58}/_{77}$, cuyo denominador sea el producto de dos números primos entre sí, descomponerla en dos fracciones, cuyos denominadores sean dichos factores.

Sean x é y los numeradores; será $^{58}/_{77}=\frac{x}{11}+\frac{y}{7}$ ó despejando de quebrados $7x+11y=58$; $x=\frac{58-11y}{7}=8-y+\frac{2-4y}{7}$. Ahora $\frac{2-4y}{7}$ debe ser entero, para lo cual debe serlo su mitad $\frac{1-2y}{7}$, ó $\frac{2y-1}{7}=E$. Resulta $y=$

$7E+1 = 3E + \frac{E+1}{2}$; $\frac{E+1}{2}$ debe ser entero; sea $=E'$, y es $E=2E'-1$ que ya es entero.

Haciendo $E'=0$, es $E=-1$; $y=-3$; $x=13$. Estos dos valores enteros satisfacen á la ecuacion. Haciendo $m=13$, $n=-3$, y sustituyendo en las fórmulas $x=m-bt$, $y=n+at$, tendremos $x=13-11t$, $y=-3+7t$. Dando á t todos los valores enteros posibles, ya positivos, ya negativos, se tendrán todas las soluciones enteras del problema.

$t=0, 1, 2, 3$ etc. $-1, -2, -3$ etc.
$x=13, 2, -9, -20$ etc. $24, 35, 46$ etc.
$y=-3, 4, 11, 18$ etc. $-10, -17, -24$ etc.

25. Si se quieren limitar las soluciones á las que dén los valores de las incógnitas, no solo enteros, sino tambien positivos, en las ecuaciones $x=m-bt$; $y=n+at$, debe dársele á t un valor tal, que estos dos valores de x é y resulten positivos, y podrá ser limitado el número de soluciones. Los límites en que debe estar comprendido el valor de t, han de resultar de las condiciones que obliguen el término positivo de cada valor á ser mayor que el negativo.

II. Dividir el número 117 en dos partes, de las cuales la primera sea múltipla de 7, y la segunda de 19.

Sea la primera parte $7x$ y la segunda $19y$. La ecuacion es $7x+19y=117$, $x=\frac{117-19y}{7}=16-2y+\frac{5-5y}{7}$.

Como $\frac{5-5y}{7}$ debe ser entero, deberá serlo $\frac{1-y}{7}$ ó $\frac{y-1}{7}=E$; $y=7E+1$. Hago $E=o$, y es $y=1=n$, $x=14=m$. Luego las fórmulas son $x=14-19t$, $y=1+7t$. El valor de y será positivo, siempre que t lo sea; pero el valor de x no puede ser positivo siéndolo t, sino cuando $19t<14$; ó $t<\frac{14}{19}$.

Si t es negativo, el valor de x será siempre positivo; pero no lo será el de y si no es $7t<1$ ó $t<{}^1/_7$. Luego el problema no tiene solucion entera y positiva mas que una, la de $t=o$; entonces $x=14$, $y=1$ y las dos partes del 117 que se piden, son 98 y 19.

26. Cuando el número de incógnitas excede solo en una unidad al de ecuaciones, eliminando todas las incógnitas que se puedan, se llegará á una ecuacion con dos incógnitas, que ya se sabe resolver.

III. Quebraron á una muger cierto número de huevos que traia al mercado; y queriendo saber cuantos eran para pagárselos, solo se acordó de que habia mas de 200 y menos de 300, y de que habiéndolos contado en su casa 3 á 3 salian cabales: contándolos 7 á 7 le sobraba 1, y contándolos 10 á 10 le sobraban 6: ¿cuántos eran?

Sea N el número de huevos, x el número de veces que los contó 3 á 3, z el número de veces que los contó 7 á 7, y u el número de veces que los contó 10 á 10. Las ecuaciones son $N=3x$, $N=7z+1$, $N=10u+6$. Tenemos pues tres ecuaciones con cuatro incógnitas. Eliminando la N quedan $3x=7z+1$, $3x=10u+6$, dos ecuaciones con tres incógnitas. Eliminando la x resulta $7z+1=10u+6$, ó $7z-10u=5$, ecuacion con dos incógnitas z y u, que deben ser números enteros. Expresémoslas, pues, en números enteros por el método general.

Siendo $z=\frac{5+10u}{7}$, sacando los enteros queda $\frac{5+3u}{7}=E$, de donde $u=\frac{7E-5}{3}$. Sacando los enteros es $\frac{E-2}{3}=E'$, de donde $E=3E'+2$. Haciendo $E'=o$, es $E=2$, $u=3$, $z=5$. Luego en el caso presente $m=5$, $n=3$; y aplicando las formulas generales $x=m-bt$, $y=n+at$, será $z=5+10t$, $u=3+7t$, valores que resolverán siempre el problema en números enteros.

Vamos á hallar el valor de x por cualquiera de las dos ecuaciones en que entra esta incógnita. Sea por la primera $3x=7z+1$. Sustituyo el valor de z, y es $3x=35+70t+1$, ó $3x-70t=36$. Es forzoso, si x ha de ser entero, y aplicar á esta ecuacion el método general.

Siendo $x=\frac{36+70t}{3}$, sacando los enteros queda $\frac{t}{3}=E$, y $t=3E$. Haciendo $E=0$, $t=0$, $x=12$, y aplicando las fórmulas generales, es $x=12+70t'$, llamando t' á esta variable auxiliar para distinguirla de la t. Sustituido este valor en $N=3x$, es $N=36+210t'$. Haciendo $t'=0$, 1, 2, 3, 4....... resulta $N=36,246,456,666876$....... luego el número de huevos era $246 > 200$ y < 300.

IV. Buscar un número que dividido por 5 dé de resto 4, y dividido por 7 dé de resto 2. Se calcula como en el anterior. La fórmula es $N=35t-26$. El número menor que satisface al problema es 9.

V. Buscar un número que dividido por 28 dé 17 de resto, y dividido por 19 dé 6 de resto. La fórmula es $N=101+532t$.

VI. Buscar un número que dividido por 2 dé 1 de resto, dividido por 3 dé 2, dividido por 5 dé 3. La fórmula es $N=30t-7$.

VII. Se ha comprado una librería compuesta de 1000 volúmenes en 2190 duros. Los de á folio se han vendido á 6 duros, los de en cuarto á 3 duros, y los en octavo á 30 reales. ¿Cuántos volúmenes habia de cada tamaño?

Las ecuaciones son $x+y+z=1000$, $6x+3y+{}^3/_2 z=2190$; esta segunda se reduce á $4x+2y+z=1460$. Eliminando la z es $3x+y=460$, de donde $y=460-3x$, $z=540+2x$, x es la incógnita arbitraria, y puede tener todos los valores enteros desde $x=1$, hasta $x=153$.

27. Si resulta una ecuacion final con tres incógnitas, se dan á cada una de ellas los diferentes valores arbitrarios que pueda admitir. Como en cada una de estas determinaciones de la tercera incógnita queda la ecuacion con solas dos, y se podrá resolver, se infiere que cada determinacion de la tercer incógnita produce un sistema diferente de soluciones.

VIII. Un posadero ha cobrado 20 duros de varias personas, 4 duros de cada amo, 2 duros de cada criado, y $2\frac{1}{2}$ duros por cada caballo: ¿cuántos amos, criados y caballos habia?

La ecuacion es $4x+2y+\frac{5}{2}z=20$, ú $8x+4y+5z=40$. Hay tres incógnitas y una ecuacion: luego es necesario determinar arbitrariamente una incógnita, y sea la z. Observo que todos los términos de la ecuacion son divisibles por 4 excepto $11z$: luego es preciso que z sea un múltiplo de 4, si ha de subsistir la igualdad.

Hago pues $z=4$, la ecuacion es $2x+y=5$, que solo tiene dos soluciones. Y no hay más soluciones en el problema en números enteros y positivos, porque z no puede ser igual 8 ni mayor, porque en el primer caso seria el segundo miembro cero, y en el segundo negativo.

Luego hubo un amo, tres criados y cuatro caballos, ó dos amos, un criado y cuatro caballos.

IX. ¿De cuántas maneras se pueden pagar 19 duros con columnarias, escudos y ducados? La ecuacion es $5x+10y+11z=380$. Haciendo á z arbitraria, obsérvese que ha de ser múltiplo de 5, y que su mayor valor ha de ser $z=30$. Cada valor de z produce un sistema de soluciones.

Proponemos los siguientes problemas indeterminados para el ejercicio de los alumnos.

X. Pagar 2000 pesetas con paño de dos especies, uno de á 9 pesetas la vara y otro de á 13.

La ecuacion es $9x+13y=2000$: las fórmulas son $x=228-13t$, $y=-4+9t$, que dan 17 soluciones.

XI. Un negociante ha pagado pesetas de 5 rs. con ducados de 11 rs., y ha dado 15 rs. mas. ¿Cuántas son las pesetas y los ducados?

La ecuacion es $5x-11y=-15$; y las fórmulas $x=-3+11t$, $y=5t$, que dan infinitas soluciones desde $t=1$.

XII. Componer 50 rs. con monedas de 4 y de 5 rs.

La ecuacion es $4x+5y=50$, y las fórmulas $x=10-5t$, $y=2+4t$, que dan una solucion.

XIII. ¿De cuántas maneras se pueden componer 264 duros con monedas de 6 duros y de 3 duros?

Ecuacion: $2x+y=88$, que da 43 soluciones.

9º *Potencias y raices de los monomios.*

28. Para elevar un monomio á una potencia cualquiera se elevarán todos sus factores. Las letras se elevan facilmente, multiplicando sus exponentes por el de la potencia: porque $(a^m)^n$ equivale á un producto de tantos factores iguales á a^m, como unidades tiene n: luego habrá que sumar tantos exponentes iguales á m, como unidades tiene n, lo que equivale á multiplicar $m\times n$; será pues, $(a^m)^n=a^{mn}$.

Ejemplos. $(2ab^2)^2=4a^2b^4$; $\left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5=\frac{243a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$.

29. Para extraer una raiz cualquiera de un monomio se extraerá de su coeficiente, y se partirán los exponentes de las letras por el de la raiz; pues esta operacion es inversa de la de elevar á potencias.

Ejemplos. $\sqrt{4a^2b^4}=2ab^2$; $\sqrt[5]{\frac{243a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}}=\frac{3a^2b^3}{cd^2}$.

Cuando la raiz es de grado par podrá ser positiva ó negativa; pues con cualquiera de estos dos signos, elevada al cuadrado ó á cualquier otra potencia par, dará el producto positivo. Asi $\sqrt{4a^2b^4}$ puede ser $2ab^2$ ó $-2ab^2$; cualquiera de estas dos cantidades, elevada al cuadrado, dará $4a^2b^4$.

Es imposible extraer raiz par de una cantidad negativa, pues no hay cantidad alguna, ya positiva, ya negativa, que elevada á una potencia par, dé el resultado negativo. Por eso se llaman imaginarias las raices pares de cantidades negativas, y cuando ocurren en la resolucion de un problema, muestran que el problema es absurdo.

Ejemplo. Se pide un número, cuyo cuadrado sumado con 5 dé 4. La ecuacion es $x^2+5=4$, $x^2=-1$,

$x=\sqrt{-1}$, cantidad imaginaria; el problema es absurdo.

Las cantidades imaginarias, asi como las negativas, se someten á las leyes del lenguage algebráico, y por su combinacion se obtienen resultados muy importantes.

30. Si el exponente de una potencia es descomponible en factores, se podrá hacer la elevacion, elevando la cantidad á la potencia indicada por el primer factor, esta potencia á la que indica el segundo, esta á la que indica el tercero, y asi hasta el último. Si se quiere elevar 4 á la potencia sexta, lo elevaremos primero al cuadrado, y será 16: elevando este número al cubo, se tendrá la potencia sexta de 4. Esto se funda en que $(4^2)^3=4^6$.

Si el exponente de la raiz es descomponible en factores, se extraen sucesivamente las raices que estos indican. Asi $\sqrt[12]{531441}$ se halla, extrayendo primero raiz cuadrada, que da 729, despues raiz cuadrada, que da 27, y últimamente raiz cúbica, que da 3, y por tanto $\sqrt[12]{531441}=3$.

Una expresion radical se podrá reducir, siempre que el exponente de la raiz y el de la cantidad tengan algun factor comun, partiendo ambos exponentes por dicho factor. Asi $\sqrt[4]{a^2b^2}=\sqrt{ab}$; porque esto equivale á extraer primero la raiz cuadrada de a^2b^2, é indicar despues la extraccion de la raiz cuadrada de ab.

31. Si alguno de los factores que están debajo del radical tiene exacta la raiz que este indica, se le extrae y se le pone por coeficiente del radical.

Ejemplos. $\sqrt{8}=\sqrt{2.4}=2\sqrt{2}.$

$$\sqrt[3]{432}=\sqrt[3]{2.216}=6\sqrt[3]{2}.$$

$$\sqrt{Nq^2}=q\sqrt{N}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{c^6 d^8}{a^5}}=\sqrt[5]{\frac{c^5 d^5}{a^5}\cdot c d^3}=\frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3}.$$

$$\sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=\sqrt{3(a^2-2ab+b^2)}=\sqrt{3(a-b)^2}=(a-b)\sqrt{3}.$$

32. Para multiplicar ó partir los radicales de un mismo grado, se multiplican ó parten las cantidades, y al producto ó cociente se deja el mismo signo radical; porque la raiz de un producto equivale al producto de las raices de sus factores; y la raiz de un quebrado equivale á la raiz del numerador partida por la raiz del denominador.

Ejemplos. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab},\ \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{6}}={}^1/_2;$

$$\sqrt[n]{5x^2y^4}\times\sqrt[n]{20ax}=\sqrt[n]{100ax^3y^4};$$

$$\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{33}}={}^1/_4\sqrt{{}^{11}/_{33}}=\frac{1}{4\sqrt{3}};$$

$$\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{-q}=\sqrt[n]{-pq};$$

$$\frac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxy}}=\sqrt[n]{\frac{a}{by}};\ a\sqrt[5]{\frac{b}{a}}=\sqrt[5]{a^4 b}.$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+2\sqrt{ab}+b;\ (a+\sqrt{b})^3= a^3+3a^2\sqrt{b}+3ab+b+\sqrt{b}.$$

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m=a$: en general si un radical se eleva á la potencia del mismo grado que la raiz, el resultado será la cantidad que está debajo del radical.

33. Para multiplicar ó partir radicales de diferente grado se reducirán á tener un mismo grado. Para esto se multiplicará el exponente de cada radical por

el producto de los exponentes de los demas, y se elevará la cantidad que tenga debajo al grado de potencia que indica dicho producto: esta operacion no altera el valor del radical, porque equivale á elevarlo á la potencia, y al mismo tiempo extraerle la raiz que indica dicho producto.

Ejemplos.

$$\sqrt[3]{a}\times\sqrt{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

$$\sqrt[m]{a^p}\times\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}};\ \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{y}{z}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n z^m}{t^n y^m}}.$$

34. Para multiplicar los imaginarios de raices cuadradas, como $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$, debe descomponerse cada uno en los factores, de este modo: $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$ y $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\times\sqrt{-1}$. Multiplicando los dos factores reales $\sqrt{a}\times\sqrt{b}$, el producto es $\sqrt{ab}$. Multiplicando $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$, lo que equivale á elevar al cuadrado $\sqrt{-1}$, este cuadrado es -1. Multiplicándolo por el anterior producto $\sqrt{ab}$, el producto de los dos radicales propuestos será $-\sqrt{ab}$; luego el producto de dos radicales cuadrados imaginarios es una expresion *real*; es decir, libre de radical imaginario.

Del mismo modo tendremos $(\sqrt{-a})^1=\sqrt{-a}$: $(\sqrt{-a})^2=-a$; $(\sqrt{-a})^3=-a\sqrt{-a}$; $(\sqrt{-a})^4=a^2$ etc. $(1+\sqrt{-1})^2=2\sqrt{-1}$, $(x+a+b\sqrt{-1})$

$(x+a-b\sqrt{-1})=(x+a)^2+b^2$. Es decir, el producto de dos polinomios, en parte reales, y con un término imaginario, y que solo se diferencien en el signo del término imaginario, es real.

Varios ejemplos de multiplicacion y division de radicales.

$$\left(x+\sqrt{(x^2-a^2)}\right)\left(x-\sqrt{(x^2-a^2)}\right)=a^2.$$

$$\sqrt{(a^2-b^2)}\times\sqrt{3(a-3b)}=\sqrt{3(a+b)(a-b)^2}=(a-b)\sqrt{3(a+b)}.$$

$$\frac{5c\sqrt{(a+b)}}{6c^2\sqrt{(a^3+b^3)}}=\frac{5}{6c\sqrt{(a^2-ab+b^2)}}.$$

$$\frac{6a^4-23a^2\sqrt{-1}-13ab-20+\frac{22b\sqrt{-1}}{a}+\frac{6b^2}{a^2}}{2a^2-5\sqrt{-1}-\frac{5b}{a}}=3a^2-4\sqrt{-1}-\frac{2b}{a}.$$

Los radicales se suman y restan como las demas cantidades algebráicas. Los términos que contienen radicales son semejantes cuando el radical es igual, y se reducen como términos semejantes.

Ejemplos.

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{b}=3\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[4]{x^2y}-a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y}=(1-a+b)\sqrt[4]{x^2y};$$

$$\sqrt{75}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}.$$

$$\sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}=ab\sqrt{3a};$$

$$\sqrt{27a^3b}-\sqrt{3a^3b^5}=a(3-b^2)\sqrt{3ab}.$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}+\frac{f}{q}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}=\frac{aq+bf}{bq}\sqrt[m]{\frac{c}{d}}$$

10. *Exponentes negativos y fraccionarios.*

35. Toda cantidad cuyo exponente se reduzca á cero, equivale á la unidad; y toda cantidad, cuyo exponente se haga negativo, equivale á la unidad, dividida por la misma cantidad con el mismo exponente positivo.

Dem. Como la resta de los exponentes equivale á la particion de las cantidades, será $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, expresion general.

Si m es mayor que n, $m-n$ es positivo, a^{m-n} es un resultado que sabemos interpretar.

Si $m=n$, $a^{m-n}=a^0$. Para interpretar esta expresion es necesario volver al quebrado propuesto $\frac{a^m}{a^n}$, que siendo $m=n$ se reduce á 1; luego $a^0=1$.

Si $m<n$, sea $n=m+t$, será $a^{m-n}=a^{-t}$. Para interpretar esta expresion volvamos al quebrado $\frac{a^m}{a^n}$, ó $\frac{a^m}{a^{m+t}}$, que se reduce á $\frac{1}{a^t}$: luego $a^{-t}=\frac{1}{a^t}$; luego etc.

Todo factor puede trasladarse de un término á otro del quebrado mudando el signo á su exponente; pues lo mismo es a^{-t} en el numerador que a^t en el denominador. Asi $(bc)^{-p}=\frac{1}{(bc)^p}$; $\frac{1}{a}=a^{-1}$; $\frac{a^m b^n}{c^p d^q}=a^m b^n c^{-p} d^{-q}$; $\frac{c}{f}=cf^{-1}=\frac{f^{-1}}{c^{-1}}$; $\frac{a^2+b^2}{a+b}=(a^2+b^2)\ (a+b)^{-1}$.

36. Las reglas dadas en las operaciones algebráicas para los exponentes positivos se aplican tambien á los negativos.

Demostremos esto en la multiplicacion, de cuya regla dependen las de la particion, potencias y raices; y demostremos que para multiplicar cantidades con exponentes negativos, deben sumarse dichos exponentes; esto es, que $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

Dem. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; luego $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$; luego etc.

37. Toda cantidad con exponente fraccionario indica la cantidad elevada á la potencia que indica el numerador de la fraccion, y extraida de ella la raiz que indica su denominador.

Dem. Como para extraer una raiz debe partirse el exponente de la cantidad por el de la raiz, será $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$: cuando n es divisible por m, $\frac{n}{m}$ es entero, y la expresion $a^{\frac{n}{m}}$ es fácil de interpretar; pero si n no es divisible por m, no hay otro modo de interpretar la expresion $a^{\frac{n}{m}}$ que por las operaciones de donde ha procedido; es decir, $a^{\frac{n}{m}}$ significa $\sqrt[m]{a^n}$; luego etc.

38. Las reglas dadas para los exponentes enteros sirven tambien para los fraccionarios.

Dem. Digo que $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}}$; porque $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, y $a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^p}$; luego $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}} = a^{\frac{m+p}{n}}$; luego etc.

Los radicales se pueden calcular, reduciéndolos á cantidades con exponentes fraccionarios, y aplicando á estas las reglas algebráicas.

Ejemplos. $\sqrt[5]{a^3b^4} : \sqrt[7]{a^2b^3} = a^{3/5}b^{4/5} : a^{2/7}b^{3/7} = a^{11/35}$ $b^{13/35} = \sqrt[35]{a^{11}\,b^{13}}$.

Hallar el mayor divisor comun de $90ab^{1/3} - 195a^{-1/2}$ $b^{1/3} + 90a^{-2}b^{1/3}$ y $12ab^{2/3} - 36a^{-1/2}b^{2/3} + 27a^{-2}b^{2/3}$.

El factor comun independiente es $3b^{1/3}$: partiendo ambos por él, y despojando al divisor del factor $b^{1/3}$, que ya no es comun al dividendo, parto

$$\begin{array}{r|l} 30a - 65a^{-1/2} + 30a^{-2} & 4a - 12a^{-1/2} + 9a^{-2} \\ \cline{2-2} 60a - 130a^{-1/2} + 60a^{-2} & 15 \\ 50a^{-1/2} - 75a^{-2} & \end{array}$$

Despojando al que va á ser divisor del factor $25a^{-1/2}$, partiremos

$$\begin{array}{r|l} 4a - 12a^{-1/2} + 9a^{-2} & 2 - 3a^{-3/2} \\ \cline{2-2} -\ 6a^{-1/2} + 9a^{-2} & 2a - 3a^{-1/2} \\ 0 & \end{array}$$

Luego el comun divisor es $3b^{1/3}\left(2 - 3a^{-3/2}\right)$, ó $3b^{1/3}$ $\left(2 - \frac{3}{a^{3/2}}\right) = 3b^{1/3}\left(\frac{2a^{3/2} - 3}{a^{3/2}}\right)$. Como el denominador $a^{3/2}$, al partir ambos polinomios por el divisor comun, se convertiria en multiplicador de ellos, se debe suprimir, y el divisor comun pedido será $3b^{1/3}\left(2a^{3/2} - 3\right)$.

11º *Raices cuadradas y cúbicas de los polinomios.*

39. Para extraer raiz cuadrada de un polinomio, despues de ordenado; extráigase raiz cuadrada de su primer término, y se tendrá la primer parte de la raiz,

Como el segundo debe ser duplo de la primera por la segunda, pártase por el duplo de la primera y se tendrá la segunda.

Para destruir el cuadro del binomio, que ha resultado en la raiz, multiplico cociente por divisor, y este producto sumado con el cuadrado de la segunda, réstese de la cantidad.

Si queda resíduo, es prueba de que la raiz tiene mas de dos términos. Tomo los dos hallados por primera parte, y continúo la misma operacion hasta que ó no quede resto, en cuyo caso se tendrá la raiz exacta, ó resulte un resto en el que la letra que ordena tenga menor exponente que en el primer término del divisor. En este caso la raiz es inexacta; y continuando su extraccion, resultará una série de términos indefinida.

Ejemplo.

$$\sqrt{(9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4)}=3a^2-2ab+5b^2.$$

$$\begin{array}{ll} -9a^4+12a^3b-4a^2b^2 & \underline{|6a^2-2ab} \\ & \quad -2ab \\ \hline 0 \quad\quad 30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & |6a^2-4ab+5b^2 \\ \quad\quad -30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & \quad 5b^2 \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

40. Para extraer raiz cúbica de un polinomio, despues de ordenado, extráigase raiz cúbica de su primer término, y se tendrá la primer parte de la raiz. Como el segundo término debe ser triplo del cuadrado de la primera por la segunda, pártase por el triplo del cuadrado de la primera parte ya conocida, y se tendrá la segunda.

Para destruir el cubo del binomio, que ha resultado en la raiz, multiplíquese el cociente por el divisor, y el producto sumado con el triplo de la primera multiplicado por el cuadrado de la segunda y con el cubo de la segunda, réstese de la cantidad.

Si queda algun resíduo es prueba de que la raiz tiene mas de dos términos. Tómense pues como primera parte los dos hallados, y continúese la misma operacion hasta que, ó no quede resto, y entonces la raiz hallada será exacta, ó resulte menor en el dividendo que en el primer término del divisor el exponente de la letra que ordena, y entonces la raiz será una série de términos indefinida.

Ejemplo.

$$\sqrt[3]{(a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6)}=a^2-2ab+b^2$$

$$\begin{array}{l|l}
-a^6\quad+6a^5b-12a^4b^2+8a^3b^3 & 3a^4 \\
\hline
\quad 0 & -2ab \\
\qquad 3a^4b^2-12a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6 & 3a^4-12a^3b+12ab^2 \\
\cline{2-2}
\qquad -3a^4b^2+12a^3b^3-12a^2b^4 & b^2 \\
\qquad\qquad -3a^2b^4+6ab^5-b^6 & \\
\hline
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Otros ejemplos de extraccion de raiz cuadrada.

$$\sqrt{(9a^4-12a^5\sqrt{-1}-2a^2(2-3\sqrt{-2})+4a\sqrt{(2-2)}}=3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}$$

$$\begin{array}{l|l}
+6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2-2} & 6a^2-2a\sqrt{-1} \\
\cline{2-2}
\qquad 0 & -2a\sqrt{-1} \\
 & 6a^2-4a\sqrt{-1}+\sqrt{-2} \\
\cline{2-2}
 & \sqrt{-2}
\end{array}$$

$$\sqrt{(4a^2-12ab^{1/2}+9b+12-18a^{-1}b^{1/2}+9a^{-2})}=2a-3b^{1/2}+3a^{-1}$$

$$\begin{array}{l|l}
\qquad 0 & 4a-3b^{1/2} \\
\cline{2-2}
 & -3b^{1/2} \\
 & 4a-6b^{1/2}+3a^{-1} \\
\cline{2-2}
 & 3a^{-1}
\end{array}$$

12. *Ecuaciones de segundo grado.*

14. Ecuaciones de segundo grado son aquellas en que el mayor exponente de la incógnita es 2.

Toda ecuacion de segundo grado puede reducirse á la forma $x^2+px+q=0$, trasponiendo al primer miembro todos los términos que estén en el segundo, ordenándolos con respecto á la incógnita x, y partiendo toda la ecuacion por el coeficiente que tenga x^2.

42. *Toda ecuacion de segundo grado puede ser satisfecha por dos diferentes valores de la incógnita.*

Dem. Sea la ecuacion general de segundo grado $x^2+px+q=0$. Supongamos que $x=a$ satisfaga á esta ecuacion de modo que $a^2+pa+q=0$; será $q=-a^2-pa$. Sustituido este valor de q en la ecuacion propuesta, recibe la forma $x^2-a^2+px-pa=0$, ó $(x+a)(x-a)+p(x-a)=0$, ó $(x-a)(x+a+p)=0$, ecuacion que solo puede ser satisfecha en dos casos: cuando $x=a$, y cuando $x=-a-p$; porque un producto no puede ser igual á cero sino cuando lo es uno de sus factores: luego etc.

Asi se vé en la ecuacion $x^2-3x+2=0$, que es satisfecha cuando $x=1$, y que tambien lo es cuando $x=-1+3=2$.

Raices de una ecuacion de segundo grado son los valores de la incógnita que la satisfacen.

43. *La suma de las raices de una ecuacion de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término mudado el signo, y su producto es igual al tercer término.*

Dem. En la ecuacion general $x^2+px+q=0$ está demostrado, que si una raiz es a, la otra será $-a-p$, cuya suma es $-p$, y su producto $-a^2-pa$ ó q: luego etc.

44. Tratemos ya de resolver una ecuacion de segundo grado.

El trinomio $x^2+px+q=0$ puede no ser un cuadrado perfecto, y es necesario que lo sea para que la ecuacion se reduzca al primer grado, extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros. Un trinomio será cuadrado perfecto, cuando el producto de sus extremos sea igual al cuadrado de la mitad del término medio, como se observa en el cuadrado general $x^2+2ax+a^2$. Luego si los dos primeros términos son x^2 y px, el tercero debe ser $\frac{p^2}{4}$. Es necesario, pues, quitar del primer miembro q y añadir $\frac{p^2}{4}$, y hacer lo mismo en el segundo miembro para que subsista la igualdad, y será $x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$.

Extrayendo la raiz cuadrada de ambos miembros, será $x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$; la duplicidad de signo procede de ser raiz par la que se extrae. Despejando la x, se tiene $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}$; es decir, *en toda ecuacion ordenada de segundo grado la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término mudado el signo $\pm$ la raiz cuadrada del cuadrado de dicha mitad sumado con el tercer término mudado el signo.*

El mismo resultado se hubiera obtenido presentando esta teórica bajo la forma siguiente:

Hallar las raices de la ecuacion $x^2+px+q=0$ es buscar dos números cuya suma sea $-p$, y cuyo producto sea q. Llamo d la diferencia de dichos números: siendo el cuádruplo de un producto igual al cuadrado de la suma de sus factores menos el cuadrado de la diferencia de los mismos, será $4q=p^2-d^2$, de donde $d=\sqrt{(p^2-4q)}$.

Conocemos ya la suma $-p$ y la diferencia $\sqrt{(p^2-4q)}$ de las raices. Una de ellas será $-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$; y otra $-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$, y si se quieren encerrar en una misma fórmula, $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}$.

Esta demostracion parece mas elegante que la anterior, porque se deduce inmediatamente del teorema fundamental, por medio de las relaciones conocidas entre el producto, la suma y la diferencia de dos cantidades, sin necesidad de otras nociones independientes de aquel teorema.

45. De esta fórmula resultan todas las propiedades de las ecuaciones de segundo grado.

1ª El radical será imaginario, y por consiguiente las dos raices, siempre que q sea positivo y mayor que $\frac{p}{4}$: luego *las dos raices serán imaginarias, siempre que el tercer término sea positivo, y mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

2ª El radical es nulo y ambas raices se reducen á $-\frac{p}{2}$, siempre que q sea positivo é igual á $\frac{p^2}{4}$: luego *las dos raices son iguales, siempre que el tercer término sea positivo é igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

3ª El radical será real, aunque q sea positivo cuando sea $q < \frac{p^2}{4}$; pero el radical será menor que el término exterior $\frac{p}{2}$: por lo tanto, si este es positivo (ó p negativo) ambas raices son positivas; y si es negativo (ó p positivo) ambas raices son negativas: luego *cuando el tercer término es positivo y menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las dos raices son reales y de signo contrario al del segundo término.*

4ª Tambien será real el radical cuando q es negativo; y en este caso será el radical mayor que el término exterior $\frac{p}{2}$: luego el signo del radical dominará en el resultado; por tanto una raiz será positiva y otra negativa: luego *si el tercer término es negativo, las dos raices son reales y de signo contrario.*

5ª Si $q=o$, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$: las dos raices son o, $-p$: luego *si la ecuacion no tiene tercer término, una raiz será igual cero, y la otra el coeficiente del segundo término mudado el signo.*

6ª Si $p=o$, $x=\pm\sqrt{-q}$: luego *si no hay segundo término, la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario: reales, si el tercer término es negativo, é imaginarios, si es positivo.*

las dos raices, siempre que q sea positivo y mayor que $\frac{p}{4}$: luego *las dos raices serán imaginarias, siempre que el tercer término sea positivo, y mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

2ª El radical es nulo y ambas raices se reducen á $-\frac{p}{2}$, siempre que q sea positivo é igual á $\frac{p^2}{4}$: luego *las dos raices son iguales, siempre que el tercer término sea positivo é igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo.*

3ª El radical será real, aunque q sea positivo cuando sea $q < \frac{p^2}{4}$; pero el radical será menor que el término exterior $\frac{p}{2}$: por lo tanto, si este es positivo (ó p negativo) ambas raices son positivas; y si es negativo (ó p positivo) ambas raices son negativas: luego *cuando el tercer término es positivo y menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, las dos raices son reales y de signo contrario al del segundo término.*

4ª Tambien será real el radical cuando q es negativo; y en este caso será el radical mayor que el término exterior $\frac{p}{2}$: luego el signo del radical dominará en el resultado; por tanto una raiz será positiva y otra negativa: luego *si el tercer término es negativo, las dos raices son reales y de signo contrario.*

5ª Si $q=o$, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{-\frac{p^2}{4}}=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$: las dos raices son o, $-p$: luego *si la ecuacion no tiene tercer término, una raiz será igual cero, y la otra el coeficiente del segundo término mudado el signo.*

6ª Si $p=o$, $x=\pm\sqrt{-q}$: luego *si no hay segundo término, la incógnita tiene dos valores iguales y de signo contrario: reales, si el tercer término es negativo, é imaginarios, si es positivo.*

Por medio de estas propiedades se podrá conocer la naturaleza de las raices de una ecuacion de segundo grado, sin necesidad de resolverla, por la simple inspeccion de sus términos.

Ejemplos.

$x^2-3x+8=0$, tiene sus raices imaginarias: $x=3/2\pm\sqrt{-23/4}$.
$x^2-7x+1=0$, las tiene reales y positivas: $x=7/2\pm 1/2\sqrt{45}$.
$x^2+7x+1=0$, las tiene reales y negativas: $x=-7/2\pm 1/2\sqrt{45}$.
$x^2-6x-16=0$, las tiene reales y de signo contrario: $x=8$, $x=-2$.
$x^2-6x+9=0$, las tiene iguales: $x=3$.
$x^2-6x=0$, tiene por raices: $x=0$, $x=6$.
$x^2-8=0$, las tiene reales, iguales y de signo contrario: $x=\pm 2\sqrt{2}$.
$x^2+9=0$, las tiene imaginarias: $x=\pm 3\sqrt{-1}$.

13. *Problemas del segundo grado.*

I. Buscar un número tal, que restando 2 de su cuadrado, quede 1.

La ecuacion es $x^2-2=1$, ó $x^2=3$, $x=\pm\sqrt{3}=\pm 1,732\ldots$ Valor aproximado.

II. Dividir un número en dos partes tales, que un múltiplo determinado de la primera, multiplicado por otro múltiplo determinado de la segunda, dé un producto determinado.

Sea a el número dado, x la primera parte, $a-x$ la segunda, m el múltiplo de la primera, n el múltiplo de la segunda, y el producto p; la ecuacion es $mx.\,n\,(a-x)=p$,

de donde $x=1/2\,a\pm\sqrt{\left(1/4\,a^2-\frac{p}{mn}\right)}$.

Si $m=n=1$, entonces $x=1/2\,a\pm\sqrt{(1/4\,a^2-p)}$, valor que resuelve el problema siguiente: dividir un número en dos partes, cuyo producto sea dado. Este problema es imposible, si $1/4\,a^2<p$, ó $a^2<4p$. En efecto, se sabe que el cuádruplo del producto de dos cantidades debe ser igual al cuadrado de su suma menos el cuadrado de su diferencia; luego el cuadrado de la suma debe ser mayor, ó cuando menos, igual al cuádruplo del producto.

A esta fórmula general se reduce el siguiente problema: dada la suma de capitales y ganancias de dos asociados, y el capital del uno y la ganancia del otro, determinar la ganancia del primero y el capital del segundo.

En efecto, sea c el capital del primero, q la ganancia del segundo, x la ganancia del primero, y el capital del segundo, y s la suma de estas cuatro cantidades. Tendremos primero $c+x+y+q=s$, de donde $x+y=s-c-q$, primera ecuacion.

2º Siendo los capitales proporcionados á las ganancias, será $\frac{c}{x}=\frac{y}{q}$, de donde $xy=cq$, segunda ecuacion. Estas dos ecuaciones manifiestan, que lo que se busca son dos números, cuya suma es $s-c-q$, y cuyo producto es cq. Haciendo pues en la fórmula del problema anterior $a=s-c-q$, y $p=cq$, será $x=\frac{s-c-q}{2}\pm\sqrt{\left(\left(\frac{s-c-q}{2}\right)^2-cq\right)}$. De estas dos raices, la una es el valor de x, y la otra el de y; pues ambas raices suman $s-c-q$.

III. Buscar dos números, dada su diferencia y su producto.

Sea la diferencia d y el producto p, x el mayor, $x-d$ el menor; la ecuacion será $x^2-dx=p$, $x={}^1/_2d\pm\sqrt{(p+{}^1/_4d^2)}$; el menor será $-{}^1/_2d\pm\sqrt{(p+{}^1/_4d^2)}$.

IV. Buscar dos números, dada su suma y la de sus cubos.

Sea la suma de los números a, la de sus cubos b, x uno de ellos, $a-x$ el otro; la ecuacion es $x^3+(a-x)^3=b$, de donde $a^3-3a^2x+3ax^2=b$, $x^2-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, $x={}^1/_2a\pm\sqrt{\left({}^1/_4a^2+\frac{b-a^3}{3a}\right)}$, $a-x={}^1/_2a\mp\sqrt{\left({}^1/_4a^2+\frac{b-a^3}{3a}\right)}$.

V. Buscar un número que elevado á una potencia y multiplicado por un número dado, sea igual á una potencia del mismo número, superior en dos grados á la primera, multiplicada por otro número dado.

La ecuacion es $m x^p = n x^{p+2}$; partiendo por x^p, es $n x^2 = m$, de donde $x = \pm \sqrt{\frac{m}{n}}$.

VI. Buscar dos números, dada su suma y la razon de sus cuadrados.

Sea a la suma de los números, m la razon de sus cuadrados, x uno de los números, $a - x$ el otro, la ecuacion es $\frac{x^2}{(a-x)^2} = m$; extrayendo raiz cuadrada de ambos miembros, es $\frac{x}{a-x} = \pm \sqrt{m}$, de donde $x = \pm a\sqrt{m} \mp x\sqrt{m}$, $x \pm x\sqrt{m} = \pm a\sqrt{m}$, $x = \frac{\pm a\sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}}$. Los signos superiores resuelven el problema propuesto; los inferiores lo resuelven, siendo a, no la suma, sino la diferencia de los dos números.

VII. Entre varias personas deben pagar los gastos de un proceso, que ascienden á 800 duros; pero tres son insolventes, y cada una de las otras tiene que pagar 60 duros mas: ¿cuántas personas son?

Sea x el número de personas, será $\frac{800}{x}$ lo que toca pagar á cada una, y $\frac{800}{x-3}$ lo que pagó cada uno de los que quedaron; y como esta cuota excede á la anterior en 60 duros, será $\frac{800}{x-3} = \frac{800}{x} + 60$, de donde $60x^2 - 180x = 2400$, $x^2 - 3x = 40$, $x = {}^3/_2 \pm \sqrt{{}^{169}/_4} = {}^3/_2 \pm {}^{13}/_2$.

Los dos valores de x son 8, -5. El primero resuelve el problema. Para interpretar el segundo hago x negativa en la ecuacion, y es $\frac{800}{-x-3} = \frac{800}{-x} + 60$, ó mudando el signo de todos los términos, $\frac{800}{x+3} = \frac{800}{x} -$

60; que resuelve este problema: debiendo pagar x número de personas 800 duros, vinieron 3 mas á pagar, y tocó á cada uno á 60 duros menos.

VIII. Uno compró un caballo, y lo vendió despues en 24 doblones, perdiendo en la venta tanto por 100 como le habia costado. ¿En cuánto lo compró?

Sea x el precio del caballo: la proporcion es $100 : 100-x :: x : 24$; haciendo producto de extremos igual al de medios, es $100x-x^2=2400$; los dos valores de x son 40 y 60. Ambos resuelven el problema.

IX. Se pide un número, cuyo cuadrado, sumado con su séptuplo, dé 44.

La ecuacion es $x^2+7x=44$, $x=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2}$. Los valores de x son $4, -11$.

El segundo es un número, de cuyo cuadrado, restado su séptuplo, produce 44.

X. Un regimiento de caballería ha comprado cierto número de caballos en 750 doblones; un regimiento de dragones ha comprado con $1066\frac{2}{3}$ doblones 15 caballos mas; y cada caballo de este regimiento ha costado $3\frac{1}{3}$ doblones menos que los del primero. ¿Cuántos caballos compró cada regimiento?

La ecuacion es $\frac{750}{x}=\frac{1066\frac{2}{3}}{x+15}+3\frac{1}{3}$: $x=25$, $x=-135$.

XI. Tres compañías de obreros trabajando juntas podrian hacer un bastion en 15 horas. La primera compañia sola emplearia los $\frac{4}{5}$ del tiempo que emplearia la segunda en hacer la misma obra. La segunda compañía empleária en el mismo trabajo 15 horas menos que la última. ¿Cuánto tiempo emplearia cada compañía en hacer el bastion?

Sea x el tiempo que empleará la última en hacer el bastion; Ecuacion: $\frac{15}{x}+\frac{15}{x-15}+\frac{75}{4(x-15)}=1$: valores de x, 60 y $\frac{30}{8}$.

XII. Se piden dos números tales, que el doble de su suma sea igual al triplo de su producto, y á la diferencia de sus cuadrados.

Las ecuaciones son $2x+2y=3xy$, y $3xy=x^2-y^2$: $x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}$, $y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}$.

XIII. Buscar un número tal, que si á su duplo se añade 7 veces el cociente de 30 partido por dicho número, y de la suma se resta 15, resulte 9 veces la mitad del número y 5 mas. Ecuacion: $2x+\frac{210}{x}-15=\frac{9}{2}x+5$: valores de x 6, -14.

XIV. Se han descontado dos letras, una de 4140 duros con 7 meses de anticipacion, y otra de 6120 duros con 4 meses de anticipacion: se ha pagado por ambas 10000 duros: ¿á cuánto por 100 ha sido el descuento mensual? Ecuacion: $\frac{414000}{100+7x}+\frac{612000}{100+4x}=10000$: valores de x; $\frac{1}{2}$ y $-\frac{130}{7}$.

XV. Buscar dos números, dada su diferencia y la de sus cubos.

Ecuaciones: $x^3-(x-a)^3=b$: $x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{-(\frac{1}{4}a^2+\frac{b-a^3}{3a})}$.

XVI. Buscar dos números, dada la diferencia de sus cuartas potencias y la suma ó diferencia de sus cuadrados.

Ecuaciones del primer caso: $x^4-y^4=a$, $x^2+y^2=b$: valores, $x=\sqrt{(\frac{1}{2}b+\frac{a}{2b})}$, $y=\sqrt{(\frac{1}{2}b-\frac{a}{2b})}$.

Ecuaciones del segundo caso: $x^4-y^4=a$, $x^2-y^2=b$; $x=\sqrt{(\frac{a}{2b}+\frac{1}{2}b)}$, $y=\sqrt{(\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}b)}$.

14. *Cálculo exponencial.*

46. Cálculo exponencial es el que enseña á hallar el valor de un exponente incógnito.

La cantidad que lo tiene se llama cantidad exponencial.

Para hallar el valor del exponente incógnito se despeja el exponencial, se toman los logaritmos de ambos miembros, y como entonces el exponente incógnito está multiplicado por el logaritmo de su cantidad, es fácil despejarlo.

Ejemplos. Sea la ecuacion $a^x=c$; tomando los logairtmos de ambos miembros, es $x\,L.a=L.c$, y $x=\frac{L.c}{L.a}$.

En la ecuacion $c^{mx}=ab^{nx-1}$ es $mxL.c=L.a+nxL.b-L.b$, $x=\frac{L.a-L.b}{mL.c-nL.b}$.

En la ecuacion $b^{n-\frac{a}{x}}=c^{mx}f^{x-p}$ es $nL.b-\frac{a}{x}L.b=mxL.c+xL.f-pL.f$, ó quitando quebrados y ordenando $(mL.c+L.f)x^2-x(pL.f+nL.b)+aL.b=0$.

Si se pide en las dos ecuaciones $l=ab^{x-1}$, y $m=\frac{a(b^x-1)}{b-1}$ despejar la x y la b, eliminaré el exponencial b^x de ambas ecuaciones, lo que da la ecuacion $\frac{lb}{a}=\frac{mb-m+a}{a}$, de donde $b=\frac{m-a}{m-l}$, y sustituyendo su valor en la primera ecuacion, sale $x=1+\frac{L.l-L.a}{L.(m-a)-L.\dot{-}(ml)}$.

15. *De los límites.*

47. Se llama cantidad variable aquella que por su naturaleza recibe sucesivamente incrementos ó decrementos; y cantidad constante la que conserva siempre un mismo valor. Una cantidad decimal periódica es variable, porque á cada período que se considere en ella de mas, aumenta su valor: el período es una cantidad constante, porque conserva siempre el mismo valor.

Llámase *límite* de una cantidad variable aquella constante, á la cual se va acercando continuamente la variable, sin llegar nunca á ser igual á ella, aunque pueda acercarse tanto que su diferencia sea menor que cualquier cantidad dada.

Por ejemplo, la fraccion $^2/_3$, que da la cantidad decimal periódica 0, 666. . . . es el límite de dicha cantidad, pues por mas períodos que se añadan, nunca podrá la cantidad decimal hacerse igual á $^2/_3$; mas pueden añadirse tantos períodos que su diferencia sea menor que una cantidad dada, por pequeña que sea.

48. *Teorema general de los límites.* Si dos cantidades variables son iguales en cualquier punto de su aproximacion á sus límites, sus límites serán tambien iguales.

Dem. Sea a el límite de la primer variable, y x lo que le falta á dicha cantidad para llegar al límite: podrá expresarse generalmente dicha variable por $a-x$. Sea b el límite de la segunda variable, y z lo que le falta para llegar á él; la segunda variable será $b-z$. Por hipótesis $a-x=b-z$, en todos los puntos de la aproximacion á los límites; digo que $a=b$, y $x=z$: porque si no, habrá una cierta diferencia d entre a y b. Trasponiendo en la ecuacion será $a-b=x-z$, y será $x-z=d$, y $x=d+z$, lo que obliga á x á ser mayor que d, cuando por la hipótesis x y z pueden ser menores que cualquier cantidad por pequeña que sea. Luego no puede haber diferencia entre a y b, y por tanto, si las cantidades variables son iguales en cualquier punto de su aproximacion á sus límites, estos son iguales.

Aplicacion. La fraccion $^2/_3$ da la cantidad decimal periódica 0; 666. . . La fraccion $^{262}/_{393}$ da la cantidad decimal periódica 0, 666. . . . Estas dos variables son evidentemente iguales en todos los puntos de su aproximacion á los límites; podemos, pues, inferir que los límites $^2/_3$ y $^{262}/_{393}$ son iguales. En efecto, partiendo por 131 los dos términos del segundo quebrado, se reduce á $^2/_3$.

Si las cantidades variables se acercasen á los límites disminuyendo, seria $a+x=b+z$, $a-b=z-x$. Si a no es $=b$, $a-b=d$, será $z-x=d$, $z=d+x$; luego z está obligada á ser mayor que d, contra la hipótesis de que z y x pueden ser menores que cualquier cantidad dada; luego $a=b$, esto es, los límites son iguales.

16. *Algunas aplicaciones de los principios del álgebra elemental.*

49. *Progresiones aritméticas.* De estas cinco cosas,

el primer término, el último, la diferencia, el número de términos y la suma de una progresion aritmética, dadas tres, determinar las otras dos.

Sea la progresion aritmética $a.\ a+d.\ a+2d.\ a+3d.\ .\ .\ .a+d\,(n-1)=u$, siendo n el número de términos y u el último. Sea s la suma: la suma del primero y último es igual á la del segundo y penúltimo, á la del tercero y antepenúltimo, y en general á la de cualesquiera dos términos equidistantes de los extremos; porque la misma diferencia en que se aumenta cada término, desde el primero hasta el medio de la progresion, se disminuye cada término desde el último hasta el medio; luego la suma de todos será igual á la suma de los extremos, multiplicada por el número de estas sumas: este número es igual á la mitad del número de términos, y si el número de términos es impar, añadiendo el término medio, que es la semisuma de los extremos, queda tambien multiplicada la suma de los extremos por la mitad del número de términos; luego en todos casos la suma de una progresion aritmética es igual á la suma de los extremos, multiplicada por la mitad del número de términos ó $s=(a+u)\,\frac{n}{2}$. En las dos ecuaciones $u=a+d\,(n-1)$, $s=(a+u)\frac{n}{2}$, se despejarán las incógnitas que se pidan.

Aplicaciones. 1ª Un grave, al caer, corre en el primer segundo 4,9 metros: en el segundo 3×4,9: en el tercero 5×4,9, y asi continúa siguiendo la progresion de los números impares; ¿en cuánto tiempo descenderá de 400 metros de altura? Aqui es $a=4{,}9$, $d=2\times4{,}9$, $s=400$, y se pide la n. Despejada en las dos ecuaciones es $n={}^1\!/_2-\frac{a}{d}+\sqrt{\left(\frac{2s}{d}+({}^1\!/_2-\frac{a}{d})^2\right)}$. Substituyendo es $n=9''$.

2ª ¿Cuántos golpes da el reloj de doce horas en medio dia? 78.

3ª Una porcion de bolas está dispuesta en 18 filas, que crecen de dos en dos, y la primer fila tiene tres. ¿Cuántas bolas hay?

4ª Un viagero que quiere llegar á su destino en cuatro dias, acelera cada dia su marcha en tres leguas, y el último dia anduvo $29\frac{1}{2}$ leguas: ¿cuántas anduvo el primer dia?

50. *Progresiones geométricas.* De estas cinco cosas, el primer término, el último, el cociente, el número de términos, y la suma de una progresion geométrica, dadas tres, determinar las otras dos.

Sea la progresion general $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 \ldots\ldots aq^{n-1} = u$, siendo n el número de términos, y u el último. Sea la suma S; será $S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}) = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$. En las dos ecuaciones $u = aq^{n-1}$, $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ se despejan las dos incógnitas que se pidan.

Ejemplos. Un pródigo ha gastado su caudal en cinco meses, gastando en cada uno el cuádruplo del gasto del mes anterior. En el primer mes gastó 100 duros: ¿qué caudal tenia? Sus gastos mensuales forman una progresion geométrica, en que $a = 100$, $q = 4$, $n = 5$. La incógnita es S; $S = \frac{100(4^5 - 1)}{3} = \frac{100(1023)}{3} = 100 \times 341 = 34100$.

2º Un arriero, encargado de conducir un barril de 100 botellas de vino, saca 12 botellas y las reemplaza con agua. ¿Cuántas veces debió hacer la misma operacion para que no quedasen mas que 40 botellas de vino puro?

En la primer operacion quedaron 88 botellas de vino puro. En la segunda, sacando 12 de 100, sacó de 88 de vino puro $\frac{88 \times 12}{100}$, y quedó de vino puro $\frac{88^2}{100}$: en la tercera quedó $\frac{88^3}{100^2}$. Estos resultados forman la progresion geométrica $88 : \frac{88^2}{100} : \frac{88^3}{100^2}$: etc., en que se conoce $a=88$, $q=\frac{88}{100}$, $u=40$, y la incógnita es n. La ecuacion $u=aq^{n-1}$, ó multiplicando por q, $aq^n=qu$, da $n=\frac{L.q+L.u-L.a}{L.q}$; sustituyendo se tendrá el valor de n.

3º Se pide el valor de un caballo, ajustado asi: que por el primer clavo de los 32 de sus cuatro herraduras debe darse un maravedí, por el segundo dos, por el tercero cuatro, por el cuarto ocho, y asi de los demas, duplicando siempre.

En la misma hipótesis se pregunta: ¿con cuántos clavos, empezando desde el primero, pasaria el valor del caballo de 6000 duros?

51. *Interés compuesto.* Interés compuesto es aquel en que se acumula sobre el capital el interés de cada año para ganar entrambos reunidos el año siguiente.

De estas cuatro cosas, el capital, el tanto por 100, el número de años, y la suma final de capital y réditos, dadas tres, determinar la cuarta.

Sea a el capital, r el tanto por 1, t el número de años, y s la suma de capital é intereses al cabo de este tiempo.

Formo esta proporcion: si 1 se convierte en $1+r$ al cabo del año, a, capital del primer año, ¿en qué se convertirá? En $a(1+r)$: este es el capital para el segundo año: al cabo de él se habrá convertido en $a(1+r)^2$; al cabo del tercer año en $a(1+r)^3$, y al cabo de t, número de años, el capital a se habrá convertido en $a(1+r)^t$: luego $S=a(1+r)^t$, y en esta ecuacion se despejará la incógnita que se pida.

Ejemplos. 1º Un hombre destina 10000 duros para pagar una deuda de 12000, poniendo su capital á 5 por 100, ¿en cuántos años habrá pagado los 12000 duros? Aqui es $a=10000$, $r=0,05$, $s=12000$, y la incógnita es t. En la ecuacion $12000=10000(1+r)^t$ despejo el exponencial $(1,05)^t=1,2$, y es $t=\frac{L.1,2}{L.1,05}=3$ años, 9 meses con corta diferencia.

2º ¿A cuánto por 100 se han impuesto 6000 duros para convertirse en 18000 en 15 años y 4 meses? Aqui es $a=6000$, $s=18000$, $t=15^1/_3$, y la incógnita es r: como

$(1+r)^t=\frac{s}{a}$, será $1+r=\sqrt[t]{\frac{s}{a}}=\sqrt[46/3]{3}=\sqrt[46]{27}$. Esta raiz se extre por logaritmos.

3.° ¿Cuántos años se ha de imponer un capital para que ascienda á una suma m número de veces mayor de lo que era? Aqui es $s=ma$, y la ecuacion $m=(1+r)^t$, y $t=\frac{L.m}{L.(1+r)}$.

52. *Anualidades*. Anualidad es la renta que se paga cada año por un capital prestado, con el objeto, no solo de pagar los intereses, sino de amortizar el capital.

Problema general. De estas cinco cosas el capital prestado, el tanto por 100, el número de años, la anualidad, y lo que se debe del capital al cabo de dicho número de años, dadas cuatro determinar la quinta.

Sea a el capital, r el tanto por 1, x la anualidad, t el número de años, y z la cantidad que se debe del capital al cabo de este tiempo. Al cabo del primer año el capital con sus intereses es $a(1+r)$, y lo que se debe para el segundo año es $a(1+r)-x$. Este capital con sus intereses al cabo del segundo año es $a(1+r)^2-x(1+r)-x$. Lo que se debe al fin del tercer año es $a(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$, y en general lo que se debe al cabo de t, número de años que hemos llamado z, es $z=a(1+r)^t-x\Big((1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}+\ldots+\ldots\ldots 1\Big)$ La cantidad, que multiplica la x equivale á $\frac{(1+r)^t-1}{1+r-1}$: luego $z=a(1+r)^t-\frac{x((1+r)^t-1)}{r}$.

ecuacion en que deberá despejarse la incógnita que se pida.

Si se supone que la deuda está completamente pagada al cabo de t número de años, será $z=0$, y $ar(1+r)^t = x\left((1+r)^t-1\right)$. Si se pide la anualidad, es $x=\frac{ar(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$; si se pide el capital, es $a=\frac{x\left((1+r)^t-1\right)}{r(1+r)^t}$. Si se pide el número de años es necesario despejar $(1+r)^t$, y es $(1+r)^t=\frac{x}{x-ar}$, y $t=\frac{L.x-L(x-ar)}{L(1+r)}$. Si se pide la r será necesario resolver una ecuacion de grado superior; por consiguiente la solucion de este caso se reserva para el álgebra *trascendental*.

A esta cuestion se reduce la de *rentas vitalicias*. Llámase vitalicia ó de *por vida* la renta que se paga á un prestamista anualmente, durante su vida, al cabo de la cual se extingue el capital y renta. La fórmula $x=\frac{ar(1+r)^t}{(1+r)^t-1}$, representa el valor de esta renta, representando a el capital, que ha impuesto á renta de por vida, r el tanto por 1, y t el número de años que le faltan de vida. El valor de t se deduce de las tablas de probabilidad de la vida humana. Si el prestamista no llega á la edad probable que tomó por valor de t, pierde dinero; si pasa de dicha edad gana, porque sigue gozando la renta que no se calculó sino para aquel valor de t. Pondremos aqui la tabla que comunmente se usa para saber la vida probable de un hombre. Los números de la primer fila representan las diferentes edades, y los de la segunda la edad probable que falta por vivir.

1. 5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80 años.
37. $45\frac{1}{2}$. 43. 39. $35\frac{1}{2}$. $32\frac{1}{2}$. $29\frac{1}{2}$. 26. 23. 20. 17. 14. 11. $8\frac{2}{3}$. $6\frac{1}{2}$. $5.3\frac{1}{2}$ años.

Ejemplo. Un hombre de 40 años de edad quiere imponer su capital á renta de por vida: ¿cuánto por 100 deberá exigir de renta cada año, suponiendo que el precio corriente del dinero prestado es á 5 por 100?

En este caso $a=100$, $r=0,05$, $t=23$, número probable de años que faltan de vida á un hombre de 40 años de edad. El valor de $x=5.\frac{(1,05)^{23}}{(1,05)^{23}-1}$.

Log. $(1,05)^{23}=0,4873539$, de donde $(1,05)^{23}=3,071524$, y $(1,05)^{23}-1=2,071524$; y *Log.* $(1,05^{23}-1)=0,3162899$.

$$\begin{array}{r} Log.\ 5=0,6989700 \\ Log.\ (1,05)^{23}=0,4873539 \\ C.^{to}\ Log.\ (1,05^{23}-1)=9,6837101 \\ \hline Log.\ x=0,8700340 \end{array}$$

: luego $x=7,4136$.

Esta debe ser la renta anual que debe gozar por cada 100 unidades del capital que imponga.

Otro. Un hombre de edad de 40 años quiere poner su capital á renta vitalicia por dos vidas, la suya y la de su hijo, que tiene 15 años. En este caso $t=39$; porque la vida probable que falta al padre está incluida en la vida probable que falta al hijo, que es de 39 años segun la tabla. Este caso se resuelve por logaritmos como el anterior.

17.° *Demostraciones algebráicas de algunos principios de la aritmética.*

53. *Numeracion.* La base del sistema comun de numeracion es 10: mas pudiera haberse adoptado cualquiera otra base, y aun seria de desear que se hubiese adoptado el 12, porque tiene mas factores que el 10, y no añade mas dificultad que la de aprender dos nuevas cifras elementales, una para el 10 y otra para el 11.

Sea x la base de un sistema de numeracion: a, b, c, d..... las notas sucesivas con que se expresa un número cualquiera N en dicho sistema, colocadas desde la derecha á la izquierda: será $N=a+bx+cx^2+dx^3+.....$, fórmula que nos dará el valor de N dadas las notas. Al contrario; si dado el valor de N se quiere escribir en el sistema, cuya base es x, partiendo N por x, el resto será la primer nota de la derecha, y el cociente $b+cx+dx^2+.....$ Partiendo este cociente por x, el resto será b, segunda nota de la derecha, y el cociente será $c+dx+.....$ Continúo partiendo los cocientes por x, y los resíduos serán las notas sucesivas. Cuando se llegue á un cociente menor que la base, ese será la primer nota de la izquierda.

Ejemplo. ¿Cuánto vale el número 3120 escrito en el sistema, cuya base es 4? $N=0+2\times4+1\times16+3\times64=216$. Al contrario, se pide escribir el número 216 en el sistema cuya base es 4: partiendo sucesivamente por 4, los resíduos son 0, 2, 1, y el último cociente es 3, menor que 4: luego se debe escribir 3120.

54. *Complemento aritmético.* Sea m el minuendo, s el subtrahendo, r el resíduo: será $r=m-s$: sea A la unidad superior de que se resta el subtrahendo para tener su complemento, que llamo c: será $c=A-s$: luego $m+c=m+A-s=r+A$: es decir: *añadiendo al minuendo el complemento aritmético del subtrahendo, resulta el resíduo con una unidad superior de mas.*

55. *Propiedades de los números enteros.* (*Aritmética, artículo* 4.°) Sean F y F' los factores de un producto P. Supongamos que F partido por d, da de cociente q y de resto r, y que F' partido por d, da de cociente q' y de resto r': será $F=qd+r$, $F'=q'd+r'$: luego $P=FF'=qq'd^2+qr'd+rr'+q'rd$: partiendo esta ecuacion por d, es $\frac{P}{d}=qq'd+qr'+q'r+\frac{rr'}{d}$: luego el *resto de la particion del producto es* rr', *producto de los restos de los factores.*

Sea r el resto de 10 partido por d; el resto de 10^n será r^n, producto de los restos de los factores, 10, 10, 10..... del producto 10^n.

Sean a, b, c, d..... las notas sucesivas de un número N. Será $N=a.\ 1+b.\ 10+c.\ 10^2+d.\ 10^3+$...... El resto de $a.\ 1$ partido por d es a; el de b por 10 será br, llamando r al resto de 10, el de $c.\ 10^2$ será cr^2, el de $d.\ 10^3$ será dr^3.....: luego el resto de N partido por d, será $a+br+cr^2+dr^3+$......

Dividamos el número N en divisiones de m, número de cifras, y expresemos por A_1 la primera division de la derecha, por A_1 la segunda, por A_3 la tercera.... será $N=A_1+A_2.10^m+A_3.10^{2m}+A_4 10^{3m}+$.....

Añadiendo y quitando en el segundo miembro $A_2+A_3+A_4$ +....., será $N=A_1+A_2+A_3+$.... $A_2(10^m-1)+A_3(10^{2m}-1)+A_4(10^{3m}+$...... Añadiendo y quitando en el segundo miembro en primer lugar las divisiones impares y despues las pares, es

$N = A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots) + A_2(10^m + 1) + A_3(10^{2m} - 1) + A_4(10^{3m} + 1) + A_5(10^{4m} - 1) + \ldots$ Estos tres valores de N nos darán todas las reglas necesarias para conocer si un número N es divisible por un divisor D que sea factor de 10^m, ó de $10^m - 1$, ó de $10^m + 1$.

Si es factor de 10^m, el resto de $\frac{N}{D}$ será A_1 en la primera ecuacion.

Si es factor de $10^m - 1$, el resto será $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots$ en la segunda ecuacion, porque $10^m - 1$, $10^{2m} - 1$, $10^{3m} - 1, \ldots$ son divisibles por $10^m - 1$. En efecto, haciendo $10^m = y$, sabemos que $y - 1$, $y^2 - 1$, $y^3 - 1 \ldots$ son divisibles por $y - 1$.

Si D es factor de $10^m + 1$, el resto será $A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots)$ en la tercera ecuacion, porque $10^{2m} - 1 = (10^m + 1)(10^m - 1)$, $10^{4m} - 1 = (10^{2m} + 1)(10^{2m} - 1) \ldots$ son divisibles por $10^m + 1$; y $10^m + 1$, $10^{3m} + 1$, $10^{5m} + 1$, son divisibles por $10^m + 1$, como se ve en la fórmula $\frac{x^n - a^n}{x - a}$, haciendo $x = 10^m$, y $a = -1$, con tal que n sea un número impar.

Haciendo, pues, $m = 1$, $10^m = 10$, cuyos factores son 2, 5, 10. Tambien $10^m - 1 = 9$, cuyos factores son 3, 9. Tambien $10^m + 1 = 11$ número primo: luego.

Son divisibles por 2, 5 ó 10 todos los números en que A_1 lo sea. Son divisibles por 3 ó 9 todos los números en que $A_1 + A_2 + A_3 \ldots$, es decir, la suma de las notas sea divisible por 3 ó por 9. Son divisibles por 11 todos los números en que $A_1 + A_3 + \ldots - (A_2 + A_4 + \ldots)$, es decir, la suma de las notas de sitio impar menos la suma de las notas de sitio par es divisible por 11.

Si $m = 2$, $10^m = 100$, cuyos factores son 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: un número será divisible por cualquiera de estos factores, cuando la primer division de la derecha, compuesta de dos notas, lo sea. Tambien $10^m - 1 = 99$, cuyos factores son

3, 9, 11, 33, 99: será divisible por cualquiera de estos factores, aquel número cuya suma de divisiones de dos notas sea divisible por el mismo factor. Tambien $10^m + 1 = 101$, número primo: será divisible por él todo número en que la suma de divisiones de dos notas de sitio impar menos la suma de divisiones de sitio par sea divisible por 101.

Si $m=3$, $10^m=1000$, sus factores son 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000: es divisible por cualquiera de estos factores aquel número cuya última division de tres notas de la derecha lo sea. Tambien $10^m - 1 = 999$: sus factores son 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999: será divisible por cualquiera de ellos aquel número cuya suma de divisiones de tres notas lo sea. Tambien $10^m + 1 = 1001$: sus factores son 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001: es divisible por cualquiera de estos factores aquel número en que lo sea la suma de divisiones de tres notas de sitio impar menos la suma de divisiones de tres notas de sitio par.

Si hacemos $m=4$, $m=5$, $m=6$, deduciremos reglas para otros muchos divisores.

55. *Dado un número primo, hallar una regla para conocer en qué caso una cantidad cualquiera es divisible por dicho número primo.* Sea dicho número d: si no es 2 ni 5, no podrá ser factor de 10^m; pero podrá serlo de $10^m \pm 1$; y en ambos casos hay regla. Deberá, pues, ser $10^m \pm 1 = dh$, siendo h un entero arbitrario. Dénsele, pues, diferentes valores hasta que su producto por d se diferencie de una potencia del 10 en una unidad. El exponente de esta potencia indica el número de notas de cada division; y será fácil deducir la regla pedida.

56. *Mayor divisor comun.* Sea d factor comun de dos números A y B, de modo que $\frac{A}{d}=x$, y $\frac{B}{d}=z$, siendo x y z enteros. Será $A=dx$ y $B=dz$: partiendo A por B sea q el cociente y r el resto: será $dx=dzq+r$, de donde $r=dx-dzq$, es decir, el resto es divisible por d, factor comun al dividendo y al divisor. Tambien $\frac{A}{B}=\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z}$: esto es, la razon de dos cantidades es igual á la razon de los números de veces que contienen á su divisor comun.

Sea d un número primo: ab el producto de dos factores, que se supone divisible por dicho número primo: digo que si a no es divisible por d, lo ha de ser b. Porque si a no es divisible por d, a y d son primos entre sí, pues d es primo absoluto, y su divisor comun será 1: buscando este divisor comun, sean $q, r, q', r', q'', r'', q''', r'''$, los cocientes y restos respectivos hasta llegar al resto 1. Tendremos las siguientes ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a&=dq+r\\ d&=q'r+r'\\ r&=q''r'+r''\\ r'&=q'''r''+r'''\text{ etc.}\end{aligned}\right\}\text{ Multiplicándolas por } b\text{, dan }\left\{\begin{aligned} ab&=bdq+rb\\ bd&=bq'r+br'\\ br&=bq''r'+br''\\ br'&=bq'''r''+br'''\text{ etc.}\end{aligned}\right.$$

La primer ecuacion manifiesta que rb es divisible por d: la segunda que lo es br', la tercera que lo es br'' etc.: luego $b\times$ el último resto, que es 1, es divisible por d.

57. *Fracciones.* ¿Qué cantidades x é y añadiré ó quitaré á los dos términos de la fraccion $\frac{a}{b}$, de modo que esta fraccion no varíe? será $\frac{a}{b}=\frac{a\pm x}{b\pm y}$: de donde $ab\pm ay=ab\pm bx$, $ay=bx$, $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$: luego es necesario que las cantidades x é y, que se han de añadir ó sustraer de los dos términos de la fraccion propuesta, formen otra fraccion igual á ella. De aquí proceden los métodos, que llaman *componer*, *dividir*, *componer* y *dividir* para sacar nuevas proporciones de una proporcion dada: por ejemplo, si $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, componiendo será $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$, ó $\frac{a+b}{x+y}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.

Dividiendo será $\frac{a-x}{b-y}=\frac{a}{b}$, ó $\frac{a-b}{x-y}=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$: componiendo y dividiendo será $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a-x}{b-y}$, ó $\frac{a+b}{a-b}=\frac{x+y}{x-y}$.

58. *Aproximaciones.* Sea la fraccion $\frac{a}{b}$: queremos aproximarnos á ella en menos de $\frac{1}{q}$: sea $\frac{x}{q}$ la fraccion que se aproxima á $\frac{a}{b}$ en menos de $\frac{1}{q}$, de modo que $\frac{x}{q}<\frac{a}{b}$, y $\frac{x+1}{q}$ mayor que $\frac{a}{b}$: multiplicando por q estas dos desigualdades, será $x<\frac{aq}{b}$ y $x+1>\frac{aq}{b}$; luego x es igual al cociente entero que dé $\frac{aq}{b}$, despreciando el resto.

Sea N un número que tenga inexacta la raiz m: queremos aproximarnos á $\sqrt[m]{N}$ en menos de $\frac{1}{q}$: sea $\frac{x}{q}$ la fraccion que se aproxima á $\sqrt[m]{N}$ en menos de $\frac{1}{q}$, será $\frac{x}{q} < \sqrt[m]{N}$ y $\frac{x+1}{q} > \sqrt[m]{N}$. Multiplicando ambas desigualdades por q, será $x < q\sqrt[m]{N}$ y $x+1 > q\sqrt[m]{N}$, ó introduciendo el coeficiente q debajo de los radicales, $x < \sqrt[m]{Nq^m}$ y $x+1 > \sqrt[m]{Nq^m}$: luego x debe ser igual al entero que dé la extraccion de $\sqrt[m]{Nq^m}$, despreciando el resto.

59. *Períodos.* Propóngase una fraccion, en la cual los factotes simples del denominador sean solamente 2 ó 5: dicha fraccion se expresará generalmente por $\frac{a}{2^m . 5^n}$: y supongamos $m > n$. Reduciéndola, pues, á decimales de la clase 10^m, será $\frac{a . 10^m}{2^m . 5^n . 10^m} = \frac{a . 5^{m-n}}{10^m}$: como $m > n$, el numerador es un número entero, y la reduccion á la clase 10^m exacta. Si $n > m$, seria exacta la reduccion á la clase 10^n. Si $m = n$, la fraccion reducida á la clase 10^m es $\frac{a}{10^m}$.

60. *Si el denominador no tiene ningun factor 2 ó 5, el período decimal empezará desde la vírgula.*

Dem. Sea $\frac{a}{b}$ la fraccion comun que queremos reducir á decimal: supongamos que b no sea divisible ni por 2 ni por 5: digo que siempre que el resto resulte uno mismo, los cocientes y los dividendos han de ser iguales. Porque supongamos que $10D$ y $10D'$ son dos dividendos que han dado un mismo resto r: sean q y q' los cocientes: tendremos $10D = bq + r$ y $10D' = bq' + r$. Restando es $10(D - D') = b(q - q')$. Como b no tiene ningun factor comun con 10, y $q - q'$ no puede ser divisible por 10, porque q y q' son menores que 10; esta ecuacion no puede ser satisfecha, á no ser que $D = D'$ y $q = q'$. Luego cuando los restos son iguales proceden de dividendos y cocientes iguales: luego no puede suceder que restos iguales procedan de dividendos desiguales; y por consiguiente todos los dividendos anteriores tienen que reproducirse para que los restos iguales se reproduzcan, incluso el primer dividendo: luego el período empieza desde la vírgula.

61. *Hallar la fraccion comun de donde ha procedido un período decimal completo.*

Sea p el período y n el número de sus notas: la fraccion decimal formará la progresion geométrica indefinida $\frac{p}{10^n}+\frac{p}{10^{2n}}+\frac{p}{10^{3n}}+\ldots\ldots$ Sea x la fraccion comun de donde se originó el período: será $x=\frac{p}{10^n}+\frac{p}{10^{2n}}+\frac{p}{10^{3n}}+\ldots\ldots$ Esta progresion se va acercando á su límite x mientras mas términos se tomen de ella. Súmola, pues, hasta m número de términos, y llamo b lo que falta de la progresion para completar el valor de x. La suma de la progresion hasta m número de términos se halla por la fórmula $S=a.\frac{q^{n'}-1}{q-1}$ que representa la suma de una progresion geométrica poniendo en esta fórmula $a=\frac{p}{10^n}$, $q=\frac{1}{10^n}$, $n'=m$; y la suma pedida será $\frac{p}{10^n}.\frac{\frac{1}{10^{mn}}-1}{\frac{1}{10^n}-1}$, ó $\frac{p}{10^{mn}}.\frac{1-10^{mn}}{1-10^n}$, ó $\frac{p}{10^{mn}}\left(\frac{10^{mn}-1}{10^n-1}\right)$. Será, pues, $x=\frac{p}{10^{mn}}.\frac{10^{mn}-1}{10^n-1}+b$, ó $x-b=\frac{p}{10^n-1}-\frac{p}{10^{mn}(10^n-1)}$.
Pero b es disminuible á voluntad, tomando á m mayor, y $\frac{p}{10^{mn}(10^n-1)}$ disminuye tambien á voluntad conforme aumenta m: luego los límites de ambos miembros son iguales: esto, es $x=\frac{p}{10^n-1}$, fraccion de donde resultó el período p.

62. *Dividir el número* a *en partes proporcionales á los números* m, n, p,.... Esta es la regla de compañía.

Sea x la parte proporcional á m, z la parte proporcional á n, u la parte proporcioual á p..... Debiendo ser $m:n::x:z$, $m:p::x:u$ etc., será $z=\frac{nx}{m}$, $u=\frac{px}{m}$ etc., y la ecuacion será $x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}$

$+\ldots\ldots=a$, de donde $x=\frac{ma}{m+n+p+\ldots\ldots}$, $z=\frac{na}{m+n+p+\ldots\ldots}$, $u=\frac{pa}{m+n+p+\ldots\ldots}$..... de donde estas proporciones: $m+n+p+\ldots\ldots:a::m:x::n:z::p:u$,..... esto es, suma de capitales es á la ganancia ó pérdida total como cada capital á su ganancia.

63. *Descuento.* Sea a la letra que queremos descontar, r el tanto por 1, x la letra descontada: la proporcion es: $1+r:1::a:x=\frac{a}{1+r}$.

Segun el método usual se dirá $1:1-r::a:x=a(1-r)$. La diferencia entre estos dos valores es $\frac{a}{1+r}-a(1-r)=a.\frac{r^2}{1+r}$: esta cantidad es el r por 1 de $\frac{ar}{1+r}$, que es el descuento; porque $\frac{ar}{1+r}$ es $=a-\frac{a}{1+r}$: esto es, la cantidad que descuenta el banquero de la letra.

64. *Intereses.* Sea a la cantidad prestada, r el tanto por 1, x la suma de cantidad y rédito; tendremos $1:1+r::a:x=a(1+r)$.

Esta fórmula nos da una nueva demostracion de la del descuento; porque si el banquero debe pagar al tenedor de la letra la cantidad a que prestó, esta cantidad es $=\frac{x}{1+r}$: es decir, á la letra partida por $1+r$.

65. *Aligacion* Tenemos las cantidades A, B, C......, cuyos precios respectivos son a, b, c......, ¿cuál deberá ser el precio de la mezcla? Sea este precio x. Los valores de las especies son Aa, Bb, Cc..... y el de la mezcla es $(A+B+C+\ldots\ldots)x$; y como este valor debe ser igual á la suma de los valores de las especies, para que no haya ganancia ni pérdida en la operacion, será $Aa+Bb+Cc+\ldots\ldots=(A+B+C+\ldots\ldots)x$, de donde $x=\frac{Aa+Bb+Cc+\ldots\ldots}{A+B+C+\ldots}$, valor del precio medio.

Se piden las cantidades que deben tomarse de dos especies, cuyos precios son a, b para que la mezcla pueda venderse á un precio dado x. La ecuacion es $Aa+Bb=(A+B)x$, y las incógnitas son A y B; dejando á cada una de estas letras en un solo miembro, será $A(a-x)=B(x-b)$, de donde $\frac{A}{B}=\frac{x-b}{a-x}$: es decir, *las cantidades que han de tomarse de ambas especies* *están en razon inversa de las diferencias de sus precios con el medio.*

Para que el problema sea determinado es forzoso añadir otra condicion: por ejemplo, se quiere que la cantidad de la mezcla sea M; esto es, que $M=A+B$: luego deberemos dividir el número M en dos partes proporcionales á $x-b$, y á $a-x$: haremos, pues, la regla de compañías: $x-b+a-x$, ó $a-b : M :: x-b : A :: x-a : B$, de donde $A=\frac{M}{a-b}(x-b)$, $B=\frac{M}{a-b}(a-x)$. Estos valores manifiestan que debe multiplicarse la *diferencia proporcional*, correspondiente á cada especie, por el factor $\frac{M}{a-b}$, para tener la cantidad que se ha de tomar de aquella especie.

66. *Logarítmos.* Sea a la base del sistema logarítmico: la progresion aritmética será $0, 1, 2, 3, 4 \ldots$, y la geométrica $1 : a : a^2 : a^3 : a^4 \ldots$. Llamo y á un número, y x á su logaritmo: es evidente que $a^x=y$. Esta ecuacion nos dará todas las propiedades de los logaritmos.

1.° Si a es entero, x ha de ser positivo para los valores enteros de y, y negativo para los fraccionarios. Si a es fraccionario, serán negativos los logaritmos de los números enteros, y positivos los de los fraccionarios.

2.° Las cantidades negativas no tienen logaritmo, siempre que se suponga la base positiva, porque si a es positiva, tenga x el valor que tuviere, jamás será y negativa.

3.° Si la base es negativa, las cantidades positivas tendrán logaritmos pares, y las negativas tendrán logoritmos impares.

4.° El logaritmo del producto es la suma de los logaritmos de los factores; porque sean x y x' los logaritmos de y é y' será $a^x=y$, $a^{x'}=y'$, $a^{x+x'}=yy'$, y $x+x'=\text{Log.}\,yy'$.

5.° El logaritmo del cociente es la diferencia del logaritmo del divisor al del dividendo; porque siendo $\frac{y}{y'}=a^{x-x'}$, será $x-x'=\text{Log.}\frac{y}{y'}$.

6.° El logaritmo de una potencia es igual al logaritmo de la raiz multiplicado por el índice de la potencia; porque siendo $y=a^x$, será $y^m=a^{mx}$, y $mx=\text{Log.}\ y^m$.

7.° El logaritmo de una raiz es igual al logaritmo de la cantidad partido por el índice de la raiz; porque siendo $y=a^x$, será $\sqrt[m]{y}=a^{\frac{x}{m}}$, y $\frac{x}{m}=\text{Log.} \sqrt[m]{y}$.

67. *Restos de las potencias de un mismo número.* Aquí generalizaremos cuanto hemos dicho anteriormente acerca de las potencias del 10 partidas por un número primo con 10, ó absolutamente primo: particion que se verifica en los períodos decimales.

Sea a un número cualquiera: la série de sus potencias es 1, a, a^2, a^3..... sea p un número primo con a: el primer término 1 dividido por p deja de resto 1: digo que habrá una potencia a^t del número a, que dividida por p deja tambien el resto 1, siendo $t<p$.

Dem. Sea a^m una cualquiera de las potencias de a.

Si en la expresion a^m doy á m un número de valores diferentes de la série, igual á p, partiendo sucesivamente por p estos valores de a^m habrá dos divisiones por lo menos, que dejarán un mismo resto a'; porque el número de divisiones es igual á p, y cada resto ha de ser menor que p. Sean, pues, a^n, $a^{n'}$ las dos potencias que dan el mismo resto a'. Será $a^n=Ep+a'$, $a^{n'}=E'p+a'$, siendo E' y E los cocientes de las dos divisiones. Restando estas dos ecuaciones, será $a^{n'}-a^n=p(E'-E)$, ó $a^n(a^{n'-n}-1)=p(E'-E)$; pero p es primo con a, y por consiguiente con a^n; luego p es factor de $a^{n'-n}-1$, y por tanto $a^{n'-n}$ dividido por p deja el resto 1; pero $n'-n$ es menor que p, pues están tomados en la série de los números naturales, y pertenecen á una porcion de términos de esta série, cuyo número es p; luego hay una potencia de a, cuyo exponente es inferior á p, la cual dividida por p deja de resto la unidad.

Si $a^t=Ep+1$, es decir, deja de resto 1,

$a^{t+1}=Epa$, que dejará el mismo resto que a^1:

$a^{t+2}=Epa^2+a^2$, que dejará el mismo resto que a^2 etc.:

luego se reproducirán periódicamente los mismos restos, y las potencias a^{2t}, a^{3t}, a^{4t}...... a^{nt}, dejarán de resto 1.

Formando, pues, el período de los restos a^0 hasta a^t, se podrá determinar el resto de una potencia muy elevada. Por ejemplo, se quiere saber el resto de 10^{1000} dividido por 7.

Examino cuál potencia de 10 dividida por 7 deja de resto 1, y hallo que es la sexta; pues el período de los restos es 1, 3, 2, 6, 4, 5. Luego en todas las potencias, cuyo índice sea divisible por 6, hay el resto 1. Partiendo 1000 por 6, el cociente es 166, y el resto 4. Luego 10^{996} deja de resto 1, y 10^{1000} deja el mismo resto que 10^4, es decir, 46.

68. Sea p un número primo, y a^t la menor potencia de a que deja el resto 1: *digo que el exponente* t, *ó es* $p-1$, *ó factor de* $p-1$. Aplicado á los períodos decimales, ó el número de notas del período es igual al denominador disminuido de 1, ó es factor suyo.

Dem. Como siempre hay un exponente t menor que p, con el cual la potencia a^t deja de resto 1, se infiere que t no puede ser mayor que $p-1$, y así debe ser uno de los números de la série 1, 2, 3, 4...... $p-1$.

Supongamos que los términos de la série a^0, a^1, a^2, a^3......., a^{t-1}, divididos por p, dejen los restos..... 1, b, b' b''........

El número de estos restos es t, y todos ellos son diferentes. El número de ellos es t, porque la série de 1, a, a^2..... a^{t-1} tiene t número de términos: todos estos restos son diferentes, porque si hubiera dos potencias a^n, a^m que dejáran el mismo resto q, seria $a^n = Ep + q$, $a^m = E'p + q$, y $a^n - a^m = p(E - E')$, ó $a^m(a^{n-m} - 1) = p(E - E')$, en cuyo caso a^m seria divisible por p, lo que es imposible, pues a y p son primos, ó a^{n-m} dividido por p dejaria el resto 1, lo que es contra la hipótesi, porque a^t es la menor potencia que deja de resto 1 y $n-m$ es menor que t: luego todos los restos de la série 1, b, b', b''...... son diferentes; pero como su número es t, y el de la série 1, 2, 3..... $p-1$ es $p-1$, se infiere, ó que la série 1, b, b', b''..... contiene todos los números naturales desde 1 hasta $p-1$, en cuyo caso $t = p-1$, ó si $t < p-1$, la série de los restos 1, b, b', b''..... no contendrá todos los números naturales comprendidos entre 1 y $p-1$.

Sea h uno de estos números naturales no comprendidos en la série de los restos; multiplicando esta série por h tendremos la série $h, bh, b''h, b'h....$, que partida por p dará una nueva série de restos $h, h,' h,'' h'''.....$ Digo que estos restos son diferentes entre sí, y son diferentes de los restos.. $1, b, b', b''.....$

Son diferentes entre sí; porque sean a^m, a^n dos términos de la série de las potencias, E, E', r, r' los cocientes y restos que dejan, partiéndolos por p; será $a^m = Ep + r$, $a^n = E'p + r'$: multiplicando estas dos ecuaciones por h, será $ha^m = hEp + hr$, $ha^n = hE'p + hr'$. Pero como r, r' son términos de la série $1, b, b', b''....$, hr, hr' son términos de la série $h, bh, b'h, b''h.....$; y si partidos por p pudiesen dejar un mismo resto R, sería $hr = ep + R$, $hr' = e'p + R$; de donde $ha^m = p(hE + e) + R$, y $ha^n = p(hE' + e') + R$. Restando será $h(a^n - a^m) = p(hE' - hE + e' - e)$: luego p es factor de $h(a^n - a^m)$; pero de h no lo es, porque h es menor que p; luego lo será de $a^n - a^m$, ó de $a^m(a^{n-m} - 1)$; pero de a^m no lo es porque es primo con a, ni tampoco de $a^{n-m} - 1$, porque a^{n-m} dividido por p no puede dejar 1 de resto, pues $n - m < t$: luego hr y hr' no pueden dejar restos iguales, y por tanto todos los números de la série $h, h', h''.....$ son diferentes entre sí.

Tambien son diferentes de los términos de la série $1, b, b', b''....$ Porque si un término de esta série fuese igual á un término de la série $h, h', h''.....$, llamémosle R. Sea a^m la potencia que deja este resto, y será $a^m = Ep + R$. Sea $a^{m'}$ la potencia correspondiente al término de la série $h, bh, b'h.....$ que deja el mismo resto R; y sea $a^{m'} = E'p + v$: multiplicando por h, será $ha^{m'} = hE'p + hv = E''p + R$; pues el término hv de la série $h, bh, b'h.....$ deja el resto R por hipótesi. Si m' es menor que m, será $a^m - ha^{m'}$, ó $a^{m'}(a^{m-m'} - h) = p(E - E'')$, ecuacion imposible, porque ni $a^{m'}$ es divisible por p, ni $a^{m-n'} - h$ lo es, pues el resto de $a^{m-m'}$ es menor que p, y tambien lo es h. Si $m' > m$, como el término a^{t+m} deja el mismo resto que a^m, será $a^{t+m} = Ep + R$, y restando será $a^{t+m} - ha^{m'}$, ó $a^{m'}(a^{t+m-m'} - h) = p(E'' - E)$, ecuacion imposible como la anterior, porque $t+m-m' < t$.

Tenemos, pues, dos séries 1, b, b'...., h, h', h''....., cuyo número de términos es $2t$, y cuyos términos son todos diferentes entre sí, y se hallan entre los términos de la série 1, 2, 3...... $p-1$. Si aun quedan en ésta términos que no se encuentren en ninguna de las dos anteriores, sea l uno de ellos: multiplico la série 1, b, b'..... por l: parto por p, y resultará una nueva série de restos, diferentes entre sí, diferentes de la série 1, b, b'..... (lo que se prueba como en el caso anterior), y diferentes de los términos de la série h, h', h''..... Porque si en las séries h, $b'h$, $b''h$.....l, $b'l$, $b''l$..... hubiese dos términos que dejasen un mismo resto R, siendo $a^{m'}$, a^{m} las potencias que les corresponden, será $ha^{m} = Ep+R$, $la^{m'} = Ep+R$, y $a^{m'}(ha^{m-m'} - l) = p(E-E')$, ecuacion imposible, ya sea $m'<m$, porque $ha^{m-m} - l$ ha de ser menor que p, ya sea $m'>m$; pues entonces sería $a^{m}(la^{m'-m} - h) = p(E'-E)$. Tenemos, pues, tres séries de restos todos diferentes, cuyo número es $3t$. Si aun no se encuentran en ellas todos los términos de la série 1, 2, 3..... $p-1$, multiplico la série 1, b, b', b''..... por uno de los términos que faltan en ellas, y tendré una nueva série de restos, diferentes entre sí y con los anteriores. Continuando la misma operacion, por grande que sea p, llegaré á comprender en las séries de restos, todos diferentes, todos los términos de la série 1, 2, 3....... $p-1$, y por tanto $p-1$, número de términos de esta série, será igual al número de términos de todas las séries de restos, que es nt, siendo n el número de séries.

La ecuacion $p-1=nt$ prueba que t es factor de $p-1$: luego etc.

Teorema de Fermat. Siendo $a = Ep+1$, elevando ambos miembros á la potencia entera $\frac{p-1}{t}$, será $a^{p-1} - 1 = Ep$, ó $(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)(a^{\frac{p-1}{2}} - 1) = Ep$; luego *siendo* p *un número primo, la potencia* a$^{\frac{p-1}{2}}$, *dividida por* p, *ha de dejar de resto* $+1$ *ó* -1.

Este teorema sirve para saber á qué potencia m debo elevar el 10, para que $10^{m}+1$, ó $10^{m}-1$, sea divisible por un número primo, por ejemplo 41. Dicha potencia es $\frac{p-1}{2}=20$: de modo que $10^{20}+1$, ó $10^{20}-1$ es divisible por 41, lo que sirve para hallar la regla del 41: es decir, qué carácter ha de tener un número entero para ser divisible por 41.

FIN DEL ALGEBRA.

INDICE.

ALGEBRA.