IDEOLOGÍA MATEMÁTICA.

SEGUNDA PARTE.

IDEOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA.

ERRATAS.

17	5	mayer	mayor
	18	una	una
18	3	hehos	hechos
44	21	caratetisan	caracterizan
46	25	calocades	colocados
58	4	obsolutamente	absolutamente
61	2	pribado	privado
93	23	determina	determina
108	14	ostaculo	obstaculo
124	18	puestros	nuestros
128	26	formulas	fórmulas
131	22	abservado	observado
135	27	corespondientes	corresponpondientes
152	12	una	una

LECCIONES GRAMATICÁLES
DE
IDEOLOGÍA MATEMÁTICA

POR DON FRANCISCO PEREZ DEL RIVERO.

Une science bien traitée n'est qu'une langue bien faite.
CONDE. Lang. des Calc.

SEGUNDA PARTE.
IDEOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA.

CON LICENCIA.

CADIZ: Imprenta de D. JOSÉ MARÍA GUERRERO, *calle de S. José esquina á la del Sol, núm.* 155.

AÑO DE 1829.

ADVERTENCIA.

La noticia, que pudieramos dar de este tratado, se hallará en el prólogo que precede á toda la obra.

SEGUNDA PARTE.

IDEOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA.

LECCION PRIMERA.

De la Numeracion.

1. El conjunto de todas las partes, que componen cualquiera cosa, se llama *unidad*, de modo que la *unidad* es la idea de cosa completa. Se escribe con esta cifra 1, que se pronuncia *uno.*

2. La unidad, sus colecciones, y las partes de ella se llaman *cantidad.* Es claro que cualquiera *cantidad* se puede aumentar cuanto se quiera, y disminuirse hasta que se desvanezca.

3. Ahora tratamos de la cantidad como formada por la reunion de varias cosas semejantes, á lo que llamamos *cantidad discreta.* En otro tratado hablarémos de la cantidad considerada como magnitud y distancias de los cuerpos, lo que se denomina *cantidad continua.*

4. Cuando una cantidad se une á otra aumentandola, se pone entre ellas este signo $+$ que se pronuncia *mas.*

5. Cuando una ó varias cantidades son iguales á otra ú otras cantidades, se pone entre las primeras y las segundas este signo $=$ que se lee *igual á.*

6. Las colecciones de la unidad se forman por la repeticion de ella, de este modo: 1 uno, $1+1=2$ dos, $2+1=3$ tres, $3+1=4$ cuatro, $4+1=5$ cinco, $5+1=6$ seis, $6+1=7$ siete, $7+1=8$ ocho, $8+1=9$ nueve.

Estas cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, que se llaman *números díjitos* ó simplemente *números*, sirven para denotar la cantidad discreta.

7. Hay otra cifra, llamada cero, que se escribe así 0, la cual no espresa por si sola ninguna cantidad, sino que indica la falta de ella; pero colocado el cero á la derecha de cualquier, número lo hace diez veces mayor; así en $9+1=10$ diez, el uno se convierte en diez por la agregacion del cero á su derecha: 20 es veinte, 30 treinta, 40 cuarenta, 50 cincuenta, 60 sesenta, 70 setenta, 80 ochenta y 90 noventa.

8. Si en vez de poner 0 despues de 1 hubieramos puesto otro 1, tendriamos 11, esto es $10+1=11$ once: si hubieramos puesto un 2 tendriamos 12, esto es $10+2=10+1+1\ldots$ $\ldots=11+1=12$ doce, y asi sucesivamente 13 trece, 14 catorce &c. Del mismo modo 21 es veinte uno, 34 treinta y cuatro, 52 cincuenta y dos &c., hasta 99 noventa y nueve.

9. Vemos que, asi como el cero colocado á la derecha de un número lo hace diez veces mayor, un número cualquiera puesto á la derecha de otro lo hace tambien diez veces mayor, y ademas le aumenta sus propias unidades.

10. Las cantidades espresadas por un número y un cero se llaman decenas; 10 es una decena, 40 son cuatro decenas, 90 son 9 decenas: si estan espresadas con dos números, comprenden decenas y unidades: en 65 hay seis decenas y cinco unidades, en 47 cuatro decenas y siete unidades.

11. El sistema de la numeracion consiste en que todos los números desde el penultimo van siendo hácia la izquierda diez veces mayores de lo que serian en el lugar del que tienen á la derecha; asi en 148 el ocho son unidades, el cuatro son decenas y vale cuarenta, el uno es centena y vale ciento; por tanto esta cantidad se lee ciento cuarenta y ocho unidades ó

simplemente ciento cuarenta y ocho. Si anteponemos otro número serán millares, de modo que 5148 se lee cinco mil ciento cuarenta y ocho: si precede otro número seran decenas de millar, por lo que 35148 se pronunciará treinta y cinco mil ciento cuarenta y ocho; y si hay delante otro número tendremos centenas de millar, con lo que 635148 se dirán seis cientos treinta y cinco mil ciento cuarenta y ocho. Estos seis órdenes forman el *periodo* de unidades, y sucesivamente se pueden formar iguales periodos de millones, billones, trillones, cuatrillones &c. para llevar la numeracion indefinidamente hasta donde se quiera.

12. A fin de proporcionar la mejor intelijencia señalarémos con puntos el lugar de cada órden de los números poniendoles su denominacion, y dividiremos estos órdenes, como corresponde, de seis en seis para marcar los periodos de unidades, millones, billones, trillones &c., en esta forma:

Periodo de Unidades	*. Unidades.*
	. Decenas.
	. Centenas.
	. Millares.
	. Decenas de millar.
	. Centenas de millar.
Periodo de Millones	*. Millones.*
	. Decenas de millon.
	. Centenas de millon.
	. Millares de millon.
	. Decenas de millar de millon.
	. Centenas de millar de millon.
Periodo de Billones	*. Billones.*
	. Decenas de billon.
	. Centenas de billon.
	. Millares de billon.
	. Decenas de millar de billon.
	. Centenas de millar de billon.
Periodo de Trillones	*. Trillones.*
	. Decenas de trillon.
	. Centenas de trillon.
	. Millares de trillon.
	. Decenas de millar de trillon.
	. Centenas de millar de trillon.
	&c.

A los millones, billones, trillones &c. se les llama tambien cuentos, bicuentos, tricuentos &c.

13. Ya podremos leer una cantidad de muchos números, como 80600516724563910873. La dividiremos por las iniciales de millon, billon, trillon &c. en periodos de seis cifras de la

derecha á la izquierda, señalando un trozo de las tres primeras de cada periodo con una coma vuelta para marcar sus millares, en esta forma: $8\,0_t\,6\,0\,0,5\,1\,6_b\,7\,2\,4,5\,6\,3_m\,9\,1\,0,8\,7\,3$; y observarémos que tiene 3 unidades, 7 decenas, 8 centenas, ningun millar, 1 decena de millar y 9 centenas de millar, que componen el primer periodo; 3 millones, 6 decenas de millon, 5 centenas de millon, 4 millares de millon, 2 decenas de millar de millon y 7 centenas de millar de millon, que forman el segundo periodo; y asi sucesivamente respecto á los billones y trillones; con lo que la leeremos de este modo:

Ochenta trillones, seiscientos mil quinientos diez y seis billones, setecientos veinte y cuatro mil quinientos sesenta y tres millones, novecientos diez mil ochocientos setenta y tres.

$8\,0_t\,6\,0\,0,5\,1\,6_b\,7\,2\,4,5\,6\,3_m\,9\,1\,0,8\,7\,3$, sin pronunciar nada en las decenas de millar de billones, porque no las hay, ni es terminacion de trozo ó millar, en que sea necesario espresar miles.

14. En este ejemplo el último periodo no tiene mas que dos cifras, porque la cantidad no llega á centenas de trillones, y no tendria mas que una cifra sino llegara á decenas de trillones.

15. Bien enterados del sistema de la numeracion podremos escribir cualquiera cantidad, que se nos dicte: por ejemplo, cuatro billones, ochocientos dos millones, cuatro mil y sesenta y nueve, la estamparémos, siguiendo la voz, de la izquierda á á la derecha, en esta forma: 4.000.802.004.069, poniendo ceros en los lugares de las centenas y decenas de millar de millon, millares de millon, decenas de millon, centenas y decenas de millar y centenas, porque en esta cantidad no las hay, y es necesario conservar el órden de la numeracion.

16. Cuando una cantidad es una coleccion cabal de unidades, el número que la espresa, se llama *número entero* ó simplemente *número*.

17. La voz número se usa, por estension, como sinónima de cantidad espresada en números. Asi 5.826 es, por ejemplo, un número ó cantidad.

18. Si los números no se refieren á determinada especie de cosa ó de unidad se llaman *abstractos*; pero cuando se designa la especie de unidades, como dos hombres, cinco arboles, cuatro años &c. se llaman *concretos*.

19. Juntar cantidades aumentandolas y disminuyendolas entre si para sacar resultados se llama *calcular*, y cuando el *cálculo* se hace con números, que se componen y resuelven unos por otros, la ciencia, que enseña á ejecutarlo, se llama Aritmética.

LECCION II.

De la Adicion.

20. Reunir varias cantidades en una, que las comprenda, se llama *sumar* ó hacer su *adicion*.

21. La generacion de los números [6] nos ofrece una idea de la adicion.

22. Si, por ejemplo, tratamos de sumar 5 con 7, tomarémos este número como está: descompondrémos el otro en sus cinco unidades, y las agregarémos sucesivamente al número mayor, en esta forma: $7+5=7+1+1+1+1+1\ldots$ $\ldots=8+1+1+1+1=9+1+1+1=10+1+1=11+1=12$, y esta cantidad 12 será la adicion ó suma.

23. Del mismo modo hubieramos sumado 7 con 5, descomponiendo el 7 en sus unidades y agregandolas sucesivamente al otro número, con lo que hubieramos tenido el mis-

mo resultado 12; pero la operacion hubiera sido un poco mas larga.

24. Tambien seria muy dilatado hacer las sumas por la agregacion sucesiva de unidades, ó contando por los dedos. Asi conviene aprender desde luego de memoria la tabla siguiente:

$1+1=2,\ 1+2=3,\ 1+3=4,\ 1+4=5,\ 1+5=6,\ 1+6=7,\ 1+7=8,\ 1+8=9,\ 1+9=10,$

$2+1=3,\ 3+1=4,\ 4+1=5,\ 5+1=6,\ 6+1=7,\ 7+1=8,\ 8+1=9,\ 9+1=10;$

$2+2=4,\ 2+3=5,\ 2+4=6,\ 2+5=7,\ 2+6=8,\ 2+7=9,\ 2+8=10,\ 2+9=11,$

$3+2=5,\ 4+2=6,\ 5+2=7,\ 6+2=8,\ 7+2=9,\ 8+2=10,\ 9+2=11;$

$3+3=6,\ 3+4=7,\ 3+5=8,\ 3+6=9,\ 3+7=10,\ 3+8=11,\ 3+9=12,$

$4+3=7,\ 5+3=8,\ 6+3=9,\ 7+3=10,\ 8+3=11,\ 9+3=12;$

$4+4=8,\ 4+5=9,\ 4+6=10,\ 4+7=11,\ 4+8=12,\ 4+9=13,$

$5+4=9,\ 6+4=10,\ 7+4=11,\ 8+4=12,\ 9+4=13;$

$5+5=10,\ 5+6=11,\ 5+7=12,\ 5+8=13,\ 5+9=14,$

$6+5=11,\ 7+5=12,\ 8+5=13,\ 9+5=14;$

$6+6=12,\ 6+7=13,\ 6+8=14,\ 6+9=15,$

$7+6=13,\ 8+6=14,\ 9+6=15;$

$7+7=14,\ 7+8=15,\ 7+9=16,$

$8+7=15,\ 9+7=16;$

$8+8=16,\ 8+9=17,$

$9+8=17;$

$9+9=18.$

En vez de pronunciar, por ejemplo, nueve mas seis igual á quince, decimos nueve y seis son quince para mayor brevedad, y lo mismo con los demas números.

25. En virtud de la tabla sabemos la suma de todas las unidades simples. Si los números tuvieren decenas, centenas, millares &c. se sumará cada uno de estos órdenes con el suyo respectivo. Por ejemplo:

$$415+263=400+10+5+200+60+3=600+70+8=678;$$

porque hemos descompuesto el 415 en sus 4 centenas, 1 decena y 5 unidades, y el 263 en sus 2 centenas, 6 decenas y 3 unidades, con lo que nos han dado la suma de 6 centenas, 7 decenas y 8 unidades ó 678 unidades simples.

26. Si nos proponemos sumar 37, 894 y 15, tendremos

$$37+894+15=30+7+800+90+4+10+5=800+130\ldots$$
$$\ldots+16=800+100+30+10+6=900+40+6=946,$$

descomponiendo el 130 en su centena y decenas, y el 16 en su decena y unidades, para sumarlas con las de su órden ó clase.

27. Este método de sumar, que presentamos para la mejor intelijencia de los números, no es el que se usa comunmente, porque seria demasiado minucioso en la práctica. El uso ha establecido poner en columna los números, que se han de sumar, formando fila de arriba abajo sus diferentes órdenes, para reunir primero las unidades, luego las decenas, despues las centenas, y asi sucesivamente; y tirando una raya despues de la última cantidad, se pone debajo el resultado por su órden de unidades, decenas &c. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 86.214 \\ 10.322 \\ 1.453 \\ \hline 97.989. \end{array}$$

Aqui digo 4 y 2 son 6 y 3 son 9, y pongo el 9 en la fila de las unidades: 1 y 2 son 3 y 5 son 8, que pongo bajo las decenas: 2 y 3 son 5 y 4 son 9, que coloco en la fila de las centenas: 6 y 1 son 7, que pongo en el órden de los millares, sin haber pronunciado nada de la segunda cantidad, porque no tiene millares, y no es necesario nombrar el cero. Ultimamente 8 y 1 son 9, que pongo en la fila de las decenas de millar.

28. Muchas veces sucede que la suma de una fila da unidades superiores á las de ella misma. Entonces se ponen las unidades del mismo órden que las de la fila debajo de ella, y las unidades de órden superior se agregan á la inmediata fila sobre la izquierda, bien sea llevandolas de memoria ó marcandolas en números pequeños dentro de un arco sobre la fila correspondiente. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} ^{(2}\,^{(1} \\ 746 \\ 694 \\ 895 \\ \hline 2.335. \end{array}$$

Como la fila de unidades simples compone 15, pongo sus 5 unidades debajo de ella, y la decena la llevo de memoria ó la coloco dentro de un arco sobre la fila de las decenas para sumarla con ellas. La segunda fila me da 23, cuyas 3 decenas pongo debajo de ella, y las dos centenas las agrego á la fila inmediata, que da por suma otros 23, de que pongo el 3 bajo la fila de los millares, y el 2 delante en el lugar de las decenas de millar, porque ya no hay mas filas.

29. Las adiciones se comprueban sumando de abajo arriba las cantidades, que se han sumado de arriba abajo, para

ver si dan el mismo resultado. Fácil será á los principiantes ejercitarse en estas operaciones con ejemplos, que ellos se echen á si mismos.

LECCION III.

De la Sustraccion.

30. Separar de una cantidad el todo ó parte de ella, ó bien quitar de una cantidad otra igual ó menor; esto es lo que llamamos *restar* ó hacer una *sustraccion*.

Es claro que la operacion de restar es inversa de la de sumar [20].

31. Llámase *minuêndo* á la cantidad de que se ha de hacer la sustraccion, y *sustraendo* la cantidad que se ha de restar: el resultado que queda, se llama *resta* ó *residuo*.

32. Asi como entre las cantidades, que se han de sumar, se pone el signo $+$, se coloca entre el minuendo y el sustraendo este signo $-$ que se lee *menos*.

33. Es evidente que si restamos una cantidad de si misma, ó una cantidad de otra igual á ella, no quedará ningun resultado, esto es, el residuo será 0. Así $7-7=0$, $4-4=0$, $1-1=0$, &c.

34. Si nos proponemos, por ejemplo, restar 5 de 8 descompondremos estos números en sus unidades respectivas, poniendo á las del minuendo 8 el signo $+$ y á las del sustraendo 5 el signo $-$. Las unidades de signo diferente se destruiran ó desvaneceran unas con otras, y las que queden con el signo $+$ se sumaran para tener la resta.

Asi $8-5=1+1+1+1+1+1+1+1-1-1-1-1-1\ldots$
$\ldots-1=1+1+1+0+0+0+0+0=1+1+1=3$.

35. Observemos de paso que cuando la primera cantidad, que se pone despues del signo $=$, debe llevar el signo $+$

se omite escribirlo delante de ella; pero si hubiera de llevar el signo —, se espresaria: asi $4=5-1$, y $4=-1+5$.

36. Entendido ya [34] lo que es en si la sustraccion, convendrá tomar de memoria la tabla siguiente para aliviarnos desde luego de contar por los dedos. Esta tabla es inversa de la que dimos antes [24].

$18-9=9,\ 17-9=8,\ 16-9=7,\ 15-9=6,\ 14-9=5,\ 13-9=4,\ 12-9=3,\ 11-9=2,\ 10-9=1,\ 9-9=0;$

$17-8=9,\ 16-8=8,\ 15-8=7,\ 14-8=6,\ 13-8=5,\ 12-8=4,\ 11-8=3,\ 10-8=2,\ 9-8=1,\ 8-8=0;$

$16-7=9,\ 15-7=8,\ 14-7=7,\ 13-7=6,\ 12-7=5,\ 11-7=4,\ 10-7=3,\ 9-7=2,\ 8-7=1,\ 7-7=0;$

$15-6=9,\ 14-6=8,\ 13-6=7,\ 12-6=6,\ 11-6=5,\ 10-6=4,\ 9-6=3,\ 8-6=2,\ 7-6=1,\ 6-6=0;$

$14-5=9,\ 13-5=8,\ 12-5=7,\ 11-5=6,\ 10-5=5,\ 9-5=4,\ 8-5=3,\ 7-5=2,\ 6-5=1,\ 5-5=0;$

$13-4=9,\ 12-4=8,\ 11-4=7,\ 10-4=6,\ 9-4=5,\ 8-4=4,\ 7-4=3,\ 6-4=2,\ 5-4=1,\ 4-4=0;$

$12-3=9,\ 11-3=8,\ 10-3=7,\ 9-3=6,\ 8-3=5,\ 7-3=4,\ 6-3=3,\ 5-3=2,\ 4-3=1,\ 3-3=0;$

$11-2=9,\ 10-2=8,\ 9-2=7,\ 8-2=6,\ 7-2=5,\ 6-2=4,\ 5-2=3,\ 4-2=2,\ 3-2=1,\ 2-2=0;$

$10-1=9,\ 9-1=8,\ 8-1=7,\ 7-1=6,\ 6-1=5,\ 5-1=4,\ 4-1=3,\ 3-1=2,\ 2-1=1,\ 1-1=0.$

En lugar de decir, por ejemplo, trece menos ocho igual á cinco, se pronuncia de ocho á trece van cinco, para mas espedicion, y lo mismo con los otros números.

37. Con esta tabla podemos facilmente restar de las unidades las unidades, y de la decena ó de las decenas y unidades las unidades, que es todo lo que puede ofrecerse.

38. En general la sustraccion se hace quitando unidades de otras unidades de su mismo órden, esto es, de las unidades simples las unidades simples, de las decenas las decenas, de

las centenas las centenas &c. Para restar 523 de 2965 pongo $2965-523=2000+900+60+5-500-20-3=2000\ldots$ $\ldots+400+40+2=2442$.

39. Cuando el sustraendo tiene en algun órden de unidades un número mayor que su correspondiente en el minuendo, se segrega del órden superior inmediato del minuendo una unidad, que vale una decena del órden en que se está haciendo la operacion, y se añade á las unidades respectivas del mismo minuendo. Por ejemplo $625-348=600+20+5\ldots$ $\ldots-300-40-8=500+120+5-300-40-8=500+110\ldots$ $\ldots+15-300-40-8=200+70+7=277$.

40. El modo con que comunmente se hacen las sustracciones es poner primero el minuendo, despues el sustraendo con las unidades de cada clase bajo las correspondientes del minuendo, tirar una raya y restar de derecha á izquierda sucesivamente los números de abajo de los de arriba. Así

$$\begin{array}{r} 3\,6\,9\,8 \\ 1\,4\,3\,6 \\ \hline 2\,2\,6\,2. \\ \hline \end{array}$$

Aqui digo de 6 á 8 van 2, que pongo en la fila de las unidades simples: de 3 á 9 van 6 que coloco en el órden de las decenas, de 4 á 6 van 2, que pongo debajo de las centenas, y de 1 á 3 van 2 que pongo en el órden de los millares.

41. Si trato de restar 689 de 1623 advertiré que el sustraendo tiene algunos números mayores que los del mismo órden del minuendo, y acordandome de lo ya dicho [39] procederé en esta forma:

$$\begin{array}{r} 1\,\dot{6}\,\dot{2}\,3 \\ 6\,8\,9 \\ \hline 9\,3\,4. \\ \hline \end{array}$$

De 9 á 3 no puede ser: tomo una unidad del 2 señalandolo con un punto, y digo de 9 á 13 van 4 que pongo debajo. Como he tomado 1 del 2, digo de 8 á 1 no puede ser: tomo una unidad del 6 señalandolo con un punto, y digo 8 á 11 van 3, que pongo debajo. Como he tomado 1 del 6 del minuendo, queda reducido á 5 de que no puedo restar 6, por lo que tomo la unidad que está delante, y digo de 6 á 15 van 9, que pongo debajo, y queda concluida la operacion. En vez de considerar disminuidas de una unidad las cifras de órden superior en el minuendo, se consideran aumentadas de una unidad las cifras del mismo órden en el sustraendo, para mas facilidad en la locucion.

42. Supongamos que de la cantidad . . . 20064
intentamos restar 17489
con que resultará la resta de . . . . 2575.

En esta operacion ha sido preciso tomar 1 del 6 para componer 14 con el 4 y restar 9. Del mismo modo ha sido necesario tomar 1 de las 2 decenas de millares para cubrir los lugares de los ceros con nueves y poder hacer la resta de las decenas de unidades simples. Esto viene á ser haber descompuesto las cantidades de este modo:

$$20064-17489=19900+150+14-17400-80-9\ldots$$
$$\ldots=2500+70+5=2575.$$

43. La resta ó residuo se llama *esceso* cuando se considera el número mayor con relacion al menor, y se llama *diferencia* cuando se atiende solo á la desigualdad de los números.

LECCION IV.

De la Reducion y de las pruebas de la adicion y la sustraccion.

44. Cuando dos ó mas cantidades estan espresadas [22 y 34] de esta forma $12=7+5$, $8-5=3$, $4+7=9-3+5$ se dice que forman *ecuacion*, esto es, igualacion.

45. La cantidad ó cantidades, que estan delante del signo $=$ son el primer *miembro* de la ecuacion, y las que estan despues, el segundo *miembro.* Cada una de las cantidades separadas de las otras por los signos $+$ ó $-$ se llama *término.* Las que estan precedidas del signo $+$ se nombran cantidades *positivas*, y las que lo estan del signo $-$ cantidades *negativas.* Asi, en la ecuacion $4+7=9-3+5$, el primer miembro es $4+7$, y el segundo $9-3+5$: en el primer miembro, el primer término 4 y el segundo 7 son ambos positivos, y en el segundo miembro, el primer término 9 es positivo, el segundo 3 es negativo, y el tercero 5 es positivo.

46. No alcanzamos á concebir mejor las cantidades negativas que considerandolas como cantidades tomadas en sentido contrario de las positivas. Si miramos como *directas* las cantidades positivas, considerarémos como *inversas* las negativas.

47. Cuando en una ecuacion sumamos y restamos los términos, segun indican los signos, para sacar un resultado, este procedimiento se llama *reducion.*

48. Si añadimos ó quitamos una misma cantidad ó cantidades iguales á los dos miembros de una ecuacion, se conservará la igualdad, de consiguiente habrá siempre ecuacion, aunque de distinto valor; al modo que si en una balanza, que está en caja, añadimos ó quitamos pesos iguales en ambos platos de ella, se conserva el equilibrio, aunque resulta mas ó menos cargada la balanza.

49. El objeto de las ecuaciones es presentar el valor de una cantidad, que no se conoce, por medio del cálculo con las que se conocen. La cantidad, que no es conocida, se llama *incognita*, y se indica con una letra del alfabeto. Si digo, por ejemplo, mi padre tiene 60 años, mi hermano tiene 25 años menos que mi padre, y yo 3 mas que mi hermano, señalaré mi edad con la letra x, y formaré la ecuacion así: $x=60-25+3\ldots$ $\ldots=38$ años, que es mi edad, descubierta en virtud de la reducion del segundo miembro de la ecuacion.

50. Aunque las ecuaciones se componen esencialmente de dos miembros, intercalamos entre ellos otros miembros para manifestar las operaciones del cálculo. A estos miembros intermedios, que son ausiliares, les llamarémos *indicativos*, y á los miembros estremos, que son esenciales, les llamarémos *significativos*. Asi en la ecuacion anterior $x=60-25+3=38$, la x y el 38 son miembros *significativos*, y $60-25+3$ es un miembro *indicativo*.

51. Ya que nos proponemos hablar la lengua de las cantidades, observarémos, comparando el cálculo con el raciocinio, que en una ecuacion un término es una palabra, varios términos ligados con los signos $+$ y $-$ son una frase, un miembro es una frase principal ó una composicion de frases, y una ecuacion es una proposicion.

52. Si tenemos la ecuacion $7+5=12$, podemos [48] decir $7+5-5=12-5$, esto es $7=12-5=7$, lo que demuestra que la adicion de 7 con 5, que ha dado 12, estaba bien hecha, porque habiendo rebajado de las dos cantidades componentes y de la cantidad compuesta una de las componentes me ha resultado la otra.

53. Si en la ecuacion $8-3=5$ añadimos 3 á cada miembro, resultará $8-3+3=5+3$, ó bien $8=5+3=8$, lo que demues-

tra que la sustraccion estaba bien hecha, pues habiendo añadido la cantidad descomponente 3 á la descompuesta 8—3 y á la descomposicion 5 ha resultado la primitiva 8.

54. Observemos que de la ecuacion $7+5=12$ hemos sacado $7=12-5$, y de la ecuacion $8-3=5$ hemos deducido $8=5+3$, por donde se conoce que cuando á un miembro de una ecuacion se le aumenta un término igual á otro suyo negativo, ó se le disminuye un término igual á otro suyo positivo no hay mas que borrarlo ú omitirlo en el mismo miembro y pasarlo al otro con signo contrario al que antes tenia. Asi en la ecuacion [49], de que hemos hablado, $x=60-25+3$, podemos hacer $x-3=60-25=35$, que será la edad de mi hermano, $x+25-3=60$ que es la de mi padre.

55. Hemos visto [52 y 53] que la prueba de la adicion es la sustraccion y la de la sustraccion es la adicion, como era natural siendo [30] operaciones inversas la una de la otra.

56. Si queremos probar la adicion, que tenemos hecha [28]

$$\begin{array}{r} {}^{}7\,4\,{}^{6} \\ {}^{6}9\,4 \\ {}^{8}9\,5 \\ \hline {}^{2}3\,3\,5 \\ \hline \end{array}$$

restarémos del total sucesivamente las cantidades sumadas, y si nada queda, habrá sido bien hecha la adicion. Asi

$$\begin{array}{r} {}^{2}3\,3\,5 \\ 7\,4\,{}^{6} \\ \hline 1\,5\,{}^{8}9 \\ {}^{6}9\,4 \\ \hline {}^{8}9\,5 \\ 8\,9\,5 \\ \hline 0\,0\,0. \\ \hline \end{array}$$

57. Cuando son muchas las cantidades sumadas seria larga

y penosa esta prueba. Por eso se prefiere repetir la adicion procediendo de la izquierda á la derecha: la suma de cada fila se resta de la señalada al pie de ella, marcando debajo las restas que resultan, para que, consideradas como decenas, se unan con las unidades de la suma en la fila inmediata de la derecha; y prosiguiendo de este modo, si la operacion está bien hecha, nada debe quedar al fin. En el ejemplo ya propuesto

$$\begin{array}{r} 746 \\ 694 \\ 895 \\ \hline 2335 \\ \hline 2\,\cancel{1}\,0 \end{array}$$

saco de la primera fila 21 centenas, que restadas de las 23 de la suma me dejan 2 que pongo debajo del 3 de la misma fila: la segunda fila me da 22 decenas, que restadas de las 23 compuestas del 2 que puse y del segundo 3 de la suma, me resta 1 que estampo al pie de dicha fila, tachando el 2; y la última fila me da 15 unidades, que son las mismas que tengo indicadas abajo con lo que tacho el 1, y queda probada la adicion.

58. Para probar la sustraccion se suma el residuo con el sustraendo, y debe resultar el minuendo, en esta forma:

$$\begin{array}{rl} 3698 & \textit{minuendo.} \\ 1939 & \textit{sustraendo.} \\ \hline 1759 & \textit{residuo.} \\ 1939 & \textit{sustraendo.} \\ \hline 3698 & \textit{suma igual al minuendo.} \end{array}$$

LECCION V.

De la Multiplicacion.

59. Tomar un número ó cantidad tantas veces cuantas unidades hay en otro número es *multiplicar*. El número que ha de ser multiplicado se llama *multiplicando*, y el que ha de multiplicar se nombra *multiplicador*: la cantidad que resulta de la multiplicacion se llama *producto*. Asi el multiplicando como el multiplicador se nombran *factores* del producto.

60. Bien se echa de ver que el multiplicador ha de ser siempre un número *abstracto* [18], pues no significa mas que los actos ó veces, que se ha de tomar el multiplicando, y que el producto ha de ser en todos casos de la misma especie del multiplicando, pues no es mas que una coleccion formada por las repeticiones de este factor.

61. Para indicar la multiplicacion de dos cantidades se pone entre ellas un punto ó el signo $\times$ que se pronuncia *multiplicado por*. Asi $4 \cdot 3$ ó bien 4×3 quiere decir 4 *multiplicado por* 3.

Cuando una cantidad se ha de multiplicar por dos ó mas cantidades se puede omitir el punto ó el signo $\times$, colocando los multiplicadores dentro de un paréntesis á continuacion del multiplicando. De este modo $8\,(4+2+5)$ significa que 8 se ha de multiplicar por 4, por 2 y por 5.

62. Segun la definicion, que hemos dado [59] de la multiplicacion, resulta que multiplicar un número cualquiera por la unidad es repetirlo ó ponerlo como estaba: asi $9 \times 1 = 9$.

63. Ya podemos presentar la multiplicacion descompuesta. Si tratamos de multiplicar 8 por 5 descompondremos el multiplicador en sus cinco unidades para repetir otras tantas veces el multiplicando, y sumando todos estos resultado tendremos

el producto. *Asi* $8 \times 5 = 8(1+1+1+1+1) = 8+8+8+8+8 = 40$.

64. Nada hubieramos adelantado con una operacion tan prolija sino demostrar que la multiplicacion es la adicion repetida de una cantidad consigo misma; pero fundados en este principio formarémos la siguiente tabla para abreviar las operaciones.

1×1=1,	1×2=2,	1×3=3,	1×4=4,	1×5=5,	1×6=6,	1×7=7,	1×8=8,	1×9=9,
	2×1=2,	3×1=3,	4×1=4,	5×1=5,	6×1=6,	7×1=7,	8×1=8,	9×1=9;
	2×2=4,	2×3=6,	2×4=8,	2×5=10,	2×6=12,	2×7=14,	2×8=16,	2×9=18,
		3×2=6,	4×2=8,	5×2=10,	6×2=12,	7×2=14,	8×2=16,	9×2=18;
		3×3=9,	3×4=12,	3×5=15,	3×6=18,	3×7=21,	3×8=24,	3×9=27,
			4×3=12,	5×3=15,	6×3=18,	7×3=21,	8×3=24,	9×3=27;
			4×4=16,	4×5=20,	4×6=24,	4×7=28,	4×8=32,	4×9=36,
				5×4=20,	6×4=24,	7×4=28,	8×4=32,	9×4=36;
				5×5=25,	5×6=30,	5×7=35,	5×8=40,	5×9=45,
					6×5=30,	7×5=35,	8×5=40,	9×5=45;
					6×6=36,	6×7=42,	6×8=48,	6×9=54,
						7×6=42,	8×6=48,	9×6=54;
						7×7=49,	7×8=56,	7×9=63,
							8×7=56,	9×7=63;
							8×8=64,	8×9=72,
								9×8=72;
								9×9=81.

Esta tabla se aprende de memoria, diciendo tantas veces tantas son tantas, por ejemplo 5 veces 7 son 35, 9 veces 7 son 63, &c.

65. Aunque, por ser el multiplicando un número concreto [18 y 60], escepto el caso de mirar todas las cantidades en abstracto, y el multiplicador un número abstracto [60], no podemos cambiar la naturaleza de cada factor, es indiferente pronunciar primero uno ú otro de ellos para sacar el producto, en teniendo presente que este ha de ser de la especie del multiplicando [60]; porque $3\times2=3(1+1)$... ..$=3+3=6$, y $2\times3=2(1+1+1)=2+2+2=6$, como sucederá en cualquier otro ejemplo que se ponga, y segun se advierte por la tabla.

66. Asi como un número multiplicado por la unidad no se altera, tampoco hace mas que adelantar su lugar sobre la izquierda cuando se le multiplica por una decena, una centena, un millar &c., ocupando los ceros en el producto los órdenes inferiores, que se necesitan representar, para que el multiplicando adquiera el valor, que lo ha de convertir en producto. Asi $7\times10=70$, $4\times100=400$, $8\times1000=8000$, &c. de modo que multiplicar un número por una unidad superior ó colectiva es agregarle á su derecha tantos ceros como tiene el multiplicador. Cualquiera comprenderá que esto resulta necesariamente del sistema décuplo [11] de nuestra numeracion.

67. Para hacer una multiplicacion segun el uso comun, se pone el multiplicador debajo del multiplicando, se tira una raya, y se va poniendo debajo el producto principiando por las unidades, y continuando por las del órden superior inmediato, como se manifiesta en este ejemplo:

2 1 3	*Multiplicando.*
3	*Multiplicador.*
6 3 9	*Producto.*

Aqui no tengo mas que decir por la tabla 3 veces 3 son 9, que como es el producto de las unidades de ambos factores lo pongo en el lugar de las unidades en el producto: una vez 3 es 3, que, siendo el producto de la decena del multiplicando por las unidades del multiplicador, lo escribo en las decenas del producto; y 2 veces 3 son 6, que, como producto de las centenas del multiplicando por las unidades del multiplicador, lo coloco en las centenas del producto. Saco el total 639.

Este ejemplo puesto en ecuacion viene á ser $213 \times 3 \ldots$ $\ldots = (200+10+3)3 = 600+30+9 = 639$.

68. Cuando deben pasar decenas de un órden inferior á unidades del órden superior inmediato, las llevo de memoria para agregarlas al próximo producto como aqui

$$\begin{array}{r} 78704 \\ 6 \\ \hline 472224. \end{array}$$

Digo asi: 4 veces 6 son 24, pongo 4 en las unidades y llevo 2: 6 veces cero es cero, pongo en las decenas 2 que llevaba; 6 veces 7 son 42, pongo 2 en las centenas y llevo 4; 6 veces 8 son 48 y 4 que llevaba son 52, pongo 2 en los millares y llevo 5: 6 veces 7 son 42 y 5 que llevaba son 47, pongo el 7 en las decenas de millar y el 4 en las centenas de millar; con lo que saco 472224.

69. En los casos de tener el multiplicador varias cifras se multiplica primero por sus unidades simples, despues por las de órden superior adelantando en la colocacion del producto parcial cada vez un lugar sobre la izquierda. Si el multiplicador tiene ceros, se adelanta por cada uno otro lugar; se suman los productos parciales, y se obtiene el total. Con la descomposicion de los números, $793 \times 345 \ldots$

..$=793(300+40+5)=237900+31720+3965=273585$.

En el uso comun		
	793	*Multiplicando.*
	345	*Multiplicador.*
	3965	*Primer producto parcial.*
	3172.	*Segundo producto parcial.*
	2379..	*Tercer producto parcial.*
	273585	*Producto total.*

Habiendo ceros en el multiplicador se procede segun se ha esplicado y como indican las operaciones siguientes:

426	7363	5002	7320
1200	4020	304	280
85200	147260	20008	585600
426	29452	15006	14640
511200.	29599260.	1520608.	2049600.

LECCION VI.

De la Division.

70. Averiguar cuantas veces cabe un número en otro es *dividir* ó *partir*. El número, que se ha de dividir, se llama *dividendo*, el que divide *divisor*, y el que espresa cuantas veces está el divisor contenido en el dividendo se llama *cociente*.

71. Desde luego se echa de ver que la division es una operacion inversa de la multiplicacion, refiriendose el dividendo al producto, y el divisor y cociente indistintamente á los dos factores.

72. Para indicar la division de una cantidad por otra se pone el dividendo encima del divisor con una raya entremedias, ó se escriben uno despues de otro con dos puntos entre ellos. Estos signos se pronuncian *dividido por*. Asi $\frac{6}{3}$ ó bien $6:3$ quiere decir *6 dividido por 3*.

73. Segun hemos definido [70] la division, hallarémos por el número de restas sucesivas el cociente. En 64 : 16 tendremos

Dividendo 64
Divisor —16 . . . . 1 *vez*
+48
Divisor —16 . . . . 1 *vez*
+32
Divisor —16 . . . . 1 *vez*
+16
Divisor —16 . . . . 1 *vez*
00 4 *veces ó cociente*, esto es, $\frac{64}{16}=4$.

74. La division de un número por la unidad da por cociente el mismo número, porque toda cantidad está contenida en si misma una vez, y se puede considerar el cociente como divisor, tomando el divisor por cociente, y porque en la multiplicacion resulta el producto igual á uno de los factores, cuando este se multiplica por la unidad [62].

75. Asi como en la multiplicacion ha servido la tabla [64] para hallar el producto, conociendo los factores; sirve en la division para hallar el cociente, siendo conocidos el dividendo y el divisor. Por tanto si $3\times7=21$, tendremos que, considerando á 21 como dividendo y 7 como divisor, $21 : 7=3$, y si tomamos 3 por divisor, $21 : 3=7$; de modo que siempre resulta hallar uno de los factores con el nombre de cociente.

76. Para hacer, segun el uso comun, una division cualquiera, se tira al lado del dividendo una raya de arriba abajo, desde ella hácia la derecha otra raya, en su abertura se coloca el divisor y debajo se va estampando el cociente; pero, si se quiere, se puede poner el divisor abajo y el cociente encima, esto es, cambiarlos de lugar.

Distinguiremos dos casos: 1.º cuando el divisor es de una sola cifra, 2º cuando tiene varias.

77. Prim. Caso. La division mas sencilla es aquella en que el divisor, siendo de una sola cifra, cabe ecsactamente en cada número del dividendo, porque entonces se reduce la operacion á dividir sucesivamente un número de una sola cifra por otro de la misma clase; asi, $936 : 3 = (900+30+6) : 3 \ldots$

$\ldots = \frac{900}{3} + \frac{30}{3} + \frac{6}{3} = 300+10+2 = 312$, porque si en la multiplicacion $300 \times 3 = 900$, y $10 \times 3 = 30$, en la division serán, como operacion inversa, $\frac{900}{3} = 300$ y $\frac{30}{3} = 10$.

78. Despues de disponer la division como queda dicho [76] procederemos á ejecutarla, y principiando por las unidades del órden superior del dividendo, esto es, por la izquierda, buscarémos por la tabla el número, que multiplicado por el divisor da el dividendo particular, lo pondremos en el cociente, y su producto por el divisor lo estamparémos debajo del dividendo particular, del cual lo restarémos, y no quedando nada pondremos en el lugar del residuo un cero ó un punto: á su lado bajarémos la cifra siguiente del dividendo, señalandola si se quiere con una coma, y asi continuarémos la operacion hasta no haber mas cifras que dividir: todo en esta forma,

$$\begin{array}{rl|l}
 & \textit{Dividendo}\ \ 9\,3,6, & 3\ \textit{Divisor.} \\
\cline{3-3}
3 \times 3 = & \underline{9} & 3\,1\,2\ \textit{cociente.} \\
 & \cdot\, 3 & \\
1 \times 3 = & \underline{3} & \\
 & \cdot\, 6 & \\
2 \times 3 = & \underline{6} & \\
 & \cdot &
\end{array}$$

79. Cuando el primer número del dividendo es menor que el divisor se opera en la primera division particular con las

dos primeras cifras del dividendo, como aquí:

$$\begin{array}{r|l} 1\,2\,8.4. & 4 \\ \cline{2-2} 1\,2 & 3\,2\,1 \\ \cline{1-1} ..8 & \\ 8 & \\ \cline{1-1} .4 & \\ 4 & \\ \cline{1-1} . & \end{array}$$

esto es $\frac{1284}{4} = 321$.

80. Siempre que los números, con que se opera parcialmente, no contienen con ecsactitud al divisor, se busca en la tabla el producto menor mas aprocsimado al dividendo particular para poner al cociente el número que da aquel producto, el cual restado del dividendo particular deja un residuo, á cuyo lado se baja el siguiente número del dividendo total para continuar la operacion. Si al fin queda un residuo se pone al lado del cociente, para completarlo, con el divisor debajo y entremedias una raya, lo que viene á ser la division indicada del último residuo. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 1\,3\,7.0.9. & 6 \\ \cline{2-2} 1\,2 & 2\,2\,8\,4 + \frac{5}{6} \text{ cociente.} \\ \cline{1-1} .1\,7 & \\ 1\,2 & \\ \cline{1-1} .5\,0 & \\ 4\,8 & \\ \cline{1-1} .2\,9 & \\ 2\,4 & \\ \cline{1-1} .\,5 & \text{último residuo.} \end{array}$$

81. Si no quedare residuo en algunas divisiones particulares, y el número, que se baje entonces del dividendo, fuere menor que el divisor, se pondrá cero en el cociente para conservar el órden de unidades, como en este ejemplo:

```
 2 3 4.2.0.7.0.0.4.7. | 9
 1 8                  | 2 6 0 2 3 0 0 0 5 + 2/9
 ---
 . 5 4
   5 4
   ---
   . . 2 0
       1 8
       ---
       . 2 7
         2 7
         ---
         . . . 0 0 4 7
                   4 5
                   ---
                   . 2
```

82. Para abreviar la operacion se pueden hacer las sustracciones al tiempo de las divisiones particulares.

En este ejemplo

```
3 4 1.5.9. | 7
  . 6 1    | 4 8 7 9 + 6/7
    . 5 5
      . 6 9
        . 6
```

digo 3 entre 7 no puede ser: 34 entre 7 cabe á 4, que pongo en el cociente, 4 veces 7 son 28 á 34 van 6, que estampo debajo del 4. Al lado del 6 bajo el 1, y digo 61 entre 7 á 8, que pongo en el cociente, 7 veces 8 son 56 á 61 van 5, que coloco debajo del 1. Al lado del 5 bajo el 5, y digo 55 entre 7 á 7, que escribo en el cociente, 7 veces 7 son 49 á 55 van 6, que pongo debajo del segundo 5. Al lado del 6 bajo el 9, y digo 69 entre 7 á 9, que estampo en el cociente, 7 veces 9 son 63 á 69 van 6, que escribo debajo del 9, y lo agrego al cociente con el signo + y la indicacion del divisor.

83. Seg. Caso. Cuando el divisor tiene muchas cifras se toman otras tantas en el dividendo si componen una can-

tidad igual ó mayor que el divisor: si la componen menor se toma una cifra mas. Se busca cuantas veces cabe el primer número del divisor en el primero ó en los dos primeros del dividendo, se pone este número de veces al cociente y se multiplica por el divisor, cuyo producto se coloca debajo del dividendo particular para hacer la resta y continuar la operacion bajando la cifra siguiente del dividendo: Ejemplo

```
          753.4.7.|53
53×1=53           1421+34/53
      223
53×4=212
      .114
53×2= 106
      ..87
53×1= 53
      34
```

Aqui se ha tomado por primer dividendo particular 75, que tiene dos cifras como el divisor 53, porque este número es menor que el otro.

84. Si algun producto parcial saliere mayor que el dividendo particular se rebajará una unidad al cociente hasta hallar un producto igual ó aprocsimadamente menor que el tal dividendo; pero si resultare un producto tan pequeño que quedare una resta igual ó mayor que el divisor, se aumentará una unidad al cociente hasta hallar un producto igual ó aprocsimadamente menor que el dividendo particular.

85. En este ejemplo

```
1894.9.2.|375
1875      505+117/375
..1992
  1875
  .117
```

veo que, siendo el divisor de tres cifras, forman una cantidad mayor que las tres primeras del dividendo: por tanto tomo otra, y digo 18 entre 3 á 5, despues $375\times5=1875$, que resto de 1894 y me quedan 19. Bajo el 9, veo que 199 es menor que 375, pongo cero al cociente y bajo el 2. Digo 19 entre 3 á 5, y $375\times5=1875$, que resto de 1992, y me sobran 117 que agrego al cociente con la indicacion del divisor.

86. El modo de abreviar la division es hacer las sustracciones conforme se va multiplicando cada cifra del divisor por la del cociente, como en parte lo hemos ejecutado en la division por una sola cifra [82] y se advierte en este ejemplo

$$\begin{array}{l|l}
75698.4. & 932 \\ \hline
.1138 & 812+\frac{200}{932}. \\
\quad .2064 & \\
\quad\quad .200 &
\end{array}$$

Aqui tomo cuatro cifras en el dividendo y digo 75 entre 9 á 8 que pongo en el cociente, 2 veces 8 son 16 á 19 van 3 que escribo debajo del 9; 3 veces 8 son 24 y 1 que llevaba son 25 á 26 va 1 que pongo debajo del 6; 8 veces 9 son 72 y 2 que llevaba son 74 á 75 va 1 que pongo debajo del 5. Al lado de la resta 113 bajo el 8, y digo 11 entre 9 á 1 que coloco en el cociente, 1 vez 2 es 2 á 8 van 6, que pongo debajo del 8; 1 vez 3 es 3 á 3 no va nada, pongo cero; 1 vez 9 es 9 á 11 van 2, que pongo debajo del segundo 1. Al lado de la resta 206 bajo el 4 y digo 20 entre 9 á 2 que pongo en el cociente, 2 veces 2 son 4 á 4 no va nada, pongo cero; 2 veces 3 son 6 á 6 no va nada, pongo otro cero, y 2 veces 9 son 18 á 20 van 2 que estampo debajo del cero. El residuo $\frac{200}{931}$ completa el cociente.

87. Siempre que el dividendo y el divisor concluyan en ceros se pueden quitar á cada uno tantos como lleva el que tiene menos, porque hay la misma relacion entre las unidades superiores de cada órden que entre las simples: asi $\frac{24000}{600}=40$ y $\frac{240}{6}=40$.

88. Despues de estudiada esta leccion nadie dudará que la prueba de multiplicar es partir, y la de partir multiplicar, como en estos ejemplos

```
   325             4927 | 65
    34             .377   75
  ----             .52    65
  1300                    --- Prueba.
  975                     375
 -------                 450
 11050 | 325             52
 .1300   34   Prueba.   ------
 .....                   4927.
```

En esta prueba se agrega el residuo 52, porque no habiendose verificado su division es una parte desmembrada del dividendo, la cual es necesario incluir para obtener el producto total.

89. Cualquier número ecsactamente divisible por otros se llama *múltiplo* de ellos, y todo número, que divide ecsactamente á otro, se llama *submúltiplo* suyo ó parte *alicuota*. Sino lo divide ecsactamente se le nombra parte *alicuanta*.

LECCION VII.

Del Análisis y la Sintésis.

90. Conocemos las cosas solo por sus cualidades ó propiedades, porque nuestro entendimiento no alcanza á penetrar en la sustancia ó esencia de ellas. Cuando nos parece que conocemos la naturaleza de una cosa, no hemos hecho mas que

ecsaminar muchas de sus propiedades y formar de ellas una coleccion, con que distinguimos perfectamente esta cosa entre las demas que tienen distintas propiedades. Entonces podemos conocer con la reflecsion cuales son las cosas que tienen las mismas propiedades que ella, para concebir que son de la misma naturaleza, y formar mentalmente de estas cosas semejantes una coleccion, que llamamos *especie*.

91. Despues que ecsaminamos las cosas para conocerlas ecsactamente, necesitamos retener en la memoria con buen órden sus cualidades ó propiedades, tanto para compararlas entre si, como para tenerlas presentes cuando haya que hacer aplicaciones. Este órden se llama *disposicion* ó *método*.

92. Cualquiera sabe que el ecsamen de una cosa consiste en la consideracion, que hacemos de ella por partes, de modo que procedemos sucesivamente de la consideracion de una propiedad á la de otra, separandolas mentalmente segun conviene. Este procedimiento se llama *descomposicion*.

93. Si juntamos mentalmente las propiedades conocidas de una cosa para figurarnos otra semejante, ó si reunimos en el entendimiento las propiedades de varias cosas para figurarnos otra de distinta naturaleza; en ambos casos nuestro procedimiento se llama *composicion*.

94. La descomposicion metódica es lo que llamamos *análisis*, y la composicion metódica lo que entendemos por *sintésis*.

95. Como el entendimiento necesita componer y descomponer alternativamente sus conocimientos de las cosas, esto es, sus ideas, procede por un método misto de análisis y sintésis, que se llama *analítico-sintético*.

96. Las cosas, que son de una misma naturaleza, y de las cuales se puede hacer la coleccion que llamamos especie, se nombran *homogeneas*, y aquellas que son de distinta natura-

leza, y no deben formar coleccion que sea especie, se llaman *heterogeneas*.

97. Las voces de análisis y sintésis son propias de la ciencia de las cantidades; pero estos métodos se usan por precision en todas las ciencias.

98. Hemos visto en la Leccion I que los números se han formado por la repeticion de la unidad, resultando colecciones de ellas, de consiguiente todo número se ha de componer de unidades homogeneas. En la Leccion II el modo de hacer la adicion nos manifiesta que es una operacion sintética. En la III se ve que la sustraccion es una operacion analítica. Y en la IV se conoce que la reduccion se practica por el método analítico-sintético. Como el cálculo no hace mas que aumentar y disminuir cantidades resulta que alterna el análisis con la sintésis, y que su verdadero método es analítico-sintético.

99. Por el corto conocimiento, que ya tenemos de las ecuaciones, sabemos que contienen [45] términos y miembros, los cuales se refieren [51] á palabras y frases, asi como una ecuacion viene á ser una proposicion; pero al modo que en el raciocinio se pasa de una proposicion á otra, se va en el cálculo de una ecuacion á otra hasta llegar á la última, segun indican las ecuaciones previas por sus cantidades y su estructura ó forma.

100. Para marcar el tránsito de unas ecuaciones á otras usarémos un signo de *consecuencia*, que escribiremos entre ellas con una coma y tres puntos; pero cuando termine el renglon pondremos dos puntos mas en el siguiente, y este signo ,... se leerá *de consiguiente*. Asi $x-3=4$,... $x=3+4$ quiere decir x menos 3 igual á 4 *de consiguiente* x igual á 3 mas 4. $\frac{24}{3}=8$,... ..$24=8\times3$ significa 24 partido por 3 igual á 8 *de consiguiente* 24 igual á 8 multiplicado por 3.

101. Para pasar con acierto de unas ecuaciones á otras se requiere cierta prevision del camino que se ha de seguir, segun las relaciones que presentan las cantidades, y tener mucha destreza en el cálculo; al modo que en el raciocinio necesitamos la prevision del discurso y el hábito de enlazar las proposiciones.

102. En esta prevision se siente guiado el entendimiento por un discernimiento algo confuso, que podemos llamar *instinto racional*, y el órden que sigue es reunir lo semejante y separar lo diferente poniendo su tendencia hácia el fin que se propone. Este procedimiento se llama *Analogía.*

103. La analogía es tanto mejor cuanto mas sencilla puede usarse; pero no llega á ser perfecta sino por medio del análisis y la sintésis.

LECCION VIII.

De los Quebrados.

104. Cualquiera porcion de partes iguales de la unidad se llama *quebrado ó fraccion.* Cada una de estas partes es una unidad mas pequeña ó de especie inferior que la unidad dividida en ellas. Si tengo, por ejemplo, una naranja compuesta de 9 cascos, la unidad es la naranja, los cascos son las partes con relacion á ella; pero estas partes son unidades de cascos. Si quiero dar 5 cascos tendré que tomar 5 de 9, y ya me hallo con la espresion de un quebrado.

105. Es claro que necesito dos números para significar mi pensamiento: uno que señale el número de partes en que está dividida la unidad, y que en este caso es 9, porque la naranja tiene 9 cascos, aunque podia tener mas ó menos, y á este número se le llama *denominador*; y otro número que indique los cascos, que quiero tomar, y que suponemos en este

caso ser 5, aunque pudieran ser mas ó menos, y á este número le llamamos *numerador*. Asi el numerador como el denominador se llaman *términos* del quebrado.

106. Para espresar un quebrado se pone el numerador y debajo el denominador con una raya entremedias, de modo que $\frac{5}{9}$ quiere decir 5 partes de las 9 en que ahora consideramos dividida la unidad.

107. Esta forma $\frac{5}{9}$ de espresar un quebrado, y el residuo, que dejó la division de la Leccion VI [80], agregado al cociente, manifiesta que un quebrado se debe considerar tambien como una division indicada. Asi, teniendo 5 naranjas que repartir entre 9 individuos, como suponemos cada una con 9 cascos, tendrán las 5 cabalmente 45 cascos, que divididos entre los 9, tocan á cada uno 5 cascos, esto es, $\frac{5\times9}{9}=\frac{45}{9}=5$.

108. Bien se echa de ver que el término operativo de un quebrado es el numerador, y que el denominador es una condicion suya imprescindible hasta que, convirtiendose la unidad á que se refiere el quebrado, en otras menores ó de inferior especie, se puede practicar la division, desvaneciendose entonces el denominador si esta operacion es ecsacta, ó quedando un nuevo quebrado sino lo es, y el cociente resulta siempre de la especie de unidades menores á que se ha reducido el quebrado, de modo que el numerador se ha de considerar como un dividendo y el denominador como un divisor, aunque aquel sea menor que este.

109. Las partes de un quebrado se llaman *avos*, voz que se pronuncia despues del denominador: asi $\frac{11}{14}$ se lee once catorce *avos*; pero $\frac{1}{2}$, en lugar de decir un dos avos, se pronuncia *medio*, $\frac{1}{3}$ *un tercio*, $\frac{1}{4}$ *un cuarto*, $\frac{1}{5}$ *un quinto*, $\frac{1}{6}$ *un*

sesto, $\frac{1}{7}$ *un septimo*, $\frac{1}{8}$ *un octavo*, $\frac{1}{9}$ *un noveno*, $\frac{1}{10}$ *un decimo*, $\frac{1}{11}$ *un once avos*, y de aqui adelante usando siempre la denominacion *avos*.

110. Claro está que cuanto mas se acerca el valor del numerador al del denominador, tanto mas se acerca el quebrado á la unidad, asi $\frac{7}{9}$ es mayor que $\frac{5}{9}$, pues quiere decir que he de tomar 7 cascos de la naranja que tiene 9, y $\frac{9}{9}$ espresa los 9 cascos que componen la naranja entera, de modo que cuando el numerador es igual al denominador, el quebrado vale la unidad, como corresponde á la ley de la division.

111. Por razon contraria cuanto mas se aleja el denominador del valor del numerador, tanto mas el quebrado se aleja de la unidad. $\frac{9}{9}=1$; pero $\frac{9}{10}$ es menor que la unidad, porque está dividida en 10 partes, y de estas solo tomo 9.

112. Deducimos de aqui que los dos términos de un quebrado estan en sentido contrario entre si: que se aumenta el quebrado aumentando el numerador ó disminuyendo el denominador; y que se disminuye el quebrado disminuyendo el numerador ó aumentando el denominador.

113. Si las mismas veces que se repite el numerador se repite el denominador, esto es, si se multiplican ambos términos por una misma cantidad, el quebrado no mudará de valor, porque los dos términos conservarán entre sus múltiplos la misma relacion que tenian entre si. Si parto una manzana en 12 cascos ó partes iguales, su mitad seran 6 cascos, esto es, $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$, su tercera parte seran 4 cascos, esto es, $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$ y su cuarta parte seran 3 cascos, esto es, $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$; pero $\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$... $..=\frac{1\times 6}{2\times 6}$, $\frac{1}{3}=\frac{4}{12}=\frac{1\times 4}{3\times 4}$ y $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}=\frac{1\times 3}{4\times 3}$, luego queda probada la proposicion, que se puede hacer estensiva á cualquier quebrado con sus términos múltiplos.

114. Una vez que $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$ sacarémos $\frac{6}{12}=\frac{6:6}{12:6}=\frac{1}{2}$; $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$,... ..$\frac{4}{12}=\frac{4:4}{12:4}=\frac{1}{3}$; $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$,... $\frac{3}{12}=\frac{3:3}{12:3}=\frac{1}{4}$; de que resulta que no se altera el valor de un quebrado cuando se divide su numerador y su denominador por una misma cantidad, pues la operacion de los anteriores ejemplos se puede hacer con cualquier quebrado cuyos términos tengan un divisor comun.

115. Cuando el numerador es menor que el denominador se dice que el quebrado es *propio*: si es mayor que el denominador el quebrado es *impropio*; y siempre que una cantidad se compone de enteros y quebrados se llama *número misto*. Asi $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, &c. son quebrados propios; $\frac{48}{6}$, $\frac{29}{5}$, $\frac{21}{8}$, &c. quebrados impropios; $4+\frac{5}{7}$, $8+\frac{3}{4}$, &c. números mistos.

116. Observemos que los quebrados impropios no son quebrados sino en apariencia, pues ejecutando la division indicada en ellos han de resultar números enteros ó mistos; asi $\frac{48}{6}=8$, $\frac{29}{5}=5+\frac{4}{5}$, $\frac{21}{8}=2+\frac{5}{8}$.

117. Respecto á que un quebrado impropio es una division indicada y practicable, como sucede en $\frac{21}{8}=2+\frac{5}{8}$ tendremos que, considerando el númerador 21 como un dividendo, el denominador 8 como un divisor y la espresion $2+\frac{5}{8}$ del quebrado como un cociente, si queremos hacer la prueba de la division, resultará $8\times2+5=16+5=21$ por producto, esto es, por dividendo ó numerador del quebrado, y poniendole debajo el divisor 8 por denominador restituimos el quebrado á su primitiva forma, esto es, $\frac{8\times2+5}{8}=\frac{16+5}{8}=\frac{21}{8}$; de consiguiente para reducir enteros á quebrados se multiplican por el denominador, y el producto se pone por numerador, estampandole debajo el denominador, asi para reducir 8 á sestos tendremos $\frac{8\times6}{6}=\frac{48}{6}$; y para reducir enteros á la denominacion del que-

brado en un número misto se multiplican los enteros por el denominador del quebrado, al producto se le añade el numerador, y esta suma se pone por numerador con el denominador debajo, como para reducir $5+\frac{4}{5}$ á la denominacion de 5 hago esta operacion $\frac{5\times5+4}{5}=\frac{25+4}{5}=\frac{29}{5}$.

LECCION IX.

Continuacion de los Quebrados.

118. Cuando un número no es ecsactamente divisible mas que por si mismo y por la unidad, se dice que es número *primero.*

119. Siempre que dos ó mas números no pueden ser divididos ecsactamente por un mismo número, se dice que son *entre si primeros.*

120. Cuando los términos de un quebrado son números entre si primeros, el quebrado está reducido á sus *menores términos*, esto es, á su mas sencilla espresion, y se dice que es *irreducible.* Asi $\frac{7}{8}$, $\frac{15}{26}$ y $\frac{6}{17}$ son quebrados irreducibles ó reducidos á sus menores términos; pero $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{28}$ y $\frac{6}{18}$ no lo son, porque $\frac{6}{8}=\frac{6:2}{8:2}=\frac{3}{4}$, $\frac{12}{28}=\frac{12:4}{28:4}=\frac{3}{7}$ y $\frac{6}{18}=\frac{6:6}{18:6}=\frac{1}{3}$.

121. Claramente se deduce que para reducir un quebrado á sus menores términos, cuando su numerador y su denominador no son números entre si primeros, hay que buscar un divisor ecsacto de ambos términos, y que sea el mayor posible, al cual se le llama *mayor divisor comun.*

122. Si el quebrado es impropio se parte el numerador por el denominador, con lo que resultan enteros, y quedando un quebrado propio se le busca su mayor divisor comun.

como sucede con $\frac{2054}{637}=3+\frac{143}{637}$, de cuyo quebrado propio $\frac{143}{637}$ buscaré el mayor divisor comun.

123. Bien se echa de ver que si el numerador puede dividir ecsactamente al denominador la reducion está hecha, pues aquel se divide, como todo número, ecsactamente á si mismo: sino puede dividir ecsactamente al denominador, el inconveniente está en el residuo de la division; luego si hacemos divisor á este residuo y dividiere ecsactamente al numerador ó divisor anterior, dividirá del mismo modo al denominador ó primer dividendo de la operacion, por ser entonces este número múltiplo del último divisor. Continuando la operacion de modo que sucesivamente cada divisor se convierta en dividendo, y cada resta en divisor, si resulta una division ecsacta, el último divisor será el mayor comun, y si quedare por último residuo la unidad, el numerador y denominador del quebrado seran números entre si primeros, y el quebrado será irreducible. Para hacer la operacion con mas comodidad se ponen los divisores en el lugar de los cocientes, y los cocientes en el sitio de los divisores, como en este ejemplo

637	4 *cociente*		
.65	143	2 *cociente*	
	.13	65	5 *cociente*
		..	13 *mayor divisor comun.*

Aqui $65=13\times5$,

$143=65\times2+13=13\times5\times2+13=13\times10+13=13(10+1)\ldots$
$\ldots=13\times11$,

$637=143\times4+65=13\times11\times4+13\times5=13(44+5)=13\times49$;
luego 13 divide ecsactamente á 143 y 637, y es su mayor divisor comun. Por tanto $\frac{143}{637}=\frac{143:13}{637:13}=\frac{11}{49}$. Esto mismo

se podrá comprobar igualmente en todos los casos semejantes.

124. Si tratamos de ecsaminar el quebrado $\frac{47}{937}$ para ver si es reducible, tendremos

937	19					
467	47	1				
·44	·3	44	14			
		14	3	1		
		2	1	2		

y por quedar la unidad en la última division, el quebrado $\frac{47}{937}$ es irreducible.

125. Una de las operaciones mas precisas en el cálculo de los quebrados es reducir los de distinta denominacion á un mismo denominador ó denominador comun. Como no se altera su valor, sea que se multipliquen [113] ó se dividan [114] ambos términos por una misma cantidad, es fácil reducirlos á un comun denominador, multiplicando los dos términos de cada uno por los denominadores de los otros quebrados, para sacar iguales quebrados, aunque con espresion menos sencilla. Si quiero reducir $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ á una misma denominacion, tendré $\frac{2}{3}=\frac{2\times5}{3\times5}=\frac{10}{15}$ y $\frac{4}{5}=\frac{4\times3}{5\times3}=\frac{12}{15}$.

Lo mismo se practica aunque los quebrados sean muchos. Para reducir $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{4}{11}$ á un comun denominador hago asi:

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times2\times8\times11}{4\times2\times8\times11}=\frac{3\times176}{4\times176}=\frac{528}{704};$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times4\times8\times11}{2\times4\times8\times11}=\frac{1\times352}{2\times352}=\frac{352}{704};$$

$$\frac{7}{8}=\frac{7\times4\times2\times11}{8\times4\times2\times11}=\frac{7\times88}{8\times88}=\frac{616}{704};$$

$$\frac{4}{11}=\frac{4\times4\times2\times8}{11\times4\times2\times8}=\frac{4\times64}{11\times64}=\frac{256}{704};$$

126. Cuando en todos los quebrados hay factores iguales en sus numeradores y denominadores compuestos, se omiten estos factores para sacar mas sencillo el resultado. Asi, volviendo al ejemplo antecedente,

$$\tfrac{3}{4}=\frac{3\times2\times8\times11}{4\times2\times8\times11}=\frac{3\times2\times11}{4\times2\times11}=\frac{3\times22}{4\times22}=\tfrac{66}{88};$$

$$\tfrac{1}{2}=\frac{1\times4\times8\times11}{2\times4\times8\times11}=\frac{1\times4\times11}{2\times4\times11}=\frac{1\times44}{2\times44}=\tfrac{44}{88};$$

$$\tfrac{7}{8}=\frac{7\times4\times2\times11}{8\times4\times2\times11}=\frac{7\times11}{8\times11}=\tfrac{77}{88};$$

$$\tfrac{4}{11}=\frac{4\times4\times2\times8}{11\times4\times2\times8}=\frac{4\times8}{11\times8}=\tfrac{32}{88};$$

omitiendo en todos los términos su factor comun 8 ó su equivalente 4×2. El golpe de vista, que requieren estas supresiones, lo da la práctica.

LECCION X.

De la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de quebrados.

127. Para sumar números enteros con quebrados se pone entre ellos el signo positivo $+$ de que resulta un número misto, que se puede reducir, si se quiere [117], á cantidad homogenea ó de la misma especie. Asi para sumar 24 con $\tfrac{5}{6}$ tendremos $24+\tfrac{5}{6}$, y reduciendo esta cantidad á la especie del quebrado será $24+\tfrac{5}{6}=\frac{24\times6+5}{6}=\frac{144+5}{6}=\frac{149}{6}$.

128. Como en todo quebrado el numerador espresa las partes que se han de tomar, y el denominador el número de partes que componen la unidad, es claro que sumar quebrados de una misma denominacion no puede ser otra cosa

que tomar las partes del primer quebrado, y las partes del segundo, y las del tercero, y las de todos los demas hasta el último, esto es, sumar todos los numeradores para componer el numerador de la suma, á que se pondrá el denominador comun, respecto á que no sumamos unidades sino partes de ella indicadas por este denominador.

Así $\frac{3}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+1+2}{7}=\frac{6}{7}$;

$$\frac{5}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}=\frac{5+3+1+7}{8}=\frac{16}{8}=2;$$

$$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2+5+4+1}{9}=\frac{12}{9}=1+\frac{3}{9}=1+\frac{1}{3}.$$

129. Si se han de sumar enteros y quebrados con enteros y quebrados se suman los quebrados entre sí, se agregan los enteros, si resultan, á los enteros, y sumando estos se concluye la operacion:

$5+\frac{4}{5}$ con $8+\frac{4}{5}$ y con $11+\frac{3}{5}$ son $5+\frac{4}{5}+8+\frac{4}{5}+11+\frac{3}{5}\ldots$

$$\ldots=5+8+11+\frac{4+4+3}{5}=24+\frac{11}{5}=24+2+\frac{1}{5}=26+\frac{1}{5}.$$

En el uso comun se dispone asi la adicion

$$\begin{array}{r} {}^{(2}\\ 5\,\frac{4}{5}\\ 8\,\frac{4}{5}\\ 11\,\frac{3}{5}\\ \hline 26\,\frac{1}{5} \end{array}$$

marcando, si se quiere dentro del arco en la parte superior de la fila de las unidades, los enteros que se llevan de los quebrados.

130. Cuando los quebrados tienen diferentes denominadores se reducen á una misma denominacion [125 y 126], y se hace la suma como dejamos esplicado.

Bastan estos ejemplos:

$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{4}+\tfrac{2}{3}=\tfrac{6}{12}+\tfrac{9}{12}+\tfrac{8}{12}=\frac{6+9+8}{12}=\tfrac{23}{12}=1+\tfrac{11}{12};$$

$$27+\tfrac{5}{6}+3+\tfrac{2}{3}=27+3+\tfrac{5}{6}+\tfrac{4}{6}=30+\tfrac{9}{6}=30+1+\tfrac{3}{6}=31+\tfrac{1}{2}.$$

$$\begin{array}{r} 3\,\tfrac{1}{2} \\ 4\,\tfrac{1}{3} \\ 10\,\tfrac{3}{8} \\ \hline 18\,\tfrac{5}{24}. \end{array}$$

131. Segun la definicion, que hemos dado repetidas veces de los quebrados, se echa de ver que, siendo de una misma denominacion ó estando reducidos á ella, se hará la sustraccion restando del numerador del minuendo el del sustraendo y poniendo á la resta el denominador comun, como en estos ejemplos:

$$\tfrac{3}{4}-\tfrac{1}{4}=\frac{3-1}{4}=\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{2};$$

$$\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{5}=\frac{2\times5}{3\times5}-\frac{1\times3}{5\times3}=\frac{10-3}{15}=\tfrac{7}{15}.$$

132. En la sustraccion de números mistos se restan los quebrados de los quebrados y los enteros de los enteros; pero si el quebrado del sustraendo es mayor que el del minuendo, se toma de los enteros del minuendo una unidad en forma de quebrado para practicar la operacion:

$$8+\tfrac{4}{5}-3-\tfrac{2}{5}=8-3+\frac{4-2}{5}=5+\tfrac{2}{5};$$

$$4+\tfrac{1}{5}-2-\tfrac{2}{3}=4-2+\frac{1\times3}{5\times3}-\frac{2\times5}{3\times5}=4-2+\tfrac{3}{15}-\tfrac{10}{15}=3-2\ldots$$

$$\ldots+\tfrac{15}{15}+\tfrac{3}{15}-\tfrac{10}{15}=1+\frac{18-10}{15}=1+\tfrac{8}{15};$$

$$8-\tfrac{3}{7}=7+\tfrac{7}{7}-\tfrac{3}{7}=7+\tfrac{4}{7}.$$

Estas operaciones vienen á ser una reducion [47].

133. Si tratamos de multiplicar un quebrado por un entero considerarémos que, siendo el quebrado un multiplicando, se habrá de repetir tantas veces cuantas unidades tenga el entero multiplicador.

Así $\frac{4}{29}\times3=\frac{4}{29}(1+1+1)=\frac{4}{29}+\frac{4}{29}+\frac{4}{29}=\frac{4+4+4}{29}=\frac{12}{29}$;

$$\frac{5}{7}\times4=\frac{5}{7}(1+1+1+1)=\frac{5+5+5+5}{7}=\frac{20}{7}=2+\frac{6}{7}.$$

Y si nos proponemos multiplicar un entero por un quebrado, considerarémos que el entero se ha de repetir tantas partes de vez cuantas unidades tenga el numerador del quebrado.

Así $7\times\frac{3}{4}=7(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{7}{4}+\frac{7}{4}+\frac{7}{4}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$.

De aqui se deduce que para multiplicar un entero por un quebrado ó un quebrado por un entero, se multiplica el numerador por el entero, con lo que se saca el numerador del producto, al cual se le pone la denominacion del quebrado factor, como hemos visto en los ejemplos anteriores,

$$\frac{4}{29}\times3=\frac{4\times3}{29}=\frac{12}{29}; \qquad \frac{5}{7}\times4=\frac{5\times4}{7}=\frac{20}{7}=2+\frac{6}{7};$$

$$7\times\frac{3}{4}=\frac{7\times3}{4}=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}.$$

134. Cuando se trate de multiplicar un quebrado por otro nos haremos cargo de que el quebrado multiplicando se ha de repetir tantas partes de vez cuantas unidades tenga el numerador del quebrado multiplicador: por ejemplo, en $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$ consideraré que $\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$; pero, como no es una vez sino media la que he de tomar el $\frac{1}{3}$, concibo desde luego que he de hacer dos veces mayor su denominador, lo que equivale á hacer dos veces menor su numerador, por estar siempre en sentido inverso los dos términos de un quebrado [112]; de consiguiente $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1\times1}{3\times2}=\frac{1}{6}$. Resulta, pues, que en la multi-

plicacion de quebrados se multiplican los numeradores entre si, y lo mismo los denominadores, para obtener respectivamente el numerador y el denominador del producto.

$$\text{Así } \tfrac{7}{8}\times\tfrac{5}{9}=\frac{7\times5}{8\times9}=\tfrac{35}{72}.$$

135. Siempre que en los productos figurados hay factores iguales en ambos términos ó varios factores equivalentes entre si, se omiten como en la reducion de quebrados á sus menores términos [126]; por ejemplo

$$\tfrac{3}{5}\times\tfrac{10}{21}=\frac{3\times10}{5\times21}=\frac{\cancel{3}\times2\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times\cancel{3}\times7}=\tfrac{2}{7}.$$

136. A veces se hallan quebrados de quebrados, que vienen á ser quebrados sucesivamente multiplicados unos por otros, asi $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$ y de $\frac{3}{7}$ son $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{7}=\frac{3\times2\times3}{4\times5\times7}=\frac{3\times3}{2\times5\times7}=\frac{9}{70}$.

137. Cuando hay que multiplicar números mistos entre si, se puede hacer de dos modos:

1.º Multiplicando por los enteros y luego por el quebrado, y reuniendo los productos, en esta forma $(3+\frac{4}{5})(2+\frac{2}{3})\ldots$

$$\ldots=(3+\tfrac{4}{5})2+(3+\tfrac{4}{5})\tfrac{2}{3}=3\times2+\frac{4\times2}{5}+3\times\tfrac{2}{3}+\tfrac{4}{5}\times\tfrac{2}{3}=6+\tfrac{8}{5}\ldots$$

$$\ldots+2+\tfrac{8}{15}=8+1+\tfrac{3}{5}+\tfrac{8}{15}=9+\tfrac{9}{15}+\tfrac{8}{15}=9+1+\tfrac{2}{15}=10+\tfrac{2}{15}.$$

2.º Reduciendo los números mistos á quebrados, y haciendo despues su multiplicacion. Con el mismo ejemplo:

$$(3+\tfrac{4}{5})(2+\tfrac{2}{3})=\tfrac{19}{5}\times\tfrac{8}{3}=\tfrac{152}{15}=10+\tfrac{2}{15}.$$

138. Si dividir entre si dos números enteros [70] es averiguar cuantas veces uno de ellos cabe en el otro, la division de quebrados será la investigacion de cuantas veces ciertas partes de la unidad caben en otras partes de ella.

139. Asi por esta definicion, como por ser la division un procedimiento inverso de la multiplicacion, se deja cono-

cer que, para dividir un quebrado por otro, se ha de dividir el numerador del dividendo por el numerador del divisor, y el denominador del dividendo por el del divisor, con lo que se obtendran respectivamente los términos del cociente, en esta forma $\frac{21}{88}:\frac{3}{8}=\frac{21:3}{88:8}=\frac{7}{11}$; pero, como rara vez sucede que los términos del dividendo sean respectivamente múltiplos de los del divisor, y como por estar siempre los términos en sentido inverso [112], cuando se multiplica ó se parte el uno se parte ó se multiplica el otro; practicamos la division multiplicando el numerador del dividendo por el denominador del divisor para sacar el numerador del cociente, y multiplicando el denominador del dividendo por el numerador del divisor para obtener el denominador del cociente, ó lo que es lo mismo, se convierte la division en multiplicacion trastornando el quebrado divisor.

Así $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=\frac{3\times8}{5\times7}=\frac{24}{35}$, ó bien $\frac{3}{5}:\frac{7}{8}=\frac{3}{5}\times\frac{8}{7}=\frac{24}{35}$.

140. Para dividir entre si dos números mistos se reduce cada uno á quebrado de la especie del suyo, y se practica la division en esta forma

$$(3+\tfrac{2}{5}):(2+\tfrac{1}{7})=\tfrac{17}{5}:\tfrac{15}{7}=\frac{17\times7}{15\times5}=\tfrac{119}{75}=1+\tfrac{44}{75}.$$

141. Despues de aprendida esta leccion nadie dudará que las operaciones de los quebrados se hacen con los numeradores del mismo modo que las de los números enteros, sin otra diferencia que partir el resultado por los denominadores.

LECCION XI.

De los Quebrados Decimales.

142. Como en el sistema de la numeracion todos los números van siendo hácia la izquierda diez veces mayores de lo que serian en el lugar del que tienen á su derecha [11], resulta que, retrocediendo de la izquierda á la derecha, cada número es diez veces menor de lo que seria en el lugar del que tiene á la izquierda.

143. Recordemos que hemos señalado el lugar de cada órden creciente de la numeracion [12] en esta forma:

. &c.
. Millones
. Centenas de millares
. Decenas de millares
. Millares
. Centenas
. Decenas
. Unidades

y deduciremos que corresponde señalar el lugar de cada órden decreciente de este modo

, Decimas
. Centecimas
. Milesimas
. Diez milesimas
. Cien milesimas
. Millonesimas
. &c.

poniendo una coma para separar el órden creciente del órden decreciente, esto es, para marcar el sitio desde donde se camina hácia la izquierda á las unidades de todas clases, y hácia la derecha á las partes de la unidad simple.

144. Escribiendo ambos órdenes á continuacion uno de

otro con la separacion de la coma, y marcando cada lugar con la unidad, tendrémos

&c.	Millon	Centena de millar	Decena de millar	Millar	Centena	Decena	Unidad	Decima	Centesima	Milesima	Diez milesima	Cien milesima	Millonesima	&c.
	1	1	1	1	1	1	1,	1	1	1	1	1	1	

Aquí vemos que desde la coma hácia la izquierda todos los números son enteros, y sucesivamente decenarios unos de otros; y que desde la coma hácia la derecha todos los números son quebrados, y sucesivamente subdecenarios unos de otros; de modo que la coma sirve de *guia* ó indicacion para el valor de los números.

Estos quebrados subdecenarios se llaman quebrados ó partes *decimales*.

145. Cuando no hay enteros, que acompañen á las partes decimales, se pone antes de la coma un cero para indicar el sitio de las unidades simples. Asi 0,1 es una decima y 0,7 son siete decimas. Y cuando faltan partes decimales en su órden decreciente, se llenan los huecos con ceros, como en 0,009 que son nueve milesimas, y en 0,00000004 cuatro cien millonesimas.

146. Respecto á que las partes decimales van siendo por su localidad sucesiva diez veces menores cada vez, se

viene á los ojos que $0,1 = \frac{1}{10}$; $0,0001 = \frac{1}{10000}$ y $0,08 \ldots \ldots = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$ y que $0,457 = \frac{457}{1000}$; de modo que toda cantidad decimal se puede poner en forma de quebrado tomandola, como entero, por numerador, y estampandole por denominador la unidad con tantos ceros como cifras decimales haya en la cantidad.

147. En los números decimales, como en los enteros, las cifras que preceden son decenas respecto á las que les siguen inmediatamente: asi en 0,47 que tiene 4 decimas y 7 centesimas, el 4 es de un órden diez veces mayor que el del 7, y por tanto es lo mismo decir 4 decimas que 40 centesimas, por lo que 0,47 se lee 47 centesimas, y 0,04203 se pronuncia 4203 cien milesimas. Si hay enteros se empieza por nombrarlos, como en 37,458 que se pronuncia 37 unidades y 458 milesimas.

148. Se echa de ver que las cantidades decimales se leen como los enteros, espresando al fin su clase, que equivale á la espresion del denominador con la voz *avos*. Asi en $64,3579 = 64 + \frac{3579}{10000}$, el primer miembro de esta ecuacion se lee 64 unidades y 3579 diez milesimas, y el segundo se pronuncia 64 enteros y 3579 diez mil avos.

149. Asi como una cantidad de enteros no se alteraria porque se le pusieran ceros delante, pues lo mismo seria 00035 que 35, tampoco se altera una cantidad decimal porque se pongan ceros detras de ella: lo cual es un resultado de estar las partes decimales en sentido inverso de los enteros. 0,45 es lo mismo que 0,4500; pero varia la pronunciacion, pues 0,45 se lee 45 centesimas y en 0,4500 se dice 4500 diez milesimas. La igualdad de valor en estas espresiones diferentes consiste en que en la segunda se aumentan tanto las decimales como se disminuye su clase, lo

que se comprueba por los quebrados comunes, pues 0,45... $..=\frac{45}{100}=\frac{4500}{10000}=0,4500$.

150. Hemos dicho [144] que la coma era una guia para indicar el valor de las decimales; pero sirve tambien para variar la cantidad, corriendo hácia uno ú otro lado. Si la coma adelanta un lugar hácia la izquierda, es claro que convierte las unidades en decimas, las decenas en unidades, las centenas en decenas y asi sucesivamente, y que deja las decimas en centesimas, las centesimas en milesimas &c. Por tanto

532,871 son 532 unidades y 871 milesimas;
53,2871 son 53 unidades y 2871 diez milesimas;
5,32871 son 5 unidades y 32871 cien milesimas;
0,532871 son 532871 millonesimas.

Si la coma atrasa un lugar hácia la derecha se ve que levanta las decimas á unidades, las centesimas á decimas, las milesimas á centesimas &c., y que convierte las unidades en decenas, las decenas en centenas &c. Con el mismo ejemplo

532,871 son 532 unidades y 871 milesimas;
5328,71 son 5328 unidades y 71 centesimas;
53287,1 son 53287 unidades y 1 decima;
532871 son 532871 unidades.

151. Resulta, pues, que la coma ó guia, caminando á la derecha. es constantemente un factor decenario de las cantidades decimales, y yendo hácia la izquierda es siempre un un divisor subdecenario * de ellas.

* En rigor debia decir un *divisor decenario*; pero me parece que no se comprenderia facilmente el concepto de que este divisor hace un *efecto subdecenario*.

LECCION XII.

De la adicion, sustraccion, multiplicacion y division de Quebrados Decimales.

152. Por la naturaleza de los quebrados decimales se hace su adicion del mismo modo que la de números enteros, ordenando las cantidades segun la fila de las comas, como en estos ejemplos

	0,56		72,9571
	0,003		12,8
	0,958		124,03
Suma	1,521.	*Suma*	209,7871.

153. Tambien se hace la sustraccion de las decimales, como la de los enteros, ordenando por la coma; pero si en el minuendo no hay tantas cifras decimales como en el sustraendo, se le agregan á la derecha los ceros necesarios para cubrir los órdenes ó se consideran de memoria, lo que no altera el valor del minuendo [149]. Ejemplos:

	9,1457		0,6200		5403,25
	7,364		0,3697		385,6532
Resta	1,7817.	*Resta*	0,2503.	*Resta*	5017,5968.

154. Las pruebas de sumar y restar decimales se hacen del mismo modo que las de iguales operaciones de números enteros.

155. Para multiplicar una cantidad decimal por números enteros, me haré cargo de la clase de decimales que multiplico ó repito tantas veces cuantas unidades tenga el multiplicador, y que por consiguiente el producto debe ser de la misma clase de decimales que el multiplicando, esto es, que la coma ha de ocupar el mismo lugar en uno que en

otro. Asi

$$\begin{array}{r} 34,137 \\ 9 \\ \hline \textit{Producto}\ 307,233. \end{array}$$

Esto viene á ser $34,137 \times 9 = \frac{34137}{1000} \times 9 = \frac{307233}{1000} = 307,233$.

156. Lo mismo seria para multiplicar enteros por un quebrado ó cantidad decimal; pues, quitando la coma al multiplicador, se haria tantas veces mayor cuantas correspondiese á la clase de decimales, y poniendola en el mismo lugar en el producto se haria tantas veces menor cuantas correspondiese á la misma clase de decimales, de modo que se compensaria el aumento decenario de un factor con la disminucion subdecenaria del producto, como en este ejemplo

$$\begin{array}{r} 345 \\ 0,03 \\ \hline \textit{Producto}\ 10,35. \end{array}$$

Esto viene á ser $345 \times 0,03 = 345 \times \frac{3}{100} = \frac{1035}{100} = 10,35$.

157. Si multiplicando decimales por enteros se separan con la coma tantas cifras en el producto cuantas decimales tenia el multiplicando, y si multiplicando enteros por decimales se separan en el producto con la coma tantas cifras cuantas decimales tenia el multiplicador; es claro que para multiplicar decimales por decimales, se habrán de separar con la coma en el producto tantas cifras cuantas decimales tenian el multiplicando y el multiplicador. Por ejemplo

$$\begin{array}{r} 54,23 \\ 8,3 \\ \hline 16269 \\ 43384 \\ \hline \textit{Producto}\ 450,109. \end{array}$$

Esto viene á ser $54,23 \times 8,3 = \frac{5423}{100} \times \frac{83}{10} = \frac{450109}{1000} \ldots$

$\ldots = 450,109$.

158. Cuando se han de multiplicar uno por otro dos números, que tienen muchas cifras decimales, y no se necesita una completa ecsactitud en el producto, se puede abreviar la operacion, usando las cifras del multiplicador por el órden decreciente ó desde la primera de la izquierda hasta la última de la derecha, y omitiendo cada vez espresar la multiplicacion de una cifra sobre la derecha del multiplicando, que se señalará con un punto, pero agregando á la primera cifra que se estampe en cada producto parcial las decenas, que se llevaren de la multiplicacion hecha mentalmente, solo para este efecto, de la cifra escluida del multiplicando: todo como en este caso

$$\begin{array}{rcr}
 & & 76{,}\dot{8}\dot{4}\dot{3}\dot{7}\dot{5} \\
 & & 8{,}21054 \\
\hline
7684375\times 8 & = & 61475000 \\
768437\times 2+1 & = & 1536875 \\
76843\times 1 & = & 76843 \\
768\times 5+2 & = & 3842 \\
76\times 4+3 & = & 307 \\
\hline
 & & 630{,}92867.
\end{array}$$

La figuracion de los productos parciales sobre la izquierda aclara bastante este ejemplo, asi respecto á la colocacion de ellos, como á las cifras que se deben separar con la coma en el producto total.

159. Como el objeto de la division es saber cuantas veces cabe un número en otro, sean las que fueren las unidades de entrambos, con tal que sean de la misma especie, se dividen números decimales por enteros suprimiendoles la coma y agregando al divisor tantos ceros cuantas cifras decimales tenia el dividendo, porque si 74,523 se han de partir por 5 será $\frac{74{,}523}{5}=\frac{74{,}523\times 1000}{5\times 1000}=\frac{74523}{5000}$.

Ejecutando esta division me quedará un residuo, pondré en el cociente una coma, y al lado del residuo un cero, continuaré la division y del mismo modo con los demas residuos; pues si aumento decenariamente cada uno de ellos con el cero, disminuyo la cifra respectiva del cociente subdecenariamente con el lugar que ocupa, y por tanto la division está arreglada en esta forma:

```
74,523 | 5
--------------
74523 | 5000
24523   14,9046
.45230
 .23000
  .30000
   .....
```

Se comprueba que está bien hecha la operacion, porque $14,9046 \times 5 = 74,5230 = 74,523$.

160. Si he de partir enteros por decimales agrego al dividendo tantos ceros como cifras tiene el divisor despues de la coma que le quito, pues subsiste asi la misma relacion entre ellos:

$$\frac{84}{3,265} = \frac{84 \times 1000}{3,265 \times 1000} = \frac{84000}{3265};$$

```
84000 | 3265
18700   25,72 &c.
.23750
..8950
  2420
```

161. En la particion de dos cantidades decimales una por otra se multiplican ambas decenariamente sirviendo de regla la que tiene mas cifras decimales, de modo que resulte la division de enteros como en este ejemplo,

$\frac{12,52}{4,3}=\frac{12,52\times 100}{4,3\times 100}=\frac{1252}{430}$; esto es,

```
 12,52 | 4,3
 1252  | 430
 .3920   2,9116 &c.
 ..500
  .700
  2700
  .120
```

162. Para abreviar la division de decimales se puede usar de un método análogo al que se practicó en la multiplicacion [158], desechando en cada multiplicacion parcial una cifra del divisor, á la que se pondrá encima un punto, y llevando de memoria las decenas para añadirlas á cada primera cifra que se estampe.

La ecuacion de los productos parciales aclarará bastante el concepto.

```
                      630,92878 | 7684375
7684375×8      =      61475000    8,210541
                      .1617878
768437×2+1     =       1536875
                       ..81003
76843×1        =         76843
                         .4160
768×5+2        =          3842
                          .318
76×4+3         =           307
                            11
7×1            =             7
                            .4
```

163. Fácil será ya reducir un quebrado comun á decimales, porque $\frac{3}{4}=\frac{3,00}{4}=0,75$ y $\frac{1}{3}=\frac{1,0000\ \&c.}{3}=0,9999$ &c.

LECCION XIII.

Aplicaciones del Cálculo de Números Enteros y de Quebrados.

164. Respecto á la multiplicacion [LECCION V] resolverémos las cuestiones siguientes :

1ª ¿ Cuanto importan 5843 varas de obra á razon de 54 reales la vara ?

Respuesta : 54 rs. × 5843 veces = 315522 rs., *importe.*

2ª Cuanto pesan 5954 maderos, teniendo cada uno el peso de 72 libras ?

Respuesta : 72×5954=428688 libras, *peso total.*

3ª ¿ Cuantos maravedises valen 8 pesos, 13 rs. y 9 mrs.? Sabemos que el peso vale 15 rs., y el real 34 mrs.

8×15=120 ,... 8 pesos=120 rs.,

8 pesos + 13 rs. = 120 rs. + 13 rs. = 133 rs.;

133×34=4522 ,... 133 rs.=4522 mrs.,

133 rs. + 9 mrs. = 4522 mrs. + 9 mrs. = 4531 mrs.

Respuesta : 8 pesos 13 rs. y 9 mrs. = 133 rs. y 9 mrs. ... .. = 4531 mrs., *valor.*

4ª ¿ Cuantos minutos hay en un año comun ?

El año comun tiene 365 dias, 5 horas y 48 minutos, cada dia 24 horas y cada hora 60 minutos.

365×24=8760 ,... 365 dias = 8760 horas,

365 dias + 5 horas = 8760 horas + 5 horas = 8765 hor.;

8765×60=525900 ,... 8765 horas = 525900 min.,

8765 hor. + 48 min. = 525900 min. + 48 min. = 525948 min.;

Respuesta : el año comun = 365 dias 5 hor. y 48 min. ... .. = 8765 hor. y 48 min. = 525948 minutos, *duracion.*

165. Por lo tocante á la division [LECCION VI] :

¿ Cuantos pesos componen 16490 maravedises ?

$16490 : 34 = 485$,... 16490 mrs. = 485 rs. ;

$485 : 15 = 32 + \frac{5}{15}$,... 485 rs. = 32 pes. + 5 rs.

Respuesta : 16490 mrs. = 485 rs. = 32 pes. y 5 rs.

166. En punto á quebrados [LECCIONES VIII, IX y X] : ¿Cuanto importan $\frac{5}{7}$ de 24 doblones?

El doblon vale cuatro pesos.

$24 \times \frac{5}{7} = \frac{120}{7} = 17 + \frac{1}{7}$,... $\frac{5}{7}$ de 24 dob. = 17 dob. + $\frac{1}{7}$ de dob.

$\frac{1}{7} \times 4 = \frac{4}{7}$,... $\frac{1}{7}$ de dob. = $\frac{4}{7}$ de pes. ;

$\frac{4}{7} \times 15 = \frac{60}{7} = 8 + \frac{4}{7}$,... $\frac{4}{7}$ de pes. = 8 rs. + $\frac{4}{7}$ de real ;

$\frac{4}{7} \times 34 = \frac{136}{7} = 19 + \frac{3}{7}$,... $\frac{4}{7}$ de real = 19 + $\frac{3}{7}$ mrs.

Resp. : $\frac{5}{7}$ de 24 dob. = 17 y $\frac{1}{7}$ dob. = 17 dob. y $\frac{4}{7}$ de peso ... ..= 17 dob. 8 y $\frac{4}{7}$ rs. = 17 dob. 8 rs. y 19 y $\frac{3}{7}$ mrs. *importe.*

167. En cuanto á decimales [LECCIONES XI y XII] :

Cuestion 1ª Reducir 3 varas, 2 pies, 8 pulgadas y 7 líneas á decimales de vara.

La vara tiene 3 pies, el pie 12 pulgadas y la pulgada 12 líneas.

1 vara $= 1 \times 3 \times 12 \times 12 = 432$ líneas.

2 pies + 8 pulg. $= 2 \times 12 + 8 = 32$ pulg. ;

32 pulg. + 7 lín. $= 32 \times 12 + 7 = 391$ lín. ;

2 pies + 8 pulg. + 7 lín. = 391 lín. = $\frac{391}{432}$ de vara $= \frac{391,000}{432}$ ... ..= 0,905 &c. de vara.

Resp. : 3 var. 2 pies 8 pulg. y 7 lín. = 3 var. + 0,905 &c. de vara = 3,905 varas.

2ª Reducir 8 pesos, 4 rs. y 5 mrs. á decimales de peso.

1 peso $= 1 \times 15 \times 34 = 510$ mrs.

4 rs. + 5 mrs. $= 4 \times 34 + 5 = 141$ mrs. = $\frac{141}{510}$ de peso ... ..$= \frac{14,1000}{51} = 0,2764$ de peso.

Resp. : 8 pes. 4 rs. y 5 mrs. = 8 pes. + 0,2764 de peso... ..= 8,2764 pesos.

3.ª ¿Cuantos rs. y mrs. importan 0,2764 de peso?

0,2764 de peso $=0,2764\times15=4,146$ rs.;

0,146 de real $=0,146\times34=4,964$ mrs.

Resp. 0,2764 de peso $=4$ rs. y 4,964 mrs.

4.ª ¿Cuanto valen 0,0046 de vara á razon de 17 rs. vara?

17 rs. $\times$ 0,0046 $=0,0782$ de real;

34 mrs. $\times$ 0,0782 $=2,6588$ mrs.

Resp. 0,0046 de vara á 17 rs. $=0,0782$ de real $=2,6588$ mrs.

LECCION XIV.

Del Cálculo de los Números Denominados.

168. Cuando hemos valuado en la LECCION antecedente los pesos en reales y maravedises, los años en dias, horas y minutos, y las varas en pies, pulgadas y líneas, hemos operado con números *denominados*, esto es, con quebrados de una denominacion constante, pues el maravedí, por ejemplo, es $\frac{1}{34}$ de real ó $\frac{1}{510}$ de peso, y el real es $\frac{1}{15}$ de peso, mediante á que el real vale 34 mrs. y el peso 510 mrs.

169. Tambien se llaman *complecsos* á los números denominados por estar compuestos de partes ó unidades de diferentes especies ligadas entre si, lo que viene á ser quebrados de quebrados [136], pues que, por ejemplo, un pie es $\frac{1}{3}$ de vara, una pulgada es $\frac{1}{12}$ de $\frac{1}{3}$ de vara, y una línea es $\frac{1}{12}$ de $\frac{1}{12}$ de $\frac{1}{3}$ de vara.

170. La relacion, que las diferentes unidades de los números denominados mas usuales tienen entre si, se manifiesta en las siguientes tablas, donde se indican las abreviaturas de los nombres de ellos.

Estension.

Punto. . . . . p°

12	Línea. . . . . l.			
144	12	Pulgada. . . . p.		
1728	144	12	Pie. . . . P.	
5184	432	36	3	Vara. v.

Tiempo.

Tercero. . . . . ‴

60	Segundo. . . . . ″			
3600	60	Minuto. . . . . . ′		
216000	3600	60	Hora. . . h.	
5184000	86400	1440	24	Dia. d.

Pesos.

Grano. . . . . gr.

12	Tomin. . . . . tom.				
36	3	Adarme. . . . . ad.			
576	48	16	Onza. . . . . On.		
4608	384	128	8	Marco. . mc.	
9216	768	256	16	2	Libra. lb.

Monedas.

Maravedí. . . . . mrs.

34	Real. . . . . rs.				
340	10	Escudo. . . . . esc.			
374	11	$1\frac{1}{10}$	Ducado. . . . . . duc.		
510	15	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{11}$	Peso. . . . . Pe.	
2040	60	6	$5\frac{5}{11}$	4	Doblon. dob.

Es fácil entender estas tablas haciendose cargo de que la unidad de cada especie lleva su nombre, y sobre la izquierda su valor en las especies, que tienen su nombre encima: asi vemos que en la tabla de monedas un ducado vale 11 reales ó 374 maravedises.

171. Para hacer la adicion de números denominados se ponen en columna segun sus diferentes especies, se suman estas y se llevan á la columna inmediata las unidades, que resultan, de especie superior, al modo que en la adicion de enteros se llevan las decenas de una fila á otra.

(4 (1 (2 (1
En este ejemplo 34 v.. 5 P.. 6 p.. 7 l... 8 p.os
16 ... 3 ... 2 ... 5 ... 6
127 ... 4 ... 10 ... 11 ... 9

Suma ... 181 ... 1 ... 8 ... 0 ... 11

los puntos suman 23 de que pongo 11, y por los otros 12 llevo 1 línea á la columna inmediata: las líneas suman 24, por lo que pongo cero y llevo 2 pulgadas á la columna inmediata: las pulgadas suman 20 de que pongo 8 y llevo 1 pie á la columna inmediata: los pies suman 13 de que pongo uno y llevo 4 varas á la columna inmediata, la cual suma 181 varas. Sobre cada columna estan puestas dentro de un arco, para mayor claridad, las unidades de su especie, que han resultado de la columna antes sumada.

(3 (1
Otro ejemplo: 227 Pe... 14 rs... 8 mrs.
184 .... 11 11
2549 .... 13 15
17 .... 10 7

2980 .... 4 7

172. La sustraccion de números denominados se practica colocandolos como se ha hecho para sumarlos, y cuando la cantidad de alguna especie en el minuendo es menor que la respectiva en el sustraendo, se toma una unidad superior, en la columna inmediata, al minuendo, convirtiendola en las de la especie con que se opera, para agregarlas á las que tuviere el minuendo y hacer la sustraccion, sin olvidarse de que en la columna inmediata de la izquierda se ha rebajado al minuendo una unidad.

En este ejemplo 143 Pe... 14 rs... 8 mrs.
75 .... 10 20
Resta... 68 .... 3 22

como los mrs. del minuendo son menos que los del sustraendo, tomo de los 14 rs. uno, que convertido en mrs. compone 34, los cuales unidos á los 8 del minuendo son 42, de que rebajados los 20 del sustraendo quedan 22, que pongo en la resta. Por haber tomado de los 14 rs. del minuendo 1 real han quedado en 13, de que rebajados los 10 del sustraendo restan 3 que pongo debajo. En cuanto á los pesos es una sustraccion de enteros.

Otro ejemplo: 16 v... 0 P... 0 p... 0 l... 0 p.os
4 .... 2 .... 6 .... 8 5
Residuo... 11 .... 0 .... 5 .... 3 .... 7.

Aqui basta considerar que en el minuendo 16 varas... ..= 15 varas + 2 pies + 11 pulgadas + 11 líneas... ..+ 12 puntos.

173. El modo mas inteligible de multiplicar números denominados es reducirlos á quebrados segun su última especie, multiplicarlos entre si, y del quebrado impropio que resulte, sacar los enteros de cada especie del multiplicando.

Para saber cuanto importan 4 v. 2 P. 8 p. costando la vara 2 Pe. 3 rs. 4 mrs. hago 4 v. 2 P. 8 p. $=$ 176 p., 1 v. $=$ 36 p.; luego 4 v. 2 P. 8 p. $= \frac{176}{36}$ de vara.

Reduzco 2 Pe. 3 rs. 4 mrs. $=$ 1126 mrs., 1 Pe. $=$ 510 mrs.; de consiguiente 2 Pe. 3 rs. 4 mrs. $= \frac{1126}{510}$ de Pe.

Multiplico asi: $\frac{1126}{510}$ de peso $\times \frac{176}{36}$ veces, ó reduciendo estos quebrados á menores términos, $\frac{563}{255}$ de peso... ..$\times \frac{44}{9}$ veces $= \dfrac{563\times44}{255\times9} = \frac{24772}{2295} =$ 10 Pe. $+ \frac{1822}{2295}$ de peso; $\frac{1822}{2295}$ de Pe. $= 15\times\frac{1822}{2295} = \frac{27330}{2295}$ rs. $=$ 11 rs. $+ \frac{2085}{2295}$ de r.l;

$\frac{2085}{2295}$ de real $=34\times\frac{2085}{2295}=\frac{70890}{2295}$ mrs. $=30$ mrs. $+\frac{2040}{2295}$ de mrs. $=30+\frac{8}{9}$ mrs.

Por tanto las 4 v. 2 P. 8 p. á 2 Pe. 3 rs. y 4 mrs. vienen á ser (2 Pe. $+3$ rs. $+4$ mrs.) $\times\frac{44}{9}$ veces $=10$ Pe. 11 rs. 30 y $\frac{8}{9}$ mrs.

174. Esta misma operacion se puede practicar sacando el valor de las cosas en la ínfima especie de su importe, como sucederia en este caso, valuando las 4 v. 2 P. y 8 p. en mrs. lo que viene á ser multiplicar enteros por denominados, y convirtiendo despues el importe en especies superiores, como ahora en rs. y pesos.

Contraigamonos al mismo ejemplo:

Hemos visto que 2 Pe. $+$ 3 rs. $+$ 4 mrs. $=1126$ mrs. y que 4 v. $+$ 2 P. $+$ 8 p. $=\frac{176}{36}$ de var. $=\frac{44}{9}$ de var.; luego (2 Pe. $+$ 3 rs. $+$ 4 mrs.) $\times\frac{44}{9}$ veces $=1126$ mrs. $\times\frac{44}{9}$ veces...

$\ldots=\frac{49544}{9}$ mrs. $=5504$ mrs. $+\frac{8}{9}$ de mrs.

Y convirtiendo estos mrs. en rs. y pesos,

$\frac{5504}{34}=161$ rs. $+$ 30 y $\frac{8}{9}$ mrs.;

$\frac{161}{15}=10$ Pe. $+$ 11 rs.

De consiguiente 5504 y $\frac{8}{9}$ mrs. $=10$ Pe. 11 rs. 30 y $\frac{8}{9}$ mrs., que es el valor de las 4 v. 2 P. y 8 p.

175. Se puede hacer con mas facilidad la multiplicacion, cuando uno de los factores es un número entero abstracto, ó compuesto de unidades de especie superior. Por ejemplo: tengo 10 piezas de género, cada una con 6 varas, 3 pies, 5 pulgadas y 2 líneas, y deseo saber cuanto miden juntas. Es claro que he de hacer esta operacion

(6 v. $+$ 3 P. $+$5 p. $+$ 2 l.)$\times 10=60$ v. $+30$ P. $+50$ p. $+20$ l. ...

.. $=60$ v. $+30$ P. $+51$ p. $+8$ l. $=60$ v. $+34$ P. $+3$ p. $+8$ l. ...

.. $=71$ v. $+1$ P. $+3$ p. $+8$ l., porque, despues de multiplicar cada especie del multiplicando por el número abstracto 10, convierto sucesivamente las especies inferiores en las superiores, como las líneas en pulgadas y estas en pies, los cuales se convierten en varas, que se suman con el producto de los enteros.

176. Hay otro modo de multiplicar números denominados, que se practica sacando las *partes alicuotas* [89]; pero este método no se puede entender bien hasta que se haya aprendido la doctrina de las razones y proporciones. Ademas, esta clase de multiplicaciones las hace del modo mas sencillo un diestro calculador segun la forma en que se presentan, por no ser en sustancia mas que un juego de quebrados. Sin embargo darémos en los denominados una idea de este mismo juego, que se reduzca á multiplicar números mistos [137].

Supongo que voy á comprar 8 varas y 2 pies de cualquier género á razon de 5 pesos y 3 reales, y tendré

$$(5+\tfrac{3}{15})(8+\tfrac{2}{3})=(5+\tfrac{3}{15})8+(5+\tfrac{3}{15})\tfrac{2}{3}=5\times 8+\tfrac{3}{15}\times 8\ldots$$
$$\ldots+5\times\tfrac{2}{3}+\tfrac{3}{15}\times\tfrac{2}{3}=40+\tfrac{24}{15}+\tfrac{10}{3}+\tfrac{2}{15}=40+1\ldots$$
$$\ldots+\tfrac{9}{15}+3+\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{15}=44+\tfrac{9}{15}+\tfrac{5}{15}+\tfrac{2}{15}=44+\tfrac{16}{15}\ldots$$
$$\ldots=45+\tfrac{1}{15}=45 \text{ Pe. y } 1 \text{ r.}^{l}$$

177. En la division de números denominados considerarémos primero el caso en que el divisor es un entero, y entonces dividiremos la especie mayor del dividendo y tendrémos en la misma especie la parte principal del cociente: luego multiplicarémos el residuo por las unidades de la especie inferior inmediata, que componen la unidad de la especie del residuo, á cuyo producto agregarémos la cantidad de la respectiva especie inferior, que tenga el dividendo, para continuar del mismo modo la operacion hasta el fin.

Supongo que he de repartir 97 pesos 12 rs. y 31 mrs. entre 26 compañeros.

La operacion es esta : $(97 \text{ Pe.} + 12 \text{ rs.} + 31 \text{ mrs.}) : 26 \ldots$
$\ldots = \frac{97}{26} \text{ Pe.} + \frac{12}{26} \text{ rs.} + \frac{31}{26} \text{ mrs.}$, que se practica así :

```
97 Pe. + 12 rs. + 31 mrs. | 26
                          |-----------------------------
19                          3 Pe. + 11 rs. + 15 15/26 mrs.
 15
----
 95
19
 12
----
297
 37
 11
----
 34
 34
----
 34
 31
----
405
145
 15
```

Aqui se echa de ver que, despues de sacar por la primera division 3 pesos, multiplico el residuo 19 por 15, valor de un peso en rs., á cuyo producto añado los 12 rs. del dividendo : continuo la division y saco 11 rs., quedandome un residuo de 11 que reduzco á mrs., agregandole los 31 del dividendo para hacer la última division, que completa el cociente con 15 y $\frac{15}{26}$ mrs.

178. Si la division es de números denominados unos por otros, la regla general es reducir, asi el dividendo como el divisor, á su menor especie, poniendolos en forma de quebrados para ejecutar la division, que ha de principiar dando el cociente en su mayor especie, y sucesivamente en las inferiores en virtud de la reducion ; pero se debe ahorrar la conversion del dividendo en quebrado y la multiplicacion del numerador

del divisor por el denominador del dividendo, con solo multiplicar el numerador del dividendo por el denominador del divisor, porque de este modo se aumenta tantas veces el dividendo multiplicandolo, como el divisor quitandole su denominador; lo que reduce la operacion á la particion de denominados por enteros, que ya sabemos hacer.

Este ejemplo ilustrará bastante: 7 marcos y 2 onzas han costado 346 Pe., 14 rs. y 6 mrs. ¿á como sale el mc.? (346 Pe. $+$ 14 rs. $+$ 6 mrs.) : $(7+\frac{2}{8})$ $=$ (346 Pe. $+$ 14 rs. ... .. $+$ 6 mrs.) : $\frac{58}{8}$ $=$ (346 Pe. $+$ 14 rs. $+$ 6 mrs.) $\times\frac{8}{58}$ $=$ (346 Pe. ... .. $+$ 14 rs. $+$ 6 mrs.) $\times\frac{4}{29}$ $=\frac{1384 \text{ Pe.} + 56 \text{ rs.} + 24 \text{ mrs.}}{29}$.

No importa que en el dividendo se ponga en algunos denominados una cantidad mayor que el valor de la unidad de la especie superior inmediata, como sucede aqui en los reales, porque la division enmienda luego esta impropiedad. Cualquiera sabrá concluir este ejemplo, guiandose por el anterior [177], y hallará por cociente 47 Pe. 12 rs. 27 y $\frac{23}{29}$ mrs.

179. Cuando el divisor no es un número abstracto sino que lo ha de ser el cociente; como el dividendo y el divisor son de una misma naturaleza, se reducen á quebrados, y se parte el numerador del primero por el del segundo, sin hacer caso de los denominadores, lo que no altera el valor del cociente.

Si intento partir 67 Pe. 12 rs. y 6 mrs. por 5 Pe. 4 rs. y 6 mrs. tendré (67 Pe. $+$ 12 rs. $+$ 6 mrs.) : (5 Pe. ... .. $+$ 4 rs. $+$ 6 mrs) $=\frac{34584}{510}:\frac{2692}{510}=\frac{34584\times510}{2692\times510}=\frac{34584}{2692}$ ... .. $=12+\frac{2280}{2692}$ veces.

LECCION XV.

De los Quebrados continuos.

180. Sucede, á veces, que se encuentra en el cálculo un quebrado irreducible, cuyo numerador y denominador son cantidades grandes, aunque su valor sea pequeño. Entonces es necesario buscar este valor por aprocsimacion, espresandolo con números mas simples para comprenderlo mejor. Reducese el artificio á partir ambos términos por el numerador, de que resulta un nuevo quebrado, que tiene por numerador la unidad, y por denominador un número misto, y se continua del mismo modo la operacion con los quebrados de los nuevos denominadores hasta llegar á uno que sea un número misto, cuyo quebrado tenga por numerador la unidad. Si el quebrado es impropio se le sacan los enteros, y se hace la indicada operacion con el quebrado que resulta.

Tomemos en consideracion $\frac{1103}{887}$;

$$\frac{1103}{887}=1+\frac{216}{887};$$

$$\frac{216}{887}=\frac{216:216}{887:216}=\frac{1}{4+\frac{23}{216}};$$

$$\frac{23}{216}=\frac{23:23}{216:23}=\frac{1}{9+\frac{9}{23}};$$

$$\frac{9}{23}=\frac{9:9}{23:9}=\frac{1}{2+\frac{5}{9}};$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5:5}{9:5}=\frac{1}{1+\frac{4}{5}};$$

$$\frac{4}{5}=\frac{4:4}{5:4}=\frac{1}{1+\frac{1}{4}}.$$

Haciendo sucesivamente las sustituciones de valores iguales tendremos

$$\ldots \frac{216}{887} = \frac{1}{4+\frac{23}{216}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{9+\frac{9}{23}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\frac{5}{9}}}} \ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\frac{4}{5}}}}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}.$$

Esto es un quebrado continuo.

181. Como el fin es buscar un valor aprocsimado mas sencillo y perceptible, observo que siendo $\frac{216}{887} = \frac{1}{4+\frac{23}{216}}$ es $\frac{216}{887}$ menor que $\frac{1}{4}$ y mayor que $\frac{1}{5}$, porque es igual á $\frac{1}{4+\frac{23}{216}}$, cuyo denominador escede á 4 en $\frac{23}{216}$, y para 5 le faltan $\frac{193}{216}$; luego el valor de $\frac{216}{887}$ está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{5}$.

A fin de entendernos mejor usarémos el signo $>$ para marcar el esceso de mayor á menor, y el signo $<$ para indicar la diferencia de menor, á mayor poniendo la cantidad mayor en la abertura y la menor en la punta, de modo que segun acabamos de ver $\frac{216}{887} < \frac{1}{4}$, y $\frac{216}{887} > \frac{1}{5}$.

182. Continuemos la aprocsimacion considerando que, pues $\frac{216}{887} = \frac{1}{4+\frac{23}{216}} = \frac{1}{4+\cfrac{1}{9+\frac{9}{23}}}$; si desechamos los $\frac{9}{23}$, el valor $\frac{1}{4+\frac{1}{9}}$ será demasiado pequeño, porque $(4+\frac{1}{9}) > (4+\frac{23}{216})$, y de consiguiente $\frac{216}{887} > \frac{1}{4+\frac{1}{9}}$ y $\frac{216}{887} < \frac{1}{4}$. Como $\frac{1}{4+\frac{1}{9}} \ldots$

$\ldots = \frac{1}{(4\times9+1):9} = \frac{1}{37:9} = \frac{9}{37}$, estará el valor de $\frac{216}{887}$ entre

$\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{37}$. Se evidenciará mas claro viendo que $\frac{1}{4} = \frac{1 \times 216}{4 \times 216} \ldots$

$\ldots = \frac{216}{864}$, y $\frac{9}{37} = \frac{9 \times 24}{37 \times 24} = \frac{216}{888}$, pues siendo unos mismos los numeradores, el quebrado, que tiene menor denominador, es mayor, y el que tiene mayor denominador, es menor [112], luego $\frac{216}{887} > \frac{216}{888}$ y $\frac{216}{887} < \frac{216}{864}$, esto es, $\frac{216}{887} > \frac{1}{4 + \frac{1}{9}}$ y $\frac{216}{887} < \frac{1}{4}$.

Siguiendo la operacion por el mismo órden se hallarán alternativamente valores mayores y menores, entre los cuales estará el verdadero del quebrado propuesto.

183. No siempre los quebrados contínuos tienen por numeradores la unidad, sino otros números enteros cualesquiera, como en este:

$$\cfrac{5}{7 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{11 + \cfrac{8}{9 + \frac{6}{13}}}}}.$$

Propongamonos conocer su valor en un solo quebrado, para saberlo sacar de otro cualquiera, y la operacion nos lo enseñará por los signos:

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\frac{6}{13}}}}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{(9\times 13+}}}}$$

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\frac{6}{13}}}}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\frac{104}{123}}}}$$

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\frac{6}{13}}}}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\frac{492}{1457}}}$$

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\frac{6}{13}}}}}=\cfrac{5}{7+\frac{2914}{4863}}$$

-6) : 13

$$=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8\times13}{9\times13+6}}}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{104}{123}}}};$$

$$=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4\times123}{11\times123+104}}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{492}{1457}}};$$

$$=\cfrac{5}{7+\cfrac{2\times1457}{3\times1457+492}}=\cfrac{5}{7+\cfrac{2914}{4863}};$$

$$=\frac{5\times4863}{7\times4863+2914}=\frac{24315}{36955},$$ quebrado que se busca.

LECCION XVI.

De las Potencias.

184. Todo número ó cantidad, ecsistiendo en si misma, está en su primera potencia. Las potencias se señalan con el número de su grado, puesto con cifra pequeña á la derecha de la cantidad y algo mas arriba. Si la cantidad es de muchas cifras se la comprende en un paréntesis ó se le pone una raya encima. Así $7=7^1$, $24=(24)^1$, $3578=\overline{3578}^1$.

Los números, que indican las potencias, se llaman *esponentes* de ellas ó de su grado, entendiendose por grado las veces que la cantidad ó número es factor consigo mismo para formar multiplicaciones, cuyo producto es la potencia. La segunda potencia de 5 es $5^2=5\times5=25$, que tambien se llama *cuadrado*. La tercera potencia de 5 es $5^3=5\times5\times5=125$, que se llama igualmente *cubo*. Las demas potencias siguen su denominacion de cuarta, quinta, sesta &c., sin otro nombre.

185. Los cuadrados de los números díjitos son

$$1^2=1\times1=1;$$
$$2^2=2\times2=4;$$
$$3^2=3\times3=9;$$
$$4^2=4\times4=16;$$
$$5^2=5\times5=25;$$
$$6^2=6\times6=36;$$
$$7^2=7\times7=49;$$
$$8^2=8\times8=64;$$
$$9^2=9\times9=81.$$

Y los cubos de los mismos números son

$$1^3=1\times1\times1=1;$$
$$2^3=2\times2\times2=8;$$
$$3^3=3\times3\times3=27;$$

$$4^3 = 4\times4\times4 = 64\,;$$
$$5^3 = 5\times5\times5 = 125\,;$$
$$6^3 = 6\times6\times6 = 216\,;$$
$$7^3 = 7\times7\times7 = 343\,;$$
$$8^3 = 8\times8\times8 = 512\,;$$
$$9^3 = 9\times9\times9 = 729.$$

No necesitamos, por ahora, buscar mas potencias; pero observarémos que el cuadrado de una cifra no puede tener mas de dos, y el cubo de una cifra no pasa de tres.

186. Aunque es tan fácil elevar un número á su cuadrado, pues no hay mas que multiplicarlo por si mismo, conviene descomponer aqui un número de dos cifras en sus decenas y unidades, para conocer, elevandolo, la estructura de de su cuadrado. Sea este número 34 y tendremos

$$(34)^2 = (30+4)^2 = (30+4)(30+4) = (30+4)30 + (30+4)4 \ldots$$
$$\ldots = 30\times30 + 30\times4 + 30\times4 + 4\times4 = 30\times30 + 30\,(4+4) \ldots$$
$$\ldots + 4\times4 = \overline{30}^2 + 2\times30\times4 + 4^2,$$ en que vemos que, descomponiendo un número en dos partes, su cuadrado comprende el cuadrado de la primera parte, mas el duplo del producto de la primera parte multiplicada por la segunda, mas el cuadrado de la segunda; pues siendo en este ejemplo las decenas la primera parte, y las unidades la segunda, ha resultado que

$$\overline{34}^2 = (30+4)^2 = \begin{cases} \overline{30}^2 & \text{cuadrado de las decenas,} \\ +2\times30\times4 & \text{duplo del producto de las decenas} \\ & \text{por las unidades,} \\ +\quad 4^2 & \text{cuadrado de las unidades,} \end{cases}$$

y todo ello $= 900 + 240 + 16 = 1156 = 34\times34$.

187. Del mismo modo podemos conocer la estructura del cubo de un número de dos cifras.

Supongamos que este número sea 12, $\overline{12}^3=(10+2)^3\ldots$
$\ldots=(10+2)^2(10+2)=(\overline{10}^2+2\times10\times2+2^2)(10+2)\ldots$
$\ldots=(\overline{10}^2+2\times10\times2+2^2)10+(\overline{10}^2+2\times10\times2+2^2)2\ldots$
$\ldots=10^2\times10+2\times10\times10\times2+10\times2^2+\overline{10}^2\times2+2\times10\times2^2\ldots$
$\ldots+2^2\times2=10^3+(2+1)\overline{10}^2\times2+(1+2)\,10\times2^2+2^3\ldots$
$\ldots=\overline{10}^3+3\times\overline{10}^2\times2+3\times10\times2^2+2^3$; luego el cubo de un número, descompuesto en dos partes, contiene el cubo de la primera, el triplo producto del cuadrado de la primera por la segunda, el triplo producto de la primera por el cuadrado de la segunda, y el cubo de la segunda, como hemos visto en

$$\overline{12}^3=(10+2)^3=\left\{\begin{array}{ll} \overline{10}^3 & \text{cubo de las decenas,} \\ +3\times\overline{10}^2\times2 & \text{triplo producto del cuadrado de} \\ & \text{las decenas por las unidades,} \\ +3\times10\times2^2 & \text{triplo producto de las decenas} \\ & \text{por el cuadrado de las unidades,} \\ +\quad 2^3 & \text{cubo de las unidades;} \end{array}\right.$$

cuyo valor $1000+600+120+8=1728=12\times12\times12$.

188. Observemos que en $\overline{34}^2=(30+4)^2=\overline{30}^2\ldots$
$\ldots+2\times30\times4+4^2$ el cuadrado ó segunda potencia desplegada tiene tres términos, y que en $\overline{12}^3=(10+2)^3=\overline{10}^3\ldots$
$\ldots+3\times\overline{10}^2\times2+3\times10\times2^2+3^3$ el cubo ó tercera potencia desenvuelta tiene cuatro términos; luego si se eleva un número, descompuesto en dos partes ó términos (lo que se llama *binomio*), al cuadrado ó al cubo, resultará un número de términos una unidad mayor que el grado de la potencia. Lo mismo sucede en las demas superiores.

189. La elevacion de los quebrados propios ó impropios ó de números mistos á cualquiera potencia se hace como la de los enteros, multiplicandolos por si mismos tantas veces menos una cuantas unidades tiene el esponente de la potencia, ó siendo tantas veces factores cuantas unidades tiene

el mismo esponente. Así $(\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$; $(2+\frac{1}{2})^3 = (\frac{5}{2})^3 \ldots$ $\ldots = \frac{125}{8}$. Lo mismo es escribir $(\frac{7}{8})^2$ que $\frac{7^2}{8^2}$; pero la primera espresion es mas sencilla.

LECCION XVII.

De las Raices.

190. El número, que multiplicado una ó mas veces por si mismo produce la potencia [184], se llama *raiz*. Esta se indica con el signo $\sqrt{}$, que llamamos *radical*, poniendo en su abertura con cifra pequeña el órden de la raiz, y debajo de la raya ó dentro de un paréntesis la cantidad de que se ha de estraer. Cuando se trata de la raiz segunda ó cuadrada, se omite poner el 2 en la abertura del signo, de modo que $\sqrt{4}$ es lo mismo que $\sqrt[2]{4}$.

191. Asi como hemos presentado [185] los cuadrados y cubos de los números díjitos, presentarémos ahora la estraccion de las raices cuadrada y cúbica de aquellos cuadrados y cubos para volver á los mismos números.

$$\sqrt{1} = \frac{1 \times 1}{1} = 1; \qquad \sqrt{36} = \frac{36}{6} = 6;$$

$$\sqrt{4} = \frac{4}{2} = 2; \qquad \sqrt{49} = \frac{49}{7} = 7;$$

$$\sqrt{9} = \frac{9}{3} = 3; \qquad \sqrt{64} = \frac{64}{8} = 8;$$

$$\sqrt{16} = \frac{16}{4} = 4; \qquad \sqrt{81} = \frac{81}{9} = 9.$$

$$\sqrt{25} = \frac{25}{5} = 5;$$

$\sqrt[3]{1} = \frac{1\times1\times1}{1\times1} = 1$; $\sqrt[3]{216} = \frac{216}{6\times6} = 6$;

$\sqrt[3]{8} = \frac{8}{2\times2} = 2$; $\sqrt[3]{343} = \frac{343}{7\times7} = 7$;

$\sqrt[3]{27} = \frac{27}{3\times3} = 3$; $\sqrt[3]{512} = \frac{512}{8\times8} = 8$;

$\sqrt[3]{64} = \frac{64}{4\times4} = 4$; $\sqrt[3]{729} = \frac{729}{9\times9} = 9$.

$\sqrt[3]{125} = \frac{125}{5\times5} = 5$;

192. Esta planta nos manifiesta:

1º Que la raiz cuadrada de un número de una ó dos cifras no puede tener mas que una, esto es, que la raiz cuadrada de unidades ó de decenas y unidades no tiene mas que unidades.

2º Que la raiz cúbica de un número de una, dos ó tres cifras no tiene mas que una, esto es, que la raiz cúbica de unidades, ó de decenas y unidades, ó de centenas, decenas y unidades no puede tener mas que unidades.

3º Que estraer una raiz cuadrada es tener un dividendo, cuyo divisor se ignora, pero se sabe que ha de ser igual al cociente, y buscar con este dato un divisor y un cociente iguales, que multiplicados uno por otro produzcan el cuadrado ó dividendo.

4º Que estraer una raiz cúbica es tener un dividendo, cuyo divisor no se conoce, pero se sabe que ha de ser el cuadrado del cociente, y buscar con este dato uno y otro, de modo que por su multiplicacion compongan el cubo ó dividendo.

193. Resulta, pues, que cuando hemos de sacar la raiz cuadrada de un número, que no sea cuadrado perfecto y no pase de decenas, ó la raiz cúbica de un número, que no

sea cubo perfecto y no pase de centenas, en ambos casos la raiz será un número de unidades, comprendido entre los números díjitos, quedando un residuo de la potencia.

194. Teniendo presente [186] que el cuadrado de un número de dos cifras, descompuesto en sus decenas y unidades, comprende el cuadrado de las decenas, mas el duplo de las decenas multiplicado por las unidades y las unidades multiplicadas por ellas mismas, y haciendonos cargo de que por el sistema décuplo de la numeracion, cualquiera parte hallada de una raiz que se esté estrayendo, se puede considerar como decenas, y la que inmediatamente se busca, contemplarla como unidades; se vendrá en conocimiento de que, si de un cuadrado restamos el cuadrado de las decenas de su raiz, tendrémos que buscar para divisor del residuo el duplo de las decenas de la raiz junto con las unidades de ella. Asi en $\sqrt{2916}$ observarémos:

1.° Que, como el cuadrado de una cifra no puede estar en cuatro ni en tres, habrá de estar en las dos primeras.

2.° Que no siendo 29 un cuadrado perfecto, y hallandose entre 25 y 36 que lo son, habré de poner en la raiz 5 decenas para restar su cuadrado 25 centenas de las 29 del número propuesto. Principio la operacion separando las dos últimas cifras con una coma, escribiendo las decenas de la raiz y restando su cuadrado en esta forma

$$\begin{array}{rl} 2\,9,1\,6 & \underline{|\,5 \text{ decenas de la raiz}} \\ 5^2 = \underline{2\,5} & \\ \textit{Residuo} \quad 4\,1\,6 & \end{array}$$

3.° Que para formar el divisor del residuo duplicaré las decenas, y les añadiré las unidades, que han de ser la segunda parte de la raiz, de este modo

Residuo 4 1 6 | 5 4 *raiz*

$104 \times 4 = 416$ $\quad 2 \times 50 + 4 = 104$ *divisor*,

. . .

advirtiendo que el duplo de las decenas de la raiz hallada sirve como divisor aprocsimado para tantear el cociente, con que se completa el divisor, y que ha de ser la siguiente cifra de la raiz.

195. Como en la estraccion de raices procedemos por decenas de mayor á menor hasta llegar á las unidades simples, se divide el número propuesto con comas desde la derecha hácia la izquierda en trozos de dos cifras, que se han de bajar sucesivamente al lado de los residuos, por que, componiendose de tres ó cuatro cifras el cuadrado de las decenas, no puede estar en las dos que se separan sobre la derecha.

Los ejemplos aclararán todo:

	76,80,76,96	8764 *Raiz.*
$8^2 = 64$		$80 \times 2 + 7 = 167$ *Prim. divisor.*
	1280	$870 \times 2 + 6 = 1746$ *Seg. div.*
$167 \times 7 =$	1169	$8760 \times 2 + 4 = 17524$ *Terc. div.*
	. 11176	
$1746 \times 6 =$	10476	
	. 70096	
$17524 \times 4 =$	70096	$\sqrt{76807696} = 8764.$
	. . . . .	

196. Cuando al fin de la operacion queda un residuo se puede continuar por partes decimales, agregando ceros de dos en dos, por que siendo la potencia un producto de dos factores, ambos con decimales, ha de tener dos ceros la potencia por cada decimal de la raiz.

Propongamonos $\sqrt{87567}$ con tres decimales:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8{,}75{,}67{,}00{,}00{,}00 & 295{,}917 \\
2^2= & 4 & 20\times2+9=49 \text{ *Prim. divisor.*} \\
 & 475 & 290\times2+5=585 \text{ *Seg. div.*} \\
49\times9= & 441 & 2950\times2+9=5909 \text{ *Terc. div.*} \\
 & .3467 & 29590\times2+1=59181 \text{ *Cuart. div.*} \\
585\times5= & 2925 & 295910\times2+7=591827 \text{ *Quint. div.*} \\
 & .54200 & \\
5909\times9= & 53181 & \\
 & 101900 & \\
59181\times1= & 59181 & \\
 & 4271900 & \\
591817\times7= & 4142789 & \\
 & .129111 & \sqrt{87567}=295{,}917 \text{ \&c.}
\end{array}
$$

197. Asi como se elevan los quebrados á potencias con la multiplicacion de ellos por si mismos [189], se saca su raiz, estrayendola del numerador y del denominador, para formar respectivamente los términos de su quebrado. Por tanto

$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3};\ \sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Siempre se evita que el numerador y el denominador sean ambos *irracionales ó incomensurables*, esto es, números de que no se pueda estraer la raiz, para lo cual se multiplican los dos términos del quebrado por su denominador, de que resulta

$$\sqrt{\frac{3}{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3\times7}}{\sqrt{7\times7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

A veces conviene sacar la raiz del numerador en decimales y partirla por el denominador. Por ejemplo

$$\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2{,}000000}}{3}=\frac{1{,}414}{3}=0{,}47133 \text{ \&c.}$$

198. Para sacar la raiz cuadrada de un número misto se reducen los enteros á quebrados, y se continua la operacion en esta forma:

$$\sqrt{8+\tfrac{3}{7}}=\sqrt{\frac{59}{7}}=\sqrt{\frac{59\times7}{7\times7}}=\frac{\sqrt{413}}{7}=\frac{20{,}322}{7}=2{,}903.$$

Tambien se puede reducir el quebrado á decimales para sacar su raiz, de esta manera: $\sqrt{8+\tfrac{3}{7}}=\sqrt{8{,}428571}=2{,}903.$

LECCION XVIII.

Continuacion de las Raices.

199. Recordemos

1º Que estraer la raiz cúbica de una cantidad es [192] buscar un número, que multiplicado por su cuadrado produzca la misma cantidad.

2º Que el cubo de una cifra [185] no pasa de tres.

3º Que el cubo de un número, descompuesto en dos partes, comprende [187] el cubo de la primera, y ademas el triplo del cuadrado de la primera, el triplo producto de la primera por la segunda y el cuadrado de la segunda, multiplicada la suma de estas tres partidas por la segunda parte.

4º Que por el sistema décuplo de la numeracion se considera la parte hallada de una raiz como sus decenas, y la que se busca es considerada como sus unidades.

200. Hechos cargo de estos antecedentes conoceremos que para estraer la raiz cúbica de una cantidad se la ha de dividir con comas de la derecha á la izquierda en trozos de tres cifras, porque el cubo de las decenas de la raiz ha de tener á lo menos cuatro cifras, de consiguiente no puede estar en las tres que se separan á la derecha: que se ha de buscar el cubo igual ó procsimamente inferior al valor de la una, dos ó tres últimas cifras de la izquierda para restarlo de ellas, poniendo antes su raiz en el lugar correspondiente: que al lado del residuo se ha de bajar el

trozo inmediato de tres cifras de la derecha: que el triplo del cuadrado de las decenas halladas se ha de considerar como un divisor aprocsimado para tantear el cociente, que ha de representar por entonces la segunda parte ó unidades de la raiz, donde se pondrá: que se ha de formar el verdadero divisor con el triplo de cuadrado de las decenas halladas, el triplo del producto de estas decenas por el cociente y el cuadrado del cociente: que esta suma se ha de multiplicar por el cociente para sacar el producto parcial: que este producto se ha de restar del dividendo particular con que se está operando; y que al lado del residuo se ha de bajar el trozo siguiente de tres cifras para continuar la operacion, considerando siempre como decenas la parte hallada de la raiz, y como unidades la que se busca.

Bien se echa de ver que, si algun producto parcial saliere demasiado grande ó demasiado pequeño, se han de quitar ó aumentar conjeturalmente unidades al cociente hasta sacar el verdadero. Tambien requiere esta clase de operaciones, despues de concluidas, cubicar toda la raiz para asegurarse de su ecsactitud.

Entremos en los ejemplos, que aclararán la doctrina:

$$\sqrt[3]{79507}\,; \qquad \begin{array}{r|l} 79.507 & \underline{\textit{4 decenas de la raiz.}} \\ 4^3 = \underline{64} & \\ 15 & \end{array}$$

Ahora bajo el trozo de tres cifras, formo el divisor aprocsimado, pongo en la raiz el cociente para sus unidades, completo el divisor, y saco su producto por el cociente para restarlo del dividendo particular:

$$\begin{array}{r|l} 15507 & \underline{43 \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ (3\times\overline{40}^2+3\times40\times3+3^2)3=\underline{15507} & 3\times\overline{40}^2=4800\ \textit{div. aprocs.} \\ \cdots\cdots & \end{array}$$

De que resulta $\sqrt[3]{79507}=43$.

Otro ejemplo: $596.947.688 \mid 842$

$8^3 = 512$ $\qquad 3\times\overline{80}^2 = 19200$ *Prim. div. aprocsimado.*

$.84947$ $\qquad 3\times\overline{840}^2 = 2116800$ *Seg. div. aprocs.*

$(3\times\overline{80}^2+3\times80\times4+4^2)4 = 80704$

$.4243688$

$(3\times\overline{840}^2+3\times840\times2+2^2)2 = 4243688$

$........ \qquad \sqrt[3]{596947688} = 842.$

201. Tanto en la estraccion de la raiz cuadrada como en la de la cúbica, cada trozo de la potencia debe dar una cifra á la raiz, porque el cuadrado tiene dos factores y el cubo tres.

202. El método esplicado de estraer la raiz cúbica es el mas analítico; pero al mismo tiempo es muy embarazoso. Se hace mas sencillo cubicando sucesivamente la parte hallada de la raiz, y restandola siempre de los correspondientes trozos de la cantidad propuesta, hasta que el cubo de la raiz total resulta igual con la misma cantidad, si esta es un cubo perfecto, lo que comprueba la operacion. Repitamos el ejemplo antecedente:

$596.947.688 \mid 842$

$8^3 = 512$ $\qquad 3\times\overline{80}^2 = 19200$ *Prim. div. aprocsimado.*

84947 $\qquad 3\times\overline{840}^2 = 2116800$ *Seg. div. aprocs.*

596947

$\overline{84}^3 = 592704$

4243688

596947688

$\overline{842}^3 = 596947688$

$..........$

No es necesario bajar continuamente los trozos de la cantidad para presentar los minuendos de que se han de restar los cubos de la raiz hallada; pero lo hemos hecho en este ejemplo para mayor claridad.

203. Cuando la cantidad propuesta no es un cubo perfecto queda un residuo al fin de la operacion, la cual se puede continuar por partes decimales, agregando tantos trozos de tres ceros sobre la derecha cuantas decimales se deseen en la raiz, pues siendo tres los factores del cubo, todos con decimales, han de dar por cada una de la raiz tres de ellas en el producto ó potencia.

Propongamonos $\sqrt[3]{8755}$ con dos decimales:

$8{,}755{,}000{,}000 \mid 20{,}61$

$2^3 = 8$ $\qquad\qquad$ $3\times\overline{20}^2 = 1200$ *Prim. div. aprocs.*

$\cdot 755\ 000$ $\qquad\qquad$ $3\times\overline{200}^2 = 120000$ *Seg. div. aprocs.*

$\overline{206}^3 = 8\ 741\ 816$ $\qquad\qquad$ $3\times\overline{2060}^2 = 12730800$ *Terc. div. aprocs.*

$\cdot\cdot 13\ 184\ 000$

$\overline{2061}^3 = 8\ 754\ 552\ 981$

$\cdot\cdot\cdot\cdot 448\ 019$ $\qquad\qquad$ $\sqrt[3]{8755} = 20{,}61$ &c.

204. Podemos dar una regla general para estraer la raiz cuadrada y la cúbica de cualquiera cantidad. Dividase esta, de la derecha á la izquierda, en trozos de tantas cifras como unidades tenga el grado de la potencia: saquese del último trozo de la izquierda su raiz, que se pondrá en su lugar: restese la potencia de ella del último trozo de la izquierda: bajese el trozo inmediato al lado del residuo para formar un dividendo particular: formese el divisor aprocsimado con el décuplo de la parte hallada de la raiz elevado á una potencia un grado menor que el de la cantidad propuesta, y multiplicado por el grado de esta: pongase el

cociente á continuacion de la raiz: elevese la parte hallada de ella á la potencia de que se hace la estraccion, y restese de los trozos correspondientes de la cantidad propuesta; y continuese con este residuo como con el anterior. Si al fin de la operacion quedare algun residuo se le pondrá, por cada decimal, que se quiera en la raiz, un trozo de tantos ceros como unidades tenga el grado de la potencia, para aprocsimar la raiz cuanto convenga. Esta regla sirve igualmente para la estraccion de raices de las potencias de otros grados superiores.

205. Mediante á elevarse los quebrados á su cubo por la repetida multiplicacion de ellos [189], se saca su raiz cúbica estrayendola de los términos del quebrado cubo ó tercera potencia, para formar respectivamente el numerador y denominador del quebrado raiz. Así

$$\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4};\quad \sqrt[3]{\frac{143}{343}}=\frac{\sqrt[3]{143}}{\sqrt[3]{343}}=\frac{\sqrt[3]{143}}{7}\ldots$$

$$\ldots=\frac{5{,}22\ \&c.}{7}=0{,}74\ \&c.$$

Cuando el denominador no es un cubo perfecto se multiplican por su cuadrado los dos términos del quebrado:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}}=\sqrt[3]{\frac{3\times7^2}{7\times7^2}}=\frac{\sqrt[3]{147}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{5{,}27\ \&c.}{7}=0{,}75\ \&c.$$

Los números mistos se reducen á quebrados para estraer su raiz:

$$\sqrt[3]{7+\tfrac{3}{11}}=\sqrt[3]{\frac{80}{11}}=\frac{\sqrt[3]{80\times11^2}}{\sqrt[3]{11\times11^2}}=1{,}937\ \&c.$$ ó se reduce primero el quebrado á decimales: $\sqrt[3]{7+\tfrac{3}{11}}=\sqrt[3]{7{,}272727272\ldots}$

$\ldots=1{,}937\ \&c.$

206. La adicion de los radicales se hace enlazandolos con el signo positivo. Para sumar $\sqrt{2}$ con $\sqrt{3}$ se escribe $\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Lo mismo, aunque sean de distinto órden: se suma $\sqrt{7}$ con $\sqrt[3]{9}$ poniendo $\sqrt{7}+\sqrt[3]{9}$. Pero si los radicales son de un mismo órden y comprenden la misma cantidad, se suman poniendo delante el numero de ellos, cuyo número se llama *coeficiente*: $\sqrt{5}+3\sqrt{5}+7\sqrt{5}=(1+3+7)\sqrt{5}\ldots$ $\ldots=11\sqrt{5}$; $2\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{4}=(2+5+1)\sqrt[3]{4}=8\sqrt[3]{4}$; advirtiendo que el radical, que no tiene delante número ó coeficiente se entiende que está precedido de la unidad, porque toda cantidad ecsiste una vez:

$$\sqrt{15}=1\sqrt{15};\qquad \sqrt[3]{17}=1\sqrt[3]{17}.$$

207. La sustraccion se hace poniendo entre los radicales el signo negativo. Para restar $\sqrt{7}$ de $\sqrt{11}$ se escribe $\sqrt{11}-\sqrt{7}$; restar $\sqrt[3]{5}$ de $\sqrt{8}$ se figura $\sqrt{8}-\sqrt[3]{5}$. Tratandose de radicales de un mismo órden con la misma cantidad debajo: $5\sqrt{7}-3\sqrt{7}=(5-3)\sqrt{7}=2\sqrt{7}$; $8\sqrt[3]{23}-5\sqrt[3]{23}=(8-5)\sqrt[3]{23}=3\sqrt[3]{23}$; esto es restar los coeficientes para tener el del residuo.

208. La multiplicacion de los radicales se figura con el signo de ella cuando no son del mismo órden: $\sqrt{3}$ multiplicado por $\sqrt[3]{7}$ se escribe $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{7}$. Si son del mismo órden se multiplican entre si las cantidades sometidas al radical y sus coeficientes unos por otros: $\sqrt{7}\times4\sqrt{5}=1\times4\sqrt{7\times5}=4\sqrt{35}$;
$3\sqrt{2}\times5\sqrt{8}=3\times5\sqrt{2\times8}=15\sqrt{16}=15\times4=60$;

$$6\sqrt[3]{4}\times 3\sqrt[3]{3^2}=6\times 3\sqrt[3]{4\times 3^2}=18\sqrt[3]{2\times 64}=18\times 4\sqrt[3]{2}=72\sqrt[3]{2}.$$

209. La division se hace figurandola, ó dividiendo los coeficientes entre si y las cantidades sometidas al radical una por otra:

$$6\sqrt[3]{7} : 12\sqrt{3}=\frac{6\sqrt[3]{7}}{12\sqrt{3}}=\frac{1\sqrt[3]{7}}{2\sqrt{3}};$$

$$3\sqrt{7} : 4\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{7}}{4\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{7\times 5}}{4\times 5}=\frac{3}{20}\sqrt{35};$$

$$4\sqrt[3]{24} : 2\sqrt[3]{3}=\frac{4\sqrt[3]{24}}{2\sqrt[3]{3}}=2\sqrt[3]{24:3}=2\sqrt[3]{8}=2\times 2=4.$$

LECCION XIX.

De las Proporciones.

210. Supongamos una ecuacion formada por dos binomios [188], en que el primer término de cada miembro sea una cantidad negativa y menor que su segundo término, que será positivo, como $-3+5=-4+6$. Por haber ecuacion el valor del primer miembro ha de ser igual al del segundo, y con efecto $-3+5=2$ y $-4+6=2$, y siendo tan sencilla, que solo prensenta la idea de sustraccion, podemos decir que es ecuacion de diferencia ó una *equidiferencia.*

211. El cotejo de estos términos, poniendo, sin signo positivo ni negativo, un punto entre el primero y segundo término de cada miembro, y dos puntos entre ambos miembros, en esta forma $3.5:4.6$, se ha llamado arbitrariamente *proporcion aritmética*, y en el dia se nombra *proporcion por equidiferencia.* La diferencia, como aqui 2, se llama tambien *razon.* Esta diferencia, indicada por las dos primeras

cantidades, como 3 . 5, se dice *primera razon*, y en las otras dos cantidades, como 4 . 6, *segunda razon*. El primer número de cada razon, como 3 y 4, se llama su *antecedente* y el segundo, como 5 y 6, su *consecuente*. Para mayor claridad cotejarémos el lenguage de la ecuacion con el de la proporcion:

En la Ecuacion.	*En la Proporcion.*
Diferencia.	Diferencia ó razon.
Primer miembro. . . .	Primera razon indicada.
Segundo miembro. . .	Segunda razon indicada.
Primer término del primer miembro.	Antecedente de la primera razon, ó primer antecedente.
Segundo término del primer miembro.	Consecuente de la primera razon, ó primer consecuente.
Primer término del segundo miembro.	Antecedente de la segunda razon, ó segundo antecedente.
Segundo término del segundo miembro.	Consecuente de la segunda razon, ó segundo consecuente.

212. Mediante á que en una ecuacion se pueden escribir en cada miembro los términos en el lugar que se quiera, la ecuacion $-3+5=-4+6$ se podra escribir $5-3=6-4$; lo que manifiesta que asi como $3 . 5 : 4 . 6$ es proporcion por equidiferencia, tambien lo es $5 . 3 : 6 . 4$; pero la primera va de menor á mayor, y la otra va de mayor á menor. Observemos que en esta variacion los antecedentes han pasado á consecuentes y los consecuentes á antecedentes.

213. Como es indiferente escribir $3 . 5 : 4 . 6$ ó $4 . 6 : 3 . 5$ es claro que la primera razon puede pasar á segunda, y la segunda á primera, llevando consigo la respectiva denominacion de su antecedente y su consecuente.

214. Una proporcion por equidiferencia se lee nombrando

el antecedente y el consecuente de cada razon, y espresando la clase de su relacion. Asi $9.13:6.10$ es pronuncia *9 es á 13 por equidiferencia como 6 á 10.*

215. Volviendo á una ecuacion de diferencia como $-5 \ldots \ldots +8=-4+7$, sacarémos, pasando las cantidades negativas al otro miembro, $4+8=5+7$; luego en la proporcion por equidiferencia $5.8:4.7$ la suma del primer consecuente y segundo antecedente es igual á la suma del primer antecedente y segundo consecuente; por lo que se dice, á causa de la colocacion de las cantidades, que la suma de los términos medios es igual á la de los estremos.

216. Como una ecuacion no muda de valor porque se ponga en uno de sus miembros una misma cantidad con signo negativo y signo positivo, se puede aumentar ó disminuir con una misma cantidad el antecedente y el consecuente de una razon de equidiferencia, sin que se altere el valor de la razon. Siendo $7.12:8.13$, será $(3+7).(3+12):8.13$, esto es $10.15:8.13$, y tambien $(7-3).(12-3):8.13$, esto es $4.9:8.13$; como se comprueba por la misma diferencia 5 de cada razon, y porque la suma de los medios es igual á la de los estremos, pues $15+8=10+13$, y $9+8=4+13$.

217. Ya será facil, conociendo tres términos de una proporcion por equidiferencia, hallar el otro, porque llamando x al término, que se busca, para llenar su hueco, tendremos por ejemplo $4.7:10.x$, de que resultará $4+x=7+10$ y $x=7+10-4=17-4=13$; ó teniendo $4.7:x.13$ sacarémos $7+x=13+4$ y $x=13+4-7=17-7=10$; quiere decir que para hallar un término estremo se suman los medios y se resta el otro estremo, y para hallar un termino medio se suman los estremos y se resta el otro medio.

218. Tengamos entendido que se pueden hacer con los

términos de una proporcion por equidiferencia todas las mutaciones de lugar que se quiera, con tal que resulte la suma de los medios igual á la de los estremos, pues con esta circunstancia habrá siempre proporcion.

219. Sucede á veces que el primer consecuente es igual al segundo antecedente como en $3.7:7.11$, y entonces se dice que la proporcion es *continua*. Para no repetir el mismo número en el centro se pone delante de la proporcion este signo $\div$, y escribiendola $\div 3.7.11$, se lee 3 *es á* 7 *por equidiferencia como* 7 *á* 11.

220. Mediante á que $3.7:7.11$ es lo mismo que $\div 3.7.11$, tendremos $11+3=7+7=2\times 7$; luego en una proporcion continua por equidiferencia la suma de los términos estremos es igual al duplo del medio. Buscando el valor de un estremo, esto es $\div 3.7.x$, sacarémos $x=2\times 7-3=14-3=11$, y si necesitamos el del término medio, esto es $\div 3.x.11$, tendremos $x=\frac{11+3}{2}=\frac{14}{2}=7$; quiere decir que para hallar un estremo se duplica el medio y se resta el otro estremo, y para hallar el medio se suman los estremos y se saca la mitad.

221. Como puede haber una ecuacion continuada de esta forma $-3+5=-5+7=-7+9=-9+11=-11+13=$&c. tambien podemos tener una proporcion continuada indefinidamente por equidiferencia, de este modo $\div 3.5.7.9.11.13.$ &c. en que cada término, escepto el primero y el último, es alternativamente consecuente y antecedente. Una proporcion continuada de esta manera se llama *progresion por equidiferencia*, y como va de menor á mayor, se dice que es *creciente*. Si la escribimos al contrario, esto es, de mayor á menor, como $\div 19.17.15.13.11.9.7.$ &c., será una *progresion por equidiferencia decreciente*.

222. Respecto á que en una progresion creciente de esta clase cada término, desde el segundo, es igual á su antecedente aumentado de la razon, cada término será igual al primero aumentado de la razon tomada tantas veces cuantos términos precedan. Asi, sabiendo que el primer termino es 3 y la razon 2, y buscando, por ejemplo, el sesto término, que llamarémos x, tendremos $x = 3 + 2 \times 5 = 13$. Si conocemos los términos estremos, y queremos intercalarles otros, es claro que restando el primero del último, quedará la razon tomada tantas veces cuantos términos preceden al último, y partiendo por este número de términos, sacarémos la razon con que formar los que se quieran interponer. Sea el primer término 5 y el último 20, y propongamonos intercalarles 4 términos, será la razon $x = \frac{20-5}{4+1} = \frac{15}{5} = 3$, y de consiguiente la progresion $\div 5.8.11.14.17.20$. Hemos puesto $4+1$ en el denominador, porque el número de términos que preceden es igual al de los que se quieren intercalar y uno mas.

Si la progresion fuere decreciente se considerará escrita al revés para la intercalacion.

223. Hemos llamado proporcion á la equidiferencia, y progresion á la continuacion ó série de ella, dando latitud al sentido de la palabra para acomodarnos al uso y facilitar la esplicacion; pero las verdaderas proporciones y progresiones son las que discutiremos en la leccion siguiente.

LECCION XX.

Continuacion de las Proporciones.

224. Hemos visto en la division [70] que el dividendo contiene al divisor tantas veces cuantas unidades tiene el

cociente; pero el cociente contiene á la unidad tantas veces cuantas unidades tiene; luego el dividendo contiene al divisor tantas veces cuantas el cociente contiene á la unidad. Por ejemplo $\frac{24}{8}=\frac{3}{1}$, lo que sabemos ya, asi porque todo número dividido por la unidad se da á si mismo por cociente, como porque dividiendo los dos términos del quebrado impropio $\frac{24}{8}$ por 8, tendremos $\frac{24:8}{8:8}=\frac{3}{1}=3$.

225. Si la ecuacion $\frac{24}{8}=\frac{3}{1}$ la escribimos así $24:8::3:1$, tendremos lo que antes se llamaba sin ninguna analogía *proporcion geométrica*, y en el dia se nombra *proporcion por cociente*. Las denominaciones de razon ó cociente, antecedente y consecuente, se usan del mismo modo que en la proporcion por equidiferencia [211]; pero á la razon se le llama tambien *esponente*. Bien se echa de ver que una proporcion por cociente es una ecuacion de dos quebrados propios ó impropios.

226. Como $\frac{4}{5}=\frac{12}{15}$, tendremos $4:5::12:15$, y se lee *4 es á 5 como 12 á 15* sin necesidad de decir *por cociente*.

227. Respecto á que $4=\frac{4\times5}{5}=\frac{3\times4\times5}{3\times5}=\frac{12\times5}{15}$, y que $4\times15=\frac{12\times5\times15}{15}=12\times5$, tendremos que en la proporcion $4:5::12:15$ el producto de los términos medios es igual al de los estremos, esto es, $5\times12=60$ y $4\times15=60$, lo que se verifica siempre que hay proporcion, y es la prueba de ella.

228. Todas las mutaciones de lugar, que se pueden hacer con los numeradores y denominadores en una ecuacion de dos quebrados, sin faltar la igualdad, se ejecutan con los términos de una proporcion sin que deje de haberla.

En $3:8::12:32$ podemos hacer estas variaciones.

$$3 : 12 :: 8 : 32,$$
$$32 : 12 :: 8 : 3,$$
$$32 : 8 :: 12 : 3,$$
$$8 : 3 :: 32 : 12,$$
$$8 : 32 :: 3 : 12,$$
$$12 : 3 :: 32 : 8,$$
$$12 : 32 :: 3 : 8,$$

sin que falte proporcion, aunque no es siempre la misma; pues el producto de los medios resulta igual al de los estremos.

229. Tambien podemos sumar ó restar á un tiempo mismo en cada razon indicada el antecedente y consecuente dejando en su estado uno de estos dos términos, sin que deje de haber proporcion, porque no se hace mas que aumentar ó disminuir proporcionalmente el cociente ó razon, subsistiendo la igualdad de los productos de medios y de estremos.

En $12 : 3 :: 32 : 8$,

será $12+3 : 3 :: 32+8 : 8$,

$12-3 : 3 :: 32-8 : 8$,

$12+3 : 12 :: 32+8 : 32$,

$12-3 : 12 :: 32-8 : 32$.

230. Asi mismo la suma de los antecedentes será á la de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente, y como la diferencia de los antecedentes á la de los consecuentes.

En $12 : 32 :: 3 : 8$ harémos $12 : 3 :: 32 : 8$

De $12+3 : 3 :: 32+8 : 8$ sacarémos $12+3 : 32+8 :: 3 : 8$,

De $12-3 : 3 :: 32-8 : 8$ sacarémos $12-3 : 32-8 :: 3 : 8$;

luego $12+3 : 32+8 :: 3 : 8 :: 12-3 : 32-8$.

231. No se altera una proporcion porque se multipliquen ó dividan sus cuatro términos ó los dos de una razon por una misma cantidad, porque subsiste la misma razon entre los productos ó cocientes, al modo que no muda de

valor un quebrado cuando se multiplica ó parte su numerador y su denominador por un mismo número.

232. Cuando se multiplican ó dividen dos proporciones ordenadamente, esto es, los respectivos antecedentes entre si, y lo mismo los consecuentes, resulta por la multiplicacion una *razon compuesta* del producto de las dos razones componentes, y por la division una razon formada del cociente de las otras; porque una razon indicada es un cociente figurado. Si multiplico ordenadamente $8:4::6:3$ por $9:3::15:5$ tendré $8\times9:4\times3::6\times15:3\times5$, esto es, $72:12::90:15$, cuya razon 6 es el producto de 2 por 3, razones de las proporciones multiplicadas. Lo mismo se probaria respecto á la division. Cuando las razones son iguales la razon compuesta es un cuadrado, y se llama razon *duplicada*: si son tres las proporciones, la razon compuesta es el cubo de una de las componentes y se llama *triplicada*, y asi sucesivamente *cuatriplicada* &c.

233. Simplificanse las razones como los quebrados, partiendo ambos términos por un mismo divisor ecsacto cuando lo hay.

234. Por la propiedad esencial á toda proporcion será fácil, conociendo tres de sus términos, hallar el otro, pues de $4:12::5:x$ sacarémos $4x=12\times5=60$,

$$\frac{4x}{4}=\frac{60}{4}, \text{ ó bien } x=15;$$

y de $4:x::5:15$ deduciremos $5x=15\times4=60$,

$$x=\frac{60}{5}=12;$$ resultando en ambos casos la proporcion $4:12::5:15$. En general, para hallar un estremo se multiplican los medios, y se parte por el otro estremo; y para hallar un medio se multiplican los estremos y se parte por el otro medio.

235. Advertimos que si en una proporcion se busca la

razon, que llamamos *directa*, dividiendo el antecedente por el consecuente, la division del consecuente por el antecedente se llama *razon inversa*; pero si se busca la *directa* partiendo el consecuente por el antecedente, la division del antecedente por el consecuente será la *razon inversa*.

En $12:3::8:2$, si $\frac{12}{3}=\frac{8}{2}=4$ es la razon *directa*, será $\frac{3}{12}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ la razon *inversa*;
y reciprocamente si $\frac{3}{12}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ es la razon *directa*, será $\frac{12}{3}=\frac{8}{2}=4$ la razon *inversa*.

236. Cuando en una proporcion el primer consecuente es igual al segundo antecedente se omite la repeticion de términos medios, escribiendo con este signo $\div$ la proporcion *continua*, como $\div 9:27:81$, que se lee 9 *es á* 27 *como* 27 *á* 81. Aqui se echa de ver que $9\times81=27\times27\ldots\ldots=\overline{27}^2$, esto es, el producto de los estremos igual al cuadrado de los medios. Buscando el valor de un estremo tendremos $\div 9:27:x=\frac{\overline{27}^2}{9}=81$, y para sacar de $\div 9:x:81$ el valor del medio, será $x=\sqrt{81\times9}=\sqrt{729}=27$; quiere decir que para hallar un estremo de una proporcion continua se cuadra el medio y se parte por el otro estremo, y para hallar el medio se multiplican los estremos y de su producto se saca la raiz cuadrada. Esta doctrina es la de una ecuacion de dos quebrados en que el denominador del primero fuese igual al numerador del segundo, como $\frac{9}{27}=\frac{27}{81}$.

237. Si formamos por este órden una série de quebrados, como $\frac{2}{6}=\frac{6}{18}=\frac{18}{54}=\frac{54}{162}=\frac{162}{486}=\frac{486}{1458}=$&c. tendremos la *progresion por cociente* $\div 2:6:18:54:162:486:1458:$&c. en que cada término, escepto el primero y el último, es alternativamente consecuente y antecedente. Como va de menor á mayor se dice que es *creciente* ó *ascendente*; pero

una progresion como $\div 96 : 48 : 24 : 12 : 6 :$ &c. que va de mayor á menor, se llama *decreciente* ó *descendente*.

238. Presentemos analíticamente una progresion ascendente, por ejemplo, $\div 3 : 3\times 2 : 3\times 2\times 2 : 3\times 2\times 2\times 2 : 3\times 2\times 2\times 2\times 2 \ldots$ $\ldots : 3\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 :$ &c., esto es, $\div 3 : 3\times 2 : 3\times 2^2 : 3\times 2^3 \ldots$ $\ldots : 3\times 2^4 : 3\times 2^5 :$ &c., cuya razon es 2, y veremos que cada término es igual al primero multiplicado por la razon elevada á una potencia de grado igual al número de términos que preceden; luego si entre dos términos de una progresion ascendente queremos intercalar otros, dividiremos el último por el primero, y del cociente sacarémos la raiz del órden indicado por el número de términos que preceden al último, esto es, por el número de términos que se quieren intercalar mas uno, con lo que tendremos la razon para formar sucesivamente los términos, que se han de interpolar. Si entre 3 y 24 quiero poner dos términos, sacaré la razon así $x = \sqrt[2+1]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$, luego $\div 3 : 3\times 2 : 3\times 2^2 : 24$, ó bien $\div 3 : 6 : 12 : 24$.

Si la progresion es descendente se considerará al revés para hacer la intercalacion.

239. Observemos que en una progresion ascendente la suma de todos los términos menos el primero, esto es, de todos los consecuentes, es igual á la suma de todos los términos menos el último, esto es, de todos los antecedentes, multiplicada por la razon; porque cada consecuente se compone de su antecedente multiplicado por la misma razon. Asi en $\div 3 : 3\times 2 : 3\times 2^2 : 3\times 2^3 : 3\times 2^4 : 3\times 2^5$, tendremos

$$3\times 2 + 3\times 2^2 + 3\times 2^3 + 3\times 2^4 + 3\times 2^5 \ldots$$
$$\ldots = (3 + 3\times 2 + 3\times 2^2 + 3\times 2^3 + 3\times 2^4)2;$$

luego en una progresion ascendente la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente. Lo mismo se verifica en las progresiones descendentes.

240. Aunque en las proporciones se puede considerar el antecedente dividido por su consecuente ó este por su antecedente, segun se quiera, se considera en las progresiones ascendentes cada consecuente partido por su antecedente, y en las descendentes cada antecedente dividido por su consecuente.

241. Si cotejamos esta leccion con la antecedente veremos como las operaciones, que en la proporcion y progresion por equidiferencia se hacen sumando, restando, multiplicando y partiendo, se ejecutan respectivamente en la proporcion y progresion por cociente multiplicando, partiendo, elevando á potencias y estrayendo raices; lo que manifiesta la graduacion y analogía de la ciencia de las cantidades.

242. Todas las consecuencias, que hemos sacado de los ejemplos, asi en esta leccion como en la anterior, son generales, porque estan fundadas en la naturaleza de los números, y no limitadas á casos particulares.

LECCION XXI.

De la Regla de Tres.

243. El nombre de esta regla indica bastante que consiste en tener tres términos de una proporcion, con los cuales se pueda sacar el otro [234].

Para no convertir los números concretos en abstractos compararémos en cada razon los dos términos ó cantidades de una misma especie.

Cuando la proporcion no está combinada con datos de tiempo ú otras circunstancias la regla de tres es *simple.*

Siempre que la segunda razon se presenta en el mismo órden que la primera, esto es, de menor á mayor ó de mayor á menor como ella, se dice que la regla de tres es *directa.*

244. Ya podemos resolver [234] con la regla de tres directa las siguientes cuestiones:

1ª Una pieza de paño con 13 varas me ha costado 130 pesos ¿cuanto me costaria otra del mismo paño con 18 varas?

Es claro que, dividiendo el valor de la primera pieza por el número de sus varas, tendré el precio de una vara, esto es, $\frac{130}{13}$ Pe. $=10$ Pe., y que multiplicando este precio por el número de varas de la segunda pieza, tendré el valor de ella, esto es, 10 Pe. $\times 18 = 180$; pero, como los valores han de tener entre si la misma razon ó relacion que las varas de una pieza con las de otra, haré desde luego esta proporcion

$13\text{v.} : 18\text{v.} :: 130\,\text{Pe.} : x = \frac{130 \times 18}{13} = 180$ Pe. *valor de la segunda pieza.*

2ª Si 40 hombres hacen en cierto tiempo 268 varas de obra ¿cuanta obra haran 60 hombres en el mismo tiempo?

$$40^h : 60^h :: 268^v : x,$$

divido la primera razon [233] por 20 para simplificarla

$2 : 3 :: 268 : x = \frac{268 \times 3}{2} = 402$ v. *que haran los 60 hombres.*

3ª Un andarin, que va siempre á un mismo paso, ha caminado en 3 horas 5 leguas ¿cuanto andará en 11 horas?

$3^h : 11^h :: 5^l : x = \frac{5 \times 11}{3} = \frac{55}{3} = 18 + \frac{1}{3}$ leguas, *que caminaria el andarin en 11 horas.*

4ª ¿El mismo andarin en cuanto tiempo caminaria 22 leg.?

$5^l : 22^l :: 3^h : x = \frac{3 \times 22}{5} = \frac{66}{5} = 13 + \frac{1}{5}$ h. $= 13^h\, 12'$, esto es, *andaria las 22 leguas en 13 horas y 12 minutos.*

245. Cuando la segunda razon se presenta en un órden contrario á la primera, esto es, de mayor á menor si la primera es de menor á mayor, ó de menor á mayor si la primera es de mayor á menor, entonces la regla de tres resulta *inversa*, y es necesario cambiar de lugar los términos de la segunda razon, como en las cuestiones siguientes:

1ª 27 trabajadores hacen una obra como la que 15 de ellos han hecho en 18 dias ¿en cuanto tiempo la harán?

Es claro que la harán en menos tiempo; luego los dias están en razon inversa de los trabajadores y debemos plantear la cuestion así

$\overset{t}{15} : \overset{t}{27} :: \overset{d}{x} : \overset{d}{18}$,... $x = \frac{18 \times 15}{27} = 2 \times 5 = 10$ dias, *en que los 27 trabajadores haran la obra.*

Mejor sería poner estas cuestiones en ecuacion, pues el trabajo de los 15 hombres, que es la obra, está representado por 15×18; luego el trabajo de los 27, que tambien es la obra, estará representado por $27x$, y ambos resultados seran iguales, de consiguiente

$$27x = 15 \times 18,$$

$$x = \frac{15 \times 18}{27} = 10 \textit{ dias.}$$

2ª Un navío, que solo para 15 dias tiene bastimentos, ha de navegar 20 ¿á cuanto habrá de reducir su consumo diario?

No pudiendo tener los navegantes diariamente sus raciones completas, se habrá de buscar la parte diaria de ellas con que alcancen á los 20 dias, de consiguiente los consumos estarán en razon inversa de los dias, por lo que $15^d : 20^d :: x^c : 1^c$

$$20x = 15,$$

$$x = \tfrac{15}{20} = \tfrac{3}{4} \textit{ consumo diario.}$$

Desde luego se echa de ver que el consumo de 15 dias á racion completa es 15×1, y el de 20 dias á parte de racion es $20x$; pero, como en uno y otro caso se han de consumir los mismos víveres, tendremos

$$20x = 15, \ldots x = \tfrac{15}{20} = \tfrac{3}{4} \text{ de } \textit{racion ó consumo.}$$

3ª En una plaza sitiada hay 800 soldados con víveres para 2 meses ¿cuantos soldados han de salir de ella para que los víveres duren 5 meses?

Busco primero los soldados que han de quedar.

Para que los viveres duren mas tiempo, los consumidores han de ser menos; luego la regla de tres es inversa.

Por proporcion $2^m : 5^m :: x^s : 800^s$,

Por ecuacion $5x = 800 \times 2 = 1600$;

De una y otra saco $x = \frac{1600}{5} = 320$ soldad. que han de quedar.

$800 - 320 = 480$ *soldados que han de salir de la plaza.*

4ª Si 4 cuartos de pan candial han de pesar 8 onzas cuando el trigo está á 56 rs. la fanega ¿cuanto pesarán estando el trigo á 44?

Mientras mas barato esté el trigo mas cantidad de pan se dará por el mismo dinero; luego

$$56^{rs.} : 44^{rs.} :: x^{onz.} : 8^{onz.},$$

$$11 : 14 :: 8 : x = \frac{14 \times 8}{11} = 10 + \tfrac{2}{11} \ onz.$$

5ª ¿Cuantas varas de coton de 1 y $\frac{1}{4}$ vara de ancho se necesitan para colgar un lienzo de pared, que tiene 3 y $\frac{1}{2}$ varas de ancho y 10 de largo?

Todo lo que el género tenga de menos ancho que la pared, se habrá de compensar con su largo.

$$\tfrac{7}{2} : \tfrac{5}{4} :: x : 10,$$

y reduciendo los quebrados á igual denominacion, y suprimiendo los denominadores, $28 : 10 :: x : 10$,

$$x = \frac{28 \times 10}{10} = 28 \text{ varas de coton.}$$

246. Siempre que la regla de tres está combinada con datos de tiempo ú otras circunstancias se llama *compuesta*, como en estas cuestiones:

1ª Si 30 hombres hacen 132 varas de obra en 18 dias ¿cuanta obra harán 54 hombres en 28 dias?

Busco primero las varas de obra, que harian los 54 hombres en el mismo tiempo,

$30^h : 54^h :: 132^v : x = \frac{132 \times 54}{30} = 237{,}6$ varas, que harian los 54 hombres en 18 dias:

Ahora voy á ver cuanta obra haran los mismos hombres en 28 dias, $18^d : 28^d :: 237{,}6^v : x = \frac{237{,}6 \times 28}{18} = 369{,}6$ varas, *que los 54 hombres haran en 28 dias.*

Mas sencillo seria hacerse cargo de que el trabajo de 30 hombres en 18 dias, esto es, $30 \times 18 = 540$ es lo mismo que el de un hombre en 540 dias ó 540 dias de trabajo, y que el de 54 hombres en 28 dias, esto es, $54 \times 28 = 1512$ es lo mismo que el de un hombre en 1512 dias ó 1512 dias de trabajo, por consiguiente

$$30 \times 18 : 54 \times 28 :: 132 : x = \frac{132 \times 54 \times 28}{30 \times 18} = \frac{132 \times 28}{10} = 369{,}6$$

como sacamos antes.

2ª Si el porte de 15 arrobas de peso á la distancia de 134 leguas cuesta 180 rs. ¿cuanto costará el de 22 arrobas á la distancia de 12 leguas pagando lo mismo por arroba?

Pudieramos sacar primero el porte de las 22 arrobas á la distancia de 134 leguas, y despues el porte de las mismas arrobas á distancia de 12 leguas; pero considerando que 15 arrobas en 134 leguas equivalen á 15×134 arrobas en 1 legua, y 22 arrobas en 12 leguas son lo mismo que 22×12 arrobas en 1 legua, preferimos la razon compuesta para hacer esta proporcion

$$15 \times 134^{l} : 22 \times 12^{l} :: 180^{rs.} : x$$

y simplificando $5 \times 67 : 11 \times 4 :: 180 : x = \dfrac{180 \times 11 \times 4}{5 \times 67} \ldots$

$\ldots = \dfrac{36 \times 11 \times 4}{67} = 23{,}64$ rs. $= 23$ rs. y 22 mrs. *porte de las 22 arrobas á distancia de 12 leguas.*

3.ª Si 100 pesos ganan 6 pesos de interés en un año ¿cuanto ganarán 300 pesos en 9 meses?

$$100 \times 12 : 300 \times 9 :: 6 : x,$$

Simplificando $4 : 9 :: 6 : x,$

ó mas bien $2 : 9 :: 3 : x = \dfrac{9 \times 3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5\, Pe.$

4.ª Un hombre, que camina 7 horas al dia, gasta 30 dias en andar 230 leguas ¿cuantos dias gastará en andar 600 leguas, caminando 10 horas al dia?

Saco los dias, que gastaria en andar las 600 leguas, caminando diariamente 7 horas:

$$230^{l} : 600^{l} :: 30^{d} : x = \frac{30 \times 60}{23} = 78{,}261^{d};$$

Ahora considero que, mientras mas horas ande, menos dias gastará; luego estos estan en razon inversa de aquellas, y

$7^{h} : 10^{h} :: x^{d} : 78{,}261^{d}, \ldots x = \dfrac{78{,}261 \times 7}{10} = 54{,}7826$ dias, *en que el hombre anduvo las 600 leguas*, caminando 10 horas al dia.

Pero, si consideramos que los dias son factores de las horas en que se anda el camino, advertiremos que en 7×30 horas se andan 230 leguas, y que en $10x$ horas se andarán 600 leguas; luego $230^{l} : 600^{l} :: 7\times30^{h} : 10x^{h}$,

y simplificando $23 : 60 :: 7\times3 : x=\frac{60\times21}{23}$ ...
$..=54,782$ &c. *dias*.

5ª Si 15 mulas consumen 6 fanegas de cebada en 8 dias ¿en cuantos consumiran 16 mulas 21 fanegas con el mismo pienso?

15 mulas en 8 dias comen lo mismo que 15×8 mulas en uno, 16 mulas en x dias comen lo mismo que $16x$ mulas en uno; Proporcion $15\times8^{m} : 16x^{m} :: 6^{f} : 21^{f}$,

$$x=\frac{21\times15\times8}{6\times16}=\frac{21\times5}{2\times2}=26,25 \text{ dias.}$$

6ª ¿Que capital dará en 8 meses 20 de ganancia á razon de 6 por 100 al año?

Saco la ganancia de 100 pesos en 8 meses, de este modo:

$$12^{m} : 8^{m} :: 6^{g} : x=\frac{6\times8}{12}=4;$$

Despues el capital, en esta forma

$4^{g} : 20^{g} :: 100^{c} : x$,

$1 : 5 :: 100 : x=100\times5=500$ *capital que se busca.*

7ª Un banquero descuenta á razon de 6 por 100 al año un pagaré de 800 pesos, que tiene 8 meses de plazo ¿qué cantidad debe entregar?

Como 8 meses son los $\frac{2}{3}$ del año, el interés será $\frac{2}{3}$ de $6=4$.

Si el banquero recibiera la cantidad deberia, al cabo de 8 meses, entregar 104 pesos por cada 100 recibidos; pero, como anticipa, hace la operacion contraria, y debe, por cada 104 pesos, que contenga el pagaré, entregar 100 efectivos.

Haremos, pues, esta proporcion entre capitales y líquidos

$104^{cap.} : 800^{cap.} :: 100^{liq.} : x^{liq.}=\frac{80000}{104}=769,23$ *que debe entregar el banquero.*

Esta cuestion se plantea, de una vez, en esta forma

$$100+\tfrac{2}{3}\times 6 : 800 :: 100 : x=\frac{800\times 100}{100+\tfrac{2}{3}\times 6}=\frac{80000}{104}=769{,}23.$$

8ª Si 9 hombres, trabajando diariamente 8 horas, han empleado 24 dias en abrir un foso de 65 varas de largo, 13 de ancho y 5 de profundidad ¿cuantos dias necesitarian 71 hombres, trabajando del mismo modo 11 horas al dia, para abrir un foso de 327 varas de largo, 18 de ancho y 7 de profuudidad?

Observemos:

1º Que 9 hombres, trabajando diariamente 8 horas durante 24 dias, es lo mismo que 9 hombres trabajando 8×24 horas.

2º Que 9 hombres, trabajando 8×24 horas, equivalen á $9\times 8\times 24$ hombres trabajando 1 hora, ó bien $9\times 8\times 24$ horas del trabajo de un hombre.

3.º Que asimismo 71 hombres, trabajando diariamente 11 horas durante x dias, equivalen á $71\times 11x$ trabajando 1 hora ó bien $71\times 11x$ horas del trabajo de un hombre.

4º Que la cabida de un foso se saca, como demostrarémos en otro lugar, multiplicando su largo por su ancho y por su profundidad, de modo que el primer foso tiene $65\times 13\times 5$ varas y el segundo $327\times 18\times 7$ varas. Estas varas se llaman cúbicas porque resultan de tres factores ó dimensiones, lo que esplicarémos tambien á su tiempo.

Ya se echa de ver que para resolver la cuestion hemos de comparar el número de hombres ó de horas de trabajo entre si, y las varas cúbicas de obra unas con otras de esta manera:

$$9\times 8\times 24^{h} : 71\times 11x^{h} :: 65\times 13\times 5^{v} : 327\times 18\times 7^{v},$$

$$x=\frac{9\times 8\times 24\times 327\times 18\times 7}{71\times 11\times 65\times 13\times 5}=21+\frac{1902831}{3299728}$$ *dias que se buscan.*

LECCION XXII.

De la Regla de Compañía.

247. El conjunto de varias reglas de tres forma la *regla de compañía*, porque esta consiste en comparar una cantidad con sus partes componentes, del mismo modo que otra cantidad con las suyas. Tal sucede en una sociedad mercantil, donde cada individuo pone su caudal para ganar ó perder proporcionalmente con los demas.

Cuando las puestas de todos permanecen el mismo tiempo en el fondo comun, la regla de compañía se llama *simple* ó *sin tiempo*.

248. De esta clase son las cuestiones siguientes:

1.ª Tres comerciantes hacen compañía: el primero pone 25000 pesos, el segundo 18000 y el tercero 42000: han ganado 57225 pesos. ¿Cuanto corresponde á cada uno?

Llamo x la ganancia del primero,
y la del segundo,
z la del tercero.

Considero que las tres puestas $25000+18000+42000\ldots$
$\ldots=85000$ pesos de capital.

Es claro que el capital ha de estar con la puesta de cada socio, como la ganancia total con la respectiva á cada uno.

Pero, á fin de hacer mas perceptible la planta de la cuestion, mudaré de lugar el primer consecuente y el segundo antecedente, comparando el capital con la ganancia, y la puesta de cada uno con su parte de ganancia, en esta forma:

$$85000 : 57225 :: \begin{cases} 25000 : x = \dfrac{57225 \times 25}{85} = 16830 + \frac{75}{85}; \\ 18000 : y = \dfrac{57225 \times 18}{85} = 12118 + \frac{20}{85}; \\ 42000 : z = \dfrac{57225 \times 42}{85} = 28275 + \frac{75}{85}. \end{cases}$$

$$\overline{57225}$$

2ª Tres comerciantes han cargado 248 pipas de vino en una embarcacion, que á causa de una tormenta ha tenido que echar al agua 93 pipas. El primero habia embarcado 98, el segundo 86 y el tercero 64.

¿Cuantas pierde cada uno?

$$248 : 93 :: \begin{cases} 98 : x = \dfrac{98 \times 93}{248} = 36 + \frac{3}{4} \text{ pérdida del primero.} \\ 86 : y = \dfrac{86 \times 93}{248} = 32 + \frac{1}{4} \text{ pérdida del segundo.} \\ 64 : z = \dfrac{64 \times 93}{248} = 24 \quad \text{pérdida del tercero.} \end{cases}$$

$$\overline{93} \quad \textit{pérdida total.}$$

249. Siempre que en la regla de compañía mediase tiempo, se habrá de tener presente esta circunstancia para multiplicar cada puesta por el tiempo de su permanencia, cuya operacion aumenta las puestas tanto como disminuye el tiempo, el cual queda reducido á su unidad, como lo veremos en estas cuestiones:

1ª Un hombre se pone á comerciar con 100 pesos, y tres meses despues se asocia con un amigo, que pone otros 100. Al cabo de 6 meses han ganado 21 pesos ¿qué parte de ganancia toca á cada uno?

Como el primero ha tenido pnestos sus 100 pesos durante 6 meses es lo mismo que si hubiera tenido 6×100 pesos un mes.

Y el segundo, que ha tenido puestos sus 100 pesos durante 3 meses, está en el mismo caso que si hubiera tenido 3×100 pesos un mes.

La cuestion se planteará así:

$$6\times 100+3\times 100 : 21 :: \begin{cases} 600 : x \\ 300 : y \end{cases}$$

$$\text{y simplificandola } 1 : 7 :: \begin{cases} 2 : x = 2\times 7 = 14 \textit{ gan. del prim.} \\ 1 : y = 1\times 7 = \underline{\ 7} \textit{ gan. del seg.} \end{cases}$$

$$21 \textit{ gan. total.}$$

2ª Tres mercaderes forman una compañía, poniendo el primero 65 pesos, que estan 8 meses en el fondo de ella: el segundo 78 pesos durante 12 meses; y el tercero 84 pesos por 6 meses. Las ganancias ascienden á 166 pesos ¿qué parte de ellas toca á cada compañero?

Las cantidades, que en un mes equivaldrian á las puestas de cada uno durante su tiempo, son respecto

del primero $65\times 8 = 520$ pesos,
del segundo $78\times 12 = 936$
del tercero $84\times 6 = \underline{504}$
Total 1960

$$1960 : 166 :: \begin{cases} 520 : x = \dfrac{520\times 166}{1960} = 44 + \frac{10}{245} \textit{ gan. del prim.} \\ 936 : y = \dfrac{936\times 166}{1960} = 79 + \frac{67}{245} \textit{ gan. del seg.} \\ 504 : z = \dfrac{504\times 166}{1960} = 42 + \frac{168}{245} \textit{ gan. del terc.} \end{cases}$$

(Pesos.)

$$166 \quad \textit{gan. total.}$$

LECCION XXIII.

De la Regla de Aligacion.

250. La investigacion de factores, cuando un producto es igual á la suma de otros productos, constituye la *regla de aligacion*. Se aplica generalmente á buscar el precio medio de varias cosas, sabiendose la cantidad y precio de cada una, y tambien á indagar la proporcion con que se han de mezclar las cosas, conociendose el precio de cada una y el precio medio de todas. Puede tener algunas otras aplicaciones.

251. Resolvamos las cuestiones en que se averigua el precio ó resultado medio:

1.ª Un mercader ha comprado varias especies de vinos, á saber:

130 botellas á 10 rs.
75 . . . . . á 15
231 . . . . . á 12
27 . . . . . á 20, los mezcla, y desea

saber á cómo le sale cada botella.

Buscarémos el número y el importe de todas las botellas:

130 botellas	á 10 rs.	importan	1300 rs.
75	á 15		1125
231	á 12		2772
27	á 20		540
463 botellas		importan	5737 rs.

Es claro que el *precio de cada botella de mezcla* será $\frac{5737}{463}=12,39$ rs.

De que resulta que multiplicar la cantidad de cada cosa por su precio, sumar estos productos, y dividir su suma por la de las cosas, es el modo de hallar el precio medio.

2ª Se ha medido la distancia, que hay entre dos puntos, y resulta

de la primera medicion, practicada 2 veces, 3794,48 v.
de la segunda 3 veces, 3795,27
de la tercera 1 vez, 3793,115.

Se desea un resultado medio para acercarse á la verdad.

Cada medida deberá figurar tantas veces cuantas se ha ejecutado; así por

la primera $3794{,}48 \times 2 = 7588{,}96$
la segunda $3795{,}27 \times 3 = 11385{,}81$
la tercera $3793{,}115 \times 1 = 3793{,}115$
6 mediciones dan 22767,885 v.

Como es natural que las equivocaciones cometidas al tiempo de medir hayan sido unas en mas y otras en menos, y que se compensen aprocsimadamente entre si, consideraremos la suma 22767,885 v. como el producto de seis mediciones, que se hubieran hallado siempre iguales, con lo que tendremos el valor de una en virtud de esta division

$\frac{22767{,}885}{6} = 3794{,}647$ *resultado medio ó medida aprocsimada.*

3ª ¿A cómo se ha de vender el marco de una mezcla hecha con 6 marcos de plata de á 200 rs. cada uno, y 12 marcos de á 144 rs. sin ganar ni perder?

Esta cuestion es lo mismo que la primera.

De consiguiente

$6 \times 200 = 1200;$
$12 \times 144 = 1728;$ $\frac{1200 + 1728}{6 + 12} = \frac{2928}{18} = 162 + \frac{2}{3}$ rs. *prec. medio.*

252. Las cuestiones, en que se trata de averiguar la proporcion con que se han de mezclar las cosas, son las siguientes:

1ª Un vinatero quiere mezclar vino de á 15 rs. la arroba con vino de á 8 para vender la mezcla á 12 rs. ¿qué porcion tomará de cada uno?

Observemos en este caso

1.º Que estas cantidades no seran únicamente determinadas, sino proporcionales entre si, pues no se ha fijado la cantidad de la mezcla.

2.º Que la menor cantidad de la cosa de superior precio se ha compensar con otra cantidad de la cosa de inferior precio.

En este concepto sentemos los precios de este modo

$$12 \ldots \begin{cases} 15 \\ 8 \end{cases}$$

Ahora busquemos el esceso, que el precio mayor lleva al medio, y pongamoslo á continuacion del inferior; y veamos la diferencia, que hay del precio inferior al medio, y pongamoslo en seguida del superior, en esta forma:

$$12 \ldots \begin{cases} 15 \ldots 4 \\ 8 \ldots \underline{3} \\ \quad\;\; 7 \end{cases}$$

El resultado me dice que el vinatero habia de tomar 4 arrobas del vino de á 15 rs. y 3 arrobas del de á 8 para componer 7 arrobas vendibles á 12 rs., lo que se comprueba porque $15\times4+8\times3=60+24=84=12\times7$.

Si se fijára la cantidad de vino mezclado se echa de ver, que habria proporcion entre totalidades y partes.

Queriendo, por ejemplo, tener 21 arrobas de mezcla haré esta proporcion

$$7 : 21 :: \begin{cases} 4 : x = \dfrac{21\times4}{7} = 12 \text{ arrobas de } \textit{primera clase.} \\ 3 : y = \dfrac{21\times3}{7} = \underline{\;9\;} \ldots \text{de } \textit{segunda.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 21 \text{ arrobas, } \textit{total.} \end{cases}$$

Si la mezcla se hace con mas de dos clases se compararán sucesivamente precio superior y precio inferior con el precio medio, como si los vinos son de á 15, de á 10 y de á 8, en cuyo caso tendremos

$$12\ldots\begin{cases}15\ldots 2+4=6 & \text{arrobas de } \textit{primera clase.}\\ 10\ldots\ldots\ldots 3 & \textit{segunda.}\\ 8\ldots\ldots\ldots 3 & \textit{tercera.}\end{cases}$$

$$\overline{12} \text{ arrobas, } \textit{total};$$

comprobandose en que $15\times6+10\times3+8\times3=144=12\times12$.

2ª Un panadero ha determinado hacer en un año de escasez pan con cebada, centeno y trigo para venderlo á 28 mrs. la libra. Tiene 8 celemines y medio de trigo, con los cuales haria pan de á 36 mrs. la libra. El pan de solo centeno le saldria á 18 mrs., y el de cebada á 9. ¿Qué porcion de centeno y cebada ha de mezclar con los 8 celemines y medio de trigo para sacar pan de 7 cuartos la libra?

$$28\ldots\begin{cases}36\ldots 10+19=29\\ 18\ldots\ldots\ldots\ldots 8\\ 9\ldots\ldots\ldots\ldots 8\end{cases}$$

Como no tiene mas que 8 y medio celemines de trigo no puede trabajar con las cantidades halladas; pero serviran para buscar las proporcionales:

$29 : 8+\frac{1}{2} :: 8 : x = \frac{(8+\frac{1}{2})8}{29} = \frac{68}{29} = 2+\frac{10}{29}$; de consiguiente *con los 8 y ½ celemines de trigo habia de mezclar 2 y $\frac{10}{29}$ de centeno y otros tantos de cebada.*

3ª Hay café de 10 rs. libra, otro de 7 y otro de 3 ¿Cómo se mezclarán para que salga una porcion de 64 libras á 8 rs.?

$$8\ldots\begin{cases}10\ldots 1+5=6\\ 7\ldots\ldots\ldots 2\\ 3\ldots\ldots\ldots 2\end{cases}$$

$$\overline{10}$$

$$10 : 64 \therefore \begin{cases} 6 : x = 38{,}4 & \text{libra de } \textit{primera clase} \\ 2 : y = 12{,}8 & \text{de } \textit{segunda} \\ 2 : z = 12{,}8 & \text{de } \textit{tercera.} \end{cases}$$

LECCION XXIV.

De la Regla de Falsa Posicion.

253. Si las suposiciones producen errores, tambien conducen á la verdad cuando están en proporcion con los datos. Asi sucede en la *regla de falsa posicion*, la cual supone un número para hallar, segun las circunstancias del caso, otro desconocido, como en las cuestiones siguientes:

1ª Hallar un número, cuya mitad, tercio y cuarto compongan 13. Sea 36 *suposicion.*

$$\tfrac{36}{2} + \tfrac{36}{3} + \tfrac{36}{4} = 18 + 12 + 9 = 39 \textit{ error.}$$
$$13 \textit{ dato.}$$

Hechos cargo de que las partes semejantes de dos números estan en proporcion con ellos, y que en una série de razones iguales la suma de antecedentes es á la de sus consecuentes como un antecedente á su consecuente [230], podemos formar una proporcion, porque 39 es la suma del $\frac{1}{2}$ el $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ del número supuesto 36, cuyas partes se considerarán como antecedentes, y 13 es la suma de las mismas partes alicuotas del número que se busca, las cuales se tomarán por los respectivos consecuentes. Por tanto

$$39 \textit{ error} : 13 \textit{ dato} :: 36 \textit{ suposicion} : x \textit{ verdad} = \frac{36 \times 13}{39} = 12.$$

Con efecto $\frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} = 6 + 4 + 3 = 13$.

Tambien se comprueba la doctrina, que acabamos de dar, porque $\frac{36}{2} : \frac{12}{2} :: \frac{36}{3} : \frac{12}{3} :: \frac{36}{4} : \frac{12}{4} :: 36 : 12$, de que resulta $\frac{36}{2} + \frac{36}{3} + \frac{36}{4} : \frac{12}{2} + \frac{12}{3} + \frac{12}{4} :: 36 : 12$,

$$ó \text{ bien } 18+12+9 : 6+4+3 :: 36 : 12,$$

$$\text{esto es } 39 : 13 :: 36 : 12.$$

2ª Tres negociantes han perdido 2400 pesos en una empresa, á que contribuyó el primero con una cantidad igual á la suma de las que pusieron los otros dos, y el segundo con doble cantidad que el tercero ¿Cómo se reparte la perdida proporcionalmente?

Supongo 3 *puesta del tercero*

$3\times2=6$ .... *segundo*

$3+6=9$ .... *primero.*

18 *Total.*

$$18 : 2400 :: \begin{cases} 9 : x = \dfrac{2400\times9}{18} = 1200 \text{ perd. del prim.} \\ 6 : y = \dfrac{2400\times6}{18} = 800 \text{ .... seg.} \\ 3 : z = \dfrac{2400\times3}{18} = 400 \text{ .... terc.} \end{cases}$$

Esta operacion se hubiera simplificado mucho, suponiendo que fuera 4 la puesta del tercero, porque entonces resultaria

$$1 : 100 :: \begin{cases} 12 : x = 100\times12 = 1200; \\ 8 : y = 100\times 8 = 800; \\ 4 : z = 100\times 4 = 400. \end{cases}$$

3ª Un caudal de 67250 pesos se ha de repartir entre tres herederos, de modo que la parte del segundo sea los $\frac{2}{5}$ de la del primero, y la del tercero los $\frac{7}{8}$ de la del segundo.

Supongo la parte del primero 1,

será la del segundo....... $\frac{2}{5}$,

y la del tercero.. $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{5} = \frac{7}{20}$;

$$\text{Reduzco á un comun denominador}\begin{cases} 1 = \frac{20}{20}; \\ \frac{2}{5} = \frac{8}{20}; \\ \frac{7}{20}; \end{cases}$$

cuyos numeradores 20, 8 y 7 estan en la misma razon que 1, $\frac{2}{5}$ y $\frac{7}{20}$; de consiguiente, siendo su suma $20+8+7=35$, tendremos las proporciones

$$35:67250::\begin{cases} 20:x = \dfrac{67250\times 4}{7} = 38428 + \frac{4}{7} \text{ her. del prim.} \\ 8:y = \dfrac{67250\times 8}{35} = 15371 + \frac{3}{7} \text{ her. del seg.} \\ 7:z = \dfrac{67250}{5} = 13450 \text{ her. del terc.} \end{cases}$$

Este ejemplo y el antecedente se convierten, despues de la suposicion, en reglas de compañía.

4ª Un estanque, que tiene dos caños, se llena con el primero en 2 horas y $\frac{1}{2}$, y con el segundo en 3 y $\frac{3}{4}$ horas. ¿En cuanto tiempo se llenará corriendo los dos caños á la vez?

Supongo que se necesita 1 hora.

$\frac{5}{2}^{h} : 1^{h} :: 1^{est.} : x = \frac{2}{5}$ del est. que llenaria el prim. caño en 1 hor.

$\frac{15}{4}^{h} : 1^{h} :: 1^{est.} : y = \frac{4}{15}$ del est. que llenaria el seg. caño en 1 hor.

Los dos caños juntos llenarian en 1 hora $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{6+4}{15} \dots$

$\dots = \frac{2}{3}$ del estanque; luego $\frac{2}{3}^{est.} : 1^{est.} :: 1^{h} : z = \frac{3}{2}^{h} =$ *hora y media.*

LECCION XXV.

De las Permutaciones y Combinaciones.

254. Los diferentes modos de colocar unas cosas ó cantidades respecto de otras se llaman *permutaciones.* Permutemos las letras del alfabeto:

Una letra *a* no puede ocupar mas que un lugar.

De dos letras a, b se puede poner la primera delante con la segunda detras, y la segunda delante con la primera detras, resultando dos disposiciones ab, ba, de modo que con dos letras se haran 1×2 permutaciones.

Teniendo tres letras, y habiendo hecho las dos permutaciones ab, ba de dos letras, podemos colocar la tercera c en cada una de estas dos disposiciones, poniendola delante, enmedio y detras, de que resultarán las 6 disposiciones

cab,	*cba*,
acb,	*bca*,
abc;	*bac*;

y tres letras ofreceran $1\times2\times3$ permutaciones.

Si tenemos cuatro letras, y hemos hecho las seis permutaciones de tres, podremos colocar la cuarta d en estas seis disposiciones, poniendola en cada una segun estan escritas, delante, entre la primera y segunda letra, entre la segunda y tercera y detras, resultando estas veinte y cuatro disposiciones:

dcab,	*dacb*,	*dabc*,	*dcba*,	*dbca*,	*dbac*,
cdab,	*adcb*,	*adbc*,	*cdba*,	*bdca*,	*bdac*,
cadb,	*acdb*,	*abdc*,	*cbda*,	*bcda*,	*badc*,
cabd;	*acbd*;	*abcd*;	*cbad*;	*bcad*;	*bacd*;

luego con cuatro letras tendremos $1\times2\times3\times4$ permutaciones.

Asimismo probariamos que con cinco letras se pueden hacer $1\times2\times3\times4\times5=120$ permutaciones.

Deduciremos de aqui que con un número de cosas ó cantidades se pueden hacer tantas permutaciones cuantas indique el producto formado por todos los factores, que desde la unidad pueda haber en números consecutivos hasta el número de cantidades ó cosas que se han de permutar.

255. Ecsaminemos el caso en que de las cosas ó canti-

dades, que se hayan de permutar, sean algunas iguales.

Cuando lo son dos, como $a=b$, resulta bb, que no ocupa mas que un lugar, esto es, $\frac{1\times 2}{2\times 1}=1$.

Si en tres cantidades a, b, c hay dos iguales, como $c=b$, se podran colocar de este modo abb, bab, bba, con lo que habrá tres disposiciones ó bien $\frac{1\times 2\times 3}{2\times 1}$ permutaciones.

Siendo de cuatro cantidades dos de ellas iguales, esto es, a, b, $c=d$, tendremos doce disposiciones, como

abcc, *bacc*, *ccab*, *ccba*,
acbc, *bcac*, *cacb*, *cbca*,
accb; *bcca*; *cabc*; *cbac*;

que son $\frac{1\times 2\times 3\times 4}{2\times 1}$ permutaciones.

Pero si de las cuatro cantidades son tres las iguales, como a, $b=c=d$, resultarán $abbb$, $babb$, $bbab$, $bbba$, cuyas cuatro disposiciones son $\frac{1\times 2\times 3\times 4}{3\times 2\times 1}$ permutaciones.

En el caso de haber seis cantidades que permutar, de las cuales dos fuesen iguales una con otra, y tres lo fueran tambien entre si, el resultado seria $\frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6}{3\times 2\times 1\times 2\times 1}$ permutaciones.

Inferiremos por inducion que, cuando haya varias cosas ó cantidades que permutar, de las cuales sean algunas iguales entre si, el número de las permutaciones se espresará por un quebrado, cuyo numerador será las permutaciones, que se harian con las mismas cosas, siendo todas desiguales, y su denominador el número de permutaciones, que se pudieran hacer con unas cosas iguales sino lo fueran, multiplicado por las permutaciones, que pudieran hacerse con las demas cosas iguales en caso de que fueran desiguales.

256. Los diversos modos de tomar muchas cantidades ó cosas de una en una, de dos en dos, ó de tantas en otras tantas, es lo que llamamos *combinaciones.*

Con 25 letras no se pueden formar mas que 25 palabras de una letra.

Como se puede, con una letra repetida, formar una palabra de dos letras, si combino la letra *a* con ella misma y con las demas, sacaré 25 palabras de dos letras, como *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *&c.* hasta 25 que empiezan por *a*, y con con la *b* formaré *ba*, *bb*, *bc*, *bd*, *&c.* hasta 25 que empiezan por *b*.

Tenemos 25×2 palabras, porque hemos hecho dos líneas principiando con *a*, *b*; pero, si formamos 25 líneas semejantes con las 25 letras, empezando cada una con distinta letra, tendremos $25\times 25 = 25^2 = 625$ palabras de dos letras.

Con las 25 letras hemos hecho ya 25 palabras de una letra y 25^2 palabras de dos, esto es, $25 + 25^2$ palabras.

Si en cada combinacion de las 625 de dos letras ponemos la *a* delante, tendremos $625\times 1 = 25^2\times 1$ palabras de tres letras, que comienzan por *a*; y si hacemos lo mismo con la *b*, tendremos, ademas, $625\times 1 = 25^2\times 1$ palabras de tres letras que empiezan por *b*, esto es, contando unas y otras, $25^2\times 2$ palabras de tres letras; luego con 25 letras se podran hacer $25^2\times 25 = 25^3$ palabras de tres letras.

Resultan en todo 25 palabras de una letra $+25^2$ de dos $+25^3$ de tres, y continuando asi, sacarémos $+25^4$ palab. de cuatro let. $+25^5$ de cinco $+25^6$ de seis $+$&c. hasta llegar á 25^{25} palabras de veinte y cinco letras; de modo que el número de todas las palabras, que se pueden hacer con 25 letras, se espresará por la suma de todos los términos de esta progresion $\div\!\!\div 25 : 25^2 : 25^3 : 25^4 : 25^5 : 25^6 \ldots\ldots 25^{25}$.

En general, el número de combinaciones ó palabras, que se pueden hacer con un número determinado de cosas ó letras, será la suma de todos los términos de una progresion, cuyo primer término, la razon y el número de términos sea cada uno igual al número de cosas ó letras.

257. En caso de que no se haya de combinar ninguna letra consigo misma, advertiremos que con las 25 se podran formar 25 palabras de una letra.

Como no se puede repetir ninguna letra en una misma combinacion tendremos, principiando

por *a*, las palabras *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, &c. hasta 24 de dos letras,
y por *b* . . . . *ba*, *bc*, *bd*, *be*, &c. hasta 24 de dos letras,

esto es, respecto de *a*, *b* habrá 24×2 palabras de dos letras; luego con 25 letras resultarán 24×25 palabras de dos letras sin que las haya iguales en una misma combinacion.

Tenemos ya 25 palabras de una letra $+ 25\times 24$ de dos $= 25 + 25\times 24$ palabras.

Para formar las palabras de tres letras repararémos que en la primera línea de combinacion de dos letras no se puede colocar la *a*, en la segunda no puede entrar la *b*, y por tanto en cada línea se habrá de omitir la nueva colocacion de su primera letra; luego las 25×24 palabras de dos letras se habran de tomar 23 veces para sacar la cantidad de $25\times 24\times 23$ palabras de tres letras.

Tenemos en todo 25 palab. de una let. $+ 25\times 24$ de dos $+ 25\times 24\times 23$ de tres $= 25 + 25\times 24 + 25\times 24\times 23$ palab.

De consiguiente, con las 25 letras, resultará el número de palabras $25 + 25\times 24 + 25\times 24\times 23 + 25\times 24\times 23\times 22 \ldots$ $\ldots + 25\times 24\times 23\times 22\times 21 +$ &c. hasta que en el último término sea la unidad el último factor.

En general, las combinaciones ó palabras, que se pueden hacer con un número de cosas ó letras, sin combinar ninguna de estas consigo misma, estan espresadas por la suma de una série, cuyo primer término es el número de cosas, el segundo este mismo número multiplicado por otro una unidad menor, el tercer término será el anterior multiplicado por un factor una unidad menor que el último factor del término antecedente, y continuando asi hasta el último término, cuyos factores empezarán por el número de cosas ó letras permutables, y se disminuiran sucesivamente de la unidad hasta concluir en ella.

Por tanto, con seis cosas haremos, sin unir ninguna consigo misma, este número de combinaciones

$$6+6\times5+6\times5\times4+6\times5\times4\times3+6\times5\times4\times3\times2\ldots$$
$$\ldots+6\times5\times4\times3\times2\times1.$$

258. Cuando, ademas de no combinarse ninguna letra consigo misma, se escluyan las permutaciones, sucederá que con 25 letras se podran hacer, como en todos casos, 25 palabras de una letra.

En las de dos hemos visto que en las líneas

ab, ac, ad, ae, af, &c.
ba, bc, bd, be, bf, &c.

hay las permutaciones *ab*, *ba*, y lo mismo sucede en toda combinacion de dos letras, cuyas combinaciones ó palabras ascienden á 25×24; luego, no admitiendose las permutaciones, resultarán $\frac{25\times24}{2}$ palabras de dos letras sin repetir ninguna letra.

Por la misma razon las combinaciones $25\times24\times23$ de tres letras se convertiran en $\frac{25\times24\times23}{2\times3}$ palabras de tres letras sin permutaciones, ni repeticion de la misma letra en ninguna combinacion.

Siendo las palabras ó combinaciones aqui sacadas

$$\frac{25}{1}+\frac{25\times24}{1\times2}+\frac{25\times24\times23}{1\times2\times3},$$

se deduce que, cuando no se admiten permutaciones, ni repeticion de la misma letra, se ha de poner á cada término de la série [257] un divisor, que se compone de tantos factores cuantos correspondan al lugar, que el mismo término ocupe en ella, siendo el primer factor la unidad, la cual se aumentará á cada uno.

LECCION XXVI.

Idea de los Logaritmos.

259. Los términos de una progresion por equidiferencia, que corresponden á otros de una progresion por cociente, forman sus *logaritmos*; pero se acostumbra, para mayor facilidad, que los términos de la equidiferencia sean los esponentes de los términos respectivos de la otra progresion.

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{Sea} \div & 1 & . & 2 & . & 3 & . & 4 & . & 5 & . & 6 & . & 7 & . & 8 & . & \&c. \\ \div\!\!\div & 2^1 & : & 2^2 & : & 2^3 & : & 2^4 & : & 2^5 & : & 2^6 & : & 2^7 & : & 2^8 & : & \&c. \\ & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| & & \| \\ & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 32 & & 64 & & 128 & & 256 & & \&c. \end{array}$$

en que se ve que los términos 1, 2, 3, 4, &c. de la equidiferencia son los esponentes de las potencias de un número, que aqui es 2; cuyos esponentes forman ordenadamente los *logaritmos* de ellas. Así $1=\text{Log}.\,2^1=\text{Log}.\,2$, ó bien $\text{Log}.\,2=1$; $\text{Log}.4=\text{Log}.2^2=2$, $\text{Log}.8=\text{Log}.2^3=3$, $\text{Log}.16=\text{Log}.2^4=4$, $\text{Log}.32=\text{Log}.2^5=5$, &c.

El número, cuyas potencias se espresan en la progresion, se llama *base logarítmica*. En este ejemplo 2 es la *base*.

260. Sirven los logaritmos para facilitar las operaciones de multiplicar, partir, elevar á potencias y estraer raices de de los números á que corresponden, segun el artificio de su formacion, porque si queremos, por ejemplo, multiplicar 8 por 4, buscarémos los logaritmos de ambas cantidades, los sumarémos, y la suma será el logaritmo del producto que se busca, esto es, $\text{Log.}\,8+\text{Log.}\,4=3+2=5=\text{Log.}\,32$.

261. Para dividir un número por otro se restará del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor, y la resta será el logaritmo del cociente.

$\text{Log.}\,64-\text{Log.}\,4=6-2=4=\text{Log.}\,16$; luego $\frac{64}{4}=16$.

262. Como la elevacion á potencias es una multiplicacion sucesiva de factores iguales, el logaritmo de una potencia será la suma de tantos logaritmos de su base ó raiz cuantas unidades tenga su grado, ó el producto de uno de estos logaritmos por el número del mismo grado. Asi para tener la cuarta potencia de 2 escribirémos

$\text{Log.}\,2+\text{Log.}\,2+\text{Log.}\,2+\text{Log.}\,2=4\text{Log.}\,2=4\times1=4=\text{Log.}\,16$, de consiguiente $2^4=16$.

263. Siendo la estraccion de raices una operacion inversa de la elevacion á potencias, sacarémos una raiz partiendo el logaritmo de la cantidad por el número que indique el órden de la raiz. Si buscamos la raiz cuarta de 256 tendremos $\frac{\text{Log.}\,256}{4}=\frac{8}{4}=2=\text{Log.}\,4$, lo que manifiesta que $\sqrt[4]{256}=4$.

264. Haremos una observacion muy importante, y es que si anteponemos un término á la série de equidiferencia será $1-1=0$, y si anteponemos otro á la progresion será $\frac{2}{2}=1$, luego en el sistema, que hemos propuesto, $\text{Log.}\,1=0$, por lo cual no hemos hecho mérito de este logaritmo.

Pero si hubieramos escojido otra equidiferencia, aunque fuese relativa á la misma progresion por cociente, como

$$\div 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 31 \cdot \&c.$$
$$\dot{\dot{\div}}\ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : \&c.$$

el logaritmo de la unidad seria 3, y entonces deberiamos considerar todo producto dividido por la unidad, ó como el resultado de una proporcion, cuyo primer término fuese 1, y los términos medios fueran los factores. Así para multiplicar 16 por 4, planteariamos $1 : 4 :: 16 : x = \frac{16 \times 4}{1}$, y valiendonos de los logaritmos tendriamos

Log. $16 +$ Log. $4 -$ Log. $1 = 19 + 11 - 3 = 27 =$ Log. 64, y por tanto $16 \times 4 = 64$.

265. En la division sabemos que el dividendo es al divisor, como el cociente á la unidad; luego si trato de dividir 64 por 16, diré $64 : 16 :: x : 1$, de que sale $x = \frac{64 \times 1}{16}$, y por logaritmos,

Log. $64 +$ Log. $1 -$ Log. $16 = 27 + 3 - 19 = 11 =$ Log. 4; luego $\frac{64}{16} = 4$.

Bien se echa de ver que asi debia resultar por hacerse la division con un procedimiento inverso al de la multiplicacion.

266. Para la elevacion á potencias consideraremos que hay tantas multiplicaciones menos una cuantas unidades tiene el grado de ellas, y que deberá haber tantas unidades divisoras de los productos cuantas multiplicaciones se hayan hecho.

Propongamonos elevar 2 á su quinta potencia en esta forma:

$$\dot{\dot{\div}}\ 1 : 2 : x = \frac{2^2}{1}, \quad 1 : \frac{2^2}{1} :: 2 : y = \frac{2^3}{1 \times 1},$$

$$1 : \frac{2^3}{1\times1} :: 2 : z = \frac{2^4}{1\times1\times1},$$

$$1 : \frac{2^4}{1\times1\times1} :: 2 : t = \frac{2^5}{1\times1\times1\times1} = 32.$$

Aplicando los logaritmos:

$5\,\text{Log.}\,2 - 4\,\text{Log.}\,1 = 5\times7 - 4\times3 = 35 - 12 = 23 = \text{Log.}\,32$; luego $2^5 = 32$.

267. Como la estraccion de raices es operacion inversa de la elevacion, se sacará una raiz añadiendo al logaritmo de la cantidad el de la unidad multiplicado por el número que indique el órden de la raiz menos uno, y dividiendo esta suma por el mismo número del órden radical; con lo que tendrémos el logaritmo de la raiz. Asi para $\sqrt[5]{32}$,

$$\frac{\text{Log.}\,32 + 4\,\text{Log.}\,1}{5} = \frac{23 + 4\times3}{5} = \tfrac{35}{5} = 7 = \text{Log.}\,2,$$

de consiguiente $\sqrt[5]{32} = 2$.

268. Con el fin de sacar toda la utilidad posible de los logarimos se han formado tablas de ellos, tomando para equidiferencia desde el cero y la unidad, y por base de la progresion la decena, de modo que

$$\div\ 0\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ \&c.$$

$$\div\!\div\ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \&c.$$

ó bien $\div\!\div\ 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : \&c.$, siendo los logaritmos los esponentes de las potencias de la base, en las cuales hay tantos ceros como unidades tienen sus esponentes, y tocando á la unidad el cero por esponente ó logaritmo para ahorro de operaciones.

269. Entre cada dos términos de la progresion se ha intercalado una multitud de términos, y otros tantos se han interpuesto entre cada dos términos de la equidiferencia,

procediendo por decimales. Luego se han tomado de los términos interpolados en la progresion los que se han acercado sin error apreciable á los números enteros, y á su lado se han puesto los términos correspondientes de los intercalados en la série de equidiferencia, para que sirvan de logaritmos. A las tablas acompaña regularmente una esplicacion de ellas, que no tiene cabida en esta leccion, donde nos limitamos á dar una idea del artificio, que constituye los logaritmos.

270. Si abrimos unas tablas comunes observarémos que los logaritmos estan formados por decimales. Sus enteros se llaman *característica* y sus partes decimales *mantisa*. La caracteristica tiene, por efecto del sistema, una unidad menos que cifras el número á que corresponde el logaritmo. Asi se ve que $\text{Log. } 5=0{,}6989700,$

$\text{Log. } 50=1{,}6989700,$

$\text{Log. } 5000=3{,}6989700.$

271. Para sacar el logaritmo de un quebrado, como este es una division indicada, se restarán entre si los logaritmos del numerador y del denominador, con lo que resultará un logaritmo negativo, que tambien se llama *defectivo*, el cual será el logaritmo que se busca. Por ejemplo, valiendonos de las tablas,

$$\text{Log.}\tfrac{3}{4}=\text{Log.}3-\text{Log.}4=0{,}477121-0{,}602060=-0{,}124939.$$

A fin de hallar la cantidad correspondiente en decimales se agrega á este logaritmo defectivo un número entero mayor que su caracteristica, con lo que resulta el logaritmo de la cantidad que se busca, multiplicada por un número compuesto de la unidad y tantos ceros cuantas unidades se hubiesen añadido al logaritmo defectivo. Entonces descartando á la cantidad sobre su derecha tantas cifras cuantos fueren los indicados ceros, se tendrá el cociente en partes decimales,

como aqui se demuestra: $\text{Log.}\frac{3}{4}=-0,124939$; $2-0,124939=1,875061$; que en las tablas
corresponde á Log. 75; y como 75 es 100 veces mayor que la cantidad investigada por haber añadido el número 2 al logaritmo defectivo, será $\frac{3}{4}=0,75$.

272. Cuando hay números mistos se reducen los enteros á la especie del quebrado para sacar el logaritmo, como en $\text{Log.}(8+\frac{3}{11})=\text{Log.}\frac{91}{11}=\text{Log.}91-\text{Log.}11=1,959041-1,041393=0,917648$.

LECCION XXVII.

De las Abreviaciones del Cálculo.

273. Cuando tenemos que multiplicar dos números de muchas cifras uno por otro, conviene formar desde luego los productos del multiplicando por cada una de las que tiene el multiplicador, lo que da ocasion á comprobar facilmente estos productos sumandolos entre si; y despues se colocan donde corresponde en la multiplicacion. Sea 2937487541×67431456;

2937487541 ×
1= 2937487541,
2= 5874975082,
3= 8812462623,
4=11749950164,
5=14687437705,
6=17624925246,
7=20562412787;

Por el 6 del multiplicador	17624925246
el 5	14687437705.
el 4	11749950164..
el 1	2937487541...
el 3	8812462623....
el 4	11749950164.....
el 7	20562412787......
el 6	17624925246.......
	198079061871489696 *producto.*

274. La division se reduce á meras sustracciones formando desde luego los productos del divisor por los números dígitos, y buscando el que mas se acerca á cada dividendo particular, como en este ejemplo $4539947812346 : 73809$;

$$73809\times\left\{\begin{array}{l}1=73809,\\2=147618,\\3=221427,\\4=295236,\\5=369045,\\6=442854,\\7=516663,\\8=590472,\\9=664281;\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r|l}
4539947812346 & 73809 \\ \cline{2-2}
\underline{442854} & 61509406+\frac{64892}{73809}. \\
111407 & \\
\underline{73809} & \\
375988 & \\
\underline{369045} & \\
694312 & \\
\underline{664281} & \\
300313 & \\
\underline{295236} & \\
507746 & \\
\underline{442854} & \\
64892 &
\end{array}$$

275. Las abreviaciones, que se pueden hacer en la multiplicacion y division de cantidades decimales, se han esplicado ya en otro lugar [158 y 162].

276. A veces conviene, para abreviar el cálculo, particularmente de los quebrados, buscar los divisores ecsactos de una cantidad, esto es, descomponerla en sus factores. Esta operacion se hace dividiendo, si se puede, la cantidad por 2, y lo mismo su mitad y la mitad de su

mitad &c. Cuando esto no es posible, se divide por 3, en su defecto por 5 y demas números primeros hasta que el último cociente es la unidad; con lo que se tendran los primeros factores, como se ve en el número 360.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

En la primera columna estan el número y sus partes ó cocientes, y en la segunda los divisores ecsactos, que son factores simples de la cantidad.

Los factores compuestos se sacan multiplicando entre si los factores simples, que siendo cada uno divisor ecsacto lo ha de ser su producto, que no puede esceder á la cantidad.

Son pues los factores compuestos

$2\times2=4$, $2\times2\times2=8$, $2\times3=6$, $2\times2\times3=12$, $2\times2\times2\times3=24$, $3\times3=9$, $2\times3\times3=18$, $2\times2\times3\times3=36$, $2\times2\times2\times3\times3=72$, $2\times5=10$, $3\times5=15$, $2\times2\times5=20$, $2\times3\times5=30$, $2\times2\times2\times5=40$, $3\times3\times5=45$, $2\times2\times3\times5=60$, $2\times3\times3\times5=90$, $2\times2\times2\times3\times5=120$, $2\times2\times3\times3\times5=180$, $2\times2\times2\times3\times3\times5=360$.

La operacion se presenta concluida en esta forma

360	2	
180	2	4.
90	2	8.
45	3	6. 12. 24.
15	3	9. 18. 36. 72.
5	5	10. 15. 20. 30. 40. 45. 60. 90. 120. 180. 360.
1		

estando en la tercera columna los factores compuestos, que son fáciles de sacar con multiplicaciones hechas á la vista.

277. Los quebrados continuos sirven tambien para abreviar los cálculos, como hemos podido observar en la LECCION XV.

278. Si un número cualquiera se resta de la unidad acompañada de tantos ceros cuantas cifras tenga el mismo número, la resta se llama su *complemento aritmético*.

En $1000-485=515$, este residuo 515 es el complemento aritmético del sustraendo 485.

Sácase facilísimamente el complemento aritmético, restando de 9 cada cifra del sustraendo desde la primera de la izquierda hasta la última significativa de la derecha, que se restará de 10. Esto se entiende desde luego descartando una decena del minuendo y la última cifra del sustraendo, como en este ejemplo:

$$\begin{array}{r} 1000=990+10 \\ \underline{485=480+\ 5} \\ 515=510+\ 5. \end{array}$$

El complemento aritmético transforma la sustraccion en adicion; pero deja delante del residuo una unidad del órden superior inmediato, la cual se tacha. Asi en $789-485$,

$$\begin{array}{lr} & \text{Con } 789 \\ \text{sumo el comp. aritm. de 485, que es} \ldots & \underline{515} \\ \text{Resultado} \ldots\ldots\ldots\ldots & \cancel{1}304. \end{array}$$

Ha debido resultar el esceso de un millar, porque la operacion ha sido $789-485+1000=789+515=1304$.

Si se trata de una reducion, como $789-523+467-25$, tendremos

$$\begin{array}{lr} & 789 \\ & 467 \\ \text{comp. aritm. de } 523 \ldots & 477 \\ \text{comp. aritm. de } 25 \ldots & \underline{75} \\ & \underline{1808} \\ & 708 \end{array}$$

rebajando un millar por el complemento aritmético de 523 y una centena por el de 25, con lo que resulta

$$789-523+467-25=708.$$

El complemento aritmético es utilísimo en el cálculo de los logaritmos, particularmente para cubrir los defectivos.

FIN DE LA IDEOLOGÍA DE LA ARITMÉTICA.

ÍNDICE.

ERRATAS.

Página.	*Línea.*	*Dice.*	*Léase.*
2......	6 y 7...	cualquier, número....	cualquier número,
84......	2	es...........................	se
118....	15.....	logarimos..............	logaritmos