IDEOLOGÍA MATEMÁTICA.

TERCERA PARTE.

IDEOLOGÍA DEL ÁLGEBRA.

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	Lease.
[illegible]	[illegible]	cualquier número...	cualquier número,
[illegible]	[illegible]	[illegible]	50

LECCIONES GRAMATICALES
DE
IDEOLOGÍA MATEMÁTICA.

POR DON FRANCISCO PEREZ DEL RIVERO,
Socio de número de la Real Sociedad Económica Gaditana, y Académico de honor de la Real Escuela de Nobles Artes de Cadiz.

Une science bien traitée n'est qu'une langue bien faite.
CONB. Lang. des Calc.

TERCERA PARTE.
IDEOLOGÍA DEL ÁLGEBRA.

CON LICENCIA.

CADIZ: Imprenta de D. JOSÉ MARÍA GUERRERO, *calle de S. José esquina á la del Sol, núm.* 155.

AÑO DE 1830.

ADVERTENCIA.

La noticia, que pudieramos dar de este tratado, se hallará en el prólogo que precede á toda la obra.

TABLA DE LOS SIGNOS.

Signos. }	*Objeto.*	{ *Pronunciacion.*
+	Adicion	Mas.
=	Igualdad	Igual á
—	Sustraccion.	Menos.
.	Multiplicacion.	Multiplicado por
×	Multiplicacion.	Multiplicado por
:	Division	Dividido por
,...	Consecuencia	De consiguiente.
>	Esceso	Mayor que
<	Diferencia	Menor que
√‾	Radical ó estraccion de raiz.	Raiz de
÷	Proporcion continua ó progresion por equidiferencia.	Por equidiferencia.
∺	Proporcion continua ó progresion por cociente.	Por cociente.
//	Disyuncion.	Ó bien.
},...	Comparacion y consecuencia.	Comparando resulta.
∞	Infinitamente grande.	Infinito.
∝	Infinitamente pequeño.	Infinitamente pequeño.
£	Logaritmo	Logaritmo.
C£	Complemento logarítmico	Complemento logarítmico.
£	Otro logaritmo	Logaritmo.
C£	Otro complemento logarítmico.	Complemento logarítmico.

TERCERA PARTE.

IDEOLOGÍA DEL ÁLGEBRA.

SECCION PRIMERA.

GRAMÁTICA DEL ÁLGEBRA
ó
REGLAS DEL CÁLCULO.

LECCION PRIMERA.

Del Lenguaje comun.

1. El arte de esplicarse con propiedad en una lengua se llama *Gramática.*

2. La gramática de las lenguas habladas consta de *Palabras*, *Sintacsis*, *Ortografía* y *Prosodia.*

3. Sabemos que las palabras son unos sonidos ó signos articulados, con que representamos nuestras ideas, las combinamos y las comunicamos á otros.

La gramática de nuestra lengua distingue las palabras en *articulos*, *nombres*, *pronombres*, *verbos*, *participios*, *adverbios*, *preposiciones*, *conjunciones* é *interjecciones.*

4. El articulo denota el género masculino, femenino ó neutro del nombre, y su número singular ó plural.

El nombre sirve para nombrar las cosas y calificarlas. Se divide principalmente en sustantivo y adjetivo. El sustantivo significa cualquiera sustancia ó cosa que pueda ecsistir por si misma, y el adjetivo espresa las cualidades de las cosas.

El pronombre se pone en lugar del nombre para evitar repeticiones. Los hay personales, demostrativos, posesivos y relativos.

El verbo dice la ecsistencia, accion y pasion de las cosas con personas, números, modos y tiempos. Se divide en sustantivo, activo, neutro y recíproco, segun su significacion.

El participio es un adjetivo, que participa del verbo en su formacion y significacion. Divídese en activo y pasivo. El activo denota accion, y el pasivo pasion.

El adverbio se junta al verbo para modificar y determinar su significacion. Los hay de lugar, tiempo y modo, que se subdividen en varias clases.

La preposicion se pone antes de otras dicciones para señalar el objeto á que se refiere la accion del verbo.

La conjuncion junta entre si las demas dicciones con los modos copulativo, disyuntivo, adversativo, condicional y causal.

La interjeccion espresa los afectos del ánimo con voces cortas.

5. Las modificaciones, que reciben el articulo, nombre y pronombre por sus relaciones de ecsistencia, pertenencia, atribucion, objeto, invocacion y materia ó instrumento, se llaman *declinaciones.* Estas se hacen, tanto en singular como en plural, por medio de las preposiciones. Comunmente se nombran casos de nominativo, genitivo, dativo, acusativo, vocativo y ablativo.

El verbo se declina por la inflecsion de sus terminaciones, segun los modos, tiempos y personas en singular y plural, lo que se llama *conjugacion.*

El participio sigue las reglas del nombre, declinandose como adjetivo.

El adverbio, preposicion, conjuncion é interjeccion son indeclinables ó invariables.

6. Aunque los Gramáticos hacen todas estas distinciones y otras muchas, el arte de hablar solo necesita cuatro especies de palabras para esplicar todos nuestros pensamientos, á saber: sustantivos, adjetivos, preposiciones y un solo verbo como *ser* ó *estar*. En rigor se pueden reducir á dos clases: palabras para espresar las ideas, y otras palabras para significar sus relaciones.

7. El enlace de palabras se llama *Frase*, y la espresion de un juicio se dice *Proposicion*.

8. La conveniente coordinacion de las dicciones para formar frases, y de las frases para hacer el razonamiento, se llama *Sintaesis* ó *Construccion*. Consiste en *Concordancia* y *Réjimen*. La concordancia entre las dicciones es de *género*, *número* y *caso*; y el réjimen es la *influencia*, que unas palabras tienen sobre otras.

9. El oficio y uso de las letras, y los acentos, puntos y comas constituyen la *Ortografía*. Sus reglas son la pronunciacion, uso constante y orijen.

En las clausulas ó periodos se pone coma para dividir las oraciones ó miembros mas pequeños, punto y coma antes de un miembro principal que modifica al que le precede, dos puntos entre los miembros principales en que no está concluido el sentido que esplicamos, y un punto al fin de los periodos en que termina el sentido que se esplica.

Las interrogaciones, admiraciones, acentos y paréntesis son bien conocidos.

10. El sonido propio y verdadera pronunciacion de las letras, sílabas y palabras forman la *Presodia*.

11. Segun este lijero bosquejo toda Gramática viene á ser un sistema de signos, que representa el sistema de nuestras ideas, cuando las combinamos ó queremos comunicarlas á otros. Tal sucede á las REGLAS DEL CÁLCULO, que vamos á discutir en las lecciones siguientes.

LECCION II.

De los Símbolos algebraicos.

12. Las notas, que espresan valor, se llaman *caractéres*, y se distinguen en *generales* y *particulares*. Los números son caractéres particulares, porque espresan un valor determinado, prescindiendo de la especie de unidades que representan; pero no son caractéres los *signos*, que hemos usado en la aritmética, ni otros cualesquiera que solo sirvan para denotar las modificaciones y relaciones de las cantidades. Tanto los caractéres como los signos se comprenden bajo el nombre comun de *símbolos*.

13. Asi como la Aritmética calcula con carácteres particulares, cuales son los números, hay otra ciencia, que calcula siempre en abstracto, sirviendose de las letras del alfabeto como caractéres generales, y esta ciencia se llama *Álgebra*. Ordinariamente se destinan las primeras letras del abecedario para representar los *datos* ó cantidades conocidas de un problema, y las últimas para denotar sus *incognitas* ó cantidades desconocidas; pero nosotros usarémos á veces de las iniciales mayusculas de las incognitas ó cosas que buscamos. Tambien se hace uso del alfabeto griego y de otros en el cálculo algebraico.

14. En las cantidades literales ó espresadas por letras hay que atender á su *sentido*, su *caracter*, su *coleccion* y su *grado*:

15. El *sentido* se espresa con los signos de + ó —, que

preceden á la cantidad, é indican si es positiva ó negativa.

16. El *caracter* se denota con una letra de cualquier alfabeto, la cual representa una sola de las cantidades del mismo valor ó una unidad en abstracto.

17. La *coleccion* se espresa con los *coeficientes*, que manifiestan las veces, que se ha tomado una cantidad sumandolá ó restandola consigo misma, esto es, reduciendo el número de veces que está tomada. Sabemos [II 206] que el número antepuesto á una cantidad para multiplicarla es su *coeficiente*, esto es, su *co-factor* ó *factor* juntamente con otro, y que toda cantidad sin coeficiente espreso tiene por tal la unidad, porque ecsiste una vez, de modo que $a = 1 \times a = 1a$, $b = 1b$.

18. El *grado* se indica con los *esponentes*, que señalan las veces, que está tomada una letra como factor consigo misma para sacar el producto correspondiente. Ya hemos visto [II 184] que cualquiera cantidad, ecsistiendo en si misma, está en su primera potencia, lo que se puede espresar con la unidad encima como esponente de su grado: así $a = a^1$, $c = c^1$.

19. Resulta, pues, de los dos articulos antecedentes que toda cantidad se debe considerar con la unidad por *coeficiente* y por *esponente*, aunque no los tenga señalados, de manera que $a = 1a^1$, $b = 1b^1$, $c = 1c^1$.

20. Cuando caractéres iguales estan elevados al mismo grado ó tienen el mismo esponente, se dice que espresan cantidades *semejantes*, aunque esten en distinto sentido y sean mayores ó menores sus colecciones, esto es, aunque los unos sean positivos y los otros negativos, y los coeficientes sean distintos: así a y $-a$, b y $3b$, $-m$ y $4m$, $3c^2$ y $-5c^2$, $-7pr$ y $2pr$ son cantidades semejantes; pero no lo son a y a^2 ni $2b^3$ y $-4b^7$, porque tienen distintos esponentes.

21. Los mismos signos, que hemos usado en la ARITMÉTICA para indicar las relaciones de las cantidades entre si, sirven tambien en el ÁLGEBRA para el mismo fin. Ademas se usan otros signos, que esplicarémos en su lugar.

22. Cada cantidad de las que se hallen ligadas con los signos de mas y menos, se llama *término*, aunque esté multiplicada ó dividida por otra. Un término solo es un *monómio*, dos términos ligados forman un *binómio*, tres un *trinómio* y asi respectivamente, y cuando son muchos se dice un *polinómio*. $3a^2b^5$ es un *monómio*, a^4-b^5 un *binómio*, $7a^5+8c^4-7a^3+5x^3-2mr$ un *polinómio*.

23. Siguiendo la comparacion, que nos hemos propuesto, del cálculo con el raciocinio, vemos que los *caractéres*, formando términos, son como los nombres, que establecen [6] las gramáticas de las lenguas para espresar las ideas de las cosas, y que los *signos* son como aquellas palabras, que solo sirven para modificar y enlazar las ideas y conceptos en el discurso. Recordemos que ya hemos comparado [II 51] un término á una palabra, un binómio ó un trinómio á una frase y un polinómio á una composicion de frases.

24. Como el álgebra considera las cantidades en general ó con independencia de toda magnitud numérica y de todo sistema de numeracion, nada concluye por si misma, y hay que atribuir, para las aplicaciones del cálculo, un valor numérico á cada caracter literal, cuyo valor, pudiendo ser diferente en cada aplicacion, no puede variar dentro de ella misma.

LECCION III.

De las Ecuaciones.

25. La base del álgebra son las *ecuaciones*, las cuales

forman la balanza del entendimiento para pesar la igualdad de diferentes cantidades en el cálculo, como se gradua la concordancia de conceptos bajo diversas formas en el discurso.

26. Recordando cuanto hemos dicho sobre este particular en la LECCION IV de la ARITMÉTICA, y estendiendo algo mas las ideas, haremos las observaciones siguientes:

1ª Una *ecuacion* es la igualacion de dos ó mas cantidades, sean numéricas ó literales, como $3+7=6+4$, $a=c$, $3b=5f$, $2x+a-3c=b+d$.

2ª Toda ecuacion se compone esencialmente de dos miembros, como una balanza tiene siempre dos brazos, siendo el primer miembro la cantidad ó cantidades, que estan á la izquierda del signo de igualdad, y el segundo la cantidad ó cantidades, que estan á su derecha; pero usamos de miembros intermedios [II 50] como ausiliares ó *indicativos* de las operaciones, que resultan ejecutadas en los miembros esenciales, que llamamos *significativos.*

3ª Ya hemos dicho [22] que cada una de las cantidades separadas de las otras por los signos $+$ ó $-$ es un término, y hemos esplicado lo que entendemos por monómio, binómio, trinómio y polinómio.

4ª Cuando un término está precedido del signo $+$ se dice que es *positivo*, y si lo está del signo $-$ se llama *negativo.* Siempre que el primer término de un miembro es positivo, se omite ponerle delante el signo $+$; pero si es negativo, se necesita anteponerle el signo $-$.

Por cantidades negativas entendemos [II 46] las que se toman en sentido contrario á las positivas, de modo que, considerando estas como cantidades *directas*, hemos de mirar las otras como *inversas.*

5ª Siendo la ecuacion una balanza podemos aumentar ó disminuir á sus dos miembros una misma cantidad sin que falte la igualdad; así como podemos en una balanza puesta en caja añadir ó quitar á entrambos platos pesos iguales sin que falte el equilibrio. En la ecuacion $x - b + c = d$ podemos, por ejemplo, aumentar la cantidad b y disminuir la cantidad c en cada miembro sin que falte la igualdad, esto es, $x - b + c + b - c = d + b - c$, y destruyendose las cantidades iguales de signo contrario en el primer miembro, resulta $x = d + b - c$; luego, comparando la primera ecuacion $x - b + c = d$ con la que ha resultado $x = d + b - c$, vemos que se puede pasar cualquier término de un miembro al otro, poniendole signo contrario al que tenia, sin que falte la igualdad.

6ª Tambien se conserva la igualdad, aunque se multipliquen ó partan los dos miembros de una ecuacion por una misma cantidad, mediante á que en la multiplicacion seran los factores de un producto iguales á los del otro, y en la division seran los términos de la una iguales á los de la otra:

En la ecuacion $4x = 12a$,

tendremos $x = \frac{12a}{4} = 3a$; porque subsistirá la igualdad, quitando el coeficiente ó multiplicador 4 del primer miembro para hacerlo divisor del segundo, pues esto es dividir ambos miembros por una misma cantidad.

Y de la ecuacion $\frac{1}{5}z = 3b$,

sacarémos $z = 5 \times 3b = 15b$; resultando ecuacion, porque quitamos el divisor 5 de un miembro para que sea multiplicador del otro, lo cual es multiplicar ambos miembros por una misma cantidad.

7ª Trasladando términos de un miembro á otro con diferente signo, y multiplicando y dividiendo ambos miembros por el divisor y multiplicador de una incógnita, se consigue dejarla sola y sin coeficiente visible en un miembro; y cuando las cantidades, que estan en el otro, son conocidas, se dice que se ha *despejado* la incógnita, porque se la ha desembarazado de otras cantidades y descubierto su valor, lo que tambien se llama *resolver* la ecuacion.

27. Para fundar las ecuaciones nos hacemos perfectamente cargo del raciocinio, con que viene propuesto un problema, y lo convertimos, sino lo está, en la esposicion mas sencilla y clara: espresamos cada cantidad por un término ó por varios términos, que sustancialmente se reducen á uno solo; y enlazamos estos términos con los signos del mismo modo que lo estan las condiciones con las frases en la enunciacion del problema. Este procedimiento no es mas que la traducion del idioma comun al idioma del álgebra. Tambien puede mirarse como regla bastante general la de indicar con los signos algebráicos sobre las cantidades conocidas, espresadas por números ó por letras, y sobre las cantidades desconocidas representadas siempre por letras, los mismos raciocinios y las mismas operaciones, que se ejecutarian para comprobar los valores de las incógnitas si fuesen conocidos.

Si quiero *descomponer un número en dos partes, de modo que la mayor lleve á la menor 5 de esceso*; conceb iré y traduciré la cuestion así:

Una parte, que será la menor x

Otra parte, que será la mayor, y consistirá en la menor y 5 mas . . . . $x+5$

Compondran el número. . . . . . $2x+5$.

Este número supongo que sea 9; pero ya está espresado por $2x+5$;

luego $2x+5=9$,
trasladando $2x=9-5=4$,
dividiendo $x=\frac{4}{2}=2$ parte menor.

Como la parte mayor escede á la menor en 5 ó es $x+5$,
tendremos $x+5=2+5=7$ parte mayor.

La comprobacion $7+2=9$ y $7-2=5$ manifiesta que las partes componen el número propuesto, y que la mayor lleva á la menor el esceso dado.

28. Podemos hacer que los problemas ó cuestiones sean generales, espresando los datos ó cantidades conocidas por letras. Asi podemos generalizar el problema anterior, diciendo:

Descomponer un número a *en dos partes, de modo que la mayor lleve á la menor un esceso* b:

Tendremos $x+x+b=a$,

$$2x=a-b,$$

$$x=\frac{a-b}{2};$$

Esta espresion $x=\frac{a-b}{2}$ se llama *fórmula*, porque conserva una forma constante, en cuyos caractéres se pueden sustituir los valores numéricos de esta manera:

$$x=\frac{a-b}{2},$$

$$\left.\begin{matrix} a=9 \\ b=5 \end{matrix}\right\}, \ldots\ x=\frac{9-5}{2}=\frac{4}{2}=2.$$

Si el número propuesto fuera, por ejemplo, 10, y el esceso de la parte mayor á la menor fuera 4, tendriamos

$$x=\frac{a-b}{2},$$

$$\left.\begin{matrix} a=10 \\ b=4 \end{matrix}\right\}, \ldots\ x=\frac{10-4}{2}=3, \text{ parte menor;}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ x+4=3+4=7 \text{ parte mayor.}$$

29. Para hacer las sustituciones acostumbramos indicar los valores sobre la izquierda, como se ve en las operaciones anteriores, abrazandolos, cuando son varios, con un cor-

chete, y los conducimos con el signo de consecuencia debajo de la fórmula.

30. Las ecuaciones puestas en columna, que se deducen de otras anteriores con las modificaciones convenientes, las llamarémos *derivaciones*: $x=\frac{a-b}{2}$ es derivacion de $2x=a-b$, y $x+4=3+4=7$ lo es de $x=3$.

Acostumbramos señalar cada derivacion con una *coma*: las que terminan periodo de cálculo, con un *punto y coma*; y la final con un *punto* solo.

LECCION IV.

De la Adicion y Sustraccion de cantidades algebráicas.

31. Como los coeficientes no hacen mas que colectar [17] cantidades iguales, es claro que se sumarán estas y las semejantes [20] sumando ó reduciendo los coeficientes de ellas segun sus signos:

$$a+a+a=(1+1+1)a=3a\ ;\quad a+7a=(1+7)a=8a\ ;$$
$$2b+\tfrac{3}{4}b=(2+\tfrac{3}{4})b=\tfrac{11}{4}b\ ;\quad ab+ba=(1+1)ab=2ab\ ;$$
$$acb+abc+cab=abc+abc+abc=(1+1+1)abc=3abc.$$

La diferente colocacion de las letras unas respecto de otras, como en *ab*, *ba*, y en *acb*, *abc*, *cab*, no altera la espresion de su valor, al modo que en la Aritmética [II 65] no varía un producto por mudar de lugar sus factores.

32. Cuando las cantidades no son semejantes se indica su suma juntandolas con sus respectivos signos:

Para sumar a con b ponemos $a+b$;

a con $-b$ es $a-b$;

a con aa se escribe $a+aa$.

33. El modo de facilitar la adicion es poner las cantida-

des semejantes en columna, y las desemejantes sin ninguna debajo, como en estos ejemplos:

$$
\begin{array}{lllllll}
1^{\text{o}} & 3a & +b & +c & +5d & & \\
 & & 2b & & +6d & +e & \\
 & 4a & & +2c & & & +7f \\
\hline
\text{Suma....} & 7a & +3b & +3c & +11d & +e & +7f. \\
\hline
\end{array}
$$

Para mayor claridad disponemos los términos por el órden alfabético de sus letras:

$$
\begin{array}{llllll}
2^{\text{o}} & 4a & +9b & -2c & & \\
 & 2a & & -3c & +4d & \\
 & & 7b & +c & & -e \\
\hline
\text{Suma....} & 6a & +16b & -4c & +4d & -e. \\
\hline
\end{array}
$$

Aqui hemos sumado las cantidades positivas, tambien las negativas, y hecho la resta entre unas y otras [II 47] para tener la reducion.

$$
\begin{array}{rl}
3^{\text{o}}\ \text{Sumar} & 11bc+4ad-8ac+5cd \\
\text{con} & 8ac+7bc-2ad+4mn \\
\text{con} & 2cd-3ab+5ac+an \\
\text{y con} & 9an-2bc-2ad+5cd;
\end{array}
$$

Dispongo asi estos sumandos:

$$
\begin{array}{lllllll}
 & & -8ac & +4ad & & +11bc & +5cd \\
 & & +8ac & -2ad & & +7bc & & +4mn \\
 & -3ab & +5ac & & +an & & +2cd \\
 & & & -2ad & +9an & -2bc & +5cd \\
\hline
\text{Suma} & -3ab & +5ac & & +10an & +16bc & +12cd & +4mn. \\
\hline
\end{array}
$$

34. Como la sustraccion es la operacion inversa de la adicion resulta que para practicarla se deben mudar los signos al sustraendo y sumarlo con el minuendo:

De $5a$ restar $2a$ será $5a-2a=(5-2)a=3a$ residuo;

$4b+7c-4d-(2c+d)$ será $4b+7c-4d$

$$\begin{array}{r} 4b+7c-4d \\ -2c-d \\ \hline \text{Residuo } 4b+5c-5d. \end{array}$$

De a restar b será $a-b$;

De c restar cc será $c-cc$.

35. Si de a hemos de restar $b-c$ nos haremos cargo de que, quitando b de a, rebajamos una cantidad, que escede al sustraendo en la cantidad c; luego esta cantidad c se debe aumentar, despues de quitar b, para tener la verdadera resta, haciendo como dijimos en el articulo anterior: $a-(b-c)=a-b+c$; lo que es consiguiente á la naturaleza de las cantidades negativas, por estar en sentido contrario á las positivas.

36. Bien se habrá comprendido que, abrazando el sustraendo de varios términos con un paréntesis, le anteponemos el signo $-$ para indicar la mutacion de signos de todos sus términos, y asi propondremos los ejemplos de los polinómios siguientes:

1.º $17a+2m-9b-4c+23d-(51a-27b+11c-4d)$,

$$\begin{array}{r} 17a-9b-4c+23d+2m \\ -51a+27b-11c+4d \\ \hline \text{Resta}-34a+18b-15c+27d+2m. \end{array}$$

Vemos que en la reducion de cantidades semejantes positivas y negativas se resta la menor de la mayor, y al residuo se pone el signo de la mayor.

2.º $5ac-8ab+9bc-4am-(8am-2ab+11ac-7cd)$,

$$\begin{array}{l} -8ab+5ac-4am+9bc \\ +2ab-11ac-8am \qquad +7cd \\ \hline \end{array}$$

Resta $-6ab-6ac-12am+9bc+7cd$; disponiendo los términos por el órden alfabético de sus letras.

LECCION V.

De la Multiplicacion de cantidades algebráicas.

37. Para esplicar la multiplicacion algebráica empezarémos por las cantidades monómias. Se ejecuta escribiendo las letras del multiplicando juntamente con las del multiplicador, sin perjuicio de ordenarlas alfabeticamente.

$a\times a=aa$; $ab\times c=abc$; $acd\times ad=acdad=aacdd$;

Si hay coeficientes se multiplican entre si:

$3a\times a=3a\times 1a=3\times 1aa=3aa$; $4bc\times 2dc=4\times 2bcdc=8bccd$,

38. Hemos visto [II 184] que, cuando un número ó cantidad se multiplica una ó mas veces por si mismo, forma su respectiva potencia, la cual se indica por el esponente, que tiene tantas unidades como veces es factor el número, y se le coloca encima sobre la derecha, con lo que en las cantidades algebráicas se distingue bien del coeficiente. Así $aa=a^1a^1=a^{1+1}=a^2$; $bbbb=b^{1+1+1+1}=b^4$; de modo que en las multiplicaciones anteriores $acd\times ad=aacdd=a^2cd^2$; $4bc\times 2dc=4\times 2bc^{1+1}d=8bc^2d$; y $7b^4c^3d^5\times 5a^3b^2c^4=7\times 5a^3b^{4+2}c^{3+4}d^5=35a^3b^6c^7d^5$. Esto quiere decir que, habiendo las mismas letras en el multiplicando y en el multiplicador, se suman sus esponentes para formar el que ha de indicar en el producto el número de estas letras iguales, que son tantas cuantas hay en ambos factores.

39. Omitimos poner entre los coeficientes y las canti-

dades literales, y entre estas, el signo de la multiplicacion, porque lo mismo se entiende $3a$ que $3 \times a$, y ab que $a \cdot b$; aunque no puede hacerse esta supresion entre las cantidades numéricas, porque, dependiendo su valor de la colocacion de los números díjitos, resulta que 3×5, por ejemplo, serian 15; y 35 son $30+5$.

40. Cuando se multiplican cantidades positivas por cantidades positivas el producto es positivo; porque, siendo el efecto de la accion positiva la afirmacion, resulta que lo positivo, siendo afirmado, es positivo; así $a \times b = +a \times +b = ab$, esto es, $+ \times + = +$.

Si multiplícamos una cantidad negativa por una positiva tendremos un producto negativo, porque se afirma la negacion, ó se toma el multiplicando negativo, en su ser ó estado, tantas veces cuantas requiere el multiplicador afirmativo, esto es, $-a \times +b = -ab$, ó bien $- \times + = -$.

Multiplicando una cantidad positiva por otra negativa resulta un producto negativo, porque el efecto de la accion negativa es contrariar ó mudar en sentido inverso; luego $+a \times -b = -ab$, esto es, $+ \times - = -$.

Y si multiplicamos dos cantidades negativas una por otra darán un producto positivo, porque, produciendo la accion negativa del multiplicador un efecto inverso en el multiplicando, lo ha de repetir en el producto bajo un sentido contrario al que tenia como factor; por tanto $-a \times -b = +ab = ab$, es decir, $- \times - = +$.

El resultado de todo es que la multiplicacion de los mismos signos da un producto positivo, y la de signos diferentes da un producto negativo. Es conforme á la naturaleza de las ideas que la influencia reciproca de dos cantidades de un mismo sentido produzca un resultado positivo, y la de dos cantidades de sentido opuesto produzca un resultado negativo.

41. Como comparamos siempre el cálculo con el raciocinio considerarémos que, espresandose el signo positivo $+$ por la afirmacion *sí*, y el signo negativo $-$ por la negacion *no*, se halla que, segun reglas gramaticales, *sí sí* quiere decir *sí*, el *sí no* significa *no*, el *no sí* espresa *no*, y el *no no* es *sí* porque dos negaciones afirman.

42. Para multiplicar entre sí dos cantidades, de las cuales la una sea un polinómio ó cantidad complecsa, y la otra un monómio ó cantidad incomplecsa, se harán tantas multiplicaciones de dos monómios cuantos términos tenga el polinómio: $(a+b)c=a\times c+b\times c=ac+bc$; $(dc+3fh-4gl)2abc\ldots$ $\ldots=2abc^2d+6abcfh-8abcgl$; $-5mp(4a-2m-p)=\ldots$ $\ldots-20amp+10m^2p+5mp^2$.

43. En la multiplicacion de un polinómio por otro se multiplica todo el multiplicando por cada término del multiplicador, y se reunen ó reducen los productos parciales para tener el total: $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$, y ordenando, $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$; $(mp+7rs\ldots$ $\ldots+t^2)(q+t)=(mp+7rs+t^2)q+(mp+7rs+t^2)t=mpq+mpt\ldots$ $\ldots+qt^2+7rsq+7rst+t^3$.

44. Con la multiplicacion de $a-b$ por $c-d$ confirmarémos la regla, que hemos dado de los signos [40], porque multiplicando a por c resulta un producto ac, al cual, por ser a mayor que $a-b$ en la cantidad b, se le debe disminuir bc, esto es, $(a-b)c=ac-bc$; y por esceder c al multiplicador $c-d$ en la cantidad d, se debe rebajar del producto hallado el de $(a-b)d$, esto es, $(a-b)(c-d)=ac-bc-(a-b)d\ldots$ $\ldots=ac-bc-ad-b\times-d$; pero, como esta rebaja no ha de ser de a multiplicado por d, sino de una cantidad menor que ad en la cantidad b multiplicada por d, es necesario dis-

minuir esta rebaja aumentandole bd, con lo que se obtiene $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$ producto total.

Si damos á estos caractéres cualesquiera valores numéricos, como $a=8$, $b=2$, $c=7$, $d=4$, será $a-b=6$, $c-d=3$, y tendrémos por comprobacion $6\times 3=(8-2)\ldots$ $\ldots(7-4)=56-14-32+8=64-46=18$, como corresponde.

45. Cuando las multiplicaciones son largas conviene colocar el multiplicador debajo del multiplicando, y poner en columna los productos semejantes para facilitar la reducion:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Multiplicando..} & 5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2 & & & & \\
\text{Multiplicador..} & a^3 - 4a^2b + 2b^3 & & & & \\
\hline
\text{1.}^{\text{er}}\text{ prod. parc.} & 5a^7 & -2a^6b & +4a^5b^2 & & \\
\text{2.}^{\text{o}}\text{ prod. parc.} & & -20a^6b & +8a^5b^2 & -16a^4b^3 & \\
\text{3.}^{\text{er}}\text{ prod. parc.} & & & & +10a^4b^3 & -4a^3b^4+8a^2b^5 \\
\hline
\text{Producto total} & 5a^7 & -22a^6b & +12a^5b^2 & -6a^4b^3 & -4a^3b^4+8a^2b^5 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
4a^2 - 3ab + 7b^2 & & & & \\
2a^2 - 6ab + 3b^2 & & & & \\
\hline
8a^4 & -6a^3b & +14a^2b^2 & & \\
 & -24a^3b & +18a^2b^2 & -42ab^3 & \\
 & & +12a^2b^2 & -9ab^3 & +21b^4 \\
\hline
8a^4 & -30a^3b & +44a^2b^2 & -51ab^3 & +21b^4 \text{ prod. total.} \\
\hline
\end{array}$$

No solo conviene ordenar las letras alfabéticamente, sino tambien por el grado de sus esponentes de mayor á menor; pero en las ecuaciones se hace la ordenacion por las incógnitas, como verémos mas adelante.

46. Las espresiones complecsas, en que todos los términos son de un mismo grado, esto es, tienen igual nú-

mero de letras ó es igual la suma de los esponentes en cada término, se llaman espresiones *homogeneas*.

47. Sucede frecuentemente dejar indicadas las multiplicaciones en vez de ejecutarlas, porque la estructura de las cantidades ó la manifestacion de sus factores es conveniente al cálculo, donde muchas veces las compensaciones visibles ahorran operaciones penosas.

48. Saquemos de varias multiplicaciones algunas consecuencias útiles:

1.ª $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$,... ... el cuadrado de un binómio consiste en el cuadrado de su primera parte, el duplo producto de la primera por la segunda y el cuadrado de la segunda, como sabiamos [II 186].

2.ª $(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$,... .. el cubo de un binómio consta del cubo de la primera parte, el triplo producto del cuadrado de la primera por la segunda, el triplo producto de la primera por el cuadrado de la segunda y el cubo de la segunda, como hemos visto [II 187].

3.ª $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$,... la suma de dos cantidades, multiplicada por su diferencia, produce la diferencia de sus cuadrados.

4.ª $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab...$ $...+ac+ad+bc+bd+cd)x^2+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd$,... .. Si se multiplican entre si varios binómios, cuya primer parte sea igual en todos y la segunda diferente, el primer término del producto será la primera parte elevada á una potencia igual al número de factores binómios: desde el segundo término disminuirán sucesivamente los esponentes de la primera parte en una unidad, hasta que en el último $x^{n-n}=x^{0}=1$: * los términos seran tantos como factores binómios haya y uno mas, contando por un solo término todos aquellos en que x esté elevado á una misma potencia : cada término contendrá tantos factores literales como factores binómios haya en la indicacion del producto : el coeficiente del segundo término será igual á la suma de las segundas partes de los binómios : los coeficientes de los demas términos seran las segundas partes tomadas de tantas en tantas veces cuantos términos precedan ; y el último término ha de ser el producto de las segundas partes. Observando las multiplicaciones sucesivas se encuentra la razon de estos resultados.

LECCION VI.

De la Division de cantidades algebráicas.

49. Las reglas, que hemos aprendido para hacer la multiplicacion, nos serviran, con un procedimiento inverso, para hallar las reglas de la division.

50. Mediante á que el multiplicando y el multiplicador, cuando tienen los mismos signos, dan un producto positivo, y teniendolos diferentes, dan un producto negativo [40] ; resultará que, cuando el dividendo y el divisor lleven los mismos signos, daran un cociente positivo, y llevandolos diferentes, daran un cociente negativo.

51. Como el coeficiente de un producto dimana de la multiplicacion numérica de multiplicando y multiplicador, el coeficiente de un cociente procederá de la division de coeficiente del dividendo por coeficiente del divisor.

* En la Leccion siguiente [54] demostrarémos que cualquiera cantidad con un cero por esponente es igual á la unidad, por lo que $x^{0}=1$.

52. Respecto á que el producto de las letras ó caractéres se obtiene juntando las diferentes, y sumando los esponentes de las que son iguales en ambos factores; se hallarán los caractéres de un cociente y sus grados omitiendo las letras, que sean comunes en un mismo grado á dividendo y divisor, restando de los esponentes de las letras del dividendo los esponentes de las mismas letras del divisor, y dejando con sus esponentes las letras, que se hallén solo en uno de los términos de la division.

53. Aunque estas reglas estan contraidas á la division de los monómios, sirven tambien para la de los polinómios con algunas mas circunstancias.

Ejemplos de cantidades monómias:

$$72a^5b^3c^4d : 9a^3bc^2 = \frac{72}{9}a^{5-3}b^{3-1}c^{4-2}d = 8a^2b^2c^2d;$$

$$18ab^3e^2f^4 : 3b^2e^2f^3 = \frac{18}{3}ab^{3-2}f^{4-3} = 6abf.$$

54. Observemos que $a^0 = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$, de que resulta que cualquiera cantidad con un esponente igual á cero equivale á la unidad. Por esta razon tambien se demuestra que los factores literales, cuando son iguales en dividendo y divisor, dan al cociente la unidad y deben desaparecer, como en el segundo ejemplo anterior, donde $18ab^3e^2f^4 : 3b^2e^2f^3 \ldots$ $\ldots = \frac{18}{3}ab^{3-2}e^{2-2}f^{4-3} = 6abe^0f = 6ab \cdot 1 \cdot f = 6abf$.

55. Cuando la division no se puede hacer ecsactamente se simplifica en forma de quebrado, suprimiendo los factores iguales de dividendo y divisor ó de numerador y denominador, como en estos ejemplos:

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{16a^3b^3c^4d} = \frac{16\times 3a^3b^3b^2c^2d}{16a^3b^3c^2c^2d} = \frac{3b^2}{c^2};$$

$$\frac{36a^3b^7cd^2}{64ab^3ce} = \frac{4\times 9aa^2b^3b^4cd^2}{4\times 16ab^3ce} = \frac{9a^2b^4d^2}{16e}.$$

56. Para la division de una cantidad complecsa por una incomplecsa se hacen ó se indican tantas divisiones de monómios como términos tiene el dividendo:

$$(18a^5c^3-3a^3b+4a^3c-8bd):2a^3c=\frac{18a^5c^3}{2a^3c}-\frac{3a^3b}{2a^3c}+\frac{4a^3c}{2a^3c}-\frac{8bd}{2a^3c}=9a^2c^2-\frac{3b}{2c}+2-\frac{4bd}{a^3c}.$$

57. En la division de un polinómio por otro se ordenan entrambos por una misma letra: divídese el primer término del dividendo por el primero del divisor: escríbese el resultado en el cociente con el correspondiente signo: se multiplica el divisor por la parte, que se acaba de hallar del cociente: este producto parcial se resta del dividendo; y considerando el residuo como un nuevo dividendo, se continua del mismo modo la operacion hasta que no haya residuo, ó que el esponente de la letra de ordenacion sea menor en el dividendo parcial que en el divisor, en cuyo caso la division no es ecsacta.

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Dividendo.....} & 5a^7-22a^6b+12a^5b^2-6a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5 & 5a^4-2a^3b+4a^2b^2 \text{ Divisor.} \\
\text{Suprimo } a^2 \text{ por factor comun..} & 5a^5-22a^4b+12a^3b^2-6a^2b^3-4ab^4+8b^5 & 5a^2-2ab+4b^2 \text{ Divisor.} \\
\text{Prim. prod. parc......} & -5a^5+2a^4b-4a^3b^2 & a^3-4a^2b+2b^3 \text{ Cociente.} \\
\text{Residuo......} & -20a^4b+8a^3b^2-6a^2b^3-4ab^4+8b^5 & \\
\text{Seg. prod. parc......} & +20a^4b-8a^3b^2+16a^2b^3 & \\
\text{Residuo......} & +10a^2b^3-4ab^4+8b^5 & \\
\text{Terc. prod. parc......} & -10a^2b^3+4ab^4-8b^5 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

58. A veces la multiplicacion del divisor complecso por un término del cociente da un producto parcial con términos, que no son semejantes á ninguno del dividendo. Entonces estos nuevos términos entran en el residuo para partirlos, como los demas, por el divisor, en esta forma:

$$\begin{array}{rl|l}
\text{Dividendo.....} & 4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \text{ Divisor.} \\
 & -4a^6+10a^4b^2-4a^3b^3 & 2a^3+5ab^2-2b^3 \text{ Cociente.} \\
 & 10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
 & -10a^4b^2+25a^2b^4-10ab^5 & \\
 & -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
 & +4a^3b^3-10ab^5+4b^6 & \\
 & 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Dividendo.....} & a^3 - b^3 & \big| \; a-b \;\; \text{Divisor.} \\
& -a^3 + a^2b & \;\; a^2 + ab + b^2 \;\; \text{Cociente.} \\
\hline
& a^2b - b^3 & \\
& -a^2b + ab^2 & \\
\hline
& ab^2 - b^3 & \\
& -ab^2 + b^3 & \\
\hline
& 0 &
\end{array}$$

59. Cuando la letra, por la cual se hace la ordenacion, se halla elevada á la misma potencia en varios términos del dividendo ó del divisor, se ponen estos términos en una misma columna ó se encierran dentro de un paréntesis dejando fuera aquella letra; pero puede ser mas claro escribir los unos en seguida de los otros, ordenandolos tambien con respecto á otra letra; bien que, siguiendo la ordenacion general [45], que el espiritu de método lleva consigo, no ocurrirá dificultad en la práctica.

$$\text{Ejemplo.....}\left\{\begin{array}{r} -a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 \\ +2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 \\ + b^2c^4 \end{array}\right\} : (a^2 - b^2 - c^2),$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Operacion} & -a^6 - a^4b^2 + 2a^4c^2 + a^2b^4 - a^2c^4 + b^6 + 2b^4c^2 + b^2c^4 \;\big|\; a^2 - b^2 - c^2 \\
& +a^6 - a^4b^2 - a^4c^2 \qquad -a^4 - 2a^2b^2 + a^2c^2 - b^4 - b^2c^2 = -a^4 - (2b^2 - c^2)a^2 - (b^2 + c^2)b^2. \\
\hline
\text{1.}^{\text{er}} \text{ residuo} & -2a^4b^2 + a^4c^2 + a^2b^4 - a^2c^4 + b^6 + 2b^4c^2 + b^2c^4 \\
& +2a^4b^2 \qquad -2a^2b^4 \qquad -2a^2b^2c^2 \\
\hline
\text{2.}^{\text{o}} \text{ residuo.....} & + a^4c^2 - a^2b^4 - a^2c^4 + b^6 + 2b^4c^2 + b^2c^4 - 2a^2b^2c^2 \\
\hline
\text{Ordenando este residuo....} & a^4c^2 - a^2b^4 - 2a^2b^2c^2 - a^2c^4 + b^6 + 2b^4c^2 + b^2c^4 \\
& -a^4c^2 \qquad + a^2b^2c^2 + a^2c^4 \\
\hline
\text{3.}^{\text{er}} \text{ residuo...........} & - a^2b^4 - a^2b^2c^2 \qquad + b^6 + 2b^4c^2 + b^2c^4 \\
& + a^2b^4 \qquad - b^6 - b^4c^2 \\
\hline
\text{4.}^{\text{o}} \text{ residuo.................} & - a^2b^2c^2 \qquad + b^4c^2 + b^2c^4 \\
& + a^2b^2c^2 \qquad - b^4c^2 - b^2c^4 \\
\hline
& 0
\end{array}$$

Otro ejemplo, en que, dejando dentro del paréntesis las cantidades, que multiplican la letra de ordenacion en sus diferentes potencias, se saca bajo la misma forma el cociente:

$$\begin{array}{l|l}
(4b^2-4bc+c^2)a^4-(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & (2b-c)a^2-(b^2+bc)a+b^3 \\
\cline{2-2}
-(4b^2-4bc+c^2)a^4-(2b^4-b^3c\quad)a^2+(2b^3+b^2c-bc^2)a^3 & (2b-c)a^2+(b^2+bc)a-b^3. \\
\cline{1-1}
-(3b^4+b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6+(2b^3+b^2c-bc^2)a^3 & \\
\cline{1-1}
\text{Ordenando.....}\ (2b^3+b^2c-bc^2)a^3-(3b^4+b^3c+b^2c^2)a^2+(2b^5+2b^4c)a-b^6 & \\
-(2b^3+b^2c-bc^2)a^3+(b^4+2b^3c+b^2c^2)a^2-(b^5+b^4c)a & \\
\cline{1-1}
-(2b^4-b^3c\quad)a^2+(b^5+b^4c)a-b^6 & \\
+(2b^4-b^3c\quad)a^2-(b^5+b^4c)a+b^6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

60. Si se nos ofreciese partir a por $f+gz$ tendriamos:

$$\begin{array}{l|l}
\text{Dividendo.....}\ a & f+gz\ \text{Divisor.} \\
\cline{2-2}
-a-\frac{agz}{f} & \frac{a}{f}-\frac{agz}{f^2}+\frac{ag^2z^2}{f^3}-\frac{ag^3z^3}{f^4}+\&c.\ \text{Cociente.} \\
\cline{1-1}
0+\frac{agz}{f}+\frac{ag^2z^2}{f^2} & \\
0-\frac{ag^2z^2}{f^2}-\frac{ag^3z^3}{f^3} & \\
0+\frac{ag^3z^3}{f^3}+\frac{ag^4z^4}{f^4} & \\
0 &
\end{array}$$

esto es $a:(f+gz)=\frac{a}{f}-\frac{agz}{f^2}+\frac{ag^2z^2}{f^3}-\frac{ag^3z^3}{f^4}+$ &c. Estas espresiones, que se pueden proseguir hasta donde se quiera, se llaman *séries indefinidas.*

61. Saquemos de la division algunas consecuencias útiles:

1.ª $(x^m-a^m):(x-a)=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}.....+a^{m-1}$, siendo el último término a^{m-1}, porque disminuyendo el esponente de x, en cada término, de unidad en unidad, y aumentando del mismo modo el de a, tendrémos a^{m-1} cuando, por ser $x^0=1$, desaparezca x del cociente, mediante á que el polinómio resultante es homogeneo [46]. Vemos, pues, que la diferencia de dos potencias de un mismo grado, dividida por la diferencia de sus raices, da un cociente ecsacto en la série $x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}.....+a^{m-1}$.

2ª Si sustituimos en la fórmula anterior $a=1$, será $\frac{x^m-1}{x-1}=x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}\ldots\ldots+1,\ldots$ cuando una potencia, disminuida en una unidad, se divide por su raiz disminuida tambien en una unidad, el cociente es ecsacto é igual á la unidad sumada con las potencias sucesivas de la misma raiz, desde la primera hasta la que es inferior en una unidad á la potencia, que la tal raiz tiene en el dividendo. Asi se comprueba con la aplicacion numérica, suponiendo, por ejemplo, $x=3$;

$$\frac{242}{2}=\frac{3^5-1}{3-1}=1+3+3^2+3^3+3^4=121.$$

LECCION VII.

Del Mayor Divisor comun.

62. Como no se puede asignar el grandor relativo de las espresiones literales [24], mientras no se dan valores numéricos á los caractéres que comprenden; la denominacion de *mayor divisor comun*, aplicada á una cantidad algebráica, no debe tomarse enteramente en el mismo sentido que en la aritmética. Debe entenderse en Álgebra por *mayor divisor comun* de dos espresiones aquel que entre los divisores comunes contiene mas factores en todos sus términos ó es del grado mas elevado. Sin embargo su determinacion se funda, como en aritmética, sobre el principio de que todo divisor comun á dos cantidades debe dividir el residuo de su division.

63. Para dar una demostracion mas general que la contraida solo á los números [II 123], llamarémos:

D el mayor divisor comun,

P el factor, que multiplicado por el comun divisor, produce la primera cantidad,

S el factor, que multiplicado por el divisor comun, produce la segunda cantidad,

C el entero del cociente, que da la division de la primera cantidad por la segunda,

R el residuo de esta division,

será PD la primera cantidad,

SD la segunda;

y tendremos $\frac{PD}{SD}=C+\frac{R}{SD}$,

$PD=SD\times C+R$,

$P=SC+\frac{R}{D}$; pero, siendo entero el primer miembro P de esta ecuacion, y siendolo el primer término SC del segundo miembro, lo será tambien $\frac{R}{D}$, esto es, el residuo R será ecsactamente divisible por el divisor comun D.

64. Antes de proceder á las operaciones advertiremos:

1.º Que no se debe buscar el divisor comun de dos espresiones algebráicas sino en el caso de tener caractéres comunes, y entonces se hace la ordenacion con respecto á la letra que parece mas conveniente, tomando por dividendo la espresion en que esta letra tiene mas alto el esponente:

2.º Que no puede continuarse la division de enteros cuando se llega á un residuo, cuyo primer término no contiene la letra de ordenacion sino en una potencia inferior á la que tiene la misma letra en el primer término del divisor, como se vé en este ejemplo:

$$\begin{array}{l|l} a^3+a^2b+2b^3 & a^2+b^2 \\ \cline{2-2} \underline{-a^3 \qquad\quad -ab^2} & a+b \\ a^2b-ab^2+2b^3 & \\ \underline{-a^2b \qquad\ -b^3} & \\ \qquad -ab^2+b^3 & \end{array}$$

, cuyo residuo ya no puede dar enteros, pues el siguiente término del cociente sería $-\dfrac{b^2}{a}$.

65. En este concepto ecsaminarémos si las dos cantidades complecsas, que se propongan, son ecsactamente divisibles una por otra, y si no lo fuesen, dividiremos consecutivamente, como en la Aritmética [II 123], el último divisor por el último residuo hasta llegar á una division ecsacta si es posible, en cuyo caso el último divisor será el mayor comun.

Siempre que en todos los términos de una de las dos cantidades haya factores que no esten en todos los términos de la otra, ó si sucede esto mismo entre los dividendos y divisores parciales; entonces se deben suprimir tales factores, porque, no siendo comunes á entrambos polinómios, no pueden hacer parte de la mayor medida comun.

Ejemplo: $a^2-3ab+2b^2$ | 1 Cociente.

$\underline{-a^2+ab+2b^2}$ $\qquad a^2-ab-2b^2$ | $-a-1$ Cociente.

Residuo.... $\underline{-2ab+4b^2}$ $\qquad \underline{-a^2+2ab}$ $\qquad -a+2b$ may. div. com

Suprimiendo $2b$ es $\underline{-a+2b}$ $\qquad ab-2b^2$ en que suprimiré b.

$$\begin{array}{c} a-2b \\ \underline{-a+2b} \\ 0 \end{array}$$

Siendo la medida que se busca $-a+2b$, ó mudando los signos, $a-2b$, tendremos

$$(a^2-3ab+2b^2):(a^2-ab-2b^2)=\frac{(a^2-3ab+2b^2):(a-2b)}{(a^2-ab-2b^2):(a-2b)}=\frac{a-b}{a+b}.$$

66. Asi como suprimimos los factores, que no son comunes á entrambas cantidades, debemos multiplicar una de ellas por factores que no tenga la otra, cuando es necesario para hacer la division; lo que no altera la mayor medida comun por no recaer sobre ambas cantidades.

Ejemplo: $3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$

Multiplico por 4 y es $12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3$ | $3a+3$ Cociente.

$-12a^3+15a^2b-3ab^2$ | $4a^2b-5ab^2+b^3$ Divisor en que suprimiré b.

$3a^2b+ab^2-4b^3$ | $4a^2-5ab+b^2$ | $4a-1$ Cociente.

Suprimo b y multiplico por 4... $12a^2+4ab-16b^2$ | $-4a^2+4ab$ | $a-b$ Mayor divisor comun.

$-12a^2+15ab-3b^2$ | $-ab+b^2$ en que suprimiré b.

$19ab-19b^2$ | $-a+b$

Suprimo 19 b y es..... $a-b$ | $+a-b$

0

Resulta que $(3a^3-3a^2b+ab^2-b^3):(4a^2b-5ab^2+b^3)=\dfrac{(3a^3-3a^2b+ab^2-b^3):(a-b)}{(4a^2b-5ab^2+b^3):(a-b)}=\dfrac{3a^2+b^2}{4ab-b^2}.$

Otro: $6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2$

Suprimo a^2..... $6a^3+15a^2b-4ac^2-10bc^2$ | 2 Cociente.

$-6a^3+4ac^2+18a^2c-12c^3$ | $9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3$ en que suprimiré $3b$.

$15a^2b+18a^2c-10bc^2-12c^3$ | $3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3$ | $a-1$ Cociente.

$(5b+6c)3a^2-(5b+6c)2c^2$ | $-3a^3+2ac^2$ | $3a^2-2c^2$ Mayor divisor comun.

Suprimiendo $(5b+6c)$ es.... $3a^2-2c^2$ | $-9a^2c+6c^3$ en que suprimiré $3c$.

$-3a^2+2c^2$

$+3a^2-2c^2$

0

De consiguiente $(6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2):(9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3)=\dfrac{(6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2):(3a^2-2c^2)}{(9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3):(3a^2-2c^2)}=\dfrac{2a^3+5a^2b}{3ab-9bc}.$

67. Cuando haya algun factor comun á los dos polinómios, bien sea numérico ó algebráico, sin tener dependencia de la letra que ordena, partirémos por él ambos polinómios, y lo reservarémos como factor del divisor comun, pues que está en ambas cantidades.

Ejemplo: sean las cantidades $45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4$ y $54a^2b-24b^3$, en que el comun factor $3b$ es independiente de la letra de ordenacion, y por lo mismo suprimiendolo en ambos polinómios, lo reservo para factor del mayor divisor comun:

$15a^3+a^2b-3ab^2+2b^3$

Multiplicando por 3 es ..... $45a^3+3a^2b-9ab^2+6b^3$ $\quad$ $5a+1$ Cociente.

$-45a^3 \quad +20ab^2$ $\quad$ $18a^2-8b^2$ en que partiré por 2.

$3a^2b+11ab^2+6b^3$ $\quad$ $9a^2-4b^2$ $\quad$ $3a-1$ Cociente.

Multiplicando por $\frac{3}{b}$ es .... $9a^2+33ab+18b^2$ $\quad$ $-9a^2 \quad -6ab$ $\quad$ $3a+2b, \ldots (3a+2b)\,3b$ Mayor divisor comun.

$-9a^2 \quad +4b^2$ $\quad$ $-6ab-4b^2$ en que partiré por $2b$.

$33ab+22b^2$ $\quad$ $-3a-2b$

Partiendo por $11b$ es .... $3a+2b$ $\quad$ $+3a+2b$

0

Tendremos $(45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4):(54a^2b-24b^3)=\dfrac{(45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4):(3a+2b)3b}{(54a^2b-24b^3):(3a+2b)3b}=(5a^2-3ab+b^2):(6a-4b)$.

68. Si no se conoce á primera vista el factor independiente se buscan los divisores comunes de los últimos términos, en que resulte no tener ambas cantidades la letra de ordenacion, ó tenerla en la inferior potencia, y se elije entre aquellos divisores el mayor que divida todos los términos de los dos polinómios.

Ejemplo: dadas las cantidades $a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)$ y $a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)$, será su factor independiente $b+c$, que multiplica los últimos términos:

$a^3(b+c)-a^2b(2b+c)+ab^3$

Suprimo a y multiplico por $b-c$.. $a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2-bc-c^2)+b^3(b-c)$ $\quad$ $(b+c)$Cociente.

$-a^2(b^2-c^2)+ab(2b^2+bc-c^2)-b^3(b+c)$ $\quad$ $a^2(b-c)-ab(2b-c)+b^3$ $\quad$ $a(b-c)-1$ Cociente.

$2ab^2c-2b^3c$ $\quad$ $-a^2(b-c)+ab(b-c)$ $\quad$ $a-b, \ldots (a-b)(b+c)$ Mayor divisor comun.

Suprimiendo $2b^2c$ es .... $a-b$ $\quad$ $-ab^2 \quad + \quad b^3$ en que suprimiré b^2.

$-a \quad + \quad b$

$+a \quad - \quad b$

0

Y sacarémos $\{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)\}:\{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)\}\ldots$

$$\ldots=\frac{\{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)\}:(a-b)(b+c)}{\{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)\}:(a-b)(b+c)}=\frac{a^2(b+c)-ab^2}{a(b-c)-b^2}.$$

69. Respecto á las cantidades, como $a^4(b^2-c^2)\ldots$ $\ldots+a^3(b^3-bc^2)+b^4c^2-b^2c^4$ y $a^2(b-c)+a(b^2-bc)\ldots$ $\ldots+b^3-b^2c$, debemos, segun la regla, buscar los divisores comunes de $b^4c^2-b^2c^4$ y b^3-b^2c, que son b, b^2 y $b-c$, de los cuales este último divide en ambos polinómios todas las cantidades comprendidas dentro de un paréntesis, y es, por tanto, el factor independiente; pero desde luego se advierte que, si lo hay, es $b-c$, porque multiplica las potencias de la letra de ordenacion en el primer término de los dos polinómios propuestos. Estos se reducen por la division de aquel factor á $a^4(b+c)+a^3(b^2+bc)+b^3c^2+b^2c^3$ y a^2+ab+b^2, y quitando á la primera cantidad su factor $b+c$, que no es comun á la otra, queda en $a^4+a^3b+b^2c^2$, la cual no tiene divisor que lo sea tambien de a^2+ab+b^2; de modo que $\frac{\{a^2(b-c)+a(b^2-bc)+b^3-b^2c\}:(b-c)}{\{a^4(b^2-c^2)+a^3(b^3-bc^2)+b^4c^2-b^2c^4\}:(b-c)}\ldots$

$$\ldots=\frac{a^2+ab+b^2}{a^4(b+c)+a^3b(b+c)+b^2c^2(b+c)}.$$

LECCION VIII.

De los Quebrados literales.

70. Como un quebrado es una division indicada [II 107], y esta se practica en los monómios restando de los esponentes del dividendo los esponentes de iguales caractéres del divisor; podremos trasladar en un quebrado incomplecso las letras de un término al otro, mudando los signos á sus esponentes. Con efecto, si consideramos el quebrado $\frac{c^m}{c^n}$, siendo $n=m+u$, tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\frac{c^m}{c^n}=\frac{c^m}{c^{m+u}}=\frac{c^m}{c^m c^u}=\frac{1}{c^u} \\ \frac{c^m}{c^n}=c^{m-n}=c^{m-(m+u)}=c^{-u}=\frac{c^{-u}}{1}\end{array}\right\}\ldots\frac{1}{c^u}=\frac{c^{-u}}{1} \text{; luego}$$

el denominador se puede pasar al numerador, y este al denominador con signo contrario en el esponente. Tambien se descubre esto mismo por el raciocinio; pues, si c^u indica que c es u veces factor, indicará c^{-u} que c es $-u$ veces factor ó bien u veces lo contrario de factor, que es divisor, y por tanto $c^{-u}=\frac{1}{c^u}$.

71. En la leccion antecedente hemos aprendido el método de hallar entre dos cantidades su mayor divisor comun, el cual sirve para reducir un quebrado á su mas sencilla espresion, como se deduce de los ejemplos:

$$\frac{a^2-ab-2b^2}{a^2-3ab+2b^2}=\frac{(a^2-ab-2b^2):(a-2b)}{(a^2-3ab+2b^2):(a-2b)}=\frac{a+b}{a-b}; \text{ [65].}$$

$$\frac{4a^2b-5ab^2+b^3}{3a^3-3a^2b+ab^2-b^3}=\frac{(4a^2b-5ab^2+b^3)\quad:(a-b)}{(3a^3-3a^2b+ab^2-b^3):(a-b)}\ldots$$

$$\ldots=\frac{4ab-b^2}{3a^2+b^2}=\frac{(4a-b)b}{3a^2+b^2}; \text{ [66].}$$

$$\frac{9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3}{6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2}\ldots$$

$$\ldots=\frac{(9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3):(3a^2-2c^2)}{(6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2):(3a^2-2c^2)}\ldots$$

$$\ldots=\frac{3ab-9bc}{2a^3+5a^2b}=\frac{3b}{a^2}\times\frac{a-3c}{2a+5b}; \text{ [66].}$$

$$\frac{54a^2b-24b^3}{45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4}\ldots$$

$$\ldots=\frac{(54a^2b-24b^3)\qquad:(3a+2b)3b}{(45a^3b+3a^2b^2-9ab^3+6b^4):(3a+2b)3b}\ldots$$

$$\cdot\cdot=\frac{6a-4b}{5a^2-3ab+b^2}=2\times\frac{3a-2b}{5a^2-3ab+b^2};\ [67].$$

$$\frac{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)}{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)}\cdots$$

$$\cdot\cdot=\frac{\{a^2(b^2-c^2)-ab(2b^2+bc-c^2)+b^3(b+c)\}\ :(a-b)(b+c)}{\{a^3(b^2+2bc+c^2)-a^2b(2b^2+3bc+c^2)+ab^3(b+c)\}:(a-b)(b+c)}\cdots$$

$$\cdot\cdot=\frac{a(b-c)-b^2}{a^2(b+c)-ab^2};\ [68].$$

$$\frac{a^2(b-c)+a(b^2-bc)+b^3-b^2c}{a^4(b^2-c^2)+a^3(b^3-bc^2)+b^4c^2-b^2c^4}\cdots$$

$$\cdot\cdot=\frac{\{a^2(b-c)+a(b^2-bc)+b^3-b^2c\}\ :(b-c)}{\{a^4(b^2-c^2)+a^3(b^3-bc^2)+b^4c^2-b^2c^4\}:(b-c)}\cdots$$

$$\cdot\cdot=\frac{a^2+ab+b^2}{a^4(b+c)+a^3b(b+c)+b^2c^2(b+c)}=\frac{a^2+ab+b^2}{(a^4+a^3b+b^2c^2)(b+c)};\ [69].$$

72. El cálculo de los quebrados literales ó algebráicos se hace como el de los numéricos, aplicandoles las reglas convenientes de los enteros. En general la doctrina, espuesta en las Lecciones VIII, IX y X de la Aritmética, es contraible á los quebrados literales. Repetirémos, no ostante, las reglas de las operaciones fundamentales con sus ejemplos para mayor claridad.

73. Aunque hemos esplicado ya [II 125 y 126] el modo de reducir los quebrados á un comun denominador y de simplificar esta operacion, lo contraeremos á los caractéres algebráicos, que facilitan mucho esta simplificacion. Consiste en formar el denominador comun, reuniendo en un solo producto todos los factores diferentes, que contengan los denominadores de los quebrados propuestos, y multiplicar despues el numerador de cada quebrado por los factores de aquel producto, que no se hallen en el denominador del mismo quebrado, como en estos ejemplos:

$$1^{\circ}\quad \frac{a}{bc}=\frac{a\cdot f}{bc\cdot f}=\frac{af}{bcf};$$

$$\frac{d}{bf}=\frac{d\cdot c}{bf\cdot c}=\frac{cd}{bcf}.$$

$$2^{\circ}\quad \frac{a}{b^2c}=\frac{a\cdot f\cdot g}{b^2c\cdot f\cdot g}=\frac{afg}{b^2cfg};$$

$$\frac{d}{bf}=\frac{d\cdot b\cdot c\cdot g}{bf\cdot b\cdot c\cdot g}=\frac{bcdg}{b^2cfg};$$

$$\frac{e}{cg}=\frac{e\cdot b^2\cdot f}{cg\cdot b^2\cdot f}=\frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

74. En la adicion se suman los numeradores cuando tienen un mismo denominador, y en caso contrario se reducen antes los quebrados á una denominacion comun. Ejemplos:

$$1^{\circ}\quad \frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}.$$

$$2^{\circ}\quad a+\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

$$3^{\circ}\quad a+\frac{cd-ab}{b-d}=\frac{a(b-d)+cd-ab}{b-d}=\frac{ab-ad+cd-ab}{b-d}\cdots$$

$$\cdots=\frac{cd-ad}{b-d}.$$

$$4^{\circ}\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a\cdot d\cdot f}{b\cdot d\cdot f}+\frac{c\cdot b\cdot f}{d\cdot b\cdot f}+\frac{e\cdot b\cdot d}{f\cdot b\cdot d}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

$$5^{\circ}\quad \frac{b+c}{a+b}+\frac{a-2c}{a-b}=\frac{(b+c)(a-b)+(a-2c)(a+b)}{(a+b)(a-b)}\cdots$$

$$\cdots=\frac{ab+ac-b^2-bc+a^2-2ac+ab-2bc}{a^2-b^2}\cdots$$

$$\cdots=\frac{a^2+2ab-ac-b^2-3bc}{a^2-b^2}.$$

6º $\frac{a}{bc}+\frac{d}{bf}=\frac{a.f}{bc.f}+\frac{d.c}{bf.c}=\frac{af+cd}{bcf}$.

7º $\frac{a}{bc}+\frac{d}{bf}+\frac{e}{cg}=\frac{a.f.g}{bc.f.g}+\frac{d.c.g}{bf.c.g}+\frac{e.b.f}{cg.b.f}$...

$..=\frac{afg+cdg+bef}{bcfg}$.

75. En la sustraccion se mudan los signos al sustraendo, y se hace su suma ó reducion con el minuendo. Ejemplos:

1º De $\frac{a}{d}$ restar $\frac{b}{d}$,... $\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}$.

2º De a restar $\frac{b}{c}$,... $a-\frac{b}{c}=\frac{a\times c}{c}-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$.

3º De a restar $\frac{cd-ab}{b-d}$,... $a-\frac{cd-ab}{b-d}=a+\frac{ab-cd}{b-d}$...

$..=\frac{a(b-d)+ab-cd}{b-d}=\frac{ab-ad+ab-cd}{b-d}$...

$..=\frac{2ab-ad-cd}{b-d}$.

4º De $\frac{a}{b}$ restar $\frac{c}{d}$,... $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\times d}{b\times d}-\frac{c\times b}{d\times b}=\frac{ad-bc}{bd}$.

5º De $\frac{b+c}{a+b}$ restar $\frac{a-2c}{a-b}$,... $\frac{b+c}{a+b}-\frac{a-2c}{a-b}$...

$..=\frac{(b+c)(a-b)-(a-2c)(a+b)}{(a+b)(a-b)}$...

$..=\frac{ab+ac-b^2-bc-a^2+2ac-ab+2bc}{a^2-b^2}$...

$..=\frac{-a^2+3ac-b^2+bc}{a^2-b^2}$.

6º De $\frac{a}{bc}$ restar $-\frac{e}{g}$,... $\frac{a}{bc}-\frac{-e}{g}=\frac{a}{bc}+\frac{e}{g}=\frac{ag+bce}{bcg}$.

76. En la multiplicacion se multiplican los numeradores entre si, y lo mismo los denominadores, para obtener respectivamente el numerador y denominador del producto, suprimiendo los factores comunes á los dos términos del quebrado. Ejemplos:

1.º $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

2.º $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$.

3.º $5c \times \frac{a}{b} = \frac{5ac}{b}$.

4.º $\frac{ab}{cd} \times \frac{cf}{be} = \frac{ab \times cf}{cd \times be} = \frac{af}{de}$.

5.º $\frac{a+b}{c+d} \times \frac{a-b}{c+d} = \frac{a^2+ab-ab-b^2}{c^2+cd+cd+d^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2+2cd+d^2}$

pero, cuando el cálculo no requiere la espresion circunstanciada del producto, vale mas presentar la multiplicacion indicada [47], como $\frac{a+b}{c+d} \times \frac{a-b}{c+d} = \frac{(a+b)(a-b)}{(c+d)^2}$.

77. En la division se multiplica en cruz, ó se trastorna el quebrado divisor para hacer la multiplicacion. Ejemplos:

1.º $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$.

2.º $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

3.º $5c : \frac{a}{b} = \frac{5c}{1} \times \frac{b}{a} = \frac{5bc}{a}$.

4.º $\frac{ab}{cd} : \frac{b}{d} = \frac{ab \times d}{cd \times b} = \frac{a}{c}$.

5.º $\frac{a+b}{c+d} : \frac{a-b}{c+d} = (a+b) : (a-b) = \frac{a+b}{a-b}$.

78. Cuando los esponentes son negativos se hace la multiplicacion y la division lo mismo que si fueran positivos [70]. Ejemplos :

1.º $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = \frac{1}{a^{m+n}}$;

2.º $a^{-m} \times a^{n} = a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$.

3.º $a^{-n} : a^{-m} = \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = \frac{a^m}{a^n}$;

4.º $a^{-n} : a^{m} = a^{-n-m} = \frac{1}{a^{m+n}}$.

79. En la reducion de un entero á la especie de un quebrado que le acompañe, la operacion es la de sumar enteros y quebrados, como en los ejemplos 2.º y 3.º [74] de la adicion y en los siguientes :

$$a + \frac{bd}{c} = \frac{a \times c}{c} + \frac{bd}{c} = \frac{ac + bd}{c};$$

y en la operacion inversa de sacar los enteros á un quebrado se divide, cuanto es posible, el numerador por el denominador, y el residuo se agrega á los enteros con el mismo denominador, en esta forma :

$$(3ab + ac + cd) : a = \frac{3ab + ac + cd}{a} = 3b + c + \frac{cd}{a}.$$

80. Aunque las reduciones de enteros á quebrados no se necesitan para la multiplicacion, pues que $\left(a + \frac{c}{d}\right) \times \left(b + \frac{m}{n}\right) \ldots$

$\ldots = ab + \frac{bc}{d} + \frac{am}{n} + \frac{cm}{dn}$; son muy útiles para la division, en que conviene practicarlas, porque

1.º $\left(a + \frac{c}{d}\right) : \left(b + \frac{m}{n}\right) = \frac{ad + c}{d} : \frac{bn + m}{n} = \frac{(ad + c)n}{(bn + m)d}$.

$$2^{\circ}\quad \left(a-\frac{a^2}{a-b}\right):\left(b-\frac{b^2}{a+b}\right)=\frac{a(a-b)-a^2}{a-b}:\frac{b(a+b)-b^2}{a+b}\ldots$$

$$\ldots=\frac{-ab}{a-b}:\frac{ab}{a+b}=\frac{a+b}{b-a}.$$

LECCION IX.

De la Resolucion de Ecuaciones del primer grado.

81. Vamos á hacer y deshacer frases, pues que, en la resolucion de ecuaciones, hemos de componer y descomponer sus miembros. El fin es despejar la incógnita [26 7ª], ó bien dejarla sola y sin coeficiente visible en un miembro, teniendo en el otro únicamente cantidades conocidas; en el concepto de que entendemos aqui por coeficientes no solo los numéricos sino tambien los literales, que espresan cantidades conocidas, con que están multiplicadas las incógnitas.

82. El grado de las ecuaciones se cifra en el mayor esponente de sus incógnitas. Empezarémos por las de primer grado con solo una incógnita, repasando antes la LECCION III, y poniendo en práctica las reglas, que hemos aprendido, de las operaciones fundamentales de enteros y quebrados. En adelante usarémos el signo disyuntivo //, que se lee *ó bien*, para denotar la igualdad de dos ecuaciones una con otra, ó dos ecuaciones *sinónimas*, las cuales, teniendo el mismo valor, solo se diferencian en su espresion.

Ejempos:

1º $10x+7x-2x=25+7$ // $17x-2x=32$,

Reduciendo.................................... $15x=32$,

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita............................ $x=\frac{32}{15}$.

2.º .... $ax=bc$,

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita........................ $x=\frac{bc}{a}$.

3.º .... $ax-cx+bx=ac-bc$ // $(a+b-c)x=(a-b)c$,

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita........................ $x=\frac{(a-b)c}{a+b-c}$.

4.º .... $6abx-9bcd=12bdx+15abc$,

Dividiendo por el factor comun $3b$ .... $2ax-3cd=4dx+5ac$,

Reuno las cantidades, afectas de la incógnita, en el primer miembro, y las conocidas en el segundo.................. $2ax-4dx=5ac+3cd=(5a+3d)c$,

Partiendo por el coeficiente de la incógnita........................ $x=\frac{(5a+3d)c}{2a-4d}$.

5.º .... $\frac{2x}{3}+4=\frac{4x}{5}+12-\frac{5x}{7}$,

Multiplico toda la ecuac. por el prod. . $3.5.7$ de los denom. $2.5.7x+4.3.5.7=4.3.7x+12.3.5.7-5.3.5x$ // $70x+420=84x+1260-75x=9x+1260$,

Trasladando .... $70x-9x=1260-420$ // $61x=840$,

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita.. $x=\frac{840}{61}=13+\frac{47}{61}$.

6.º .... $\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}+\frac{fg}{h}$,

Multiplico por los denominadores.................... $aehx-bceh=bdhx+befg$,

Traslado.................................... $aehx-bdhx=bceh+befg$ // $(ae-bd)hx=be(ch+fg)$,

Divido por el coeficiente de la incógnita.. $x=\frac{be}{h}\cdot\frac{ch+fg}{ae-bd}$.

7.º .... $\frac{(a+b)(x-c)}{a-b}+4b=2x-\frac{ac}{3a+b}$,

Indico la mult. por los denomin. . $(a+b)(x-c)(3a+b)+4b(a-b)(3a+b)=2x(a-b)(3a+b)-ac(a-b)$,

Ejecuto las multipl. $3a^2x+4abx+b^2x-3a^2c-4abc-b^2c+12a^2b-8ab^2-4b^3=6a^2x-4abx-2b^2x-a^2c+abc$,

Traslado al primer miembro los términos afectos de x, y los demás al segundo......... $3a^2x-6a^2x+4abx+4abx+b^2x+2b^2x=-12a^2b-a^2c+3a^2c+8ab^2+abc+4abc+b^2c+4b^3$, Reduciendo . . . . $(-3a^2+8ab+3b^2)x=-12a^2b+2a^2c+8ab^2+5abc+b^2c+4b^3$,

Dividiendo por el coeficiente de la incógnita. . . . . $x=\dfrac{-12a^2b+2a^2c+8ab^2+5abc+b^2c+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}$,

Mudando en el segundo miembro los signos á numerador y denominador. . . $x=\dfrac{12a^2b-2a^2c-8ab^2-5abc-b^2c-4b^3}{3a^2-8ab-3b^2}$. Aqui mudamos los signos á todos los términos del numerador y denominador para que empiezen por una cantidad positiva; pero esta variacion no altera el valor ni el sentido del quebrado, pues viene á ser lo mismo que si se multiplicára por $\dfrac{-1}{-1}=1$.

83. Representemos una ecuacion de primer grado, ya despejada de quebrados, por la espresion formular $ax+b=cx+d$, y demos sucesivamente á la incógnita los valores m, n, con lo que tendrémos $am+b=cm+d$, $an+b=cn+d$, y restando estas ecuaciones entre si, será . . . . $a(m-n)=c(m-n)$,
$a(m-n)-c(m-n)=0$ // $(a-c)(m-n)=0$, de consiguiente $a-c$ ó bien $m-n$ ha de ser igual á cero; pero $a-c$ no puede serlo, porque entonces $a=c$, y la ecuacion propuesta se convertiría en $ax+b=ax+d$ // $b=d$, de modo que no habria incógnita; luego $m-n=0$ y $m=n$. Este resultado demuestra que en una ecuacion de primer grado la incógnita no puede tener mas que un valor.

84. El valor, que sustituido á una incógnita, satisface á la ecuacion, se llama su *raiz*, y en las de primer grado la raiz se puede reducir al cociente de dos diferencias; porque, siendo la fórmula general de tales ecuaciones, despejadas de quebrados, $ax+b=cx+d$, resulta $x=\dfrac{d-b}{a-c}$, sobre que harémos á su tiempo algunas observaciones.

85. Cuando en la traducion de un problema nos hallamos con tantas ecuaciones como incógnitas, el problema es *determinado*: si resultan menos ecuaciones que incógnitas es *indeterminado*; y si presenta mas ecuaciones que incógnitas es mas que determinado, bien que en este caso la cuestion es absurda ó es inútil alguna de sus condiciones.

86. Ahora investigarémos en las ecuaciones determinadas de primer grado el valor de varias incógnitas, sirviendonos de diferentes métodos. El primero será sacar de la ecuacion mas sencilla el valor de una incógnita en las cantidades conocidas y en las demás incógnitas: sustituir este valor en las otras ecuaciones, con lo que tendrémos una ecuacion menos y una incógnita menos en las ecuaciones resultantes: determinar en una de estas otra incógnita, y sustituir su valor en las demás ecuaciones; y continuar así hasta que solo haya una ecuacion con una incógnita, que se despejará, y se sustituirá su valor en los de las anteriores. Cuando una incógnita desaparece se dice que se ha *eliminado*. Este método se llama de *sustitucion*.

Ejemplos:

1º Sean las ecuaciones. . . . . $x+z=a$, $x-z=b$;

Presento una de las ecuaciones propuestas. . . . . $x+z=a$,

Traslado una de las incógnitas al otro miembro, y concluyo [30] el primer periodo. . . . . $z=a-x$;

Presento la otra ecuacion propuesta. $x-z=b$,
Traslado la otra incógnita al otro miembro. $x=b+z$,
Pongo en otra columna sobre la izquierda [29] el valor de la segunda incógnita, y lo llevo á la sustitucion. . . . . . . $z=a-x$,... $x=b+a-x$,
Traslado la incógnita del segundo miembro al primero . . . . $2x=a+b$,
Despejo la incógn., y concluyo el segundo período. . . . . $x=\frac{a+b}{2}$;

Presento la ecuacion del valor de la otra incógnita hallado en el primer período. . . . . $z=a-x$,
Indico el val. de la prim. incóg. hallado en el seg. período, y lo sustituyo. . . . . $x=\frac{a+b}{2}$,... $z=a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}$.

2.º Sean las ecuac. $x+u+z=a$, $x+u-z=b$, $x-u-z=c$;
Presento una de las ec. propuestas . . . . $x+u+z=a$,
Saco el valor de la tercera incógnita, terminando el período. . . . . . $z=a-x-u$;

Presento la seg. ecuacion propuesta. . . . . $x+u-z=b$,
Saco el valor de la segunda incógnita. . . . . $u=b-x+z$,

Presento el valor de la tercera incógnita, y lo sustituyo. . . . . $z = a - x - u$,

Reuno en el primer miembro la segunda incógnita. . . . .

Despejo la segunda incógnita, concluyendo el segundo período. . . . .

Presento la tercera ec. propuesta. . . . .

Saco el valor de la segunda incógn. . . . .

Presento y sustituyo el valor de la tercera incógnita. . . . . $z = a - x - u$,

Resulta eliminada la seg. incógn., y se presenta el duplo de la primera. . . . .

Despejo la primera incógnita, y concluyo el tercer período. . . . .

Presento el valor de la seg. incógn. . . . .

Sustituyo el valor de la primera incógnita, y concluyo con el de la segunda el cuarto período. . . . . . . $x = \frac{a + c}{2}$, ,

. . . $u=b-x+a-x-u=a+b-2x-u$,

. . . . $2u=a+b-2x$,

. . . . $u=\frac{a+b}{2}-x$;

$x-u-z=c$,

. . . . . $u=-c+x-z$,

. . . $u=-c+x-a+x+u=2x-a-c+u$,

. . . . $2x=a+c$,

. . . . . $x=\frac{a+c}{2}$;

. . . . $u=\frac{a+b}{2}-x$,

. . $u=\frac{a+b}{2}-\frac{a+c}{2}=\frac{b-c}{2}$;

Presento el val. de la tercera incógn. . . . . $z=a-x-u$,

Sustituyo los valores de la primera y seg. incógn., y saco el de la tercera. . . $\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a+c}{2} \\ u=\dfrac{b-c}{2} \end{array}\right\}$, . . . $z=a-\dfrac{a+c}{2}-\dfrac{b-c}{2}=\dfrac{a-b}{2}$.

3º. Sean las ecuaciones. . . . . $ax+bz=c$, $mx+nz=p$;

$$ax+bz=c,$$

$$z=\frac{c-ax}{b};$$

$$mx+nz=p,$$

$$x=\frac{p-nz}{m},$$

$$z=\frac{c-ax}{b}, \ldots \; x=\frac{p-n\cdot\frac{c-ax}{b}}{m}=\frac{bp-cn+anx}{bm},$$

$$bmx=bp-cn+anx,$$

$$(bm-an)x=bp-cn,$$

$$x=\frac{bp-cn}{bm-an}\;//\;x=\frac{cn-bp}{an-bm};$$

$$z=\frac{c-ax}{b},$$

$$x=\frac{cn-bp}{an-bm}, \ldots\ z=\frac{c-a.\frac{cn-bp}{an-bm}}{b}=\frac{ap-cm}{an-bm}.$$ Este ejemplo, en que hemos puesto coeficientes, no lleva esplicaciones marjinales para que los principiantes se acostumbren á leer el Algebra, que debe hablar sola, desenvolverse y enseñarse por si misma.

87. Tambien podemos determinar en todas las ecuaciones una misma incógnita: igualar sus valores de dos en dos, con lo que se eliminará esta incógnita, y habrá una ecuacion menos; y repetir la misma operacion con las ecuaciones, que resulten, hasta llegar á una sola ecuacion con solo una incógnita, la cual se despeja, y se sustituye su valor sucesivamente en las ecuaciones anteriores. Este método se llama de *igualacion*.

Ejemplo: Sean las ecuaciones.......... $x+u+z=a$, $x+u-z=b$, $x-u-z=c$;

Presento las ecuac., y saco por consecuencia el valor de una misma incógnita, que aqui es la primera, concluyendo el período........

$$\left\{\begin{array}{llll} x+u+z=a, & . & . & . \quad x=a-u-z; \\ x+u-z=b, & . & . & . \quad x=b-u+z; \\ x-u-z=c, & . & . & . \quad x=c+u+z; \end{array}\right.$$

Presento dos val. de la incógn. determinada, hago su eliminacion igualando estos val., y con las derivaciones convenientes llego á despejar la 3ª incógnita, y termina el 2º período..............................

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x=a-u-z \\ x=b-u+z \end{array}\right\}, \ldots\ a-u-z=b-u+z, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 2z=a-b, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad z=\frac{a-b}{2}; \end{array}\right.$$

Presento el prim. y terc. val. de la prim. incógn., la cual se elimina, y concluyo con las derivac. convenientes el terc. período en otro val. de la terc. incógnita..

$$\left\{\begin{array}{l} x=a-u-z \\ x=c+u+z \end{array}\right\}, \ldots \quad \begin{array}{l} a-u-z=c+u+z, \\ 2z=a-c-2u, \\ z=\dfrac{a-c-2u}{2}; \end{array}$$

Comparo los dos val. hallados de la terc. incógnita, y con las derivaciones correspondientes saco el de la segunda, terminando el cuarto período............

$$\left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{a-b}{2} \\ z=\dfrac{a-c-2u}{2} \end{array}\right\}, \ldots \quad \begin{array}{l} a-b=a-c-2u, \\ 2u=b-c, \\ u=\dfrac{b-c}{2}; \end{array}$$

Presento una ec. del valor de la primera incógnita, que se despeja sustituyendo el valor de las demas.............

$$\left\{\begin{array}{l} u=\dfrac{b-c}{2} \\ z=\dfrac{a-b}{2} \end{array}\right\}, \ldots \quad \begin{array}{l} x=c+u+z, \\ x=c+\dfrac{b-c}{2}+\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+c}{2}. \end{array}$$

88. Asi mismo se pueden sumar ó restar las ecuaciones de dos en dos, cuando la incógnita, que se intenta eliminar, tiene en ambas un mismo coeficiente: si este fuese distinto, se multiplicará cada ecuacion por el coeficiente, que la misma incógnita tenga en la otra, y se hará la adicion ó sustraccion, con lo que resultará una ecuacion y una incógnita menos. Repitiendo esta operacion se eliminarán sucesivamente las incógnitas hasta llegar á una ecuacion con solo una incóg-

nita. Este método, que algunos llaman *aditivo y sustractivo* por practicarse sumando y restando, lo llamarémos nosotros, por el mismo motivo, de *reducion*. A veces presenta una simplificacion admirable, como manifiesta el siguiente ejemplo, en que sacamos el resultado de cada período á nueva columna para mayor claridad.

Sean las ecuaciones...... $x+u+z=a$, $x+u-z=b$, $x-u-z=c$;

Sumando la prim. y terc. ec.: primer período.. $\left.\begin{array}{l} x+u+z=a \\ x-u-z=c \end{array}\right\}$, ... $2x=a+c$, ... $x=\frac{a+c}{2}$;

Restando de la seg. ec. la terc.: seg. período.. $\left.\begin{array}{l} x+u-z=b \\ x-u-z=c \end{array}\right\}$, ... $2u=b-c$, ... $u=\frac{b-c}{2}$;

Restando de la prim. ec. la seg.: terc. período.. $\left.\begin{array}{l} x+u+z=a \\ x+u-z=b \end{array}\right\}$, ... $2z=a-b$, ... $z=\frac{a-b}{2}$.

89. El diestro calculador considera las ecuaciones, y ejecuta en ellas las operaciones, que conoce le pueden conducir con mas sencilléz y prontitud al despejo de las incógnitas. A este fin se vale en un mismo cálculo de todos los métodos segun conviene, de que resulta un método misto muy espedito y elegante.

Advertimos que en el siguiente ejemplo los coeficientes, espresados por las mismas letras, son diferentes, pues sus acentos los caracterizan de distintas cantidades.

Sean las ecuaciones. . . . . $ax+bu+cz=d$, $\quad a'x+b'u+c'z=d'$, $\quad a''x+b''u+c''z=d''$;

$$\left.\begin{array}{ll} ax+bu+cz=d\,, & \ldots\; ac'x+bc'u+cc'z=dc' \\ a'x+b'u+c'z=d'\,, & \ldots\; ca'x+cb'u+cc'z=cd' \end{array}\right\}, \ldots (ac'-ca')x+(bc'-cb')u=dc'-cd'\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} ax+bu+cz=d\,, & \ldots\; ac''x+bc''u+cc''z=dc'' \\ a''x+b''u+c''z=d''\,, & \ldots\; ca''x+cb''u+cc''z=cd'' \end{array}\right\}, \ldots (ac''-ca'')x+(bc''-cb'')u=dc''-cd''\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} (ac''-ca'')x+(bc''-cb'')u=dc''-cd'', \ldots u=\dfrac{dc''-cd''-(ac''-ca'')x}{bc''-cb''} \\ (ac'-ca')x+(bc'-cb')u=dc'-cd', \ldots u=\dfrac{dc'-cd'-(ac'-ca')x}{bc'-cb'} \end{array}\right\}, \ldots \frac{dc''-cd''-(ac''-ca'')x}{bc''-cb''}=\frac{dc'-cd'-(ac'-ca')x}{bc'-cb'}\,,$$

$$(bc'-cb')(dc''-cd'')-(bc'-cb')(ac''-ca'')x=(bc''-cb'')(dc'-cd')-(bc''-cb'')(ac'-ca')x\,,$$

$$\{(bc''-cb'')(ac'-ca')-(bc'-cb')(ac''-ca'')\}x=(bc''-cb'')(dc'-cd')-(bc'-cb')(dc''-cd'')\,,$$

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} (ac''-ca'')x+(bc''-cb'')u=dc''-cd'', \ldots x=\dfrac{dc''-cd''-(bc''-cb'')u}{ac''-ca''} \\ (ac'-ca')x+(bc'-cb')u=dc'-cd', \ldots x=\dfrac{dc'-cd'-(bc'-cb')u}{ac'-ca'} \end{array}\right\}, \ldots \frac{dc''-cd''-(bc''-cb'')u}{ac''-ca''}=\frac{dc'-cd'-(bc'-cb')u}{ac'-ca'}\,,$$

$$(ac'-ca')(dc''-cd'')-(ac'-ca')(bc''-cb'')u=(ac''-ca'')(dc'-cd')-(ac''-ca'')(bc'-cb')u\,,$$

$$\{(ac''-ca'')(bc'-cb')-(ac'-ca')(bc''-cb'')\}u=(ac''-ca'')(dc'-cd')-(ac'-ca')(dc''-cd'')\,,$$

$$u=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} ax+bu+cz=d\,, & \ldots\; aa'x+ba'u+ca'z=da' \\ a'x+b'u+c'z=d'\,, & \ldots\; aa'x+ab'u+ac'z=ad' \end{array}\right\}, \ldots (ab'-ba')u+(ac'-ca')z=ad'-da'\,;$$

$$\left.\begin{array}{ll} ax+bu+cz=d\,, & \ldots\; aa''x+ba''u+ca''z=da'' \\ a''x+b''u+c''z=d''\,, & \ldots\; aa''x+ab''u+ac''z=ad'' \end{array}\right\}, \ldots (ab''-ba'')u+(ac''-ca'')z=ad''-da''\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} (ab''-ba'')u+(ac''-ca'')z=ad''-da'', \ldots u=\dfrac{ad''-da''-(ac''-ca'')z}{ab''-ba''} \\ (ab'-ba')u+(ac'-ca')z=ad'-da', \ldots u=\dfrac{ad'-da'-(ac'-ca')z}{ab'-ba'} \end{array}\right\}, \ldots \frac{ad''-da''-(ac''-ca'')z}{ab''-ba''}=\frac{ad'-da'-(ac'-ca')z}{ab'-ba'}\,,$$

$$(ab'-ba')(ad''-da'')-(ab'-ba')(ac''-ca'')z=(ab''-ba'')(ad'-da')-(ab''-ba'')(ac'-ca')z\,,$$

$$\{(ab''-ba'')(ac'-ca')-(ab'-ba')(ac''-ca'')\}z=(ab''-ba'')(ad'-da')-(ab'-ba')(ad''-da'')\,,$$

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}\,.$$

En este ejemplo hemos sacado el primero y segundo período por el método de *reducion*: el tercero y cuarto por *igualacion*: el quinto y sesto por *reducion*; y el séptimo por *igualacion*.

90. Cuando varias ecuaciones del mismo grado tienen igual número de términos, y estos se hallan en cada una respectivamente afectos de las mismas incógnitas, como $ax+bu+cz=d$, $a'x+b'u+c'z=d'$, decimos que son ecuaciones *simétricas*; y los coeficientes, que ocupando lugares correspondientes, multiplican la misma incógnita en cada ecuacion, como a, a' ó bien b, b' los llamarémos coeficientes *homólogos*. Merece fijar nuestra atencion en el desarrollo de cada método la simetria de las ecuaciones, la reproducion de los periodos y la correspondencia de los coeficientes homólogos para comprender bien la estructura sistemática del cálculo.

De aqui se puede pasar, si se quiere, á los problemas de primer grado. (Veanse las colecciones primera y segunda.)

LECCION X.

De las Ecuaciones indeterminadas de primer grado.

91. Hemos dicho [85] que un problema es indeterminado cuando su traducion presenta menos ecuaciones que incógnitas. Supongamos que se hayan eliminado tantas incógnitas menos una como ecuaciones tenga una cuestion: entonces nos hallamos con una ecuacion de esta forma $ax \pm bz = c$, en la cual no hay otro medio para determinar las incógnitas que dar valores á una de ellas. Como cada valor, que se suponga por ejemplo á z, produce uno diferente para x, damos á estas incógnitas el nombre de *variables*, señalandolas con las últimas letras del alfabeto, aunque á veces las indicarémos por la E diferen-

ciada con acentos, y las cantidades *constantes* ó que solo pueden tener un valor, se espresan con las primeras letras.

92. Si hubieramos de resolver la ecuacion indeterminada mas sencilla, cual es $x+z=10$, que, comparada con la fórmula $ax+bz=c$, da $a=1$, $b=1$, $c=10$, tendriamos $x=10-z$. Aplicando á la segunda incógnita un valor cualquiera resultará un número indefinido de soluciones; pero, si hay la condicion de que ambas variables sean números enteros y positivos, sacarémos solo estos nueve resultados:

$$z=1 \,//\, 2 \,//\, 3 \,//\, 4 \,//\, 5 \,//\, 6 \,//\, 7 \,//\, 8 \,//\, 9;$$
$$x=10-z=9 \,//\, 8 \,//\, 7 \,//\, 6 \,//\, 5 \,//\, 4 \,//\, 3 \,//\, 2 \,//\, 1;$$

presentandose en seguida cero y valores negativos. Sin embargo no hay mas que cinco soluciones diferentes, pues basta tomar una incógnita por otra para que los cuatro últimos resultados sean idénticos á los cuatro primeros.

93. Cuando la ecuacion indeterminada tenga coeficientes mayores que la unidad, ecsaminarémos si puede simplificarse partiendola toda por un divisor comun: $2x+6z=8$ se reducirá á $x+3z=\frac{8}{2}=4$, de que resulta $x=4-3z$, que se resuelve como la anterior; pero no tiene mas que una solucion en números enteros y positivos, cual es $x=1$, $z=1$.

94. Pero, si la ecuacion propuesta no puede simplificarse, ó si despues de simplificada tuviere cada variable un coeficiente mayor que la unidad, hay que proceder del modo siguiente. Se despeja la incógnita, que tiene menor coeficiente, y se sacan de su espresion todos los enteros que se pueden: el quebrado que resulta se iguala con una incógnita ó variable intermedia, que indicarémos por la E diferenciada sucesivamente con acentos, poniendole para mayor sencilléz el mismo signo, que la incógnita tenga en el quebrado: de esta nueva ecuacion se despeja la incógnita del quebrado, y si en su es-

presion, despues de sacar los enteros posibles, resultase otro quebrado, se igualará este con una nueva variable; y así continuarémos hasta llegar á una incógnita, cuya espresion no tenga ningun quebrado. Este valor se va sustituyendo en las ecuaciones anteriores hasta que se llega á la propuesta, la cual se resuelve con todos los valores, que pueden darse á la última variable.

Ejemplo: sea la ecuacion................. $2x+5z=37$;

Presento la ec. .... $2x+5z=37$,

Traslado la seg. incógn. al otro miembro .... $2x=37-5z$,

Divido por el coef. de la prim. incógn., sacando todos los enteros posibles, y concluye el prim. período .... $x=\frac{37-5z}{2}=18-2z+\frac{1-z}{2}$;

Igualo el quebrado residuo con una variable ausiliar ó intermedia E, poniendole el mismo signo de la incógn. .... $\frac{1-z}{2}=-E$,

Despejo la incógnita sin que resulte quebrado, y concluye el seg. período .... $z=2E+1$;

Presento la ec. resultante del prim. período .... $x=18-2z+\frac{1-z}{2}$,

Sustituyo el valor de la seg. incogn., y termina el cálculo .... $z=2E+1$,... $x=18-2(2E+1)-E=16-5E$.

Doy á la variable ausiliar E valores sucesivos, y saco los de x, z, y los de sus múltiplos $2x$, $5z$, sin que haya mas que cuatro soluciones, debiendo ser los valores enteros y positivos.

$$\left\{\begin{array}{l}
E=0,\ldots\left\{\begin{array}{l} x=16-5E=16-0=16,\ldots\ 2x=2\cdot16=32\ ;\\ z=2E+1=0+1=1,\ldots\ 5z=5\cdot1=5. \end{array}\right.\\
E=1,\ldots\left\{\begin{array}{l} x=16-5E=16-5\cdot1=11,\ldots\ 2x=2\cdot11=22\ ;\\ z=2E+1=2\cdot1+1=3,\ldots\ 5z=5\cdot3=15. \end{array}\right.\\
E=2,\ldots\left\{\begin{array}{l} x=16-5E=16-5\cdot2=6,\ldots\ 2x=2\cdot6=12\ ;\\ z=2E+1=2\cdot2+1=5,\ldots\ 5z=5\cdot5=25. \end{array}\right.\\
E=3,\ldots\left\{\begin{array}{l} x=16-5E=16-5\cdot3=1,\ldots\ 2x=2\cdot1=2\ ;\\ z=2E+1=2\cdot3+1=7,\ldots\ 5z=5\cdot7=35. \end{array}\right.
\end{array}\right.$$

95. Las tres ecuaciones $x+z=10$, $x+3z=4$, $2x+5z=37$, que acabamos de resolver, estan comprendidas en la fórmula $ax+bz=c$, siendo limitado el número de soluciones; pero, cuando b es negativa, tenemos $ax-bz=c,\ldots ax=bz+c$, que admite una infinidad de soluciones, y pueden ocurrir tres casos:

1.º La ecuacion con todos sus términos, y las incognitas con la unidad por coeficiente, esto es, $x-z=c$, que significa „Hallar dos cantidades, cuya diferencia es conocida", y se resuelve por $x=z+c$, dando á z cualesquiera valores enteros y positivos, lo que ofrece una infinidad de soluciones.

2.º La ecuacion sin mas términos que los afectos de incógnita, siendo por consiguiente $c=0$, y los coeficientes de las incógnitas números enteros mayores que la unidad, esto es, $ax-bz=0,\ldots ax=bz$, lo que se espresa por „Hallar dos productos iguales, que sean enteros „y positivos, formado cada uno por dos factores tambien enteros y positivos, siendo conocido

„un factor en cada producto", cuya cuestion se resuelve por la fórmula $x=\frac{bz}{a}$, dando á z valores enteros y positivos, que sean ecsactamente divisibles por el coeficiente a de la otra incógnita, y por tanto hay una infinidad de soluciones.

3.º La ecuacion con todos sus términos, y las dos incógnitas con coeficientes mayores que la unidad, esto es, $ax-bz=c$, lo que dice esta cuestion: „Hallar dos productos enteros y positivos, de modo que formandose cada uno por dos factores tambien enteros y positivos, y siendo conocido un factor en cada producto, resulte la diferencia de ambos productos igual á una cantidad dada." Tendremos para la resolucion $x=\frac{bz+c}{a}$, donde se pueden sustituir en lugar de z valores enteros y positivos, tales que multiplicados por su coeficiente b, y añadiendo la diferencia c de los productos, sea esta suma ecsactamente divisible por el coeficiente a de la otra incógnita, lo que ofrece una infinidad de soluciones.

96. Si en la ecuacion $ax-bz=c$ hacemos $a=7$, $b=13$, $c=4$, tendremos este cálculo:

$$7x-13z=4,$$
$$7x=13z+4,$$
$$x=\frac{13z+4}{7}=z+\frac{6z+4}{7};$$

$$\frac{6z+4}{7}=E,$$
$$6z=7E-4,$$
$$z=\frac{7E-4}{6}=E+\frac{E-4}{6};$$

$$\frac{E-4}{6}=E',$$

$$E=6E'+4;$$

$$z=E+\frac{E-4}{6},$$

$$E=6E'+4,\ldots z=6E'+4+E'=7E'+4;$$

$$x=z+\frac{6z+4}{7},$$

$$z=7E'+4,\ldots x=7E'+4+\frac{6(7E'+4)+4}{7}=13E'+8.$$

Reflecsionemos ahora que las divisiones sucesivas de los coeficientes son como vamos á figurarlas:

En el prim. período: coef. de la 2ª variable ... $\frac{13}{7}=1+\frac{6}{7}$;
En el seg. período: coef. de la 3ª variable ... $\frac{7}{6}=1+\frac{1}{6}$;
En el terc. período: coef. de la 4ª variable ... $\frac{6}{1}=6$.

Aqui vemos que desde el principio el último divisor se parte por el último residuo hasta donde se puede; de consiguiente la operacion es la de buscar el mayor divisor comun. En este concepto llamemos A al primer cociente entero, B al segundo y así sucesivamente, esto es, $A=1$, $B=1$, $C=6$, con lo que la primera variable despejada

será .... $x=z+\frac{6z+4}{7}=z+E=Az+E$;

la segunda .... $z=E+\frac{E-4}{6}=E+E'=BE+E'$;

y la tercera ... $E=6E'+E''=CE+E''=CE'+4$.

Tambien vemos que el término constante 4 se presenta en la ecuacion resultante de cada período variando su signo, de modo que en las que forman número impar lo tiene positivo y en las que lo forman par lo tiene negativo.

97. Deducimos de estas observaciones que se debe hacer

la misma operacion que para hallar el mayor divisor comun entre los coeficientes de las incógnitas ó variables de la ecuacion propuesta: representar por una letra A, B, &c. cada cociente entero, que ha de ser coeficiente de una variable, á cuyo producto se ha de agregar nueva variable intermedia para completar la espresion de la variable anterior; y en la última ecuacion añadir al segundo miembro, en vez de variable, la cantidad constante con signo positivo si esta ecuacion hace número impar en las resultantes, y con negativo si lo hace par. Las sustituciones retrógradas concluyen el cálculo.

Repitamos el ejemplo $7x-13z=4$;

Hago la operacion del may. div. com. entre los coef. 7 y 13, y represento cada coc. entero por una letra destinada al intento . . . .

	$A=1$	$B=1$	$C=6$	
13	7	6	1	0

Figuro las ecuaciones resultantes

$$x=Az+E;$$
$$z=BE+E';$$
$$E=CE'+4.$$

Sustituyo el valor de los coeficientes y de las variables

$C=6$, . . . $E=CE'+4=6E'+4$;

$$\left.\begin{array}{l}B=1\\ E=6E'+4\end{array}\right\},\ldots\ z=BE+E'=1(6E'+4)+E'=7E'+4;$$

$$\left.\begin{array}{l}A=1\\ z=7E'+4\\ E=6E'+4\end{array}\right\},\ldots\ x=Az+E=1(7E'+4)+6E'+4=13E'+8.$$

Este resultado es el mismo que sacamos antes.

98. Haremos una prevencion muy importante, y es que la ecuacion $ax-bz=c$ solo se puede resolver cuando los coeficientes a, b son entre si primeros; en inteligencia de que,

si un divisor comun lo fuese tambien de la cantidad constante c, simplificariamos la ecuacion [93] partiendola por el mismo divisor, y vendriamos al caso indicado. Demostremoslo con la ecuacion $9x-15z=2$, en que ambos coeficientes son divisibles por 3, y para ello hagamos este cálculo:

$$9x=15z+2,$$

$$x=\frac{15z+2}{9}=z+\frac{6z+2}{9};$$

$$\frac{6z+2}{9}=E,$$

$$z=\frac{9E-2}{6}=E+\frac{3E-2}{6};$$

$$\frac{3E-2}{6}=E',$$

$$E=\frac{6E'+2}{3}=2E'+\tfrac{2}{3}.$$

Pero, como $2E'$ es un número entero, y se le agrega el quebrado $\frac{2}{3}$, resulta un número misto, que no puede convertirse en entero, de consiguiente, siendo E igual á esta cantidad, tampoco puede ser entero, y la ecuacion no se resuelve como se desea.

99. Toda la doctrina de esta leccion se ilustrará con los problemas indeterminados de primer grado, á los cuales se podrá pasar desde luego si se quiere. (Veáse la coleccion tercera.)

LECCION XI.

De las Potencias y Raices de Cantidades monómias.

100. Sabemos [II 184] que elevar una cantidad á una potencia cualquiera es formar un producto, en que sea tantas veces factor como unidades tenga el esponente de la potencia.

Si queremos elevar, por ejemplo, c al cubo tendremos $c.c.c=c^1.c^1.c^1=c^{1+1+1}=c^{1.3}=c^3$: suponiendo $c=a^2$ resultará $(a^2)^3=c^{1.3}=a^{2.3}=a^6$ como se comprueba por $(a^2)^3=a^2.a^2.a^2=a^{2+2+2}=a^{2.3}=a^6$. En general $(b^m)^p=b^{mp}$, esto es, multiplicar el esponente de la cantidad por el de la potencia.

Los coeficientes numéricos y otros factores literales no pueden ofrecer dificultad.

Ejemplos:

1.º $(2ab^2)^2=2^2a^{1.2}b^{2.2}=4a^2b^4$;

2.º $(-5a^3b^2c^3m^9)^3=-5^3a^{3.3}b^{2.3}c^{3.3}m^{9.3}=-125a^9b^6c^9m^{27}$;

3.º $(4a^6b^3c^4d^5)^r=4^ra^{6r}b^{3r}c^{4r}d^{5r}$;

4.º $([(a^m)^n]^p)^q=[(a^{mn})^p]^q=(a^{mnp})^q=a^{mnpq}$.

101. Si el signo de la cantidad, que haya de elevarse, es positivo, tambien lo será el de la potencia, pues esta se forma por una série de multiplicaciones, cuyos factores van todos precedidos del signo $+$; pero, si la cantidad es negativa, tendrá la potencia el signo positivo cuando el esponente de su grado sea par, porque resultará de la combinacion de signos iguales de dos en dos; y tendrá el negativo cuando el esponente de su grado sea impar, porque, despues de combinar de dos en dos cantidades de un mismo signo, que dan un producto positivo, hay que hacer la última multiplicacion con un factor negativo.

Así lo demuestra el cálculo, suponiendo todo número par representado por $2n$, y todo número impar por $2n+1$, porque

$$(\pm a)^{2n}=[(\pm a)^2]^n=(+a^2)^n=+a^{2n};$$

$$(\pm a)^{2n+1}=(\pm a)^{2n}\times(\pm a)=+a^{2n}\times\pm a=\pm a^{2n+1}.$$

102. En los quebrados [II 189] se elevan el numerador y el denominador para obtener el quebrado, que espresa la potencia.

Ejemplos:

1.º $\left(\frac{3a^2b^3}{cd^2}\right)^5=\frac{(3a^2b^3)^5}{(cd^2)^5}=\frac{3^5a^{2.5}b^{3.5}}{c^5d^{2.5}}=\frac{243a^{10}b^{15}}{c^5d^{10}}$;

2.º $\left(-\frac{2a^5b^2c^3}{3d^2m^5}\right)^3=-\frac{(2a^5b^2c^3)^3}{(3d^2m^5)^3}=-\frac{8a^{15}b^6c^9}{27d^6m^{15}}$;

3.º $\left(\frac{5a^7b^nc^r}{6d^5e^3m^t}\right)^p=\frac{(5a^7b^nc^r)^p}{(6d^5e^3m^t)^p}=\frac{5^pa^{7p}b^{np}c^{rp}}{6^pd^{5p}e^{3p}m^{tp}}$.

103. La estraccion de raices [II 190] es una operacion inversa de la elevacion á potencias; y como el denominador de un quebrado está siempre en sentido contrario á su numerador, resulta que, cuando una cantidad tiene un quebrado por esponente, como sucede por ejemplo á $c^{\frac{1}{m}}$, la elevacion á la potencia fraccionaria $\frac{1}{m}$ es lo mismo que la estraccion de la raiz m indicada por el denominador: si tenemos $c^{\frac{n}{m}}$ quiere decir que c se ha de elevar á la potencia n, y se ha de estraer la raiz m. En general el numerador de un esponente denota la elevacion, y su denominador la estraccion. Así se comprueba por los números, pues si $n=8$ y $m=2$ tendremos $c^{\frac{n}{m}}=c^{\frac{8}{2}}=c^4$, y si $c=3$ resultará $3^{\frac{8}{2}}=(3^8)^{\frac{1}{2}}=(6561)^{\frac{1}{2}}$... ..$=81=3^4$. Esta es una consecuencia precisa de la naturaleza de las cantidades, despues de convenidos en que la raya intermedia distinga en un quebrado el numerador del denominador; pero, como causarian á veces confusion los esponentes fraccionarios, se usa el signo radical $\sqrt{}$, que ya conocemos [II 190], para quitar los denominadores y presentar mas sencilla la espresion, poniendo en su abertura el grado ú órden de la raiz que señalaría el denominador. Por tanto

$c^{\frac{1}{m}}=\sqrt[m]{c}$, $c^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{c^n}$, y tambien pudieramos decir $c^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{c^n}$...

..$=\sqrt[\frac{m}{n}]{c}$, trastornando el quebrado esponente de la potencia para que sea esponente de la raiz, lo que ofrece siempre espresiones sinónimas.

Es manifiesta la simplificacion en estos ejemplos:

1.º $a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{r}{m}}c^{\frac{p}{m}}=\sqrt[m]{a^n b^r c^p}$;

2.º $c^{\frac{n}{m}+\frac{p}{m}+\frac{s}{m}}=c^{\frac{n+p+s}{m}}=\sqrt[m]{c^{n+p+s}}$;

3.º $3^{\frac{4}{2}}a^{\frac{6}{2}}d^{\frac{8}{2}}f^{\frac{4}{2}}g^{\frac{6}{2}}=\sqrt{3^4a^6d^8f^4g^6}=9a^3d^4f^2g^3$.

104. Como una potencia de grado par puede orijinarse de una raiz positiva ó negativa [101], debemos poner á una raiz de grado par el signo de ambigüedad $\pm$, que puede distinguirse con el disyuntivo escribiendo $+ // -$, sino sabemos de antemano su sentido; pero, si el grado de la potencia fuese impar [101], tendrá la raiz el mismo signo que ella. Respecto á los coeficientes se sacará su raiz [II 204] como ya hemos enseñado.

Ejemplos:

1.º $\sqrt{9a^4b^6}=\pm 3a^{\frac{4}{2}}b^{\frac{6}{2}}=\pm 3a^2b^3=+3a^2b^3 // -3a^2b^3$;

2.º $\sqrt[8]{c^6d^4}=\pm c^{\frac{6}{8}}d^{\frac{4}{8}}=\pm c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{1}{2}}=+c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{1}{2}} // -c^{\frac{3}{4}}d^{\frac{1}{2}}$;

3.º $\sqrt[n]{a^m c^3 d^4 b^r}=a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{3}{n}}d^{\frac{4}{n}}$.

105. Asi como la elevacion á una potencia, cuyo esponente es descomponible en factores, se puede hacer elevando la cantidad á la potencia indicada por el primer factor, esta potencia á la que indica el segundo, esta á la indicada por el tercero, y de este modo hasta el último [100], pues

$([(a^m)^n]^p)^q=[(a^{mn})^p]^q=(a^{mnp})^q=a^{mnpq}$; tambien podemos estraer sucesivamente las raices, cuyos esponentes se descomponen en factores, siguiendo la indicacion de estos, como en $\sqrt[12]{531441}=\sqrt[2\cdot2\cdot3]{531441}=\sqrt[2\cdot3]{729}=\sqrt[3]{27}=3.$

106. Si entre los factores sometidos al radical hay algunos, que contengan ecsacta, una ó mas veces, la raiz indicada por este signo, se les estrae, y se pone por coeficiente del radical.

Ejemplos:

1.° $\sqrt{12}=\sqrt{4\times3}=2\sqrt{3}$;

2.° $\sqrt[3]{432}=\sqrt[3]{216\times2}=\sqrt[3]{6^3\times2}=6\sqrt[3]{2}$;

3.° $\sqrt{Nq^2}=q\sqrt{N}$;

4.° $\sqrt[5]{c^6d^8}=c^{\frac{6}{5}}d^{\frac{8}{5}}=c^{1+\frac{1}{5}}d^{1+\frac{3}{5}}=cd\times c^{\frac{1}{5}}d^{\frac{3}{5}}=cd\sqrt[5]{cd^3}$.

107. Respecto á quebrados [II 197 y 205] se estrae la raiz del numerador y denominador, en cuya operacion la raiz de un cociente es lo mismo que el cociente de las raices.

Ejemplos:

$$1.^\circ \quad \sqrt{\frac{a^4}{b^8}}=\pm\frac{\sqrt{a^4}}{\sqrt{b^8}}=\pm\frac{a^{\frac{4}{2}}}{b^{\frac{8}{2}}}=\pm\frac{a^2}{b^4};$$

$$2.^\circ \quad \sqrt[3]{\frac{-125a^6c^{18}}{b^9}}=-\frac{5a^{\frac{6}{3}}c^{\frac{18}{3}}}{b^{\frac{9}{3}}}=-\frac{5a^2c^6}{b^3};$$

$$3.^\circ \quad \sqrt[n]{\frac{a^mc^t}{b^4d^r}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}c^{\frac{t}{n}}}{b^{\frac{4}{n}}d^{\frac{r}{n}}}.$$

108. Las cantidades afectas del signo $\sqrt{}$, ó que tienen un quebrado por esponente, toman el nombre de *cantidades*

radicales; tales son $\sqrt{a}$, $b^{\frac{1}{3}}$. Cuando estos caractéres se espresan en números, que tienen ecsacta la raiz, desaparece el radical ó el esponente fraccionario, como en $\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$, $b^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=2$, ó bien $a^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$, $\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{\frac{1}{27}}=\frac{1}{3}$; pero, si los números no tienen raiz ecsacta en enteros ni en quebrados, como $\sqrt{a}=\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$, se llaman [II 197] *números sordos*, *irracionales* ó *incomensurables*, porque no tienen medida comun con la unidad, esto es, no son ecsactamente colecciones ni partes de ella.

109. Sucede con frecuencia que el cálculo pide estraer de una cantidad negativa una raiz de grado par; pero no es posible ejecutar esta operacion, pues, segun la ley de los signos [101], no hay cantidad alguna, sea positiva ó negativa, que elevada á una potencia par produzca otra negativa. Por esta razon llamamos espresiones imajinarias á las que tienen esta forma $\sqrt{-a^2}$, $\sqrt[4]{-b}$, $\sqrt[6]{-m}$, $\sqrt[2n]{-c^m}$. Pero, si tomamos $\sqrt[2n]{-c^m}$ por tipo de ellas, siendo n un número entero, tendrémos $\sqrt[2n]{-c^m}=\sqrt[2n]{-1c^m}=(-1)^{\frac{1}{2n}}c^{\frac{m}{2n}}\ldots$ $\ldots=c^{\frac{m}{2n}}\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[2n]{c^m}\times\sqrt[2n]{-1}$, cuyas transformaciones manifiestan que cualquiera espresion imaginaria se puede descomponer en dos factores, el uno real, que será un radical del mismo grado con la cantidad positiva debajo de si, y el otro imajinario, que consistirá en un radical del mismo grado comprensivo de la unidad con signo negativo. En el caso de ser n un número impar resultará que, como $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{\sqrt[n]{-1}}$ y toda raiz impar de -1 es -1, será $\sqrt[2n]{-1}=\sqrt{\sqrt[n]{-1}}\ldots$

$..=\sqrt{-1}$, de consiguiente $\sqrt[2n]{-a^m}=\sqrt[2n]{a^m}\cdot\sqrt[2n]{-1}=\sqrt[2n]{a^m}\cdot\sqrt{-1}$, y llamando B á la cantidad real tendremos $\sqrt[2n]{-a^m}=\sqrt[2n]{a^m}\cdot\sqrt{-1}..$ $..=B\sqrt{-1}$.

LECCION XII.

Del Cálculo Radical.

110. Los radicales del mismo grado, que comprenden una misma cantidad, forman términos semejantes, aunque sean distintos sus coeficientes numéricos ó literales, pues una cantidad cualquiera sometida á un radical constituye la unidad de su especie. Reducense á semejantes en los casos posibles [106] las cantidades radicales que no lo son, segun se requiere para las operaciones fundamentales del cálculo.

111. La adicion y sustraccion de cantidades radicales desemejantes se indica con los signos positivo y negativo, y de cantidades radicales semejantes se hace entre sus coeficientes [II 206 y 207], como aquí se figura:

$$\begin{array}{ll}
\text{Adicion:} & 3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}+5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3} \\
 & \quad 2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc} \\
\hline
 & (3a^2b^3+2)a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-3a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-16c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Sustraccion:} & 3a^4b^3\sqrt[7]{a^2b^3}+5a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-4c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3} \\
 & -\left(2a^2\sqrt[7]{a^2b^3}-8a^3b^2\sqrt[5]{a^2}-12c^2\sqrt{bc}\right) \\
\hline
 & (3a^2b^3-2)a^2\sqrt[7]{a^2b^3}+13a^3b^2\sqrt[5]{a^2}+8c^2\sqrt{bc}+\sqrt[4]{a^3b^3}.
\end{array}$$

112. En la multiplicacion y division de cantidades radicales de un mismo grado; como la raiz de un producto es lo mismo que el producto de las raices de sus factores,

y la de un cociente equivale al cociente de las raices de dividendo y divisor, se multiplican ó parten las cantidades, y al producto ó cociente se deja el mismo signo radical, sacando al coeficiente los factores, que compongan raiz ecsacta.

Multiplicacion :

1.° $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$;

2.° $\sqrt[n]{5x^2z^4}\times\sqrt[n]{2ax}=\sqrt[n]{5x^2z^4\times 2ax}=\sqrt[n]{10ax^3z^4}$;

3.° $3a\sqrt[5]{a^3b^4c^2}\cdot -2ab^2\sqrt[5]{4ab^3c^3}=-3a\cdot 2ab^2\sqrt[5]{a^3b^4c^2\cdot 4ab^3c^3}=-6a^2b^2\sqrt[5]{4a^4b^7c^5}\ldots$

$\ldots=-6a^2b^2\sqrt[5]{4a^4b^2b^5c^5}=-6a^2b^3c\sqrt[5]{4a^4b^2}$.

Division :

1.° $2\sqrt{6}:\sqrt{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=2$;

2.° $\sqrt[n]{ax}:\sqrt[n]{bxz}=\dfrac{\sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{bxz}}=\sqrt[n]{\dfrac{ax}{bxz}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{bz}}$;

3.° $\sqrt[5]{a^3b^4c^5}:\sqrt[5]{a^2b^5c^2d^4}=\sqrt[5]{(a^3b^4c^5):(a^2b^5c^2d^4)}=\sqrt[5]{ab^{-1}c^3d^{-4}}=\sqrt[5]{\dfrac{ac^3}{bd^4}}$.

113. Cuando los radicales son de diferente grado se reducen al mismo, multiplicando los esponentes de cada cantidad y de cada radical por los esponentes de los demas radicales, ó

se ponen á las cantidades los respectivos esponentes fraccionarios, que se reducen á un comun denominador, y luego se hace la multiplicacion ó division de cantidades.

Multiplicacion:

1.° $\sqrt{a}.\sqrt[3]{b}=\sqrt[2.3]{a^{1.3}}.\sqrt[3.2]{b^{1.2}}=\sqrt[6]{a^3}.\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}$ // $\sqrt{a}.\sqrt[3]{b}=a^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{3}{6}}b^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{a^3b^2}$;

2.° $\sqrt[3]{a^2bc^2}.-\sqrt[4]{a^3b^2c}=-\sqrt[3.4]{a^{2.4}b^{1.4}c^{2.4}}.\sqrt[4.3]{a^{3.3}b^{2.3}c^{1.3}}=-\sqrt[12]{(a^8b^4c^8)(a^9b^6c^3)}\ldots$

$\ldots=-\sqrt[12]{a^{17}b^{10}c^{11}}=-a\sqrt[12]{a^5b^{10}c^{11}}$;

3.° $\sqrt[m]{a^pc^tb^q}.\sqrt[n]{a^rb^s}=\sqrt[mn]{(a^{pn}b^{qn}c^{tn})(a^{rm}b^{sm})}=\sqrt[mn]{a^{pn+rm}b^{qn+sm}c^{tn}}$.

Division:

1.° $15\sqrt[3]{a^2bc^2d}:5\sqrt{abcm}=\frac{15}{5}.\frac{\sqrt[6]{a^4b^2c^4d^2}}{\sqrt[6]{a^3b^3c^3m^3}}=3\sqrt[6]{\frac{a^4b^2c^4d^2}{a^3b^3c^3m^3}}=3\sqrt[6]{ab^{-1}cd^2m^{-3}}=3\sqrt[6]{\frac{acd^2}{bm^3}}$;

2.° $\frac{a}{b}\sqrt[m]{\frac{s}{t}}:\frac{c}{d}\sqrt[n]{\frac{x}{z}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}\sqrt[mn]{\frac{s^n}{t^n}}:\sqrt[mn]{\frac{x^m}{z^m}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^n}{t^n}:\frac{x^m}{z^m}}=\frac{ad}{bc}\sqrt[mn]{\frac{s^nz^m}{t^nx^m}}$;

3.° $\sqrt[n]{a^3b^rc^s}:\sqrt[m]{a^sc^td}=\sqrt[mn]{a^{3m}b^{rm}c^{sm}}:\sqrt[mn]{a^{sn}c^{tn}d^n}=\sqrt[mn]{\frac{a^{3m-sn}b^{rm}c^{sm-tn}}{d^n}}$.

114. Acerca de la elevacion á potencias y estraccion de raices de cantidades radicales bastaran los ejemplos, sirviendo de esplicacion los signos.

Elevacion:

1º $(\sqrt[3]{a^2b})^4=(a^2b)^{\frac{4}{3}}=a^{\frac{8}{3}}b^{\frac{4}{3}}=a^2b\,.\,a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}=a^2b\sqrt[3]{a^2b}$;

2º $(\sqrt[4]{a^3b^2})^2=(a^3b^2)^{\frac{2}{4}}=(a^3b^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^3b^2}=ab\sqrt{a}$.

Estraccion:

1º $\sqrt{\sqrt[7]{a^6b^4c^8}}=\sqrt[7]{\sqrt{a^6b^4c^8}}=\sqrt[7]{a^3b^2c^4}$;

2º $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^2b^5c^7}}=(\sqrt[4]{a^2b^5c^7})^{\frac{1}{3}}=(a^2b^5c^7)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}=(a^2b^5c^7)^{\frac{1}{12}}\ldots$

$\ldots=\sqrt[12]{a^2b^5c^7}$;

3º $\sqrt[r]{\sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}}}=(a^m)^{\frac{1}{rpn}}=\sqrt[rpn]{a^m}$.

115. Observemos que $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{-m}{-n}}=\sqrt[-n]{a^{-m}}$, de consiguiente se pueden mudar los signos al esponente del radical y al de cada caracter de la cantidad incomplecsa sometida al mismo, sin que se altere el valor ni el sentido de la espresion. Aqui debemos advertir á los principiantes que cuiden de no confundir los radicales y cantidades de esponentes negativos con las espresiones imajinarias.

116. Estas espresiones [109], sometiendose á las reglas del lenguaje algebráico, y sirviendo de medios artificiales en la lógica del cálculo, son muy útiles para obtener resultados de gran importancia. Con ellas se hacen las mismas operaciones que con las raices reales, considerandose tambien [110] en cada cantidad negativa, sometida á un radical de grado par, la unidad de su especie, y desvaneciendose frecuentemente en todo ó en parte, por las operaciones fundamentales, los términos afectos de espresiones imajinarias. Vamos á sumarlas y restarlas.

Adicion: $3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$

$$-3\sqrt{-a^4}+6\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}-5\sqrt[6]{-a^5b^3}$$

$$4\sqrt[6]{-a^3b^2}+16\sqrt[4]{-c^3d^5}-5\sqrt[6]{-a^5b^3}.$$

Sustraccion: $3\sqrt{-a^4}-2\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}$

$$-(-3\sqrt{-a^4}+6\sqrt[6]{-a^3b^2}+8\sqrt[4]{-c^3d^5}-5\sqrt[6]{-a^5b^3})$$

$$6\sqrt{-a^4}-8\sqrt[6]{-a^3b^2}\qquad+5\sqrt[6]{-a^5b^3}.$$

117. Para proceder á la multiplicacion y division recordarémos que toda espresion imajinaria se puede [109] descomponer en dos factores, uno real y otro imajinario.

Multiplicacion:

1.º $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b}=\sqrt{a}\sqrt{-1}.\sqrt{b}\sqrt{-1}=\sqrt{a}\sqrt{b}.(\sqrt{-1})^2\ldots$

$\ldots=\sqrt{ab}(-1)^{\frac{2}{2}}=\sqrt{ab}(-1)^1=\sqrt{ab}\cdot-1=-\sqrt{ab}$;

2.º $\sqrt{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}=(-a)^{\frac{1}{2}}.(-b)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}.b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}}\ldots$

$\ldots=a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{4}}b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^2b}\sqrt[4]{(-1)^3}\ldots$

$\ldots=\sqrt[4]{a^2b}\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{-a^2b}$.

En el primer ejemplo vemos que el producto $-\sqrt{ab}$ es una cantidad real y el mismo que si multiplicaramos $+\sqrt{a}$ por $-\sqrt{b}$, porque se saca el factor -1 del radical $\sqrt{-1}$ elevado al cuadrado, esto es, $(\sqrt{-1})^2=-1$; pero, cuando el producto resulta tambien imajinario, no aparece contradicion á la ley de los signos esteriores, como lo manifiesta el segundo ejemplo $\sqrt{-a}\cdot\sqrt[4]{-b}=\sqrt[4]{-a^2b}$.

Division: 1.º $\sqrt{-a}:\sqrt{-b}=\frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{b}\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\times 1=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$;

2.º $\sqrt{-a}:\sqrt[4]{-b}=(-a)^{\frac{1}{2}}:(-b)^{\frac{1}{4}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}(-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{\frac{2}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}\dots$

$\dots=\frac{\sqrt[4]{a^2}\sqrt[4]{-1}}{\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt[4]{-a^2}}{\sqrt[4]{b}}=\sqrt[4]{-\frac{a^2}{b}}$.

118. Como ya sabemos multiplicar y partir radicales en cantidades incomplecsas no pueda ocurrir dificultad para ejecutar las mismas operaciones con radicales en cantidades complecsas, pues que sus términos están enlazados del mismo modo que los de otros cualesquiera polinómios. Ejercitemonos en estos ejemplos:

Multiplicacion: 1.º $(x+\sqrt{x^2-a^2})(x-\sqrt{x^2-a^2})=(x+\sqrt{x^2-a^2})x-(x+\sqrt{x^2-a^2})\sqrt{x^2-a^2}\dots$

$\dots=x^2+x\sqrt{x^2-a^2}-x\sqrt{x^2-a^2}-(\sqrt{x^2-a^2})^2=x^2-(x^2-a^2)=a^2$;

2.º $(\sqrt{a^2-b^2})(\sqrt{3a-3b})=\sqrt{(a+b)(a-b)\cdot 3(a-b)}=\sqrt{(a-b)^2\cdot 3(a+b)}\dots$

$\dots=(a-b)\sqrt{3(a+b)}$.

Division: 1.º $5c\sqrt{a+b}:6c^2\sqrt{a^3+b^3}=\frac{5\sqrt{a+b}:\sqrt{a+b}}{6c\sqrt{a^3+b^3}:\sqrt{a+b}}=\frac{5}{6c\sqrt{(a^2-ab+b^2)}}$;

2.º $\left(6a^4-23a^2\sqrt{-1}-13ab-20+\frac{22b\sqrt{-1}}{a}+\frac{6b^2}{a^2}\right):\left(2a^2-5\sqrt{-1}-\frac{3b}{a}\right)\dots$

$$\cdot\cdot=\frac{6a^6-23a^4\sqrt{-1}-13a^3b-20a^2+22ab\sqrt{-1}+6b^2}{(2a^3-5a\sqrt{-1}-3b)a}=\frac{3a^3-4a\sqrt{-1}-2b}{a}\cdots$$

$$\cdot\cdot=3a^2-4\sqrt{-1}-\frac{2b}{a}.$$

119. Cuando sucede, como en el último ejemplo, que hay radicales imajinarios en algunos términos, toda la espresion es por su enlace imajinaria, pues que $a+\sqrt{-b}$ no puede igualarse con una cantidad real, como por ejemplo c, porque entonces resultaría $\sqrt{-b}$ igual á $c-a$ contra la naturaleza de las cantidades, lo que seria absurdo.

120. Podemos dar á toda espresion imajinaria de segundo grado la forma $A+B\sqrt{-1}$, y si la multiplicamos por $A-B\sqrt{-1}$ tendremos [48 3ª] $(A+B\sqrt{-1})(A-B\sqrt{-1})\cdots$ $\cdot\cdot=A^2-(B\sqrt{-1})^2=A^2-B^2\cdot-1=A^2+B^2$, de donde se deduce que, para descomponer en factores toda cantidad, que sea la suma de dos términos, se pone la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer termino, y por segundo la raiz del otro multiplicada por $\sqrt{-1}$ con diferente signo en cada factor: así $a+b=(\sqrt{a}+\sqrt{b}\sqrt{-1})(\sqrt{a}-\sqrt{b}\sqrt{-1})$; $a^m+b^n=(\sqrt{a^m}+\sqrt{b^n}\sqrt{-1})(\sqrt{a^m}-\sqrt{b^n}\sqrt{-1})$.

121. Respecto á la elevacion de espresiones imajinarias considerarémos que

$$(\sqrt{-1})^0=(\sqrt{-1})^{1-1}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}=+1;$$

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1};$$

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=-1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\cdot\sqrt{-1}=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}\,;$$
$$(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^3.\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.\sqrt{-1}=-(\sqrt{-1})^2=-(-1)=+1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^5=(\sqrt{-1})^4.\sqrt{-1}=1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,;$$
$$(\sqrt{-1})^6=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^2=1.-1=-1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^7=(\sqrt{-1})^4.(\sqrt{-1})^3=1.-\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$

Vemos que las cuatro últimas potencias de $\sqrt{-1}$ son iguales á las cuatro primeras, y continuando del mismo modo se estableceria un periodo que se reproduce indefinidamente. En general, espresando por n el cero y sucesivamente los números enteros, obtendremos los resultados de todas las potencias de $\sqrt{-1}$ en estas cuatro clases:

$$(\sqrt{-1})^{4n}=((\sqrt{-1})^4)^n=(+1)^n=+1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+1}=(\sqrt{-1})^{4n}.\sqrt{-1}=+1\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\,;$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+2}=(\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^2=+1.-1=-1\,;$$
$$(\sqrt{-1})^{4n+3}=(\sqrt{-1})^{4n}.(\sqrt{-1})^3=+1.-\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$

En su consecuencia $(\sqrt{-a})^m=\sqrt{a^m}(\sqrt{-1})^m=\sqrt{a^m} \,//\, \sqrt{a^m}.\sqrt{-1} \,//\, -\sqrt{a^m} \,//\, -\sqrt{a^m}.\sqrt{-1}$.

122. Tocante á la estraccion observarémos que de las espresiones halladas en el artículo antecedente se sacan, por un procedimiento inverso, las consecuencias siguientes:

$$\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^{4n+1},\ldots\sqrt[4n+1]{\sqrt{-1}}=\sqrt[4n+1]{(\sqrt{-1})^{4n+1}}=(\sqrt{-1})^{\frac{4n+1}{4n+1}}=(\sqrt{-1})^{1}=\sqrt{-1};$$

$$-1=(\sqrt{-1})^{4n+2},\ldots\sqrt[4n+2]{-1}=\sqrt[4n+2]{(\sqrt{-1})^{4n+2}}=(\sqrt{-1})^{\frac{4n+2}{4n+2}}=(\sqrt{-1})^{1}=\sqrt{-1};$$

$$-\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^{4n+3},\ldots\sqrt[4n+3]{-\sqrt{-1}}=\sqrt[4n+3]{(\sqrt{-1})^{4n+3}}=(\sqrt{-1})^{\frac{4n+3}{4n+3}}=(\sqrt{-1})^{1}=\sqrt{-1}.$$

Las operaciones del cálculo son como las de cantidades radicales, de manera que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{-1}}=\sqrt[mn]{-1}$, y luego se hacen las simplificaciones posibles.

123. Hagamos el ensayo de reducir un quebrado, en que entran radicales, á su mas sencilla espresion, buscando la mayor medida comun de su numerador y denominador por las reglas esplicadas en la Leccion VII.

Sea el quebrado $$\frac{12a\sqrt[3]{b^2}-36\dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}}+27\dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{a^2}}{90a\sqrt[3]{b}-195\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}+90\dfrac{\sqrt[3]{b}}{a^2}} \;//\; \frac{12ab^{\frac{2}{3}}-36a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}+27a^{-2}b^{\frac{2}{3}}}{90ab^{\frac{1}{3}}-195a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+90a^{-2}b^{\frac{1}{3}}};$$

Saco el factor independiente $3b^{\frac{1}{3}}$;

$$30a - 65a^{-\frac{1}{2}} + 30a^{-2} \;\Big|\; 15 \text{ Cociente.}$$

Multiplicando por 2... $60a - 130a^{-\frac{1}{2}} + 60a^{-2} \;\Big|\; 4ab^{\frac{1}{3}} - 12a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 9a^{-2}b^{\frac{1}{3}}$ en que suprimiré $b^{\frac{1}{3}}$.

$$-60a + 180a^{-\frac{1}{2}} - 135a^{-2} \qquad 4a - 12a^{-\frac{1}{2}} + 9a^{-2} \;\Big|\; 2a - 3a^{-\frac{1}{2}} \text{ Cociente.}$$

$$50a^{-\frac{1}{2}} - 75a^{-2} \qquad -4a + 6a^{-\frac{1}{2}} \qquad 2 - 3a^{-\frac{3}{2}} \text{ div. com.}$$

Suprimiendo $25a^{-\frac{1}{2}}$.............. $2 - 3a^{-\frac{3}{2}}$ $\qquad -6a^{-\frac{1}{2}} + 9a^{-2}$

$$+6a^{-\frac{1}{2}} - 9a^{-2}$$

$$0$$

Resulta que el comun divisor es $3b^{\frac{1}{3}}\left(2 - 3a^{-\frac{3}{2}}\right) = 3b^{\frac{1}{3}}\left(2 - \frac{3}{a^{\frac{3}{2}}}\right) = 3b^{\frac{1}{3}}\left(\frac{2a^{\frac{3}{2}} - 3}{a^{\frac{3}{2}}}\right)$ en que se debe suprimir el denominador, porque, al ejecutar la division de los dos polinómios por el divisor comun, se convertiria $a^{\frac{3}{2}}$ en multiplicador de entrambos; por lo que la mayor medida comun será $3b^{\frac{1}{3}}(2a^{\frac{3}{2}} - 3)$.

$$\text{Así } \frac{12a\sqrt[3]{b^2} - 36\dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}} + 27\dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{a^2}}{90a\sqrt[3]{b} - 195\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}} + 90\dfrac{\sqrt[3]{b}}{a^2}} = \frac{(12ab^{\frac{2}{3}} - 36a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} + 27a^{-2}b^{\frac{2}{3}}) : 3b^{\frac{1}{3}}(2a^{\frac{3}{2}} - 3)}{(90ab^{\frac{1}{3}} - 195a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} + 90a^{-2}b^{\frac{1}{3}}) : 3b^{\frac{1}{3}}(2a^{\frac{3}{2}} - 3)} \ldots$$

$$\ldots=\frac{2a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}-3a^{-2}b^{\frac{1}{3}}}{15a^{-\frac{1}{2}}-10a^{-2}}=\frac{\left(\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{3}{a^2}\right)\sqrt[3]{b}}{\frac{15}{\sqrt{a}}-\frac{10}{a^2}}.$$

LECCION XIII.

De las Potencias de Cantidades polinómias.

124. Aunque sabemos elevar cualquier polinómio á una potencia multiplicandolo sucesivamente por si mismo, nos proponemos hallar al intento métodos generales mas sencillos por medio del binómio $(a+b)^m$, de que hemos podido formar alguna idea al descomponer en dos partes [II 186 y 187] los números $34^2=(30+4)^2$ y $12^3=(10+2)^3$ para su elevacion á estas potencias.

125. Si hacemos $m=2$ será $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, y si $m=3$ resultará $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, de modo que para elevar al cuadrado ó al cubo otro binómio, por ejemplo $p+q$, bastará la sustitucion de las letras, como

$$(p+q)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=p^2+2pq+q^2;$$
$$(p+q)^3=(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=p^3+3p^2q\ldots$$
$$\ldots+3pq^2+q^3.$$

126. Cuando la cantidad propuesta comprende mas de dos términos igualamos el primero ó el último con el primero del binómio, y los otros con el segundo del binómio. La elevacion de $c+d+e-f$ al cuadrado se hace asi:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

$$\left.\begin{array}{l} c=a \\ d+e-f=b \end{array}\right\}, \ldots (c+d+e-f)^2=c^2+2c(d+e-f)\ldots$$
$$\ldots+(d+e-f)^2=c^2+2c(d+e-f)\ldots$$
$$\ldots+d^2+2d(e-f)+(e-f)^2=c^2\ldots$$

$$\ldots + 2c(d + e - f) + d^2 + 2d(e - f) \ldots$$

$\ldots + e^2 - 2ef + f^2$; cuyo resultado, guardando analogía con la fórmula, presenta el cuadrado de cada término seguido del duplo de su producto por los términos subsiguientes. Con esta regla hallarémos desde luego

1.º $(m + n + p - q + r - s + \&c.)^2 = m^2 + 2m(n + p - q \ldots$
$\ldots + r - s + \&c.) + n^2 + 2n(p - q + r - s + \&c.) + p^2 \ldots$
$\ldots + 2p(-q + r - s + \&c.) + q^2 - 2q(r - s + \&c.) \ldots$
$\ldots + r^2 + 2r(-s + \&c.) + s^2 + \&c.$;

2.º $(c^2 + d^2 + 4m^3)^2 = (c^2)^2 + 2c^2(d^2 + 4m^3) + (d^2)^2 \ldots$
$\ldots + 2d^2 . 4m^3 + (4m^3)^2 = c^4 + 2c^2d^2 + 8c^2m^3 + d^4 \ldots$
$\ldots + 8d^2m^3 + 16m^6$.

127. Para elevar un polinómio, como $c + d - e$, al cubo lo harémos por sustitucion de esta manera:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$\left.\begin{matrix} c = a \\ d - e = b \end{matrix}\right\}$, $\ldots (c + d - e)^3 = c^3 + 3c^2(d - e) + 3c(d - e)^2 \ldots$
$\ldots + (d - e)^3 = c^3 + 3c^2(d - e) + 3c(d^2 - 2de \ldots$
$\ldots + e^2) + d^3 - 3d^2e + 3de^2 - e^3$; y esta espresion, conservando su analogía con la fórmula, presenta el cubo de cada término seguido del triplo producto de su cuadrado por los términos subsiguientes, y de su triplo producto por el cuadrado de los mismos términos. Asi obtendrémos inmediatamente:

1.º $(m + n + p - q)^3 = m^3 + 3m^2(n + p - q) + 3m(n + p - q)^2 \ldots$
$\ldots + n^3 + 3n^2(p - q) + 3n(p - q)^2 + p^3 + 3p^2 . - q \ldots$
$\ldots + 3pq^2 - q^3 = m^3 + 3m^2(n + p - q) + 3m(n^2 + 2np \ldots$
$\ldots - 2nq + p^2 - 2pq + q^2) + n^3 + 3n^2(p - q) \ldots$
$\ldots + 3n(p^2 - 2pq + q^2) + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$;

2.º $(c^2 + d^2 + 4m^3)^3 = (c^2)^3 + 3(c^2)^2(d^2 + 4m^3) \ldots$
$\ldots + 3c^2(d^2 + 4m^3)^2 + (d^2)^3 + 3(d^2)^2 . 4m^3 \ldots$

$\ldots + 3d^2(4m^3)^2 + (4m^3)^3 = c^6 + 3c^4(d^2 + 4m^3) \ldots$
$\ldots + 3c^2(d^4 + 8d^2m^3 + 16m^6) + d^6 + 12d^4m^3 \ldots$
$\ldots + 48d^2m^6 + 64m^9.$

128. Sobre la multiplicacion de diferentes binómios entre sí, como $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 \ldots$ $\ldots + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + (abc + abd + acd \ldots$ $\ldots + bcd)x + abcd$, hemos hecho varias observaciones [48 4ª], que repetirémos por partes suponiendo que sea m el número de factores binómios.

En este concepto, siendo el primer término del producto la primera parte de cada binómio, elevada á una potencia igual al número de binómios, lo representarémos por x^m.

Como el segundo término del producto es la primera parte de cada binómio, elevada á una potencia una unidad menor que en el primer término, y multiplicada por la suma de las segundas partes de los binómios; si espresamos esta suma por P, esto es, $P = a + b + c + d + e + \&c.$, representarémos el segundo término del producto por Px^{m-1}.

Respecto á que en los términos siguientes la potencia á que está elevada la primera parte de los binómios va siendo sucesivamente una unidad menor, y está multiplicada por la suma de las segundas partes de ellos tomadas de dos en dos, de tres en tres y así gradualmente; si espresamos por Q la suma de estas segundas partes de dos en dos, ó bien $Q = ab + ac + ad + bc + bd + cd + \&c.$, será Qx^{m-2} el tercer término del producto, y si representamos por R la suma de las mismas segundas partes de tres en tres, ó bien $R = abc + abd + acd + bcd + \&c.$, será el cuarto Rx^{m-3}, y continuando por el mismo órden obtendremos los demas términos Sx^{m-4}, Tx^{m-5}, &c.

Mediante á que el último término del producto es la primera parte de los binómios con un esponente igual á cero, multiplicada por todas las segundas partes de ellos; si hacemos $Y = abcd$ &c., tendremos por último término $Yx^{m-m} = Yx^0 = Y$.

Dedúcese de todo que la espresion general será $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ &c. $= x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2}$ ... ... $+ Rx^{m-3} + Sx^{m-4} +$ &c. .... $+ Y$.

129. Esta espresion nos servirá, teniendo presente la Leccion XXV de la Arimética sobre permutaciones y combinaciones, para demostrar con toda generalidad la composicion de los productos de binómios. Con efecto, si multiplicamos $x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} +$ &c. ...... $+ Y$ por $x+l$, tendremos $x^{m+1} + (P+l)x^m + (Q+Pl)x^{m-1} + (R+Ql)x^{m-2}$... .. + &c. .... $+ Yx + Yl$; luego, si P es la suma de m cantidades a, b, c, d, &c., será $P+l$ la de $m+1$ cantidades a, b, c, d, &c., l: si Q es la suma de los productos de las m cantidades a, b, c, d, &c. tomadas de dos en dos, $Q+Pl$ espresará la de los productos de $m+1$ cantidades a, b, c, d, &c., l tomadas tambien de dos en dos; si R es la suma de los productos de m cantidades a, b, c, d, &c. tomadas de tres en tres, $R+Ql$ será la de los productos de $m+1$ cantidades a, b, c, d, &c., l tomadas asimismo de tres en tres: este modo de discurrir se estiende á todos los términos, y el último Yl será el producto de las $m+1$ segundas partes de todos los binómios. Por tanto siendo verdadera, como hemos reconocido, la ley de composicion para el producto de cuatro factores binómios, lo será tambien para el de cinco binómios, y sucesivamente para seis, siete, y en general para un número cualquiera de ellos.

130. Ahora, suponiendo iguales las segundas partes de los m binómios, serán estos factores $(x+a)(x+a)(x+a)$ &c. ó bien $(x+a)^m$, y representando por A, B, C, D, &c. el nú-

mero de productos de las segundas partes de binómio tomadas de tantas en tantas cuantos términos precedan, sacarémos

$$P = a + a + a + a + \&c. = Aa;$$
$$Q = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + \&c. = Ba^2;$$
$$R = a^3 + a^3 + a^3 + a^3 + \&c. = Ca^3;$$
$$S = Da^4;$$
$$T = Ea^5;$$

&c.; de modo que la espresion general será

$$(x+a)^m = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + Sx^{m-4} + \&c. = x^m + Aax^{m-1} + Ba^2x^{m-2} + Ca^3x^{m-3} + Da^4x^{m-4} + \&c.$$

131. Por la doctrina recordada de las combinaciones [II 258] sabemos que el número m de cosas tomadas simplemente

de una en una es m, . . . $A = m$;

de dos en dos es $\frac{m(m-1)}{2}$, . . . $B = \frac{m(m-1)}{2} = A\frac{m-1}{2}$;

de tres en tres es $\frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3}$, . . . $C = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} = B\frac{m-2}{3}$;

de cuatro en cuatro es $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$, . . . $D = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} = C\frac{m-3}{4}$;

y así sucesivamente disminuyendo una unidad al numerador y aumentandola al denominador para formar el quebrado, que multiplica al coeficiente ó letra mayuscula anterior; pero en el último término Y, que figurarémos por $La^m x^{m-m} = La^m x^0 = La^m$, habrá de ser $L = 1$ para que se cumpla la propiedad de formarse el último término por el producto de todas las segundas partes del binómio en su elevacion á la potencia m.

Resulta, pues, que

$$(x+a)^m = x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + Sx^{m-4} + \&c. \ldots\ldots + Y \ldots$$
$$\ldots = x^m + Aax^{m-1} + Ba^2x^{m-2} + Ca^3x^{m-3} + Da^4x^{m-4} + \&c. \ldots\ldots + La^m \ldots$$
$$\ldots = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + A\frac{m-1}{2}a^2x^{m-2} + B\frac{m-2}{3}a^3x^{m-3} + C\frac{m-3}{4}a^4x^{m-4} + D\frac{m-4}{5}a^5x^{m-5} + \&c. \ldots\ldots + a^m.$$

132. Esta generacion de coeficientes facilita mucho la elevacion del binómio á una potencia cualquiera, pues que en el primer término su coeficiente es la unidad, y en los demas se saca el coeficiente multiplicando el del término anterior por el esponente, que lleva la primera parte del binómio en el mismo término, y dividiendo este producto por el número de términos que preceden. En cuanto á esponentes la primera parte del binómio está elevada en el primer término á la potencia dada, y en los demas se disminuye sucesivamente su esponente en una unidad hasta finalizar en $x^{m-m} = x^0 = 1$; y la segunda parte del binómio tiene en el primer término cero por esponente, esto es $a^0 = 1$, y despues va aumentando este esponente una unidad en cada término hasta que llega al grado de la potencia. Respecto á signos son todos

positivos cuando la segunda parte del binómio es positiva; pero, si es negativa, alternan en los términos los signos de mas y menos, segun lo requieren las reglas de la multiplicacion.

Conocidas estas leyes no hallarémos tropiezo en la elevacion del binómio á una potencia numérica, como

$$(c+d)^7 = c^7 + \tfrac{7}{1}c^6 d + 7 \cdot \tfrac{6}{2}c^5 d^2 + 21 \cdot \tfrac{5}{3}c^4 d^3 + 35 \cdot \tfrac{4}{4}c^3 d^4 + 35 \cdot \tfrac{3}{5}c^2 d^5 + 21 \cdot \tfrac{2}{6}cd^6 + 7 \cdot \tfrac{1}{7}d^7 \ldots$$

$$\ldots = c^7 + 7c^6 d + 21c^5 d^2 + 35c^4 d^3 + 35c^3 d^4 + 21c^2 d^5 + 7cd^6 + d^7.$$ Aquí observarémos que, siendo el binómio simétrico en si mismo, pues lo mismo es escribir $c+d$ que $d+c$, tambien lo es la potencia en su desarrollo, correspondiendose los términos inversamente homólogos, como el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, y así sucesivamente desde los estremos hasta coincidir en el centro, donde habrá un término sin otro análogo cuando la potencia sea par; resultando finalmente que en los términos inversamente homólogos los coeficientes son los mismos y las partes del binómio cambian de representacion por la alternativa de sus esponentes.

133. La fórmula enteramente esplícita es

$$(x \pm a)^m = x^m \pm m a x^{m-1} + A \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} \pm B \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + C \cdot \frac{m-3}{4} a^4 x^{m-4} \ldots\ldots \pm L a^m \ldots$$

$$\ldots = a^0 x^m \pm \frac{m}{1} a^1 x^{m-1} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} a^2 x^{m-2} \pm \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} a^3 x^{m-3} + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} a^4 x^{m-4} \ldots\ldots \pm a^m x^0;$$

y se conoce con el nombre de binómio de Newton, porque la inventó este Príncipe de la Ciencia.

Todavia podemos presentar la fórmula mas sencilla de esta manera:

$$(x+a)^m = x^m \left\{ 1 + m \frac{a}{x} + m \cdot \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \left(\frac{a}{x}\right)^3 + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \left(\frac{a}{x}\right)^4 \cdot \ldots\ldots + \left(\frac{a}{x}\right)^m \right\};$$

donde, una vez hallados los coeficientes, no hay mas que elevar á potencias el cociente de la segunda parte del binómio partida por la primera, y multiplicar por la primera parte elevada á la potencia dada la espresion contenida entre corchetes.

Hagamos esta aplicacion:

$$(2z^3 - 5b^3)^6 = (x+a)^m = x^m \left\{ 1 + m \frac{a}{x} + A \frac{m-1}{2} \left(\frac{a}{x}\right)^2 + B \frac{m-2}{3} \left(\frac{a}{x}\right)^3 + C \frac{m-3}{4} \left(\frac{a}{x}\right)^4 + D \frac{m-4}{5} \left(\frac{a}{x}\right)^5 + E \frac{m-5}{6} \left(\frac{a}{x}\right)^6 \right\} \ldots$$

$$\ldots = (2z^3)^6 \left\{ 1 + 6 \cdot -\frac{5b^3}{2z^3} + 6 \cdot \tfrac{5}{2} \left(-\frac{5b^3}{2z^3}\right)^2 + 15 \cdot \tfrac{4}{3} \left(-\frac{5b^3}{2z^3}\right)^3 + 20 \cdot \tfrac{3}{4} \left(-\frac{5b^3}{2z^3}\right)^4 + 15 \cdot \tfrac{2}{5} \left(-\frac{5b^3}{2z^3}\right)^5 + 6 \cdot \tfrac{1}{6} \left(-\frac{5b^3}{2z^3}\right)^6 \right\} \ldots$$

$$\ldots = 64z^{18} - 960b^3 z^{15} + 6000b^6 z^{12} - 20000b^9 z^9 + 37500b^{12} z^6 - 37500b^{15} z^3 + 15625b^{18}.$$

134. Un término cualquiera del desarrollo ó el término general de la fórmula, suponiendo que n esprese los términos precedentes, será

$$m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \ldots\ldots \times \frac{m-(n-1)}{n} a^n x^{m-n} \ // \ x^m \left(m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3} \cdot \frac{m-3}{4} \ldots\ldots \times \frac{m-n+1}{n} \frac{a^n}{x^n} \right).$$

LECCION XIV.

De las Raices de Cantidades polinómias.

135. La fórmula del binómio sirve, por su estructura, para la estraccion de raices de los polinómios. Asi, empezando por la potencia mas sencilla, que es la segunda, y considerando la cantidad complecsa como un cuadrado cuya raiz se busca, repetirémos [*II* 186] que, segun se advierte en $(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$, el desarrollo de la segunda potencia presenta el cuadrado de la primera parte del binómio, el duplo producto de su primera parte por su segunda y el cuadrado de su segunda. En este concepto ordenarémos los términos segun costumbre, y estraerémos del primero, comprensivo de la principal letra de ordenacion en su mayor grado, la raiz, que cuadrarémos y restaremos del mismo término. Esta raiz hallada se considerará, comparativamente con el binómio, como la primera parte de la que se busca: por tanto la duplicarémos para formar el primer término de un divisor, que ha de ser el duplo de la raiz hallada mas la parte consecutiva, de modo que este divisor estará representado en la fórmula por $2p+q$, y multiplicandolo por el debido cociente, el producto se restará de los correspondientes términos del dividendo ó cantidad dada. Continuarémos de la misma manera, guardando analogía con las operaciones practicadas para semejante estraccion de cantidades numéricas [II 194], y si nada queda en una de las divisiones parciales, la raiz será ecsacta; pero, si resultase un residuo en que la principal letra de ordenacion tuviere menor esponente que en el término correspondiente del divisor, será inecsacta la raiz, y prosiguiendo su estraccion saldrá una série indefinida de términos. Vamos á los ejemplos:

1.º $9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 \;|\; \underline{3a^2-2ab+5b^2}$ Raiz.

$-(3a^2)^2=\underline{-9a^4}$ $\qquad 6a^2-2ab$ Primer divisor.

$\qquad 6a^2-4ab+5b^2$ Seg. divisor.

Primer residuo.................. $0 \quad -12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4$

$-(6a^2-2ab).-2ab=\ldots\ldots \underline{+12a^3b-4a^2b^2}$

Segundo residuo...................... $0 \quad +30a^2b^2-20ab^3+25b^4$

$-(6a^2-4ab+5b^2).5b^2=\ldots\ldots\ldots\ldots \underline{-30a^2b^2+20ab^3-25b^4}$

0

$$\sqrt{(9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4)}=3a^2-2ab+5b^2.$$

2.º $16a^4-40a^3b+25a^2b^2+64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2 \;|\; \underline{4a^2-5ab+8bc}$ Raiz.

$\underline{-16a^4+40a^3b-25a^2b^2-64a^2bc+80ab^2c-64b^2c^2}$ $\qquad 8a^2-5ab$

$0 \qquad 0 \qquad 0$ $\qquad 8a^2-10ab+8bc$

$$\sqrt{(16a^4-40a^3b+25a^2b^2+64a^2bc-80ab^2c+64b^2c^2)}=4a^2-5ab+8bc.$$

3.º
$$\begin{array}{l|l} 9a^4-12a^3\sqrt{-1}-4a^2+6a^2\sqrt{-2}-4a\sqrt{2}-2 & 3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}\ \text{Raiz.} \\ \underline{-9a^4}+\underline{12a^3\sqrt{-1}+4a^2}-\underline{6a^2\sqrt{-2}+4a\sqrt{2}+2} & 6a^2-2a\sqrt{-1} \\ \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0 & 6a^2-4a\sqrt{-1}+\sqrt{-2} \end{array}$$

$$\sqrt{(9a^4-12a^3\sqrt{-1}-4a^2+6a^2\sqrt{-2}-4a\sqrt{2}-2)}=3a^2-2a\sqrt{-1}+\sqrt{-2}.$$

4.º
$$\begin{array}{l|l} 4a^2-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2} & 2a-3b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}\ \text{Raiz.} \\ \underline{-4a^2}+\underline{12ab^{\frac{1}{2}}-9b}-\underline{12+18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}-9a^{-2}} & 4a-3b^{\frac{1}{2}} \\ \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad 0 & 4a-6b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1} \end{array}$$

$$\sqrt{(4a^2-12ab^{\frac{1}{2}}+9b+12-18a^{-1}b^{\frac{1}{2}}+9a^{-2})}=2a-3b^{\frac{1}{2}}+3a^{-1}.$$

5.º
$$\begin{array}{l|l} a^2+b^2 & a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\text{\&c. Raiz.} \\ \underline{-a^2-b^2}-\frac{b^4}{4a^2} & 2a+\frac{b^2}{2a} \\ \quad 0 & \\ \qquad \underline{+\frac{b^4}{4a^2}}+\frac{b^6}{8a^4}-\frac{b^8}{64a^6} & 2a+\frac{b^2}{a}-\frac{b^4}{8a^3} \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)}=a+\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}+\frac{b^6}{16a^5}-\text{\&c.}$$

136. Es necesario no confundir $\sqrt{(a^2+b^2)}$ con $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$, pues esta última espresion significa $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=a+b=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{(a^2+2ab+b^2)}$; y siendo $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)}>\sqrt{(a^2+b^2)}$, resulta que $a+b>\sqrt{a^2+b^2}$ ó que $\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}>\sqrt{(a^2+b^2)}$. Compruebase sensiblemente esta verdad con cualquier ejemplo de cantidades numéricas, como $3+5=\sqrt{3^2}+\sqrt{5^2}=\sqrt{(3^2+2.3.5+5^2)}=\sqrt{64}=8$ y $\sqrt{(3^2+5^2)}=\sqrt{34}$, donde vemos que $\sqrt{9}+\sqrt{25}>\sqrt{9+25}$.

137. Con el fin de estraer la raiz cúbica de cantidades complecsas volvamos á la fórmula del binómio, espresandolo en este caso por $(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$.

Y despues de hecha la ordenacion conveniente estraerémos la raiz cúbica del primer término de la cantidad, y restarémos su cubo del mismo término, considerando esta parte de la raiz como la primera con referencia al binómio. Buscarémos un divisor, que estará representado por $3p^2+3pq+q^2$, tomando el triplo del cuadrado de la primera parte ó raiz hallada, el triplo producto de esta raiz por la que se busca ó segunda parte y el cuadrado de esta segunda parte; el cociente oportuno será la parte segunda de la raiz, y multiplicandolo por el divisor dará el producto, que se ha de restar de los correspondientes términos del dividendo. Considerando siempre los términos hallados de la raiz como su primera parte, y el que se investiga como su segunda, y buscando el divisor inmediato en la forma esplicada, á semejanza de la estraccion de cantidades numéricas [II 200], para obtener un cociente, que será el término siguiente de la raiz, llegarémos á completarla, resultando ecsacta cuando nada quede en una de las divisiones parciales, é inecsacta si hubiere un residuo en que la principal letra de ordenacion tuviere un esponente menor que en el correspondiente término del divisor, en cuyo caso sacarémos una série indefinida.

Ejemplos:

1.º
$$\begin{array}{l|l}
c^3+3c^2d-3c^2e+3cd^2-6cde+3ce^2+d^3-3d^2e+3de^2-e^3 & c+d-e \text{ Raiz.} \\
-c^3 & 3c^2+3cd+d^2 \text{ Primer divisor.} \\
\text{Prim. residuo} \ldots\ldots\ 3c^2d-3c^2e+3cd^2-6cde+3ce^2+d^3-3d^2e+3de^2-e^3 & 3c^2+6cd+3d^2-3ce-3de+e^2 \text{ Seg. divisor.} \\
-3c^2d \quad -3cd^2 \quad -d^3 & \\
\text{Seg. residuo} \ldots\ldots\ -3c^2e \quad -6cde+3ce^2 \quad -3d^2e+3de^2-e^3 & \\
+3c^2e \quad +6cde-3ce^2 \quad +3d^2e-3de^2+e^3 & \\
0 &
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{(c^3+3c^2d-3c^2e+3cd^2-6cde+3ce^2+d^3-3d^2e+3de^2-e^3)}=c+d-e.$$

2.º
$$\begin{array}{l|l}
a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6 & a^2-2ab+b^2 \text{ Raiz.} \\
-a^6+6a^5b-12a^4b^2+8a^3b^3 & 3a^4-6a^3b+4a^2b^2 \\
3a^4b^2-12a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6 & 3a^4-12a^3b+15a^2b^2-6ab^3+b^4 \\
-3a^4b^2+12a^3b^3-15a^2b^4+6ab^5-b^6 & \\
0 &
\end{array}$$

$$\sqrt[3]{(a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6)}=a^2-2ab+b^2.$$

138. En general conviene, para estraer cualquiera raiz, presentar la fórmula [137] bajo esta ecuacion $(p+q)^m=p^m+(Ap^{m-1}+Bp^{m-2}q\ldots$ $\ldots+Cp^{m-3}q^2+Dp^{m-4}q^3+\&c.\ldots+q^{m-1})q$, cuyo segundo miembro se figura solo con dos términos, de los cuales el primero representa la primera parte de la raiz elevada á la potencia, y el segundo una cantidad complecsa multiplicada por un monómio, indicando la cantidad complecsa el divisor oportuno, y el factor monómio la segunda parte de la raiz. Bajo este concepto, refiriendo siempre al primer término la parte hallada de la raiz, al factor complecso el divisor que se busca, y al monómio la segunda parte de la raiz ó el término de ella que se investiga; será facil hacer la estraccion radical de cualquier cantidad algebráica, y aún de las numéricas; pero respecto á estas nos parece preferible la regla general esplicada [II 204] al intento.

139. Ya sabemos [105] que, siendo un esponente radical $r = mn$, resulta $\sqrt[r]{c} = \sqrt[mn]{c} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}}$, y que por tanto podemos estraer de unas en otras las raices, cuyos esponentes son descomponibles en factores. Usarémos, pues, de este método para mayor facilidad en la estraccion respecto á polinómios, como en este ejemplo

$$\sqrt[6]{(64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18})} \ldots$$

$$\ldots = \sqrt[3]{\left\{\sqrt{(64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18})}\right\}} \ldots$$

$$\ldots = \sqrt[3]{(8x^9 - 60x^6a^3 + 150x^3a^6 - 125a^9)} = 2x^3 - 5a^3$$; en cuyo cálculo convendrá á los principiantes ejercitarse.

140. Antes de proceder á ninguna operacion el diestro calculador ecsamina atentamente [89] las espresiones algebráicas, y consigue muchas veces descubrir por la simple inspeccion el resultado que busca ó algunas propiedades conducentes á su intento. Tal sucede en la estraccion de raices cuando son ecsactas, pues que la potencia desenvuelta ha de contener términos en que se halle solo cada parte de la raiz elevada á la potencia. Descubiertas asi estas partes se eleva su suma á la potencia, y esta suma será la raiz que se busca, si su elevacion reproduce la cantidad dada. Por ejemplo, en $c^6 + 3c^4d^2 - 12c^4m^3 + 3c^2d^4 - 24c^2m^3 + 48c^2m^6 + d^6 - 12d^4m^3 + 48d^2m^6 - 64m^9$, de que me propongo estraer la raiz cúbica, observo que sus tres términos c^6, d^6 y $-64m^9$ son cubos perfectos, y considerando que la suma $c^2 + d^2 - 4m^3$ de la raiz cúbica de cada uno puede ser la raiz que busco, elevo este trinómio al cubo; y como me resulta la cantidad primitiva, veo que he acertado en mi investigacion.

LECCION XV.

De las Proporciones y Progresiones.

141. Analizarémos con caractéres generales la doctrina contraida á los números en las LECCIONES XIX y XX de la ARITMÉTICA, usando los mismos nombres y signos que en ellas.

142. En la equidiferencia $A \cdot B : E \cdot F$, siendo D la razon ó diferencia, es $B = A + D$ y $F = E + D$, de que resulta $A \cdot (A+D) : E \cdot (E+D)$ y $A + D + E = A + E + D \,//\, B + E = A + F$; luego la suma de los medios es igual á la de los estremos.

Y en la proporcion $a : b :: e : f$, siendo c la razon ó cociente, es $b = ac$ y $f = ec$, de que resulta $a : ac :: e : ec$ y $ace = aec \,//\, be = af$; luego el producto de los medios es igual al de los estremos.

Reciprocamente $B + E = A + F$,

$-A + B = -E + F \,//\, A \cdot B :: E \cdot F$;

$be = af$,

$\frac{b}{a} = \frac{f}{e} \,//\, a : b :: e : f$. Luego en cuatro cantidades, de las cuales dos dan la misma suma ó el mismo producto que las otras dos, las primeras son los medios ó los estremos, y las segundas los estremos ó los medios de una equidiferencia ó de una proporcion.

De $B+E=A+F$ sacamos $B=A+F-E$ y $E=A+F-B$;

Y de $be=af$ deducimos $b=\frac{af}{e}$ y $e=\frac{af}{b}$; con que, dados tres términos de la equidiferencia ó de la proporcion, sacamos el otro, sea antecedente ó consecuente, y pertenezca á la primera razon ó á la segunda.

143. Pues que en la equidiferencia continua, siendo $B=E$, resulta $A \cdot B : B \cdot F$ // $\div A \cdot B \cdot F$, tenemos $2B=A+F$ y $B=\frac{A+F}{2}$; luego el término medio es la semisuma de los estremos.

Y como en la proporcion continua, siendo $b=e$, resulta $a:b::b:f$ // $\dot{\div}\, a:b:f$, tenemos $b^2=af$ y $b=\sqrt{af}$; luego el medio proporcional es la raiz cuadrada del producto de los estremos.

144. Tenemos [142]

$$A+F=B+E, \ldots -A+E=-B+F \ // \ A \cdot E : B \cdot F;$$

$$\text{y} \quad af = be, \ldots \frac{a}{e} = \frac{b}{f} \ // \ a:e::b:f;$$

luego en la equidiferencia $A \cdot B : E \cdot F$ y en la proporcion $a:b::e:f$ pueden mudar de lugar los medios. En general se pueden hacer todas las transposiciones de términos, que concuerden con las ecuaciones $A+F=B+E$ y $af=be$.

145. Si en la equidiferencia añadimos á los dos términos de una razon cualquiera cantidad M en sentido positivo ó negativo, no se alterará el valor de la razon, y tendremos $(A \pm M) \cdot (B \pm M) : E \cdot F : A \cdot B$, porque, en vez de la ecuacion

$-A+B=-E+F$, podemos poner $-(A\pm M)+(B\pm M)=-E+F$.

Y si en la proporcion añadimos á los dos miembros de la ecuacion $\frac{b}{a}=\frac{f}{e}$ una cantidad cualquiera m en sentido positivo ó negativo, resultará

$$\frac{b}{a}\pm m=\frac{f}{e}\pm m \;//\; \frac{b\pm ma}{a}=\frac{f\pm me}{e},$$

$$\frac{b\pm ma}{f\pm me}=\frac{a}{e} \;//\; (b\pm ma) : (f\pm me) :: a : e :: b : f \text{; luego el pri-}$$

mer consecuente, mas ó menos cierto número de veces su antecedente, es al segundo consecuente, mas ó menos el mismo número de veces su antecedente, como el primer término es al tercero ó como el segundo es al cuarto, ó bien como son entre si los antecedentes ó como lo son los consecuentes.

146. Comparando entre si las sumas, y lo mismo las diferencias, sacarémos

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{b+ma}{f+me}=\dfrac{a}{e}\\[2ex] \dfrac{b-ma}{f-me}=\dfrac{a}{e}\end{array}\right\}, \ldots \frac{b+ma}{f+me}=\frac{b-ma}{f-me},$$

$$\frac{b+ma}{b-ma}=\frac{f+me}{f-me} \;//\; (b+ma) : (b-ma) :: (f+me) : (f-me),$$

Hagamos $m=1$, . . . $(b+a) : (b-a) :: (f+e) : (f-e)$; luego la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es tambien á su diferencia.

147. Mudemos de lugar los medios de la proporcion $a:b::e:f$, y será

$$a:e::b:f \;//\; \frac{e}{a}=\frac{f}{b},$$

$$\frac{e}{a}\pm m=\frac{f}{b}\pm m \;//\; \frac{e\pm ma}{a}=\frac{f\pm mb}{b},$$

$$\frac{e\pm ma}{f\pm mb}=\frac{a}{b}=\frac{e}{f} \;//\; (e\pm ma):(f\pm mb)::a:b::e:f.$$ Por tanto el segundo antecedente, mas ó menos cierto número de veces el primero, es al segundo consecuente, mas ó menos igual número de veces el primero, como cada antedente á su consecuente.

Haciendo $m=1$ resulta $e\pm a:f\pm b::a:b::e:f,\ldots$ la suma ó la diferencia de los antecedentes es á la suma ó á la diferencia de los consecuentes, como un antecedente á su consecuente.

148. De $e\pm a:f\pm b::a:b::e:f$ sacarémos

$$e+a:f+b::e-a:f-b,$$

$e+a:e-a::f+b:f-b$; luego la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es tambien á su diferencia.

149. En general, siendo $\frac{b}{a}=\frac{f}{e}=\frac{h}{g}=\frac{p}{l}=\text{\&c.}=c$, tendremos $b+f+h+p=ac+ec+gc+lc=(a+e+g+l)c$,

$$\frac{b+f+h+p}{a+e+g+l}=c=\frac{b}{a};$$ quiere decir que en una série de razones iguales $a:b::e:f::g:h::l:p::\text{\&c.}$ la suma de un número cualquiera de antecedentes es á la suma de igual número de consecuentes, como un antecedente á su consecuente.

150. Supongamos estas dos proporciones $a:b::e:f \;//\; \frac{b}{a}=\frac{f}{e};$

$$g:h::l:p \;//\; \frac{h}{g}=\frac{p}{l};$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{b}{a}=\frac{f}{e}\\[4pt] \frac{h}{g}=\frac{p}{l}\end{array}\right\},\;\ldots\; \frac{bh}{ag}=\frac{fp}{el} \;//\; ag:bh::el:fp.$$

Por tanto, multiplicando dos proporciones ordenadamente, esto es, cada término de la una por el respectivo de la otra, los productos, que resultan, estan en proporcion, y las nuevas razones son las *compuestas* de las razones primitivas.

Asimismo, dividiendo dos proporciones ordenadamente, los cocientes, que resultan, están en proporcion, y las nuevas razones son las de los cocientes de las razones primitivas.

151. De $\frac{b}{a}=\frac{f}{e}$ sacarémos $\frac{b^m}{a^m}=\frac{f^m}{e^m}$ // $a^m : b^m :: e^m : f^m$, ... los cuadrados, los cubos, y en general las mismas potencias de cuatro cantidades proporcionales estan en proporcion.

Y de $\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{f}}{\sqrt[m]{e}}$ resulta que las raices del mismo grado de cuatro cantidades proporcionales están en proporcion.

152. No tanto hemos espuesto la doctrina antecedente para discutir la teoría de las equidiferencias y proporciones, cuanto para demostrar como se fundan en las ecuaciones, cuyo uso se debe preferir por ser su notacion mas sencilla y clara; pero en las progresiones conviene conservar su modo de escribirlas.

153. Si continuamos una equidiferencia continua resultará una progresion por diferencia, que escribimos $\div A \cdot B \cdot E \cdot F \cdot G \cdot H \cdot$ &c., y siendo D la diferencia, tendremos $B=A+D$, $E=A+2D$, $F=A+3D$, &c. y

$$\div A \cdot [A+D] \cdot [A+2D] \cdot [A+3D] \cdot [A+4D] \cdot \&c. \ldots\ldots \cdot [A+(n-1)D],$$ representando n el número de términos.

Aquí vemos que se puede hallar un término cualquiera L de esta progresion añadiendo al primer término el producto de la diferencia ó razon por el número de términos que preceden, y entonces $L=A+(n-1)D$.

154. Para averiguar la suma S de una progresion de esta clase la ligarémos en su órden y despues en el inverso, de modo que

$$\left.\begin{array}{l} S=A+[A+D]+[A+2D]+\&c.\ldots\ldots+[A+(n-1)D] \\ S=[A+(n-1)D]+[A+(n-2)D]+[A+(n-3)D]+\&c.\ldots\ldots+A \end{array}\right\}, \ldots 2S=[2A+(n-1)D]+[2A+(n-1)D]+[2A+(n-1)D]+\&c.$$

$$\ldots=n[2A+(n-1)D]=n[A+A+(n-1)D];$$ pero n es el número de términos, A el primero y $A+(n-1)D$ el último, al cual llamarémos L; luego resultará

$$2S=n(A+L),$$

$$S=n\frac{(A+L)}{2}.$$

155. Con las dos ecuaciones $L=A+(n-1)D$ y $S=\frac{n(A+L)}{2}$ podemos hallar dos cantidades cualesquiera de las cinco A, D, n, L, S, conociendo las otras tres.

156. Continuada una proporcion continua resulta una progresion por cociente, que escribiremos

$$\div\div a : b : e : f : g : h : \&c. \ldots\ldots : l,$$

y espresando c el cociente, será $\frac{b}{a}=\frac{e}{b}=\frac{f}{e}=\frac{g}{f}=\&c.=\frac{l}{k}=c,$

y se presenta la progresion en $\div\div a : ac : ac^2 : ac^3 : ac^4 : \&c. \ldots\ldots : ac^{n-1}$, siendo n el número de términos.

Bien se ve que puede hallarse un término cualquiera l de esta progresion multiplicando el primero por la razon elevada á una potencia, cuyo esponente sea el número de términos precedentes, de modo que $l=ac^{n-1}$.

157. A fin de conocer la suma s de una progresion por cociente enlazarémos sus términos y haremos el cálculo siguiente:

$$s=a+ac+ac^2+ac^3+\&c.\ldots\ldots+ac^{n-1},\ldots \begin{cases} s-a=(a+ac+ac^2+ac^3+\&c.\ldots\ldots+ac^{n-2})c\,; \\ s-ac^{n-1}=a+ac+ac^2+ac^3+\&c.\ldots\ldots+ac^{n-2}\,; \end{cases}$$

$$s-a=(a+ac+ac^2+ac^3+\&c.\ldots\ldots+ac^{n-2})c,$$

$$a+ac+ac^2+ac^3+\&c.\ldots\ldots+ac^{n-2}=s-ac^{n-1},\ldots s-a=(s-ac^{n-1})c=sc-ac^n,$$

$$sc-s=ac^n-a,$$

$$s=\frac{ac^n-a}{c-1}=\frac{c\,.\,ac^{n-1}-a}{c-1},$$

$ac^{n-1}=l$, . . . $s=\dfrac{cl-a}{c-1}$; luego, para hallar la suma de la progresion indicada, se buscará el esceso, que el producto de la razon por el último término lleva al primer término, y este esceso se dividirá por la razon disminuida de la unidad.

158. Las dos ecuaciones $l=ac^{n-1}$ y $s=\dfrac{cl-a}{c-1}$ comprenden las relaciones, que las cinco cantidades a, c, n, l, s tienen entre si en las progresiones por cocientes, y sirven para conocer dos cualesquiera de estas cantidades, siendo dadas las otras tres.

159. Ya hemos visto [157] que $s=\dfrac{ac^n-a}{c-1}=\dfrac{a(c^n-1)}{c-1}$, y si la razon es un quebrado, esto es, $c=\dfrac{1}{m}$ la progresion será decreciente, y tendremos

$$s=\frac{a(c^n-1)}{c-1}=\frac{a\left(\frac{1}{m^n}-1\right)}{\frac{1}{m}-1}=\frac{am\left(1-\frac{1}{m^n}\right)}{m-1}=\frac{am}{m-1}-\frac{\frac{a}{m^{n-1}}}{m-1}=\frac{am}{m-1}-\frac{a}{(m-1)m^{n-1}}\,;$$ pero, mientras mayor sea el número n mas pequeño será el término $\dfrac{a}{(m-1)m^{n-1}}$, y mas se acercará el valor de s á la cantidad $\dfrac{am}{m-1}$, hasta no poder diferenciarse de ella sino en menos de una cantidad asignable. Entonces $s=\dfrac{am}{m-1}$, que supongo l, es un límite, como se ve en esta aplicacion $\div\!\div\ 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \&c.$, en que $a=1$, $c=\dfrac{1}{m}=\frac{1}{2}$, . . . $m=2$, y por tanto $l=\dfrac{am}{m-1}=\dfrac{1\,.\,2}{2-1}=2$; de manera que, mientras mas términos tomemos en la progresion, mas se acercará su suma á la igualdad con 2, pues que

$$1 \quad = 1 = 2-1\,;$$
$$1+\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{2}=2-\tfrac{1}{2}\,;$$

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4} \quad =\tfrac{7}{4}=2-\tfrac{1}{4};$$
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} \quad =\tfrac{15}{8}=2-\tfrac{1}{8};$$
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{16}=\tfrac{31}{16}=2-\tfrac{1}{16}.$$

Asi la espresion l puede considerarse como la suma de la progresion decreciente por cociente continuada al infinito, si bien la idea mas perceptible es la de límite.

160. De la fórmula $s=\dfrac{a(c^n-1)}{c-1}$ sacamos todos los términos, que componen la progresion cuya suma representa, porque, ejecutando la division [61 2ª], resulta

$$s=a\frac{c^n-1}{c-1}=a(1+c+c^2+c^3+c^4+\&c. \ldots\ldots +c^{n-1})=a+ac+ac^2+ac^3+ac^4+\&c. \ldots\ldots +ac^{n-1}.$$

El valor de l cumple el mismo objeto, porque

$$l=a\frac{m}{m-1},$$

$$\frac{m}{m-1}=1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\&c., \ldots \; l=a\left(1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}+\&c.\right),$$

$$\frac{1}{m}=c \quad , \quad . \quad . \quad . \quad l=a(1+c+c^2+c^3+c^4+\&c.)=a+ac+ac^2+ac^3+ac^4+\&c.$$

161. Para que el desarrollo $1+\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{m^3}+\&c.$ del quebrado $\dfrac{m}{m-1}$ contribuya á descubrir el límite ó suma, debe formar una série *converjente*, esto es, disminuir sus términos alejandose del primero; pues las séries *diverjentes*, en que cada término crece, se apartan cada vez mas del valor, que verdaderamente tiene su espresion orijinaria. Sin embargo sirve el mismo desarrollo en las séries diverjentes para dar á conocer cualesquiera propiedades, que no sean relativas á la sumacion.

LECCION XVI.

De las Ecuaciones de segundo grado.

162. Cuando el mayor esponente de la incógnita es 2 la ecuacion es de segundo grado.

Si la ecuacion no tiene mas que un término desconocido se llama *pura ó incompleta*, y puede representarse por $ax^2=bc$, de que resulta $x=+\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$ // $x=-\sqrt{\dfrac{bc}{a}}$. Pero si tiene todos sus términos, se dice *mista ó completa*, y reprentandola por $ax^2+bx=c$ ó por $ax^2+bx-c=0$, deducimos $x^2+\dfrac{b}{a}x-\dfrac{c}{a}=0$, que, suponiendo $\dfrac{b}{a}=p$, $-\dfrac{c}{a}=q$, se convierte en la fórmula general $x^2+px+q=0$.

163. Para preparar una ecuacion de segundo grado de modo que pueda compararse facilmente con la fórmula, pasarémos al primer miembro todos los términos del segundo, ordenarémos con respecto á la incógnita, y dividiremos toda la ecuacion por el coeficiente del cuadrado de la misma incógnita: si á este cuadrado precede signo negativo, mudarémos los signos á todos los términos para que lo tenga positivo. En $4x-\frac{3}{5}x^2=4-2x$,

Reuno todos los términos en el primer miembro $6x-\frac{3}{5}x^2-4=0$,

Ordeno con respecto á la incógnita . . . . $-\frac{3}{5}x^2+6x-4=0$,

Divido por el coeficiente del cuadrado . . . . . $-x^2+10x-\frac{20}{3}=0$,

Mudo los signos . . . . $x^2-10x+\frac{20}{3}=0$;

Y comparando con la fórmula, término por término, resulta

$$\left.\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ x^2-10x+\frac{20}{3}=0 \end{array}\right\} ,\ldots \left\{\begin{array}{l} p=-10; \\ q=\frac{20}{3}. \end{array}\right.$$

164. Supongamos que la cantidad a sea raiz [84] de $x^2+px+q=0$, es decir, que siendo $x=a$, satisfaga á esta ecuacion general, de modo que $a^2+pa+q=0$. En este caso sacarémos $q=-a^2-pa$, y practicarémos el cálculo siguiente;

$$x^2+px=-q,$$

$$q=-a^2-pa\ ,\ \ldots\ x^2+px=a^2+pa,$$

$$x^2-a^2+px-pa=0\ //\ (x+a)(x-a)+p(x-a)=0\ //\ (x-a)(x+a+p)=0\ ;$$

cuya ecuacion solo puede ser satisfecha cuando $x-a=0$, ó cuando $x+a+p=0$. Este resultado demuestra que toda ecuacion de segundo grado tiene dos raices, que son $x=a$, $x=-a-p$.

165. Como sumando una raiz con otra tenemos $a-a-p=-p$, y multiplicando entre sí estas raices su producto es $a(-a-p)=-a^2-pa=q$, deducimos que la suma de las raices de una ecuacion de segundo grado es igual al coeficiente del segundo término tomado en sentido contrario, y su producto equivale al tercer término.

166. Ya que el trinómio $x^2+2ax+a^2=b$ espresa el cuadrado [135] de $x+a$, comprendiendo el cuadrado de la primera parte de este binómio, el duplo de la primera parte multiplicada por la segunda y el cuadrado de la segunda; será fácil resolver una ecuacion de segundo grado, si su primer miembro se hace un cuadrado perfecto, componiendolo de los términos, que presenta el trinómio $x^2+2ax+a^2=b$.

A este fin, comparandole la fórmula $x^2+px=-q$, vemos que en el primer miembro el primer término es el cuadrado de la incógnita, tanto en una ecuacion como en otra: el segundo término es en ambas la primera potencia de la incógnita con coeficientes, que pueden igualarse, esto es, $2a=p$, . . . $a=\frac{1}{2}p$; y el tercer término falta en la fórmula, debiendo ser semejante al tercero del trinómio para completar el cuadrado, de modo que será $a^2=(\frac{1}{2}p)^2=\frac{1}{4}p^2$, cuya cantidad aumentarémos en ambos miembros para conservar la igualdad.

Entonces resulta $x^2+px+\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2-q$. Quiere decir que el primer miembro de la fórmula $x^2+px=-q$, y de otra cualquiera ecuacion preparada [163] de segundo grado, se convierte en cuadrado perfecto agregandole, como tambien al otro miembro, el cuadrado de la mitad del coeficiente ó cantidad conocida, que multiplica la primera potencia de la incógnita.

167. En este estado sacarémos la raiz cuadrada para obtener el valor de la incógnita:

$$x^2+px+\tfrac{1}{4}p^2=\tfrac{1}{4}p^2-q,$$

$$x+\tfrac{1}{2}p=\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)},$$

$$x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}\ //\ -\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}.$$ Por tanto, en toda ecuacion ordenada de segundo grado, la incógnita es igual á la mitad del coeficiente del segundo término tomado en sentido contrario, aumentandole ó disminuyendole la raiz cuadrada del cuadrado de la misma mitad junto con el tercer término tomado en sentido contrario:

Sea $x^2-3x+2=0$, ... $\begin{cases} x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}=+\tfrac{3}{2}+\sqrt{(\tfrac{9}{4}-2)}=\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}=2\,; \\ x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}=+\tfrac{3}{2}-\sqrt{(\tfrac{9}{4}-2)}=\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}=1. \end{cases}$

168. A primera vista podria pensarse que, para el caso en que la ecuacion propuesta tuviese su segundo término negativo, convendria representar la fórmula por $x^2-px=-q$, que se completaria haciendo $x^2-px+\tfrac{1}{4}p^2=\tfrac{1}{4}p^2-q$; pero no es necesaria esta precaucion, pues podemos suponer que una cantidad es virtualmente ó en sí misma de sentido inverso al que aparece, y bajo este concepto hemos hecho en el ejemplo antecedente $p=-3$.

No ostante, si quisieramos diversificar la fórmula de modo que sus términos fuesen en todos casos del mismo sentido que los de una ecuacion preparada, tendriamos

$$x^2+px+q=0,\ \ldots \begin{cases} x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}\,; \\ x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}. \end{cases}$$

$$x^2+px-q=0,\ \ldots \begin{cases} x=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}\,; \\ x=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2+q)}. \end{cases}$$

$$x^2-px+q=0,\ldots\begin{cases}x=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)};\\ x=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}.\end{cases}$$

$$x^2-px-q=0,\ldots\begin{cases}x=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)};\\ x=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}.\end{cases}$$

169. Con referencia á estas fórmulas haremos varias observaciones para manifestar las propiedades de las ecuaciones de segundo grado.

1ª Sea p positivo ó negativo, q positivo, $q>\frac{p^2}{4}$ y d la diferencia; tendremos $x=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{-d}$ // $x=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{-d}$,... cuando el tercer término es positivo, y mayor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, que puede ser positivo ó negativo, las dos raices son imajinarias.

Ejemplos: $x^2+3x+8=0,\ldots\begin{cases}x=-\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}-8)}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-23};\\ x=-\frac{3}{2}-\sqrt{(\frac{9}{4}-8)}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-23}.\end{cases}$

$$x^2-3x+8=0,\ldots\begin{cases}x=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}-8)}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-23};\\ x=\frac{3}{2}-\sqrt{(\frac{9}{4}-8)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-23}.\end{cases}$$

2ª Sea p positivo ó negativo, y q positivo é igual á $\frac{p^2}{4}$; tendremos $x=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{0}=\mp\frac{1}{2}p$ // $x=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{0}=\mp\frac{1}{2}p$,... cuando el tercer término es positivo é igual al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, que puede ser positivo ó negativo, las dos raices son comensurables, iguales entre si y á la misma mitad tomada en sentido contrario.

$$\text{Ejemplos: } x^2+6x+9=0, \ldots \begin{cases} x=-3+\sqrt{(9-9)}=-3+\sqrt{0}=-3\,; \\ x=-3-\sqrt{(9-9)}=-3-\sqrt{0}=-3. \end{cases}$$

$$x^2-6x+9=0, \ldots \begin{cases} x=3+\sqrt{(9-9)}=3+\sqrt{0}=3\,; \\ x=3-\sqrt{(9-9)}=3-\sqrt{0}=3. \end{cases}$$

3.ª Sea p positivo, q positivo, $q<\frac{p^2}{4}$ y d la diferencia; tendremos

$x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=-\frac{1}{2}p+\sqrt{d}\ //\ x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=-\frac{1}{2}p-\sqrt{d}, \ldots$ cuando el tercer término es positivo y menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, que sea positivo, las dos raices son reales y negativas, esto es, de sentido contrario al segundo término.

$$\text{Ejemplo: } x^2+7x+10=0, \ldots \begin{cases} x=-\frac{7}{2}+\sqrt{(\frac{49}{4}-10)}=-\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=-2\,; \\ x=-\frac{7}{2}-\sqrt{(\frac{49}{4}-10)}=-\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=-\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=-5. \end{cases}$$

4.ª Sea p negativo, q positivo, $q<\frac{p^2}{4}$ y d la diferencia; tendremos

$x=\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\frac{1}{2}p+\sqrt{d}\ //\ x=\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\frac{1}{2}p-\sqrt{d}, \ldots$ cuando el tercer término es positivo y menor que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo, que sea negativo, las dos raices son reales y positivas, esto es, de sentido contrario al segundo término.

Ejemplo: $x^2-7x+10=0,\ldots \begin{cases} x=\frac{7}{2}+\sqrt{(\frac{49}{4}-10)}=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}=5; \\ x=\frac{7}{2}-\sqrt{(\frac{49}{4}-10)}=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7}{2}-\frac{3}{2}=2. \end{cases}$

5ª Sea p positivo ó negativo, q negativo y s la suma de $\frac{1}{4}p^2+q$, en cuyo caso será $\sqrt{s}>\frac{1}{2}p$, y dominará el signo del radical en el resultado: tendremos
$x=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{s}$ // $x=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{s},\ldots$ cuando el tercer término es negativo, sea el segundo positivo ó negativo, las dos raices son reales y de sentido opuesto.

Ejemplos: $x^2+6x-16=0,\ldots \begin{cases} x=-3+\sqrt{(9+16)}=-3+5=2; \\ x=-3-\sqrt{(9+16)}=-3-5=-8. \end{cases}$

$x^2-6x-16=0,\ldots \begin{cases} x=3+\sqrt{(9+16)}=3+5=8; \\ x=3-\sqrt{(9+16)}=3-5=-2. \end{cases}$

6ª Sea p positivo ó negativo, y $q=0$; tendremos
$x=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2}=\mp\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p$ // $x=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2}=\mp\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}p,\ldots$
..cuando la ecuacion no tiene tercer término, sea el segundo positivo ó negativo, una raiz es igual á cero, y la otra el coeficiente del segundo término tomado en sentido contrario.

Ejemplos: $x^2+6x=0,\ldots \begin{cases} x=-3+\sqrt{(9-0)}=-3+3=0; \\ x=-3-\sqrt{(9-0)}=-3-3=-6. \end{cases}$

$x^2-6x=0,\ldots \begin{cases} x=3+\sqrt{(9-0)}=3+3=6; \\ x=3-\sqrt{(9-0)}=3-3=0. \end{cases}$

7ª Sea $p=0$ y q negativo; tendremos
$x=\mp\frac{1}{2}p+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2+q)}=0+\sqrt{(0+q)}=\sqrt{q}$ // $x=\mp\frac{1}{2}p-\sqrt{(\frac{1}{4}p+q)}=0-\sqrt{(0+q)}=-\sqrt{q},\ldots$

..cuando la ecuacion no tiene segundo término, y el último es negativo, las dos raices son reales é igual la una á la otra tomada en sentido contrario.

$$\text{Ejemplo: } x^2-8=0,\ldots\begin{cases} x=0+\sqrt{(0+8)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}; \\ x=0-\sqrt{(0+8)}=-\sqrt{8}=-2\sqrt{2}. \end{cases}$$

8ª Sea $p=0$ y q positivo; tendremos

$$x=\mp\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}=0+\sqrt{(0-q)}=\sqrt{-q} \;//\; x=\mp\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)}=0-\sqrt{(0-q)}=-\sqrt{-q},\ldots$$

..cuando la ecuacion no tiene segundo término, y el último es positivo, las dos raices son imajinarias é igual la una á la otra tomada en sentido inverso.

$$\text{Ejemplo: } x^2+8=0,\ldots\begin{cases} x=0+\sqrt{(0-8)}=\sqrt{-8}=2\sqrt{-2}; \\ x=0-\sqrt{(0-8)}=-\sqrt{-8}=-2\sqrt{-2}. \end{cases}$$

Asi se conoce, por la simple inspeccion, la naturaleza de las raices de una ecuacion de segundo grado sin necesidad de resolverla.

170. Adquirida la práctica suficiente en el manejo de estas ecuaciones, podemos pasar á los problemas de segundo grado, que estan en la Coleccion cuarta.

LECCION XVII.

De las Ecuaciones indeterminadas de segundo grado.

171. Las dificultades, que ofrece este asunto por su variedad y complicacion, nos hace limitarnos por ahora á la resolucion de la ecuacion general indeterminada de segundo grado

con dos incógnitas $at^2+btx+cx^2+dt+ex+f=0$, en la cual a, b, c, d, e, f representan cantidades conocidas, y las incógnitas son t, x, cuyos valores procuraremos hallar en números racionales, sean enteros ó quebrados.

172. Empezarémos por sacar la raiz cuadrada de una de las incógnitas en una espresion que incluirá á la otra incógnita; y cada uno de los coeficientes complecsos, como tambien la suma de las cantidades conocidas, se hará igual á un monómio, transformando asi la espresion de la raiz para facilitar las operaciones ulteriores, de esta manera:

$$at^2+btx+cx^2+dt+ex+f=0,$$

$$at^2+(bx+d)t=-cx^2-ex-f,$$

$$t^2+\frac{(bx+d)t}{a}=-\frac{cx^2+ex+f}{a},$$

$$t^2+\frac{(bx+d)t}{a}+\left(\frac{bx+d}{2a}\right)^2=\left(\frac{bx+d}{2a}\right)^2-\frac{cx^2+ex+f}{a}\ldots$$

$$\ldots=\frac{(b^2-4ac)x^2+(2bd-4ae)x+d^2-4af}{4aa},$$

$$\text{Supongo}\left.\begin{array}{r}b^2-4ac=g\\ 2bd-4ae=h\\ dd-4af=k\end{array}\right\}\ldots t^2+\frac{(bx+d)t}{a}+\left(\frac{bx+d}{2a}\right)^2=\frac{gx^2+hx+k}{4aa},$$

$$t=-\frac{bx+d\pm\sqrt{(gx^2+hx+k)}}{2a}.$$

173. *Ahora supondremos $gx^2+hx+k=yy$ para sacar su raiz cuadrada, en el concepto de ser x, y* números racionales; y siempre que se pueda estraer, será tambien t un número racional.

174. En el caso de ser $k=0$ tendremos

$$yy=gx^2+hx+k=gx^2+hx;$$

$$\text{Supongo } gx^2+hx=x^2z^2, \quad .\ .\ .\ gx+h=\frac{x^2z^2}{x}=xz^2,$$

$$.\ .\ .\ .\ (z^2-g)x=h,$$

$$x=\frac{h}{z^2-g};$$

$$yy=gx^2+hx=x^2z^2,$$

$$y=xz,$$

$$x=\frac{h}{z^2-g}, \quad .\ .\ .\ y=\frac{hz}{z^2-g}.$$

El número arbitrario z siempre se podrá escojer tal que x é y sean números positivos.

Hagamos alguna aplicacion, proponiendonos la ecuacion $t^2-3tx+2x^2-4t-2x+4=0$, que, comparada con la fórmula término por término, nos dará desde luego el valor numérico de las cantidades conocidas y despues el de los monómios, que comprenden sus espresiones complecsas. Luego asignarémos arbitrariamente, aunque del modo indicado, un valor á z para obtener los de x é y, que sustituidos en la fórmula $t=-\frac{bx+d\pm\sqrt{(gx^2+hx)}}{2a}=-\frac{bx+d\pm y}{2a}$ nos ofrecen el último resultado.

$$at^2+btx+cx^2+dt+ex+f=$$

$$t^2-3tx+2x^2-4t-2x+4=$$

$g=$

$h=$

$k=$

$x=$

$$\left.\begin{array}{r} h=32 \\ g=1 \\ \text{Supongo } z=3 \end{array}\right\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad x=$$

$y=$

$$\left.\begin{array}{r} x=4 \\ z=3 \end{array}\right\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad y=$$

$t=$

$$\left.\begin{array}{r} b=-3 \\ x=4 \\ d=-4 \\ y=12 \end{array}\right\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad t=$$

$$=0 \\ =0 \Big\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 1\,; \\ b = -3\,; \\ c = 2\,; \\ d = -4\,; \\ e = -2\,; \\ f = 4\,; \end{array} \right.$$

$$= b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1\,;$$

$$= 2bd - 4ae = 2 \cdot -3 \cdot -4 - 4 \cdot 1 \cdot -2 = 32\,;$$

$$= d^2 - 4af = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0\,;$$

$$= \frac{h}{z^2 - g},$$

$$= \frac{32}{3^2 - 1} = 4\,;$$

$$= xz,$$

$$= 4 \cdot 3 = 12\,;$$

$$= -\frac{bx + d \pm y}{2a},$$

$$= -\frac{-3 \cdot 4 - 4 \pm 12}{2 \cdot 1} = \frac{12 + 4 \mp 12}{2} = 2 \,//\, 14.$$

Para mayor esclarecimiento haremos una comprobacion con los valores $y=12$, $x=4$, $t=2$.

$$(12)^2=y^2=gx^2+hx=1.4^2+32.4=144;$$

$$t^2-3tx+2x^2-4t-2x+4=2^2-3.2.4+2.4^2-4.2-2.4+4=40-40=0.$$

Aunque por la eleccion, que hemos hecho del valor de $z=3$, han resultado t, x números enteros, tambien queda resuelta la ecuacion dando á z otros valores, que presenten aquellas incógnitas en números quebrados.

175. Siendo g un cuadrado cabal, que igualarémos con mm, y h, k cualesquiera cantidades, haremos $y=mx+z$, y calcularémos así:

$$\left.\begin{array}{l} y^2=gx^2+hx+k=m^2x^2+hx+k \\ y^2=(mx+z)^2=m^2x^2+2mxz+z^2 \end{array}\right\}, \ldots m^2x^2+hx+k=m^2x^2+2mxz+z^2,$$

$$(h-2mz)x=z^2-k,$$

$$x=\frac{z^2-k}{h-2mz};$$

$$y=mx+z,$$

$$x=\frac{z^2-k}{h-2mz}, \ \therefore \ldots y=m.\frac{z^2-k}{h-2mz}+z=\frac{hz-mz^2-mk}{h-2mz}.$$

Vemos que x, y son números racionales; pero haremos una aplicacion con la ecuacion $2t^2-5tx+2x^2-3t+x+1=0$, en que, comparando con la fórmula, resulta $a=2$, $b=-5$, $c=2$, $d=-3$, $e=1$, $f=1$;

$$g = b^2 - 4ac = \quad 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \quad = 9\,;$$

$$h = 2bd - 4ae = 2 \cdot -5 \cdot -3 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 30 - 8 = 22\,;$$

$$k = d^2 - 4af = \quad 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 \quad = 1\,;$$

$$x = \frac{z^2 - k}{h - 2mz},$$

$$\left.\begin{array}{r} h = 22 \\ k = 1 \\ m = \sqrt{g} = 3 \\ \text{Supongo } z = 3 \end{array}\right\} \;,\;\ldots\; x = \frac{3^2 - 1}{22 - 2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{4} = 2\,;$$

$$y = mx + z,$$

$$\left.\begin{array}{r} m = 3 \\ x = 2 \\ z = 3 \end{array}\right\} \;,\;\ldots\; y = 3 \cdot 2 + 3 = 9\,;$$

$$t = -\frac{bx + d \pm y}{2a},$$

$$\left.\begin{array}{r} b = -5 \\ x = 2 \\ d = -3 \\ y = 9 \\ a = 2 \end{array}\right\} \;,\;\ldots\; t = -\frac{-5 \cdot 2 - 3 \pm 9}{2 \cdot 2} = \frac{13 \mp 9}{4} = 1 \;/\!/\; \tfrac{11}{2}.$$

La comprobacion es $2t^2 - 5tx + 2x^2 - 3t + x + 1 = 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 1 + 2 + 1 = 0$.

176. Cuando k es un cuadrado perfecto, que designarémos por nn, siendo g, h lo que se quiera, harémos $y = xz + n$ para la operacion siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = gx^2+hx+k = gx^2 + hx + n^2 \\ y^2 = (xz+n)^2 = x^2z^2+2xzn+n^2 \end{array}\right\} , \ldots \quad z^2x^2+2nzx = gx^2+hx,$$

$$z^2x + 2nz = gx+h,$$

$$(z^2-g)x = h-2nz,$$

$$x = \frac{h-2nz}{z^2-g};$$

$$y = xz+n,$$

$$x = \frac{h-2nz}{z^2-g}, \quad \ldots \quad y = \frac{h-2nz}{z^2-g} \cdot z + n = \frac{hz-nz^2-gn}{z^2-g}.$$

Haremos una aplicacion con la misma ecuacion que en el caso antecedente, respecto á ser $k=1$ un cuadrado:

$$\left.\begin{array}{r} h = 22 \\ n=\sqrt{k} = 1 \\ g = 9 \\ \text{Supongo } z = 4 \end{array}\right\} , \ldots \quad x = \frac{h-2nz}{z^2-g}, \quad x = \frac{22-2 \cdot 1 \cdot 4}{4^2-9} = \frac{14}{7} = 2;$$

$$\left.\begin{array}{r} x = 2 \\ z = 4 \\ n = 1 \end{array}\right\} , \ldots \quad y = xz+n, \quad y = 2 \cdot 4+1 = 9;$$

$$\left.\begin{array}{r} b = -5 \\ x = 2 \\ d = -3 \\ y = 9 \\ a = 2 \end{array}\right\} , \ldots \quad t = -\frac{bx+d\pm y}{2a}, \quad t = -\frac{-5 \cdot 2-3\pm 9}{2 \cdot 2} = 1 \;//\; \frac{11}{2}.$$

Como z es arbitrario lo hemos supuesto igual á 4, pues igualandolo con el mismo valor 3 que en el caso antecedente, hubiera resultado

$$x = \frac{h-2nz}{z^2-g} = \frac{22-2 \cdot 1 \cdot 3}{3^2-9} = \frac{16}{0},$$ que denota el infinito.

177. Siempre que h^2-4gk sea un cuadrado cabal se supondrá $gx^2+hx+k=0$, de cuya ecuacion se buscarán los factores, y practicando las sustituciones, que vamos á manifestar, descubriremos el valor de las incógnitas:

$$gx^2+hx+k=0,$$

$$x^2+\frac{h}{g}x = -\frac{k}{g},$$

$$x = -\frac{h}{2g}+\sqrt{\left(\frac{h^2}{4g^2}-\frac{k}{g}\right)} \;//\; -\frac{h}{2g}-\sqrt{\left(\frac{h^2}{4g^2}-\frac{k}{g}\right)};$$

Deducese que $x^2+\frac{h}{g}x+\frac{k}{g}=\left\{x+\frac{h}{2g}-\sqrt{\frac{h^2}{4g^2}-\frac{k}{g}}\right\}\times\left\{x+\frac{h}{2g}+\sqrt{\frac{h^2}{4g^2}-\frac{k}{g}}\right\}$,

Haremos $h^2-4kg=p^2$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{h}{2}-\frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2}=\frac{h}{2}-\frac{p}{2}=gq \\ \frac{h}{2g}+\frac{\sqrt{(h^2-4kg)}}{2g}=\frac{h}{2g}+\frac{p}{2g}=r \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^2= gx^2+hx+k=\left\{gx+\frac{h}{2}-\frac{\sqrt{h^2-4kg}}{2}\right\}\times\left\{x+\frac{h}{2g}+\frac{\sqrt{h^2-4kg}}{2g}\right\}, \\ ,\ldots y^2= gx^2+hx+k = (gx+gq)(x+r), \\ y=\sqrt{(gx^2+hx+k)}=\sqrt{(gx+gq)(x+r)}, \end{array}$$

Supongamos $\sqrt{(gx+gq)(x+r)}=(gx+gq)z$, . . . $y=\sqrt{(gx+gq)(x+r)}=(gx+gq)z$,

$$y^2= (gx+gq)(x+r)=(gx+gq)^2z^2,$$

$$x+r= (gx+gq)z^2 = gz^2x+gqz^2,$$

$$x-gz^2x=gqz^2-r,$$

$$x=\frac{gqz^2-r}{1-gz^2};$$

$$y=gzx+gqz,$$

$$x=\frac{gqz^2-r}{1-gz^2}\quad,\ .\ \ .\ \ .\ \ y=\frac{gz(gqz^2-r)}{1-gz^2}+gqz=\frac{gqz-grz}{1-gz^2}.$$

Tratemos de resolver la ecuacion $t^2-5tx+5x^2-3t+6x+2=0$, en que $a=1$, $b=-5$, $c=5$, $d=-3$, $e=6$, $f=2$;

$$\left.\begin{array}{l} h=2bd-4ae=2\cdot-5\cdot-3-4\cdot1\cdot6=6 \\ g=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5 \\ k=d^2-4af=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} p^2=h^2-4gk, \\ ;\ldots p^2=6^2-4\cdot5\cdot1=16, \\ p=\sqrt{16}=4; \end{array}$$

$$gq=\frac{h}{2}-\frac{p}{2},$$

$$\left.\begin{array}{l} h=6 \\ p=4 \end{array}\right\},\ldots gq=\frac{6}{2}-\frac{4}{2}=1;$$

$$r=\frac{h}{2g}+\frac{p}{2g},$$

$$\left.\begin{array}{l} h=6 \\ p=4 \\ g=5 \end{array}\right\},\ldots r=\frac{6}{2\cdot5}+\frac{4}{2\cdot5}=1;$$

$$\left.\begin{array}{r} gq=1 \\ r=1 \\ g=5 \\ \text{Supongo } z=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad x=\frac{gqz^2-r}{1-gz^2}, \quad \ldots\; x=\frac{1\cdot\frac{1}{4}-1}{1-5\cdot\frac{1}{4}}=(-\tfrac{3}{4}):(-\tfrac{1}{4})=3\,;$$

$$\left.\begin{array}{r} g=5 \\ x=3 \\ gq=1 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad y=(gx+gq)z, \quad \ldots\; y=(5\cdot 3+1)\tfrac{1}{2}=8\,;$$

$$\left.\begin{array}{r} b=-5 \\ x=3 \\ d=-3 \\ y=8 \\ a=1 \end{array}\right\} \quad t=-\frac{bx+d\pm y}{2a}, \quad \ldots\; t=-\frac{-5\cdot 3-3\pm 8}{2\cdot 1}=\frac{15+3\mp 8}{2}=5\,/\!/\,13.$$

Comprobacion $(13)^2-5\cdot 13\cdot 3+5\cdot 3^2-3\cdot 13+6\cdot 3+2=234-234=0.$

178. Si la cantidad gx^2+hx+k puede considerarse como la suma de un cuadrado y de un producto de factores racionales, esto es,

$$gx^2+hx+k=(mx+l)^2+(px+q)(rx+s),$$

será $y=\sqrt{(gx^2+hx+k)}=\sqrt{(mx+l)^2+(px+q)(rx+s)}$,

Supongo $\sqrt{(mx+l)^2+(px+q)(rx+s)}=mx+l+(px+q)z$, ... $y=\sqrt{(mx+l)^2+(px+q)(rx+s)}=mx+l+(px+q)z$,

$$yy=(mx+l)^2+(px+q)(rx+s)=(mx+l)^2+2(mx+l)(px+q)z+(px+q)^2z^2,$$

$$rx+s=2(mx+l)z+(px+q)z^2,$$

$$(r-2mz-pz^2)x=2lz+qz^2-s,$$

$$x=\frac{2lz+qz^2-s}{r-2mz-pz^2};$$

$$y=mx+l+(px+q)z.$$

Con estas fórmulas resolveremos la ecuacion $t^2-5tx+4x^2-5t+\frac{13}{2}x+\frac{9}{4}=0$, en la cual $a=1, b=-5, c=4, d=-5, e=\frac{13}{2}, f=\frac{9}{4}$;

$$\left.\begin{array}{l} g=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4=9 \\ h=2bd-4ae=2\cdot -5\cdot -5-4\cdot 1\cdot \frac{13}{2}=24 \\ k=d^2-4af=(-5)^2-4\cdot 1\cdot \frac{9}{4}=16 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y^2=gx^2+hx+k, \\ \ldots\; y^2=9x^2+24x+16\,; \end{array}$$

Aqui debemos observar que, segun requiere este caso, $9x^2+24x+16=(2x-1)^2+(5x+3)(x+5)$, por lo que, comparando esta ecuacion con $gx^2+hx+k=(mx+l)^2+(px+q)(rx+s)$, resulta $m=2$, $l=-1$, $p=5$, $q=3$, $r=1$, $s=5$, y por tanto

$$x=\frac{2lz+qz^2-s}{r-2mz-pz^2}=\frac{2.-1z+3z^2-5}{1-2.2z-5z^2}=\frac{3z^2-2z-5}{1-4z-5z^2},$$

Supongamos $z=1$, ... $x=\frac{3.1^2-2.1-5}{1-4.1-5.1^2}=\frac{-4}{-8}=\frac{1}{2}$;

$$y=mx+l+(px+q)z=2.\tfrac{1}{2}-1+(5.\tfrac{1}{2}+3)1=\tfrac{11}{2};$$

$$t=-\frac{bx+d\pm y}{2a},$$

$$\left.\begin{array}{l} b=d=-5 \\ x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{11}{2} \\ a=1 \end{array}\right\}, \ldots\ t=-\frac{-5.\frac{1}{2}-5\pm\frac{11}{2}}{2.1}=\frac{15\mp 11}{4}=1 \,//\, \tfrac{13}{2}.$$

Comprobacion $1^2-5.1.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{4}-5.1+\frac{13}{2}.\frac{1}{2}+\frac{9}{4}=0$.

179. De aqui podemos pasar á los problemas indeterminados de segundo grado, que se hallan en la Coleccion quinta.

LECCION XVIII.

De los Logarítmos y Cálculo esponencial.

180. En la Leccion XXVI de la Aritmética hemos dado una idea de los logarítmos, aplicandolos á la multiplicacion, division, elevacion á potencias y estraccion de raices. Ahora ampliarémos esta doctrina, aunque sea á costa de alguna repeticion, y pasarémos al cálculo esponencial, que es el de las cantidades cuyos esponentes son incógnitos.

181. Haremos oportunamente uso del complemento aritmético [II 278], que en estos casos se llama *complemento logarítmico*. Los logarítmos comunes de las tablas se señalarán por $\pounds$ y su complemento por $C\pounds$.

182. Si se nos pide hallar el cuarto término de la proporcion $11526 : 27829 :: 34578 : x$, lo buscarémos asi:

$$\pounds x=\pounds\frac{27829.34578}{11526}=\pounds 27829+\pounds 34578-\pounds 11526=4{,}4444976+4{,}5387999-4{,}0616786=4{,}9216189=\pounds 83487,$$

$$x=83487.$$

El mismo resultado hubieramos obtenido por medio del complemento logarítmico, de esta manera:

$$\pounds x=\pounds 27829+\pounds 34578+C\pounds 11526=4{,}4444976+4{,}5387999+5{,}9383214=14{,}9216189=\pounds 83487.$$

183. Para hallar el logarítmo de un número misto ó fraccionario [II 272], como $57+\frac{32}{67}$, harémos

$$\pounds(57+\tfrac{32}{67})=\pounds\tfrac{3851}{67}=\pounds 3851-\pounds 67=3{,}5855735-1{,}8260748=1{,}7594987.$$

184. Puede reducirse un quebrdo á decimales [II 271] buscando su logarítmo, que será defectivo: luego se agrega á este logarítmo un número entero mayor que su característica, y se descartan sobre la derecha de la cantidad resultante tantas cifras como unidades tuviese el número agregado.

Sea el quebrado $\frac{37}{85}$;

$$\pounds\tfrac{37}{85}=\pounds 37-\pounds 85=1{,}5682017-1{,}9294189\ldots$$
$$\ldots=-0{,}3612172,$$
$$\pounds 100000+\pounds\tfrac{37}{85}=5-0{,}3612172=4{,}6387828=\pounds 43529,$$
$$\pounds\tfrac{37}{85}=\pounds 43529-\pounds 100000=\pounds\tfrac{43529}{100000}\ldots$$
$$\ldots=\pounds 0{,}43529,$$
$$\tfrac{37}{85}=0{,}43529.$$

185. Pues que á cada unidad aumentada en la característica corresponde la multiplicacion por 10 á la cantidad [II 271], ó que á cada unidad disminuida en la característica corresponde la division por 10 de la cantidad, sacamos el logarítmo de un número compuesto de enteros y decimales, como 385,72; de esta manera

$$\pounds 38572=4{,}5862722,\ldots\pounds 385{,}72=2{,}5862722.$$

186. En cuanto á los logarítmos de quebrados decimales es fácil hallar los defectivos, porque

$$\pounds 0{,}47=\pounds\tfrac{47}{100}=\pounds 47-\pounds 100=1{,}6720979-2=-1{,}3279021;$$

pero, si queremos buscarlos por medio de complementos, tendremos $\pounds 0{,}47=\pounds 47+\complement\pounds 100=1{,}6720979+8=9‘6720979$, en que ponemos la coma arriba y trastornada para denotar que este logarítmo no corresponde al número entero 4700000000 á que corresponderia en la forma 9,6720979. Resulta, pues, que el logarítmo de un quebrado decimal tiene por característica 9 ó un número con tantas unidades menos de 9 cuantos ceros haya entre la coma y las cifras significativas, y por mantisa la misma que si el número fuese entero, como en estos ejemplos:

$$1.^{\circ}\ \mathcal{L}0{,}059624 = \mathcal{L}\tfrac{59624}{1000000} = \mathcal{L}59624 + \mathcal{C}\mathcal{L}1000000 \ldots$$
$$\ldots = 4{,}7754211 + 4 = 8'7754211;$$
$$2.^{\circ}\ \mathcal{L}0{,}00483 = \mathcal{L}\tfrac{483}{100000} = \mathcal{L}483 + \mathcal{C}\mathcal{L}100000 \ldots$$
$$\ldots = 2{,}6839471 + 5 = 7'6839471.$$

187. Respecto á la elevacion [II 262] de un quebrado decimal por complemento, tendremos

$$\mathcal{L}(0{,}532)^3 = 3\mathcal{L}\tfrac{532}{1000} = 3(\mathcal{L}532 + \mathcal{C}\mathcal{L}1000) \ldots$$
$$\ldots = 3(2{,}7259116 + 7) = 3 \cdot 9'7259116 \ldots$$
$$\ldots = 29'1777348 = \mathcal{L}0{,}150568$$ &c. en que tachamos las dos decenas, que resultan de la multiplicacion por 3, porque una potencia cualquiera de un quebrado decimal tendrá en su logarítmo 9 de característica ó menos.

188. Como la estraccion es inversa de la elevacion sacarémos la raiz de un quebrado decimal anteponiendo á la característica del logarítmo, correspondiente á este quebrado, tantas decenas como unidades tuviese el esponente de la raiz menos una, y dividiendo despues por el mismo esponente [II 263], para obtener el logarítmo de la raiz; pero esta regla puede tener alguna escepcion si en el logarítmo del quebrado la característica fuese 7 ó menor que 7.

Deshagamos el ejemplo antecedente:

$$\mathcal{L}(0{,}150568)^{\frac{1}{3}} = \frac{\mathcal{L}0{,}150568}{3} = \frac{9'1777348+20}{3} \ldots$$
$$\ldots = \frac{29'1777348}{3} = 9'7259116 = \mathcal{L}0{,}532.$$

189. Sin tomar en consideracion las progresiones podemos demostrar directamente las propiedades de los logarítmos. A este fin supondremos que b sea la base del sistema, n un número y x su logarítmo, esto es, $b^x = n$, $\mathcal{L}n = x$ y $\mathcal{L}b = 1$; de que resulta $\mathcal{L}b^x = \mathcal{L}n = x = x \cdot 1 = x\mathcal{L}b$, y tambien $\mathcal{L}b^{p+q} = (p+q)\mathcal{L}b$;

Sea n' otro número, x' su logarítmo, y tendremos igualmente $b^{x'}=n'$, $\mathcal{L}b^{x'}=\mathcal{L}n'=x'=x'\mathcal{L}b$.

Ahora haremos este cálculo

$$\left.\begin{array}{l} n=b^{x}=b^{\mathcal{L}n} \\ n'=b^{x'}=b^{\mathcal{L}n'} \end{array}\right\}, \ldots nn'=b^{\mathcal{L}n}b^{\mathcal{L}n'}=b^{\mathcal{L}n+\mathcal{L}n'},$$

$$\mathcal{L}nn'=\mathcal{L}b^{\mathcal{L}n+\mathcal{L}n'}=(\mathcal{L}n+\mathcal{L}n')\mathcal{L}b,$$

$$\mathcal{L}b=1\ , \ldots\ \mathcal{L}nn'=(\mathcal{L}n+\mathcal{L}n')1=\mathcal{L}n+\mathcal{L}n'\ , \ldots$$

.. el logarítmo de un producto es igual á la suma de los logarítmos de los factores.

190. Si dividimos un número por otro, será

$$\left.\begin{array}{l} n=b^{\mathcal{L}n} \\ n'=b^{\mathcal{L}n'} \end{array}\right\}, \ldots \frac{n}{n'}=\frac{b^{\mathcal{L}n}}{b^{\mathcal{L}n'}}=b^{\mathcal{L}n-\mathcal{L}n'},$$

$$\mathcal{L}\frac{n}{n'}=\mathcal{L}b^{\mathcal{L}n-\mathcal{L}n'}=(\mathcal{L}n-\mathcal{L}n')\mathcal{L}b,$$

$\mathcal{L}b=1$, . . . $\mathcal{L}\frac{n}{n'}=(\mathcal{L}n-\mathcal{L}n')1=\mathcal{L}n-\mathcal{L}n'$, . . . el logarítmo de un cociente es igual á la diferencia, que hay entre el logarítmo del dividendo y el del divisor.

191. Elevando resultará

$$n=b^{\mathcal{L}n},$$

$$n^{m}=(b^{\mathcal{L}n})^{m}=b^{m\mathcal{L}n},$$

$\mathcal{L}n^{m}=\mathcal{L}b^{m\mathcal{L}n}=m\mathcal{L}n\mathcal{L}b=m\mathcal{L}n$, . . . el logarítmo de una potencia es igual al producto del esponente de ella por el logarítmo de la cantidad.

192. Y estrayendo tendremos

$$n=b^{\mathcal{L}n},$$

$$\sqrt[m]{n}=\sqrt[m]{b^{\mathcal{L}n}}=(b^{\mathcal{L}n})^{\frac{1}{m}}=b^{\frac{\mathcal{L}n}{m}},$$

$\mathcal{L}\sqrt[m]{n}=\mathcal{L}b^{\frac{\mathcal{L}n}{m}}=\frac{\mathcal{L}n}{m}\mathcal{L}b=\frac{\mathcal{L}n}{m}$, . . . el logarítmo de una raiz es igual al cociente, que resulta dividiendo el logarítmo de la cantidad por el esponente radical.

193. Ya podemos despejar la incógnita en las ecuaciones *esponenciales* de los ejemplos siguientes:

1.º ..... $a^x = c$;

$$\mathcal{L}a^x = \mathcal{L}c \;//\; x\mathcal{L}a = \mathcal{L}c,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}c}{\mathcal{L}a}.$$

2.º ..... Segundo órden $a^{c^x} = d$;

$$\mathcal{L}a^{c^x} = \mathcal{L}d \;//\; c^x\mathcal{L}a = \mathcal{L}d,$$

$$\mathcal{L}(c^x\mathcal{L}a) = \mathcal{L}\mathcal{L}d \;//\; \mathcal{L}c^x + \mathcal{L}\mathcal{L}a = \mathcal{L}\mathcal{L}d \;//\; x\mathcal{L}c + \mathcal{L}\mathcal{L}a = \mathcal{L}\mathcal{L}d,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a}{\mathcal{L}c}.$$

Bien se echa de ver que $\mathcal{L}\mathcal{L}$ indica logarítmo de logarítmo, como $\mathcal{L}\mathcal{L}100 = \mathcal{L}2 = 0{,}3010300$.

3.º ..... $a^x = c^u$;

$$\mathcal{L}a^x = \mathcal{L}c^u \;//\; x\mathcal{L}a = u\mathcal{L}c,$$

$$\frac{x}{u} = \frac{\mathcal{L}c}{\mathcal{L}a}.$$ Aunque este resultado no da á conocer el valor de las incógnitas x, u indica que la relacion de ellas es constante.

4.º ...Terc. órd. $a^{b^{c^x}} = d$;

$$\mathcal{L}a^{b^{c^x}} = \mathcal{L}d \,//\, b^{c^x}\mathcal{L}a = \mathcal{L}d,$$

$$\mathcal{L}(b^{c^x}\mathcal{L}a) = \mathcal{L}\mathcal{L}d \,//\, \mathcal{L}b^{c^x} + \mathcal{L}\mathcal{L}a = \mathcal{L}\mathcal{L}d \ldots$$

$$\ldots // c^x\mathcal{L}b + \mathcal{L}\mathcal{L}a = \mathcal{L}\mathcal{L}d,$$

$$c^x\mathcal{L}b = \mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a,$$

$$\mathcal{L}(c^x\mathcal{L}b) = \mathcal{L}(\mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a) \,//\, \mathcal{L}c^x + \mathcal{L}\mathcal{L}b = \mathcal{L}(\mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a),$$

$$x\mathcal{L}c = \mathcal{L}(\mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a) - \mathcal{L}\mathcal{L}b,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}\mathcal{L}d - \mathcal{L}\mathcal{L}a) - \mathcal{L}\mathcal{L}b}{\mathcal{L}c}.$$

5º .... $2^{2x} - 2^x - 1 = 0$;

Supongo $2^x = u, \ldots 2^{2x} - 2^x - 1 = u^2 - u - 1 = 0,$

25

$$u = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + 1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 2^x;$$

$$2^x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$\mathcal{L}2^x = \mathcal{L}\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \,//\, x\mathcal{L}2 = \mathcal{L}(1 \pm \sqrt{5}) - \mathcal{L}2,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}(1 \pm \sqrt{5}) - \mathcal{L}2}{\mathcal{L}2}.$$

6° .... $2^{2x} - 2^{2x-2} - 1 = 0$;

Supongo $2^{2x} = u$, ... $2^{2x} - 2^{2x-2} - 1 = 0$ // $2^{2x} - \dfrac{2^{2x}}{2^2} - 1 = u - \dfrac{u}{4} - 1 = 0$,

$$u = \tfrac{4}{3} = 2^{2x};$$

$$2^{2x} = \tfrac{4}{3},$$

$$\mathcal{L}2^{2x} = \mathcal{L}\tfrac{4}{3} \,//\, 2x\mathcal{L}2 = \mathcal{L}4 - \mathcal{L}3,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}4 - \mathcal{L}3}{2\mathcal{L}2}.$$

7° .... $am^x = bn^x$;

$$\mathcal{L}(am^x) = \mathcal{L}(bn^x) \,//\, \mathcal{L}a + \mathcal{L}m^x = \mathcal{L}b + \mathcal{L}n^x \,//\, \mathcal{L}a + x\mathcal{L}m = \mathcal{L}b + x\mathcal{L}n,$$

$$x\mathcal{L}m - x\mathcal{L}n = \mathcal{L}b - \mathcal{L}a,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}b - \mathcal{L}a}{\mathcal{L}m - \mathcal{L}n}.$$

8° .... $a^{mx} = cb^{nx-1}$;

$$\frac{a^{mx}}{b^{nx}} = cb^{-1},$$

$$\mathcal{L}\frac{a^{mx}}{b^{nx}} = \mathcal{L}cb^{-1} \,//\, mx\mathcal{L}a - nx\mathcal{L}b = \mathcal{L}c - \mathcal{L}b,$$

$$x = \frac{\mathcal{L}c - \mathcal{L}b}{m\mathcal{L}a - n\mathcal{L}b}.$$

$$9^{\circ} \ldots \frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{nx}} = d^{x-p};$$

$$\mathcal{L}\frac{b^{n-\frac{a}{x}}}{c^{nx}} = \mathcal{L}d^{x-p} \,//\, n\mathcal{L}b - \frac{a}{x}\mathcal{L}b - nx\mathcal{L}c = x\mathcal{L}d - p\mathcal{L}d,$$

$$nx\mathcal{L}b - a\mathcal{L}b - nx^2\mathcal{L}c = x^2\mathcal{L}d - px\mathcal{L}d,$$

$$(n\mathcal{L}c + \mathcal{L}d)x^2 - (n\mathcal{L}b + p\mathcal{L}d)x + a\mathcal{L}b = 0,$$

$$x = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{n\mathcal{L}b + p\mathcal{L}d}{n\mathcal{L}c + \mathcal{L}d} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\left(\frac{n\mathcal{L}b + p\mathcal{L}d}{n\mathcal{L}c + \mathcal{L}d}\right)^2 - a\mathcal{L}b}.$$

$$10^{\circ} \ldots m^{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}} = n;$$

$$\mathcal{L}m^{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}} = \mathcal{L}n \,//\, \frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}\mathcal{L}m = \mathcal{L}n,$$

$$(a+\sqrt{x})\mathcal{L}m = (a-\sqrt{x})\mathcal{L}n \,//\, a\mathcal{L}m + \sqrt{x}\mathcal{L}m = a\mathcal{L}n - \sqrt{x}\mathcal{L}n,$$

$$(\mathcal{L}m + \mathcal{L}n)\sqrt{x} = a\mathcal{L}n - a\mathcal{L}m,$$

$$\sqrt{x} = \frac{a(\mathcal{L}n - \mathcal{L}m)}{\mathcal{L}m + \mathcal{L}n},$$

$$x = a^2\left(\frac{\mathcal{L}n - \mathcal{L}m}{\mathcal{L}m + \mathcal{L}n}\right)^2.$$

Hagamos una aplicacion á este ejemplo, suponiendo $m=100$, $a=4$, $n=1000000$, y será

$$\sqrt{x}=a\cdot\frac{\mathcal{L}n-\mathcal{L}m}{\mathcal{L}m+\mathcal{L}n}=4\cdot\frac{\mathcal{L}1000000-\mathcal{L}100}{\mathcal{L}1000000+\mathcal{L}100}=4\cdot\frac{6-2}{6+2}\ldots$$

$$\ldots=4\cdot\tfrac{4}{8}=2;$$

La comprobacion es

$$m^{\frac{a+\sqrt{x}}{a-\sqrt{x}}}=100^{\frac{4+2}{4-2}}=100^{\frac{6}{2}}=100^{3}=1000000=n.$$

$$11^{\circ}\ldots n=\frac{a^{2}\sqrt{(b^{2}-c^{2})}}{c\sqrt[5]{d^{3}ef}};$$

$$\mathcal{L}n=\mathcal{L}\frac{a^{2}(b^{2}-c^{2})^{\frac{1}{2}}}{c(d^{3}ef)^{\frac{1}{5}}}=\mathcal{L}a^{2}+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}(b^{2}-c^{2})-\mathcal{L}c-\tfrac{1}{5}\mathcal{L}(d^{3}ef)\ldots$$

$$\ldots=2\mathcal{L}a+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}(b+c)+\tfrac{1}{2}\mathcal{L}(b-c)-\mathcal{L}c-\tfrac{3}{5}\mathcal{L}d-\tfrac{1}{5}\mathcal{L}e-\tfrac{1}{5}\mathcal{L}f.$$

194. Como los logarítmos son relativos al valor de su base pueden formarse bajo diferentes sistemas para los mismos números, mudando los esponentes de la base segun corresponda á ella. Si designamos por $\mathcal{L}$ los logarítmos cuando la base es b, y por $\mathfrak{L}$ cuando tienen otra base B, será x, como logarítmo de un número n en el primer sistema, diferente de X, como logarítmo del mismo número n en el segundo, de modo que $x=\mathcal{L}n$, $X=\mathfrak{L}n$, y $\mathcal{L}n>//<\mathfrak{L}n$; pero será $\mathcal{L}b=\mathfrak{L}B=1$, porque en todo sistema usual el logarítmo de su base es la unidad. Por tanto

$$n=b^{x}=B^{X}\;//\;B^{\mathfrak{L}n}=b^{\mathcal{L}n},$$

$$\mathcal{L}B^{\mathfrak{L}n}=\mathcal{L}b^{\mathcal{L}n}\;//\;\mathfrak{L}n\mathcal{L}B=\mathcal{L}n\mathcal{L}b=\mathcal{L}n\cdot1=\mathcal{L}n,$$

$$\mathfrak{L}n=\frac{\mathcal{L}n}{\mathcal{L}B}.$$

$$b^{x}=B^{X}\;//\;b^{\mathcal{L}n}=B^{\mathfrak{L}n},$$

$$\mathfrak{L}b^{\mathcal{L}n}=\mathfrak{L}B^{\mathfrak{L}n}\;//\;\mathcal{L}n\mathfrak{L}b=\mathfrak{L}n\mathfrak{L}B=\mathfrak{L}n\cdot1=\mathfrak{L}n,$$

$$\mathcal{L}n=\frac{\mathfrak{L}n}{\mathfrak{L}b}.$$

Resulta, pues, que hallarémos el logarítmo de un número n en el segundo sistema dividiendo su logarítmo, tomado en el primero, por el logarítmo, tambien tomado en el primer sistema, de la base del segundo. Y reciprocamente se halla el logarítmo de un número n en el primer sistema dividiendo su logarítmo, tomado en el segundo, por el logarítmo, tambien tomado en el segundo sistema, de la base del primero.

LECCION XIX.

De los Limites.

195. Sobre la fórmula $x=\frac{d-b}{a-c}$ harémos algunas observaciones, que tenemos ofrecidas [84]. Consideremos que puede ser $d>b$ y $a>c$, en cuyo caso, suponiendo $d-b=m$ y $a-c=n$, resulta $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{m}{n}$. Tambien puede ser $d<b$ y $a<c$, esto es, $d-b=-m$ y $a-c=-n$, de donde sacamos $x=\frac{d-b}{a-c}$... ..$=\frac{-m}{-n}=\frac{m}{n}$ segun las reglas de los signos en la division. Asimismo puede ser $d<b$ y $a>c$, es decir, $d-b=-m$ y $a-c=n$, y entonces $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{-m}{+n}=-\frac{m}{n}$; ó bien $d>b$ y $a<c$, esto es, $d-b=m$ y $a-c=-n$, lo que da $x=\frac{d-b}{a-c}$... ..$=\frac{+m}{-n}=-\frac{m}{n}$. Estos son los casos en que las cantidades del numerador del quebrado son desiguales, y lo son tambien las del denominador.

196. Cuando $d=b$ y $a-c=n$ tenemos $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{0}{n}=0$; pero, si $d>b$ y $a=c$, nos hallamos con $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{m}{0}$, espre-

sion hasta ahora desconocida para nosotros; y si $d=b$ y $a=c$, resulta $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{0}{0}$, cuya espresion tampoco conocemos.

197. No puede ser $\frac{m}{0}$ una cantidad finita, porque si $\frac{m}{0}=f$, será $m=f.0=0$, lo que es contra el supuesto de tener m un valor. Pero sabemos que mientras menor es el denominador, siendo uno mismo el numerador, mayor es el quebrado; luego, si consideramos que en $x=\frac{d-b}{a-c}=\frac{m}{a-c}$, bajo el supuesto de ser $a>c$, vaya sucesivamente c aumentando, ó bien a disminuyendo, irá $x=\frac{m}{a-c}$ aumentando de valor; y haciendose la aprocsimacion entre a y c de modo que no lleguen á igualarse, pero sí á diferenciarse en una cantidad tan pequeña, que no se le considere valor asignable, entonces $x=\frac{m}{0}$ será símbolo del infinito, que representarémos por ∞, siendo $x=\frac{m}{0}=\infty$ un límite á que no se llega jamas.

198. La espresion $\frac{0}{0}$ representa una cantidad indeterminada, porque puede proceder de un quebrado, cuyo numerador y denominador tengan algun factor comun, por ejemplo $x=\frac{a(a^2-c^2)}{c(a-c)}=\frac{a(a+c)(a-c)}{c(a-c)}$; y siendo $a=c$, resulta $x=\frac{a(a+c)(a-c)}{c(a-c)}=\frac{a(a+a).0}{a.0}=\frac{0}{0}$; pero, si simplificamos antes el quebrado, tendremos $x=\frac{a(a+c)(a-c)}{c(a-c)}=\frac{a(a+c)}{c}\therefore$ $\therefore=\frac{a(a+a)}{a}=2a$. Por tanto se ha de buscar el orijen de $\frac{0}{0}$, siempre que se encuentre esta espresion, para saber lo que quiere decir.

199. Las cantidades, que por su naturaleza reciben sucesivamente incrementos ó decrementos, se llaman *variables* en contraposicion á las que, por conservar siempre un mismo valor, se nombran *constantes*. Así una cantidad decimal periódica es variable, porque á cada periódo, que se le agrega, aumenta su valor; pero el periódo es una cantidad constante, porque conserva siempre el mismo valor.

200. La cantidad constante, á que se va acercando continuamente una variable sin llegar nunca á igualarse con ella, es el *límite* [159] de la variable, bien que esta pueda acercarse tanto á la constante que la diferencia entre ellas sea menor que una cantidad apreciable. La fraccion decimal periódica 0,6666 &c. tiene por límite el quebrado $\frac{2}{3}$, al cual, por mas periódos decimales que se añadan, nunca podrá igualarse; mas pueden añadirse tantos periódos que su diferencia resulte menor que cualquiera cantidad dada, por pequeña que sea. Si dividimos a por $a-x$, suponiendo $a>x$, sacarémos el cociente $1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{a^4}+$&c., que, por mas que se continue la division, nunca llega á igualarse con $\frac{a}{a-x}$, que es su límite.

201. No basta que una cantidad vaya disminuyendo continuamente para deducir de esto que pueda llegar á ser menor que cualquiera cantidad dada, pues si consideramos el quebrado $\frac{4}{3}$, y concebimos que á sus dos términos se va añadiendo sucesivamente una unidad, tendremos $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{8}{7}$, &c., en que cada espresion, siendo menor que la anterior, resulta siempre mayor que la unidad, por ser en todas el numerador mayor que el denominador. En el caso de quitarse cada vez la mitad ó mas de la mitad de la espresion anterior es evidente que obtendriamos un resultado menor que cualquiera can-

tidad dada, pues llegariamos á una cantidad inconcebible por su pequeñez.

202. A toda cantidad variable le podemos considerar dos límites: uno verdadero, que se espresa por o, y otro ideal, que se representa [197] por $\frac{1}{0}=\infty$. Con efecto siendo V la variable, que á cada variacion se vaya convirtiendo en su mitad ó menos de su mitad, llegará á ser menor que cualquiera cantidad asignable, y lo mismo sucederá á la diferencia entre V y o; pero siendo V cantidad, por pequeña que sea, no llegará á desvanecerse hasta el punto de igualarse con o; de consiguiente tiene el o las dos circunstancias esenciales, que lo constituyen el límite de las cantidades que continuamente decrecen. Y si concebimos que en $\frac{c}{v}$ vaya v disminuyendo, la espresion $\frac{c}{v}$ irá aumentando; pero, como puede v disminuir cuanto se quiera, resulta que $\frac{c}{v}$ se aumentará indefinidamente, y la espresion $\frac{c}{v}$ se acercará continuamente á $\frac{c}{0}=\infty$, que será una especie de límite de las cantidades que crecen. Compruebase esta verdad poniendo, en vez de o, su igual $1-1$, pues $\frac{c}{0}=\frac{c}{1-1}=c+c+c+c+$ &c.

203. Puesto que $\frac{c}{0}=\infty$, si quitamos el divisor, será $c=0.\infty$, y dividiendo por ∞ resultará $\frac{c}{\infty}=0$, que es otro medio de representar el cero como límite de las cantidades que decrecen.

Respecto á que $\frac{c}{1-1}=c+c+c+c\ldots\ldots+\frac{c}{1-1}$ se evidencia que á la espresion $\frac{c}{1-1}=\frac{c}{0}=\infty$ no le causa aumento el que se le añada una cantidad finita un número n de veces. Asi se demuestra tambien con mas generalidad por $\infty \pm nc = \frac{1}{0} \pm nc = \frac{1 \pm nc \cdot 0}{0} = \frac{1}{0} = \infty$.

204. Hemos visto [198] que $\frac{0}{0}$ puede representar una cantidad cualquiera, y asi resulta de $c=0 \cdot \infty$, pues $c=0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$; y si en vez de 0 sustituimos su igual $\frac{1}{\infty}$ tendrémos $c=0 \cdot \infty = \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty}$, donde se advierte que tambien $\frac{\infty}{\infty}$ es símbolo de una cantidad cualquiera. Son, pues, $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ espresiones genéricas de cantidad, que no puede determinarse por depender de circunstancias generales, que convienen á cualquiera cantidad.

205. Supongamos que dos cantidades variables V, v, que crecen, son iguales en cualquier punto de aprocsimacion á sus límites, designando estos por L, l, y por X, z lo que falta á las variables para llegar á ellos. En este caso, por ser $v=V=L-X$ y $V=v=l-z$, tendremos $L-X=l-z$ en todos los puntos de aprocsimacion á los límites. Si $L>l$ resultará $L-l=d$, en que d es la diferencia, y transponiendo en la ecuacion $L-X=l-z$ de modo que $X-z=L-l=d$, será $X=d+z$; pero entonces $X>d$, y como X y z han de ser cada una menor que cualquier cantidad, por pequeña que sea, es necesario, para que se verifique esta condicion, que d sea cero, con lo que sacamos $X=d+z=0+z=z$, y como $L-X=l-z$, será tambien $L=l$; luego en el caso propuesto los límites son iguales.

Si las variables ignales se acercan á los límites disminuyendo, y lo que sobra es X, z, tendremos $v=V=L+X$ y $V=v=l+z$, y será $L+X=l+z$,

$$L-l=z-X=d,$$

$z=d+X$, cuya espresion, debiendo ser z menor que cualquier cantidad dada, requiere que sea $d=0$, de que resulta $z=X$: por tanto, en la ecuacion $L+X=l+z$ hallamos $L=l$, lo mismo que antes.

LECCION XX.

De las Ecuaciones de dos términos.

206. Toda ecuacion, en que solo hay una potencia de la incógnita, combinada con cantidades conocidas, se puede reducir á dos términos, de los cuales uno es la reunion de todos los que contienen la incógnita, y el otro comprende el conjunto de las cantidades dadas. Ya hemos indicado estas circunstancias [162], tratando de las ecuaciones de segundo grado, y es fácil concebir lo mismo respecto á las de otro grado cualquiera.

207. Si tenemos, por ejemplo, la ecuacion

$$a^2x^5-a^5b^2=b^4c^3+acx^5,$$

pasarémos á un mismo mienbro todos los términos afectos de la incógnita, y sacarémos

$$a^2x^5-acx^5=a^5b^2+b^4c^3 \; // \; (a^2-ac)x^5=a^5b^2+b^4c^3.$$

Ahora, representando el coeficiente a^2-ac por p, y la cantidad $a^5b^2+b^4c^3$ por q, se convertirá la ecuacion anterior

en .... $px^5=q$,

despejando será ...... $x^5=\frac{q}{p}$,

y estrayendo resulta $x=\sqrt[5]{\frac{q}{p}}$.

En general toda ecuacion de dos términos,

traida á la forma ... $px^m = q$,

da desde luego .... $x^m = \frac{q}{p}$,

y estrayendo su raiz $x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}$.

208. Observemos que si el esponente m es un número impar, no tendrá el radical sino un solo signo, que será el de la cantidad que cubre [104]. Cuando el esponente m sea par, el radical tendrá el signo de ambigüedad $\pm$: si la cantidad $\frac{q}{p}$ es negativa la espresion será imaginaria, y la cuestion absurda, como sucede en las de segundo grado.

La ecuacion $x^5 = -1024$ da $x = \sqrt[5]{-1024} = -4$, porque el esponente es impar.

La $x^4 = 625$ da $x = \pm\sqrt[4]{625} = 5 \,//\, -5$, porque el esponente es par.

Y la $x^4 = -16$, presentando $x = \pm\sqrt[4]{-16}$, solo ofrece una espresion imajinaria, porque, siendo el esponente par, la cantidad sometida al radical es negativa.

209. Ya conocemos un hecho analítico digno de atencion, cual es que [61] la diferencia de dos potencias de un mismo grado, dividida por la diferencia de sus raices, da en série un cociente ecsacto, esto es,

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + a^3x^{m-4} \ldots\ldots + a^{m-1},$$

comprobandose en que

$$(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+a^3x^{m-4}\ldots\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1})(x-a)\ldots$$

$$\ldots=\left.\begin{array}{l} x^m+ax^{m-1}+a^2x^{m-2}+a^3x^{m-3}\ldots\ldots\ldots+a^{m-2}x^2+a^{m-1}x \\ -ax^{m-1}-a^2x^{m-2}-a^3x^{m-3}-a^4x^{m-4}\ldots\ldots\ldots-a^{m-1}x-a^m \end{array}\right\}=x^m-a^m.$$

Bien se echa de ver que en la primera línea del producto viene, á continuacion del término a^3x^{m-3}, el otro a^4x^{m-4}, que se destruye con su correspondiente debajo; y que en la segunda línea se halla, antes del término $-a^{m-1}x$, otro $-a^{m-2}x^2$, que resulta destruido por su correspondiente de arriba. Estos términos no estan escritos porque se entienden comprendidos en el espacio señalado por los puntos.

210. De aqui deducimos consecuencias muy importantes respecto á la ecuacion de dos términos $x^m=\frac{q}{p}$. Efectivamente, designando por a el número, que se obtiene con la inmediata estraccion de la raiz, tendremos $\frac{q}{p}=a^m$ // $x^m=\frac{q}{p}=a^m$, y transponiendo será $x^m-a^m=0$.

Esta cantidad x^m-a^m se divide por $x-a$, y resulta, como hemos visto,

$$x^m-a^m=(x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1})(x-a),$$

cuyo resultado, que se desvanece cuando $x=a$, seria tambien nulo si tuviesemos

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}=0,$$

y si ecsistiese, por tanto, un valor de x, que satisfaciera á esta ecuacion, satisfaria tambien á la propuesta.

211. Estos valores tienen con la unidad relaciones muy simples, que se descubren haciendo $x=az$; pues la ecuacion $x^m-a^m=0$ se convierte en $a^mz^m-a^m=0$, ó bien $z^m-1=0$, y

luego se sacan los valores de x multiplicando por a los de z.

La ecuacion $z^m - 1 = 0$ da desde luego $z^m = 1$, de que sale $z = \sqrt[m]{1} = 1$. Dividiendo $z^m - 1 = 0$ por $z - 1$ sacamos $z^{m-1} + z^{m-2} + z^{m-3} \ldots\ldots + z^2 + z + 1$, cuyo cociente, igualado con cero, forma la ecuacion de que dependen los demas valores de z, los cuales tendran, como la unidad, la propiedad de satisfacer á la ecuacion $z^m - 1 = 0$, ó bien á $z^m = 1$, es decir que su potencia del grado m será la unidad.

212. De aqui sale una consecuencia, que parece estraña á primera vista, y es que la unidad puede tener varias raices diferentes de ella misma, las cuales, aunque resultan imajinarias, son de mucho uso en el cálculo.

Resolvamos la ecuacion $z^{m-1} + z^{m-2} \ldots\ldots + 1 = 0$ con la aplicacion de varios ejemplos:

1º Sea $m = 2$, ... $z^m - 1 = z^2 - 1 = 0$,

$$z = \pm\sqrt{1} = 1 \;//\; -1.$$

2º $m = 3$, ... $z^m - 1 = z^3 - 1 = 0$,

$$\frac{z^3 - 1}{z - 1} = z^2 + z + 1 = 0,$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

Resulta $z' = 1$, $z'' = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $z''' = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$.

3º $m = 4$, ... $z^m - 1 = z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$;

$$z^2 - 1 = 0, \ldots z = \pm\sqrt{1} = 1 \;//\; -1;$$

$$z^2 + 1 = 0, \ldots z = \pm\sqrt{-1};$$

Resulta $z' = 1$; $z'' = -1$; $z''' = \sqrt{-1}$; $z^{IV} = -\sqrt{-1}$.

Cualquiera de estas espresiones imajinarias, elevada á la potencia de que dimana, reproduce la unidad, como podemos comprobarlo con el segundo ejemplo, de esta manera:

$$\left(\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)^3=\frac{-1\pm3\sqrt{-3}+9\mp3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8}{8}=1.$$

213. Si se nos presentase la ecuacion $x^3+a^3=0$ hariamos $x=-az$, suponiendo z negativa, de modo que $x^3+a^3\ldots$ $\ldots=-a^3z^3+a^3=0$; y como conocemos ya los valores de z sacados de $z^3-1=0$, en que puede convertirse $-z^3+1=0$ mudando los signos, tendremos

$$x'=-az'=a.-1=-a;$$

$$x''=-az''=a.-\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=a.\frac{1-\sqrt{-3}}{2};$$

$$x'''=-az'''=a.-\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=a.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}.$$

214. Recordemos [120] que cualquiera cantidad, compuesta de la suma de dos términos, se puede descomponer en dos factores, poniendo la raiz cuadrada de uno de los términos en ambos factores por primer término, y por segundo la raiz del otro multiplicada por $\sqrt{-1}$ con diferente signo en cada factor, esto es,

$$a^m+b^n=\left(\sqrt{a^m}+\sqrt{b^n}\sqrt{-1}\right)\left(\sqrt{a^m}-\sqrt{b^n}\sqrt{-1}\right).$$

Por este medio pudieramos haber resuelto desde luego el tercer ejemplo, porque $z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)\ldots$ $\ldots=(z-1)(z+1)\left(z-\sqrt{-1}\right)\left(z+\sqrt{-1}\right)=0.$

Teniendo la ecuacion $x^4+a^4=0$ sacarémos

$$x^4+a^4=\left(x^2-a^2\sqrt{-1}\right)\left(x^2+a^2\sqrt{-1}\right)=0;$$

$$x^2-a^2\sqrt{-1}=0,$$

$$x=\pm\sqrt{a^2\sqrt{-1}}=\pm a\sqrt{\sqrt{-1}};$$

$$x^2+a^2\sqrt{-1}=0,$$

$$x=\pm\sqrt{-a^2\sqrt{-1}}=\pm a\sqrt{-1\sqrt{-1}}=\pm a\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

Resulta $x'=a\sqrt{\sqrt{-1}}$; $x''=-a\sqrt{\sqrt{-1}}$; $x'''=a\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{\text{IV}}=-a\sqrt{-\sqrt{-1}}$.

Suponiendo $a=1$ será $x'=\sqrt{\sqrt{-1}}$; $x''=-\sqrt{\sqrt{-1}}$; $x'''=\sqrt{-\sqrt{-1}}$; $x^{\text{IV}}=-\sqrt{-\sqrt{-1}}$; cuyas espresiones satisfacen à la ecuacion $x^4+1=0$.

215. Esta multitud de raices de la unidad consiste en una ley general de las ecuaciones, la cual requiere que una incógnita tenga tantos valores como unidades haya en el esponente del grado de la ecuacion que la determina; pero si la cuestion no admite este número de soluciones reales, resulta completada por símbolos puramente algebráicos, que, siendo sometidos á las operaciones indicadas en la ecuacion, la verifican.

216. Siguese de aqui que las raices de los números tienen dos especies de espresiones ó de valores: la primera, á que podemos llamar *determinacion aritmética*, es el número que se halla por los procedimientos ya esplicados [138], y es única para cada caso particular; y la segunda comprende los valores negativos y las espresiones imajinarias, que podemos designar con el nombre de *determinaciones algebráicas*, porque ecsisten solo á causa de la combide los signos algebráicos.

LECCION XXI.

De las Ecuaciones comparables á las de segundo grado.

217. Cuando en una ecuacion se halla la incógnita solo en dos términos, y el esponente, que tiene en el uno, es duplo del que tiene en el otro; esta ecuacion se puede comparar con las de segundo grado para resolverla por el mismo método [167].

Su fórmula general es $x^{2m}+px^m=q$, en que p y q son cantidades conocidas.

218. Si consideramos x^m como la incógnita, ó suponemos $x^m=u$, resultará $x^{2m}=u^2$, y por tanto

$$x^{2m}+px^m=u^2+pu=q,$$

$$u=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\tfrac{1}{4}p^2)};$$

Y en vez de u restituyendo x^m, será

$u=x^m=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\tfrac{1}{4}p^2)}$; cuya ecuacion es de dos términos, porque la cantidad $-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(q+\tfrac{1}{4}p^2)}$ indica operaciones conocidas, que se han de ejecutar con cantidades dadas.

219. Si representamos por a y a' los dos valores de esta cantidad sacarémos

$$x^m=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{(q+\tfrac{1}{4}p^2)}=a,\quad x^m=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{(q+\tfrac{1}{4}p^2)}=a',$$

$$x=\sqrt[m]{(-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2})}=\sqrt[m]{a};\quad x=\sqrt[m]{(-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{q+\tfrac{1}{4}p^2})}=\sqrt[m]{a'};$$

Y cuando el esponente m es par, resulta que, en lugar de estos dos valores, hay cuatro por la duplicidad del signo, como son

$$x=\sqrt[m]{a};\quad x=-\sqrt[m]{a};\quad x=\sqrt[m]{a'};\quad x=-\sqrt[m]{a'};$$

siendo estos cuatro valores reales, siempre que las cantidades a, a' son positivas.

220. Todos los valores de la incógnita se hallarán comprendidos en una sola fórmula, indicando inmediatamente la raiz de los dos miembros de la ecuacion, de este modo:

$$x^m = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2},$$

$$x = \sqrt[m]{\left(-\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \tfrac{1}{4}p^2}\right)}.$$

Ocupemonos con algunos ejemplos:

1º Si queremos descomponer el número 6 en dos factores, tales que la suma de sus cubos sea 35, tomarémos á x por uno de sus factores, y el otro será $\frac{6}{x}$, cuyos cubos son x^3 y $\frac{216}{x^3}$. Como la suma de estas dos cantidades ha de ser 35 formarémos la ecuacion

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35,$$

de que resulta $x^6 + 216 = 35x^3$ ó bien $x^6 - 35x^3 = -216$.

Ahora, mirando á x^3 como la incógnita, sacarémos por la regla de las ecuaciones de segundo grado

$$x^3 = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216} = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1225 - 216 \cdot 4}{4}\right)} \ldots$$

$$\ldots = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\frac{361}{4}} = \frac{35 \pm 19}{2} = 27 // 8\,;$$

y por consiguiente $x = \sqrt[3]{27} = 3$;

$$x = \sqrt[3]{8} = 2.$$

El primero de estos valores da para el segundo factor $\frac{6}{x} = \frac{6}{3} = 2$, al paso que el segundo valor nos conduce á $\frac{6}{x} = \frac{6}{2} = 3$; de modo que primero son 3 y 2 los factores que se buscan, y despues son 2 y 3, sin diferenciarse ambas soluciones mas que por una mutacion de órden en los factores del número dado 6.

2º Tratemos de buscar un número, tal que, si del cuádruplo de su cubo se resta cinco veces el cociente, que resulta de dividir 40 por el mismo cubo, el residuo sea el cubo del mismo número menos la unidad.

Bien se echa de ver que, llamando z al número que se busca, será el cuádruplo de su cubo $4z^3$, y el quíntuplo del cociente de la division de 40 por el cubo del número será $5.\frac{40}{z^3}$, con lo que, restando esta cantidad de la otra resultará $4z^3-5.\frac{40}{z^3}$ para primer miembro de una ecuacion, cuyo segundo miembro, debiendo ser el cubo del mismo número menos la unidad, se espresará por z^3-1. En su consecuencia estamparémos la ecuacion, y haremos el cálculo siguiente

$$4z^3-5.\frac{40}{z^3}=z^3-1,$$

$$4z^6-200=(z^3-1)z^3=z^6-z^3,$$

$$3z^6+z^3=200,$$

$$z^6+\tfrac{1}{3}z^3=\frac{200}{3},$$

$$z^3=-\tfrac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{200}{3}+\frac{1}{6^2}}=\frac{-1\pm49}{6}=8\ //-\frac{25}{3}.$$

$$z=\sqrt[3]{8}=2\ //\ z=\sqrt[3]{-\frac{25}{3}}=-\frac{\sqrt[3]{225}}{3}.$$

221. Las ecuaciones, que acabamos de considerar, estan comprendidas en la ley general, que hemos enunciado [215] sobre el número de raices de una ecuacion; pues que es necesario multiplicar los valores [219] de $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a'}$ por las raices de la unidad respectivas al grado m.

Asi, tocante al primer ejemplo, sacamos para la ecuacion $x^6 - 35x^3 = -216$, las seis raices

$$x = 1 \cdot 3 = 3;$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot 3 = \frac{-3+3\sqrt{-3}}{2};$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot 3 = \frac{-3-3\sqrt{-3}}{2};$$

$$x = 1 \cdot 2 = 2;$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot 2 = -1+\sqrt{-3};$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot 2 = -1-\sqrt{-3}.$$

Lo mismo se hallarian las seis raices del segundo ejemplo.

LECCION XXII.

Teoría general de las Ecuaciones.

222. Las ecuaciones de primero y segundo grado son en realidad las únicas, que se puedan resolver completamente; pero hallamos en las de un grado cualquiera propiedades generales, que conducen á su resolucion cuando son numéricas, y ofrecen muchas consecuencias útiles para los objetos mas elevados del Álgebra. Estas propiedades se descubren por medio de una forma particular con que toda ecuacion puede presentarse.

223. Si suponemos una ecuacion, que sea tan general como pueda serlo para un grado cualquiera, habrá de contener todas las potencias de la incógnita, desde la de este grado hasta la primera inclusivamente, multiplicada cada una por canti-

dades conocidas, y ademas un término enteramente conocido.

224. Cuando hay varios términos afectos de la misma potencia de la incógnita se reunen en uno solo, como hemos presentado [162] las ecuaciones de segundo grado. Pasanse todos los términos de la ecuacion á un solo miembro, con lo que el otro queda necesariamente igual á cero. Y, si el primer término es negativo, se hace positivo mudando todos los signos de la ecuacion.

Asi tendremos para representar, por ejemplo, una ecuacion de quinto grado

$$nx^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0;$$

en que los coeficientes n, p, q, r, s, t pueden designar números negativos lo mismo que positivos.

Ahora dividiremos todo por el coeficiente n para no dejar otro al primer término sino la unidad, y suponiendo

$$\frac{p}{n}=P,\ \frac{q}{n}=Q,\ \frac{r}{n}=R,\ \frac{s}{n}=S,\ \frac{t}{n}=T,\ \text{resultará}$$

$$x^5+\frac{p}{n}x^4+\frac{q}{n}x^3+\frac{r}{n}x^2+\frac{s}{n}x+\frac{t}{n}\ldots$$
$$\ldots=x^5+Px^4+Qx^3+Rx^2+Sx+T=0.$$

225. De aqui en adelante supondremos haberse preparado las ecuaciones como acabamos de hacerlo, y representarémos la ecuacion general de un grado cualquiera por

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U=0;$$

llenandose el espacio, que ocupan los puntos, cuando se da un valor particular al esponente n.

226. Toda espresion real ó imajinaria, que es igual á la incógnita, reduce, como raiz de la ecuacion, el primer miembro á cero, y por tanto satisface á la cuestion.

Sea una de estas raices a, en cuyo caso

$$x=a, \ldots x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U=a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}\ldots\ldots+Ta+U=0,$$
$$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots-Ta;$$

Sustituyendo en la fórmula el valor de U tendremos

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\ldots\ldots-Ta=0\ldots$$
$$\ldots \parallel x^n-a^n+P(x^{n-1}-a^{n-1})+Q(x^{n-2}-a^{n-2})\ldots\ldots+T(x-a)=0;$$

cuya ecuacion, siendo divisible por $x-a$, demuestra serlo la propuesta, que es igual á ella.

227. Para sacar el cociente no hay mas que poner en lugar de las cantidades

$$x^n-a^n,\quad P(x^{n-1}-a^{n-1}),\quad Q(x^{n-2}-a^{n-2}),\ \&c.,\ T(x-a)$$

el cociente, que da cada una dividiendola por $x-a$, como

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots\ldots+a^{n-1};$$
$$\frac{P(x^{n-1}-a^{n-1})}{x-a}=Px^{n-2}+Pax^{n-3}\ldots\ldots+Pa^{n-2};$$
$$\frac{Q(x^{n-2}-a^{n-2})}{x-a}=Qx^{n-3}\ldots\ldots+Qa^{n-3};$$
$$\frac{T(x-a)}{x-a}=T;$$

De consiguiente

$$\frac{x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U}{x-a}\ldots$$

$$\ldots=\frac{x^n-a^n+P(x^{n-1}-a^{n-1})+Q(x^{n-2}-a^{n-2})\ldots+T(x-a)}{x-a}=\left\{\begin{array}{r} x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\ldots+a^{n-1}\\ Px^{n-2}+Pax^{n-3}\ldots+Pa^{n-2}\\ Qx^{n-3}\ldots+Qa^{n-3}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +T.\end{array}\right.$$

228. Este cociente se podrá representar por $x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+$ &c., siendo $P'=a+P+$ &c., $Q'=a^2+Pa+Q+$ &c., y tendremos $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+$ &c. $=(x-a)(x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+$ &c.), que queda satisfecha de dos modos siempre que $x-a=0$ ó que $x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+$ &c. $=0$.

229. Ahora, si esta ecuacion $x^{n-1}+P'x^{n-2}+Q'x^{n-3}+$ &c. $=0$ tuviere una raiz b, su primer miembro será divisible por $x-b$, con lo que $x^{n-1}+P'x^{n-2}+$ &c. $=(x-b)(x^{n-2}\ldots$ $\ldots+P''x^{n-3}+$ &c.), y por tanto $x^n+Px^{n-1}+$ &c. $=(x-a)(x^{n-1}+P'x^{n-2}+$ &c.) $\ldots$ $\ldots=(x-a)(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+$ &c.); luego la ecuacion propuesta se puede verificar en los tres casos de $x-a=0$, ó de $x-b=0$, ó de $x^{n-2}+P''x^{n-3}+$ &c. $=0$.

230. Asimismo, cuando la última ecuacion tiene una raiz c, su primer miembro se descompondrá en dos factores, $x-c$, $x^{n-3}+P'''x^{n-4}+$ &c. $=0$; de manera que $x^n+Px^{n-1}+$ &c $=(x-a)(x-b)(x^{n-2}+P''x^{n-3}+$ &c.) $=(x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+$ &c.).

Continuando con el mismo raciocinio sacariamos sucesivamente factores de los grados

$n-4$, $n-5$, $n-6$, &c.: y si cada uno de ellos, igualandolo á cero, tuviese una raiz, se daría á la ecuacion propuesta esta forma:

$x^n+Px^{n-1}+\&c.=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l)$; descomponiendola en tantos factores de primer grado como unidades tuviera el esponente n de su grado, y pudiendo verificarla de n modos, con hacer $x-a=0$ // $x-b=0$ // $x-c=0$ // $x-d=0$ // &c. ... .. // $x-l=0$.

231. Es de advertir que estas ecuaciones componentes no deben mirarse como verdaderas sino alternativamente, y que caeriamos en contradicion manifiesta si supusieramos que podian verificarse simultaneamente; pues que de $x-a=0$ sacamos $x=a$, y de $x-b=0$ deducimos $x=b$, cuyas consecuencias no pueden concordar á un mismo tiempo, siendo a y b cantidades desiguales.

232. Habiendose descompuesto el primer miembro de la ecuacion $x^n+Px^{n-1}+\&c.=0$ en n factores del primer grado, $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, &c., $x-l$, no puede tener otros del mismo. Con efecto, si suponemos el primer miembro divisible por $x-\alpha$, tendremos

$x^n+Px^{n-1}+\&c.=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.)$, y por consiguiente

$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots\ldots(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.)$; y si $x=a$, se desvanece el primer miembro de esta ecuacion, como tambien el segundo, que se convierte desde luego en $(a-\alpha)(a^{n-1}+pa^{n-2}+\&c.)$; pero, como a y α se suponen desiguales, el primer factor $a-\alpha$ no es nulo; luego el otro $a^{n-1}+pa^{n-2}+\&c.$ es el que debe serlo, y por tanto la cantidad a resulta necesariamente raiz de la ecuacion $x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.=0$,

de que se sigue que su primer miembro es divisible por $x-a$, y que

$$x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.=(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.),$$ deduciendose

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)......(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+px^{n-2}+\&c.)\ldots$$

$$\ldots=(x-\alpha)(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.),$$

$$(x-b)(x-c)(x-d)......(x-l)=\frac{(x-\alpha)(x-a)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.)}{x-a}\ldots$$

$$\ldots=(x-\alpha)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.).$$

233. Del mismo modo probarémos que el segundo factor $x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.$ del segundo miembro debe ser divisible por $x-b$, lo que reducirá la ecuacion anterior á

$$(x-c)(x-d)......(x-l)=\frac{(x-\alpha)(x^{n-2}+p'x^{n-3}+\&c.)}{x-b}=(x-\alpha)(x^{n-3}+p''x^{n-4}+\&c.).$$

Y continuando de este modo quitarémos sucesivamente del primer miembro y del segundo $n-1$ factores, no quedando en el primero mas que $x-l$ y en el otro solamente $x-\alpha$, esto es $x-l=x-\alpha$, ó bien $l=\alpha$.

Deducese, pues, que una ecuacion de un grado cualquiera no puede admitir mas divisores binómios de primer grado que unidades tuviere en el esponente de su grado, y que no puede, por consiguiente, tener mayor número de raices.

234. Considerada una ecuacion como producto de un número de factores $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d$, $\&c.$, igual al esponente de su grado, tomará la forma indicada [128], con

la modificacion de ser los términos alternativamente positivos y negativos.

Limitandonos, por ejemplo, á cuatro factores, tendremos

$$\begin{aligned} x^4 - ax^3 &+ abx^2 - abcx + abcd = 0. \\ -bx^3 &+ acx^2 - abdx \\ -cx^3 &+ adx^2 - acdx \\ -dx^3 &+ bcx^2 - bcdx \\ &+ bdx^2 \\ &+ cdx^2 \end{aligned}$$

Como los segundos términos de los binómios $x-a$, $x-b$, $x-c$, &c. son las raices de la ecuacion, tomadas con signo contrario; las propiedades demostradas en general [129], se verificarán en el presente caso de esta manera:

El coeficiente del segundo término, tomado con signo contrario, será la suma de las raices:

El coeficiente del tercer término será la suma de los productos de las raices multiplicadas de dos en dos:

El coeficiente del cuarto término, tomado con signo contrario, será la suma de los productos de las raices multiplicadas de tres en tres, y asi de los demas, cuidando de mudar el signo de los coeficientes de los términos, que estan en sitio par:

Y el último término, sometido como los otros á esta ley, será el producto de todas las raices.

235. Igualando, por ejemplo, con cero el producto de los tres factores $x-5$, $x+4$, $x+3$, formarémos la ecuacion $x^3+2x^2-23x-60=0$, cuyas raices son $+5, -4, -3$; su suma se compondrá de $5-4-3=-2$;

la de sus productos de dos en dos $5.-4+5.-3-4.-3=-20-15+12=-23$; y el producto de las tres $5.-4.-3=60$.

Esto es lo mismo que deduciríamos de los coeficientes 2, -23, -60, mudando el signo á los del segundo y cuarto término.

Si igualamos á cero el producto de los factores $x-2$, $x-3$, $x+5$, la ecuacion resultante $x^3-19x+30=0$ no tiene término afecto de x^2, potencia inmediatamente inferior á la del primero, y le falta este segundo término, porque la suma de las raices, que tomada con signo contrario forma el coeficiente de este término, es aquí

$$2+3-5=0;$$

ó bien porque la suma de las raices positivas es igual á la de las negativas.

236. Al considerar una ecuacion como formada por el producto de varios factores simples ó de primer grado, hemos probado [233] que no puede tener sino un número de ellos, señalado por el esponente n de su grado; pero, si combinamos estos factores de dos en dos, formarémos cantidades del segundo grado, que seran tambien factores de la ecuacion propuesta, y cuyo número se espresará [II 258] por $\frac{n(n-1)}{2}$.

Así, el primer miembro de la ecuacion

$$\begin{array}{l} x^4-ax^3+abx^2-abcx+abcd=0, \\ \quad -bx^3+acx^2-abdx \\ \quad -cx^3+adx^2-acdx \\ \quad -dx^3+bcx^2-bcdx \\ \qquad\qquad +bdx^2 \\ \qquad\qquad +cdx^2 \end{array}$$

que es el producto de

$$(x-a)\times(x-b)\times(x-c)\times(x-d)$$

se puede descomponer en factores de segundo grado, de las seis maneras siguientes

$$(x-a)(x-b)\times(x-c)(x-d)\ ;$$
$$(x-a)(x-c)\times(x-b)(x-d)\ ;$$
$$(x-a)(x-d)\times(x-b)(x-c)\ ;$$
$$(x-b)(x-c)\times(x-a)(x-d)\ ;$$
$$(x-b)(x-d)\times(x-a)(x-c)\ ;$$
$$(x-c)(x-d)\times(x-a)(x-b)\ ;$$

y resulta que una ecuacion de cuarto grado puede tener seis factores de segundo.

237. Combinando los factores simples de tres en tres, se formarán los divisores de tercer grado de la propuesta; de modo que, para una ecuacion del grado n, será [II 258] su número $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$; y asi de los demas.

LECCION XXIII.

De las Ecuaciones de tercer grado.

238. Como las ecuaciones de tercer grado pueden ser ó no completas, se presentan bajo una de estas cuatro formas:

$x^3+p=0$; $x^3+px+q=0$; $x^3+px^2+q=0$; $x^3+px^2+qx+r=0$.

239. Respecto á la primera $x^3+p=0$, pasarémos la cantidad conocida p al segundo miembro y estraeremos la raiz cúbica, con lo que tendremos uno de sus valores; pero, como todo radical de tercer grado ha de tener [233] tres valores, y se sacan los otros dos multiplicando la primera raiz [212] por $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ y por $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, resulta

$$x'=\sqrt[3]{-p};\quad x''=\sqrt[3]{-p}.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2};\quad x'''=\sqrt[3]{-p}.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

240. Tocante á la segunda forma $x^3+px+q=0$, supondremos $x=u+z$, y sacarémos

$$x^3+px+q=u^3+3u^2z+3uz^2+z^3+pu+pz+q=0 \; // \; u^3+z^3+q+(3zu+p)(u+z)=0;$$

cuya ecuacion queda satisfecha siempre que $u^3+z^3+q=0$, y que $3zu+p=0$.

De estas dos ecuaciones la última nos da $z=-\frac{p}{3u}$, y sustituyendo este valor en la otra, haremos el cálculo siguiente:

$$u^3+z^3+q=u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0,$$

$$u^6+qu^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

$$u^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\,,\ldots u=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)};$$

$$u^3+z^3+q=0,$$

$$z^3=-q-u^3,$$

$$u^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}, \ldots z^3=-q+\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}=-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}, \ldots z=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)};$$

$$x=u+z,$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)} \\ z=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)} \end{array}\right\}, \ldots x=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}.$$

Observemos que $z^3=-\tfrac{1}{2}q\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}$ no se diferencia de $u^3=-\tfrac{1}{2}q\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}$ sino en el signo del radical, por lo que una espresion lo deberá tener negativo cuando la otra lo tenga positivo, y al contrario.

241. A fin de hallar los otros dos valores de la raiz, que se sacarán [212] con las multiplicaciones de u y de z por $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, se ejecutará, para no equivocar el signo del radical, la operacion siguiente:

$$3uz+p=0,$$

$$p=-3uz;$$

$$u^3+z^3+q=0,$$

$$q=-u^3-z^3;$$

$$\left.\begin{array}{l} p=-3uz \\ q=-u^3-z^3 \end{array}\right\}, \ldots x^3+px+q=x^3-3uzx-u^3-z^3=0;$$

$$x=u+z,$$

$$x-u-z=0;$$

$$\frac{x^3-3uzx-u^3-z^3}{x-u-z}=x^2+(u+z)x+u^2-uz+z^2=0,$$

$$x=-\frac{u+z}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{u^2+2uz+z^2}{4}-u^2+uz-z^2\right)}=-\frac{u}{2}-\frac{z}{2}\pm\frac{\sqrt{(-3u^2+6uz-3z^2)}}{2}\ldots$$

$$\ldots=-\frac{u}{2}-\frac{z}{2}\pm\frac{u-z}{2}\sqrt{-3}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}u+\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}z,$$

$$\left.\begin{array}{l} u=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)} \\ z=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)} \end{array}\right\}, \ldots x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\frac{-1\mp\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}.$$

Y las tres raices serán $x' = \sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}+\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}$;

$$x'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})};$$

$$x''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})}.$$

242. Antes de pasar adelante advertiremos que á cualquier ecuacion, como

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\&c.=0,$$

se puede quitar su segundo término, suponiendo la incógnita igual á otra junta con el coeficiente del mismo término, tomado en sentido contrario, y dividido por el esponente de la ecuacion, esto es, $x=z-\frac{P}{n}$.

Asi tendremos

$$x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}+\&c.=\left(z-\frac{P}{n}\right)^n+P\left(z-\frac{P}{n}\right)^{n-1}+Q\left(z-\frac{P}{n}\right)^{n-2}+\&c.=z^n-Pz^{n-1}+\frac{n-1}{2n}P^2z^{n-2}-\&c.=z^n-\frac{n-1}{2n}P^2z^{n-2}+\&c.=$$
$$+Pz^{n-1}-\frac{n-1}{n}P^2z^{n-2}+\&c.\quad+\quad Q\,z^{n-2}-\&c.$$
$$+\quad Q\,z^{n-2}-\&c.$$

Si el segundo término de la propuesta fuese negativo hariamos $x=z+\frac{P}{n}$, y resultaria

$$x^n-Px^{n-1}+Qx^{n-2}-\&c.=\left(z+\frac{P}{n}\right)^n-P\left(z+\frac{P}{n}\right)^{n-1}+Q\left(z+\frac{P}{n}\right)^{n-2}-\&c.=z^n+Pz^{n-1}+\frac{n-1}{2n}P^2z^{n-2}+\&c.=z^n-\frac{n-1}{2n}P^2z^{n-2}-\&c.=$$
$$-Pz^{n-1}-\frac{n-1}{n}P^2z^{n-2}-\&c.\quad+\quad Q\,z^{n-2}+\&c.$$
$$+\quad Q\,z^{n-2}+\&c.$$

243. En este concepto, para resolver la ecuacion $x^3+px^2+q=0$ de la tercera forma, supondremos $x=z-\frac{p}{3}$, y calcularémos así:

$$x^3+px^2+q=\left(z-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(z-\frac{p}{3}\right)^2+q=z^3-pz^2+\tfrac{1}{3}p^2z-\tfrac{1}{27}p^3=z^3-\tfrac{1}{3}p^2z+\tfrac{2}{27}p^3+q=0;$$
$$+pz^2-\tfrac{2}{3}p^2z+\tfrac{1}{9}p^3$$
$$+q$$

cuya ecuacion se resuelve [240 y 241] como la fórmula $x^3+px+q=0$, pues carece de segundo término.

244. Lo mismo se practica con la ecuacion $x^3+px^2+qx+r=0$ de la cuarta forma, haciendo tambien $x=z-\frac{p}{3}$, de que resulta

$$\begin{aligned}x^3+px^2+qx+r=\left(z-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(z-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(z-\frac{p}{3}\right)+r=z^3&-pz^2+\tfrac{1}{3}p^2z-\tfrac{1}{27}p^3=z^3-(\tfrac{1}{3}p^2-q)z+\tfrac{2}{27}p^3-\tfrac{1}{3}pq+r=0\,;\\ &+pz^2-\tfrac{2}{3}p^2z+\tfrac{1}{9}p^3\\ &+\;qz-\tfrac{1}{3}pq\\ &+\;r\end{aligned}$$

que se resuelve igualmente por la fórmula $x^3+px+q=0$.

245. En las tres raices, que dejamos espresadas [241] por los valores de x', x'', x''', observarémos que, si p es positiva, no habrá mas raiz, que sea real, sino x', cualquiera que sea el signo de q, y las otras dos x'', x''' serán imajinarias; porque, no comprendiendo en cada una de estas el radical de tercer grado una misma cantidad, no podrán destruirse los productos, que resulten de la multiplicacion de estos radicales por $+\sqrt{-3}$ y $-\sqrt{-3}$, y seran [119] imajinarias las espresiones.

246. Pero, si tuviesemos $x^3-px+q=0$, en que p es negativa, el radical de segundo grado, sometido al de tercero, estaria espresado por $\sqrt{\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3}$, que todavia sería real cuando $\frac{1}{4}q^2>\frac{1}{27}p^3$, y por tanto resultaria real el valor de x', é imajinarios los de x'', x''' como anteriormente.

247. En el caso de ser $\frac{1}{4}q^2<\frac{1}{27}p^3$ se presentan á la vista las tres raices bajo una forma imajinaria; pero, desenvolviendolas como corresponde en la potencia fraccionaria $\frac{1}{3}$, se halla finalmente que las tres raices solo contienen cantidades reales. Con motivo de venir espresados los valores por un número indefinido de términos, y no poderse, por tanto, hallar las tres raices sino por aprocsimacion, se ha dado á este *caso* la denominacion de *irreductible*.

248. Con efecto, suponiendo $-\frac{1}{2}q=a$, $-\frac{1}{27}p^3+\frac{1}{4}q^2=-b^2$, ó bien $\sqrt{(\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3)}=\sqrt{-b^2}=b\sqrt{-1}$, tendremos

$$x'=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}+\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}=(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\,;$$

$$x''=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\,;$$

$$x'''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2-\tfrac{1}{27}p^3})}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Aqui necesitamos hacer uso [131] del binómio de Neuton, aunque no hemos demostrado todavia que su fórmula sirve tambien para las potencias fraccionarias y las negativas. Haciendo, pues, [133] en ella $m=\frac{1}{3}$ sacarémos

$$(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\tfrac{1}{9}\cdot\frac{b^2}{a^2}-\frac{5}{3^4}\cdot\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{3^5}\cdot\frac{b^4}{a^4}+\frac{22}{3^6}\cdot\frac{b^5}{a^5}\sqrt{-1}+\frac{154}{3^8}\cdot\frac{b^6}{a^6}-\frac{374}{3^9}\cdot\frac{b^7}{a^7}\sqrt{-1}-\frac{935}{3^{10}}\cdot\frac{b^8}{a^8}+\&c.\right);$$

$$(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\left(1-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\tfrac{1}{9}\cdot\frac{b^2}{a^2}+\frac{5}{3^4}\cdot\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1}-\frac{10}{3^5}\cdot\frac{b^4}{a^4}-\frac{22}{3^6}\cdot\frac{b^5}{a^5}\sqrt{-1}+\frac{154}{3^8}\cdot\frac{b^6}{a^6}+\frac{374}{3^9}\cdot\frac{b^7}{a^7}\sqrt{-1}-\frac{935}{3^{10}}\cdot\frac{b^8}{a^8}-\&c.\right);$$

siendo la suma de ambas ecuaciones

$$x' = (a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = 2a^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}.\frac{b^6}{a^6} - \frac{935}{59049}.\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right)\ldots$$

$$\ldots = 2a^{\frac{1}{3}}\left(1+0{,}11111.\frac{b^2}{a^2} - 0{,}041152.\frac{b^4}{a^4} + 0{,}023472.\frac{b^6}{a^6} - 0{,}015834.\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right),$$

cuyo valor es real por haberse destruido entre si las imajinarias.

249. Ahora buscarémos las otras dos raices, guiandonos por las indicaciones anteriores [248]:

$$x'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\};$$

Ya hemos sacado el valor de la espresion contenida entre los primeros corchetes, y vemos que el de la espresion comprendida entre los segundos es la diferencia de dos séries halladas, que no tienen mas diversidad que la de signos contrarios en los términos pares, y por consiguiente su diferencia es el duplo de estos mismos términos de la primera série; de modo que

$$x'' = -\tfrac{1}{2}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\} = -\tfrac{1}{2}.2a^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}.\frac{b^6}{a^6} - \frac{935}{59049}.\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right).$$

$$\ldots + 2a^{\frac{1}{3}}.\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left(\tfrac{1}{3}.\frac{b}{a}\sqrt{-1} - \frac{5}{3^4}.\frac{b^3}{a^3}\sqrt{-1} + \frac{22}{3^6}.\frac{b^5}{a^5}\sqrt{-1} - \frac{374}{3^9}.\frac{b^7}{a^7}\sqrt{-1} + \&c.\right) = -a^{\frac{1}{3}}\left(1+\tfrac{1}{9}.\frac{b^2}{a^2} - \frac{10}{243}.\frac{b^4}{a^4} + \frac{154}{6561}.\frac{b^6}{a^6} - \frac{935}{59049}.\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right).$$

$$\ldots + a^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{-3}\;\sqrt{-1}}{3}\left(\frac{b}{a} - \frac{5}{27}.\frac{b^3}{a^3} + \frac{22}{243}.\frac{b^5}{a^5} - \frac{374}{6561}.\frac{b^7}{a^7} + \&c.\right) = -a^{\frac{1}{3}}\left(1+0{,}11111\frac{b^2}{a^2} - 0{,}041152\frac{b^4}{a^4} + 0{,}023472\frac{b^6}{a^6}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 0{,}015834\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right) - \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - 0{,}185185\frac{b^3}{a^3} + 0{,}090534\frac{b^5}{a^5} - 0{,}057003\frac{b^7}{a^7} + \&c.\right);$$ que tambien es un valor real.

250. Para hallar la tercera raiz [248]

$$x''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}(a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\},$$

considerarémos que no se diferencia de la segunda sino en el diverso sentido del segundo término de la última espresion, y por tanto, mudando el signo de este término, resultará el valor de

$$x''' = -\tfrac{1}{2}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} + (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}\left\{(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} - (a-b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\right\}\ldots$$

$$\ldots = -a^{\frac{1}{3}}\left(1+0{,}11111\frac{b^2}{a^2} - 0{,}041152\frac{b^4}{a^4} + 0{,}023472\frac{b^6}{a^6} - 0{,}015834\frac{b^8}{a^8} + \&c.\right)\ldots$$

$$\ldots + \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{3}}\left(\frac{b}{a} - 0{,}185185\frac{b^3}{a^3} + 0{,}090534\frac{b^5}{a^5} - 0{,}057003\frac{b^7}{a^7} + \&c.\right);$$ que es asimismo real.

251. Las espresiones, en que hemos hallado el valor de las raices, no pueden ser útiles sino cuando sean [161] *converjentes*, lo que requiere que $\frac{b}{a} < 1$ ó bien $a > b$, pues de lo contrario sus potencias $\frac{b^2}{a^2}$, $\frac{b^3}{a^3}$, &c. irian creciendo.

252. Para mayor ilustracion propongamonos el ejemplo de buscar un número tal que el esceso de su cubo sobre el triplo de su cuadrado dé el duplo del esceso del mismo número sobre 3.

Es evidente que, siendo t el número, será la cuestion $t^3-3t^2=2(t-3)$, y calcularémos así:

$$t^3-3t^2-2t+6=0,$$

$$[242]\ \text{Supongo } t=x+\tfrac{3}{3}=x+1, \ldots t^3-3t^2-2t+6=x^3+3x^2+3x+1=x^3-5x+2=0;$$
$$\begin{aligned}&-3x^2-6x-3\\&\quad\;-2x-2\\&\qquad\;\;+6\end{aligned}$$

$$[240]\ \text{Fórmula}\ \left.\begin{aligned}x^3+px+q=0\\x^3-5x+2=0\end{aligned}\right\}, \;\ldots\; \left\{\begin{aligned}&p=-5, \ldots \tfrac{1}{27}p^3=\tfrac{1}{27}\cdot(-5)^3=-\tfrac{125}{27};\\&q=2, \ldots \tfrac{1}{4}q^2=\tfrac{1}{4}\cdot 2^2=1.\end{aligned}\right.$$

Como $\frac{1}{4}q^2 < \frac{1}{27}p^3$ nos hallamos [247] en el *caso irreductible*, y por tanto [248] haremos $a=-\frac{1}{2}q=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$, $-b^2=\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3\ldots$ $\ldots=1-\frac{125}{27}=-\frac{98}{27}$; de consiguiente $\frac{b^2}{a^2}=\frac{98}{27}:(-1)^2=\frac{98}{27}:1=\frac{98}{27}$, y siendo $\frac{b^2}{a^2}>1$ no sirven las fórmulas halladas [248], porque serian [161] *diverjentes*.

253. Recurriremos, pues, á otro método, como es el de buscar los divisores del último término de la ecuacion $x^3-5x+2=0$, que son $1, 2, -1, -2$; y sustituyendolos en ella, veremos que solo $x=2$ la satisface, y que es divisible por $x-2$; de modo que

$$\frac{x^3-5x+2}{x-2}=x^2+2x-1=0,$$

$$x=-1\pm\sqrt{(1+1)}=-1\pm\sqrt{2}=0{,}4142\ //\ -2{,}4142;$$

$$x'=2,\ldots t'=x'+1=2+1=3;\quad x''=0{,}4142,\ldots t''=x''+1=0{,}4142+1=1{,}4142;\quad x'''=-2{,}4142,\ldots t'''=x'''+1=-2{,}4142+1=-1{,}4142.$$

254. A veces se puede conseguir muy facilmente el objeto, inspeccionando, como hemos dicho [140], la planta de la cuestion, segun resulta en este ejemplo observando los factores:

$$t^3-3t^2=2t-6\ //\ t^2(t-3)=2(t-3),$$

$$(t^2-2)(t-3)=0\ ,\ldots\left\{\begin{aligned}&t'-3=0, \ldots t'=3;\\&t''^2-2=0, \ldots t''=\sqrt{2}=1{,}4142;\\&t'''^2-2=0, \ldots t'''=-\sqrt{2}=-1{,}4142.\end{aligned}\right.$$

(Veáse la Coleccion sesta de problemas.)

LECCION XXIV.

De las Ecuaciones de cuarto grado.

255. Estas ecuaciones se presentan bajo una de las ocho formas siguientes:

1.ª $x^4=p$; 2.ª $x^4+px^2+q=0$; 3.ª $x^4+px^3+q=0$; 4.ª $x^4+px+q=0$;
5.ª $x^4+px^2+qx+r=0$; 6.ª $x^4+px^3+qx^2+r=0$; 7.ª $x^4+px^3+qx+r=0$; 8.ª $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$.

La última ecuacion, que es la completa, se reduce á las demas considerando como cero los coeficientes de los términos, que faltan á las incompletas.

256. Ya sabemos [212] sacar la raiz de $x^4=p$, y tambien [220] la de $x^4+px^2+q=0$. En cuanto á las demas las consideraremos [242] despojadas de su segundo término, con lo que adquirirán la 5.ª forma $x^4+px^2+qx+r=0$.

257. Supondremos que esta ecuacion procede de la multiplicacion de dos factores completos de segundo grado, esto es,

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+Ax+B)(x^2+A'x+B')=0;$$

y procurarémos determinar las cantidades indicadas por las letras mayúsculas, igualando los coeficientes de la propuesta con los coeficientes homólogos del producto de los factores, de esta manera:

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+Ax+B)(x^2+A'x+B')=\begin{array}{l} x^4+Ax^3+Bx^2+A'Bx+BB'=0;\\ \quad\;\; +A'x^3+AA'x^2+AB'x\\ \qquad\qquad\; +B'x^2\end{array}$$

$$A+A'=0\quad,\;\ldots\quad A'=-A;$$

$$p=B+AA'+B'=B-A^2+B',\;\ldots\; B'=A^2+p-B;$$

$$q=A'B+AB'=AB'-AB\quad,\;\ldots\; B'=\frac{q}{A}+B;$$

$$\left.\begin{array}{l} B'=\dfrac{q}{A}+B\\ B'=A^2+p-B\end{array}\right\}\;,\;\ldots\quad \frac{q}{A}+B=A^2+p-B,$$

$$2B=A^2+p-\frac{q}{A},$$

$$B=\tfrac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right);$$

$$B'=\frac{q}{A}+B,$$

$$B=\tfrac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right)\quad,\;\ldots\quad B'=\frac{q}{A}+\tfrac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right)=\tfrac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l}B=\frac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right)\\ B'=\frac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right)\end{array}\right\}, \ldots\ BB'=\frac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right)=\frac{1}{4}\left(A^4+2pA^2+p^2-\frac{q^2}{A^2}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l}BB'=\frac{1}{4}\left(A^4+2pA^2+p^2-\frac{q^2}{A^2}\right)\\ BB'=r\end{array}\right\}, \ldots \frac{1}{4}\left(A^4+2pA^2+p^2-\frac{q^2}{A^2}\right)=r,$$

$$A^6+2pA^4+\ p^2\ A^2-q^2\ =4rA^2,$$

$$A^6+2pA^4+(p^2-4r)A^2-q^2\ =0,$$

Supongo $A^2=z$, ... $A^6+2pA^4+(p^2-4r)A^2-q^2\ =z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0.$

Esta ecuacion $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$ se llama la *reducida*, y como B, B' estan espresadas en valores de A, se conseguirá, con el conocimiento de esta última cantidad, determinar los coeficientes de los factores de segundo grado.

258. Consideraremos como conocidas las cantidades A, B, A', B', y haremos el cálculo siguiente:

$$x^4+px^2+qx+r=(x^2+Ax+B)(x^2+A'x+B')=0, \ldots \left\{\begin{array}{l}x^2+Ax+B=0;\\ x^2+A'x+B'=0;\end{array}\right.$$

$$x^2+Ax+B=0,$$

$$x=-\frac{1}{2}A\pm\sqrt{(\frac{1}{4}A^2-B)}=-\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A^2-4B)},$$

$$B=\frac{1}{2}\left(A^2+p-\frac{q}{A}\right), \ldots\ x=-\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(A^2-2A^2-2p+\frac{2q}{A}\right)}=-\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-A^2-2p+\frac{2q}{A}\right)},$$

$$A^2=z\ , \ldots\ x=\mp\frac{1}{2}\sqrt{z}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p\pm\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)};$$

$$x^2+A'x+B'=0,$$

$$x=-\frac{1}{2}A'\pm\frac{1}{2}\sqrt{(A'^2-4B')},$$

$$\left.\begin{array}{l}A'=-A\\ B'=\frac{1}{2}\left(A^2+p+\frac{q}{A}\right)\end{array}\right\}, \ldots\ x=\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(A^2-2A^2-2p-\frac{2q}{A}\right)}=\frac{1}{2}A\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-A^2-2p-\frac{2q}{A}\right)},$$

$$A^2=z\ , \ldots\ x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{z}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p\mp\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}.$$

Si hacemos, para abreviar, $\frac{1}{2}\sqrt{z}=m$, $\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=h$, $\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=h'$; sacarémos $x=\mp m\pm h$, $x=\pm m\pm h'$, que dan los ocho valores

$$x=-m+h,\quad x=-m-h,\quad x=m+h,\quad x=m-h,\quad x=m+h',\quad x=m-h',\quad x=-m+h',\quad x=-m-h'.$$

259. Con estos ocho valores se pueden formar tantos sistemas de raices x', x'', x''', $x^{\prime v}$ como combinaciones se pueden hacer con ocho cantidades tomadas de cuatro en cuatro, que [II 258] son $\frac{8.7.6.5}{2.3.4}=70$; pero es necesario reconocer cual de estos sistemas es admisible.

Desde luego vemos que, no teniendo $x^4+px^2+qx+r=0$ segundo término, y siendo el coeficiente de este término [129 y 234] igual á la suma de las raices, deberá resultar $x'+x''+x'''+x^{\prime v}=0$, cuya propiedad solo se verifica en los cuatro sistemas siguientes:

$$\begin{array}{llll} x'=-m+h; & x'=-m+h'; & x'=-m+h; & x'=-m-h; \\ x''=-m-h; & x''=-m-h'; & x''=m-h; & x''=m+h; \\ x'''=m+h'; & x'''=m+h; & x'''=-m+h'; & x'''=-m-h'; \\ x^{\prime v}=m-h'; & x^{\prime v}=m-h; & x^{\prime v}=m-h'; & x^{\prime v}=m+h'. \end{array}$$

Reducidos ya á estos cuatro sistemas tendremos presente que en la propuesta [129 y 234] el coeficiente del tercer término ha de ser la suma de los productos de las raices multiplicadas de dos en dos, el del cuarto término debe ser la suma de los productos de las raices multiplicadas de tres en tres con signo contrario, y el del quinto y último término constará del producto de todas las raices; cuyas condiciones solo se satisfacen por el primer sistema, en que [258], siendo $m^2=\frac{1}{4}z$, $h^2=\frac{1}{4}\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)$, $h'^2=\frac{1}{4}\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)$; resulta

$$x'x''+x'x'''+x'x^{\prime v}+x''x'''+x''x^{\prime v}+x'''x^{\prime v}=(-m+h)(-m-h)+(-m+h)(m+h')+(-m+h)(m-h')+(-m-h)(m+h')+(-m-h)(m-h')\dots$$

$$\dots+(m+h')(m-h')=-(2m^2+h^2+h'^2)=-\left(\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{4}z-\tfrac{1}{2}p+\frac{q}{2\sqrt{z}}-\tfrac{1}{4}z-\tfrac{1}{2}p-\frac{q}{2\sqrt{z}}\right)=p;$$

$$x'x''x'''+x'x''x^{\prime v}+x'x'''x^{\prime v}+x''x'''x^{\prime v}=(-m+h)(-m-h)(m+h')+(-m+h)(-m-h)(m-h')+(-m+h)(m+h')(m-h')\dots$$

$$\dots+(-m-h)(m+h')(m-h')=2m(h'^2-h^2)=\sqrt{z}\left(-\tfrac{1}{4}z-\tfrac{1}{2}p-\frac{q}{2\sqrt{z}}+\tfrac{1}{4}z+\tfrac{1}{2}p-\frac{q}{2\sqrt{z}}\right)=\sqrt{z}.-\frac{q}{\sqrt{z}}=-q;$$

$$x'x''x'''x^{\prime v}=(-m+h)(-m-h)(m+h')(m-h')=(m^2-h^2)(m^2-h'^2)=\left(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}p-\frac{q}{2\sqrt{z}}\right)\left(\tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}p+\frac{q}{2\sqrt{z}}\right)\dots$$

$\dots=\frac{1}{4}\left(z^2+2pz+p^2-\frac{q^2}{z}\right)$; y como [257] es $z=A^2$ y $\frac{1}{4}\left(A^4+2pA^2+p^2-\frac{q^2}{A^2}\right)=BB'=r$; sacamos

$$x'x''x'''x^{\prime v}=\tfrac{1}{4}\left(z^2+2pz+p^2-\frac{q^2}{z}\right)=\tfrac{1}{4}\left(A^4+2pA^2+p^2-\frac{q^2}{A^2}\right)=BB'=r.$$

Son, pues, las raices $x'=-m+h$; $x''=-m-h$; $x'''=m+h'$; $x^{\prime v}=m-h'$.

260. Como estos valores dependen [257] de la *reducida* $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=0$, que tiene tres raices z', z'', z''', resultarian doce valores de x para una ecuacion de cuarto grado, que solo puede tener [233] cuatro; y por tanto será suficiente sustituir un solo valor de z, de modo que

$$x' = -m+h = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)};$$

$$x'' = -m-h = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)};$$

$$x''' = m+h' = \tfrac{1}{2}\sqrt{z}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)};$$

$$x^{IV} = m-h' = \tfrac{1}{2}\sqrt{z}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)};$$ espresarán las cuatro raices de $x^4+px^2+qx+r=0$.

261. Resta ahora ecsaminar la naturaleza de estas raices, segun los signos y la magnitud de los coeficientes p, q, r.

Veamos de que especie pueden ser los valores de z, que suministre la *reducida*; y, como una ecuacion de tercer grado ha de tener [245] una raiz real y dos imajinarias, ó bien [247] sus tres raices reales, siempre se podrá tomar para z un valor real; pero se necesita saber si este valor será positivo ó negativo para conocer si $\sqrt{z}$ será real ó imajinaria.

Observemos que el último término de la *reducida* es $-q^2$, que permanecerá negativo, sea cual fuere el sentido de q. Ademas, siendo el producto de todas las raices [234] tomadas con signo contrario, no ha podido formarse sino por tres factores negativos, ó por dos positivos y uno negativo; de consiguiente las tres raices son positivas, ó dos son negativas y una positiva.

262. En el caso de ser z una cantidad positiva tendrá $\sqrt{z}$ un valor real, y la otra parte $\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}$ ofrecerá estos resultados:

1º Si p y q fuesen positivas será $\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}$ imajinaria.

2º Si p fuese negativa, esto es, $p=-p'$ se tendrá $\sqrt{\left(-z+2p'-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}$ cantidad real cuando $2p'>z+\frac{2q}{\sqrt{z}}$, y espresion imajinaria cuando $2p'<z+\frac{2q}{\sqrt{z}}$.

3º Si fuese p positiva y q negativa, esto es, $q=-q'$, resultará $\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q'}{\sqrt{z}}\right)}$ cantidad real cuando $\frac{2q'}{\sqrt{z}}>z+2p$, y espresion imajinaria cuando $\frac{2q'}{\sqrt{z}}<z+2p$.

4º Si p y q fuesen negativas, esto es, $p=-p''$ y $q=-q''$ tendriamos $\sqrt{\left(-z+2p''+\frac{2q''}{\sqrt{z}}\right)}$ cantidad real cuando $z<2p'+\frac{2q'}{\sqrt{z}}$, y espresion imajinaria cuando $z>2p'+\frac{2q'}{\sqrt{z}}$. Al mismo tiempo $\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}$ se convertiria en $\sqrt{\left(-z+2p'-\frac{2q'}{\sqrt{z}}\right)}$ cantidad real cuando $2p'>z+\frac{2q'}{\sqrt{z}}$, y espresion imajinaria cuando $2p'<z+\frac{2q'}{\sqrt{z}}$.

263. En el caso de ser z negativa las cuatro raices x', x'', x''', x'''' serán todas imaginarias.

264. Y en el caso de que tengamos $-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}=0$ y tambien $-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}=0$, las raices de la propuesta serán iguales de dos en dos.

265. De estas observaciones sacamos las consecuencias siguientes:

1.ª Una ecuacion de cuarto grado puede tener todas sus raices reales ó imajinarias, ó bien dos reales y dos imajinarias.

2.ª Tiene dos raices reales y dos imajinarias cuando la *reducida* no tiene sino una raiz real.

3.ª Tiene sus raices todas reales ó todas imajinarias, si la *reducida*, teniendo sus tres raices reales y cayendo en el caso irreductible, no tiene sino raices positivas, ó bien si esta misma *reducida* no tiene sino una raiz positiva.

266. Hagamos aplicacion á los ejemplos:

1.º $x^4-x^2+2x-1=0$;

[256] Fórmula $\left.\begin{array}{l} x^4+px^2+qx+r=0 \\ x^4-x^2+2x-1=0 \end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l} p=-1; \\ q=\ \ 2; \\ r=-1; \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{l} p=-1 \\ q=\ \ 2 \\ r=-1 \end{array}\right\},\ \ldots\ z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=z^3-2z^2+5z-4=0;$$

Supongo $z=u+\frac{2}{3}$, . . . $z^3-2z^2+5z-4=u^3+\frac{11}{3}u-\frac{34}{27}=0$;

[240] Fórmula $\left.\begin{array}{l} x^3+p'x+q'=0 \\ u^3+\frac{11}{3}u-\frac{34}{27}=0 \end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l} p'=\frac{11}{3}; \\ q'=-\frac{34}{27}; \end{array}\right.$

$$u=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q'+\sqrt{\tfrac{1}{4}q'^2+\tfrac{1}{27}p'^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q'-\sqrt{\tfrac{1}{4}q'^2+\tfrac{1}{27}p'^3}\right)},$$

$$\left.\begin{array}{l} p'=\frac{11}{3} \\ q'=-\frac{34}{27} \end{array}\right\}\ ,\ .\ .\ .\ u=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}\cdot-\tfrac{34}{27}+\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot\frac{34^2}{27^2}+\tfrac{1}{27}\cdot\frac{11^3}{3^3}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}\cdot-\tfrac{34}{27}-\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot\frac{34^2}{27^2}+\tfrac{1}{27}\cdot\frac{11^3}{3^3}}\right)}\ldots$$

$$\ldots=\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(17+\sqrt{1620})}+\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(17-\sqrt{1620})}=0{,}333\&c.=\tfrac{1}{3};$$

$$z=u+\tfrac{2}{3},$$

$$u=\tfrac{1}{3}\ ,\ .\ .\ .\ z=\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}=1;$$

$$\left.\begin{array}{l} z=\ \ 1 \\ p=-1 \\ q=\ \ 2 \end{array}\right\},\ldots x'=-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{1}+\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-1+2+\frac{4}{\sqrt{1}}\right)}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5};$$

$$\left.\begin{array}{l} z=\ \ 1 \\ p=-1 \\ q=\ \ 2 \end{array}\right\},\ldots x''=-\tfrac{1}{2}\sqrt{z}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=-\tfrac{1}{2}\sqrt{1}-\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-1+2+\frac{4}{\sqrt{1}}\right)}=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5};$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 \\ p = -1 \\ q = 2 \end{array}\right\}, \ldots x''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{z} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-1+2-\frac{4}{\sqrt{1}}\right)} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 1 \\ p = -1 \\ q = 2 \end{array}\right\}, \ldots x^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{z} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{1} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-1+2-\frac{4}{\sqrt{1}}\right)} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

2.° $x^4 - 12x^2 - 8x + 2 = 0$;

$$[256] \text{ Fórmula } \left.\begin{array}{l} x^4 + px^2 + qx + r = 0 \\ x^4 - 12x^2 - 8x + 2 = 0 \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} p = -12; \\ q = -8; \\ r = 2; \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} p = -12 \\ q = -8 \\ r = 2 \end{array}\right\}, \ldots z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = z^3 - 24z^2 + 136z - 64 = 0;$$

Supongo $z = u + 8$, . . . $z^3 - 24z^2 + 136z - 64 = u^3 - 56u = (u^2 - 56)u = 0, \ldots \left\{\begin{array}{l} u = 0; \\ u = \pm\sqrt{56} = \sqrt{56} \,/\!/\, -\sqrt{56}; \end{array}\right.$

$$z = u + 8,$$

$u = 0$, . . . $z = 0 + 8 = 8$;

$$\left.\begin{array}{l} z = 8 \\ p = -12 \\ q = -8 \end{array}\right\}, \ldots x' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{8} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-8+2.12-\frac{2.8}{\sqrt{8}}\right)} = -\sqrt{2} + \sqrt{(4-\sqrt{2})};$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 8 \\ p = -12 \\ q = -8 \end{array}\right\}, \ldots x'' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{z} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{8} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-8+2.12-\frac{2.8}{\sqrt{8}}\right)} = -\sqrt{2} - \sqrt{(4-\sqrt{2})};$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 8 \\ p = -12 \\ q = -8 \end{array}\right\}, \ldots x''' = \tfrac{1}{2}\sqrt{z} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{8} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-8+2.12+\frac{2.8}{\sqrt{8}}\right)} = \sqrt{2} + \sqrt{(4+\sqrt{2})};$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 8 \\ p = -12 \\ q = -8 \end{array}\right\}, \ldots x^{\text{IV}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{z} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{8} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(-8+2.12+\frac{2.8}{\sqrt{8}}\right)} = \sqrt{2} - \sqrt{(4+\sqrt{2})}.$$

En este ejemplo no hemos usado de la fórmula $u = \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q' + \sqrt{\tfrac{1}{4}q'^2 + \tfrac{1}{27}p'^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q' - \sqrt{\tfrac{1}{4}q'^2 + \tfrac{1}{27}p'^3}\right)}$, porque de la ecuacion $(u^2 - 56)u = 0$ hemos sacado $u = 0$, lo que ha sido suficiente para determinar el valor $z' = u + 8 = 0 + 8 = 8$. Con los otros dos valores de $u = \sqrt{56} \,/\!/\, -\sqrt{56}$ hubieramos sacado $z'' = u + 8 = 8 + \sqrt{56}$, $z''' = u + 8 = 8 - \sqrt{56}$; pero no ha sido necesario emplearlos.

LECCION XXV.

De las Ecuaciones comparables á las de tercero y cuarto grado.

267. Esta Leccion puede considerarse como una continuacion de la XXI, pues ambas llevan el objeto de resolver ecuaciones superiores por el mismo método que otras de inferior grado.

A las ecuaciones de tercer grado se pueden comparar las que tienen estas formas $x^{3n}+px^n+q=0$, $x^{3n}+px^{2n}+q=0$, $x^{3n}+px^{2n}+qx^n+r=0$; porque, haciendo $x^n=t$, sacamos [238] las fórmulas

$$x^{3n}+px^n+q=t^3+pt+q=0\,;\quad x^{3n}+px^{2n}+q=t^3+pt^2+q=0\,;\quad x^{3n}+px^{2n}+qx^n+r=t^3+pt^2+qt+r=0\,;$$

y tambien $x=\sqrt[n]{t'}$, $x=\sqrt[n]{t''}$, $x=\sqrt[n]{t'''}$. Como cada una de estas tres ecuaciones suministra n valores para x, será $3n$ el número total de raices segun corresponde.

268. Tomemos por ejemplo la ecuacion $u^{24}-5u^{16}+11u^8-7=0$, y suponiendo $u^8=t$, haremos este cálculo

$$u^{24}-5u^{16}+11u^8-7=t^3-5t^2+11t-7=0\,;$$

$$\text{Supongo } t=x+\tfrac{5}{3},\ldots t^3-5t^2+11t-7=\begin{array}{l} x^3+5x^2+\frac{25}{3}x+\frac{125}{27} \\ \quad\;\, -5x^2-\frac{50}{3}x-\frac{125}{9} \\ \qquad\qquad\;\, +11x+\frac{55}{3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\; -7 \end{array}=x^3+\tfrac{8}{3}x+\tfrac{56}{27}=0\,;$$

$$[240]\ \text{Fórmula}\ \left.\begin{array}{l} x^3+px+q=0 \\ x^3+\frac{8}{3}x+\frac{56}{27}=0 \end{array}\right\},\;\ldots\;\left\{\begin{array}{l} p=\dfrac{8}{3},\ldots\dfrac{1}{27}p^3=\dfrac{1}{27}\left(\dfrac{8}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{512}{27}=\dfrac{512}{27^2}\,; \\ q=\dfrac{56}{27},\ldots\dfrac{1}{4}q^2=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{56}{27}\right)^2=\dfrac{28^2}{27^2}=\dfrac{784}{27^2}\,; \end{array}\right.$$

Respecto á que en la ecuacion $x^3+\frac{8}{3}x+\frac{56}{27}=0$ el coeficiente $p=\frac{8}{3}$ es positivo, tendremos [245] una raiz real y dos imajinarias; y como la raiz x' se saca sustituyendo en la fórmula de resolucion [241] los valores $-\frac{1}{2}q=-\dfrac{28}{27}$, $\dfrac{1}{4}q^2=\dfrac{784}{27^2}$, y $\dfrac{1}{27}p^3=\dfrac{512}{27^2}$, y las raices x'', x''' se obtienen multiplicando los radicales de tercer grado por $\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ del modo que se ha enseñado [241], deduciremos

$$x'=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}=\sqrt[3]{\left(-\frac{28}{27}+\sqrt{\frac{784+512}{27^2}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{28}{27}-\sqrt{\frac{784+512}{27^2}}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{4}{3}=-\frac{2}{3}\,;$$

$$x''=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{3}+\sqrt{-3}\,;$$

$$x'''=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}-\frac{4}{3}\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{1}{3}-\sqrt{-3}\,;$$

$$x' = -\tfrac{2}{3}\,, \quad \ldots \quad t' = x' + \tfrac{5}{3} = -\tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{3} = 1 = u^8\,, \quad \ldots \quad u^8 - 1 = 0\,;$$

$$x'' = \tfrac{1}{3} + \sqrt{-3}\,, \quad \ldots \quad t'' = x'' + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{3} + \sqrt{-3} + \tfrac{5}{3} = 2 + \sqrt{-3} = u^8\,, \quad \ldots \quad u^8 - 2 - \sqrt{-3} = 0\,;$$

$$x''' = \tfrac{1}{3} - \sqrt{-3}\,, \quad \ldots \quad t''' = x''' + \tfrac{5}{3} = \tfrac{1}{3} - \sqrt{-3} + \tfrac{5}{3} = 2 - \sqrt{-3} = u^8\,, \quad \ldots \quad u^8 - 2 + \sqrt{-3} = 0\,;$$

Teniendo presente cuanto hemos dicho [212 á 215] sobre la multitud de raices de la unidad, y el modo de estraer las de una ecuacion [210] como $x^m - a^m = 0$, y de otra [214] como $a^m + b^n = 0$, sacarémos

$$u^8 - 1 = 0, \ldots u = \quad 1 \;//\; -1 \;//\; \sqrt{-1} \;//\; -\sqrt{-1} \;//\; \sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; -\sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt{-\sqrt{-1}} \;//\; -\sqrt{-\sqrt{-1}}\,;$$

$$u^8 - 2 - \sqrt{-3} = 0, \ldots u = \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,1 \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,-1 \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{-1} \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{-1} \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{-\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2+\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{-\sqrt{-1}}\,;$$

$$u^8 - 2 + \sqrt{-3} = 0, \ldots u = \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,1 \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,-1 \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{-1} \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{-1} \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,\sqrt{-\sqrt{-1}} \;//\; \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{-\sqrt{-1}}.$$

269. Cualquiera de estos valores satisface á la ecuacion $u^{24} - 5u^{16} + 11u^8 - 7 = 0$, y para mayor convencimiento haremos con el último, que parece el mas complicado, la comprobacion siguiente

$$u = \sqrt[8]{(2-\sqrt{-3})}\,.\,-\sqrt{-\sqrt{-1}}\,, \quad \ldots \quad u^8 = \left(\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\,.\,-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^8 = \left(\sqrt[8]{2-\sqrt{-3}}\right)^8 \left(-\sqrt{-\sqrt{-1}}\right)^8 = (2-\sqrt{-3})^{\frac{8}{8}}(-\sqrt{-1})^4 = (2-\sqrt{-3})(-1)^2 = 2-\sqrt{-3}\,;$$

$$u^{16} = (2-\sqrt{-3})^2 = 4 - 4\sqrt{-3} - 3 = 1 - 4\sqrt{-3}\,;$$

$$u^{24} = (1-4\sqrt{-3})(2-\sqrt{-3}) = 2 - 8\sqrt{-3} - \sqrt{-3} - 4\cdot 3 = -10 - 9\sqrt{-3}\,;$$

$$\left.\begin{array}{l} u^{24} = -10 - 9\sqrt{-3} \\ u^{16} = \;\;\, 1 - 4\sqrt{-3} \\ u^8 \;= \;\;\, 2 - \sqrt{-3} \end{array}\right\} \ldots u^{24} - 5u^{16} + 11u^8 - 7 = -10 - 9\sqrt{-3} - 5(1-4\sqrt{-3}) + 11(2-\sqrt{-3}) - 7 = 22 - 22 + (20-20)\sqrt{-3} = 0.$$

Si trasladamos al primer miembro el segundo de cada una de las 24 ecuaciones resultantes [268], y las multiplicamos unas por otras el producto será la propuesta.

270. Propongamonos otro ejemplo con la ecuacion $t^{48} + 3t^{32} + 3t^{16} + 126 = 0$, siendo $t^{16} = u$:

$$t^{48} + 3t^{32} + 3t^{16} + 126 = u^3 + 3u^2 + 3u + 126 = 0\,;$$

Supongo $u = x - \tfrac{3}{3} = x - 1$, $\ldots$

$$\begin{array}{rl} u^3 + 3u^2 + 3u + 126 = & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ & \;\;\;\;\; + 3x^2 - 6x + 3 \\ & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; + 3x - 3 \\ & \; + 126 \end{array} = x^3 + 125 = 0\,, \quad \ldots \quad x = \sqrt[3]{-125} = -5\,;$$

$$\frac{x^3 + 125}{x + 5} = x^2 - 5x + 25 = 0\,,$$

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{25}{4} - 25)} = \tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-75} \;//\; \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-75}\,;$$

$$x' = -5\,, \quad \ldots \quad u' = x' - 1 = -5 - 1 = -6 = t'^{16}\,, \quad \ldots \quad t' = \sqrt[16]{-6}\,;$$

$$x'' = \frac{5+\sqrt{-75}}{2}\,, \quad \ldots \quad u'' = x'' - 1 = \frac{5+\sqrt{-75}}{2} - 1 = \frac{3+\sqrt{-75}}{2} = t''^{16}\,, \ldots t'' = \sqrt[16]{\frac{3+\sqrt{-75}}{2}}\,;$$

$$x''' = \frac{5-\sqrt{-75}}{2}, \ldots u''' = x''' - 1 = \frac{5-\sqrt{-75}}{2} - 1 = \frac{3-\sqrt{-75}}{2} = t'''^{16}, \ldots t''' = \sqrt[16]{\frac{3-\sqrt{-75}}{2}}.$$

En este ejemplo no hemos empleado las fórmulas de resolucion de tercer grado [241], porque, habiendose convertido la ecuacion propuesta en la de dos términos $x^3+125=0$, se ha dividido esta por la de primera raiz $x+5=0$, y ha resultado el cociente $x^2-5x+25=0$, que hemos resuelto como ecuacion de segundo grado.

Si multiplicamos cada uno de los radicales $t' = \sqrt[16]{-6}$, $t'' = \sqrt[16]{\frac{3+\sqrt{-75}}{2}}$, $t''' = \sqrt[16]{\frac{3-\sqrt{-75}}{2}}$ por las 16 raices de la unidad, tendremos los 48 valores que satisfacen á la propuesta.

271. En punto á las ecuaciones comparables con las de cuarto grado, las considerarémos bajo estas formas

$$x^{4n}+px^{3n}+q=0, \quad x^{4n}+px^{n}+q=0, \quad x^{4n}+px^{2n}+qx^{n}+r=0, \quad x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+r=0, \quad x^{4n}+px^{3n}+qx^{n}+r=0, \quad x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^{n}+s=0;$$

las cuales, haciendo $x^n=t$, se convierten [255] en

$$x^{4n}+px^{3n}+q=t^4+pt^3+q=0; \quad x^{4n}+px^{n}+q=t^4+pt+q=0; \quad x^{4n}+px^{2n}+qx^{n}+r=t^4+pt^2+qt+r=0;$$

$$x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+r=t^4+pt^3+qt^2+r=0; \quad x^{4n}+px^{3n}+qx^{n}+r=t^4+pt^3+qt+r=0; \quad x^{4n}+px^{3n}+qx^{2n}+rx^{n}+s=t^4+pt^3+qt^2+rt+s=0;$$

y se saca $x=\sqrt[n]{t'}$, $x=\sqrt[n]{t''}$, $x=\sqrt[n]{t'''}$, $x=\sqrt[n]{t^{\text{IV}}}$. Cada uno de estos radicales nos da n valores, con lo que obtendremos el número $4n$, que corresponde de raices.

272. Entremos en los ejemplos, siendo el primero $u^{40}-6u^{30}+7u^{20}+6u^{10}-8=0$ bajo la suposicion de $u^{10}=t$, y hagamos este cálculo

$$u^{40}-6u^{30}+7u^{20}+6u^{10}-8=t^4-6t^3+7t^2+6t-8=0;$$

Supongo $t=x+\frac{3}{2}, \ldots t^4-6t^3+7t^2+6t-8=x^4-\frac{13}{2}x^2+\frac{25}{16}=0$,

$$x^2=\frac{13}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^2-\frac{25}{16}}=\frac{13\pm 12}{4}=\frac{25}{4} \;//\; \frac{1}{4},$$

$$x=\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}} \;//\; \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\pm\tfrac{5}{2} \;//\; \pm\tfrac{1}{2};$$

$$x'=\tfrac{5}{2}, \quad \ldots \quad t'=x'+\tfrac{3}{2}=\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}=4=u^{10}, \quad \ldots \quad u=\sqrt[10]{4};$$

$$x''=-\tfrac{5}{2}, \quad \ldots \quad t''=x''+\tfrac{3}{2}=-\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}=-1=u^{10}, \quad \ldots \quad u=\sqrt[10]{-1};$$

$$x'''=\tfrac{1}{2}, \quad \ldots \quad t'''=x'''+\tfrac{3}{2}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}=2=u^{10}, \quad \ldots \quad u=\sqrt[10]{2};$$

$$x^{\text{IV}}=-\tfrac{1}{2}, \quad \ldots \quad t^{\text{IV}}=x^{\text{IV}}+\tfrac{3}{2}=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}=1=u^{10}, \quad \ldots \quad u=\sqrt[10]{1}=1.$$

Multiplicando estos cuatro radicales por las 10 raices de la unidad, sacarémos los 40 valores, que satisfacen á la propuesta.

Como en este ejemplo ha resultado la ecuacion $x^4-\frac{13}{2}x^2+\frac{25}{16}=0$, en que, hallandose la incógnita solo en dos términos, el esponente que tiene en uno es duplo del que tiene en otro, hemos suelto [217] esta ecuacion por el método de las de segundo grado.

273. Sirva de segundo ejemplo la ecuacion $u^{64}-7u^{48}+21u^{32}-29u^{16}+14=0$, suponiendo $u^{16}=t$, y calcularémos de este modo:

$$u^{64}-7u^{48}+21u^{32}-29u^{16}+14=t^4-7t^3+21t^2-29t+14=0;$$

Supongo $t=x+\frac{7}{4}, \ldots t^4-7t^3+21t^2-29t+14=x^4+\frac{21}{8}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{147}{256}=0;$

[256] Fórmula $\left.\begin{matrix} x^4+px^2+qx+r=0 \\ x^4+\frac{21}{8}x^2+\frac{13}{8}x-\frac{147}{256}=0 \end{matrix}\right\}$, . . . $\left\{\begin{matrix} p=\frac{21}{8} \\ q=\frac{13}{8} \\ r=-\frac{147}{256} \end{matrix}\right\}$, . . . $\left\{\begin{matrix} 2p=2\cdot\frac{21}{8}=\frac{21}{4}; \\ p^2-4r=\left(\frac{21}{8}\right)^2+4\cdot\frac{147}{256}=\frac{441+147}{64}=\frac{147}{16}; \\ q^2=\left(\frac{13}{8}\right)^2=\frac{169}{64}; \end{matrix}\right.$

$\left.\begin{matrix} 2p=\frac{21}{4} \\ p^2-4r=\frac{147}{16} \\ q^2=\frac{169}{64} \end{matrix}\right\}$ . . . . $z^3+2pz^2+(p^2-4r)z-q^2=z^3+\frac{21}{4}z^2+\frac{147}{16}z-\frac{169}{64}=0;$

Supongo $z=s-\frac{21}{4\cdot 3}=s-\frac{7}{4}$, . . . $z^3+\frac{21}{4}z^2+\frac{147}{16}z-\frac{169}{64}=s^3-\frac{21}{4}s^2+\frac{147}{16}s-\frac{343}{64}=s^3-8=0$, . . . $s=\sqrt[3]{8}=2;$

$$+\frac{21}{4}s^2-\frac{147}{8}s+\frac{1029}{64}$$
$$+\frac{147}{16}s-\frac{1029}{64}$$
$$-\frac{169}{64}$$

$s=2$, . . . $\begin{matrix} z=s-\frac{7}{4}, \\ z=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}; \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} z=\frac{1}{4} \\ p=\frac{21}{8} \\ q=\frac{13}{8} \end{matrix}\right\}$, . . . $x'=-\frac{1}{2}\sqrt{z}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}-2\cdot\tfrac{21}{8}+2\cdot\tfrac{13}{8}:\sqrt{\tfrac{1}{4}}\right)}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{4};$

$\left.\begin{matrix} z=\frac{1}{4} \\ p=\frac{21}{8} \\ q=\frac{13}{8} \end{matrix}\right\}$, . . . $x''=-\frac{1}{2}\sqrt{z}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p+\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=-\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}-2\cdot\tfrac{21}{8}+\tfrac{26}{4}\right)}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{1}=-\frac{3}{4};$

$\left.\begin{matrix} z=\frac{1}{4} \\ p=\frac{21}{8} \\ q=\frac{13}{8} \end{matrix}\right\}$, . . . $x'''=\frac{1}{2}\sqrt{z}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{21}{4}-\tfrac{26}{4}\right)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-12}=\frac{1}{4}+\sqrt{-3};$

$\left.\begin{matrix} z=\frac{1}{4} \\ p=\frac{21}{8} \\ q=\frac{13}{8} \end{matrix}\right\}$, . . . $x^{iv}=\frac{1}{2}\sqrt{z}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-z-2p-\frac{2q}{\sqrt{z}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}-\tfrac{21}{4}-\tfrac{26}{4}\right)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sqrt{-12}=\frac{1}{4}-\sqrt{-3};$

$x'=\frac{1}{4}$, ... $t'=x'+\frac{7}{4}=\frac{1}{4}+\frac{7}{4}=2=u^{16}$, . . . $u=\sqrt[16]{2};$

$x''=-\frac{3}{4}$, . . . $t''=x''+\frac{7}{4}=-\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=1=u^{16}$, . . . $u=\sqrt[16]{1}=1;$

$x'''=\frac{1}{4}+\sqrt{-3}$, . . . $t'''=x'''+\frac{7}{4}=\frac{1}{4}+\sqrt{-3}+\frac{7}{4}=2+\sqrt{-3}=u^{16}$, . . . $u=\sqrt[16]{(2+\sqrt{-3})};$

$$x^{\prime iv}=\tfrac{1}{4}-\sqrt{-3}\;,\ldots t^{\prime iv}=x^{\prime iv}+\tfrac{7}{4}=\tfrac{1}{4}-\sqrt{-3}+\tfrac{7}{4}=2-\sqrt{-3}=u^{16}\;,\ldots u=\sqrt[16]{(2-\sqrt{-3})}.$$

Con la multiplicacion de estos cuatro radicales por las 16 raices de la unidad se obtienen los 64 valores, que satisfacen á la propuesta.

LECCION XXVI.

De las Ecuaciones numéricas.

274. Ecsaminemos el caso de una ecuacion, cuyos coeficientes sean números enteros, y el de su primer término la unidad.

Representarémos la ecuacion por .... $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\ldots\ldots+Tx+U=0$,

Si sustituimos un quebrado irreductible $\frac{a}{b}$ en lugar de x, será .... $\frac{a^n}{b^n}+P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}\ldots\ldots+T\frac{a}{b}+U=0$,

Multiplicando todos los términos por el denominador del primero resultará $a^n+Pa^{n-1}b+Qa^{n-2}b^2\ldots\ldots+Tab^{n-1}+Ub^n=0$,

Y se le puede dar esta forma .... $a^n+b(Pa^{n-1}+Qa^{n-2}b\ldots\ldots+Tab^{n-2}+Ub^{n-1})=0$.

En esta ecuacion su primer miembro tiene dos partes enteras, de las cuales la una es divisible por b, y la otra no puede serlo, pues a y b son entre si primeros, de consiguiente no pueden destruirse reciprocamente; luego, en el caso propuesto, las raices reales no pueden espresarse por fracciones, sino que han de ser números enteros ó incomensurables.

275. Aqui se echa de ver la ventaja, que resulta de quitar los quebrados de una ecuacion, ó hacer sus coeficientes enteros, siendo el del primer término la unidad. Esto se consigue suponiendo la incógnita igual á otra dividida por el producto de todos los denominadores de la ecuacion, haciendo las sustituciones oportunas y multiplicando todos los términos por el denominador del primero, como en este ejemplo:

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0,$$

Hago $x=\dfrac{z}{mnp}$, $\ldots x^3+\dfrac{ax^2}{m}+\dfrac{bx}{n}+\dfrac{c}{p}=\dfrac{z^3}{m^3n^3p^3}+\dfrac{az^2}{m^3n^2p^2}+\dfrac{bz}{mn^2p}+\dfrac{c}{p}=0$,

Multiplicando por el denominador del primer término será $z^3+anpz^2+bm^2np^2z+cm^3n^3p^2=0$.

Cuando los denominadores m, n, p tienen divisores comunes basta suponer z partido por el número mas pequeño, que pueda dividirse por cada denominador.

Si todos los denominadores fueran iguales á m, hariamos $x=\frac{z}{m}$ con lo que resultaría

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{m}=\frac{z^3}{m^3}+\frac{az^2}{m^3}+\frac{bz}{m^2}+\frac{c}{m}=0,$$

$$z^3+az^2+bmz+cm^2=0.$$

276. Ahora considerarémos que, si a es la raiz de la ecuacion $x^n+Px^{n-1}+Qx^{n-2}\,......+Tx+U=0$,

tendremos $a^n+Pa^{n-1}+Qa^{n-2}\,......+Ta+U=0$,

$U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\,......-Ta$;

y será a necesariamente un divisor del número entero U; de modo que bastará, cuando este número tenga pocos divisores, sustituirlos sucesivamente en lugar de x para reconocer si la propuesta tiene una raiz en números enteros.

Sirva de ejemplo $x^3-6x^2+27x-38=0$, cuyo último término no tiene mas divisores que 1, 2, 19, 38. Si los ensayamos positiva y negativamente hallarémos que únicamente el número entero $+2$ satisface á la ecuacion, esto es, $x=2$; de manera que

$$\frac{x^3-6x^2+27x-38}{x-2}=x^2-4x+19=0,$$

$$x=2\pm\sqrt{2^2-19}=2\pm\sqrt{-15};$$

y las tres raices serán $x'=2$; $x''=2+\sqrt{-15}$; $x'''=2-\sqrt{-15}$.

277. En los casos de ser muy penoso este procedimiento por la multitud de divisores del último término, podemos recurrir á un método, que se funda en las condiciones de la ecuacion $U=-a^n-Pa^{n-1}-Qa^{n-2}\,......-Ta$.

Sea por ejemplo..... $x^4+Px^3+Qx^2+Rx+S=0$, y designando a la raiz,

resultará..... $a^4+Pa^3+Qa^2+Ra+S=0$,

$S=-Ra-Qa^2-Pa^3-a^4$,

$\dfrac{S}{a}=-R-Qa-Pa^2-a^3$, debiendo ser $\dfrac{S}{a}$ un número entero;

Tendremos .... $\dfrac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3$,

y haciendo, para abreviar, $\dfrac{S}{a}+R=R'$, será .... $R'=\dfrac{S}{a}+R=-Qa-Pa^2-a^3$,

$\dfrac{R'}{a}=-Q-Pa-a^2$, debiendo ser $\dfrac{R'}{a}$ un número entero;

Tendremos .... $\dfrac{R'}{a}+Q=-Pa-a^2$,

y suponiendo $\dfrac{R'}{a}+Q=Q'$ será .... $Q'=\dfrac{R'}{a}+Q=-Pa-a^2$,

$\dfrac{Q'}{a}=-P-a$, debiendo ser $\dfrac{Q'}{a}$ un número entero;

Tendremos .... $\frac{Q'}{a}+P=-a$,

y haciendo $\frac{Q'}{a}+P=P'$ será .... $P'=\frac{Q'}{a}+P=-a$,

$$\frac{P'}{a}=-1,$$

$$\frac{P'}{a}+1=0.$$

Será, pues, a la raiz de la propuesta si satisface á las ecuaciones

$$\frac{S}{a}+R=R', \quad \frac{R'}{a}+Q=Q', \quad \frac{Q'}{a}+P=P', \quad \frac{P'}{a}+1=0.$$

De aqui se sigue que, para asegurarse de si uno de los divisores a del último término S puede ser la raiz de la ecuacion propuesta, es necesario

1º Dividir el último término por el divisor a, y añadir al cociente el coeficiente del término afecto de x.

2º Dividir esta suma por el divisor a, y añadir al cociente el coeficiente del término afecto de x^2.

3º Dividir esta suma por el divisor a, y añadir al cociente el coeficiente del término afecto de x^3.

4º Dividir esta suma por el divisor a, y añadir al cociente la unidad, que es coeficiente del término afecto de x^4. Si el resultado es cero será a la raiz.

Estas reglas son aplicables á las ecuaciones de un grado cualquiera; pero no debe hallarse el resultado cero, sino cuando se haya llegado al primer término de la propuesta.

278. Hagamos aplicacion á un ejemplo numérico en la ecuacion $x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0$, en que $P=-9$, $Q=23$, $R=-20$, $S=15$:

Divisores del último término [II 276] positivos y negativos .... $a=+15 // +5 // +3 // +1 // -1 // -3 // -5 // -15$;

Cocientes del último término dividido sucesivamente por todos sus divisores... $\frac{S}{a}=\frac{15}{a}=+1 // +3 // +5 // +15 // -15 // -5 // -3 // -1$;

Adicion del coeficiente de x con los cocientes anteriores ..... $R'=\frac{S}{a}+R=\frac{15}{a}-20=-19 // -17 // -15 // -5 // -35 // -25 // -23 // -21$;

Cocientes de los números anteriores por su divisor correspondiente

arriba, omitiendo los que no son enteros .... $\frac{R'}{a}=$ $-5 // -5 // +35$;

Adicion del coeficiente de x^2 con los cocientes anteriores ..... $Q'=\frac{R'}{a}+Q=\frac{R'}{a}+23=$ $+18 // +18 // +58$;

Cocientes de los números anteriores por su correspondiente divisor. . . . . $\frac{Q'}{a} =$ $+ 6 // + 18 // - 58$;

Adicion del coeficiente de x^3 con los cocientes anteriores . . . . $P' = \frac{Q'}{a} + P = \frac{Q'}{a} - 9 =$ $- 3 // + 9 // - 67$;

Cocientes de los números anteriores por su correspondiente divisor. . . . . $\frac{P'}{a} =$ $- 1 // + 9 // + 67$;

Adicion de la unidad con los cocientes anteriores. . . . . $\frac{P'}{a} + 1 =$ $0 // + 10 // + 68$.

Como el único resultado igual á cero es el que está debajo del divisor $+3$, se sigue que la propuesta no tiene otra raiz comensurable sino $x = 3$, y que es divisible por $x - 3$.

Con efecto $\frac{x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15}{x - 3} = x^3 - 6x^2 + 5x - 5 = 0$.

Pueden omitirse en el cuadro los divisores $+1$ y -1, que se ensayan mas facilmente sustituyendolos desde luego en la propuesta.

279. Propongamonos otro ejemplo con la ecuacion $x^3 - 7x^2 + 36 = 0$, en que $P = -7$, $Q = 0$, $R = 36$.

Despues de visto que los números $+1$ y -1 no satisfacen á la ecuacion, formarémos un cuadro semejante al anterior; y como falta en ella el término afecto de x, se omite la tercera línea, que solo seria repeticion de la segunda.

$a =$	$+36$	$+18$	$+12$	$+9$	$+6$	$+4$	$+3$	$+2$	-2	-3	-4	-6	-9	-12	-18	-36;
$Q' = \frac{R}{a} = \frac{36}{a} =$	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$	$+6$	$+9$	$+12$	$+18$	-18	-12	-9	-6	-4	-3	-2	-1;
$\frac{Q'}{a} =$					$+1$		$+4$	$+9$	$+9$	$+4$		$+1$;				
$P' = \frac{Q'}{a} + P = \frac{Q'}{a} - 7 =$					-6		-3	$+2$	$+2$	-3		-6;				
$\frac{P'}{a} =$					-1		-1	$+1$	-1	$+1$		$+1$;				
$\frac{P'}{a} + 1 =$					0		0	$+2$	0	$+2$		$+2$;				

Son, pues, las tres raices $x' = 6$, $x'' = 3$, $x''' = -2$; y con efecto $(x-6)(x-3)(x+2) = x^3 - 7x^2 + 36 = 0$.

280. Hay otro método, que, á pesar de ser algo engorroso por haberse de buscar los divisores de varias cantidades, y de estar sujeto á tanteos, conviene saberlo por su sencillez y claridad, y porque conduce á descubrir los factores de segundo grado.

Supongamos que uno de los divisores del último término sea a, el cual forme con x el factor $x + a$ de una ecuacion cualquiera. Si en ella sustituimos sucesivamente $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, seran las cantidades, en que se transforme el primer miembro, sucesivamente divisibles por $1+a$, a, $-1+a$, que estan en progresion, cuya diferencia es la unidad. De consiguiente ninguno de los divisores del último término puede ser el número a que buscamos, sino es medio proporcional, con la diferencia 1, entre otros divisores de los números, que resultaren por los supuestos de $x=1$ y de $x=-1$. Si esta circunstancia tuviere lugar en varios divisores del último término, á que se reduce la propuesta por la suposicion de $x=0$, haremos $x=2$, y entre los divisores de su resultado veremos los que sean mayores en una unidad que los respectivos á la suposicion de $x=1$; y luego se hará la misma comprobacion relativamente al supuesto de $x=-2$ ó bien de $x=3$ si fuere menester. Bien se deja entender que cada uno de los divisores del último término se ha de ensayar en el sentido positivo y en el negativo.

281. Apliquemos este método á los siguientes ejemplos:

1.º $x^3+3x^2-8x+10=0$;

Suposiciones.	Resultados.	Divisores.	Progresiones.	
$x=1$	6	1, 2, 3, 6	3	6
$x=0$	10	1, 2, 5, 10	2	5
$x=-1$	20	1, 2, 4, 5, 10, 20	1	4

Ya conocemos que sería inútil ensayar la division por otro factor que $x+2$ y $x+5$; pero no sabemos si ambos harán cabal la division. Por tanto corresponde suponer $x=2$, que produce 14, cuyos divisores son 1, 2, 7 y 14; y como ninguno de ellos es 4 no se puede continuar la primera progresion, al paso que 7 continúa la segunda. Es, pues, $x+5$ el factor buscado, como lo manifiesta esta operacion:

$$\frac{x^3+3x^2-8x+10}{x+5}=x^2-2x+2=0,$$

$$x=1\pm\sqrt{-1}.$$

2.º $x^4-x^3-16x^2+55x-75=0$;

Sup.	Result.	Divisores.	Progresiones.			
$x=1$	36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	4	−2	6	−4
$x=0$	75	1, 3, 5, 15, 25, 75	3	−3	5	−5
$x=-1$	144	1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144	2	−4	4	−6

Ahora hago $x=2$, de que resulta 21, entre cuyos divisores 1, 3, 7, 21, no se halla 5, con que se habria de continuar la primera progresion; pero se hallan -1, $+7$, -3, con que se continuan las otras. Para comprobarlas supongo $x=-2$, que da 225, cuya cantidad no es divisible por -7 como se requiere para la cuarta progresion; pero lo es por -5 y $+3$, con que se continua la segunda y tercera; luego solo pueden ser los factores buscados $x-3$, $x+5$.

Asi es que $\dfrac{x^4-x^3-16x^2+55x-75}{(x-3)(x+5)}=\dfrac{x^3+2x^2-10x+25}{x+5}=x^2-3x+5=0,$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{-11}}{2}.$$

282. Cuando la propuesta no pueda resolverse sino en factores de segundo grado, nos valdremos de un método semejante al que acabamos de esplicar.

Representemos por $xx+bx+c$ el divisor de la propuesta: hagamos sucesivamente $x=2$, $x=1$, $x=0$, $x=-1$, $x=-2$, y las cantidades resultantes serán divisibles sucesivamente por $4+2b+c$, $1+b+c$, c, $1-b+c$, $4-2b+c$, en que se transforma el divisor x^2+bx+c. Entre los divisores del resultado procedente de $x=2$ habrá un número, que representará $4+2b+c$, y si de cada uno de estos divisores se resta 4, alguno de los residuos representará $2b+c$: habrá tambien entre los divisores del resultado de $x=1$ un número, que represente $1+b+c$, y restando de ellos la unidad, se hallará en los residuos $b+c$: entre los divisores del último término de la propuesta, á que la reduce el supuesto de $x=0$, habrá uno que representará c: entre los divisores, que correspondieren al supuesto $x=-1$, se hallará $-b+c$ despues de quitar á cada uno la unidad; y en la série de los divisores dimanados del supuesto $x=-2$ se hallará $4-2b+c$, de que restando 4, algun residuo espresará $-2b+c$. Cada divisor, cuando se toma como minuendo, debe considerarse positiva y negativamente.

Es de observar que $2b+c$, $b+c$, c, $-b+c$, $-2b+c$ forman una progresion por equidiferencia, y por tanto no se deben elejir entre los residuos sino los que sean así proporcionales. Como el que correspondiere al supuesto $x=0$ representará c, y el que proviniere de $x=1$ será $b+c$, sacarémos el valor de b restando del que espresa $b+c$ el representado por c, y quedará determinado el factor $xx+bx+c=0$. Si ocurriesen dudas se hará $x=3$ ó bien $x=-3$ para desechar las progresiones que no puedan continuarse. Bien se habrá entendido que la cantidad sustraible de los divisores es el cuadrado del valor de x.

283. Hagamos aplicacion del método á los ejemplos:

$$1^{\circ}\quad x^4-3x^2-12x+5=0;$$

Sup.	Res.	Divisores.	Cuad.	Restas.	Progresiones.			
$x=2$	15	1, 3, 5, 15	4	−19, −9, −7, −5, −3, −1, +1, +11	−3	+1	−5	+11
$x=1$	9	1, 3, 9	1	−10, −4, −2, 0, +2, +8	−4	0	−2	+8
$x=0$	5	1, 5	0	−5, −1, +1, +5	−5	−1	+1	+5
$x=-1$	15	1, 3, 5, 15	1	−16, −6, −4, −2, 0, +2, +4, +14	−6	−2	+4	+2
$x=-2$	33	1, 3, 11, 33	4	−37, −15, −7, −5, −3, −1, +7, +29	−7	−3	+7	−1

Desde luego se conoce que, siendo 5 el último término de la propuesta, no pueden servir las cuatro progresiones. Hago, pues, $x=3$, sale 23, sus divisores 1 y 23, el cuadrado 9, y las restas -32, -10, -8, $+14$; pudiendose solo proseguir con -8 y $+14$ las dos últimas progresiones.

$$\text{Tenemos}\ \left.\begin{array}{r} c=1 \\ b+c=-2 \end{array}\right\}, \ldots\ b=-2-1=-3,\ \text{con lo que}\ x^2+bx+c=x^2-3x+1=0;$$

$$\text{y tambien}\ \left.\begin{array}{r} c=5 \\ b+c=8 \end{array}\right\}, \ldots\ b=8-5=3,\ \text{con lo que}\ x^2+bx+c=x^2+3x+5=0;$$

Efectivamente $(xx-3x+1)(xx+3x+5)=x^4-3x^2-12x+5=0.$

$$2.^{\circ}\ x^5-2x^4+x^3-5x^2-8x-2=0;$$

Sup.	Res.	Divisores.	Cuad.	Restas.	Progresiones.		
$x=2$	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30	4	−34, −19, −14, −10, −9, −7, −6, −5, −3, −2, −1, +1, +2, +6, +11, +26	−6	+2	+6
$x=1$	15	1, 3, 5, 15	1	−16, −6, −4, −2, 0, +2, +4, +14	−4	0	+4
$x=0$	2	1, 2	0	−2, −1, +2, +1	−2	−2	+2
$x=-1$	3	1, 3	1	−4, −2, 0, +2	0	−4	0
$x=-2$	78	1, 2, 3, 6, 13, 26, 39, 78	4	−82, −43, −30, −17, −10, −7, −6, −5, −3, −2, −1, +2, +9, +22, +35, +74	+2	−6	−2

Supongo $x=3$, su resultado es 37, los divisores 1 y 37, el cuadrado 9, las restas −46, −10, −8, +28, con que solo se puede continuar la primera progresion, siendo −8 término de ella, de modo que

$$\left.\begin{array}{r} c=-2 \\ b+c=-4 \end{array}\right\}, \ldots b=-4+2=-2, \text{ y por tanto } x^2+bx+c=x^2-2x-2=0;$$

$$\text{Así } \frac{x^5-2x^4+x^3-5x^2-8x-2}{x^2-2x-2}=x^3+3x+1.$$

LECCION XXVII.

Resolucion de las Ecuaciones por aprocsimacion.

284. Si bien todo calculador lleva la mira de sacar cabales los valores de la incógnita, tropieza á veces con ecuaciones que dejan burlados sus intentos, y necesita recurrir á métodos de aprocsimacion que se fundan en el principio siguiente:

Cuando dos cantidades, sustituidas en una ecuacion á su incógnita, dan dos resultados de sentido contrario, podemos concluir que una de las raices de esta ecuacion se halla comprendida entre ambas cantidades, y es por consiguiente real.

Sea, por ejemplo, la ecuacion $x^3-13x^2+7x-1=0$.

$$\text{Supongamos}\left\{\begin{array}{l} x=2, \ldots x^3-13x^2+7x-1=8-13.4+7.2-1=22-53=-31; \\ x=20, \ldots x^3-13x^2+7x-1=8000-13.400+7.20-1=8140-5201=+2939; \end{array}\right.$$ de que se deduce que esta ecuacion tiene una raiz real comprendida entre 2 y 20, esto es, $x>2$ y $x<20$.

285. Reunamos de un lado los términos positivos de la propuesta, y de otro los negativos, presentandola así $x^3+7x-(13x^2+1)$.

Esta cantidad ha resultado negativa, haciendo $x=2$, porque en esta hipótesis $x^3+7x<13x^2+1$ // $8+7.2<13.4+1$ // $22<53$; y se ha hallado positiva, suponiendo $x=20$, porque entonces $x^3+7x>13x^2+1$ // $8000+7.20>13.400+1$ // $8140>5201$.

Las cantidades x^3+7x y $13x^2+1$ aumentan cada una por su parte cuando damos á x valores cada vez mas grandes, los cuales se pueden tomar tan prócsimos como se quiera unos de otros; de modo que podremos hacer que crezcan las cantidades propuestas por grados tan pequeños como se juzgue conveniente; pero una vez que la primera de estas cantidades, siendo desde luego menor que la segunda, ha resultado despues mayor, es evidente que tiene un incremento mas rápido que la otra, por cuyo medio compensa el esceso, que esta última tenia sobre ella, y la traspasa; de consiguiente hay un momento en que ambas cantidades son iguales.

El valor de x, sea el que fuere, cuya ecsistencia acabamos de probar, y que da

$$x^3+7x=13x^2+1,$$

ofreciendo $x^3+7x-(13x^2+1)=0$,

ó bien $x^3-13x^2+7x-1=0$; es necesariamente la raiz de la ecuacion propuesta.

286. Lo que decimos de la ecuacion particular $x^3-13x^2+7x-1=0$ se puede aplicar á una ecuacion cualquiera, cuyos términos positivos designarémos por P y los negativos por N. Sea a el valor de x, que ha dado un resultado negativo, y b el que lo ha dado positivo: estas dos circunstancias no han podido verificarse sino porque, en virtud de la primera sustitucion, sacamos $P<N$, y por la segunda $P>N$; y habiendo P escedido á N, deducimos como antes que ecsiste un valor de x comprendido entre a y b, el cual da $P=N$.

287. Segun el raciocinio espuesto parece que los valores aplicables á x debian ser ambos positivos ó ambos negativos, pues que, siendo de diferente sentido, el valor negativo hace mudar de signo á los términos de la propuesta, que contienen potencias impares de la incógnita, y por consiguiente las espresiones P y N no se componen del mismo modo en una sustitucion que en otra. Sin embargo desaparece esta dificultad haciendo $x=0$, por cuyo medio la propuesta se reduce á su último término, que ha de ser necesariamente de sentido contrario al resultado de la primera ó segunda sustitucion.

Si tenemos, por ejemplo, la ecuacion

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0;$$

$$\text{harémos}\begin{cases} x=-1,\ldots x^4-2x^3-3x^2-15x-3=1+2-3+15-3=+12; \\ x=2,\ldots x^4-2x^3-3x^2-15x-3=16-16-12-30-3=-45; \end{cases}$$

y suponiendo $x=0,\ldots x^4-2x^3-3x^2-15x-3=-3$;

de modo que son de distinto sentido los resultados de $x=0$ y de $x=-1$.

Si hacemos $x=-z$ tendremos

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=z^4+2z^3-3z^2+15z-3=0,\ \ldots \begin{cases} P=z^4+2z^3+15z; \\ N=3z^2+3; \end{cases}$$

$$\text{Cuando } z=0,\ldots \left.\begin{cases} P=z^4+2z^3+15z=0 \\ N=3z^2+3=3 \end{cases}\right\},\ \ldots\ P<N;$$

$$\text{y cuando } z=1,\ldots \left.\begin{cases} P=z^4+2z^3+15z=1+2+15=18 \\ N=3z^2+3=3+3=6 \end{cases}\right\},\ldots P>N;$$

de que se deduce que la ecuacion de z tiene una raiz real comprendida entre 0 y $+1$, resultando de aqui que la ecuacion en x la tiene entre 0 y -1, y por tanto entre $+2$ y -1.

288. Observemos que, sea cual fuere el grado de una ecuacion y sus coeficientes, podemos siempre tomar un número, que sustituido á la incógnita, haga el primer término superior á la suma de todos los otros.

En lugar de la ecuacion $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}.....+Tx+U=0$ tomarémos, como la menos favorable, $x^m-Sx^{m-1}-Sx^{m-2}.....-Sx-S=0$, representando $-S$ el mayor de los coeficientes P, Q, ... T, U, y tendremos

$$x^m-Sx^{m-1}-Sx^{m-2}.....-Sx-S=x^m-S(x^{m-1}+x^{m-2}.....+x+1),$$

$$[61]\quad x^{m-1}+x^{m-2}.....+x+1=\frac{x^m-1}{x-1}, \ldots\ x^m-Sx^{m-1}-Sx^{m-2}.....-Sx-S=x^m-S.\frac{x^m-1}{x-1}=x^m-\frac{Sx^m}{x-1}+\frac{S}{x-1},$$

Poniendo M en lugar de x, ... $x^m-Sx^{m-1}-Sx^{m-2}.....-Sx-S=M^m-\frac{SM^m}{M-1}+\frac{S}{M-1}$;

cuya cantidad se hará positiva suponiendo $M^m=\frac{SM^m}{M-1}$, pues que entonces $M^m-\frac{SM^m}{M-1}+\frac{S}{M-1}=\frac{S}{M-1}$, y si $M^m=\frac{SM^m}{M-1}$ se divide por M^m resultará $1=\frac{S}{M-1}$,

$M=S+1$; luego, sustituyendo en lugar de x el mayor coeficiente de la ecuacion aumentado de la unidad, se hará el primer término superior á la suma de todos los otros.

Síguese de aqui que las raices positivas de la ecuacion propuesta estan necesariamente comprendidas entre 0 y $S+1$.

289. Tambien se puede hallar del mismo modo un límite á las raices negativas, para lo cual es necesario sustituir $-z$ en lugar de x en la propuesta, y hacer el primer término positivo [224] si resultase negativo. Es evidente que, por esta transformacion, los valores positivos de z corresponden á los negativos de x, y recíprocamente. Si R es el mayor coeficiente negativo despues de esta mutacion, será $R+1$ un límite de los valores positivos de z, y por consiguiente $-R-1$ será el de los valores negativos de x.

290. En fin, si quisieramos obtener para la menor de las raices un límite mas aprocsimado á cero, sustituiriamos $\frac{1}{z}$ en lugar de x en la propuesta, y preparariamos la transformada en z como ya [224] sabemos. Y, siendo los valores de z inversos de los de x, corresponderia el mayor de los primeros al menor de los segundos, y recíprocamente; luego, designando $S'+1$ el límite superior de los valores de z, tendremos

$$z<S'+1 \;//\; \frac{1}{x}<S'+1,$$

$$1<(S'+1)x,$$

$$\frac{1}{S'+1}<x.$$

291. Si tomamos un número M tal que el sentido de la cantidad $M^m+PM^{m-1}+QM^{m-2}.......+TM\pm U$ dependa de su primer término M^m, sucederá que, cuando el esponente m sea impar, el término M^m tendrá el mismo sentido que el número M. En este concepto, si el último término U es positivo, y hacemos $x=-M$, habrá un resultado de sentido contrario al que da la suposicion de $x=0$, de que se infiere que la propuesta tiene una raiz entre 0 y $-M$, esto es, negativa; pero, si el último término U es negativo, haremos $x=+M$, lo que da un resultado de sentido contrario al de la suposicion de $x=0$, en cuyo caso la raiz se halla entre 0 y $+M$, es decir, positiva. De estas obser-

vaciones se deduce que toda ecuacion de grado impar tiene necesariamente una raiz real de sentido contrario al de su último término.

292. Cuando la ecuacion propuesta es de grado par, el primer término M^m resulta positivo, sea cual fuere el sentido de M, y no podemos asegurarnos, por los medios precedentes, de la ecsistencia de una raiz real, siempre que el último término lleve el signo $+$, pues, sea que hagamos $x=0$ ó bien $x=\pm M$, sacarémos constantemente un resultado positivo; pero, cuando el último término es negativo, hallamos, por las suposiciones de $x=+M$, $x=0$, $x=-M$, tres resultados afectos respectivamente de los signos $+$, $-$, $+$, y por consiguiente la propuesta tiene á lo menos dos raices reales en este caso, la una positiva comprendida entre M y 0, y la otra negativa contenida entre 0 y $-M$; luego toda ecuacion de grado par, cuyo último término es negativo, tiene á lo menos dos raices reales, la una positiva y la otra negativa.

293. Pasemos á la resolucion de las ecuaciones por aprocsimacion, sirviendo de ejemplo $x^4-4x^3-3x+27=0$, cuyo mayor coeficiente negativo es -4, de que se infiere que su mayor raiz positiva será [289] menor que 5. Si sustituimos $-z$ en lugar de x resulta $x^4-4x^3-3x+27 \ldots$ $\ldots = z^4+4z^3+3z+27=0$, que, teniendo todos sus términos positivos, manifiesta que z debe ser negativo, de que se deduce que x es necesariamente positivo, y que la propuesta no puede tener raices negativas. Hallanse, pues, las raices reales comprendidas entre 0 y $+5$.

294. El primer método, que desde luego se presenta para descubrir límites mas aprocsimados, consiste en hacer sucesivamente $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$; y si dos de estos números, sustituidos en la propuesta, dan resultados de sentido contrario serán nuevos límites de las raices. Pero, haciendo

$$\begin{aligned}
x&=1, \ldots x^4-4x^3-3x+27 = 1-4\cdot1-3\cdot1+27 = +21;\\
x&=2, \ldots x^4-4x^3-3x+27 = 16-4\cdot8-3\cdot2+27 = +5;\\
x&=3, \ldots x^4-4x^3-3x+27 = 81-4\cdot27-3\cdot3+27 = -9;\\
x&=4, \ldots x^4-4x^3-3x+27 = 256-4\cdot64-3\cdot4+27 = +15;
\end{aligned}$$

vemos que la propuesta tiene dos raices reales, la una entre 2 y 3, y la otra entre 3 y 4. Para acercarnos mas á la primera tomarémos el medio entre los dos números que la comprenden, esto es, $x=\frac{2+3}{2}=2{,}5$; y el resultado de su sustitucion, que es

$$x^4-4x^3-3x+27=(2{,}5)^4-4(2{,}5)^3-3\cdot2{,}5+27=39{,}0625-62{,}5-7{,}5+27=-3{,}9375;$$

nos hará ver, pues que es negativo, que la raiz buscada está entre 2 y $2{,}5$. Tomando el medio entre estos dos números $x=\frac{2+2{,}5}{2}=2{,}25$; ó mas bien $2{,}3$; tendremos la raiz, que buscamos, con menos de un décimo de diferencia de su valor.

295. Con mucha rapidéz podemos acercarnos mas suponiendo $x=2{,}3+z$; pues es evidente que la incógnita z será una pequeña fraccion, de la cual podremos omitir el cuadrado y las potencias superiores; con lo que

$$x^4-4x^3-3x+27=(2{,}3+z)^4-4(2{,}3+z)^3-3(2{,}3+z)+27=\begin{array}{l}(2{,}3)^4+4(2{,}3)^3z\\ -4(2{,}3)^3-3\cdot4(2{,}3)^2z\\ -3\cdot2{,}3-3z\\ +27\end{array}=-0{,}5839-17{,}812z=0,$$

$$z=-\frac{0{,}5839}{17{,}812}=-0{,}03;$$

$$x=2{,}3+z,$$

$$z=-0{,}03, \ldots x=2{,}3-0{,}03=2{,}27.$$

Para obtener nuevo valor de x mas ecsacto que el anterior, supondremos $x=2{,}27+z'$, y sustituyendolo en la propuesta, sin incluir otra potencia de z' que la primera, hallarémos $-0{,}04595359-18{,}046468z'=0$, de que resulta $z'=-\frac{0{,}04595359}{18{,}046468}=-0{,}0025$; y de consiguiente $x=2{,}27-0{,}0025=2{,}2675$. Continuando este procedimiento podremos acercarnos cuanto se quiera al verdadero valor de x.

La segunda raiz real, que está comprendida entre 3 y 4, será, calculandola del mismo modo, $x=3{,}6797$ sino pasamos de la cuarta decimal.

296. Hay casos en que no se halla valor alguno real, sea positivo ó negativo, que sustituido en lugar de la incógnita ofrezca dos resultados de sentido contrario. Así sucede

1.º Cuando son imajinarias todas las raices de la ecuacion.

2.º Cuando estas raices son iguales de dos en dos, de cuatro en cuatro &c.

3.º Cuando son en parte imajinarias, y en parte iguales de dos en dos &c.

Con efecto, una ecuacion de cuatro factores $x-a$, $x-a$, $x-b$, $x-b$, esto es, $(x-a)^2.(x-b)^2=0$, no mudará nunca de signo, aunque se ponga en lugar de x un valor cualquiera, sea positivo ó negativo, porque el cuadrado de $x-a$, como tambien el de $x-b$, serán siempre positivos, ora sean $x-a$ y $x-b$ positivos, ora negativos.

Si son imajinarias todas las raices no habrá ningunos números reales, que sustituidos á x produzcan dos resultados de distinto sentido; porque si los hubiera, se hallaría el valor de la incógnita entre estos dos números, y seria por consiguiente real, lo que es contra el supuesto.

297. No nos empeñarémos en la investigacion de las raices fraccionarias ni de las imajinarias de las ecuaciones, porque nos conduciria demasiado lejos, y es objeto propio para un *Complemento* de Álgebra.

LECCION XXVIII.

De las Raices iguales de las Ecuaciones.

298. Cuando conocemos una de las raices, que tiene una ecuacion, podemos tomar por incógnita la diferencia entre esta raiz y otra cualquiera de ellas, con lo que obtendremos una ecuacion, que será de menor grado que la propuesta, y que tendrá varias propiedades notables.

Sea la ecuacion general $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots\ldots+Tx+U=0$, y sean a, b, c, d, &c. sus raices.

Sustituyendo $a+t$ en lugar de x, y desarrollando las potencias, tendremos

$$\begin{aligned}x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}\ldots\ldots+Tx+U= \quad & a^m + m\,a^{m-1}t+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}t^2\ldots\ldots+t^m=0.\\
&+Pa^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}t+\frac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}t^2+\&c.\\
&+Qa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}t+\frac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}t^2+\&c.\\
&+Ra^{m-3}+(m-3)Ra^{m-4}t+\frac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}t^2+\&c.\\
&+\&c.\\
&+Ta \quad +Tt\\
&+U\end{aligned}$$

299. En este desarrollo la primera columna $a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U$, que es semejante al primer miembro de la ecuacion propuesta, se desvanece por si misma, pues que a es una de las raices de esta ecuacion. Podemos, pues, suprimir la primera columna, y dividir despues por t todos los términos restantes. Resulta entonces

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + Ra^{m-3} \ldots\ldots + Ta + U = 0\,;$$

$$\begin{aligned} & ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} t \ldots\ldots\ldots + t^{m-1} = 0. \\ & + (m-1) Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Pa^{m-3} t + \&c. \\ & + (m-2) Qa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Qa^{m-4} t + \&c. \\ & + (m-3) Ra^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2} Ra^{m-5} t + \&c. \\ & + \quad \&c. \\ & + \quad T \end{aligned}$$

Y porque $a + t = x$, serán las $m-1$ raices de la ecuacion antecedente $t = x - a = b - a$, $t = x - a = c - a$, $t = x - a = d - a$, &c.

Para abreviar haremos por columnas

$$\left.\begin{aligned} & ma^{m-1} + (m-1) Pa^{m-2} \ldots\ldots + T = A \\ & m(m-1)a^{m-2} + (m-1)(m-2)Pa^{m-3} + \&c. = B \\ & \&c. \end{aligned}\right\}, \ldots \begin{aligned} & ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} t \ldots\ldots\ldots + t^{m-1} = A + \frac{B}{2} t + \frac{C}{2 \cdot 3} t^2 \ldots\ldots + t^{m-1} = 0\,; \\ & + (m-1) Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Pa^{m-3} t + \&c. \\ & + \&c. \\ & + T \end{aligned}$$

$$\text{y tambien } a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Ta + U = 0 = V.$$

300. Si la propuesta tuviere dos raices iguales, por ejemplo $a = b$, será $t = b - a = 0$, y la ecuacion $A + \frac{B}{2} t + \frac{C}{2 \cdot 3} t^2 \ldots\ldots + t^{m-1} = 0$ quedará satisfecha haciendo $t = 0$; pero esta suposicion desvanece todos los términos, escepto el primero A que es enteramente conocido; el cual debe consiguientemente ser nulo por si mismo. Satisface, pues, el valor de a á un mismo tiempo las ecuaciones

$$V = a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots + Ta + U = 0\,;$$

$$\text{y } A = ma^{m-1} + (m-1) Pa^{m-2} + (m-2) Qa^{m-3} \ldots\ldots\ldots + T = 0.$$

301. En caso de que la propuesta tenga tres raices iguales, esto es, $a = b = c$, resultarán á un mismo tiempo nulas dos raices de la ecuacion $A + \frac{B}{2} t + \frac{C}{2 \cdot 3} t^2 \ldots\ldots + t^{m-1} = 0$, á saber $t = b - a = 0$, $t = c - a = 0$; y entonces la misma ecuacion será divisible por $t - b + a = t - 0 = t$,

y por $t-c+a=t-o=t$; pero esto no puede suceder sin que los coeficientes A y B sean nulos; luego el valor de a ha de satisfacer al mismo tiempo á las tres ecuaciones $V=o$, $A=o$, $B=o$.

302. Contiuando este raciocinio nos demostraria que, cuando la propuesta tuviese cuatro raices iguales, la ecuacion $A+\frac{B}{2}t+\frac{C}{2.3}t^2.....+t^{m-1}=o$ tendrá tres raices iguales á cero, y será divisible tres veces consecutivas por t, lo que requiere que los coeficientes A, B, C sean á un mismo tiempo nulos, y que el valor de a satisfaga, por consiguiente á la vez, á las cuatro ecuaciones $V=o$, $A=o$, $B=o$, $C=o$.

303. Por este medio podemos, no solo reconocer si una raiz dada se halla varias veces entre las que corresponden á la ecuacion propuesta, sino tambien deducir un procedimiento, en cuya virtud podamos asegurarnos de si esta ecuacion tiene raices repetidas, que no conozcamos.

A este fin observarémos que en el caso de ser $A=ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}.....+T=o$, podemos mirar a como raiz de la ecuacion $mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}.....+T=o$, designando entonces x una incógnita cualquiera; y una vez que a es tambien la raiz de $V=a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}.....+Ta+U=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}.....+Tx+U=o$, se sigue que $x-a$ es factor comun á las dos ecuaciones $x^m+Px^{m-1}+$&c.$=o$, y $mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+$&c.$=o$.

Asimismo mudando a en x en las cantidades B, C, &c., el binómio $x-a$ será tambien factor de las nuevas ecuaciones $B=o$, $C=o$, &c., siempre que la raiz a anule las cantidades primitivas B, C, &c.

304. Esto que decimos de la raiz a convendria igualmente á otra cualquiera raiz, que se hallase repetida varias veces. Por tanto, si buscamos, segun el método del mayor divisor comun, los factores comunes á las ecuaciones $V=o$, $A=o$, $B=o$, $C=o$, &c., daran estos factores las raices de la propuesta en el órden siguiente:

Los factores comunes solamente á las dos primeras ecuaciones son factores dobles de la propuesta, es decir, que si resulta por comun divisor entre $V=o$ y $A=o$ una espresion de esta forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, la incógnita x tendrá dos valores iguales á α, y otros dos iguales á β, ó bien la propuesta tendrá estos cuatro factores $(x-\alpha)$, $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\beta)$.

Los factores, que son á un mismo tiempo comunes á las tres primeras ecuaciones $V=o$, $A=o$, $B=o$, indican factores triplos de la propuesta; de modo que, si los primeros tienen la forma $(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$, los segundos la tendran $(x-\alpha)^3(x-\beta)^3$. Así es fácil proseguir estas consideraciones cuanto se quiera.

305. Con la mutacion de a en x tendremos

$$V=a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}.........................+Ta+U=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}.........................+Tx+U=o;$$
$$A=ma^{m-1}+(m-1)Pa^{m-2}+(m-2)Qa^{m-3}........+T=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}.......+T=o.$$

En estas dos ecuaciones observarémos que la segunda se deduce inmediatamente de la primera multiplicando cada término de esta por el esponente de la potencia que contenga de x, y disminuyendo despues este esponente en una unidad, con la circunstancia de que el último término U, equivalente á Ux^o, debe desaparecer en esta operacion, donde resulta multiplicado por cero; de modo que

$$V=x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}........+Tx+Ux^o=o,\ldots A=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}.........+1Tx^{1-1}+o.U\ldots$$
$$\ldots=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+(m-2)Qx^{m-3}.........+T=o.$$

La ecuacion $B=0$ se saca de $A=0$, como hemos sacado $A=0$ de $V=0$; $C=0$ sale de $B=0$, como $B=0$ sale de $A=0$; y asi consecutivamente.

306. Para ilustrar el asunto tomemos por ejemplo la ecuacion

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0,$$

en que $m=5$, $P=-13$, $Q=67$, $R=-171$, $T=216$, $U=-108$, y tendremos

$$V=x^m+Px^{m-1}+\&c.=x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0;$$

$$A=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+\&c.=5x^4-4.13x^3+3.67x^2-2.171x+1.216x^0-0.108=5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0;$$

El comun divisor es $x^3-8x^2+21x-18$, pues que

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=(x^2-5x+6)(x^3-8x^2+21x-18)=0;$$

$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=(5x-12)(x^3-8x^2+21x-18)=0;$$

Siendo este divisor de tercer grado debe contener varios factores; por lo que es necesario investigar si los tiene comunes con la ecuacion

$$B=m(m-1)a^{m-2}+(m-1)(m-2)Pa^{m-3}+\&c.=4.5x^3-3.52x^2+2.201x-342=20x^3-156x^2+402x-342=0;$$

Con efecto $x^3-8x^2+21x-18=(x^2-5x+6)(x-3)$;

$$20x^3-156x^2+402x-342=(20x^2-96x+114)(x-3);$$

y por ser aqui $x-3$ el divisor comun, tiene la propuesta tres raices iguales á 3, ó admite $(x-3)^3$ en el número de sus factores.

Ahora, dividiendo el primer divisor comun por $x-3$ tantas veces consecutivas como sea posible, sacarémos

$$\frac{x^3-8x^2+21x-18}{x-3}=x^2-5x+6=0,$$

$$\frac{x^3-8x^2+21x-18}{(x-3)(x-3)}=\frac{x^2-5x+6}{x-3}=x-2=0;$$

Como este divisor $x-2$ no es comun sino á la ecuacion propuesta $V=0$ y á la deducida $A=0$, entra solo dos veces en la propuesta. Esta es

$$(x-3)^3(x-2)^2=(x^3-9x^2+27x-27)(x^2-4x+4)=x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0.$$

307. Concluyamos con otro ejemplo, siendo la ecuacion

$$x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2(a^2b+ab^2)x+a^2b^2=0,$$

en que $m=4$, $P=-2(a+b)$, $Q=a^2+4ab+b^2$, $T=-2(a^2b+ab^2)$, $U=a^2b^2$, y haremos este cálculo:

$$V=x^m+Px^{m-1}+\&c.=x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2(a^2b+ab^2)x+a^2b^2=0;$$

$$A=mx^{m-1}+(m-1)Px^{m-2}+\&c.=4x^3-6(a+b)x^2+2(a^2+4ab+b^2)x-2(a^2b+ab^2)=0;$$

$$V=x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2(a^2b+ab^2)x+a^2b^2=\{x^2-(a+b)x+ab\}.\{x^2-(a+b)x+ab\}=0;$$

$$A=4x^3-6(a+b)x^2+2(a^2+4ab+b^2)x-2(a^2b+ab^2)=\{4x^2-2(a+b)x\quad\}.\{x^2-(a+b)x+ab\}=0;$$

de consiguiente el mayor divisor comun es $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$, y los factores de la propuesta son $x-a$, $x-a$, $x-b$, $x-b$; de modo que $(x-a)^2(x-b)^2=(x^2-2ax+a^2)(x^2-2bx+b^2)=x^4-2(a+b)x^3+(a^2+4ab+b^2)x^2-2(a^2b+ab^2)x+a^2b^2=0$.

LECCION XXIX.

De las Raices de Cantidades en parte racionales y en parte incomensurables.

308. Desde la LECCION XXI hemos podido observar que á veces se presentan resultados [219] bajo la forma $\sqrt[m]{(-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2})}$, los cuales nada manifiestan, á no ser que se reduzcan á otra espresion mas sencilla, en que procurarémos que solo haya radical de segundo grado.

309. Cuando $m=2$ tenemos que buscar la raiz cuadrada de cantidades, que en parte son racionales y en parte incomensurables, las cuales se representarán por $P+\sqrt{Q}$, y su raiz por $\sqrt{p}+\sqrt{q}$; de modo que $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{p}+\sqrt{q}$.

310. En este concepto ejecutarémos la operacion siguiente:

Elevar al cuadrado .... $P+\sqrt{Q}=(\sqrt{p}+\sqrt{q})^2=p+q+2\sqrt{pq}$;

Igualar las partes comensurables de cada miembro, y lo mismo las incomensurables .... $\begin{cases} P=p+q; \\ \sqrt{Q}=2\sqrt{pq}; \end{cases}$

Cuadrar estos resultados .... $\begin{cases} P^2=p^2+2pq+q^2; \\ Q=4pq; \end{cases}$

Restar la última ecuacion de la penúltima .... $P^2-Q=p^2+2pq+q^2-4pq=p^2-2pq+q^2$,

Sacar la raiz cuadrada .... $\sqrt{(P^2-Q)}=\sqrt{(p^2-2pq+q^2)}=p-q$;

Combinar esta última ecuacion con la otra $P=p+q$, sumando, esto es, $\left.\begin{matrix} p+q=P \\ p-q=\sqrt{P^2-Q} \end{matrix}\right\}$, ... $p=\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}$;

Hacer la misma combinacion restando, es decir, ... $\left.\begin{matrix} p+q=P \\ p-q=\sqrt{P^2-Q} \end{matrix}\right\}$, ... $q=\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{(P^2-Q)}$;

Sacar la raiz cuadrada de las dos últimas espresiones para obtener la de la cantidad propuesta .... $\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{p}+\sqrt{q}=\sqrt{(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\frac{1}{2}P-\frac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}$.

Aqui vemos que, para ser racionales las cantidades p, q segun lo suponemos, es necesario que P^2-Q sea un cuadrado perfecto.

311. Vamos á los ejemplos:

1.º

$$\sqrt{(7+\sqrt{48})};$$

$$P+\sqrt{Q}=7+\sqrt{48}, \ldots \begin{cases} P=7; \\ Q=48; \end{cases}$$

$$\sqrt{(7+\sqrt{48})}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}=\sqrt{(\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{7^2-48})}+\sqrt{(\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{7^2-48})}=2+\sqrt{3} \,//\, -2-\sqrt{3}.$$

2.º $\sqrt{(8+2\sqrt{15})}$;

$$P+\sqrt{Q}=8+2\sqrt{15}=8+\sqrt{60}\,,\ldots\begin{cases}P=8\,;\\Q=60\,;\end{cases}$$

$$\sqrt{(8+2\sqrt{15})}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}=\sqrt{(\tfrac{8}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{8^2-60})}+\sqrt{(\tfrac{8}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{8^2-60})}=\sqrt{5}+\sqrt{3}\ //\ -\sqrt{5}-\sqrt{3}.$$

3.º $\sqrt{m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2+2\sqrt{m^3n-2m^2n^2+\tfrac{1}{4}mn^3}}$;

$$P+\sqrt{Q}=m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2+2\sqrt{m^3n-2m^2n^2+\tfrac{1}{4}mn^3}=m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2+\sqrt{4m^3n-8m^2n^2+mn^3}\,,\ldots\begin{cases}P=m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2\,;\\Q=4m^3n-8m^2n^2+mn^3\,;\end{cases}$$

$$\sqrt{m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2+2\sqrt{m^3n-2m^2n^2+\tfrac{1}{4}mn^3}}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}\ldots$$

$$\ldots=\sqrt{\tfrac{1}{2}m^2-\tfrac{1}{2}mn+\tfrac{1}{8}n^2+\tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2)^2-4m^3n+8m^2n^2-mn^3}}\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{\tfrac{1}{2}m^2-\tfrac{1}{2}mn+\tfrac{1}{8}n^2-\tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2)^2-4m^3n+8m^2n^2-mn^3}}\ldots$$

$$\ldots=\sqrt{m^2-2mn+\tfrac{1}{4}n^2}+\sqrt{mn}\ //\ -\sqrt{m^2-2mn+\tfrac{1}{4}n^2}-\sqrt{mn}.$$

312. Si la cantidad propuesta tuviese negativo su radical la representariamos por $P-\sqrt{Q}$, y su raiz por $\sqrt{p}-\sqrt{q}$; de modo que $\sqrt{(P-\sqrt{Q})}=\sqrt{p}-\sqrt{q}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}-\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}$.

Asi los ejemplos anteriores resultarian

1.º $\sqrt{(7-\sqrt{48})}=2-\sqrt{3}\ //\ -2+\sqrt{3}$;

2.º $\sqrt{(8-2\sqrt{15})}=\sqrt{5}-\sqrt{3}\ //\ \sqrt{3}-\sqrt{5}$;

3.º $\sqrt{m^2-mn+\tfrac{1}{4}n^2-2\sqrt{m^3n-2m^2n^2+\tfrac{1}{4}mn^3}}=\sqrt{m^2-2mn+\tfrac{1}{4}n^2}-\sqrt{mn}\ //\ \sqrt{mn}-\sqrt{m^2-2mn+\tfrac{1}{4}n^2}$.

En ambos casos hemos puesto dobles las raices, como todas las de segundo grado, porque tenemos en el primer caso $\sqrt{p}+\sqrt{q}\ //\ -\sqrt{p}-\sqrt{q}$, y en el segundo $\sqrt{p}-\sqrt{q}\ //\ -\sqrt{p}+\sqrt{q}$.

313. Del mismo modo sacariamos la raiz de una espresion en parte racional y en parte imajinaria, como $-1+2\sqrt{-2}$, porque

$$P+\sqrt{Q}=-1+2\sqrt{-2}=-1+\sqrt{-8}\,,\ldots\begin{cases}P=-1\,;\\Q=-8\,;\end{cases}$$

$$\sqrt{(-1+2\sqrt{-2})}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}=\sqrt{(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+8})}+\sqrt{(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1+8})}=1+\sqrt{-2}\ //\ -1-\sqrt{-2}.$$

Respecto á las espresiones literales imajinarias, cual es $4mn+2(m+n)(m-n)\sqrt{-1}$, hariamos

$$P+\sqrt{Q}=4mn+2(m+n)(m-n)\sqrt{-1}=4mn+\sqrt{-4(m^2-n^2)^2}\,,\ldots\begin{cases}P=4mn\,;\\Q=-4(m^2-n^2)^2\,;\end{cases}$$

$$\sqrt{4mn+2(m+n)(m-n)\sqrt{-1}}=\sqrt{(P+\sqrt{Q})}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}P+\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}+\sqrt{(\tfrac{1}{2}P-\tfrac{1}{2}\sqrt{P^2-Q})}=\sqrt{\tfrac{4}{2}mn+\tfrac{1}{2}\sqrt{16m^2n^2+4(m^2-n^2)^2}}\ldots$$

$$\ldots+\sqrt{\tfrac{4}{2}mn-\tfrac{1}{2}\sqrt{16m^2n^2+4(m^2-n^2)^2}}=m+n+(m-n)\sqrt{-1}\ //\ -m-n+(n-m)\sqrt{-1}.$$

314. A veces nos hallamos con espresiones imajinarias monómias, que tienen raices binómias. Las figurarémos por $h\sqrt{-1}$, y suponiendo $\sqrt{h\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}$, practicarémos lo siguiente:

Elevar al cuadrado .... $h\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})^2=p^2-q^2+2pq\sqrt{-1}$;

Como el primer miembro es todo imajinario, será ..... $p^2-q^2=0$, . . . $p=q$;

Resultarán iguales los radicales de ambos miembros. . . . $h\sqrt{-1}=2pq\sqrt{-1}=2p^2\sqrt{-1}$, . . . $p=\sqrt{\frac{h}{2}}=q$;

Con la sustitucion de estos valores sacamos . . . . $\sqrt{h\sqrt{-1}}=p+q\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{h}{2}}+\sqrt{\frac{h}{2}}.\sqrt{-1}.$

Sirva de ejemplo $2\sqrt{-1}$, en que $h=2$, y tendremos $\sqrt{2\sqrt{-1}}=\sqrt{h\sqrt{-1}}=\sqrt{\frac{h}{2}}+\sqrt{\frac{h}{2}}.\sqrt{-1}=\sqrt{\frac{2}{2}}+\sqrt{\frac{2}{2}}.\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}\ //\ -1-\sqrt{-1}.$

315. Ahora nos ocuparémos en la investigacion de la raiz cúbica, que pueda estraerse de una cantidad como $P+\sqrt{Q}$. No representarémos esta raiz por $\sqrt{x}+\sqrt{u}$, porque su cubo sería $x\sqrt{x}+3x\sqrt{u}+3u\sqrt{x}+u\sqrt{u}=(x+3u)\sqrt{x}+(3x+u)\sqrt{u}$, que contiene dos radicales cuadrados esencialmente distintos. Preferiremos la forma $x+\sqrt{u}$, y para generalizarla en lo posible la escribiremos $(x+\sqrt{u})\sqrt[3]{z}$, cuyo cubo es $(x^3+3x^2\sqrt{u}+3xu+u\sqrt{u})z$ con solo un radical.

Asimismo representarémos la raiz cúbica de $P-\sqrt{Q}$ por $(x-\sqrt{u})\sqrt[3]{z}$.

316. Bajo este supuesto haremos el cálculo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}(x+\sqrt{u})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}\\(x-\sqrt{u})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})}\end{array}\right\},\ldots (x+\sqrt{u})\sqrt[3]{z}.(x-\sqrt{u})\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})}.\sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})}\ //\ (x^2-u)\sqrt[3]{z^2}=\sqrt[3]{(P^2-Q)},$$

$$x^2-u=\frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)}}{\sqrt[3]{z^2}}=\frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z};$$

Como z es indeterminada podemos darle el valor que nos parezca, de modo que $(P^2-Q)z$ sea un cubo perfecto; y haciendo luego para abreviar $\frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z}=c$, tendremos $x^2-u=\frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z}=c$, de que se deduce $u=x^2-c$.

Mediante á que $P+\sqrt{Q}=(x+\sqrt{u})^3z=(x^3+3x^2\sqrt{u}+3xu+u\sqrt{u})z$ sacarémos, igualando la parte racional,

$$P=x^3z+3xuz,$$

$$u=x^2-c,\ldots P=x^3z+3xz(x^2-c)=4x^3z-3cxz,$$

$4x^3z-3cxz-P=0$; cuya ecuacion tendrá necesariamente una raiz comensurable si x, u fueren racionales.

317. Ejecutemos con los ejemplos, fiando su esplicacion á los signos.

1.º $$\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})};$$

$$P+\sqrt{Q} = 10+6\sqrt{3} = 10+\sqrt{108}\ ,\ .\ .\ .\ \left\{\begin{array}{l}P=10;\\ Q=108;\end{array}\right.$$

$$c = \frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{(100-108)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{-8z}}{z},$$

Supongo $z=1$, . . . $c = \dfrac{\sqrt[3]{-8.1}}{1} = -2$;

$$\left.\begin{array}{l}c=-2\\ z=\ \ 1\\ P=10\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ 4x^3z-3cxz-P = 4x^3.1-3.-2x.1-10 = 4x^3+6x-10=0,$$

$$\frac{4x^3+6x-10}{x-1} = 4x^2+4x+10=0,\ .\ .\ .\ x=1;$$

$$u = x^2-c,$$

$$\left.\begin{array}{l}x=\ \ 1\\ c=-2\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ u=1+2=3;$$

$$\sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})} = \sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})} = (x+\sqrt{u})\sqrt[3]{z},$$

$$\left.\begin{array}{l}x=1\\ u=3\\ z=1\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ \sqrt[3]{(10+6\sqrt{3})} = (1+\sqrt{3})\sqrt[3]{1} = 1+\sqrt{3}.$$

2.º $$\sqrt[3]{(8-4\sqrt{5})};$$

$$P-\sqrt{Q} = 8-4\sqrt{5} = 8-\sqrt{80}\ ,\ .\ .\ .\ \left\{\begin{array}{l}P=8;\\ Q=80;\end{array}\right.$$

$$c = \frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{(8^2-80)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{-16z}}{z},$$

Supongo $z=4$, . . . $c = \dfrac{\sqrt[3]{-16.4}}{4} = -1$;

$$\left.\begin{array}{l}c=-1\\ z=\ \ 4\\ P=\ \ 8\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ 4x^3z-3cxz-P = 4x^3.4-3.-1x.4-8 = 16x^3+12x-8=0,$$

$$4x^3+3x-2 = \tfrac{0}{4} = 0,$$

$$\frac{4x^3+3x-2}{2x-1} = 2x^2+x+2=0,\ .\ .\ .\ x=\tfrac{1}{2};$$

$$u = x^2 - c,$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ c = -1 \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad u = \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{5}{4};$$

$$\sqrt[3]{(8-4\sqrt{5})} = \sqrt[3]{(P-\sqrt{Q})} = (x-\sqrt{u})\sqrt[3]{z},$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ u = \frac{5}{4} \\ z = 4 \end{array}\right\}, \ . \ . \ . \ \sqrt[3]{(8-4\sqrt{5})} = (\tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{5}{4}})\sqrt[3]{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\sqrt[3]{4} = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt[3]{2}}.$$

3º $$\sqrt[3]{(2+11\sqrt{-1})};$$

$$P+\sqrt{Q} = 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}, \ . \ . \ . \ \left\{\begin{array}{l} P = 2; \\ Q = -121; \end{array}\right.$$

$$c = \frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{(2^2+121)z}}{z} = \frac{\sqrt[3]{125z}}{z},$$

Supongo $z = 1$, . . . $c = \dfrac{\sqrt[3]{125 \cdot 1}}{1} = 5;$

$$\left.\begin{array}{l} c = 5 \\ z = 1 \\ P = 2 \end{array}\right\}, \ . \ . \ . \ 4x^3z - 3cxz - P = 4x^3 \cdot 1 - 3 \cdot 5x \cdot 1 - 2 = 4x^3 - 15x - 2 = 0,$$

$$\frac{4x^3-15x-2}{x-2} = 4x^2+8x+1 = 0, \ . \ . \ . \ x = 2;$$

$$u = x^2 - c,$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ c = 5 \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad u = 2^2 - 5 = -1;$$

$$\sqrt[3]{(2+11\sqrt{-1})} = \sqrt[3]{(P+\sqrt{Q})} = (x+\sqrt{u})\sqrt[3]{z},$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ u = -1 \\ z = 1 \end{array}\right\}, \ . \ . \ . \ \sqrt[3]{(2+11\sqrt{-1})} = (2+\sqrt{-1})\sqrt[3]{1} = 2+\sqrt{-1}.$$

En el último ejemplo vemos que por el mismo método se saca la raiz cúbica de las espresiones en parte comensurables y en parte imajinarias.

318. Bastan estos ejemplos para indicar el modo con que podremos estraer una raiz cualquiera de una espresion irracional dada. Toda la dificultad consiste en prever la forma, que deba adoptarse para presentar esta raiz. Una vez hallada la tal forma, compararémos su potencia con la espresion irracional propuesta, y obtendrémos tantas ecuaciones cuantas sean las cantidades indeterminadas, lo que nos conducirá á una ecuacion final que tenga divisores comensurables.

En general, para estraer la raiz n de $P+\sqrt{Q}$, le darémos la forma $(x+\sqrt{u})\sqrt[n]{z}$, de modo que $(x+\sqrt{u})^n z = P+\sqrt{Q}$, y ejecutarémos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}(x+\sqrt{u})\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{(P+\sqrt{Q})}\\(x-\sqrt{u})\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{(P-\sqrt{Q})}\end{array}\right\}, \ldots (x+\sqrt{u})\sqrt[n]{z}.(x-\sqrt{u})\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{(P+\sqrt{Q})}.\sqrt[n]{(P-\sqrt{Q})} \,//\, (x^2-u)\sqrt[n]{z^2}=\sqrt[n]{(P^2-Q)},$$

$$x^2-u=\sqrt[n]{\frac{P^2-Q}{z^2}};$$

Bien se echa de ver que debemos atribuir á z un valor capaz de hacer la cantidad $\frac{P^2-Q}{z^2}$ una potencia ecsacta, como e^n, del grado n, para que sea $x^2-u=\sqrt[n]{\frac{P^2-Q}{z^2}}=c$. Y, como

$$P+\sqrt{Q}=(x+\sqrt{u})^n z=\left(x^n+nx^{n-1}\sqrt{u}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}u+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}x^{n-3}u\sqrt{u}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}u^2+\&c.\right)z,$$

de que sacamos .... $P=\left(x^n+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}u+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}u^2+\&c.\right)z$,

tendremos .... $\left(x^n+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}u+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}u^2+\&c.\right)z-P=0$, donde se ha de sustituir el valor de $u=x^2-c$ para obtener una ecuacion, de que se hallarán los divisores comensurables si x puede ser racional.

LECCION XXX.

De la Eliminacion entre Ecuaciones de grados superiores al primero.

319. La doctrina espuesta en la Leccion IX es suficiente para eliminar entre dos ecuaciones una incógnita que no pase del primer grado, sea cual fuere el de las demas incógnitas; y aún, siendo solamente de primer grado la incógnita en una de las ecuaciones propuestas, tiene tambien su aplicacion la regla [86], que ya hemos practicado.

En las ecuaciones como $ax^2+bxz+cz^2=m^2$, $x^2+xz=n^2$, tomarémos de la segunda el valor $z=\frac{n^2-x^2}{x}$, y sustituyendolo, como tambien su cuadrado, en la primera, sacarémos una ecuacion que contendrá solo x.

320. Si las dos ecuaciones propuestas fuesen de segundo grado respecto á entrambas incógnitas, necesitariamos, para la aplicacion del método antecedente, resolver una de las ecuaciones, bien fuese relativamente á x ó con relacion á z.

Sean, por ejemplo, las ecuaciones $ax^2+bxz+cz^2=m^2$, $x^2+z^2=n^2$;

De la segunda ecuacion sacarémos .... $z=\pm\sqrt{n^2-x^2}$;

La primera ecuacion es .... $m^2=ax^2+bxz+cz^2$,

Sustituyamos el valor hallado de z y su cuadrado ... $m^2=ax^2\pm bx\sqrt{n^2-x^2}+c(n^2-x^2)$,

Pongamos el radical solo en un miembro,

y los demas términos en el otro..... $\mp bx\sqrt{n^2-x^2}=ax^2+c(n^2-x^2)-m^2$,

Cuadremos para que desaparezca el radical.... $b^2x^2(n^2-x^2)=a^2x^4+c^2(n^2-x^2)^2+m^4+2acx^2(n^2-x^2)-2am^2x^2-2cm^2(n^2-x^2)$.

Consiste, pues, este procedimiento en dejar solo en un miembro el radical, cuyo desaparecimiento procuramos, y elevar despues los dos miembros de la ecuacion á la potencia señalada por el grado del radical.

321. Pero las dificultades, que á veces ocurren, han obligado á buscar otro método para hacer la eliminacion, sin necesidad de obtener una espresion de la incógnita, que intentamos desprender; de modo que la resolucion de las ecuaciones viene á ser la última operacion, que se requiere para la solucion de los problemas.

A fin de facilitar el cálculo pondremos las ecuaciones de dos incógnitas bajo la forma de ecuaciones de una sola, dejando visible únicamente la que se quiera eliminar.

Si tenemos, por ejemplo. . . . . $x^2+axz+bx=cz^2+dz+e$,

Trasladarémos todos los términos á un miembro, ordenando respecto á x . . . . . . $x^2+(az+b)x-cz^2-dz-e=0$,

Y haciendo, para abreviar, $az+b=P$, $-cz^2-dz-e=Q$, tendremos . . . . $x^2+Px+Q=0$.

322. La ecuacion general del grado m con dos incógnitas debe comprender todas las potencias de x y de z, que no pasen de este grado, como tambien los productos en que la suma de los espouentes de x y de z no se eleve á mas de m. Asi, podemos representar la ecuacion indicada, en esta forma:

$$x^m+(a+bz)x^{m-1}+(c+dz+ez^2)x^{m-2}+(f+gz+hz^2+kz^3)x^{m-3}\ldots\ldots+(p+qz+rz^2\ldots\ldots+uz^{m-1})x+p'+q'z+r'z^2\ldots\ldots+v'z^m=0;$$

y haciendo $a+bz=P$, $c+dz+ez^2=Q$, $f+gz+hz^2+kz^3=R$, &c., $p+qz+rz^2\ldots\ldots+uz^{m-1}=T$, $p'+q'z+r'z^2\ldots\ldots+v'z^m=U$; se convertirá la fórmula en

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ldots\ldots+Tx+U=0.$$

323. Es del caso advertir que la eliminacion de x entre dos ecuaciones de segundo grado, como $x^2+Px+Q=0$, $x^2+P'x+Q'=0$, se puede efectuar rebajando una ecuacion de otra, de esta manera:

$$\left.\begin{array}{l} x^2+Px+Q=0 \\ x^2+P'x+Q'=0 \end{array}\right\} \ldots (P-P')x+Q-Q'=0-0=0,$$

$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'};$$

Sustituyendo este valor en una de las ecuaciones propuestas . . . . $x^2+Px+Q=\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0$,

Haciendo desaparecer los denominadores . . . . $(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0$,

Desenvolviendo los dos últimos términos y reduciendo . . . . $(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0$.

Ya no queda mas que sustituir en lugar de P, Q, P', Q' los valores particulares del caso que se ecsamine.

324. Antes de tratar sobre las ecuaciones, en que se ha de eliminar la incógnita x, elevada á mas del segundo grado, vamos á esplicar el modo con que se reconoce que el valor de cualquiera de las incógnitas satisface al mismo tiempo á entrambas ecuaciones. Y, para

fijar mejor las ideas, nos valdremos de un ejemplo particular, sin que deje por eso el razonamiento de ser general.

Sean las ecuaciones $x^3+3x^2z+3xz^2-98=0$, $x^2+4xz-2z^2-10=0$, que supondremos orijinadas de una cuestion en que deba ser $z=3$.

Para comprobar esta asercion daremos desde luego á z el valor 3 en las ecuaciones propuestas, de que resulta $x^3+9x^2+27x-98=0$, $x^2+12x-28=0$; cuyas ecuaciones admitirán el mismo valor de x si el señalado á z es verdadero. Designando por α el valor de x, cada una de estas ecuaciones será [226] divisible por $x-\alpha$, y por tanto tendran un divisor comun en que se hallará $x-\alpha$. Con efecto hallamos que este comun divisor es $x-2$, y de consiguiente $\alpha=2$; por lo que el valor $z=3$ conviene á la cuestion y corresponde á $x=2$.

Compruebase que $x-2$ es el comun divisor, porque $(x^2+11x+49)(x-2)=x^3+9x^2+27x-98=0$;

$$(x+14)(x-2)=x^2+12x-28=0.$$

325. El medio, que acabamos de indicar para hallar el valor de x cuando el de z es conocido, se puede aplicar inmediatamente á la eliminacion.

Una vez que las ecuaciones $x^3+3x^2z+3xz^2-98=0$, $x^2+4xz-2z^2-10=0$ adquieren, estando z determinado segun la naturaleza de la cuestion, un divisor comun que no tenian antes, habremos de buscar la condicion de que dependa la ecsistencia de este divisor. A este fin debemos operar con las ecuaciones propuestas como lo hariamos para buscar el mayor divisor comun; y cuando hayamos llegado á un residuo independiente de x, espresarémos, igualandolo á cero, la condicion, que deben tener los valores de z para que las dos ecuaciones dadas puedan á un mismo tiempo admitir el mismo valor de x. La ecuacion asi formada será la *ecuacion final* de la cuestion propuesta.

Ejecutemos la operacion con las mismas ecuaciones:

$$
\begin{array}{ll}
x^3+3x^2z+3xz^2 \qquad -98 & \underline{|\,x-z \text{ Cociente.}} \\
\underline{-x^3-4x^2z+2xz^2+10x} & \underline{x^2+4xz-2z^2-10} \\
\quad -x^2z+5xz^2+10x \qquad -98 & \\
\quad \underline{+x^2z+4xz^2 \qquad -2z^3-10z} & \\
\text{Prim. residuo } +(9z^2+10)x-2z^3-10z-98 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
(9z^2+10)x^2+36xz^3+40xz \qquad -18z^4-110z^2-100 & \underline{|\,x+38z^3+50z+98 \text{ Cociente.}} \\
\underline{-(9z^2+10)x^2+2xz^3+10xz+98x} & (9z^2+10)x-2z^3-10z-98 \\
\underline{+38xz^3+50xz+98x-18z^4-110z^2-100} & \\
(9z^2+10)\,x\,(38z^3+50z+98)-162z^6-1170z^4 \qquad -2000z^2 \qquad -1000 & \\
\underline{-(9z^2+10)\,x\,(38z^3+50z+98)+76z^6+480z^4+3920z^3+500z^2+5880z+9604} & \\
\text{Seg. residuo } -86z^6-690z^4+3920z^3-1500z^2+5880z+8604 &
\end{array}
$$

Dividiendo este residuo por 2, mudando sus signos, é igualando á cero, resulta

$$43z^6+345z^4-1960z^3+750z^2-2940z-4302=0.$$

Esta ecuacion admite, ademas del valor $z=3$ indicado antes, todos los demas valores, que sean adaptables á la cuestion propuesta.

326. Luego que hemos descubierto un valor de z en la ecuacion final, es necesario, para obtener el de x, sustituir aquel valor en el último divisor ó penúltimo residuo, el cual se convierte asi en comun divisor de las dos ecuaciones propuestas; de modo que

$$z=3\,,\ldots\,(9z^2+10)x-2z^3-10z-98=(9\cdot3^2+10)x-2\cdot3^3-10\cdot3-98=91x-182=0\,,$$

$$x=\tfrac{182}{91}=2.$$

327. Pudiera suceder que el valor de z hiciese nulo por si mismo el penúltimo residuo. Entonces el residuo anterior, ó aquel que contuviese x en el segundo grado, seria el divisor comun á entrambas ecuaciones. Sustituyendo en este divisor el valor de z, y haciendolo despues igual á cero, tendriamos una ecuacion de segundo grado solamente en x, y sus dos valores corresponderian al valor conocido de z. Si este valor hiciese aún nulo el residuo de segundo grado, seria necesario recurrir al residuo antecedente, en que estaria x elevado al tercer grado; porque seria en este caso el divisor comun á las dos ecuaciones propuestas, y el valor de z corresponderia á los tres valores de x. En general, se hace preciso subir hasta un residuo, que no se desvanezca con la sustitucion del valor de z.

328. Tambien puede suceder que no haya residuo, ó que contenga solo cantidades conocidas.

En el primer caso las dos ecuaciones tienen un divisor comun sin ninguna determinacion de z; de consiguiente, llamando D á este divisor, será la forma de ellas $P.D = 0$, $S.D = 0$. A estas dos ecuaciones se satisface al mismo tiempo haciendo $D = 0$, y esta ecuacion determinará una de las incógnitas por la otra cuando el factor D contenga á entrambas; pero, sino comprende mas que una, resultará esta determinada, y la otra quedará enteramente indeterminada. Haciendo despues $P = 0$, $S = 0$, obtendremos dos ecuaciones, que podran dar soluciones determinadas de la cuestion propuesta.

Sea, por ejemplo, $(ax + bz - c)(mx + nz - d) = 0$, $(a'x + b'z - c')(mx + nz - d) = 0$; y suponiendo desde luego nulo el segundo factor, que es comun á entrambas ecuaciones, tendremos solamente la ecuacion $mx + nz - d = 0$ entre las incógnitas x, z, bajo cuyo punto de vista la cuestion será indeterminada; pero, suprimiendo este factor, recaeremos sobre las ecuaciones

$$ax + bz - c = 0 \;,\ldots\; ax + bz = c\,;$$
$$a'x + b'z - c' = 0 \;,\ldots\; a'x + b'z = c'\,;$$

y en este sentido la cuestion será determinada, pues que habrá tantas ecuaciones como incógnitas.

329. En el segundo caso, que es cuando el residuo no contiene sino cantidades conocidas, son contradictorias las dos ecuaciones propuestas; porque el divisor comun, que establece su ecsistencia simultánea, no puede tener lugar sino por una condicion, que es imposible cumplir, pues que recae sobre cantidades dadas, y ofrece un resultado absurdo. Este caso se refiere al que hemos visto [197] respecto á las ecuaciones de primer grado.

330. Todo cuanto acabamos de decir se aplica evidentemente á dos ecuaciones cualesquiera, como

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0\,;$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots\ldots + T'x + U' = 0\,;$$

en que la segunda incógnita va envuelta en los coeficientes P, Q, &c., P', Q', &c. Aqui operariamos del mismo modo que para buscar el mayor divisor comun de los primeros miembros: igualariamos con cero el residuo independiente de x, que seria la ecuacion final en z; y nos valdriamos de los residuos anteriores para obtener el divisor comun, que deba dar x.

331. Si tuvieramos en tres ecuaciones las incógnitas x, u, z, que quisieramos determinar, podriamos combinar, por ejemplo, la ecuacion primera con la segunda y con la tercera para eliminar x, y quitar despues u de los dos resultados obtenidos; pero debemos observar que, por esta eliminacion sucesiva, las tres ecuaciones propuestas no concurren del mismo modo á formar la ecuacion final, pues la ecuacion primera se halla empleada dos veces, al paso que la segunda y la tercera no lo estan mas que una, y sucede, por tanto, llegar á un resultado, que está complicado con un factor estraño.

Hay otros métodos, que no ofrecen este incoveniente, y por los cuales se prueba que el grado de la ecuacion final, resultante de la eliminacion entre un número cualquiera de ecuaciones completas, que comprenden el mismo número de incógnitas y de cualesquiera grados, es igual al producto de los esponentes que señalan el grado de estas ecuaciones; pero no podemos esplicar ahora estos métodos, porque nos faltan las nociones preliminares que serian necesarias.

SECCION SEGUNDA.

RETÓRICA DEL ÁLGEBRA Ó RESOLUCION DE PROBLEMAS.

LECCION XXXI.

Del Método en los Discursos.

332. El arte de espresar los pensamientos con elegancia se llama *Retórica.* Generalmente se entiende de los discursos escritos con toda la perfeccion de las reglas gramaticales, aunque se pronuncien despues.

333. El enlace de las proposiciones, que comprenden nuestros pensamientos, forma el *razonamiento ó discurso.*

334. En los discursos emplea la Retórica diferentes modos de esplicarse segun la naturaleza de los asuntos, y estos modos se llaman *estilos.*

335. Para que el estilo tenga correccion y belleza se requiere elejir siempre los términos, que espresen ecsactamente las ideas: desembarazar el discurso de toda superfluidad: hacer que la relacion de unas palabras con otras no sea nunca equívoca; y construir unas frases respecto á otras de modo que señalen sensiblemente el enlace y la graduacion de los pensamientos.

336. Aunque se presentan á un mismo tiempo varias ideas á nuestro entendimiento cuando raciocinamos, no dejamos de advertir que se ordenan segun la subordinacion, que liga á unas con otras. Mientras mas estrecho es este enlace mas perceptible se hace, y entonces concebimos con mas claridad y estension. Siendo tan necesario para concebir bien

nuestras propias ideas, se echa de ver cuan importante será conservarlo en el discurso. Debe, pues, el lenguaje espresar sensiblemente este órden de subordinacion, y de consiguiente establecerse por principio el enlace mas estrecho de las ideas.

337. A este fin nos valemos del *Método*, que, observando el órden de la naturaleza, procede de modo que el conocimiento de unas cosas depende de otras que preceden, y se divide en *analítico* y *sintético*.

338. Ya hemos dicho [II 94] que el *análisis* es la descomposicion metódica, y la *síntésis* la composicion metódica; y aunque hemos manifestado [II 95] que el entendimiento procede siempre por un método *analítico - sintético* ó bien *sintético - analítico*, lo llamamos *síntésis* cuando termina en composicion, y *análisis* siempre que acaba en descomposicion.

339. Para usar del método *analítico* procuramos descubrir la verdad de una proposicion retrocediendo por medio de cada grado inmediato á sus primeros principios. Tambien se llama *Método de Invencion*.

340. En la *Invencion* debemos disponer nuestros pensamientos segun el proceder natural del entendimiento, presentandolos en el órden con que se suceden unos á otros en la investigacion y descubrimiento de la verdad. Este método requiere un entendimiento de mucha estension y capacidad para elejir con acierto entre la multitud de particularidades que se presentan frecuentemente á nuestra consideracion, como tambien un fuerte hábito de sostener la atencion para que no se escape de nuestras observaciones ninguna cosa notable, y una eleccion juiciosa de ideas intermedias, distinguiendo cuidadosamente todas las circunstancias que puedan ilustrar el asunto.

341. Cuando empleamos el método *sintético* empezamos por los primeros y mas simples principios, de los cuales procedemos á demostrar los que siguen, hasta que establecemos por grados la verdad, que es el objeto de nuestra investigacion. Llámase tambien *Método de Ciencia.*

342. Los conocimientos *científicos* se adquieren por el raciocinio de las ideas en nuestro entendimiento, segun las conecsiones y relaciones que tienen unas con otras; y cuando estas relaciones estan establecidas clara y patentemente á nuestra consideracion, no podemos dejar de percibirlas y reconocerlas, y de aqui resulta que todas las verdades de esta clase producen en el entendimiento una certeza absoluta. No sucede asi con los conocimientos *naturales*, que entran por los sentidos, pues los debemos á la observacion y la esperiencia; ni con los conocimientos *históricos*, que, versandose sobre hechos y transacciones pasadas, se fundan en el testimonio de los hombres.

El modo de raciocinar en los conocimientos cientificos es por demostracion, en los naturales por inducion, y en los históricos por crítica y conjeturas probables.

343. Muchas reglas pudieramos dar sobre el uso de los métodos *analítico* y *sintético* en los discursos; pero saldriamos de nuestro propósito. Ademas de esto las Matemáticas, ciencia de las cantidades discreta y continua [II 3], son el modelo mas propio para aprenderlos bien, como veremos respecto al *análisis* en la Resolucion de Problemas, que se esplica en esta Seccion.

LECCION XXXII.

Del Cuadro ó Mapa de los Problemas.

344. Una proposicion, que espresa varias cosas conocidas para averiguar segun sus relaciones otras cosas desconocidas, se llama *Problema* ó *Cuestion*.

345. El cuadro ó mapa de un problema comprende su *traducion* y su *resolucion*, manifestando la estructura de estas operaciones.

346. Algunas veces se requiere preparar las condiciones del problema, y entonces la traducion consta de *preparacion* y *plantificacion*.

347. La preparacion consiste en una disposicion, que, si fuere necesaria, se habrá de hacer con ecuaciones, que llamarémos *preparatorias*.

348. La plantificacion es la espresion del problema en términos algebráicos. Cuando no se necesita preparacion, la planta es lo mismo que la traducion, y en ambos casos las ecuaciones, con que se hace la plantificacion, se llamarán *constituyentes* ó *fundamentales*.

349. Las reglas mas generales para traducir un problema del lenguaje comun al idioma algebráico consisten, como hemos dicho [27], en convertirlo con el mismo lenguaje comun, si es necesario, á la espresion mas sencilla y clara, y en ligar los caractéres algebráicos (sean representativos de cantidades conocidas ó desconocidas) por medio de los signos, del mismo modo que estan enlazados los nombres de las cosas ó circunstancias en las frases; con lo que se formará cada ecuacion constituyente segun el sentido de las condiciones del problema.

350. Para presentar bien el cuadro ó mapa dividirémos

el papel en tres columnas: la del medio se llamará *central*, la de su izquierda se nombrará *lateral* y la de su derecha se denominará *final*. Ademas dejarémos sobre la izquierda una columnilla mas esterior, que tendrá el nombre de *marjinal*.

351. Respecto á la traducion pondremos en la columnilla marjinal los caractéres, que denoten los datos y las incógnitas, para tenerlos siempre presentes, y estamparémos sobre la columna central las ecuaciones constituyentes, precediendoles las preparatorias si fuesen del caso.

352. En punto á la resolucion considerarémos que las ecuaciones, de que se han de deducir otras, son las *principales*: las que se deduzcan sin terminar período se llamarán *derivadas*: las que concluyan período se dirán *resultantes*; y las últimas de estas, que den conocidos los valores de las incógnitas, se nombrarán *finales*. Las ecuaciones resultantes, cuando hayan de sustituirse en las principales ó en las derivadas, se llamarán *incidentes*.

353. Para las resoluciones, que se hagan por el método de *sustitucion* [86] traeremos á la columna central una ecuacion constituyente, que desde entonces se convierte en ecuacion principal: haremos las derivaciones, que requiera la lógica del cálculo, colocando sucesivamente estas ecuaciones derivadas debajo de la principal hasta llegar á la última del período, la cual se sacará, como resultante, con el signo de consecuencia ó con el disyuntivo, á la columna final.

354. En cuanto á ortografía [30] señalarémos cada derivacion con una coma, cada período intermedio con punto y coma, y el último período con un punto solo.

355. Continuarémos operando con las ecuaciones consti-

tuyentes como principales: las resultantes, cuando hayan de pasar á incidentes [352], se colocarán en la columna lateral, de donde se llevarán con el signo de consecuencia á la central para su sustitucion. Despues se convertirán tambien las ecuaciones resultantes en principales para sacar de ellas derivaciones y nuevas resultantes, sucediendose los períodos hasta llegar á las ecuaciones finales, con que quedará resuelto el problema.

356. Si hacemos las resoluciones por el método de *igualacion* [87] ó por el de *reducion* [88] traeremos de dos en dos las ecuaciones constituyentes á la columna lateral, y abranzandolas con un *corchete*, como signo de comparacion, sacarémos de ellas con el de consecuencia una ecuacion principal á la columna central; seguiran en esta columna las derivaciones para sacar las ecuaciones resultantes, las cuales se compararán despues entre si, como se ha dicho de las constituyentes, hasta deducir los valores de las incógnitas.

357. El principal objeto de esta leccion ha sido hacernos cargo de las varias clases de ecuaciones *preparatorias*, *constituyentes*, *principales*, *incidentes*, *derivadas*, *resultantes* y *finales*, y del órden de columnas *central*, *lateral*, *final* y *marjinal*; pues el modo con que se plantean los problemas y se desenvuelve su resolucion, lo esplicamos circunstanciadamente en las observaciones puestas al pie de ellos.

358. Cuando formemos los cuadros reconoceremos como presentan á la vista con la mayor distincion y claridad las cantidades representadas por los caractéres, el enlace de ellas marcado por los signos, las condiciones fijadas por las ecuaciones constituyentes, las consecuencias espresadas por las derivaciones, las proposiciones intermedias ordenadas en ecua-

ciones principales, incidentes y resultantes, las operaciones esplicadas con los miembros indicativos, las divisiones señaladas por la ortografía, los períodos reproducidos por el raciocinio, y la verdad descubierta por una série de ideas desenvueltas segun su naturaleza. Tal es la verdadera estructura de un discurso hecho con toda precision analítica.

PROBLEMAS.

COLECCION PRIMERA.

Primer Grado con una Incógnita.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la LECCION IX.

PROBLEMA I. Dividir un número propuesto en dos partes, cuyo intervalo ó diferencia sea dada.

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ núm. prop.} \\ d \text{ intervalo.} \end{array}\right\} \text{datos; } \quad x+d+x=n \text{ Probl.}$$

$$2x+d=n,$$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ part. men.} \\ x+d \text{ may.} \end{array}\right\} \text{incógn.; } \quad 2x=n-d,$$

$$x=\frac{n-d}{2};$$

$$x+d=\frac{n-d}{2}+d=\frac{n+d}{2}.$$

Aplicac. Sea $\left\{\begin{array}{l} n=100; \\ d=40; \end{array}\right.$ $x=\frac{100-40}{2}=30;$ $x+d=\frac{100+40}{2}=70.$

Comprob. $70+30=100;$ $70-30=40.$

OBSERVACIONES.

1ª Aunque este problema es el mismo que resolvimos en la Leccion III art. 27 y 28, conviene presentarlo en mapa y hacer algunas reflecsiones.

2ª Parece que esta cuestion requería dos *incógnitas*, porque se buscan dos cosas desconocidas, cuales son las dos *partes*, cuya *diferencia* es dada; pero, como la mayor consiste en la menor áumentada de la diferencia, resulta que, suponiendo x la parte menor, el entendimiento percibe inmediatamente que la mayor es $x+d$.

3ª En la columnilla marjinal colocamos los datos y las incógnitas.

4ª Para plantear el problema decimos

$$\overbrace{x+d}^{\text{La part. may.}} \overset{\text{y}}{+} \overset{\text{la part. men.}}{x} \overset{\text{componen}}{=} \overset{\text{el núm. prop.}}{n},$$ con lo que queda hecha la traducion al idioma algebráico.

5ª En la columna central estampamos la ecuacion $2x+d=n$, que es sinónima de la constituyente, pues solo sirve para la simplificacion de sumar las dos incógnitas x, y se termina con una coma: la derivacion $2x=n-d$, que es la traslacion de la cantidad conocida d al segundo miembro, terminando tambien con una coma; y la resultante $x=\frac{n-d}{2}$, que es una division de aquella derivada por 2 para despejar la incógnita, con lo que concluye el período, que se señala con punto y coma.

6ª En realidad ya está resuelto el problema, pues tenemos la incógnita ó parte menor espresada en cantidades conocidas, y para hallar la mayor no hay mas que añadir la diferencia á la menor; pero, á fin de tener la mayor con su espresion particular, ponemos la ecuacion $x+d=\frac{n-d}{2}+d=\frac{n+d}{2}$, en que el miembro del medio es ausiliar ó indicativo para manifestar que sumamos con el valor descubierto de la parte menor la diferencia y resulta la mayor $=\frac{n+d}{2}$, á que ponemos un punto por terminar el cálculo.

7ª Podemos decir que en la cuestion presente la parte mayor es la mitad del número sumada con la mitad de la diferencia de las partes, y la menor la mitad del esceso, que el número lleva á la diferencia de las partes.

8ª Para la aplicacion sustituimos en los segundos miembros de las dos fórmulas $x=\frac{n-d}{2}$, $x+d=\frac{n+d}{2}$ los valores, que damos á los datos n, d.

9ª En la comprobacion vemos que las dos *partes* componen el número propuesto, y que el esceso de la mayor sobre la menor es igual al intervalo ó diferencia dada, de consiguiente el problema está bien resuelto.

PROBLEMA II. Diofanto, insigne matemático, pasó la sesta parte de su vida en la niñez, y la duodecima en la adolescencia: se casó, y habiendo vivido sin hijos la séptima parte de su vida y cinco años mas, tuvo un hijo, que vivió la mitad de la edad del padre, y que murió cuatro años antes que Diofanto. ¿ De qué edad murió este ?

x edad de Diof. incógn. ;

$$x=\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4 \text{ Probl.}$$

$$84x=\left(\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4\right)84\ldots$$

$$\ldots=14x+7x+12x+42x+9\cdot84=75x+9\cdot84,$$

$$9x=9\cdot84,$$

$$x=\frac{9\cdot84}{9}=84.$$

Comprob. $\frac{84}{6}+\frac{84}{12}+\frac{84}{7}+\frac{84}{2}+9=14+7+12+42+9=84.$

OBSERVACIONES.

1ª El modo de plantear la cuestion es este:

$$\underset{\text{La edad de Diofanto}}{x}\ \underset{\text{se compone de}}{=}\ \underset{\text{su niñez}}{\frac{x}{6}}\ \underset{\text{y}}{+}\ \underset{\text{su adolescencia}}{\frac{x}{12}}\ \underset{\text{y}}{+}\ \underbrace{\frac{x}{7}+5}_{\text{el tiempo de casado sin hijos}}\ \underset{\text{y}}{+}\ \underset{\text{el de la vida del hijo}}{\frac{x}{2}}\ \underset{\text{y}}{+}\ \underset{\text{el que sobrevivió al hijo.}}{4}.$$

2.ª Como en los denominadores 12 es múltiplo de 6 y 2, solo resultan entre si primeros el 12 y el 7, por lo que formo la primera derivacion multiplicando por su producto 84 la ecuacion constituyente para desvanecer los denominadores.

3.ª La segunda derivacion se forma restando de ambos miembros $75x$.

4.ª Y la ecuacion resultante ó final se saca partiendo por el coeficiente 9 de la incógnita, que queda despejada.

5.ª La comprobacion manifiesta que se plantea el problema del mismo modo que se comprueba, sin mas diferencia que usar de una incógnita en vez de la cantidad que se ha de hallar.

PROBLEMA III. Preguntando á uno que edad tenia su hijo, respondió: si del doble de su edad se resta el triplo de la que tenia seis años ha, quedará su edad actual. ¿Cuanta era esta?

x edad act. incógn.; $2x-3(x-6)=x$ Probl.

$$-x+18=x,$$

$$-2x=-18 \;//\; 2x=18,$$

$$x=\tfrac{18}{2}=9.$$

Comprob. $2\cdot 9-3(9-6)=18-9=9$.

OBSERVACIONES.

1.ª La planta es esta:

El doble de la edad,
restandole
el triplo de
la que tenia 6 años ha,
queda en
la edad actual.

$$2x-3\underbrace{(x-6)}=x.$$

2ª La primera operacion no es mas que la simplificacion de la ecuacion constituyente.

3ª Como en la primera derivacion, que es el pase de la incógnita al primer miembro, y el de la cantidad conocida al segundo, resultan ambos negativos, cambio los signos en sentido positivo, precediendo á esta variacion el signo disyuntivo, porque no se alteran los valores.

4ª Últimamente divido por el coeficiente de la incógnita para despejarla, y obtener la ecuacion resultante ó final.

PROBLEMA IV. Se pide un número tal que si á su quíntuplo se añade siete veces la duodecima parte del mismo número, y de todo se quitan 17 unidades, resulte igual número con mas 203 unidades.

x núm. incógn.; $\quad 5x+\frac{7}{12}x-17=x+203$ Probl.

$$4x+\frac{7}{12}x=203+17=220,$$

$$55x=220\cdot 12,$$

$$x=\frac{4\cdot 11\cdot 5\cdot 12}{11\cdot 5}=48.$$

Comprob. $\quad 5\cdot 48+\frac{7}{12}\cdot 48-17=251=48+203.$

OBSERVACIONES.

1ª No se necesita cotejar el lenguaje comun con el idioma algebráico, porque la traducion de este problema es muy facil y perceptible.

2ª En la primera derivacion manifiesta el miembro indicativo que hemos pasado x al primero y -17 al segundo con la variacion correspondiente de sus signos.

3ª En la segunda derivacion hace ver el segundo miembro que hemos multiplicado toda la ecuacion por 12.

4ª Como se conoce desde luego en esta derivacion $55x=220 \cdot 12$ que el 55 y el 220 son divisibles por 11 y por 5, divido en la resultante ambos miembros por 55 bajo la forma de sus dos factores $11 \cdot 5$, con lo que despejo la incógnita, y por la sencilla multiplicacion de $4 \cdot 12$ saco su valor 48.

PROBLEMA V. Encontró un gavilan á una bandada de palomas, y la saludó diciendo: bien venida sea la bandada de las cien palomas. Entonces una le respondió: aunque no vamos cien palomas, sin embargo, con estas, otras tantas como estas, la mitad de estas, la cuarta parte de estas y tu, gavilan, componemos ciento cabal. ¿Cuantas eran las palomas?

x núm. de palom. incógn.; $x+x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+1=100$ Probl.

$$\frac{11}{4}x=100-1=99,$$

$$x=99 \cdot \frac{4}{11}=36.$$

Comprob. $36+36+\frac{36}{2}+\frac{36}{4}+1=100.$

OBSERVACIONES.

1ª Aunque esta cuestion es de la misma clase y mas facil de resolver que la anterior, hacemos su esposicion con ciertos adornos para manifestar que se debe, antes de todo, traducirla en el mismo lenguaje comun con espresiones mas sencillas.

2ª Consideremos que aqui solo se buscan relaciones de cantidades, y que debemos, por tanto, mirarlas en abstracto, prescindiendo de que la especie sea de palomas, gavilanes ú otras cosas.

3ª En este concepto traduciremos la cuestion en nuestra misma lengua, diciendo: Se busca *un número, que sumado* *consigo mismo, con su mitad, con su cuarta parte y con la unidad, componga ciento*, y su traducion al idioma algebráico será facilísima.

4ª Luego será la primera derivacion una reunion de todas las cantidades de la incógnita, y la traslacion de la unidad al segundo miembro, de modo que tendremos $\frac{11}{4}x=99$.

5ª Esta ecuacion la multiplicamos por $\frac{4}{11}$ para obtener la final, que es $x=36$, con que queda resuelto el problema.

PROBLEMA VI. Preguntado Artemidoro qué edad tenia Alejandro Magno, respondió que dos años mas que Efestion, cuyo padre escedia en cuatro años á la edad de entrambos, y que el padre de Alejandro, contando ya 96 años, tenia tanta edad como los tres juntos.

$$\left.\begin{array}{r} x \text{ edad de Alej. incógn.}; \quad x-2 \text{ edad de Efest.} \\ x+x-2+4 \text{ la del pad. de Efest.} \\ x+x-2+x+x-2+4 \text{ la del pad. de Alej.} \end{array}\right\} \text{Preparacion.}$$

$$x+x-2+x+x-2+4=96 \text{ Probl.}$$

$$4x=96,$$

$$x=\frac{96}{4}=24;$$

$$x-2=24-2=22;$$

$$2x+2=24.2+2=50.$$

$$\text{Comprob.} \quad 24+22+50=96.$$

OBSERVACIONES.

1ª Aunque en este problema parece que debia haber tres incógnitas, pues se buscan tres cosas desconocidas; como las dos últimas dependen tan claramente de la primera, hemos hecho la preparacion para usar solo de una.

2ª Así, de la edad x de Alejandro hemos deducido la de los otros, y planteamos la cuestion de esta manera

$$\overset{\text{La edad de Alej.}}{x} \overset{\text{junta con}}{+} \overbrace{x-2}^{\text{la de Efestion}} \overset{\text{y con}}{+} \overbrace{x+x-2+4}^{\text{la del padre de Efestion}} \overset{\text{es}}{=} \overset{\text{la q. tenia el pad. de Alej.}}{96}.$$

3ª. Sumamos el primer miembro de la ecuacion y nos resulta $4x=96$, que dividido por 4 nos da la ecuacion final $x=24$.

4ª. Luego es fácil hallar las demas edades, sustituyendo en x su valor.

PROBLEMA VII. Preguntó Hércules á Augéo, rey de los Eléos, cuantas vacas tenía. Este respondió: en el llano de Alféo la mitad, en el monte de Saturno la octava parte, en los valles lejanos la duodecima, en Elide la vigésima, en Arcadia la trigesima, y quedan 50 en mi hacienda. ¿Cuantas eran las vacas?

x núm. de vac. incógn.;

$$x-\frac{x}{2}-\frac{x}{8}-\frac{x}{12}-\frac{x}{20}-\frac{x}{30}=50 \text{ Probl.}$$

$$120x-60x-15x-10x-6x-4x=50.120 // 25x=50.120,$$

$$x=\frac{50.120}{25}=240$$

Comprob. $240-\frac{240}{2}-\frac{240}{8}-\frac{240}{12}-\frac{240}{20}-\frac{240}{30}=50.$

OBSERVACIONES.

1ª. Aunque es bastante fácil la traducion de este problema al idioma algebráico ; como no viene propuesto con la última sencillez, pondremos aqui su planta :

x	Las vacas de Augéo
$-$	sin
$\frac{x}{2}$	las que pacen en Alféo,
$-$	ni
$\frac{x}{8}$	las del monte de Saturno,
$-$	ni
$\frac{x}{12}$	las ecsistentes en los valles,
$-$	ni
$\frac{x}{20}$	las q̃ se apacientan en Élide,
$-$	ni
$\frac{x}{30}$	las que estan en Arcadia,
$=$	quedan en
$50.$	las que hay en la hacienda.

2ª Para operar con facilidad busco un número que sea múltiplo de los denominadores, cual es 120, por el que multiplico la ecuacion, como lo manifiesta su segundo miembro.

3ª Me propongo reducir el primer miembro, y como esta operacion no altera el valor de la ecuacion, no debo sacar una derivada, por lo que me valgo del signo disyuntivo para escribir á continuacion la ecuacion igual á ella $25x = 50 . 120$.

4ª Es de advertir que las disyunciones, marcadas con su signo, no forman nueva columna, y asi, en este caso, toda la línea pertenece á la columna central.

5ª Ahora divido todo por 25, coeficiente de la incógnita, como lo manifiesta el segundo miembro, con lo que resulta $x = 240$ vacas de Augéo.

PROBLEMA VIII. Unas gentes caritativas acostumbraban dar á cada pobre, que llegaba á su puerta, la mitad del pan que tenian, y medio pan mas : llegaron tres pobres, y se quedaron en la casa sin pan. ¿Cuantos panes habria antes de llegar el primer pobre?

x panes, que habia antes de llegar el primer pobre: incógn.;

$$\begin{array}{l}\text{Quedaron}\\ \text{en la casa,}\\ \text{cuando se}\\ \text{fué}\end{array}\left\{\begin{array}{l} \text{el prim. pobre} \ldots\ldots\ldots\ x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2}-\frac{1}{2} \\ \text{el seg.} \ldots\ldots\ \frac{x}{2}-\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right):2-\frac{1}{2}=\frac{x}{4}-\frac{3}{4} \\ \text{el terc.} \ldots\ldots\ \frac{x}{4}-\frac{3}{4}-\left(\frac{x}{4}-\frac{3}{4}\right):2-\frac{1}{2}=\frac{x}{8}-\frac{7}{8} \end{array}\right\}\text{Prepar.}$$

$$\frac{x}{8}-\frac{7}{8}=0 \quad \text{Probl.}$$

$$x-7=0,$$

$$x=7.$$

Comprob. $7-(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})=3$; $3-(\frac{3}{2}+\frac{1}{2})=1$; $1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=0$.

OBSERVACIONES.

1ª En las ecuaciones preparatorias restamos cada vez la mitad del pan que hay, y tambien medio pan, con lo que á la tercera nada queda, y con esta espresion se plantea el problema.

2ª Pudiera haberse obtenido la resolucion por un procedimiento sintético sin mas medios que el raciocinio. Con efecto se conoce por la reflecsion que no podia quedar la casa sin pan, cuando se socorrió al tercer pobre, si no en el caso de haber antes solo un pan, para que la mitad mas medio fuese igual á uno: cuando se socorrió al segundo habria el doble de lo que se dió al tercero y el doble de medio para que quedase un pan, esto es, 3 panes; y cuando se socorrió al primero sucederia lo mismo, es decir, habria $3\times 2+1=7$ panes, como sale á la incógnita; de modo que si hubieran llegado 4 pobres serian 15 los panes, si 5 serian 31 y asi sucesivamente.

PROBLEMA IX. Forma en batalla un General su ejército, que es de 36000 hombres, en tres divisiones, de modo que la del centro tenga 3000 hombres mas que la de la derecha, y esta 1500 mas que la de la izquierda. Se pregunta ¿cuantos habrá de tener cada division?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ div. del centro} \\ x-3000 \text{ de la der.} \\ x-4500 \text{ de la izq.} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$x+x-3000+x-4500=36000 \text{ Probl.}$$

$$3x=36000+3000+4500=43500,$$

$$x=\frac{43500}{3}=14500;$$

$$x-3000=14500-3000=11500;$$

$$x-4500=14500-4500=10000.$$

Comprob. $14500+11500+10000=36000$.

OBSERVACIONES.

1ª Pudieramos haber tomado por incógnita cualquiera de las otras dos divisiones del ejército; pero hemos tomado la del centro por seguir mas de cerca la locucion del problema.

2ª Si hubieramos considerado que la division de la derecha era la incógnita x, hubiera resultado ser $x+3000$ la del centro y $x-1500$ la de la izquierda, con lo que hubieramos sacado $x=\frac{36000-1500}{3}=11500$ como antes.

3ª Y si hubieramos figurado con x la division de la izquierda, hubiera sido $x+1500$ la de la derecha y $x+4500$ la del centro, resultando al fin $x=\frac{36000-6000}{3}=10000$ como ya sabiamos.

4ª Despues de planteado el problema son tan claras sus derivaciones que no es necesario esplicarlas.

PROBLEMA X. Dos hurtaron 60 doblones: al partirlos riñeron y arrebató cada uno lo que pudo: puestos en paz, dió el primero al segundo la cuarta parte de lo que habia arrebatado, y el segundo al primero la tercera parte de lo que habia arrebatado, y asi quedaron con partes iguales. ¿Cuanto arrebató cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ cant. que arrebató el prim.} \\ 60-x \text{ la que arrebató el seg.} \end{array}\right\} \text{incógn.;}$$

$$x-\frac{x}{4}+\frac{60-x}{3}=30 \text{ Probl.}$$

$$\frac{3x}{4}+\frac{60-x}{3}=30,$$

$$5x=12.30-4.60=120,$$

$$x=\tfrac{120}{5}=24;$$

$$60-x=60-24=36.$$

$$\text{Comprob. } 24-\tfrac{24}{4}+\tfrac{36}{3}=30=36-\tfrac{36}{3}+\tfrac{24}{4}.$$

OBSERVACIONES.

1.ª La planta de este problema, segun su locucion, debia ser asi:

$$\overset{\text{Lo que arrebató el 1.º,}}{x}\;\overset{\text{quitandole su cuarta parte,}}{-\frac{1x}{4}}\;\overset{\text{y aumentandole}}{+}\;\overbrace{\frac{60-x}{3}}^{\text{el tercio de lo que arrebató el 2.º}}\;\overset{\text{iguala á}}{=}\;\overbrace{60-x}^{\text{lo que arrebató el 2.º}}\;\overset{\text{quitandole}}{-}\;\overbrace{\frac{60-x}{3}}^{\text{su tercera parte,}}\;\overset{\text{y aumentandole}}{+}\;\overset{\text{la cuarta parte de lo que arrebató el 1.º}}{\frac{1x}{4}}$$; pero,

como procuramos la mayor sencillez, considerarémos que, debiendo quedar cada ladron con igual parte, percibirá la mitad de los 60 doblones robados; por lo que, conservando el primer miembro de la ecuacion, viene á ser 30 el segundo, como manifiesta la ecuacion constituyente.

2ª. Las operaciones de la resolucion se entienden bastante por los miembros indicativos, y se ve que el primer ladron arrebató 24 doblones, y el segundo 36.

3ª. Hacemos la comprobacion en la misma forma con que hemos estampado la planta en la primera observacion.

PROBLEMA XI. Dadas las edades de un padre y un hijo, determinar el número de los años, que deberán vivir para que la edad del padre sea n número de veces múltipla de la del hijo.

p edad del pad.; h la del hijo.; n núm. de vec. } datos; $\quad p+x=(h+x)n$ Probl.

$hn+nx=p+x$,

$(n-1)x=p-hn$,

x años que deberán vivir: incógn.; $\quad x=\dfrac{p-hn}{n-1}$.

$$\text{Aplic. Sea}\begin{cases} p=55;\\ h=15;\\ n=3;\end{cases}\qquad x=\frac{55-15\cdot 3}{3-1}=5.$$

$$\text{Comprob.}\quad 55+5=60=(15+5)3.$$

PROBLEMA XII. Buscar un número, que, dividido por otros dos conocidos, los cocientes tengan una diferencia dada.

a, b divisores; d diferencia } datos; $\quad \dfrac{x}{a}-\dfrac{x}{b}=d$ Probl.

$(b-a)\,x=abd$,

x núm. incógn.; $\quad x=\dfrac{abd}{b-a}$.

Comprob. algebráica $\frac{abd}{b-a} : a - \frac{abd}{b-a} : b = \frac{bd-ad}{b-a} = d.$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=4\,; \\ b=7\,; \\ d=6\,; \end{cases}$ $x = \frac{4 \cdot 7 \cdot 6}{7-4} = 56.$

Comprob. numérica $\frac{56}{4} - \frac{56}{7} = 14 - 8 = 6.$

PROBLEMA XIII. Un comisionado de comercio salió de Barcelona con géneros, que valian una cierta suma. Llegó á Zaragoza, donde gastó la mitad de la suma y ganó en la venta de sus géneros 20 doblones. Pasó á Burgos, donde gastó la cuarta parte de lo que llevaba y ganó 15 doblones. De allí pasó á Oviedo, donde gastó el tercio de lo que tenia y ganó 16 doblones. Llegó á la Coruña, y gastó la sesta parte de lo que tenia y ganó 18 doblones. Se embarcó para Cadiz, y pagado el flete, que fué de 5 doblones, halló que habia doblado la suma con que salió de Barcelona. ¿Cuanta era esta?

x suma con que salió de Barcelona: incógn.;

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{En Zaragoza} \ldots\ldots & x - \frac{x}{2} + 20 = \frac{x}{2} + 20 \\
\text{Burgos} \ldots & \frac{x}{2} + 20 - \left(\frac{x}{2} + 20\right)\frac{1}{4} + 15 = \frac{3x}{8} + 30 \\
\text{Oviedo} \ldots & \frac{3x}{8} + 30 - \left(\frac{3x}{8} + 30\right)\frac{1}{3} + 16 = \frac{x}{4} + 36 \\
\text{Coruña} \ldots & \frac{x}{4} + 36 - \left(\frac{x}{4} + 36\right)\frac{1}{6} + 18 = \frac{5x}{24} + 48 \\
\text{Cadiz} \ldots\ldots & \frac{5x}{24} + 48 - 5 = \frac{5x}{24} + 43
\end{array}\right\}\text{Prepar.}$$

$$2x = \frac{5x}{24} + 43 \text{ Probl.}$$

$$48x = 5x + 43 \cdot 24,$$

$$43x = 43 \cdot 24,$$
$$x = 24.$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{l} 24 - \frac{24}{2} + 20 = 32; \\ 32 - \frac{32}{4} + 15 = 39; \\ 39 - \frac{39}{3} + 16 = 42; \\ 42 - \frac{42}{6} + 18 = 53; \\ 53 - 5 = 48 = 24 \times 2. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª La única dificultad, que pudiera ofrecer este problema, es su preparacion. Para hacerla vamos ejecutando sucesivamente las reduciones necesarias: la primera es rebajar la mitad del dinero, que el comisionado sacó de Barcelona, y aumentar 20 doblones que ganó en Zaragoza, de que resulta haber salido de esta ciudad y entrado en Burgos con $\frac{x}{2} + 20$ doblones.

2ª Las demas operaciones preparatorias consisten igualmente en rebajar del dinero, con que el comisionado entra en cada ciudad, la parte que la cuestion indica haber gastado en ella, y aumentar el número de doblones ganados allí.

3ª Estas operaciones, aunque puestas en ecuacion, no corresponden á las ecuaciones de investigacion con que se ha de resolver el problema, pues solo tratamos en ellas de hallar los medios de plantearlo.

4ª Luego que tenemos el resultado $\frac{5x}{24} + 43$ con que el comisionado se halló en Cadiz, lo igualamos con $2x$ doble de lo que sacó de Barcelona, y asi cumplimos la condicion del problema, el cual queda planteado.

5ª Las operaciones resolutivas se esplican claramente por las formas del segundo miembro de las ecuaciones derivadas y final.

PROBLEMA XIV. ¿Cual es el número cuyo tercio es escedido de 20 lo que 30 escede al mismo número?

N núm. incógn.;

$$20-\frac{N}{3}=30-N \text{ Probl.}$$

$$60-N=(30-N)3=90-3N,$$

$$2N=90-60=30,$$

$$N=\tfrac{30}{2}=15.$$

$$\text{Comprob. } 20-\tfrac{15}{3}=15=30-15.$$

PROBLEMA. XV. En todo relox el minutero está sobre la manilla á las doce. ¿Cuando volverán á encontrarse?

x camino de la manilla desde la una al punto del encuentro: incógn.;

$$1+x=12x \text{ Probl.}$$

$$11x=1,$$

$$x=\tfrac{1}{11} \text{ horas} =5+\tfrac{5}{11} \text{ min.}$$

OBSERVACIONES.

1ª Cuando la manilla esté en la una el minutero volverá á estar en las doce. Y siendo la parte x de hora el camino de la manilla desde la una al punto del encuentro, será $1+x$ el camino, que hace el minutero desde las doce, en que se halla, hasta el mismo punto de encuentro; pero, como el minutero anda doce veces mas que la manilla en tiempo igual, y esta camina el espacio x, andará el minutero $12x$. Con estas dos espresiones diferentes del mismo camino del minutero formo la ecuacion constituyente $1+x=12x$ con que resulta planteado el problema.

2ª Sacamos, pues, que siendo el camino de la manilla $x=5'+\frac{5'}{11}$, el minutero, que anda ademas el espacio de doce á una, la encuentra á la una y cinco minutos y cinco once avos de otro.

3ª Este problema se puede generalizar facilmente, pues, siguiendo el raciocinio ya hecho, si a es la hora dada, andará el minutero el espacio, que haya desde las doce hasta la tal hora, y ademas el que desde ella haya de andar la manilla hasta el punto del encuentro, caminando con una velocidad doce veces mayor que la de la manilla, de modo que la ecuacion general será $a+x=12x$, de que resulta $x=\frac{a}{11}$.

4ª Con esta fórmula podemos saber cuando, á cualquier hora, se hallará el minutero sobre la manilla, como, por ejemplo, á las ocho; porque, haciendo $a=8$, tendremos

$$a+x=a+\frac{a}{11}=8^h+\frac{8^h}{11}=8^h+\frac{8.60'}{11}=8^h+\frac{480'}{11}=8^h+43'\ldots$$

$$\ldots+\frac{7'}{11},$$ que es la hora pedida.

PROBLEMA XVI. Un hombre, que camina diez veces mas á prisa que una tortuga, la cual le lleva una legua de delantera ¿á que distancia la alcanzará?

z leg. que anda el homb. para llegar á la tort. incógn.;

$$10(z-1)=z \text{ Probl.}$$

$$9z=10,$$

$$z=\tfrac{10}{9}=1+\tfrac{1}{9}.$$

Comprob. $(\tfrac{10}{9}-1)10=\tfrac{1}{9}.10=\tfrac{10}{9}$.

OBSERVACIONES.

1ª Como la tortuga tiene una legua de ventaja habrá andado en el mismo tiempo una legua menos que el hombre cuando este la alcance, esto es, $z-1$; y como el hombre camina diez veces mas á prisa, su camino z será diez veces mayor que el de la tortuga en cada unidad de tiempo, de que resulta $z=10(z-1)$ para ecuacion constituyente.

2ª Aunque este problema es lo mismo que el anterior del relox, pues el hombre está en el caso del minutero, la tortuga en lugar de la manilla, y la razon de velocidad de 10 á 1 en vez de la de 12 á 1; parece diferente por haber hecho distinta investigacion, respecto á que antes buscamos el valor del menor movimiento, que era el de la manilla, y resultó $x=\frac{1}{11}$ horas, siendo asi que ahora hemos buscado el valor del mayor movimiento, que es el del hombre, y ha resultado $z=1+\frac{1}{9}$ leguas.

PROBLEMA XVII. Con un número dado de cartas n se forma un número m de montones, teniendo cada uno el número p de puntos, contados de modo que la base ó carta inferior de cada monton valga el punto que significa, y las demas valga cada una por 1: sobra el número de cartas s, y se pide la suma de puntos de las cartas inferiores.

x suma de punt. de las cart. inf. incógn.;

$$mp-x+m=n-s \text{ Probl.}$$

$$x=mp+m-n+s=m(p+1)-(n-s).$$

Aplic. Sea $\begin{cases} n=40; \\ m=\ \ 3; \\ p=15; \\ s=11; \end{cases}$ $x=3(15+1)-(40-11)=19.$

OBSERVACIONES.

1ª Como los puntos de todos los montones son los puntos p

de cada uno multiplicados por el número m de montones, estaran espresados con el producto mp. Si de este producto rebajamos los puntos x significados en las bases, y le aumentamos el número m de montones para compensar la supresion de una carta que lleva consigo cada una de las inferiores en la cuenta; resultará el esceso que el total de cartas lleva á su sobrante; por lo que se plantea el problema de esta forma:

Los punt. de tod. los mont.,
descontando
los puntos de las bases,
y aumentando
el número de montones,
componen
el total de cartas
rebajado
el sobrante de ellas.

$$mp - x + m = n - s.$$

2ª La comprobacion se hace ejecutando la suerte con la baraja.

PROBLEMA XVIII. Uno quiere repartir el dinero que tiene, entre varios pobres: si da á cada uno a le falta c para hacer la distribucion: si da á cada uno b le sobra d despues de hecha la distribucion. ¿Cuantos eran los pobres y que dinero tenia?

x núm. de pob. incógn.;

$$ax - c = bx + d \text{ Probl.}$$

$$(a-b)x = c + d,$$

$$x = \frac{c+d}{a-b};$$

$$ax - c = \frac{c+d}{a-b} \cdot a - c = \frac{ac + ad - ac + bc}{a-b} = \frac{ad + bc}{a-b}.$$

$$\text{Aplic. Supongo}\begin{cases} a=25; \\ b=20; \\ c=10; \\ d=25; \end{cases} \quad x=\frac{10+25}{25-20}=7;\ ac-x=\frac{25.25+20.10}{25-20}=165$$

$$\text{Comprob. } 25.7-10=165=20.7+25.$$

OBSERVACION.

La planta de esta cuestion es bastante inteligible. Bien se echa de ver que el dinero, que el limosnero tenia, era igual al producto de la limosna a por el número de pobres, menos la cantidad c, que le faltaba para completar esta distribucion: tambien se conoce desde luego que el mismo dinero era asimismo igual con el producto de la limosna b por el número de pobres, mas la cantidad d que sobraba. Con estos dos valores iguales formamos la ecuacion constituyente. Resulta que $x=\frac{c+d}{a-b}$ es el número de pobres, y $ax-c=\frac{ad+bc}{a-b}$ es el dinero que se busca.

PROBLEMA XIX. Dividir un número dado en partes proporcionales á varios números dados.

a número dado
$m, n, p,$ &c. núm. proporcionales } datos;
x parte del núm. dado, la cual ha de ser proporcional á m: incógn.;

$$m:x::n:\frac{nx}{m}::p:\frac{px}{m}::\&c., \ldots\ x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}+\&c.=a \text{ Probl.}$$

$$x=\frac{ma}{m+n+p+\&c.}$$

OBSERVACIONES.

1ª Este problema es la regla de compañía generalizada.

2ª Por tanto, siendo una cantidad á otra como sus partes semejantes son entre sí, y componiendo los números proporcionales dados una cantidad total conocida, podemos decir: la suma de ellos es al primero, como la cantidad dada á su primera parte, esto es $m+n+p+$ &c. $: m :: a : x \ldots$ $\ldots = \frac{am}{m+n+p+\&c.}$, con lo que se despeja desde luego la incógnita.

PROBLEMA XX. Dados los tiempos, que tarda cada uno de dos caños en llenar un estanque, determinar cuanto tardarán en llenarlo corriendo ambos á la par.

a tiempo que tarda en llenar el estanque el caño c } datos;
b el que tarda el caño c'

t tiempo en que lo llenarán los dos caños juntos : incógn.;

$$ac = bc' = t(c+c') \text{ Probl.}$$

$$c' = \frac{ac}{b};$$

$$ac = t(c+c'),$$

$$c' = \frac{ac}{b}, \ldots ac = t\left(c + \frac{ac}{b}\right) // a = t\left(1 + \frac{a}{b}\right) = t \cdot \frac{a+b}{b},$$

$$t = \frac{ab}{a+b}.$$

Aplic. Supongo $\begin{cases} a = \frac{5^h}{2}; \\ b = \frac{15^h}{4}; \end{cases}$ $t = \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{4} : \left(\frac{5}{2} + \frac{15}{4}\right) = \frac{75}{8} : \frac{25}{4} \ldots$ $\ldots = \frac{3}{2} =$ hora y media.

OBSERVACIONES.

1.ª Aunque introducimos en el cálculo las cantidades c y c', que no se presentan conocidas, esto nada importa, porque desaparecen despues en las operaciones, y conviene valerse de ellas al principio para traducir con la mayor ecsactitud posible el problema.

2.ª Bien se echa de ver que estas cantidades c, c' son el caudal de agua, que los caños dan en la unidad de tiempo.

3.ª En este problema hemos generalizado la cuestion 4.ª resuelta en la aritmética por la regla de falsa posicion.

4.ª Tambien pudieramos haber dicho que, en virtud de proporcion, el primer caño hubiera en el tiempo t llenado $\frac{t}{a}$ del estanque, y el segundo caño hubiera llenado $\frac{t}{b}$ del estanque; y como ambos, corriendo juntos, debian llenarlo todo en el indicado tiempo t, resultaria $\frac{t}{a}+\frac{t}{b}=1$, representando esta unidad la capacidad del estanque. Planteado asi el problema sacariamos el mismo resultado de $t=\frac{ab}{a+b}$.

5.ª Respecto á comprobacion considerarémos que en una hora llenaria el primer caño $c=\frac{2}{5}$ del estanque, y el segundo llenaria $c'=\frac{4}{15}$ del estanque; de modo que $t(c+c')$ ...

$$\ldots=\tfrac{3}{2}(\tfrac{2}{5}+\tfrac{4}{15})=\tfrac{3}{2}\left(\frac{6+4}{15}\right)=\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{3}=1$$ capacidad total del estanque.

PROBLEMA XXI. Un pescador promete á su hijo darle un cierto número de cuartos en premio por cada vez, que saque peces en la red, con tal que el hijo le pague otro cierto número de cuartos por cada vez que no los saque. Al cabo de un determinado número de redadas ajustan cuentas, y queda debiendo el uno al otro un número de cuartos conocido tambien. Se pregunta ¿cuantas veces sacó la red vacia y cuantas con pescado?

a núm. total de redadas
b cuartos de premio
c cuartos de pérdida
d lo ganado ó perdido al fin por el hijo } datos ;

v veces que sacó la red vacia
$a-v$ veces que sacó pescado } incógn. :

$$(a-v)b-cv=d \text{ Probl.}$$

$$(b+c)v=ab-d,$$

$$v=\frac{ab-d}{b+c};$$

$$a-v=a-\frac{ab-d}{b+c}=\frac{ac+d}{b+c}.$$

Aplic. Supongo $\begin{cases} a=12; \\ b=5; \\ c=3; \\ d=28; \end{cases}$ $v=\frac{12.5-28}{5+3}=4;$ $a-v=\frac{12.3+28}{5+3}=8.$

Comprob. $5.8-3.4=28.$

OBSERVACIONES.

1.ª Si procediéramos en el concepto de que el hijo hubiese de perder plantearíamos la cuestion de esta manera:

$cv-(a-v)b=d,$ de que sacaríamos $v=\frac{ab+d}{b+c}.$

2.ª Si hubiesen de quedar en paz, plantearíamos

$$cv-(a-v)b=0 \;,\;\ldots\; v=\frac{ab}{b+c}.$$

3.ª Resulta, pues, que la fórmula general de v es $v=\frac{ab\mp d}{b+c}$, y la de $a-v$ es $a-v=\frac{ac\pm d}{b+c}$, tomando en el primer caso el signo superior, en el segundo el inferior, y haciendo en el tercero $d=0$.

PROBLEMA XXII. Buscar un número, cuyas partes de una cierta denominacion, multiplicadas entre si, den el mismo producto que las partes del mismo número de una denominacion mayor en una unidad que la primera.

m denominacion de las partes: dato;
x núm. incógn.;

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m = \left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1} \text{ Probl.}$$

$$\frac{x^m x}{(m+1)^{m+1}} = \frac{x^m}{m^m},$$

$$\frac{x}{(m+1)^{m+1}} = \frac{1}{m^m},$$

$$x = \frac{(m+1)^{m+1}}{m^m}.$$

Aplic. Supongo $m=2$; $x = \frac{(2+1)^{2+1}}{2^2} = \frac{3^3}{2^2} = \frac{27}{4}$.

Comprob. $\left(\frac{27}{4}:2\right)^2 = \frac{729}{64} = \left\{\frac{27}{4}:(2+1)\right\}^{2+1}$.

OBSERVACIONES.

1.ª Como cada parte denominada del número es $\frac{x}{m}$, y el número de estas partes es m, compondrá $\left(\frac{x}{m}\right)^m$ el primer miembro de la ecuacion constituyente; y como cada parte de una denominacion mayor en una unidad ha de ser $\frac{x}{m+1}$, y el número de estas partes debe ser $m+1$, resultará $\left(\frac{x}{m+1}\right)^{m+1}$ para segundo miembro de la misma ecuacion.

2.ª La primera operacion es cambiar los miembros de la ecuacion constituyente, y disponerlos de un modo mas adecuado para la resolucion.

3ª Las derivaciones son fáciles de comprender á su mera inspeccion.

PROBLEMA XXIII. Dos jugadores se ponen á jugar con una misma cantidad de dinero: el primero pierde a, el segundo pierde b, y la cantidad, que queda al primero, es m número de veces múltipla de la que queda al segundo. ¿Con qué dinero se pusieron á jugar?

D din. con que principió cada uno: incógn.;

$$D-a=m(D-b) \text{ Probl.}$$

$$(1-m)D=a-mb,$$

$$D=\frac{mb-a}{m-1}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=200; \\ b=800; \\ m=\ \ 4; \end{cases}$ $\quad D=\dfrac{4\cdot 800-200}{4-1}=\dfrac{3000}{3}=1000.$

Comprob. $1000-200=800=4(1000-800)$.

PROBLEMA XXIV. Se pide dividir el número a en varias partes, tales que la primera esceda á la segunda en b, la segunda á la tercera en c, la tercera á la cuarta en d, &c.

n núm. de partes: dato;

$\left.\begin{array}{l} x \text{ prim. parte} \\ x-b \text{ seg.} \\ x-b-c \text{ terc.} \\ x-b-c-d \text{ cuart.} \\ \&c. \end{array}\right\}$ incógn.;

$$a=nx-(n-1)b-(n-2)c-(n-3)d.....-\{n-(n-1)\}q \text{ Probl.}$$

$$nx=a+(n-1)b+(n-2)c+(n-3)d.....+\{n-(n-1)\}q,$$

$$x=\frac{a+(n-1)b+(n-2)c+(n-3)d.....+1q}{n}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=620; \\ b=2; \\ c=5; \\ d=4; \\ f=3; \\ q=4; \\ n=6; \end{cases}$ $x=\dfrac{620+5.2+4.5+3.4+2.3+1.4}{6}=\dfrac{672}{6}=112$

Comprob. $112+112-2+110-5+105-4+101-3+98-4\ldots$

$\ldots=112+110+105+101+98+94=620$

OBSERVACIONES.

1ª Si hubieramos supuesto que x era la parte menor, hubiera resultado la ecuacion constituyente

$$a=nx+(n-1)b+(n-2)c\ldots\ldots+\{n-(n-1)\}q,$$

y obtendriamos $x=\dfrac{a-(n-1)b-(n-2)c\ldots\ldots-1q}{n}$.

2ª Los coeficientes, en ambos casos, empiezan en la planta por el número de partes, y van disminuyendo una unidad en cada término hasta que el último tiene por coeficiente la unidad. Lo mismo sucede en el valor de la incógnita, empezando por un coeficiente visible una unidad menor que el número de partes por ser el del primer esceso.

PROBLEMA XXV. Se pide un número tal que, sumado primero con a y despues con b, tengan estas sumas la razon de $m:n$.

x núm. incógn.;

$$x+a:x+b::m:n \quad \text{Probl.}$$

$$mx+bm=an+nx,$$

$$(m-n)x=an-bm,$$

$$x=\frac{an-bm}{m-n}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=8; \\ b=2; \\ m=7; \\ n=4; \end{cases}$ $x=\frac{8.4-2.7}{7-4}=\frac{32-14}{3}=6.$

Comprob. $6+8:6+2::7:4.$

PROBLEMA XXVI. Queriendo un oficial disponer su tropa en batallon cuadrado, le sobra a número de soldados. Añade un soldado por fila é hilera, y le falta b número de soldados para formar este segundo cuadro. ¿Cuantos soldados tenia?

$\left.\begin{array}{l} x \text{ lado del prim. cuad.} \\ x^2+a \text{ núm. de sold.} \end{array}\right\}$ incógn.; $x^2+a=(x+1)^2-b$ Probl.

$$x^2+2x+1-b=x^2+a,$$

$$x=\frac{a+b-1}{2},$$

$$x^2=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2,$$

$$x^2+a=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2+a.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=12; \\ b=9; \end{cases}$ $x^2+a=\left(\frac{12+9-1}{2}\right)^2+12=112.$

Comprob. $112-10^2=12;\quad 112-11^2=-9.$

OBSERVACIONES.

1ª Para evitar radicales y simplificar la resolucion tomamos por incógnita x el lado del primer cuadrado, de modo que el número de soldados ha de ser x^2+a.

2ª Como el lado del segundo cuadrado debe ser $x+1$, será tambien $(x+1)^2-b$ el número de soldados.

3ª Con estas dos espresiones iguales formamos la ecuacion constituyente $x^2+a=(x+1)^2-b$, y aunque aparece de segundo grado, bien pronto se elimina el cuadrado de la incógnita x, y se ve que el problema es de primer grado.

4ª El resultado $x^2+a=\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2+a$ manifiesta que el problema es imposible siempre que los números a, b sean ambos pares ó ambos impares, pues en tal caso sacariamos un quebrado.

PROBLEMA XXVII. Un padre reparte su hacienda de modo que al primero de sus hijos toque a, y la parte p del resto: al segundo $2a$ y la parte p del resto: al tercero $3a$ y la parte p del resto, &c. Todos salen con partes iguales. ¿Cuanta era la hacienda? ¿Cuanto tocó á cada uno? ¿Cuantos eran los hijos?

x hac. incógn.;

$$a+\frac{x-a}{p}=\frac{ap+x-a}{p} \quad \text{Cuota del 1º}$$

$$2a+\left(x-2a-a-\frac{x-a}{p}\right):p=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2} \quad \text{del 2º}$$

Prep.

$$\frac{ap+x-a}{p}=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2} \quad \text{Probl.}$$

$$ap^2+px-ap=2ap^2+px-3ap-x+a,$$

Valor de la hacienda $x=ap^2-2ap+a=a(p-1)^2$;

Cuota de cada uno $a+\frac{x-a}{p}=a+\frac{ap^2-2ap+a-a}{p}=a(p-1)$;

Número de hijos $\frac{a(p-1)^2}{a(p-1)}=p-1$.

Aplic. Sea $\begin{cases} a=1000; \\ p=\quad 5; \end{cases}$

$$a(p-1)^2=1000(5-1)^2=16000 \text{ Valor de la hac.};$$
$$a(p-1)=1000(5-1)=4000 \text{ Cuot. de cad. uno};$$
$$p-1=5-1=4 \text{ Núm. de hijos.}$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{l} 1.^{\text{er}}\ \text{hijo}\ldots\ 1000+\dfrac{16000-1000}{5}=4000;\\ 2.^{\circ}\ \ldots\ldots\ 2000+\dfrac{16000-4000-2000}{5}=4000;\\ 3.^{\circ}\ \ldots\ldots\ 3000+\dfrac{16000-2.4000-3000}{5}=4000;\\ 4.^{\circ}\ \ldots\ldots\ 4000+\dfrac{16000-4.4000}{5}=4000. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1.ª Tomando a para la parte del primer hijo queda el valor de la hacienda menos esta parte, es decir, $x-a$, y como de este resto tiene el mismo hijo la parte p, esto es, $\frac{x-a}{p}$, viene á ser su cuota $a+\frac{x-a}{p}=\frac{ap+x-a}{p}$.

2.ª El segundo hijo tiene la parte $2a$; pero, restando del valor de la hacienda esta parte, y lo perteneciente al primero que es $a+\frac{x-a}{p}$, quedará $x-3a-\frac{x-a}{p}$; y como de este resto tiene el segundo hijo la parte p, esto es $\left(x-3a-\frac{x-a}{p}\right):p\ldots$ $\ldots=\frac{px-3ap-x+a}{p^2}$, su cuota será $2a+\frac{px-3ap-x+a}{p^2}\ldots$ $\ldots=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$.

3.ª Siendo iguales las cuotas de todos los hijos, formo con la del primero y la del segundo la ecuacion constituyente $\frac{ap+x-a}{p}=\frac{2ap^2+px-3ap-x+a}{p^2}$.

4.ª Es claro que el número de hijos es el cociente de la division, que se hace del valor de la hacienda por la cuota de cada uno, ó bien $\frac{a(p-1)^2}{a(p-1)}=p-1$.

5ª Por haber tres cosas desconocidas, aunque dependientes entre si, podemos considerar cualquiera de ellas como la incógnita, segun lo hemos hecho ya con el valor de la hacienda.

6ª Si suponemos que x es la cuota de cada hijo, esta incógnita comprenderá, respecto al primero, ademas de la cantidad a, la parte p del resto, la cual será $x-a$, que, multiplicada por p, reproduce el resto $px-ap$, á que solo falta a para significar el valor de la hacienda en $px-ap+a$.

7ª El segundo hijo tiene $2a$, y la parte p del resto; pero la hacienda vale $px-ap+a$, y se ha tomado de ella x para el primer hijo y $2a$ para el segundo, de consiguiente queda $px-ap+a-x-2a=px-ap-a-x$, de cuyo resto la parte p es $\frac{px-ap-a-x}{p}$. Resulta, pues, que la cuota del segundo hijo es $2a+\frac{px-ap-a-x}{p}=\frac{ap-a+px-x}{p}$.

8ª Debiendo ser iguales las cuotas de los hijos, planteo el problema con las del primero y del segundo en esta ecuacion $x=\frac{ap-a+px-x}{p}$, que resuelvo asi:

$$px=ap-a+px-x,$$
$$0=ap-a-x,$$
$$x=ap-a=a(p-1) \text{ cuota de cada hijo;}$$

y el valor de la hac.ª $px-ap+a=a(p-1)p-ap+a$...

$$..=a(p^2-p-p+1)=a(p-1)^2.$$

9ª Si tomamos x por el número de hijos, considerarémos que el último no puede tener parte p de resto, pues en tal caso quedaria algo de la hacienda despues de hecha la distribucion, lo que seria contra el supuesto. Por tanto la cuota del último será el producto de la parte a por el número de hijos, esto es ax.

10ª Siendo tambien ax la cuota del primero, en que se incluye su parte p de resto, será esta $ax-a$, y el mismo resto consistirá en el múltiplo $(ax-a)p=apx-ap$.

11ª Como solo se ha tomado del valor de la hacienda la cantidad a para el primer hijo, será el total valor de aquella $apx-ap+a$.

12ª El segundo hijo tiene $2a$, y ademas la parte p del resto, la cual consiste en $\frac{apx-ap+a-ax-2a}{p}$ . . .

. . $=\frac{apx-ap-a-ax}{p}$; luego su cuota será

$$2a+\frac{apx-ap-a-ax}{p}=\frac{apx+ap-a-ax}{p}.$$

13ª Igualando las dos cuotas, tendremos la planta y resolucion siguiente:

$$ax=\frac{apx+ap-a-ax}{p},$$

$$apx=apx+ap-a-ax,$$

$$ax=ap-a=a(p-1) \text{ cuota de cada hijo;}$$

$$x=\frac{a(p-1)}{a}=p-1 \text{ número de hijos;}$$

$apx-ap+a=ap(p-1)-ap+a=a(p-1)^2$ valor de la hacienda.

PROBLEMA XXVIII. Un comerciante emplea todos los años a número de duros en el gasto de su casa; pero, en virtud de su comercio, aumenta cada año su capital en la parte p de lo que le queda, deducido aquel gasto.

Al cabo de n número de años ha multiplicado por m su capital. ¿Cuanto era al principio?
x caudal al principio: incógn.;

Al cabo de los años — Prepar.

$$\text{Supongo } 1+\frac{1}{p}=q;$$

prim. .... $x-a+\dfrac{x-a}{p}=(x-a)\left(1+\dfrac{1}{p}\right)=qx-qa$

seg. .... $qx-qa-a+(qx-qa-a)\dfrac{1}{p}=(qx-qa-a)\left(1+\dfrac{1}{p}\right)=q^2x-q^2a-qa$

terc.. $q^2x-q^2a-qa-a+(q^2x-q^2a-qa-a)\dfrac{1}{p}=(q^2x-q^2a-qa-a)\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\ldots$

$\ldots=q^3x-q^3a-q^2a-qa$

&c.

n... $q^nx-q^na-q^{n-1}a-q^{n-2}a-q^{n-3}a\ldots-aq=q^nx-aq(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}\ldots+1)$

$$q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}\ldots+1=\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$q^nx-aq(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}\ldots+1)=q^nx-aq\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

$$q^nx-\frac{aq(q^n-1)}{q-1}=mx \text{ Probl.}$$

$$(q^n-m)x=\frac{aq(q^n-1)}{q-1},$$

$$x=\frac{aq(q^n-1)}{(q-1)(q^n-m)}.$$

$$\text{Aplic. Sea}\begin{cases} a=1000\,; \\ p=3\,; \\ q=1+\dfrac{1}{p}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\,; \\ n=3\,; \\ m=2\,; \end{cases} \qquad x=\frac{1000\,.\,\frac{4}{3}\left(\dfrac{4^3}{3^3}-1\right)}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\dfrac{4^3}{3^3}-2\right)}=\left(\frac{4000}{3}\cdot\frac{37}{27}\right):\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{10}{27}\right)=14800.$$

Comprob. $(14800-1000)\frac{4}{3}=18400$; $(18400-1000)\frac{4}{3}=23200$; $(23200-1000)\frac{4}{3}=29600=14800\cdot 2$.

OBSERVACIONES.

1ª Supongo $1+\frac{1}{p}=q$ para mayor facilidad en el cálculo.

2ª La preparacion manifiesta bastante que en el primer año, rebajando del caudal x el gasto a, y aumentando la parte p de ganancia sobre el resto, resulta $x-a+\frac{x-a}{p}=(x-a)\left(1+\frac{1}{p}\right)\ldots$ $\ldots=(x-a)q=qx-qa$: en el segundo, haciendo la misma rebaja, y el aumento de la parte p sobre el nuevo resto, tendremos $qx-qa-a+\frac{qx-qa-a}{p}=q^2x-q^2a-qa$; y siguiendo de esta manera vemos por inducion que al cabo de n años era el caudal $q^nx-q^na-q^{n-1}a-q^{n-2}a\ldots.-aq\ldots$ $\ldots=q^nx-aq(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}\ldots.+1)$.

3ª Respecto á la cantidad, que está dentro del paréntesis, sabemos que [61. 2ª] si una po-

tencia disminuida de una unidad se divide por su raiz disminuida tambien de una unidad, el cociente es igual á la unidad sumada con las potencias sucesivas de la raiz, desde la primera hasta la que es inferior en una unidad á la potencia, que la misma raiz tiene en el dividendo; luego $q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}....+1=\frac{q^n-1}{q-1}$, y $q^nx-aq(q^{n-1}+q^{n-2}...$
$..+q^{n-3}....+1)=q^nx-\frac{aq(q^n-1)}{q-1}$.

4.ª Con los dos valores iguales del caudal resultante al fin del último año planteamos la cuestion asi:

$$q^nx-\frac{aq(q^n-1)}{q-1}=mx.$$

5.ª De esta ecuacion se deduce $q^nx-mx=\frac{aq(q^n-1)}{q-1}$, esto es, que la diferencia entre q^nx cantidad, que hubiera adquirido el capitalista sino hubiera deducido nada de su caudal, y mx cantidad que al fin le resulta, es $\frac{aq(q^n-1)}{q-1}=aq(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}....+1)$, es decir, aq^n que hubiera producido la a del primer año, mas aq^{n-1} que hubiera producido la a del segundo año, mas aq^{n-2} respecto á la a del tercero, y asi agregando lo que hubiera producido la a de cada año siguiente hasta la del último que sería aq.

6.ª En virtud de este raciocinio pudieramos, sin calcular las cantidades que quedan al fin de cada año, haber planteado desde luego el problema con la ecuacion q^nx . . .
$. . =mx+aq(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}....+1)=mx+\frac{aq(q^n-1)}{q-1}$.

PROBLEMA XXIX. Un capitalista aumenta todos los años su caudal en la parte p, y estrae al fin de cada año la cantidad a: al cabo de n años ha multiplicado su caudal por m. ¿Cuanto era al principio?

x caudal: incógn.;

Importe del capital en n años..... $\left(1+\frac{1}{p}\right)^n x = q^n x$

Segregaciones al fin de los años

prim^a...... $a\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n-1} = aq^{n-1}$

seg^a........ $a\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n-2} = aq^{n-2}$

terc^a........ $a\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n-3} = aq^{n-3}$

&c.

n .... $a\left(1+\frac{1}{p}\right)^{n-n} = aq^{\circ} = a$

Suma segreg^a..... $a(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}....+1) = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$, } Prepar.

$$mx = q^n x - \frac{a(q^n-1)}{q-1} \text{ Probl.}$$

$$q^n x - mx = a.\frac{q^n-1}{q-1},$$

$$x = a.\frac{q^n-1}{(q-1)(q^n-m)}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=1000; \\ p=3; \\ q=1+\frac{1}{p}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}; \\ n=3; \\ m=2; \end{cases}$ $x=1000.\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3-1}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\left(\frac{4^3}{3^3}-2\right)}=1100.$

Comprob. $\frac{4^3}{3^3}.1100-1000.\frac{\frac{4^3}{3^3}-1}{\frac{4}{3}-1}=2631\,1+\frac{1}{9}-(411\,1+\frac{1}{9})\,...$

$..=22200=1100\times 2.$

OBSERVACIONES.

1.ª Sabemos por la regla de interés que, siendo compuesto, se convierte el caudal, al cabo de n años, en $\left(1+\frac{1}{p}\right)^n x = q^n x$, cuya suma tendria el capitalista sino hubiera desmembrado nada.

2.ª Como empiezan las segregaciones despues del primer año, se hacen durante $n-1$ años: la primera es aq^{n-1}, la segunda aq^{n-2}, y asi sucesivamente hasta que concluido el tiempo, la última segregacion es $aq^{n-n} = aq^0 = a$.

3.ª La suma $a(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}.....+1) = \frac{a(q^n-1)}{q-1}$ de las segregaciones se ha de rebajar de $q^n x$ importe del capital en n años para obtener el líquido $q^n x - \frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

4.ª Como este líquido se halla tambien representado por mx, planteamos el problema con la ecuacion $mx = q^n x - \frac{a(q^n-1)}{q-1}$.

5.ª Si comparamos las ecsistencias $aq^n + aq^{n-1}$ . . . . . $+aq^{n-2}.....+aq$ perdidas segun el problema anterior y las ecsistencias $aq^{n-1}+aq^{n-2}+aq^{n-3}.......+a$ perdidas conforme al presente, hallarémos que su diferencia $aq^n - a$ es el esceso, que el primer término del minuendo lleva al último del sustraendo. Asi debe suceder, porque, siendo la ecsistencia perdida cada año en la primera hipótesis igual á la perdida el año anterior en la segunda, no debe haber entre ambas pérdidas otra diferencia que la que ecsiste entre la cantidad perdida el primer año en la primera hipótesis, y la perdida el último año en la segunda, siendo iguales las pérdidas intermedias en ambas hipótesis.

6.ª Vemos que en la primera hipótesis es mayor la pérdida; pero, como la cantidad, que necesita el capitalista para sostener *su casa el primer año, se ha de deducir de alguna parte, la pérdida de los intereses, que esta cantidad le produciria, desvanece la ventaja aparente de la segunda hipótesis.*

PROBLEMA XXX. Un comerciante quiere asegurar un cargamento, y recibir en caso de pérdida la totalidad de él de los aseguradores, lo que podrá ser si la ley mercantil permite asegurar no solo el capital sino tambien el premio del seguro. En una parte le piden a por 100 por el seguro: en otra le piden b por 100 en caso de que su capital se salve, y d por 100 mas en caso de que se pierda. Se pregunta qué relacion debe ecsistir entre a, b y d para que en el caso de salvamento pague lo mismo á un asegurador que á otro.

c capital, que supongo $=100$;

$c-a : a :: c : \frac{ac}{c-a}$ pago al a por c, ... $\frac{c^2}{c-a}$ cantidad que se ha de asegurar al a por c

$e-(b+d) : b+d :: c : \frac{c(b+d)}{c-(b+d)}$ pago al $b+d$ por c, ... $\frac{c^2}{c-(b+d)}$ cantidad que se ha de asegurar al b por c

Prepar.

$$\frac{ac}{c-a}=\frac{bc}{c-(b+d)} \quad \text{Probl.}$$

$$\frac{a}{c-a}=\frac{b}{c-b-d},$$

$$ac-ab-ad=bc-ab,$$

$$ad=ac-bc,$$

$$d=\frac{ac-bc}{a}=c-\frac{bc}{a}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a = 10; \\ b = 8; \\ d = 100 - \dfrac{8.100}{10} = 20; \end{cases}$ $\dfrac{c^2}{c-a} = \dfrac{100.100}{100-10} = 111 + \frac{1}{9};$ $\dfrac{c^2}{c-b-d} = \dfrac{100.100}{100-8-20} = 138 + \frac{8}{9}.$

Comprob. $(111 + \frac{1}{9}) \frac{10}{100} = 11 + \frac{1}{9} = (138 + \frac{8}{9}) \frac{8}{100}.$

OBSERVACIONES.

1.ª Es bien sabido que el *seguro* es un tanto por ciento, que el capitalista paga al asegurador, ya perezca su capital, ya se salve, con la condicion de que en el primer caso el asegurador le ha de satisfacer su capital.

2.ª Debiendo descontarse el premio de cada $c = 100$ asegurados, resulta que si por $c-a$ pago a, por c pagaré $\dfrac{ac}{c-a}$, y la cantidad, que habré de asegurar, será $\dfrac{ac}{c-a} : \dfrac{a}{c} = \dfrac{c^2}{c-a}$.

3.ª Con respecto al premio parcial b y sobrepremio d haré asimismo esta proporcion $c-(b+d) : b+d :: c : \dfrac{c(b+d)}{c-(b+d)}$; pero, como solo he de pagar b por 100 respecto á suponerse el caso de salvamento, será la cantidad del pago $\dfrac{bc}{c-(b+d)}$, y la que se ha de asegurar $\dfrac{bc}{c-(b+d)} : \dfrac{b}{c} = \dfrac{c^2}{c-(b+d)}$.

4.ª Las dos cantidades de pago son iguales, y con ellas se plantea el problema en esta forma $\dfrac{ac}{c-a} = \dfrac{bc}{c-(b+c)}$.

5.ª Segun se propone la cuestion son conocidas las cantidades a, b, c, y se debe considerar d como una incógnita, cuyo valor se descubre por sus relaciones con las demas cantidades en la ecuacion constituyente.

6ª En general, dadas tres de las cuatro cantidades a, b, c, d, se puede hallar la otra, que se considera como incógnita.

7ª Si el cargamento se pierde, entonces

$$\frac{c^2}{c-a}-\frac{c^2}{c-a}\times\frac{a}{c}=\frac{c^2-ac}{c-a}=c,\text{ y tambien}$$

$$\frac{c^2}{c-(b+d)}-\frac{c^2}{c-(b+d)}\times\frac{b+d}{c}=\frac{c^2-bc-dc}{c-b-d}=c;$$ quiere decir que, en caso de pérdida, percibe el capitalista el valor c, sea del primer asegurador ó del segundo.

8ª En la plantificacion del problema hemos espresado que el pago al segundo asegurador era $\frac{bc}{c-(b+d)}$, porque suponiamos que el cargamento se habia salvado; pero en la observacion antecedente, como suponemos que se pierde, es el pago

$$\frac{c^2}{c-(b+d)}\times\frac{b+d}{c}=\frac{c(b+d)}{c-(b+d)}.$$

9ª Como de la ecuacion $ad=ac-bc$ se saca $\frac{ad}{c}=a-b$, y $\frac{ad}{c}$ es una cantidad positiva, se ve que el premio absoluto a debe ser mayor que el parcial b.

10ª De la ecuacion $d=c-\frac{bc}{a}$ se deduce que por cada unidad, que disminuya el premio parcial b, aumenta el sobrepremio d la cantidad $\frac{c}{a}$.

11ª Variando los premios parciales y sobrepremios, sin alterar el premio absoluto,

tendremos $\left\{\begin{array}{l} d=c-\frac{bc}{a} \\ d'=c-\frac{b'c}{a} \end{array}\right\}$, ... $d:d'::1-\frac{b}{a}:1-\frac{b'}{a}::\frac{a-b}{a}:\frac{a-b'}{a}::a-b:a-b'$,

lo que significa que los sobrepremios estan en la misma razon que los escesos del premio absoluto sobre cada premio parcial.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1º Dividir el número 236 de modo que la parte del medio esceda á la menor en 40, y sea escedida por la mayor en 60.

Respuesta: Parte mayor 132, parte del medio 72, y parte menor 32.

2º Hallar un número tal que la suma de su $\frac{1}{3}$, su $\frac{1}{5}$ y sus $\frac{3}{7}$ sea 808.

Resp. El número es 840.

3º Un maestro, queriendo atraer á su taller varios menestrales, se propone ofrecerles una gratificacion. A este fin cuenta su dinero, y resulta que para dar á cada uno 12 pesos le faltan 6; pero, si les da á razon de 10, le sobran 4. Se pregunta ¿cuantos eran los menestrales, y cuanto dinero tenia el maestro?

Resp. Los menesterales eran 5, y el maestro tenia 54 pesos.

4º Un galgo, que está á 100 varas de una liebre, y anda 3 varas mientras ella anda 2 ¿cuando la alcanzará?

Resp. A las 300 varas que ande el perro ó á las 200 que ande la liebre.

5º Un padre ofreció á su hijo darle 12 cuartos cada dia que supiera la leccion; pero que le tomaria de su fondo 6 cuartos el dia que no la supiese. Al cabo de 30 dias debe el padre 270 cuartos. Se pregunta ¿cuantos dias supo el hijo la leccion?

Resp. La supo 25 dias.

6º Se piden dos números que sumen 570, y que la suma de la mitad, octava y duodecima parte del primero seá igual á la suma del tercio, sesta y novena parte del segundo.

Resp. Los números son 264 y 306.

7º Un carro está cargado con 50 bombas de dos diversos calibres: las del primero pesan cada una 72 libras, y las del segundo 50. El peso de todas es de 2698 libras. ¿Cuantas bombas hay de cada calibre?

Resp. 9 del primer calibre y 41 del segundo.

8º Ha habido una accion entre dos divisiones de igual fuerza. Por nuestra parte se perdieron 200 hombres, y el enemigo perdió 800, habiendo quedado nosotros con cuadrupla fuerza. Se desea saber cual era la de cada parte antes de la accion?

Resp. La fuerza de cada division era de 1000 hombres.

9º Una pila, en que caben 70 cuartillos de agua, se ha llenado en 15 minutos, corriendo sucesivamenle dos caños, de los cuales el uno daba 5 cuartillos en un minuto y el otro 4. Se pregunta ¿cuanto tiempo ha corrido cada caño?

Resp. El primero 10 minutos, y el segundo 5.

10º Un hombre da al primer pobre que encuentra $\frac{1}{6}$ de los cuartos que lleva, y 4 mas: al segundo $\frac{1}{6}$ de los cuartos que le quedan, y 8 mas: al tercero $\frac{1}{6}$ de lo que le queda, y 12 cuartos mas; y va dando por sestas partes y el aumento de los 4 cuartos cada vez hasta que se halla sin dinero. Entonces resulta cada pobre con la misma limosna. ¿Cuantos eran los cuartos repartidos, cuantos los pobres y cuanto tocó á cada uno?

Resp. Los cuartos repartidos eran 120, el número de pobres 5, y la parte de cada uno 24.

11º Un muchacho compra manzanas, y le dan 10 por un cuarto: compra tambien peras, y le dan 25 por 2 cuartos. Entre peras y manzanas ha comprado 100, que le han costado 9 y $\frac{1}{2}$ cuartos. ¿Cuantas manzanas, y cuantas peras ha comprado?

Resp. 75 manzanas y 25 peras.

12.º Un vinatero quiere mezclar vino de á 10 rs. arroba con otro de á 6 rs. para componer 108 arrobas que pueda vender á 7 rs. ¿Qué porcion de cada vino ha de entrar en la mezcla?

Resp. 27 arrobas de á 10 rs., y 81 de á 6.

13.º Dos negociantes *A* y *B* han hecho compañía, poniendo entre los dos 500 doblones, con los cuales han ganado 160, y de esta ganancia han tocado á *A* 32 doblones mas que á *B*. ¿Cuanto es la puesta, y cuanto la ganancia de cada uno?

Resp. La puesta de *A* son 300 doblones y su ganancia 96, y la puesta de *B* son 200 doblones y su ganancia 64.

14.º Un capital puesto á ganancias, á interés simple, ha ascendido en 8 meses á 297 rs. 20 $\frac{1}{2}$ mrs. y en 15 meses á 306 reales. ¿Cuanto era el capital, y de cuanto por 100 el interés anual?

Resp. El capital era de 288 rs. y el interés anual de 5 por 100.

15.º Dos mayorazgos *A* y *B* tienen una misma renta anual: *A* ahorra cada año $\frac{1}{5}$ de la suya; pero *B* gasta anualmente 60 doblones mas que *A*, quedando empeñado en 100 doblones al cabo de tres años. ¿Cuanto cobra cada uno, y cuanto gasta?

Resp. La renta de cada uno es 133 doblones 1 peso y 5 rs.: *A* gasta 106 doblones 2 pesos y 10 rs., y *B* gasta 166 doblones 2 pesos y 10 rs.

PROBLEMAS.

COLECCION SEGUNDA.

Primer Grado con varias Incógnitas.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la Leccion IX.

tado 9 y ¾ cuartos. ¿Cuantas manzanas, y quántas peras ha comprado?

Resp. 75 manzanas, y 25 peras.

12.º Un vinatero [illegible] vino de á 10 rs. arroba con otro de á 6 rs. para componer 108 arrobas que pueda vender á 7 rs. ¿Qué porcion de cada vino ha de entrar en la mezcla?

Resp. 27 arrobas de á 10 rs., y 81 de á 6.

13.º Dos negociantes A y B han hecho compañía, poniendo entre los dos 500 doblones, con los cuales han ganado 160, y de esta ganancia han tocado á A 32 doblones mas que á B. ¿Quanto es la puesta, y quanto la ganancia de cada uno?

Resp. La puesta de *A* son 300 doblones y su ganancia 96, y la puesta de *B* son 200 doblones y su ganancia 64.

14.º Un capital puesto á ganancias, á interés simple, ha ascendido en 8 meses á 297 rs. 20⅖ mrs., y en 15 meses á 306 reales. ¿Quanto era el capital, y de quanto por 100 el interés anual?

Resp. El capital era de 288 rs. y el interés anual de 5 por 100.

15.º Dos mayorazgos *A* y *B* tienen una misma renta anual; *A* ahorra cada año ⅕ de la suya; pero *B* gasta anualmente 60 doblones mas que *A*, [illegible] empeñado en 100 doblones [illegible]

Resp. La renta de [illegible] 133 doblones 2 pesos y 8 rs.: *A* gasta 106 doblones 2 pesos y 16 rs., y *B* gasta 166 doblones 2 pesos y 16 rs.

PROBLEMA I. Hallar dos números, siendo conocidas su suma y su diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} s \text{ suma} \\ d \text{ difer.} \end{array}\right\} \text{datos}; \qquad \left.\begin{array}{l} N+n=s \\ N-n=d \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ núm. may.} \\ n \text{ núm. men.} \end{array}\right\} \text{incógn.}; \quad \left.\begin{array}{l} N+n=s \\ N-n=d \end{array}\right\}, \ldots 2N=s+d, \ldots N=\frac{s+d}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l} n+N=s \\ -n+N=d \end{array}\right\}, \ldots 2n=s-d, \ldots n=\frac{s-d}{2}.$$

OBSERVACIONES.

1.ª Este problema es el mismo que el primero de la coleccion antecedente, llamando *números* á lo que en el otro se llamaba *partes*, y *suma* á lo que en aquel se decia *número*.

2.ª Podiamos haberlo resuelto con una incógnita, bien fuese tomando n por número menor y $n+d$ por el mayor, ó bien N el número mayor y $N-d$ el menor, con lo que el cálculo hubiera sido como el del otro problema sin mas diferencia que de nombres.

3.ª Pero hemos preferido resolverlo con dos incógnitas para manifestar como diferentes caminos conducen á un mismo fin: para ensayarnos en el método de reducion ó de sumar y restar las ecuaciones constituyentes, convertidas en incidentes, á fin de obtener una principal; y para presentar la estructura del cálculo en las ecuaciones análogas, que se corresponden en el cuadro de la resolucion.

4.ª Despues de traducida la cuestion en álgebra hemos trasladado su planta á la columna lateral, y abrazado sus dos ecuaciones con un corchete en señal de comparacion, y de operacion recíproca para eliminar ó desvanecer una incógnita, y hemos deducido con el signo de consecuencia que, sumando las dos ecuaciones incidentes, resulta la principal de $2N = s + d$, cuyo segundo miembro, haciendo las veces de *indicativo* y de *significativo*, manifiesta que hemos hecho la operacion de sumar, y nos presenta el valor de la incógnita N multiplicada por el coeficiente 2.

5ª Deducimos la resultante $N = \frac{s+d}{2}$, que llevamos con el signo de consecuencia á la columna final, terminando el primer período con punto y coma.

6ª Volvemos á poner la planta de la cuestion en la columna lateral, abrazando sus dos ecuaciones con un corchete en señal de comparacion y de operacion recíproca: vemos que para eliminar ó desvanecer, segun conviene, la incógnita N y quedarnos con solo la n, necesitamos restar la segunda ecuacion incidente de la primera, por lo que llevamos con el signo de consecuencia á la columna central la ecuacion principal $2n = s - d$, cuyo segundo miembro denota la sustraccion hecha.

7ª Y sacamos á la columna final con el signo de consecuencia la resultante $n = \frac{s-d}{2}$, valor de la segunda incógnita, poniendole un punto porque acaba el cálculo.

8ª Es digna de observarse la estructura de esta resolucion por la analogía, que resulta entre las ecuaciones de investigacion de la primera incógnita y las de investigacion de la segunda.

PROBLEMA II. Tengo una porcion de fichas en cada mano: si paso una parte a de ellas de la derecha á la izquierda, me resultan tantas en una mano como en otra; pero si, en vez de hacerlo asi, paso la misma parte a de la izquierda á la derecha, me hallo en esta con n veces tantas fichas como en la otra. Pregunto ¿cuantas fichas tenia yo al principio en cada mano?

$\left.\begin{array}{l} D \text{ núm. de fich. en la der.} \\ I \text{ núm. de fich. en la izq.} \end{array}\right\}$ incógn.;

$$\left.\begin{array}{l} D-a=I+a \\ D+a=(I-a)n \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$D-a=I+a,\ldots nD-na=nI+na \left.\begin{array}{l} \\ D+a=nI-na \end{array}\right\},\ldots(n-1)D-(n+1)a=2na,\ldots D=\frac{(3n+1)a}{n-1};$$

$$\left.\begin{array}{l} nI-na=D+a \\ I+a=D-a \end{array}\right\},\ldots(n-1)\,I-(n+1)a=2a\ ,\ldots\ I=\frac{(n+3)a}{n-1}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=3; \\ n=2; \end{cases}$ $D=\frac{(3\cdot2+1)3}{2-1}=21$; $I=\frac{(2+3)3}{2-1}=15.$

Comprob. $21-3=18=15+3$; $21+3=24=(15-3)2=12\times2.$

OBSERVACIONES.

1ª Este problema se plantea así:

Las fich. de la der.	quitandoles la cant. conocida,	son tantas como	las fich. de la izq.	aumentadas de aquella cant.		Las fich. de la der.	aumentandoles la cant. conocida,	son	el núm. n de veces	las fich. de la izq.	rebajada aquella cant.
D	$-\ a$	$=$	I	$+\ a$	;	D	$+\ a$	$=$	n	$(I$	$-\ a)$

Primera condicion $D-a=I+a$; Seg. cond. $D+a=n(I-a)$; y queda hecha la traducion del lenguaje comun al idioma algebraico.

2ª Ahora me propongo eliminar la incógnita I, restando ordenadamente los miembros de las dos ecuaciones, y estampo la primera en la columna lateral.

3ª Como no puedo eliminar por sustraccion la I sin que tenga el mismo coeficiente en ambas ecuaciones, multiplico $D-a=I+a$ por n, y deduzco con el signo de consecuencia $nD-na=nI+na$, que queda en la misma columna lateral por por no ser mas que una predisposicion.

4ª Pongo debajo la segunda ecuacion constituyente $D+a=nI-na$, y abrazo entrambas con un corchete.

5ª Hago entre estas dos ecuaciones la sustraccion, llevando con el signo de consecuencia el residuo á la columna central.

6ª Saco la ecuacion resultante $D=\frac{(3n+1)a}{n-1}$ á la columna final.

7ª Hago operaciones semejantes para eliminar la incógnita D, y me resulta $I=\frac{(n+3)a}{n-1}$.

PROBLEMA III. Hallar cuatro números, de los cuales la suma de los tres primeros componga 50: el primero junto con el séstuplo del cuarto equivalga al tercero: la mitad del primero con el triplo del segundo sea igual al décuplo del cuarto; y el tercio del primero sea la mitad del segundo.

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ núm. prim.} \\ x \text{ segundo} \\ y \text{ tercero} \\ z \text{ cuarto} \end{array}\right\}\text{incógn.;}\quad \left.\begin{array}{c} u+x+y=50 \\ u+6z=y \\ \frac{u}{2}+3x=10z \\ \frac{u}{3}=\frac{x}{2} \end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{u}{3}, \quad . \quad . \quad . \quad x=\tfrac{2}{3}u;$$

$$10z=\frac{u}{2}+3x,$$

$$x=\tfrac{2}{3}u, \ldots 10z=\frac{u}{2}+3\cdot\tfrac{2}{3}u=\tfrac{5}{2}u,$$

$$u=\tfrac{2}{5}\cdot 10z \quad . \quad . \quad . \; // \; . \; . \; . \; u=4z;$$

$$x=\tfrac{2}{3}u,$$

$$u=4z, \; . \; . \; . \; x=\tfrac{2}{3}\cdot 4z \quad . \quad . \quad . \; // \ldots x=\tfrac{8}{3}z;$$

$$y=6z+u,$$

$$u=4z, \; . \; . \; . \; y=6z+4z \quad . \quad . \quad . \; // \ldots y=10z;$$

$$50=u+x+y,$$

$$\left.\begin{array}{l} u=4z \\ x=\tfrac{8}{3}z \\ y=10z \end{array}\right\} , \ldots 50=4z+\tfrac{8}{3}z+10z=\tfrac{50}{3}z, \ldots z=3;$$

$$z=3, \; . \; . \; . \left\{\begin{array}{l} u=4z=4\cdot 3 \quad . \quad . \quad . \; // \ldots u=12; \\ x=\tfrac{8}{3}z=\tfrac{8}{3}\cdot 3 \quad . \quad . \quad . \; // \ldots x=8; \\ y=10z=10\cdot 3 \quad . \quad . \quad . \; // \ldots y=30. \end{array}\right.$$

Comprob. $12+8+30=50$; $12+6.3=30$; $\frac{12}{2}+3.8=30=10.3$; $\frac{12}{3}=4=\frac{8}{2}$.

OBSERVACIONES.

1.ª La traducion es esta:

u	*El primer número*,
$+$	sumado con
x	el segundo
$+$	y con
y	el tercero,
$=$	componen
50;	la cantidad de 50.
u	El primer número,
$+$	junto con
6	el séstuplo del
z	cuarto,
$=$	equivale al
y;	tercero.
$\frac{u}{2}$	La mit. del prim. núm.
$+$	con
3	el triplo del
x	segundo
$=$	es igual al
10	décuplo del
z;	cuarto.
$\frac{u}{3}$	El terc. del prim. núm.
$=$	es
$\frac{x}{2}$.	la mitad del segundo.

2ª Para resolver este problema por el método de sustitucion tomo de la planta la ecuacion, que me parece mas adecuada, cual es la cuarta $\frac{x}{2}=\frac{u}{3}$, y la llevo á la columna central.

3ª Saco el valor de una de estas dos incógnitas en la otra, como lo hago llevando á la columna final la ecuacion resultante $x=\frac{2}{3}u$.

4ª Ahora traslado á la columna central otra ecuacion constituyente como $10z=\frac{u}{2}+3x$, indico en la columna lateral el valor hallado de x para su sustitucion, y ejecutando la derivacion correspondiente, deduzco de ella la ecuacion resultante $u=4z$.

5ª Luego llevo á la columna central la ecuacion resultante $x=\frac{2}{3}u$ hallada en el primer período, y con la sustitucion del valor de u en z deduzco $x=\frac{8}{3}z$.

6ª Practicando operaciones semejantes con la segunda ecuacion constituyente $y=6z+u$ y con la primera $50=u+x+y$, de modo que se sustituyan los valores en z á las incógnitas del segundo miembro de estas ecuaciones, sacamos las resultantes $y=10z$, $z=3$.

7ª Ya tenemos conocido el valor de la incógnita z, y descubierto los valores de las otras en ella; de consiguiente, sustituyendoles $z=3$, deducimos $u=12$, $x=8$, $y=30$, con lo que queda resuelto el problema como lo manifiesta la comprobacion.

8ª Es de advertir que, cuando sacamos de las ecuaciones principales ó de sus derivadas las resultantes, llevamos estas á la columna final con el signo de consecuencia si sufren alteracion de valor; pero, sino hay mas que reducion del segundo miembro, las llevamos como sinónimas con el signo disyuntivo, precediendole tres puntos y siguiendole otros tres para manifestar que pasamos á otra columna. Asi en la resolucion antecedente hemos usado en el primero y quinto período el signo de consecuencia, y en el segundo, tercero, cuarto, sesto, séptimo y octavo el signo disyuntivo con los puntos correspondientes.

PROBLEMA IV. Se encargó á un arriero la conducion de varios vasos de tres diferentes tamaños, á condicion de que pagase por cada vaso que rompiese, una cantidad igual al precio de su conducion. Hizo tres viajes: en el primero transportó 5 vasos pequeños, 6 medianos y 9 grandes; rompió los pequeños, y recibió por precio de la conducion 68 reales: en el segundo viaje llevó 12 pequeños, 4 medianos y 10 grandes; rompió los medianos, y recibió 68 reales: en el tercer viaje llevó 16 vasos pequeños, 10 medianos y 3 grandes; rompió los grandes, y recibió 54 reales. ¿Cual era el precio de conducion de cada vaso pequeño, de cada vaso mediano y de cada vaso grande?

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ de cada vaso grande} \\ M \text{ de cada vaso mediano} \\ P \text{ de cada vaso pequeño} \end{array}\right\} \text{precios de conduc. incógnitas};$$

$$\left.\begin{array}{l} 6M+9G-5P=68 \\ 12P+10G-4M=68 \\ 16P+10M-3G=54 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$6M+9G-5P=68 \;,\;\ldots\; M=\frac{68-9G+5P}{6};$$

$$12P+10G-4M=68 \;,\;\ldots\; M=\frac{6P+5G-34}{2};$$

$$16P+10M-3G=54 \;,\;\ldots\; M=\frac{54-16P+3G}{10};$$

$$\left.\begin{array}{l} M=\dfrac{6P+5G-34}{2} \\ M=\dfrac{68-9G+5P}{6} \end{array}\right\}, \ldots \dfrac{6P+5G-34}{2}=\dfrac{68-9G+5P}{6},$$

$$18P+15G-102=68-9G+5P,$$

$$24G=102+68-(18-5)P, \ldots G=\frac{170-13P}{24};$$

$$\left.\begin{array}{l} M=\dfrac{6P+5G-34}{2} \\ M=\dfrac{54-16P+3G}{10} \end{array}\right\}, \ldots \dfrac{6P+5G-34}{2}=\dfrac{54-16P+3G}{10},$$

$$30P+25G-170=54-16P+3G,$$

$$22G=54+170-(16+30)P, \ldots G=\frac{112-23P}{11};$$

$$\left.\begin{array}{l} G=\dfrac{170-13P}{24} \\ G=\dfrac{112-23P}{11} \end{array}\right\}, \ldots \dfrac{170-13P}{24}=\dfrac{112-23P}{11},$$

$$1870-143P=2688-552P,$$

$$409P=2688-1870=818, \ldots P=\frac{818}{409}=2;$$

$$G=\frac{112-23P}{11},$$

$$P=2, \quad \ldots \quad G=\frac{112-23\cdot 2}{11} \ldots /\!/ \ldots G=\frac{66}{11}=6;$$

$$M=\frac{6P+5G-34}{2},$$

$$\left.\begin{matrix}P=2\\G=6\end{matrix}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad M=\frac{6.2+5.6-34}{2}\ldots//\ldots M=\frac{8}{2}=4.$$

Compr. $6.4+9.6-5.2=68$; $12.2+10.6-4.4=68$; $16.2+10.4-3.6=54$.

OBSERVACIONES.

1ª La planta es esta:

Por la conduc. de los vas. med. y la de los grandes, descontando la pérdida de los pequeños, recibió el conductor esta cantidad.	Por la conduc. de los vas. peq. y la de los grandes, descontando la pérdida de los medianos, recibió el conductor esta cantidad.	Por la conduc. de los vas. peq. y la de los medianos, descontando la pérdida de los grandes, recibió el conductor esta cantidad.
1.er viaj. $6M+9G-5P=68$;	2º viaj. $12P+10G-4M=68$;	3.er viaj. $16P+10M-3G=54$.

2ª Voy á resolver el problema por el método de igualacion. A este fin transcribo en la columna central la primera ecuacion constituyente, y saco á la columna final el precio de cada vaso mediano en la resultante $M = \frac{68 - 9G + 5P}{6}$.

3ª Hago lo mismo con la segunda ecuacion constituyente, dividiendola toda por 2, porque admite esta simplificacion, y saco $M = \frac{6P + 5G - 34}{2}$.

4ª Asimismo deduzco de la tercera ecuacion constituyente la resultante $M = \frac{54 - 16P + 3G}{10}$.

5ª Ya que tengo tres valores de M en G, P y cantidades conocidas, comparo el mas sencillo, que es el segundo, con cada uno de los otros dos.

6ª Para ello traigo á la columna lateral las ecuaciones $M = \frac{6P + 5G - 34}{2}$ y $M = \frac{68 - 9G + 5P}{6}$, y abrazandolas con el signo de comparacion, deduzco con el de consecuencia á la columna central, por igualdad de valores, $\frac{6P + 5G - 34}{2} = \frac{68 - 9G + 5P}{6}$ quedando eliminada la M.

7ª Haciendo las derivaciones correspondientes saco la resultante $G = \frac{170 - 13P}{24}$.

8ª Traigo á la columna lateral el segundo y tercer valor de M, y practicando las mismas operaciones que antes, saco la ecuacion resultante $G = \frac{112 - 23P}{11}$.

9ª Ya tenemos dos valores de G en P y cantidades conocidas, cuales son $G = \frac{170 - 13P}{24}$ y $G = \frac{112 - 23P}{11}$. Estos valores los traigo á la columna lateral, los comparo y deduzco la ecuacion principal $\frac{170 - 13P}{24} = \frac{112 - 23P}{11}$, eliminando la incógnita G.

10.ª *Hago las derivaciones convenientes, y deduzco la resultante* $P=2$.

11.ª Estampo en la colúmna central la espresion mas sencilla de G en P, que es $G=\frac{112-23P}{11}$, y sustituyendole el valor de $P=2$, saco la ecuacion resultante $G=6$.

12.ª Haciendo las sustituciones de P y G en el valor $M=\frac{6P+5G-34}{2}$, que llevo á la columna central, obtengo en la final $M=4$.

13.ª Resulta de todo que el precio de conducion de los vasos grandes era 6 reales, el de los medianos 4 y el de los pequeños 2, como se verifica en la comprobacion.

PROBLEMA V. La pólvora se compone de salitre, azufre y carbon. El triplo del peso del salitre debe ser igual á 13 veces el del carbon mas 5 veces el del azufre, y el quíntuplo del peso del salitre debe ser igual á 37 veces el peso del azufre menos 7 veces el del carbon. Se pregunta ¿qué cantidades deben mezclarse de salitre, azufre y carbon para componer 100 libras de pólvora?

$$\left.\begin{array}{l} S \text{ salitre} \\ A \text{ azufre} \\ C \text{ carbon} \end{array}\right\} \text{cant. incógn.};\qquad \left.\begin{array}{l} S+A+C=100 \\ 3S=13C+5A \\ 5S=37A-7C \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$S+A+C=100\ ,\ \ldots\ldots\ S=100-A-C;$$

25

$$13C+5A=3S,$$

$$S=100-A-C, \ldots \; 13C+5A=3(100-A-C)=300-3A-3C,$$

$$16C+8A=300,$$

$$4C+2A=\tfrac{300}{4}=75,$$

$$2A=75-4C, \quad . \quad . \quad . \quad A=\frac{75-4C}{2};$$

$$37A-7C=5S,$$

$$S=100-A-C, \ldots \; 37A-7C=5(100-A-C)=500-5A-5C,$$

$$42A-2C=500,$$

$$C=\frac{42A-500}{2}=21A-250,$$

$$A=\frac{75-4C}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad C=21\left(\frac{75-4C}{2}\right)-250=\frac{1075}{2}-42C,$$

$$43C=\frac{1075}{2}=\frac{43 \cdot 25}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad C=\frac{25}{2}=12+\tfrac{1}{2};$$

$$A=\frac{75-4C}{2}=\frac{75}{2}-2C,$$

$$C=\frac{25}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad A=\frac{75}{2}-2 \cdot \frac{25}{2}=\frac{75-50}{2} \ldots // \ldots A=\frac{25}{2}=12+\tfrac{1}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{25}{2} \\ C = \frac{25}{2} \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \quad \begin{array}{l} S = 100 - A - C, \\ S = 100 - \frac{25}{2} - \frac{25}{2} \end{array} \quad . \quad . \quad . \quad // \quad . \quad . \quad . \quad S = 100 - 25 = 75.$$

Comprob. $75 + 12 + \frac{1}{2} + 12 + \frac{1}{2} = 100$; $3.75 = 225 = 13.\frac{25}{2} + 5.\frac{25}{2}$; $5.75 = 375 = (37 - 7)\frac{25}{2}$.

OBSERVACIONES.

1ª Traigo á la columna central la primer ecuacion constituyente, y de ella saco el valor de S en A y C.

2ª Cambiando los miembros de la segunda ecuacion constituyente la transcribo en la columna central, y sustituyo el valor hallado de S.

3ª Practicando las derivaciones consiguientes saco el valor de A en C.

4ª Estampo en la columna central la tercer ecuacion constituyente, cambiando sus miembros, y le sustituyo el valor de S en A y C.

5ª Con las derivaciones oportunas saco el valor de C en A, que no llevo á la columna final, porque voy á sustituirle el valor hallado de A en C.

6ª En virtud de esta sustitucion deduzco con las operaciones convenientes $C = \frac{25}{2} = 12 + \frac{1}{2}$.

7ª Al valor sacado de A en C, que traigo á la columna central, le sustituyo el descubierto de $C = \frac{25}{2}$, y obtengo $A = \frac{25}{2} = 12 + \frac{1}{2}$.

8ª Trayendo á la columna central la primer ecuacion resultante, y sustituyendole los valores descubiertos de A y C, resulta el valor de $S = 75$.

PROBLEMA VI. Hay tres cargas de granos. La primera tiene 30 fanegas de centeno, 20 de cebada y 10 de trigo, y vale 230 pesetas: la segunda tiene 27 fanegas de centeno, 24 de cebada y 18 de trigo, y vale 270 pesetas; y la tercera tiene 7 fanegas de centeno, 11 de cebada y 12 de trigo, y vale 121 pesetas. ¿Cual era el precio del centeno, la cebada y el trigo?

$$\left.\begin{array}{l} c \text{ del cent.} \\ c' \text{ de la ceb.} \\ \tau \text{ del trigo} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{precio de} \\ \text{fan.: inc.;} \end{array} \quad \left.\begin{array}{r} 30c+20c'+10\tau=230 \\ 27c+24c'+18\tau=270 \\ 7c+11c'+12\tau=121 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} 30c+20c'+10\tau=230,\ldots 18c+12c'+6\tau=230.\tfrac{6}{10}=138 \\ 27c+24c'+18\tau=270,\ldots\ 9c+8c'+6\tau=270.\tfrac{1}{3}=\ 90 \end{array}\right\},\ldots\ 9c+4c'=138-90=48;$$

$$\left.\begin{array}{l} 27c+24c'+18\tau=270,\ldots 18c+16c'+12\tau=270.\tfrac{2}{3}=180 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7c+11c'+12\tau=121 \end{array}\right\},\ldots 11c+5c'=180-121=59;$$

$$\left.\begin{array}{l} 9c+4c'=48\ ,\ \ldots\ 45c+20c'=48.5=240 \\ 11c+5c'=59\ ,\ \ldots\ 44c+20c'=59.4=236 \end{array}\right\},\ \ldots\ c=240-236\ \ldots//\ldots c=4;$$

$$\left.\begin{array}{l} 5c'+11c=59\ ,\ \ldots\ 45c'+99c=59.9=531 \\ 4c'+9c=48\ ,\ \ldots\ 44c'+99c=48.11=528 \end{array}\right\},\ \ldots\ c'=531-528\ \ldots//\ldots c'=3;$$

$$\begin{array}{r} 30c+20c'+10\tau=230, \\ 3c+2c'+\ \tau=23, \\ \tau=23-3c-2c', \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} c=4 \\ c'=3 \end{array}\right\},\ \ldots\ \tau=23-3.4-2.3\ldots//\ldots\tau=5.$$

Comprob. $30.4+20.3+10.5=230$; $27.4+24.3+18.5=270$; $7.4+11.3+12.5=121$.

OBSERVACIONES.

1ª Tratando de resolver este problema por el método de reducion, traigo la primera y la segunda ecuacion constituyente á la columna lateral para eliminar la incógnita r.

2ª A este fin, deduciendo con el signo de consecuencia, multiplico la primera por $\frac{6}{10}$ y la segunda por $\frac{1}{3}$, con lo que resulta en ambas el mismo coeficiente á r.

3ª Resto de la primer ecuacion la segunda, y deduzco en la columna central $9c+4c'=48$, quedando eliminada la r.

4ª Tengamos presente que la ecuacion $30c+20c'+10r=230$ y su consiguiente $18c+12c'+6r=138$, como tambien la otra $27c+24c'+18r=270$ y su consiguiente $9c+8c'+6r=90$, ocupan la columna lateral, porque estas deduciones solo sirven, como ya lo hemos indicado, para preparar cada dos ecuaciones á la eliminacion de una incógnita dandole en ambas el mismo coeficiente.

5ª Luego transcribo en la columna lateral otra vez la segunda ecuacion constituyente, y la preparo, multiplicando por $\frac{2}{3}$, á que tenga r el mismo coeficiente que en la tercera ecuacion constituyente, que pongo debajo.

6ª Restando de la primera de estas la segunda saco en la columna central $11c+5c'=59$, y queda eliminada la incógnita r.

7ª Preparando y comparando las dos ecuaciones halladas en c y c', y haciendo las restas convenientes, como indica el cálculo, obtengo $c=4$ y $c'=3$.

8ª Últimamente estampo en la columna central la ecuacion constituyente, que me parece mas sencilla, como es en este caso la primera, y sustituyendole los valores de c y c' saco $T=5$.

PROBLEMA VII. Uno deja en su testamento 120000 duros, 12000 á cada sobrino y 9000 á cada sobrina, y hecho el reparto no queda nada del caudal. Si hubiera dejado 9000 á cada sobrino y 12000 á cada sobrina, hubieran sobrado 9000 duros de la herencia. ¿Cuantos eran los sobrinos y cuantas las sobrinas?

$$\left.\begin{array}{l} V \text{ sobrinos} \\ H \text{ sobrinas} \end{array}\right\} \text{incógn.;} \qquad \left.\begin{array}{r} 12000V+9000H=120000 \\ 9000V+12000H+9000=120000 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\begin{array}{l} 12V+9H=120,\ldots 16V+12H=120\cdot\frac{4}{3}=160 \\ 9V+12H+9=120,\ldots 9V+12H=120-9=111 \end{array}\Bigg\},\ldots 7V=160-111=49,\ldots V=\tfrac{49}{7}=7;$$

$$\begin{array}{l} 9V+12H=111,\ldots 12V+16H=111\cdot\frac{4}{3}=148 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 12V+9H=120 \end{array}\Bigg\},\ldots 7H=148-120=28,\ldots H=\tfrac{28}{7}=4.$$

Comprob. $12000\cdot 7+9000\cdot 4=129000=9000\cdot 7+12000\cdot 4+9000$.

OBSERVACIONES.

1ª Cuando llevo la primer ecuacion constituyente á la columna lateral la divido de memoria por 1000, porque esta division es muy fácil.

2ª Multiplico esta ecuacion por $\frac{4}{3}$ para tener el mismo coeficiente de H que en la segunda ecuacion constituyente despues de partida por 1000, 3ª *Dispuesta asi la segunda ecuacion constituyente, traslado la cantidad conocida del primer miembro al segundo.*

4ª Comparando las dos ecuaciones preparadas resto de la primera la segunda, con lo que consigo eliminar la incógnita H, y sacar $V=7$.

5ª Practico operaciones semejantes con la segunda y la primera ecuacion constituyente para dar en ambas el mismo coeficiente á V, y haciendo la resta correspondiente, elimino esta incógnita, y obtengo $H=4$.

PROBLEMA VIII. Se han comprado tres caballos: el valor del primero, sumado con la mitad del de los otros dos, compone 25 duros: el segundo, con el tercio de los otros dos, vale 26 duros; y el tercero, con la mitad de los otros dos, importa 29 duros. ¿Cuanto vale cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ del prim.} \\ S \text{ del seg.} \\ T \text{ del terc.} \end{array}\right\} \text{valor: incógn.}; \quad \left.\begin{array}{r} P+\dfrac{S+T}{2}=25 \\ S+\dfrac{P+T}{3}=26 \\ T+\dfrac{P+S}{2}=29 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2P+S+T=50 \\ P+3S+T=78 \end{array}\right\};\ldots\, 2S-P=78-50=28;$$

$$2P + S + T = 50 \;,\ldots\; \left.\begin{array}{r} 4P+2S+2T=100 \\ P+S+2T=58 \end{array}\right\} ,\ldots\; S+3P=100-58=42;$$

$$S+3P=42 \;,\ldots\; \left.\begin{array}{r} 2S+6P=84 \\ 2S-P=28 \end{array}\right\} ,\ldots\; 7P=84-28=56 \;,\ldots\; P=\tfrac{56}{7}=8;$$

$$2S-P=28 \;,\ldots\; \left.\begin{array}{r} S+3P=42 \\ 6S-3P=84 \end{array}\right\} ,\ldots\; 7S=42+84=126 \;,\ldots\; S=\tfrac{126}{7}=18;$$

$$2P+S+T=50,$$

$$T=50-2P-S,$$

$$\left.\begin{array}{r} P=8 \\ S=18 \end{array}\right\} ,\ldots\; T=50-2.8-18\ldots//\ldots T=16.$$

Comprob. $8+\frac{18}{2}+\frac{16}{2}=25;\quad 18+\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=26;\quad 16+\frac{8}{2}+\frac{18}{2}=29.$

PROBLEMA IX. Antonio, Benito y Carlos se ponen á jugar: en la primera partida doblaron Benito y Carlos su puesta, perdiendo Antonio esta ganancia: en la segunda doblaron Antonio y Carlos lo que tenian, perdiendo Benito lo que ganaron; y en la tercera doblaron Antonio y Benito, perdiendo Carlos lo que ganaron. Salieron todos con 16 duros. ¿Con cuantos empezaron á jugar?

x Antonio
y Benito } dinero con que empezaron á jugar: incógnitas;
z Carlos

	Primera Partida.	Segunda.	Tercera.
Antonio	$x-y-z$;	$2x-2y-2z$;	$4x-4y-4z=16$
Benito	$2y$;	$-x+3y-z$;	$-2x+6y-2z=16$
Carlos	$2z$;	$4z$;	$-x-y+7z=16$

Probl.

$$\left.\begin{array}{l} -x+3y-z=\frac{16}{2}=8 \\ x-y-z=\frac{16}{4}=4 \end{array}\right\}, \ldots -2x+4y=8-4=4;$$

$$\left.\begin{array}{r} -x-y+7z=16 \\ x-y-z=4, \ldots 7x-7y-7z=4.7=28 \end{array}\right\}, \ldots 6x-8y=16+28=44;$$

$$\left.\begin{array}{r} 6x-8y=44, \ldots 3x-4y=\frac{44}{2}=22 \\ -2x+4y=4 \end{array}\right\}, \ldots x=22+4 \ldots // \ldots x=26;$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x-4y=22 \\ -2x+4y=4, \ldots -3x+6y=4.\frac{3}{2}=6 \end{array}\right\}, \ldots 2y=22+6=28, \ldots y=\frac{28}{2}=14;$$

$$x-y-z=4,$$

$$z=x-y-4,$$

$$\left.\begin{array}{l} x=26 \\ y=14 \end{array}\right\}, \ldots z=26-14-4 \ldots // \ldots z=8.$$

Comprob. $4(26-14-8)=16$; $6.14-2.26-2.8=16$; $7.8-26-14=16$.

OBSERVACIONES.

1.ª En la primera partida Antonio tuvo que pagar y á Benito y z á Carlos, por lo que le quedó $x-y-z$.

2.ª En la segunda Benito tuvo que satisfacer $x-y-z$ á Antonio y $2z$ á Carlos, por lo que le quedó $2y-x+y+z-2z=-x+3y-z$.

3.ª Y en la tercera Carlos tuvo que pagar á Antonio $2x-2y-2z$ y á Benito $-x+3y-z$, de modo que le quedó $4z-2x+2y+2z+x-3y+z \ldots$ $\ldots=-x-y+7z$.

4.ª Las duplicaciones del dinero de los que ganan son fáciles de entender.

5.ª Ya debemos estar bastante instruidos para comprender la resolucion sin mas esplicacion que la de los símbolos algebráicos.

PROBLEMA X. Un brigadier tiene tres batallones: uno de españoles, otro de franceses y otro de italianos. Quiere asaltar una plaza, y ofrece repartir á la tropa, si se apodera de ella, 2703 doblones, dando tres doblones á cada soldado del batallon que entre primero, y repartiendo el resto con igualdad entre los demas. Hecha la cuenta se ve que, si los españoles entran primero, toca á doblon y medio á cada uno de los demas soldados: si entran primero los franceses, toca á cada uno de los otros á doblon; y si entran primero los italianos, toca á cada uno de los otros á tres cuartos de doblon. ¿Cuantos soldados tiene cada batallon?

$$\left.\begin{array}{l} E \text{ españoles} \\ F \text{ franceses} \\ I \text{ italianos} \end{array}\right\} \text{incógn.;} \qquad \left.\begin{array}{r} 3E+\tfrac{3}{2}F+\tfrac{3}{2}I=2703 \\ E+3F+I=2703 \\ \tfrac{3}{4}E+\tfrac{3}{4}F+3I=2703 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} E+3F+I=2703 \\ E+\tfrac{1}{2}F+\tfrac{1}{2}I=\tfrac{2703}{3}=901\text{, . . . } 2E+F+I=901.2=1802 \end{array}\right\}\text{, . . . } 2F-E=2703-1802=901;$$

$$\left.\begin{array}{r} E+3F+I=2703\text{, . . . } 4E+12F+4I=2703.4=10812 \\ \tfrac{1}{4}E+\tfrac{1}{4}F+I=\tfrac{2703}{3}=901\text{, . . . } E+F+4I=901.4=3604 \end{array}\right\}\text{, . . . } 11F+3E=10812-3604=7208;$$

$$\left.\begin{array}{r} 11F+3E=7208\text{, . . . } 22F+6E=7208.2=14416 \\ 2F-E=901\text{, . . . } 22F-11E=901.11=9911 \end{array}\right\}\text{, . . . } 17E=14416-9911=4505\text{, . . . } E=\tfrac{4505}{17}=265;$$

$$\left.\begin{array}{r} 11F+3E=7208 \\ 2F-E=901\text{, . . . } 6F-3E=901.3=2703 \end{array}\right\}\text{, . . . } 17F=7208+2703=9911\text{, . . . } F=\tfrac{9911}{17}=583;$$

$$\begin{array}{l} \text{. } E+3F+I=2703, \\ \quad I=2703-E-3F, \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} E=265 \\ F=583 \end{array}\right\}\text{, . . . } I=2703-265-3.583 \text{ . . . // . . . } I=689.$$

Comprob. $3.265+\tfrac{3}{2}.583+\tfrac{3}{2}.689=2703$; $3.583+265+689=2703$; $3.689+\tfrac{3}{4}.265+\tfrac{3}{4}.583=2703$.

PROBLEMA XI. Entre 49 personas, en cuyo número hay hombres, mujeres y niños, han gastado 40 reales: cada hombre gastó 4 rs., cada mujer 3, y entre cada cinco niños gastaron 1 real. El número de niños es el cuádruplo de la suma de hombres y mujeres aumentada en una unidad. ¿Cuantos hombres, mujeres y niños habia?

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ Hombres} \\ M \text{ Mujeres} \\ N \text{ Niños} \end{array}\right\} \text{incógn.;} \qquad \left.\begin{array}{r} H+M+N=49 \\ 4H+3M+\tfrac{1}{5}N=40 \\ 4(H+M+1)=N \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} H+M+N=49\text{, . . . } 4H+4M+4N=49.4=196 \\ 4H+4M+4=N\text{, . . . } 4H+4M-N=-4 \end{array}\right\}\text{, . . . } 5N=196+4=200\text{, . . . } N=\frac{200}{5}=40;$$

$$4H+3M+\frac{N}{5}=40,$$

$$4H+3M=40-\frac{N}{5},$$

$$N=40\ ,\ \ldots\ 4H+3M=40-\frac{40}{5}=32\,;$$

$$4H+4M+4=N,$$

$$4H+4M=N-4,$$

$$N=40\ ,\ \ldots\ 4H+4M=40-4=36\,;$$

$$\left.\begin{array}{l}4H+4M=36\\4H+3M=32\end{array}\right\}\ ,\ \ldots\ M=36-32\ \ldots\ /\!/\ \ldots\ M=4\,;$$

$$4H+4M=36\ ,\ \ldots\ \left.\begin{array}{l}4H+3M=32\\3H+3M=36\cdot\tfrac{3}{4}=27\end{array}\right\}\ ,\ \ldots\ H=32-27\ \ldots\ /\!/\ \ldots\ H=5.$$

Comprob. $5+4+40=49$; $4\cdot5+3\cdot4+\frac{1}{5}\cdot40=40$; $4(5+4+1)=40$.

OBSERVACIONES.

1ª Resolvemos esta cuestion por el método *misto* de reducion y sustituciones.

2ª Como, despues de comparadas y preparadas la primera y tercera ecuacion constituyente, logramos eliminar las dos incógnitas H y M, sacamos desde luego $N=40$.

3ª En las primeras derivadas de la segunda y tercera ecuacion constituyente sustituimos este valor de N, con lo que conseguimos eliminar en ellas esta incógnita.

4ª Comparando las dos ecuaciones derivadas, que terminan el segundo y el tercer período, deducimos $M=4$ y $H=5$.

PROBLEMA XII. Tres amigos han puesto á la lotería. Los billetes del primero y del segundo costaron juntos 21 pesetas: los del primero y tercero 24, y los del segundo y tercero 27. ¿Cuanto costó cada billete?

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ del prim.} \\ S \text{ del seg.} \\ T \text{ del terc.} \end{array}\right\} \text{Costo de los bill.: incógn.;} \quad \left.\begin{array}{l} P+S=21 \\ P+T=24 \\ S+T=27 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} P+S=21 \\ P+T=24 \\ S+T=27 \end{array}\right\} , \ldots 2P=21+24-27=18 , \ldots P=\frac{18}{2}=9;$$

$$\left.\begin{array}{l} S+P=21 \\ S+T=27 \\ P+T=24 \end{array}\right\} , \ldots 2S=21+27-24=24 , \ldots S=\frac{24}{2}=12;$$

$$\left.\begin{array}{l} T+P=24 \\ T+S=27 \\ P+S=21 \end{array}\right\} , \ldots 2T=24+27-21=30 , \ldots T=\frac{30}{2}=15.$$

Comprob. $9+12=21$; $9+15=24$; $12+15=27$.

OBSERVACIONES.

1ª Segun manifiesta el mapa se resuelve facilmente esta cuestion sumando dos ecuaciones constituyentes y restando la otra.

2ª A este fin traemos las ecuaciones constituyentes á la columna lateral, poniendo primero las que se han de sumar y despues la que se ha de restar.

3ª Los miembros indicativos de las ecuaciones principales lo dicen todo.

PROBLEMA XIII. *En una villa hay 600 habitantes repartidos en cuatro barrios. En el primer barrio hay doble número que en el cuarto: en el segundo y tercero reunidos hay tantos habitantes como en el primero y cuarto; y el número de habitantes del tercer barrio es los* $\frac{5}{7}$ *del segundo. ¿Cuantos habitantes hay en cada barrio?*

$$\left.\begin{array}{l} P \text{ del primero}\\ S \text{ del segundo}\\ T \text{ del tercero}\\ C \text{ del cuarto}\end{array}\right\}\text{Habit.: incógn.};\qquad \left.\begin{array}{r} P+S+T+C=600\\ P=2C\\ S+T=P+C\\ T=\frac{5}{7}S\end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} S+T=3C\\ S+T+3C=600\;,\ldots\; S+T=600-3C\end{array}\right\},\;\ldots\; 3C=600-3C,$$

$$6C=600\;,\;\ldots\ldots\; C=\frac{600}{6}=100;$$

$$\left.\begin{array}{r} T=\frac{5}{7}S\;,\;\ldots\; S=\frac{7}{5}T\\ S+T=3C\;,\;\ldots\; S=3C-T\end{array}\right\},\;\ldots\;\frac{7}{5}T=3C-T,$$

$$12T=5\cdot3C=15C,$$

$$C=100\;,\;\ldots\; 12T=15\cdot100=1500\;,\;\ldots\; T=\frac{1500}{12}=125;$$

$$S=\frac{7}{5}T,$$

$$T=125\;,\;\ldots\; S=\frac{7}{5}\cdot125\;\ldots\;//\;\ldots\; S=25\cdot7=175;$$

$$P=2C,$$

$$C=100\;,\;\ldots\; P=2\cdot100\;\ldots\;//\;\ldots\; P=200.$$

Comp. $200+175+125+100=600$; $200=2\cdot100$; $175+125=300=100+200$; $125=\frac{5}{7}\cdot175$.

OBSERVACIONES.

1.ª Cuando llevo las ecuaciones constituyentes á la columna lateral, considero, en lugar de cada P, su valor $2C$, cuya operacion se hace de memoria con facilidad.

2.ª Prefiero ordinariamente el sistema misto, porque simplifica mucho el cálculo y le da elegancia, en teniendo tino para elegir las espresiones.

PROBLEMA XIV. Tres sujetos quieren comprar, cada uno para si, una casa que vale a pesos; pero ninguno de ellos tiene bastante dinero. Al primero le falta tanto como la mitad del caudal del segundo: á este tanto como la tercera parte del caudal del primero; y al tercero tanto como la cuarta parte del caudal del primero. Se desea saber el dinero que tenia cada uno.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ caud. del prim.} \\ y \text{ del segundo} \\ z \text{ del tercero} \end{array}\right\} \text{incógn.}; \quad \left.\begin{array}{l} x+\frac{y}{2}=a \\ y+\frac{x}{3}=a \\ z+\frac{x}{4}=a \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$x+\frac{y}{2}=a \;, \quad . \quad . \quad . \quad y=2a-2x;$$

$$y+\frac{x}{3}=a \;, \quad . \quad . \quad . \quad y=a-\frac{x}{3};$$

$$\left.\begin{array}{l} y=a-\frac{x}{3} \\ y=2a-2x \end{array}\right\}, \quad . \quad . \quad . \; a-\frac{x}{3}=2a-2x,$$

$$3a-x=6a-6x,$$

$$5x=(6-3)a=3a \;, \quad . \quad . \quad . \; x=\tfrac{3}{5}a;$$

$$y=2a-2x,$$

$$x=\tfrac{3}{5}a \;, \quad . \quad . \quad . \; y=2a-2.\tfrac{3}{5}a \; . \; . \; . \; // \; . \; . \; . \; y=\tfrac{4}{5}a;$$

$$z+\frac{x}{4}=a,$$
$$z=a-\frac{x}{4},$$

$x=\frac{3}{5}a$, . . . $z=a-\frac{3}{4.5}a \ldots \ldots z=\frac{17}{20}a.$

$$\text{Aplic.: Sea } a=15000, \ldots \begin{cases} x=\frac{3}{5}\times 15000=9000; \\ y=\frac{4}{5}\times 15000=12000; \\ z=\frac{17}{20}\times 15000=12750; \end{cases}$$

$$\text{Comprob.} \begin{cases} 9000+\frac{12000}{2}=15000; \\ 12000+\frac{9000}{3}=15000; \\ 12750+\frac{9000}{4}=15000. \end{cases}$$

PROBLEMA XV. De tres oficiales *A*, *B*, *C* dos *A*, *B* trabajando juntos hacen en 8 dias una obra: *A* y *C* juntos la hacen en 9 dias; y *B*, *C* juntos en 10 dias. ¿En cuantos dias la hará cada uno trabajando solo?

a toda la obra;

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ trab. diar. de } A \\ y \text{ de } B \\ z \text{ de } C \end{array}\right\} \text{incógn.};\quad \left.\begin{array}{l} (x+y)8=a \\ (x+z)9=a \\ (y+z)10=a \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+z=\frac{a}{9} \\ y+z=\frac{a}{10} \end{array}\right\}, \ldots \; x-y=\frac{a}{9}-\frac{a}{10}=\frac{a}{90};$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\frac{a}{8} \\ x-y=\frac{a}{90} \end{array}\right\}, \ldots \; 2x=\frac{a}{8}+\frac{a}{90}=\frac{98}{720}a, \ldots x=\frac{49}{720}a;$$

$$\left.\begin{array}{l} y+x=\frac{a}{8} \\ -y+x=\frac{a}{90} \end{array}\right\}, \ldots \; 2y=\frac{a}{8}-\frac{a}{90}=\frac{82}{720}a, \ldots y=\frac{41}{720}a;$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\dfrac{a}{8} \\ y+z=\dfrac{a}{10} \end{array}\right\},\ \ldots\ x-z=\frac{a}{8}-\frac{a}{10}=\frac{a}{40};$$

$$\left.\begin{array}{l} z+x=\dfrac{a}{9} \\ -z+x=\dfrac{a}{40} \end{array}\right\},\ \ldots\ 2z=\frac{a}{9}-\frac{a}{40}=\frac{31}{360}a,\ldots z=\frac{31}{720}a$$

$$x=\frac{49}{720}a,\ldots\frac{a}{x}=a:\frac{49}{720}a=\frac{720}{49}=14+\frac{34}{49}\text{ dias de trab. de } A;$$

$$y=\frac{41}{720}a,\ldots\frac{a}{y}=a:\frac{41}{720}a=\frac{720}{41}=17+\frac{23}{41}\text{ dias de trab. de } B;$$

$$z=\frac{31}{720}a,\ldots\frac{a}{z}=a:\frac{31}{720}a=\frac{720}{31}=23+\frac{7}{31}\text{ dias de trab. de } C.$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{l} \frac{720}{49}\times\frac{49}{720}a=a=(\frac{49}{720}a+\frac{41}{720}a)8\ ; \\ \frac{720}{41}\times\frac{41}{720}a=a=(\frac{49}{720}a+\frac{31}{720}a)9\ ; \\ \frac{720}{31}\times\frac{31}{720}a=a=(\frac{41}{720}a+\frac{31}{720}a)10. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª. Para resolver este problema no buscamos desde luego los dias en que cada oficial hará solo la obra, sino que investigamos primero el trabajo diario de cada uno ó la obra que hace en un dia, y bajo este concepto formamos la planta segun las condiciones. Luego dividimos la obra total por la parte de ella que hace diariamente cada oficial, y resulta el número de dias que habria de trabajar para hacer solo toda la obra.

2ª. La comprobacion se hace multiplicando la obra diaria de cada uno por sus dias de trabajo, y ha de resultar la obra total como sucede tambien valuando las ecuaciones constituyentes.

PROBLEMA XVI. Tres oficiales A, B, C trabajando juntos hacen una obra g en a dias: A, B, D la hacen juntos en b dias: A, C, D juntos en c dias; y B, C, D juntos en d dias. ¿En cuantos dias la harán los cuatro oficiales trabajando juntos?

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ trab. diar. de } A \\ x \text{ de } B \\ y \text{ de } C \\ z \text{ de } D \end{array}\right\} \text{incógn.}; \quad \left.\begin{array}{l} (u+x+y)a=g \\ (u+x+z)b=g \\ (u+y+z)c=g \\ (x+y+z)d=g \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} u+x+y=\frac{g}{a} \\ u+x+z=\frac{g}{b} \\ u+y+z=\frac{g}{c} \\ x+y+z=\frac{g}{d} \end{array}\right\} ,\ldots 3u+3x+3y+3z=\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d},$$

$$u+x+y+z=\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right),$$

$$\frac{g}{u+x+y+z}=g:\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)\ldots$$

$$\ldots=\frac{3abcd}{bcd+acd+abd+abc}.$$

Comprob. algeb. $\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)\cdot\dfrac{g}{\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)}=g.$

OBSERVACION.

Buscamos la suma del trabajo diario de los cuatro oficiales, que es $u+x+y+z=\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)$, y dividiendo la obra g por aquella suma resulta que $\dfrac{g}{u+x+y+z}\ldots$

$\ldots=g:\tfrac{1}{3}\left(\frac{g}{a}+\frac{g}{b}+\frac{g}{c}+\frac{g}{d}\right)=\dfrac{3abcd}{bcd+acd+abd+abc}$ son los dias en que los cuatro operarios juntos harian la obra.

PROBLEMA XVII. Hallandose acantonados dos ejércitos, y tratandose de ponerlos en movimiento con el fin de entrar en campaña en una misma provincia, distando entre si estos ejércitos 68 leguas, el primero sale tres dias antes que el segundo y anda 6 leguas al dia, y este 4. Se pregunta ¿á qué distancia de la primera ciudad se encontrarán?

$$\left.\begin{array}{ll} x+18 & \text{leg. que anduvo el prim.} \\ z & \text{leg. que anduvo el seg.} \end{array}\right\} \text{incógn.;}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+18+z=68 \;//\; x+z=50 \\ \dfrac{x}{6}=\dfrac{z}{4} \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+z=50\,,\ldots\, 6x+6z=50.6=300 \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{z}{4}=0\,,\ldots\, 4x-6z=0.4.6=0 \end{array}\right\}, \ldots\, 10x=300+0=300\,, \ldots \left\{\begin{array}{r} x=30\,; \\ x+18=48\,; \end{array}\right.$$

$$z=50-x,$$

$$x=30\,,\;\ldots\; z=50-30\;\ldots\;//\;\ldots\; z=20.$$

Comprob. $48+20=68 \;//\; 30+20=50\,;\; \frac{30}{6}=5=\frac{20}{4}.$

OBSERVACIONES.

1ª. En esta cuestion la primera incógnita es propiamente $x+18$, en que hay una parte desconocida y otra conocida, segun viene hecha la pregunta.

2ª. Por esto traducimos primero $x+18+z=68$; pero, á fin de simplificar la planta, ponemos despues con el signo disyuntivo $x+z=50$.

3.ª La segunda ecuacion constituyente $\frac{x}{6}=\frac{z}{4}$ consiste en que las leguas andadas, partidas por las que se andan diariamente, deben dar un cociente en número abstracto, que aqui se aplica á los dias de marcha; y como, despues de haber andado el primer ejército 18 leguas, caminaron ambos el mismo tiempo, resulta dicha ecuacion.

4.ª Parecerá minucioso haber puesto en el miembro indicativo de la primera ecuacion principal $300+0$; pero se ha hecho así para dar á conocer que hemos ejecutado una adicion.

5.ª Esta cuestion podia tener otra pregunta mas, cual es el número de dias, que anduvieron los ejércitos, y que se ve por la resolucion haber sido 8 el primero y 5 el segundo, teniendo aquel 3 dias de anticipacion y 5 de marcha al mismo tiempo que el otro.

PROBLEMA XVIII. Dos correos estan á una distancia d uno de otro: sus velocidades estan designadas por v' y v'': el primero parte h horas antes que el segundo, y se supone que siguen el mismo camino. Se pregunta 1.º ¿cuales son las condiciones necesarias para que se encuentren? 2.º ¿cuanto tiempo pasará antes que esto se haya verificado? y 3.º el espacio corrido por cada uno de ellos en la época de la reunion.

Condiciones para encontrarse.
- 1.º Cuando marchan en el mismo sentido, si el primero va delante y su velocidad es menor que la del segundo.
- 2.º Si, marchando en el mismo sentido, el primero está detrás, y su velocidad, sin ser mayor que la del segundo, es sin embargo bastante grande para que pueda correr la distancia d en el tiempo h.
- 3.º Si los dos van al encuentro el uno del otro, cualesquiera que sean sus velocidades.

t tiempo antes que los dos correos se reunan
E' espacio corrido por el primer correo
E'' espacio corrido por el segundo
} incógn.;

$$tv' + d = (t-h)v'' \quad \text{Probl.}$$

$$(v''-v')t = d + hv'' \;, \quad . \quad . \quad . \quad t = \frac{d+hv''}{v''-v'};$$

$$E' = tv',$$

$$t = \frac{d+hv''}{v''-v'} \;, \quad . \quad . \quad . \quad E' = \frac{d+hv''}{v''-v'} . v' \; . \; . \; . \; // . . . \; E' = \frac{(d+hv'')v'}{v''-v'};$$

$$E'' = (t-h)v'',$$

$$t = \frac{d+hv''}{v''-v'} \;, \quad . \quad . \quad . \quad E'' = \left(\frac{d+hv''}{v''-v'} - h\right)v'' \; . \; . \; . \; // . . . \; E'' = \frac{(d+hv')v''}{v''-v'}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} d = 20; \\ v' = 2; \\ v'' = 3; \\ h = 8; \end{cases}$ $\quad t = \frac{20+8 \cdot 3}{3-2} = 44; \quad E' = \frac{(20+8 \cdot 3)2}{3-2} = 88; \quad E'' = \frac{(20+8 \cdot 2)3}{3-2} = 108.$

$$\text{Comprob. } 88 + 20 = 108 = (44-8)3.$$

OBSERVACIONES.

1ª En el movimiento uniforme el entendimiento percibe desde luego que se corren espacios iguales en tiempos iguales, de modo que los espacios estan en razon de los tiempos. (Vease la LECCION XIII de la *Ideología general*, particularmente los artículos 155 á 157).

Si llamamos a la unidad de tiempo será el espacio e, que se corra en su duracion, la unidad de espacio.

Como no podemos conocer la velocidad ó fuerza de movimiento v sino por su efecto representativo, que es la unidad de espacio e, usamos de v en lugar de e.

La proporcion de tiempos y espacios nos da $A : a :: E : e \ldots$ $\ldots = E . \frac{a}{A} = E : \frac{A}{a}$; pero en la espresion fraccionaria $\frac{A}{a}$ el dividendo y el divisor son de la misma especie y $a = 1$, de consiguiente el cociente de $\frac{A}{1} = A$ representa un numero abstracto, y tenemos $v = e = \frac{E}{A}$, de modo que la velocidad es igual á cualquier espacio dividido por un número abstracto de tantas unidades cuantas tenga el tiempo en que es corrido el espacio. Por este motivo se dice, para abreviar la locucion, que la velocidad es igual al espacio dividido por el tiempo. Asimismo se dice, respecto á $E = vA$, que el espacio es igual á la velocidad multiplicada por el tiempo.

Damos esta esplicacion para que no se estrañe que, siendo v, E, A cantidades heterogéneas ó compuesta cada una de diferente especie de unidades, usemos las espresiones $v = \frac{E}{A}$, $E = vA$ ú otras semejantes.

2ª Como en el problema presente el primer correo camina en el tiempo t el espacio tv', si lleva la delantera d, será $tv' + d$ el espacio, que ha de andar el segundo correo; pero este camina durante $t - h$, porque el otro parte h horas antes; luego, siendo v'' su velocidad, andará el espacio $(t-h)v''$. Por tanto, igualando estas dos espresiones, tendremos $tv'+d=(t-h)v''$ para plantear la cuestion.

3ª Si supusieramos que el primer correo, en vez de estar delante, estaba detrás la misma cantidad, tendriamos que mudar á d su signo, y las ecuaciones resultantes serian

$$t=\frac{hv''-d}{v''-v'},\quad E'=\frac{(hv''-d)v'}{v''-v'},\ \text{y}\ E''=\frac{(hv'-d)v''}{v''-v'}.$$

4ª Cuando el primer correo está detras, y puede andar en h horas la distancia d, resulta

$$hv'=d,\quad E'=\frac{(hv''-d)v'}{v''-v'}=\frac{\left(\frac{d}{v'}v''-d\right)v'}{v''-v'}=\frac{dv''-dv'}{v''-v'}=d,$$

y $E''=\dfrac{(hv'-d)v''}{v''-v'}=\dfrac{(d-d)v''}{v''-v'}=0$; esto es, el primer correo anda la distancia d, y el segundo nada tiene que andar.

5ª En este caso

$$t=\frac{hv''-d}{v''-v'}=\frac{\frac{d}{v'}v''-d}{v''-v'}=\frac{dv''-dv'}{v'}:(v''-v')=\frac{d}{v'}=h,$$

como corresponde.

6ª Cuando los dos correos van á su encuentro, como el primero camina en direccion contraria, su velocidad v' es negativa en todas las ecuaciones, y la distancia d lo es tambien respecto á este correo solamente; de modo que

$$t=\frac{hv''+d}{v''+v'},\quad E'=\frac{-(hv''-d)v'}{v''+v'},\ \text{y}\ E''=\frac{(d-hv')v''}{v''+v'}.$$

7ª Si la velocidad v' del primer correo fuese mayor que la v'' del segundo, teniendo aquel la delantera y partiendo antes, el segundo, lejos de alcanzar al otro, se hallaria cada vez á mayor distancia. En este caso la resolucion manifiesta la imposibilidad del problema, dando valores negativos por los denominadores á las espresiones

$$t=\frac{d+hv''}{-v'+v''},\quad E'=\frac{(d+hv'')v'}{-v'+v''},\quad E''=\frac{(d+hv')v''}{-v'+v''}.$$

8ª Siendo iguales las velocidades, y suponiendo siempre d positiva, los dos correos no podrian encontrarse. Asi lo anuncia el cálculo dando, en virtud de $v''=v'$, resultados de un valor infinito en $t=\frac{d+hv''}{v''-v'}=\frac{d+hv''}{0}=\infty$, $E'=\frac{(d+hv'')v'}{v''-v'}\ldots$

$\ldots=\frac{(d+hv'')v'}{0}=\infty$, $E''=\frac{(d+hv')v''}{0}=\infty$.

9ª Ya sabemos [197] que tales espresiones de valor infinito son un límite á que podemos considerar que nos acercamos, si suponemos que v' vaya aumentando ó v'' disminuyendo, ó bien ambas cosas á la par, de modo que cada vez sea menor la diferencia, sin que jamas se desvanezca, pues no han de llegar á igualarse las velocidades por su aceleracion ó retardacion.

10ª Si suponemos que ambos correos parten del mismo punto al mismo tiempo, y caminan en el mismo sentido con la misma velocidad; entonces $d=0$, $h=0$, $v''=v'$, de consiguiente $t=\frac{d+hv''}{v''-v'}=\frac{0+0.v''}{0}=\frac{0}{0}$, lo que quiere decir que los dos correos caminan siempre juntos, su punto de reunion se verifica en todos los parajes, y el problema queda entonces resuelto con cualquier valor de t, que es [198] una cantidad indeterminada.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1º Dos escribientes han trasladado entre ambos 280 pliegos, trabajando el uno A durante 5 dias; y el otro B por espacio de 8. Los mismos han copiado 288 pliegos trabajando el primero 7 dias y el segundo 6. ¿Cuantos pliegos escribía cada uno diariamente?

Respuesta: cada dia A copiaba 24 pliegos, y B copiaba 20.

2º Si al valor de una alaja, que quiero vender, se añaden 150 pesos resulta un valor triplo de otra alaja, que quiero comprar; y si al valor de esta se añaden los 150 pesos, iguala á la otra. ¿Cuanto vale cada una?

Resp. La alaja, que quiero vender, vale 300 pesos, y la que quiero comprar 150.

3º Un artesano ha trabajado en una casa particular durante 12 dias, ayudandole en los 7 primeros su mujer y su hijo, y han ganado 296 reales. Despues ha trabajado en la misma casa durante 8 dias, de los cuales 5 ha tenido consigo á su mujer y su hijo, y han percibido 200 reales. ¿Cuanto ganaba él cada dia, y cuanto su mujer y su hijo juntos?

Resp. Cada dia ganaba el artesano 20 reales, y la mujer é hijo juntos 8.

4º El mismo artesano ha trabajado en otra casa durante 12 dias, teniendo consigo en los 7 primeros á su mujer y su hijo, que le ocasionaban el gasto de su manutencion, y ha percibido 184 reales. Ha vuelto á trabajar en la misma casa durante 8 dias, manteniendo en 5 de ellos á su mujer y su hijo, y ha tomado 120 reales. ¿Cuanto ganaba cada dia, y cual era el gasto que hacían su mujer é hijo?

Resp. Diariamente ganaba 20 reales, y la mujer é hijo le causaban 8 de gasto.

5º Dos menestrales A y B, trabajando juntos en una misma obra, han ganado 80 reales en 6 dias: otros dos A y C juntos han ganado 108 reales en 9 dias; y los dos B y C juntos han ganado 160 reales en 15 dias. ¿Qué jornal ha sacado cada uno de ellos?

Resp. El jornal de A eran 7 y $\frac{1}{3}$ reales: el de B eran 6; y el de C eran 4 y $\frac{2}{3}$.

6º Tres compañeros A, B, C se reparten una suma de dinero: la parte de A tiene e reales mas que los $\frac{4}{7}$ de la suma de las partes de B y C: la parte de B tiene e reales mas que los $\frac{3}{8}$ de las partes de A y C juntas; y la parte de C tiene e reales mas que los $\frac{2}{9}$ de las partes de A y B juntas. ¿Cuanto monta la parte de cada uno?

Resp. La parte de A eran $5e$: la de B eran $4e$; y la de C eran $3e$.

7º Se entregó la cantidad de 160 reales en pesetas y pesos duros, y el número de los pesos escedía en uno á la mitad del número de las pesetas. ¿Cuantas fueron las pesetas y cuantos los pesos duros?

Resp. 10 pesetas y 6 pesos duros.

2.º Dos [illegible] han trabajado entre ambos [illegible] trabajando el uno [illegible] y el otro [illegible] han sacado [illegible] el primero [illegible] dias y el segundo [illegible] ¿Cuanto ganaba cada uno diariamente?

Respuesta: [illegible]

3.º Si el valor de una alhaja que [illegible] vender [illegible] 150 pesos, resulta un valor [illegible] de otra alhaja que quiero comprar [illegible] el valor de esta [illegible] pesos [illegible] ¿Cuanto vale cada una?

Resp. La alhaja que quiero vender [illegible] y la que quiero comprar 150.

[illegible] 12 dias, ayudandole en los 5 primeros [illegible] en otra casa durante 8 dias [illegible] á su mujer y su hijo [illegible] ¿Cuanto ganaba él cada dia, y cuanto [illegible] hijo?

Resp. [illegible] é hijo [illegible]

4.º El mismo artesano ha trabajado en otra casa durante 12 dias, teniendo consigo en los 5 primeros á su mujer y á su hijo [illegible] el valor de su manutencion, y ha percibido [illegible] reales. Ha vuelto á trabajar en la misma casa durante 8 dias, manteniendo en 4 de ellos á su mujer y su hijo, y ha cobrado [illegible] reales. ¿Cuanto ganaba cada dia, y cuál era el gasto que hacian su mujer é hijo?

Resp. [illegible] ganaba [illegible] reales, y la mujer é hijo le causaban [illegible] de gasto.

PROBLEMAS.

COLECCION TERCERA.

Indeterminados de Primer Grado.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la LECCION X.

PROBLEMA I. Dividir el número 117 en dos partes tales que la una sea divisible por 7 y la otra por 19.

$\left.\begin{array}{l} 7x \text{ primera} \\ 19y \text{ segunda} \end{array}\right\}$ partes : incógn.;

$7x+19y=117$ Probl.

$$x=\frac{117-19y}{7}=16-2y+\frac{5-5y}{7};$$

$$\frac{1-y}{7}=-E, \quad . \quad . \quad . \quad y=7E+1;$$

$$x=\frac{117-19y}{7},$$

$$y=7E+1, \quad . \quad . \quad . \quad x=\frac{117-19(7E+1)}{7} \quad . \quad . \quad . \; // \; . \quad . \quad . \quad x=14-19E.$$

$E=0$ // 1 // &c. // -1 // $-$&c.

$7x=7(14-19E)=98$ // -35 // $-$&c. // 231 // &c.

$19y=19(7E+1)=19$ // 152 // &c. // -114 // $-$&c.

Comprob. $98+19=117$; $\frac{98}{7}=14$; $\frac{19}{19}=1$.

OBSERVACIONES.

1.ª Segun viene propuesto el problema cada parte debe ser un múltiplo de su divisor, y así espresamos la una por $7x$ y la otra por $19y$.

2.ª Hecha la plantificacion despejo la incógnita, que tiene menor coeficiente, y saco los enteros del segundo miembro.

3.ª Como me resulta el quebrado $\frac{5-5y}{7}$, que debe ser un entero, lo será tambien su quinta parte, por lo que hago $\frac{1-y}{7}=-E$, introduciendo una variable *intermedia* á la cual doy el mismo signo de la incógnita.

4.ª Averiguado el valor de y en enteros lo sustituyo en el de x, con lo que obtengo esta incógnita en espresion de E sin quebrados.

5ª Ya resuelta la cuestion voy dando á la variable E valores sucesivos desde $E=0$; pero bien pronto veo que la única solucion en números enteros y positivos es esta en que $7x=98$; $19y=19$.

6ª Pudieramos haber planteado el problema con una sola incógnita, suponiendo $7x$ la primera parte y $117-7x$ la segunda, de esta manera:

$$\frac{117-7x}{19}=E,$$

$$x=\frac{117-19E}{7}=16-2E+\frac{5-5E}{7};$$

$$\frac{1-E}{7}=-E', \quad .\quad .\quad .\quad E=7E'+1;$$

$$x=\frac{117-19E}{7},$$

$$E=7E'+1, \quad .\quad .\quad . x=\frac{117-19(7E'+1)}{7} \dots // \dots x=14-19E'.$$

Pero nada se consigue con esta simplificacion de una sola incógnita, porque hay entonces que introducir dos variables.

PROBLEMA II. Dividir el número 100 en dos partes tales que partiendo la una por 5 deje el residuo 2, y partiendo la otra por 7 deje el residuo 4.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+2 \text{ una parte} \\ 7z+4 \text{ otra} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$5x+2+7z+4=100 \text{ Probl.}$$

$$5x=100-2-4-7z=94-7z,$$

$$x=\frac{94-7z}{5}=18-z+\frac{4-2z}{5};$$

$$\frac{2-z}{5}=-E \;,\; \ldots \quad z=5E+2;$$

$$x=\frac{94-7z}{5},$$

$$z=5E+2\;,\;\ldots\; x=\frac{94-7(5E+2)}{5}\;\ldots/\!/\ldots\; x=16-7E.$$

$$E=0\;/\!/\;1\;/\!/\;2;$$

$$5x+2=82-35E=82\;/\!/\;47\;/\!/\;12;$$

$$7z+4=35E+18=18\;/\!/\;53\;/\!/\;88.$$

OBSERVACIONES.

1ª Con la division del quebrado $\frac{4-2z}{5}$ por 2 se evita la introducion de segunda variable intermedia.

2ª Cuando en las valuaciones llegamos á $E=3$ sale $x=16-7E=16-7.3=-5$; de consiguiente no hay en números enteros y positivos mas soluciones que las tres figuradas al fin.

3ª La comprobacion se hace á un golpe de vista.

PROBLEMA III. Teniendo guardados 100 cartuchos entre dos soldados, dice el uno al otro: si cuento mis cartuchos de 8 en 8 me sobran 7, y el otro le responde: si yo cuento los mios de 10 en 10 me sobran tambien 7. ¿Cuantos tenia cada uno?

$$\left.\begin{array}{l}8x+7 \text{ cart. del } 1^{\circ}\\ 10z+7 \text{ cart. del } 2^{\circ}\end{array}\right\}\text{ incógn.};$$

$$8x+7+10z+7=100 \text{ Probl.}$$

$$8x=100-14-10z=86-10z,$$

$$x=\frac{86-10z}{8}=10-z+\frac{3-z}{4};$$

$$\frac{3-z}{4}=-E \;,\; \ldots \quad z=4E+3;$$

$$x = 10 - z + \frac{3-z}{4},$$

$$z = 4E + 3, \quad \ldots \quad x = 10 - 4E - 3 - E \ldots // \ldots x = 7 - 5E.$$

$$E = 0 \; // \; 1;$$

$$8x + 7 = 63 - 40E = 63 \; // \; 23;$$

$$10z + 7 = 40E + 37 = 37 \; // \; 77.$$

OBSERVACION.

Esta cuestion no tiene mas soluciones que las dos estampadas al pie, porque haciendo $E = 2$ resulta $x = 7 - 5E \ldots \ldots = 7 - 5 \cdot 2 = -3$.

PROBLEMA IV. Dada una fraccion como $\frac{58}{77}$, cuyo denominador sea el producto de dos números primos entre si, descomponerla en dos fracciones, cuyos denominadores sean estos factores.

$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$ numeradores: incógn.;

$$\frac{58}{77} = \frac{x}{11} + \frac{y}{7} \text{ Probl.}$$

$$7x + 11y = 58,$$

$$x = \frac{58 - 11y}{7} = 8 - y + \frac{2 - 4y}{7};$$

$$\frac{1 - 2y}{7} = -E,$$

$$y = \frac{7E + 1}{2} = 3E + \frac{E + 1}{2};$$

$$\frac{E + 1}{2} = E', \quad \ldots \quad E = 2E' - 1;$$

$$y = \frac{7E + 1}{2},$$

$$E = 2E' - 1, \ldots y = \frac{7(2E' - 1) + 1}{2} = \frac{14E' - 6}{2} \ldots // \ldots y = 7E' - 3;$$

$$x = \frac{58 - 11y}{7},$$

$$y = 7E' - 3, \therefore x = \frac{58 - 11(7E' - 3)}{7} = \frac{91 - 77E'}{7} \dots // \dots x = 13 - 11E'.$$

$$E' = \quad 0 \;//\; 1 \;//\; 2 \;//\; \&c. \;//\; -1 \;//\; -2 \;//\; -3 \;//\; -\&c.;$$
$$x = 13 - 11E' = 13 \;//\; 2 \;//\; -9 \;//\; -\&c. \;//\; 24 \;//\; 35 \;//\; 46 \;//\; \&c.;$$
$$y = 7E' - 3 = -3 \;//\; 4 \;//\; 11 \;//\; \&c. \;//\; -10 \;//\; -17 \;//\; -24 \;//\; -\&c.$$

Comprob. $\frac{2}{11} + \frac{4}{7} = \frac{14 + 44}{77} = \frac{58}{77}$.

OBSERVACIONES.

1ª Como en la derivacion del segundo período resulta un quebrado con la variable intermedia E, necesitamos introducir otra variable E' para continuar las operaciones.

2ª Dando desde cero valores positivos y negativos á la variable E' saco los valores de x y de y que se ven al pie de la resolucion; pero, si limitamos la cuestion á enteros positivos, no hay mas solucion que $x = 2$, $y = 4$, esto es, $\frac{2}{11} + \frac{4}{7} = \frac{58}{77}$, como dice la comprobacion.

PROBLEMA V. Hallar un número tal que sea divisible por 7; pero que, si se le parte por 13, deje el residuo 4. N núm. incógn.;

$$N = 7x = 13z + 4 \text{ Probl.}$$

$$x = \frac{13z + 4}{7} = z + \frac{6z + 4}{7};$$

$$\frac{3z + 2}{7} = E,$$

$$z = \frac{7E - 2}{3} = 2E + \frac{E - 2}{3};$$

$$\frac{E - 2}{3} = E', \quad \therefore \quad E = 3E' + 2;$$

$$z = \frac{7E-2}{3},$$

$$E = 3E'+2, \ldots z = \frac{7(3E'+2)-2}{3} \ldots // \ldots z = 7E'+4;$$

$$N = 13z+4,$$

$$z = 7E'+4, \ldots N = 13(7E'+4)+4 \ldots // \ldots N = 91E'+56.$$

OBSERVACIONES.

1ª No hemos sacado el valor de x, porque no es necesario para obtener el número pedido; pero, si quisieramos hallarlo por via de comprobacion, tendriamos

$$x = \frac{13z+4}{7},$$

$$z = 7E'+4, \ldots x = \frac{13(7E'+4)+4}{7} = 13E'+8;$$

$$N = 7x = 7(13E'+8) = 91E'+56.$$

2ª Este problema tiene una infinidad de soluciones, siendo la primera, por la suposicion de $E'=0$, el primer término $N=56$ de una progresion por equidiferencia, cuya razon es 91; de modo que cada término de esta progresion resuelve el problema.

3ª Como los problemas indeterminados de primer grado se resuelven [96] practicando la misma operacion, que se haria para buscar el mayor divisor comun entre los coeficientes de las incógnitas, suponemos [97] los coeficientes enteros respectivamente iguales á A, B, C, &c., al paso que hacemos los quebrados residuos iguales á E, E', E'', &c. Bajo este concepto $x=Az+E$, $z=BE+E'$, &c., y en la última ecuacion ponemos, en lugar de nueva variable, la cantidad conocida con el mismo signo que en la planta si estas ecuaciones son en número impar, y con signo contrario si son en número par, á causa de la alternativa de los signos.

Ejecutando la operacion indicada tendremos $\begin{array}{r|l|l|l} 13 & A=1 & & \\ 6 & 7 & B=1 & \\ & 1 & 6 & C=6 \\ & & . & 1 \end{array}$

de que resulta $\left\{\begin{array}{l} E=CE'+4=6E'+4; \\ z=BE+E'=1(6E'+4)+E'=7E'+4; \\ x=Az+E=1(7E'+4)+6E'+4=13E'+8; \end{array}\right.$

como en la resolucion anterior.

PROBLEMA VI. Hallar un número tal que dividido por 6 deje el residuo 2, y dividido por 13 deje el residuo 3.

N núm. incógn.;

$$N=6x+2=13z+3 \text{ Probl.}$$

$$6x=13z+3-2=13z+1,$$

$$x=\frac{13z+1}{6}=2z+\frac{z+1}{6};$$

$$\frac{z+1}{6}=E \quad , \quad . \quad . \quad . \quad z=6E-1;$$

$$N=13z+3,$$

$$z=6E-1, \quad . \quad . \quad . \quad N=13(6E-1)+3 \ldots // \ldots N=78E-10.$$

OBSERVACIONES.

1ª Resolvamos tambien esta cuestion por el método del mayor divisor comun: $x=Az+E$; $z=BE-1$;

$$\left.\begin{array}{r|c|c|c} 13 & A=2 & B=6 & \\ & 6 & 1 & 0 \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} z=BE-1=6E-1; \\ x=Az+E=2(6E-1)+E=13E-2; \\ N=6x+2=6(13E-2)+2=78E-10. \end{array}\right.$$

2ª En la progresion de equidiferencia, que forman las soluciones de este problema, el primer término es $N=78E-10\ldots$ $\ldots=78\times1-10=68$, y la razon es 78.

PROBLEMA VII. Quebraron á una mujer cierto número de huevos, que traia al mercado, y queriendo saber cuantos eran para pagarselos, solo se acordó de que habia mas de 200 y menos de 300, y de que, habiendolos contado en su casa de 3 en 3, salian cabales: contandolos 7 á 7 le sobraba 1; y contandolos 10 á 10 le sobraban 6. ¿Cuantos eran?

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ número de huevos} \\ \left.\begin{array}{l} x \text{ contados } 3 \text{ á } 3 \\ z \text{ contados } 7 \text{ á } 7 \\ u \text{ contados } 10 \text{ á } 10 \end{array}\right\} \text{núm. de veces} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$N = 3x = 7z + 1 = 10u + 6 \quad \text{Probl.}$$

$$7z + 1 = 10u + 6,$$

$$z = \frac{10u + 5}{7} = u + \frac{3u + 5}{7};$$

$$\frac{3u + 5}{7} = E,$$

$$u = \frac{7E - 5}{3} = 2E - 1 + \frac{E - 2}{3};$$

$$\frac{E - 2}{3} = E', \quad . \quad . \quad . \quad E = 3E' + 2;$$

$$u = \frac{7E - 5}{3},$$

$$E = 3E' + 2, \; . \; . \; . \; u = \frac{7(3E' + 2) - 5}{3} \; . \; . \; . \; // \; . \; . \; . \; u = 7E' + 3;$$

$$3x = 10u + 6,$$

$$u = 7E' + 3, \; . \; . \; . \; 3x = 10(7E' + 3) + 6 = 70E' + 36,$$

$$x = \frac{70E' + 36}{3} = 23E' + 12 + \frac{E'}{3};$$

$$\frac{E'}{3} = E'', \quad . \quad . \quad . \quad E' = 3E'';$$

$$x=\frac{70E'}{3}+12,$$

$$E'=3E'' \;,\; \ldots \; x=\frac{70}{3}.3E''+12 \; \ldots \; // \; \ldots \; x=70E''+12;$$

$$N=3x,$$

$$x=70E''+12,\ldots N=3(70E''+12)\ldots // \ldots N=210E''+36.$$

$$\left.\begin{array}{l} E=0 \;//\; 1 \;//\; 2 \;//\; 3 \;//\; 4 \;//\; \&c. \\ N=36 \;//\; 246 \;//\; 456 \;//\; 666 \;//\; 876 \;//\; \&c. \end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l} 246>200; \\ 246<300. \end{array}\right.$$

Comprob. $246=3.82=7.35+1=10.24+6.$

OBSERVACIONES.

1ª Principiando por la ecuacion $7z+1=10u+6$, saco el valor de u en la segunda indeterminada ausiliar E'.

2ª Sigo por la ecuacion $3x=10u+6$, en que sustituyo el valor de $u=7E'+3$, de modo que las espresiones $3x$, $7z+1$, $10u+6$ quedan combinadas entre si.

3ª Sacado el valor de x en la tercera variable intermedia E'', tenemos en su triplo el número que se busca, esto es, $N=3x=3(70E''+12)=210E''+36$.

4ª Aunque esta cuestion se presenta y resuelve como indeterminada, la condicion de que los huevos eran mas de 200 y menos de 300, determina la cantidad de 246.

5ª Tambien puede resolverse este problema del modo siguiente:

$$3x=7z+1,$$

$$x=\frac{7z+1}{3}=2z+\frac{z+1}{3};$$

$$\frac{z+1}{3}=E, \quad \ldots \quad z=3E-1;$$

$$3x=10u+6,$$

$$x=\frac{10u+6}{3}=3u+2+\frac{u}{3};$$

$$\frac{u}{3}=E' \quad , \quad . \quad . \quad . \quad u=3E' ;$$

$$\left.\begin{array}{l} N=7z+1=7(3E-1)+1=21E-6 \\ N=10u+6=10 \cdot 3E'+6=30E'+6 \end{array}\right\}, \ldots 21E-6=30E'+6 ,$$

$$7E=10E'+4 ,$$

$$E=\frac{10E'+4}{7}=E'+\frac{3E'+4}{7} ;$$

$$\frac{3E'+4}{7}=E'' ,$$

$$E'=\frac{7E''-4}{3}=2E''-1+\frac{E''-1}{3} ;$$

$$\frac{E''-1}{3}=E''' \quad , \quad . \quad . \quad . \quad E''=3E'''+1 ;$$

$$E'=\frac{7E''-4}{3} ,$$

$$E''=3E'''+1 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad E'=\frac{7(3E'''+1)-4}{3} , \ldots E'=7E'''+1 ;$$

$$u=3E' ,$$

$$E'=7E'''+1 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad u=3(7E'''+1) \ldots // \ldots u=21E'''+3 ;$$

$$N=10u+6 ,$$

$$u=21E'''+3 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad N=10(21E'''+3)+6 \ldots // \ldots N=210E'''+36 .$$

PROBLEMA VIII. Buscar un número, que dividido por 2 dé 1 de resto, dividido por 3 dé 2, y dividido por 5 dé 3.

N núm. : incógn. ; $N = 2x+1 = 3z+2 = 5u+3$ Probl.

$$2x = 3z+1,$$

$$x = \frac{3z+1}{2} = z + \frac{z+1}{2};$$

$$\frac{z+1}{2} = E \quad , \quad . \quad . \quad . \quad z = 2E-1;$$

$$5u = 3z-1,$$

$$z = 2E-1 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad 5u = 3(2E-1)-1 = 6E-4,$$

$$u = \frac{6E-4}{5} = E + \frac{E-4}{5};$$

$$\frac{E-4}{5} = E' \quad , \quad . \quad . \quad . \quad E = 5E'+4;$$

$$z = 2E-1,$$

$$E = 5E'+4 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad z = 2(5E'+4)-1 \ldots // \ldots z = 10E'+7;$$

$$N = 3z+2,$$

$$z = 10E'+7 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad N = 3(10E'+7)+2 \ldots // \ldots N = 30E'+23.$$

$$E' = 0 \;//\; 1 \;//\; 2 \;//\; 3 \;//\; 4 \;//\; \&c.$$

$$N = 30E'+23 = 23 \;//\; 53 \;//\; 83 \;//\; 113 \;//\; 143 \;//\; \&c.$$

OBSERVACIONES.

1ª Cuando principio, calculando con la ecuacion constituyente $2x+1=3z+2$, la transcribo en la columna central, simplificandola con restar de memoria una unidad de cada miembro; porque conviene ejercitarse en las operaciones, que se hacen á golpe de vista.

2ª Para trabajar con la ecuacion constituyente $5u+3 \ldots$ $\ldots = 3z+2$, tambien la simplifico de memoria, trayendola á la columna central en $5u = 3z-1$.

3ª Luego sustituyo en la primer resultante $z=2E-1$ el valor hallado de E, con lo que saco $z=10E'+7$, cuyo triplo, añadiendole 2, me da el número que busco.

PROBLEMA IX. Se ha comprado una librería compuesta de 1000 volúmenes en 2190 duros. Los de á folio se han vendido á 6 duros, los de en 4º á 3 duros, y los en 8º á 30 reales. ¿Cuantos volúmenes habia de cada tamaño?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ de á folio} \\ y \text{ en cuarto} \\ z \text{ en octavo} \end{array}\right\} \text{vol. incógn.} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1000 \\ 6x+3y+\tfrac{3}{2}z=2190 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y+z=2190.\tfrac{2}{3}=1460 \\ x+y+z=1000 \end{array}\right\}, \; . \; . \; . \; 3x+y=1460-1000=460 \;, \; . \; . \; . \; y=460-3x;$$

$$z=1000-y-x,$$

$$y=460-3x \;, \; . \; . \; . \; z=1000-460+3x-x \ldots // \ldots z=540+2x.$$

$$\begin{array}{rl} x= & 1 \;//\; 2 \;//\; 3 \;//\; 4 \;//\; \text{\&c.} \ldots\ldots //153; \\ y=460-3x= & 457 \;//\; 454 \;//\; 451 \;//\; 448 \;//\; \text{\&c.} \ldots\ldots //\; 1; \\ z=540+2x= & 542 \;//\; 544 \;//\; 546 \;//\; 548 \;//\; \text{\&c.} \ldots\ldots //846. \end{array}$$

Comprob. $3+451+546=1000$; $6.3+3.451+\tfrac{3}{2}.546=2190$.

OBSERVACIONES.

1ª Llevo la segunda ecuacion constituyente á la columna lateral, multiplicandola de memoria por $\tfrac{2}{3}$, como manifiesta el miembro indicativo.

2ª Poniendo debajo la primera ecuacion constituyente, elimino por sustraccion la z.

3ª Traigo á la columna central el valor de z, haciendo de memoria la transposicion de términos de la primera ecuacion constituyente.

4ª Con la sustitucion del valor de y saco el de z.

5ª En este problema no se necesita el ausilio de variables intermedias, porque, presentandose x, y, z en forma de enteros, no hay mas que dar valores á x.

6ª Es preciso que $x < 154$, porque $x = 154$ daria

$$y = 460 - 3x = 460 - 3 \times 154 = -2;$$

de consiguiente el límite es $x = 153$.

PROBLEMA X. Un posadero ha cobrado 20 duros de varias personas; 4 duros de cada amo, 2 de cada criado y $2\frac{1}{2}$ por cada caballo. ¿Cuantos amos, criados y caballos habia?

$\left.\begin{array}{l} x \text{ amos} \\ y \text{ criados} \\ z \text{ caballos} \end{array}\right\}$ incógn.;

$$4x + 2y + \tfrac{5}{2}z = 20 \text{ Probl.}$$

$$8x + 4y + 5z = 40,$$

$$8x + 4y = 40 - 5z,$$

Supongo $z = 4$, . . . $8x + 4y = 40 - 5 \cdot 4 = 20$,

$$2x + y = \tfrac{20}{4} = 5, \quad \ldots \; y = 5 - 2x.$$

$$x = 1 \; // \; 2;$$

$$y = 5 - 2x = 3 \; // \; 1;$$

$$z = 4 \; , \; 4.$$

OBSERVACIONES.

1ª Como no tenemos mas que una ecuacion con tres incógnitas, se da á dos de estas los diferentes valores arbitrarios que pueden admitir.

2ª Duplico la ecuacion constituyente para desvanecer el quebrado, y como en la derivada $8x+4y+5z=40$ todos los términos, escepto $5z$, son divisibles por 4, veo que es preciso que z sea 4 ó un múltiplo suyo para que haya igualdad.

3.ª Supongo, pues, $z=4$, y la ecuacion resultante $y=5-2x$ solo tiene dos soluciones, porque ha de ser $x<3$.

4.ª Tampoco puede ser $z>4$, porque, como múltiplo de este valor, sería el siguiente $z=8$, de que resultaria $8x+4y=40-5z=40-5.8=0$, lo cual sería absurdo.

5.ª Hubo, por tanto, un amo, tres criados y cuatro caballos; ó bien dos amos, un criado y cuatro caballos.

PROBLEMA XI. ¿De cuantas maneras se pueden pagar 19 duros con columnarias, escudos y ducados?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ column.} \\ y \text{ esc.} \\ z \text{ duc.} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$5x+10y+11z=380 \text{ Probl.}$$

$$5x=380-10y-11z,$$

$$x=\frac{380-10y-11z}{5}=76-2y-\tfrac{11}{5}z.$$

$z=5,\ 5,\ 5,\ 5, \ldots\ldots 5;$ $z=10,\ 10,\ 10,\ 10, \ldots\ldots 10;$
$y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //$&c.$\ldots//32;$ $y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //$&c.$\ldots//26;$
$x=63//61//59//$&c.$\ldots//\ 1;$ $x=52//50//48//$&c.$\ldots//\ 2;$

$z=15,\ 15,\ 15,\ 15, \ldots\ldots 15;$ $z=20,\ 20,\ 20,\ 20, \ldots\ldots 20;$
$y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //$&c.$\ldots//21;$ $y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //$&c.$\ldots//15;$
$x=41//39//37//$&c.$\ldots//\ 1;$ $x=30//28//26//$&c.$\ldots//\ 2;$

$z=25,\ 25,\ 25,\ 25, \ldots\ldots 25;$ $z=30,\ 30,\ 30,\ 30;$
$y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //$&c.$\ldots//10;$ $y=1\ //\ 2\ //\ 3\ //\ 4;$
$x=19//17//15//$&c.$\ldots//\ 1;$ $x=8\ //\ 6\ //\ 4\ //\ 2.$

OBSERVACIONES.

1ª En la ecuacion final vemos que z ha de ser un múltiplo de 5 para que x sea un entero.

2ª Cada valor de z da una coleccion de soluciones, atribuyendo á y el valor de los números naturales desde la unidad hasta donde permite la ecuacion final, y los valores de x son determinados por la valuacion arbitraria de las otras dos incógnitas.

3ª No puede ser $z>30$, porque en este caso $z=35$ daria $x=76-2y-\frac{11}{5}.z=76-2.1-11.7=-3$.

4ª En la primera coleccion de soluciones no puede ser $y>32$, porque $y=33$ da $x=76-2y-\frac{11}{5}z=76-2.33-\frac{11}{5}.5=-1$.

5ª Por la misma causa en la segunda coleccion solo hay 26 soluciones, en la tercera 21, en la cuarta 15, en la quinta 10 y en la sesta 4; componiendo en todo 108 soluciones.

6ª En cada coleccion, despues de sacado el primer valor de x, forman los demas una progresion descendente de equidiferencia, cuya razon es 2, hasta acabar en 1 en las colecciones de número impar, y en 2 en las de número par.

PROBLEMA XII. Pagar 2000 pesetas con paños de dos especies, uno de á 9 pesetas la vara y otro de á 13.

$\left.\begin{array}{l} x \text{ de inf. calidad} \\ z \text{ de superior} \end{array}\right\}$ var. de paño: incógn.;

$$9x+13z=2000 \text{ Probl.}$$

$$9x=2000-13z,$$

$$x=\frac{2000-13z}{9}=222-z+\frac{2-4z}{9};$$

$$\frac{1-2z}{9}=-E,$$

$$2z=9E+1,$$

$$z=\frac{9E+1}{2}=4E+\frac{E+1}{2};$$

$$\frac{E+1}{2}=E', \quad . \quad . \quad . \quad E=2E'-1;$$

$$z=\frac{9E+1}{2},$$

$$E=2E'-1, \ldots z=\frac{9(2E'-1)+1}{2} \ldots // \ldots z=9E'-4;$$

$$x=\frac{2000-13z}{9},$$

$$z=9E'-4, \ldots x=\frac{2000-13(9E'-4)}{9} \ldots // \ldots x=228-13E'.$$

$$E'= 1 \;//\; 2 \;//\; 3 \;//\; \&c. \ldots.. \;//\; 17;$$

$$x=228-13E'=215 \;//\; 202 \;//\; 189 \;//\; \&c. \ldots.. \;//\; 7;$$

$$z=9E'-4 = 5 \;//\; 14 \;//\; 23 \;//\; \&c. \ldots.. \;//\; 149.$$

PROBLEMA XIII. Un negociante ha pagado pesetas de 5 reales con ducados de á 11, y ha dado 15 reales mas. ¿Cuantas son las pesetas y los ducados?

P pesetas } incógn.;
D ducados }

$$5P=11D-15 \text{ Probl.}$$

$$P=\frac{11D-15}{5}=-3+\tfrac{11}{5}D, \ldots \begin{cases} P=-3+11E; \\ D=5E. \end{cases}$$

$$E= 1 \;//\; 2 \;//\; 3 \;//\; \&c.$$

$$P=11E-3= 8 \;//\; 19 \;//\; 30 \;//\; \&c.$$

$$D= 5E = 5 \;//\; 10 \;//\; 15 \;//\; \&c.$$

OBSERVACION.

Como en la derivacion el numerador y denominador del coeficiente $\frac{11}{5}$ son números primeros, es claro que D ha de ser igual al denominador ó un múltiplo suyo, esto es, $D=5E$.

PROBLEMA XIV. Componer 50 reales con monedas de 4 y de 5 reales.

$$\left.\begin{matrix} x \text{ mon. de } 4 \\ z \text{ mon. de } 5 \end{matrix}\right\} \text{incógn.;} \qquad 4x+5z=50 \text{ Probl.}$$

$$x=\frac{50-5z}{4}=12-z+\frac{2-z}{4};$$

$$\frac{2-z}{4}=-E\ , \quad . \quad . \quad . \quad z=4E+2;$$

$$x=\frac{50-5z}{4},$$

$$z=4E+2\ , \ldots x=\frac{50-5(4E+2)}{4}\ldots//\ldots x=10-5E.$$

$$E=0 \ // \ 1;$$

$$x=10-5E=10 \ // \ 5;$$

$$z=4E+2=2 \ // \ 6.$$

PROBLEMA XV. Varias personas van á merendar á escote, pagando cada hombre 25 reales y cada mujer 16: al ajustar la cuenta se halla que el gasto de todas las mujeres juntas escede al de todos los hombres en un real. ¿Cuantos eran los hombres y cuantas las mujeres?

$$\left.\begin{matrix} h \text{ núm. de homb.} \\ m \text{ núm. de muj.} \end{matrix}\right\} \text{incógn.;}$$

$$16m=25h+1 \text{ Probl.}$$

$$m = \frac{25h+1}{16} = h + \frac{9h+1}{16};$$

$$\frac{9h+1}{16} = E,$$

$$h = \frac{16E-1}{9} = E + \frac{7E-1}{9};$$

$$\frac{7E-1}{9} = E',$$

$$E = \frac{9E'+1}{7} = E' + \frac{2E'+1}{7};$$

$$\frac{2E'+1}{7} = E'',$$

$$E' = \frac{7E''-1}{2} = 3E'' + \frac{E''-1}{2};$$

$$\frac{E''-1}{2} = E''', \quad \ldots \quad E'' = 2E'''+1;$$

$$E' = 3E'' + \frac{E''-1}{2},$$

$$E'' = 2E'''+1, \quad \ldots \quad E' = 3(2E'''+1)+E''' \ldots // \ldots E' = 7E'''+3;$$

$$E = \frac{9E'+1}{7},$$

$$E' = 7E'''+3, \quad \ldots \quad E = \frac{9(7E'''+3)+1}{7} \ldots // \ldots E = 9E'''+4;$$

$$h = \frac{16E-1}{9},$$

$$E = 9E'''+4, \quad \ldots \quad h = \frac{16(9E'''+4)-1}{9} \ldots // \ldots h = 16E'''+7;$$

$$m = \frac{25h+1}{16},$$

$$h = 16E'''+7, \quad \ldots \quad m = \frac{25(16E'''+7)+1}{16} \ldots // \ldots m = 25E'''+11.$$

$$\begin{aligned}
\text{E}''' &= 0 \;//\; 1 \;//\; 2 \;//\; \text{\&c.}\\
h = 16\text{E}''' + 7 &= 7 \;//\; 23 \;//\; 39 \;//\; \text{\&c.}\\
m = 25\text{E}''' + 11 &= 11 \;//\; 36 \;//\; 61 \;//\; \text{\&c.}
\end{aligned}$$

OBSERVACION.

Resolvamos asimismo esta cuestion por el método del mayor divisor comun:

$$m = \text{A}h + \text{E},\quad h = \text{BE} + \text{E}',\quad \text{E} = \text{CE}' + \text{E}'',\quad \text{E}' = \text{GE}'' + \text{E}''',\quad \text{E}'' = \text{HE}''' + 1;$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & A=1 & B=1 & C=1 & G=3 & H=2 & \\
\underline{25} & \underline{16} & \underline{9} & \underline{7} & \underline{2} & \underline{1} & \underline{0}
\end{array}\Bigg\}, \ldots \left\{\begin{aligned}
\text{E}'' &= \text{HE}''' + 1 = 2\text{E}''' + 1;\\
\text{E}' &= \text{GE}'' + \text{E}''' = 3(2\text{E}''' + 1) + \text{E}''' = 7\text{E}''' + 3;\\
\text{E} &= \text{CE}' + \text{E}'' = 1(7\text{E}''' + 3) + 2\text{E}''' + 1 = 9\text{E}''' + 4;\\
h &= \text{BE} + \text{E}' = 1(9\text{E}''' + 4) + 7\text{E}''' + 3 = 16\text{E}''' + 7;\\
m &= \text{A}h + \text{E} = 1(16\text{E}''' + 7) + 9\text{E}''' + 4 = 25\text{E}''' + 11.
\end{aligned}\right.$$

PROBLEMA XVI. Un chalan compra caballos y bueyes: por cada caballo da 31 doblones, y 20 doblones por cada buey: al ajustar su cuenta halla que los bueyes le han costado 7 doblones mas que los caballos. ¿Cuantos bueyes compró y cuantos caballos?

$\left.\begin{array}{l} c \text{ núm. de caballos} \\ b \text{ núm. de bueyes} \end{array}\right\}$ incógn.; $\quad 20b = 31c + 7$ Probl.

$$b = \frac{31c+7}{20} = c + \frac{11c+7}{20};$$

$$\frac{11c+7}{20}=E,$$

$$c=\frac{20E-7}{11}=E+\frac{9E-7}{11};$$

$$\frac{9E-7}{11}=E',$$

$$E=\frac{11E'+7}{9}=E'+\frac{2E'+7}{9};$$

$$\frac{2E'+7}{9}=E'',$$

$$E'=\frac{9E''-7}{2}=4E''-3+\frac{E''-1}{2};$$

$$\frac{E''-1}{2}=E''', \quad . \quad . \quad . \quad E''=2E'''+1;$$

$$E'=\frac{9E''-7}{2},$$

$$E''=2E'''+1, \ . \ . \ . \ E'=\frac{9(2E'''+1)-7}{2} \ . \ . \ . \ // \ . \ . \ . \ E'=9E'''+1;$$

$$E=\frac{11E'+7}{9},$$

$$E'=9E'''+1, \ . \ . \ . \ E=\frac{11(9E'''+1)+7}{9} \ . \ . \ . \ // \ . \ . \ . \ E=11E'''+2;$$

$$c=\frac{20E-7}{11},$$

$$E=11E'''+2, \ . \ . \ . \ c=\frac{20(11E'''+2)-7}{11} \ . \ . \ . \ // \ . \ . \ . \ c=20E'''+3;$$

$$b=\frac{31c+7}{20},$$

$$c=20E'''+3, \ . \ . \ . \ b=\frac{31(20E'''+3)+7}{20} \ . \ . \ . \ // \ . \ . \ . \ b=31E'''+5.$$

$$E'''=0 \ // \ 1 \ // \ 2 \ // \ \&c.$$
$$c=20E'''+3=3 \ // \ 23 \ // \ 43 \ // \ \&c.$$
$$b=31E'''+5=5 \ // \ 36 \ // \ 67 \ // \ \&c.$$

OBSERVACIONES.

1ª Hagamos la otra resolucion:

$$b=Ac+E\,,\quad c=BE+E'\,,\quad E=CE'+E''\,,\quad E'=GE''+E'''\,,\quad E''=HE'''+7\,;$$

$$3\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} A=1 & B=1 & C=1 & G=4 & H=2 & \\ 20 & 11 & 9 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} E''=HE'''+7=2E'''+7\,; \\ E'=GE''+E'''=4(2E'''+7)+E'''=9E'''+28\,; \\ E=CE'+E''=1(9E'''+28)+2E'''+7=11E'''+35\,; \\ c=BE+E'=1(11E'''+35)+9E'''+28=20E'''+63\,; \\ b=Ac+E=1(20E'''+63)+11E'''+35=31E'''+98. \end{array}\right.$$

2ª Aunque resulta $c=20E'''+63$, $b=31E'''+98$, tendremos, en haciendo $E'''=-3$,

que $\left\{\begin{array}{l} c=20E'''+63=20.-3+63=3\,; \\ b=31E'''+98=31.-3+98=5\,; \end{array}\right.$ como en la resolucion anterior.

3ª El motivo de la diferencia, que se advierte, proviene de que en la derivacion del cuarto período hicimos la division de $\frac{9E''-7}{2}$ quedando el residuo $\frac{E''-1}{2}$; en vez de que, si hubieramos hecho solo la division del coeficiente de la letra, esto es, $\frac{9E''-7}{2}=4E''+\frac{E''-7}{2}$, hubieran resultado en los valores de las incógnitas las mismas cantidades conocidas, que tienen en la observacion 1ª; pero la operacion está mejor como se ha practicado en el mapa.

PROBLEMA XVII. Hallar un número tal que si se le divide por 13 deje el residuo 7, y si se le divide por 31 deje el residuo 15.

N número: incógn.; $N = 13p + 7 = 31q + 15$ Probl.

$$13p = 31q + 15 - 7 = 31q + 8;$$

$$p = Aq + E,\quad q = BE + E',\quad E = CE' + E'',\quad E' = GE'' + E''',\quad E'' = HE''' + 8;$$

	$A=2$	$B=2$	$C=1$	$G=1$	$H=2$	
31	13	5	3	2	1	0

$$\ldots \left\{\begin{array}{l} E'' = 2E''' + 8; \\ E' = 1(2E''' + 8) + E''' = 3E''' + 8; \\ E = 1(3E''' + 8) + 2E''' + 8 = 5E''' + 16; \\ q = 2(5E''' + 16) + 3E''' + 8 = 13E''' + 40; \\ p = 2(13E''' + 40) + 5E''' + 16 = 31E''' + 96. \end{array}\right.$$

$$N = 13p + 7 = 13(31E''' + 96) + 7 = 403E''' + 1255 \ldots$$

$$\ldots // N = 31q + 15 = 31(13E''' + 40) + 15 = 403E''' + 1255.$$

$$E''' = -3 \;//\; -2 \;//\; -1 \;//\; 0 \;//\; \&c.$$

$$N = 403E''' + 1255 = 46 \;//\; 449 \;//\; 852 \;//\; 1255 \;//\; \&c.$$

OBSERVACION.

Cuando el coeficiente de la última variable resulta menor que la cantidad constante se divide esta por aquel coeficiente, sino se quiere dar á la variable valores negativos, y se pone el residuo por cantidad constante, con lo que se pueden empezar las sustituciones de la variable por cero y continuarlas por los números naturales. Asi, en el presente caso,

$$N = 403E''' + 1255 = 403.3E'''' + 46 = 403E^{v} + 46.$$

PROBLEMA XVIII. Buscar un número, que sea divisible por 7, por 11 y por 13.

N número: incógn.; $N = 7t = 11x = 13z$ Probl.

$$x = \frac{13z}{11} = z + \frac{2z}{11};$$

$$\frac{2z}{11} = E, \quad . \quad . \quad . \quad z = 11E;$$

$$7t = 13z,$$

$$z = 11E, \quad . \quad . \quad . \quad 7t = 13.11E = 143E,$$

$$t = \frac{143E}{7} = 20E + \frac{3E}{7};$$

$$\frac{E}{7} = E', \quad . \quad . \quad . \quad E = 7E';$$

$$z = 11E,$$

$$E = 7E', \quad . \quad . \quad . \quad z = 11.7E' \ldots // \ldots z = 77E';$$

$$N = 13z,$$

$$z = 77E', \quad . \quad . \quad . \quad N = 13.77E' \ldots // \ldots N = 1001E'.$$

OBSERVACIONES.

1ª Bien se pudiera haber resuelto este problema solo por el raciocinio, considerando que el producto de los coeficientes de las indeterminadas t, x, z, siendo estas números enteros, habia de satisfacer á las condiciones, y que, por ser estos coeficientes números primos, ninguna cantidad menor que su producto podía dar la solucion.

2ª Esta circunstancia de números primos en los numeradores y denominadores de los quebrados residuos nos ha proporcionado en la igualacion con las variables ausiliares mucha simplificacion en el cálculo.

3ª Bien se conoce que cualquier múltiplo del coeficiente de la última variable satisface tambien á la cuestion.

PROBLEMA XIX. Una frutera, contando sus ciruelas de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 y de 6 en 6, halla que siempre le sobra una; pero, si las cuenta de 7 en 7, resultan cabales. ¿Cuantas ciruelas tenia?

N núm. de cir. : incógn. ;

$N=2r+1=3s+1=4t+1=5u+1=6x+1=7z$ Probl.

$$6x=7z-1,$$

$$x=\frac{7z-1}{6}=z+\frac{z-1}{6};$$

$$\frac{z-1}{6}=E\ ,\quad .\quad .\quad .\quad z=6E+1;$$

$$5u=7z-1,$$

$$z=6E+1,\ .\ .\ .\ 5u=7(6E+1)-1=42E+6,$$

$$u=\frac{42E+6}{5}=8E+1+\frac{2E+1}{5};$$

$$\frac{2E+1}{5}=E',$$

$$E=\frac{5E'-1}{2}=2E'+\frac{E'-1}{2};$$

$$\frac{E'-1}{2}=E''\ ,\quad .\quad .\quad .\quad E'=2E''+1;$$

$$E=\frac{5E'-1}{2},$$

$$E'=2E''+1,\ .\ .\ .\ E=\frac{5(2E''+1)-1}{2}\ .\ .\ .\ //\ .\ .\ .\ E=5E''+2;$$

$$z=6E+1,$$
$$E=5E''+2\ ,\ \ldots\ z=6(5E''+2)+1\ \ldots\ //\ \ldots\ z=30E''+13;$$
$$4t=7z-1,$$
$$z=30E''+13,\ \ldots\ 4t=7(30E''+13)-1=210E''+90,$$
$$t=\frac{210E''+90}{4}=52E''+22+\frac{E''+1}{2};$$
$$\frac{E''+1}{2}=E'''\ ,\ \ldots\ E''=2E'''-1;$$
$$z=30E''+13,$$
$$E''=2E'''-1,\ \ldots\ z=30(2E'''-1)+13\ \ldots\ //\ \ldots\ z=60E'''-17;$$
$$N=7z,$$
$$z=60E'''-17,\ \ldots\ N=7(60E'''-17)\ \ldots\ //\ \ldots\ N=420E'''-119.$$

OBSERVACIONES.

1.ª No ha sido necesario operar con las dos ecuaciones $2r+1=7z$, $3s+1=7z$, porque, siendo $2r+1=4t+1$, $3s+1\ldots$ $\ldots=6x+1$, resulta $r=2t$, $s=2x$.

2.ª Bien se hecha de ver que las sustituciones en E''' empiezan desde la unidad, y que cualquier múltiplo de su coeficiente 420, rebajandole 119, resuelve tambien el problema; de modo que el menor número posible de ciruelas es

$$N=420E'''-119=420.1-119=301.$$

PROBLEMA XX. Un labrador compra 100 cabezas de ganado en que gasta 100 pesos, á saber: bueyes á 10 pesos, vacas á 5, becerros á 2 y carneros á $\frac{1}{2}$. ¿Cuantos ha comprado de cada clase?

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ bueyes} \\ q \text{ vacas} \\ r \text{ becerros} \\ s \text{ carneros} \end{array}\right\}\text{incógn.};\quad \left.\begin{array}{r} p+q+r+s=100 \\ 10p+5q+2r+\frac{s}{2}=100 \end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l}20p+10q+4r+s=200\\ p+\ \ q+\ \ r+s=100\end{array}\right\},\ldots 19p+9q+3r=200-100=100,$$

$$r=\frac{100-19p-9q}{3}=33-6p-3q+\frac{1-p}{3};$$

$$\frac{1-p}{3}=-E\ ,\quad .\quad .\quad .\quad p=3E+1;$$

$$r=\frac{100-19p-9q}{3},$$

$$p=3E+1\ ,\ .\ .\ .\ r=\frac{100-19(3E+1)-9q}{3}\ .\ .\ .\ //\ .\ .\ .\ r=27-19E-3q;$$

$$s=100-p-q-r,$$

$$\left.\begin{array}{l}p=3E+1\\ r=27-19E-3q\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ s=100-3E-1-q-27+19E+3q\ldots//\ldots s=72+16E+2q;$$

$$E=\ 0\ //\ 1\ ;$$

$$p=3E+1=\ 1\ //\ 4\ ;$$

$$r=27-19E-3q=27-3q\ //\ 8-3q;$$

$$s=72+16E+2q=72+2q\ //\ 88+2q.$$

$$p=1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1\ //\ 1;$$

$$q=0\ //\ 1\ //\ 2\ //\ 3\ //\ 4\ //\ 5\ //\ 6\ //\ 7\ //\ 8\ //\ 9;$$

$$r=27-3q=27\ //\ 24\ //\ 21\ //\ 18\ //\ 15\ //\ 12\ //\ 9\ //\ 6\ //\ 3\ //\ 0;$$

$$s=72+2q=72\ //\ 74\ //\ 76\ //\ 78\ //\ 80\ //\ 82\ //\ 84\ //\ 86\ //\ 88\ //\ 90.$$

$$p = 4 \;//\; 4 \;//\; 4;$$
$$q = 0 \;//\; 1 \;//\; 2;$$
$$r = 8 - 3q = 8 \;//\; 5 \;//\; 2;$$
$$s = 88 + 2q = 88 \;//\; 90 \;//\; 92.$$

OBSERVACIONES.

1ª Como son dos las ecuaciones constituyentes y cuatro las incógnitas, tenemos que sustituir valores á dos variables en cada una de las ecuaciones resultantes $r = 27 - 19E - 3q$, $s = 72 + 16E + 2q$.

2ª Desde luego vemos que ha de ser $19E + 3q < 27$ para que r sea un número positivo; lo cual solo permite igualar á E con el cero ó la unidad.

3ª En este concepto sacamos para las indeterminadas p, r, s dos sistemas de valores, haciendo desaparecer E.

4ª En el primer sistema es siempre $p = 1$; y $r = 27 - 3q$ requiere $3q < 27$, por lo que q empieza en cero y sigue correlativamente hasta 9, dando diez soluciones, y es $s = 72 + 2q$.

5ª En el segundo siempre es $p = 4$; y $r = 8 - 3q$ ecsije que sea $3q < 8$, de modo que q empieza en cero y acaba en 2, lo que da tres soluciones, y es $s = 88 + 2q$.

6ª De estas trece soluciones se deben desechar las tres en que una indeterminada es igual á cero, porque se supone que el labrador compró de las cuatro clases de ganado, de consiguiente son diez las verdaderas soluciones.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1º Buscar un número, que dividido por 5 dé 4 de residuo, y dividido por 7 dé 2 de resto.

Respuesta: $N = 35E + 9$.

2º Buscar un número, que dividido por 28 dé 17 de resto, y dividido por 19 dé 6 de resto.

Resp.: $N = 523E' + 101$.

3º ¿De cuantas maneras se pueden componer 264 duros con monedas de 6 y de 3 duros?

Resp.: De 43 maneras: las monedas de 6 duros forman la progresion de todos los números correlativos desde 1 hasta 43, y las de 3 duros forman progresion descendente de equidiferencia, cuyo primer término es 86, el último 2, y la razon tambien 2.

4º Se pide componer 741 reales con 41 piezas de tres especies, á saber, de 24, de 19 y de 10 rs.

Resp.: De 3 maneras:

Las piezas de 24 rs. han de ser 5 // 14 // 23;
las de 19 han de ser 29 // 15 // 1;
y las de 10 han de ser 7 // 12 // 17.

5º Un monedero tiene tres suertes de plata: la primera de 7 onzas de fino por marco, la segunda de 5 y $\frac{1}{2}$ onzas, y la tercera de 4 y $\frac{1}{2}$ onzas. Tiene que hacer una aligacion de 30 marcos de á 6 onzas de fino en marco. ¿Cuantos marcos han de entrar de cada suerte?

Resp.: De primera suerte 10 // 12 // 14 // 16 // 18;
De segunda 20 // 15 // 10 // 5 // 0;
De tercera 0 // 3 // 6 // 9 // 12.

6º Buscar tres números enteros tales que, si se multiplica el primero por 3, el segundo por 5 y el tercero por 7, la suma de los productos sea 560; y, si se multiplica el primero por 9, el segundo por 25 y el tercero por 49, la suma de los productos sea 2920.

Resp.: El primer núm. 15 // 50;
El segundo 82 // 40;
El tercero 15 // 30.

PROBLEMAS.

COLECCION CUARTA.

Segundo Grado.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la LECCION *XVI*.

PROBLEMA I. Buscar un número tal que, restando 2 de su cuadrado, quede 1.

N núm.: incógn.; $N^2 - 2 = 1$ Probl.

$$N^2 = 1 + 2 = 3,$$

$$N = \pm\sqrt{3} = \pm 1{,}732\&c.$$

Comprob. $(\pm 1{,}732\&c.)^2 - 2 = 3 - 2 = 1.$

PROBLEMA II. Buscar un número, que, elevado á una potencia y multiplicado por un número dado, sea igual á otra potencia del mismo número, superior en dos grados á la primera, multiplicada por otro número dado.

m prim. multiplicador
n segundo
p potencia
} datos; $mN^p = nN^{p+2}$ Probl.

N núm.: incógn.;

$$N^{p+2} = \frac{m}{n}N^p,$$

$$N^2 = \frac{m}{n}\frac{N^p}{N^p} = \frac{m}{n},$$

$$N = \pm\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Comprob. algeb. $mN^p = m\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p}{2}} = \frac{m^{\frac{p}{2}+1}}{n^{\frac{p}{2}}} = n.\frac{m^{\frac{p}{2}+1}}{n^{\frac{p}{2}+1}} = n\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p+2}{2}} = nN^{p+2}.$

PROBLEMA III. Hallar un número tal que, si á su duplo se añade siete veces el cociente, que resulte de dividir 30 por aquel número, y de todo se resta 15, resulte nueve veces la mitad del mismo número mas 5.

x núm. incógn.;

$$2x + 7.\frac{30}{x} - 15 = 9.\frac{x}{2} + 5 \text{ Probl.}$$

$$9\cdot\frac{x}{2}+5=2x+7\cdot\frac{30}{x}-15,$$

$$9x^2+10x=\left(2x+7\cdot\frac{30}{x}-15\right)2x=4x^2+14\cdot30-30x,$$

$$5x^2+40x=14\cdot30,$$

$$x^2+8x=\frac{14\cdot30}{5}=84\;//\;x^2+8x-84=0;$$

$$\left.\begin{array}{l}x^2+px+q=0\\x^2+8x-84=0\end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l}p=8;\\q=-84;\end{array}\right.$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

$$\left.\begin{array}{l}p=8\\q=-84\end{array}\right\},\ldots x=-\frac{8}{2}\pm\sqrt{\frac{8^2}{4}+84}=-4\pm10=6\;//\;-14.$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{l}2\times6+7\times\frac{30}{6}-15=3^2=9\times\frac{6}{2}+5;\\2\times-14+7\times-\frac{30}{14}-15=-58=9\times-\frac{14}{2}+5.\end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª La planta no ofrece ninguna dificultad, porque se busca un número, cuyas condiciones son claras, y se van estampando facilmente conforme se hace la traducion.

2ª La primera operacion es cambiar los miembros, porque, considerando la ecuacion constituyente, advierto que el coeficiente mayor de la incógnita mas elevada está en el segundo.

3ª Despues multiplico todo por $2x$, producto de los divisores, para que estos desparezcan.

4ª Luego paso todas las incógnitas del segundo miembro al primero, reduciendo sus coeficientes, y dejo en el segundo miembro solo las cantidades conocidas.

5ª Finalmente divido toda la ecuacion por el coeficiente del cuadrado de la incógnita para desembarazarlo, y obtengo la ecuacion $x^2+8x-84=0$.

6ª Esta ecuacion la comparo en la columna lateral con la fórmula de segundo grado, y deduzco por los términos *homólogos* ó colocados del mismo modo en ambas ecuaciones, que $p=8$, $q=-84$.

7ª En la columna central estampo la incógnita despejada segun la fórmula, y haciendo las sustituciones del valor de p y de q, saco $x=6$ ó bien $x=-14$, cuyos dos resultados satisfacen en la comprobacion.

8ª Ahora hemos comparado con la fórmula la ecuacion preparada para manifestar las aplicaciones; pero en adelante completarémos el cuadrado del primer miembro, añadiendo al segundo la misma cantidad para conservar la igualdad, y estraeremos la raiz cuadrada, como pudieramos haberlo ejecutado en esta forma:

$$x^2+8x=84,$$
$$x^2+8x+16=84+(\tfrac{8}{2})^2=100,$$
$$x+4=\pm\sqrt{100}=\pm 10,$$
$$x=-4\pm 10=6 \,//\, -14;$$ y aun cabe mas simplificacion de operaciones, como manifestarémos á su tiempo.

PROBLEMA IV. Hallar un número de tres cifras tales que la primera á la izquierda mas la tercera equivalgan á 5 veces la segunda: que el producto de la primera por la tercera esceda al de 9 por la segunda en una cantidad igual á la primera; y que, escribiendo estas tres cifras en un órden inverso, se tenga un número con 198 unidades menos que el pedido.

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ prim.} \\ s \text{ seg.} \\ t \text{ terc.} \end{array}\right\} \text{cif. : incógn.;} \quad \left.\begin{array}{c} p+t=5s \\ pt-9s=p \\ 100t+10s+p=100p+10s+t-198 \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$99t-99p=-198,$$

$$t-p=-\tfrac{198}{99}=-2\quad,\quad .\quad .\quad .\quad t=p-2;$$

$$\left.\begin{array}{r}5s=p+t\\ -2=t-p\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ 5s+2=p+t-t+p=2p,$$

$$5s=2p-2\quad,\quad .\quad .\quad .\quad s=\frac{2p-2}{5};$$

$$p=pt-9s,$$

$$\left.\begin{array}{r}t=p-2\\ s=\dfrac{2p-2}{5}\end{array}\right\},\ .\ .\ .\ p=p(p-2)-9.\frac{2p-2}{5}=\frac{5p^2-28p+18}{5},$$

$$5p=5p^2-28p+18,$$

$$5p^2-33p=-18,$$

$$p^2-\tfrac{33}{5}p=-\tfrac{18}{5},$$

$$p^2-\tfrac{33}{5}p+\left(\frac{33}{10}\right)^2=\left(\frac{33}{10}\right)^2-\frac{18}{5}=\frac{729}{100},$$

$$p-\frac{33}{10}=\pm\sqrt{\frac{729}{100}}=\pm\frac{27}{10}\quad,\quad .\quad .\quad .\quad p=\frac{33\pm27}{10}=6\ //\ 0{,}6;$$

$$s=\frac{2p-2}{5},$$

$$p=6\quad,\quad .\quad .\quad .\quad s=\frac{2.6-2}{5}\quad .\quad .\quad .\quad //\quad .\quad .\quad .\quad s=2;$$

$$t=p-2,$$

$$p=6\quad,\quad .\quad .\quad .\quad t=6-2\quad .\quad .\quad .\quad //\quad .\quad .\quad .\quad t=4;$$

$$\left.\begin{array}{l}p=6\\ s=2\\ t=4\end{array}\right\}, \ldots N=100p+10s+t, \quad \ldots N=100.6+10.2+4 \ldots // \ldots N=624.$$

Comprob. $6+4=10=5.2$; $6.4-9.2=6$; $426=624-198$.

OBSERVACIONES.

1ª Las dos primeras condiciones son fáciles de traducir; y respecto á la tercera consideraremos que la primera cifra á la izquierda ocupa el lugar de centenas y la segunda el de decenas, con lo que se escribirá sin tropiezo en álgebra la tercera condicion.

2ª En la primer derivacion queda eliminada la segunda incógnita.

3ª La ecuacion resultante del primer período da el valor de la tercer incógnita en la primera.

4ª Comparando la primer ecuacion constituyente con la segunda derivada se elimina la tercer incógnita en el segundo período, y se saca el valor de la segunda incógnita en la primera.

5ª Estos valores de la segunda y tercer incógnita se sustituyen en la segunda ecuacion constituyente, con lo que se obtiene una ecuacion principal, en que no hay mas incógnita que la primera.

6ª Como esta incógnita está elevada al cuadrado y se presenta en forma fraccionaria, multiplico todo por el denominador, y luego reuno en el primer miembro los términos afectos de la incógnita, dejando la cantidad conocida en el segundo, como manifiestan las dos derivaciones.

7ª Ahora divido la ecuacion por el coeficiente del cuadrado de la incógnita, completo en ambos miembros el cuadrado del binómio con el de la mitad del coeficiente, que afecta al segundo término del primer miembro, y estraigo la raiz, con lo que saco la resultante $p=6$ ó bien $p=0,6$ por la duplicidad del radical.

8ª Mediante á que los números ó cifras pedidas han de ser enteros, admito solo $p=6$, desechando $p=0,6$.

9ª Luego hago en los valores hallados de la segunda y tercer incógnita las sustituciones correspondientes, y resultan $s=2$, $t=4$.

10ª Finalmente sustituyo en la espresion del número $N=100p+10s+t$ los valores de las incógnitas, y sale $N=624$.

PROBLEMA V. Hallar un número tal que, si de su cuádruplo se quita el séptuplo de su raiz cuadrada, resulten 15.

n núm.: incógn.;

$$4n-7\sqrt{n}=15 \text{ Probl.}$$

$$n-\tfrac{7}{4}n^{\frac{1}{2}}-\tfrac{15}{4}=0;$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+px+q=0 \\ n-\frac{7}{4}n^{\frac{1}{2}}-\frac{15}{4}=0 \end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l} x=n^{\frac{1}{2}}; \\ p=-\frac{7}{4}; \\ q=-\frac{15}{4}; \end{array}\right.$$

$$x=-\tfrac{1}{2}p\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2-q)},$$

$$\left.\begin{array}{l} x=n^{\frac{1}{2}} \\ p=-\frac{7}{4} \\ q=-\frac{15}{4} \end{array}\right\},\ldots n^{\frac{1}{2}}=\tfrac{7}{8}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\times\tfrac{7^2}{4^2}+\tfrac{15}{4}\right)}=\tfrac{7}{8}\pm\tfrac{17}{8}=3\,//-\tfrac{5}{4},$$

$$n=3^2=9\,//\,(-\tfrac{5}{4})^2=\tfrac{25}{16}.$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{ll} n=9\,//\,n^{\frac{1}{2}}=3; & 4\times9-7\times3=15; \\ n=\frac{25}{16}\,//\,n^{\frac{1}{2}}=-\frac{5}{4}; & 4\times\frac{25}{16}+7\times\frac{5}{4}=15. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª Luego que planteo el problema formo la derivada, pasando el segundo miembro al primero y dividiendo todo por el coeficiente de la incógnita mas elevada.

2ª Asi preparada la ecuacion, la comparo en la columna lateral con la fórmula de segundo grado, y deduzco á la columna central la igualdad de los términos homólogos.

3ª Pongo en la columna central la fórmula del valor de la incógnita, y haciendo las sustituciones de los caracteres, saco el valor de la raiz cuadrada de la incógnita.

4ª Cuadro ambos miembros de la ecuacion, y obtengo el valor de $n=9$ ó bien $n=\frac{25}{16}$.

5ª He podido comparar la ecuacion propuesta con la fórmula de segundo grado [217], porque la incógnita está solo en dos términos con el esponente mayor doble del menor.

6ª Pudieramos haber obtenido la misma resolucion, dejando el radical solo en un miembro, y cuadrando entrambos, de este modo:

$$4n-15=7\sqrt{n},$$

$$16n^2-120n+225=49n,$$

$$16n^2-169n=-225,$$

$$n^2-\frac{169}{16}n=-\frac{225}{16},$$

$$n^2-\frac{169}{16}n+\left(\frac{169}{32}\right)^2=-\frac{225}{16}+\frac{169^2}{32^2}=\frac{14161}{32^2},$$

$$n=\frac{169}{32}\pm\sqrt{\left(\frac{14161}{32^2}\right)}=\frac{169}{32}\pm\frac{119}{32}=9\,//\,\frac{25}{16}.$$

PROBLEMA VI. Dividir un número n en dos partes, cuyo producto sea el mayor posible ó un mácsimo.

n núm.: dato ;

$$\left.\begin{array}{l} p \text{ una parte} \\ n-p \text{ la otra} \\ z \text{ producto} \end{array}\right\}\text{incógn.}\; ; \quad p(n-p)=z \text{ Probl.}$$

$$p^2-np=-z,$$

$$p=\tfrac{1}{2}n\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}n^2-z)},$$

$$z<\tfrac{1}{4}n^2 \,//\, z=\tfrac{1}{4}n^2, \ldots p=\tfrac{1}{2}n\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}n^2-\tfrac{1}{4}n^2)}=\tfrac{1}{2}n;$$

$$n-p=n-\tfrac{1}{2}n=\tfrac{1}{2}n.$$

OBSERVACIONES.

1ª Varío los signos de la ecuacion constituyente, y teniendo de memoria la resolucion de la fórmula de segundo grado, saco el valor de la incógnita.

2ª Considero que z ha de ser una cantidad menor ó igual á $\frac{1}{4}n^2$, pues si fuese mayor resultaría á la incógnita una espresion imajinaria, y asi manifiesto en la columna lateral $z<\frac{1}{4}n^2$ ó bien $z=\frac{1}{4}n^2$; pero, como el producto z ha de ser un mácsimo, es preciso, para cumplir esta condicion, tomar el mayor valor posible, que es $z=\frac{1}{4}n^2$, desechando los demas.

3ª Sustituyendo este valor en la ecuacion principal saco $p=\frac{1}{2}n$, y luego deduzco $n-p=\frac{1}{2}n$; de consiguiente las dos partes son las dos mitades del número, y el producto será el cuadrado de una de estas mitades.

4ª En este problema no cabe comprobacion, porque su demostracion es de puro raciocinio abstracto, como lo usamos en la segunda observacion.

PROBLEMA VII. Dividir un número en dos partes tales que un múltiplo determinado de la primera, multiplicado por otro múltiplo determinado de la segunda, dé un producto determinado.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ número} \\ m \text{ factor de la 1.ª parte} \\ n \text{ factor de la 2.ª} \\ p \text{ producto} \end{array}\right\} \text{datos;} \qquad \left.\begin{array}{l} x \text{ primera parte} \\ a-x \text{ segunda} \end{array}\right\} \text{incógn.;}$$

$$mx \cdot n(a-x)=p \quad \text{Probl.}$$

$$mn(x^2-ax)=-p,$$

$$x^2-ax=-\frac{p}{mn},$$

$$x^2-ax+\tfrac{1}{4}a^2=\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn},$$

$$x-\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}},$$

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)};$$

$$a-x=a-\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}=\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}.$$

Aplic. Sea $m=n=1$; $x=\tfrac{1}{2}a+\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-p)}$; $a-x=\tfrac{1}{2}a-\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-p)}$.

Comprob. $1\left(\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-p}\right).1\left(\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-p}\right)=\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}a^2+p=p.$

OBSERVACIONES.

1.ª Luego que he desembarazado la incógnita de su coeficiente mn, completo el cuadrado del binómio, y estrayendo la raiz, saco $x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$, y $a-x=\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$.

2.ª Cuando $m=n=1$, como en la aplicacion, resulta $x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}a^2-p)}$, lo que demuestra que en este caso ha de ser $\tfrac{1}{4}a^2>p$.

PROBLEMA VIII. Dada la suma de capitales y ganancias de dos asociados, el capital del primero y la ganancia del segundo, determinar la ganancia del uno y el capital del otro.

$$\left.\begin{array}{l} s \text{ suma de cap. y gan.} \\ c \text{ cap. del prim.} \\ g \text{ gan. del seg.} \end{array}\right\} \text{datos;} \qquad \left.\begin{array}{l} G+c+g+C=s \\ G:g::c:C=\dfrac{cg}{G} \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ gan. del 1.º} \\ C \text{ cap. del 2.º} \end{array}\right\} \text{incógn.;} \qquad G+c+g-s=-C,$$

$$C=\frac{cg}{G}, \quad . \quad . \quad . \quad G+c+g-s=-\frac{cg}{G},$$

$$G^2+(c+g-s)G=-cg,$$

$$G^2+(c+g-s)G+\left(\frac{c+g-s}{2}\right)^2=\left(\frac{c+g-s}{2}\right)^2-cg,$$

$$G-\frac{s-c-g}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}\ , \quad . \quad . \quad . \quad G=\frac{s-c-g}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}\ ;$$

$$G+c+g+C=s,$$

$$C=s-c-g-G,$$

$$G=\frac{s-c-g}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}\ , \quad . \quad . \quad . \quad C=s-c-g-\frac{s-c-g}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}\ldots//\ldots C=\frac{s-c-g}{2}\mp\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} s=550\ ; \\ c=300\ ; \\ g=\ 20\ ; \end{cases}$
$$G=\frac{550-300-20}{2}-\sqrt{\left(\frac{550-300-20}{2}\right)^2-300.20}=115-85=30\ ;$$
$$C=\frac{550-300-20}{2}+\sqrt{\left(\frac{550-300-20}{2}\right)^2-300.20}=115+85=200.$$

Comprob. $300+30+200+20=550$; $\quad 30:20::300:200.$

OBSERVACIONES.

1ª La primer ecuacion constituyente es la suma de capitales y ganancias.

2ª La segunda se forma por la proporcion, que han de tener entre si capitales y ganancias.

3ª La primera ecuacion principal está tomada de la primera constituyente, cambiando de miembro los caractéres C, s.

4ª Este problema se puede resolver por la fórmula de aplicacion del antecedente $x=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-p}$, $y=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-p}$, suponiendo $x=G$, $y=C$; de modo que $a=x+y=G+C=s-c-g$, $p=xy=CG=cg$. En este caso $G=x=\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}a^2-p}=\frac{s-c-g}{2}-\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}$,

$C=y=\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}a^2-p}=\frac{s-c-g}{2}+\sqrt{\left(\frac{s-c-g}{2}\right)^2-cg}.$

PROBLEMA IX. Buscar dos números, dada su diferencia y su producto.

d difer.
p prod. } datos ;

N núm. may.
$N-d$ men. } incógn. ;

$$N(N-d)=p \text{ Probl.}$$

$$N^2-dN+\tfrac{1}{4}d^2=\tfrac{1}{4}d^2+p,$$

$$N-\tfrac{1}{2}d=\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p},$$

$$N=\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p}\ ;$$

$$N-d=-\tfrac{1}{2}d\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}d^2+p}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} d=5; \\ p=84; \end{cases}$ $N=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{5^2}{4}+84\right)}=\frac{5}{2}+\frac{19}{2}=12$; $N-d=12-5=7$.

Comprob. algeb. $\left(\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\frac{1}{4}d^2+p}\right)\left(-\frac{1}{2}d\pm\sqrt{\frac{1}{4}d^2+p}\right)=-\frac{1}{4}d^2+\frac{1}{4}d^2+p=p$.

OBSERVACIONES.

1.ª En la primer derivacion completo el cuadrado: en la segunda estraigo la raiz; y en la tercera traslado el segundo término del primer miembro al segundo.

2.ª Si en la aplicacion hubieramos tomado el segundo valor tendriamos

$$N=\frac{1}{2}d-\sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2+p\right)}=\frac{5}{2}-\sqrt{\left(\frac{5^2}{4}+84\right)}=\frac{5}{2}-\frac{19}{2}=-7;$$

$N-d=-\frac{1}{2}d-\sqrt{\left(\frac{1}{4}d^2+p\right)}=-\frac{5}{2}-\sqrt{\left(\frac{5^2}{4}+84\right)}=-\frac{5}{2}-\frac{19}{2}=-12$; lo que equivale á cambiar los números, mudando tambien su sentido.

PROBLEMA X. Buscar dos números, dada su suma y la de sus cubos.

$\left.\begin{array}{l} a \text{ suma de los núm.} \\ b \text{ suma de sus cubos} \end{array}\right\}$ datos; $x^3+(a-x)^3=b$ Probl.

$\left.\begin{array}{l} x \text{ un número} \\ a-x \text{ el otro} \end{array}\right\}$ incógn.; $3ax^2-3a^2x+a^3-b=0$,

$$x^2-ax+\frac{a^3-b}{3a}=0,$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b-a^3}{3a}}\,;$$

$$a-x = \tfrac{1}{2}a \mp \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b-a^3}{3a}}\,.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a = 7\,; \\ b = 91\,; \end{cases}$ $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{7^2}{4} + \frac{91-7^3}{3\cdot 7}} = \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} = 4 \,//\, 3\,;$ $a-x = \frac{7}{2} \mp \frac{1}{2} = 3 \,//\, 4.$

Comprob. $4+3=7\,;\quad 4^3+3^3=91.$

PROBLEMA XI. Buscar dos números, dada su suma y la razon de sus cuadrados.

a suma de los núm.
m raz. de sus cuad. } datos; $\quad \dfrac{x^2}{(a-x)^2} = m$ Probl.

x uno de los núm.
$a-x$ el otro. } incógn.; $\quad \dfrac{x}{a-x} = \pm\sqrt{m}\,,$

$$x = \pm a\sqrt{m} \mp x\sqrt{m}\,,$$

$$x \pm x\sqrt{m} = \pm a\sqrt{m}\,,$$

$$x = \frac{\pm a\sqrt{m}}{1 \pm \sqrt{m}}\,.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a = 15\,; \\ m = 16\,; \end{cases}$ $x = \frac{15\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}} = \frac{15\cdot 4}{5} = 12\,;$ $a-x = 15-12 = 3.$

Comprob. $12+3=15$; $\frac{12^2}{3^2}=\frac{144}{9}=16$.

OBSERVACIONES.

1ª En la aplicacion hemos tomado los signos superiores de los radicales, porque son los que resuelven la cuestion segun viene propuesta.

2ª Si en vez de ser dada la suma de dos números lo fuese su diferencia, tendriamos la resolucion del problema en la misma fórmula, llamando a la diferencia, y tomando los signos inferiores de los radicales.

3ª Con efecto, de la planta $\frac{x^2}{(x-a)^2}=m$ sale $x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}$; y siendo $a=3$, es $x=\frac{-3\sqrt{16}}{1-\sqrt{16}}=4$, $x-a=1$; y resulta $\frac{x^2}{(x-a)^2}=\frac{4^2}{1^2}=16=m$.

PROBLEMA XII. Entre varias personas deben pagarse los gastos de un proceso, que ascienden á 800 duros; pero tres son insolventes, y cada una de las otras tiene que pagar 60 duros mas. ¿Cuantas personas son?

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ núm. de personas} \\ y \text{ pago de cada una} \end{array}\right\}\text{incógn.};\qquad \left.\begin{array}{r} xy=800 \\ (x-3)(y+60)=800 \end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$xy-3y+60x-180=800,$$

$$60x=980-xy+3y,$$

$$y=\frac{800}{x}\ ,\ \therefore\ .\ 60x=980-x\ .\ \frac{800}{x}+3\ .\ \frac{800}{x}=180+\frac{2400}{x},$$

$$x^2=\left(180+\frac{2400}{x}\right)\frac{x}{60}=3x+40,$$

$$x^2-3x-40=0\ ,\ \ .\ \ .\ \ .\ \ x=\tfrac{3}{2}\pm\sqrt{(\tfrac{9}{4}+40)}=8\ //\ -5;$$

$$y=\frac{800}{x},$$

$$x=8\ ,\ \ .\ \ .\ \ .\ \ y=\frac{800}{8}\ \ .\ \ .\ \ .\ \ //\ \ .\ \ .\ \ .\ \ y=100.$$

Comprob. $8\ .\ 100=800$; $(8-3)(100+60)=5\ .\ 160=800$.

OBSERVACIONES.

1ª Mediante á que el número de personas multiplicado por la cantidad de pago de cada una da el total de gastos, formo la primer ecuacion constituyente con $xy=800$.

2ª Deben pagar tres personas menos, y cada una de las que pagan ha de satisfacer, ademas de la cuota comun y, el complemento de 60 duros: por tanto la segunda ecuacion constituyente es $(x-3)(y+60)=800$.

3ª El segundo valor de $x=-5$, que da $y=\frac{800}{x}=\frac{800}{-5}=-160$ no es aplicable á la cuestion segun viene propuesta; pero los valores 5 y 160 sirven para el caso en que concurriesen tres personas mas á pagar, y tocase á cada una 60 duros menos.

4ª En tal caso hariamos este cálculo:

$$(x+3)(y-60)=800 \;//\; xy+3y-60x-180=800,$$

$$x^2=-3x+40, \ldots \begin{cases} x=-\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{9}{4}+40)}=5; \\ y=\dfrac{800}{5}=160. \end{cases}$$

5ª Pudieramos haber resuelto con una sola incógnita la cuestion propuesta; pues $\dfrac{800}{x}$ era lo que tocaba pagar á cada persona, pagando todas, y $\dfrac{800}{x-3}$ lo que pagó cada contribuyente por la insolvencia de las tres; pero este pago era de 60 duros mayor que el otro; luego $\dfrac{800}{x}+60=\dfrac{800}{x-3}$, de donde sale $x^2-3x-40=0$ como en la resolucion.

6ª La razon de haber planteado el problema como se manifiesta en el cuadro ha sido porque esta planta era mas análoga á su enunciacion, y conviene á los principiantes seguir la mas estrecha analogía en la traducion del lenguaje comun al algebráico.

PROBLEMA XIII. Se compró un caballo, que se ha vendido despues en 24 doblones, perdiendo en la venta tanto por 100 como habia costado. ¿En cuanto se compró?

P precio de la compra: incógn.; $\quad P-24=P\times\dfrac{P}{100}$ Probl.

$$P^2-100P+2400=0,$$

$$P=50\pm\sqrt{(2500-2400)}=60 \;//\; 40.$$

Comprob. $60-24=36=60\times\dfrac{60}{100}$; $\quad 40-24=16=40\times\dfrac{40}{100}$.

OBSERVACIONES.

1ª Como el esceso del precio de compra al de venta fué la pérdida, y esta era por cada 100 igual al coste, formamos la planta con la ecuacion $P-24=\frac{P^2}{100}$.

2ª Los dos valores de $P=60$ y $P=40$ resuelven el problema, como se ve en la comprobacion; mas no por eso entra en la clase de indeterminado, pues no hay mas incógnitas que ecuaciones, aunque la P por su elevacion al cuadrado tiene dos valores.

3ª Pudieramos haber planteado el problema diciendo: si 100 se reducen á $100-P$, P se reducirá á $\frac{100P-P^2}{100}$; pero, como todo lo que se percibió en la venta fueron 24 doblones, tendremos $\frac{100P-P^2}{100}=24$, de que sale $P^2-100P+2400=0$, como en el mapa.

PROBLEMA XIV. Un regimiento de caballería ha comprado cierto número de caballos en 750 doblones; y un regimiento de dragones ha comprado con 1066 y $\frac{2}{3}$ doblones 15 caballos mas, costandole cada uno 3 y $\frac{1}{3}$ doblones menos que al otro. ¿Cuantos caballos compró cada regimiento?

$$\left.\begin{array}{l} C \text{ caballos del regim. de cab.} \\ P \text{ su precio} \end{array}\right\} \text{incógn.}; \qquad \left.\begin{array}{r} CP=750 \\ (C+15)(P-\frac{10}{3})=1066+\frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$CP+15P-\tfrac{10}{3}C-\tfrac{150}{3}=1066+\tfrac{2}{3}=\tfrac{3200}{3},$$

$$10C = -3200 - 150 + 3CP + 45P = -3350 + 3CP + 45P,$$

$$P = \frac{750}{C}, \quad . \quad . \quad . \quad 10C = -3350 + 3C \times \frac{750}{C} + 45 \times \frac{750}{C} = -1100 + \frac{33750}{C},$$

$$C^2 + 110C = 3375,$$

$$C = -55 \pm \sqrt{\left(\frac{12100}{4} + 3375\right)} \quad . \quad . \quad . \quad // \quad . \quad . \quad . \quad C = 25 // -135;$$

$$P = \frac{750}{C},$$

$$C = 25, \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{750}{25} \quad . \quad . \quad . \quad // \quad . \quad . \quad . \quad P = 30.$$

Comprob. $25 \times 30 = 750$; $(25 + 15)(30 - \frac{10}{3}) = 1066 + \frac{2}{3}$.

OBSERVACIONES.

1ª Como los caballos del primer regimiento, multiplicados por su precio, han de importar 750 doblones, es la primera ecuacion constituyente $C \times P = 750$; y como los del otro regimiento son 15 mas y su precio 3 y $\frac{1}{3}$ doblones menos, importando 1066 y $\frac{2}{3}$, es la segunda ecuacion constituyente $(C + 15)(P - \frac{10}{3}) = 1066 + \frac{2}{3}$.

2ª Resulta, pues, que el regimiento de caballería compró 25 caballos á 30 doblones, y el de dragones 40 á 26 y $\frac{2}{3}$ doblones.

3ª Pudiera resolverse el problema con una sola incógnita C, considerando que $\frac{750}{C}$ es el precio de un caballo del regimiento de caballería y $\frac{1066 + \frac{2}{3}}{C + 15}$ es el precio de un caballo de los dragones; pero, como el primer precio escede al segundo en 3 y $\frac{1}{3}$ doblones, tenemos la ecuacion $\frac{750}{C}-3-\frac{1}{3}=\frac{1066+\frac{2}{3}}{C+15}$ para plantear el problema, y deducir $C^2+110C=3375$, lo mismo que antes.

4ª Tambien pudiera haberse resuelto el problema con solo la otra incógnita, pues $C=\frac{750}{P}$ es el número de caballos del primer regimiento y $C+15=\frac{1066+\frac{2}{3}}{P-\frac{10}{3}}$ es el número de caballos del segundo; pero, como estos esceden en 15 á los otros, tendremos la ecuacion constituyente $\frac{750}{P}+15=\frac{1066+\frac{2}{3}}{P-\frac{10}{3}}=\frac{3200}{3P-10}$, de donde se deduce $P^2-\frac{220}{9}P-\frac{1500}{9}=0$, y

$$P=\frac{110}{9}\pm\sqrt{\left(\frac{110}{9}\right)^2+\frac{1500}{9}}=\frac{110}{9}\pm\frac{160}{9}=30 \,//\, -\frac{50}{9}.$$

Por el valor de P se saca facilmente el de C de la ecuacion $C=\frac{750}{P}=\frac{750}{30}=25$, como sabiamos.

PROBLEMA XV. Tres compañías de obreros trabajando juntas podrian hacer un bastion en 15 horas. La primera compañía sola emplearia los $\frac{4}{5}$ del tiempo que emplearia la segunda en hacer la misma obra. La segunda compañía emplearia en el mismo trabajo 15 horas menos que la última. ¿Cuanto tiempo emplearia cada compañía en hacer sola el bastion?

P trabajo de la prim. comp,
S trab. de la seg.
T trab. de la terc.
x tiempo de la terc. sola: incógn.;

$$Tx=S(x-15)=P(x-15)\tfrac{4}{5}=(P+S+T)15=1 \text{ Probl.}$$

$$\left.\begin{aligned} P&=\frac{1}{\frac{4}{5}(x-15)}=\frac{5x}{4x^2-60x} \\ S&=\frac{1}{x-15}=\frac{4x}{4x^2-60x} \\ T&=\frac{1}{x}=\frac{4x-60}{4x^2-60x} \end{aligned}\right\} \ldots P+S+T=\frac{13x-60}{4x^2-60x},\quad (P+S+T)15=\frac{13x-60}{4x^2-60x}\cdot 15=1,$$

$$195x-900=4x^2-60x,$$

$$x^2-\frac{255}{4}x=-\frac{900}{4}=-225,$$

$$x=\frac{255}{8}\pm\sqrt{\left(\frac{255}{8}\right)^2-225}=60 \,//\, \tfrac{15}{4}.$$

63 Comprob, $\left(\frac{1}{60}+\frac{1}{60-15}+\frac{1}{\frac{4}{5}(60-15)}\right)15=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{5}{12}=1.$

OBSERVACIONES.

1ª Aunque las tres iniciales de las compañías se presentan como incógnitas, es solo para sacar desde luego su valor en la verdadera incógnita x, pues el trabajo de cada compañía multiplicado por su tiempo ha de producir la unidad de obra, esto es, el bastion. Por tanto $P=\frac{1}{\frac{4}{5}(x-15)}$, $S=\frac{1}{x-15}$, $T=\frac{1}{x}$.

2ª Traidos estos valores á la columna lateral y reducidos los quebrados á un comun denominador, los sumo, y saco á la columna central el trabajo de las tres compañías.

3ª Multiplico esta ecuacion principal por las 15 horas, y tengo la unidad de bastion.

4ª Conocida la incógnita $x=60$, resulta que el bastion se haría por la primer compañía en $(x-15)\frac{4}{5}=(60-15)\frac{4}{5}=36$ horas, por la segunda en $x-15=60-15=45$ horas, y por la tercera en $x=60$ horas.

4ª El segundo valor $x=\frac{15}{4}$ no sirve, porque da tiempos negativos á la primera y segunda compañía.

PROBLEMA XVI. Se piden dos números tales que el doble de su suma sea igual al triplo de su producto, y á la diferencia de sus cuadrados.

$\left.\begin{array}{l} x \text{ un núm.} \\ y \text{ el otro} \end{array}\right\}$ incógn.; $\qquad 2(x+y)=3xy=x^2-y^2$ Probl.

$$x^2-y^2=2(x+y),$$

$$x-y=2 \quad , \quad \therefore \quad y=x-2\ ;$$

$$2x+2y=3xy,$$

$$2x=3xy-2y=(3x-2)y,$$

$$y=x-2\ , \quad \ldots \quad 2x=(3x-2)(x-2)=3x^2-8x+4\ ,$$

$$x^2-\tfrac{10}{3}x=-\tfrac{4}{3}\ ,$$

$$x=\tfrac{5}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{5^2}{3^2}-\frac{4}{3}\right)}\ \ldots\ //\ \ldots\ x=\frac{5+\sqrt{13}}{3}\ ;$$

$$y=x-2\ ,$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}\ ,\ \ldots\ y=\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}-2\ \ldots\ //\ \ldots\ y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}.$$

Comp. $2\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}+\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}\right)=\frac{8\pm4\sqrt{13}}{3}=3\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}\cdot\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}\right)=\left(\frac{5\pm\sqrt{13}}{3}\right)^2-\left(\frac{-1\pm\sqrt{13}}{3}\right)^2.$

PROBLEMA XVII. Se han descontado dos letras, una de 4140 duros con 7 meses de anticipacion, y otra de 6120 duros con 4 meses de anticipacion: se ha pagado por ambas 10000 duros. ¿Cuanto por ciento ha sido el descuènto mensual?

x desc. : incógn.;

$$\left.\begin{aligned}100+7x : 100 :: 4140 &: \frac{414000}{100+7x}\\ 100+4x : 100 :: 6120 &: \frac{612000}{100+4x}\end{aligned}\right\}, \ldots \frac{414000}{100+7x}+\frac{612000}{100+4x}=10000 \text{ Probl.}$$

$$\frac{414}{100+7x}+\frac{612}{100+4x}=10\ ,$$

$$10260+594x=\tfrac{10}{10}(100+7x)(100+4x)=10000+1100x+28x^2,$$
$$28x^2+506x=-10000+10260=260,$$
$$x^2+\frac{253}{14}x=\frac{260}{28}=\frac{130}{14},$$
$$x=-\frac{253}{28}\pm\sqrt{\left(\frac{253}{28}\right)^2+\frac{130}{14}}=\tfrac{1}{2}\,//\,-\frac{130}{7}.$$

Comprob. $\begin{cases} 100+\frac{7}{2}:100::4140:\frac{828000}{207}=4000; \quad 100+\frac{4}{2}:100::6120:\frac{612000}{102}=6000. \\ 4000+6000=10000; \quad 4000+4000.\frac{7}{200}=4140; \quad 6000+6000.\frac{2}{100}=6120. \end{cases}$

OBSERVACIONES.

1ª Si el banquero recibiera los 4140 duros deberia entregar, al cabo de 7 meses, $100+7x$ duros por cada 100 recibidos; pero, como anticipa, hace la operacion contraria, y debe por cada $100+7x$, que contenga la primera letra, entregar 100 efectivos: lo mismo sucede con la otra letra de 6120 duros, por la cual se deben entregar, respecto á la anticipacion de 4 meses, 100 duros por cada $100+4x$ que contiene. Hacemos, pues, las proporciones

$$100+7x:100::4140:\frac{414000}{100+7x}, \qquad 100+4x:100::6120:\frac{612000}{100+4x};$$

y sumando el cuarto término de la primera con el cuarto de la segunda, igualamos esta suma con el líquido 10000 entregado, y resulta planteado el problema. (Véase la Leccion XXI de la Aritmética art. 246 cuest. 7ª).

2ª Cuando llevo la ecuacion constituyente á la columna central la divido de memoria por 1000 para simplificarla.

3ª Para la comprobacion tengo que buscar primero el líquido sobre que se ha de tirar el tanto por 100 mensual, y hallo que, respecto á la primera letra, es de 4000 duros, y respecto á la segunda, de 6000.

4ª En el comercio no se acostumbra hacer los descuentos con tanta ecsactitud, sino que se carga el tanto por ciento sobre toda la cantidad de la letra ó pagaré.

PROBLEMA XVIII. Buscar dos números, dada su diferencia y la de sus cubos.

a de los núm. } dif.: datos;
b de sus cubos }

x núm. may. } incógn.;
$x-a$ men. }

$$x^3-(x-a)^3=b \text{ Probl.}$$

$$b=x^3-(x^3-3ax^2+3a^2x-a^3)=3ax^2-3a^2x+a^3,$$

$$x^2-ax=\frac{b-a^3}{3a},$$

$$x=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{b-a^3}{3a}};$$

$$x-a=\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{b-a^3}{3a}}-a=-\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+\frac{b-a^3}{3a}}.$$

Aplic. Sea $\begin{cases} a=2; \\ b=218; \end{cases}$ $x=1\pm\sqrt{1+\frac{218-2^3}{3\times 2}}=1\pm 6=7 \,//\, -5;$

$$x-a=7-2=5.$$

Comprob. $7-5=2$; $7^3-5^3=343-125=218$.

PROBLEMA XIX. Buscar dos números, dada la diferencia de sus cuartas potencias, y la suma ó diferencia de sus cuadrados.

$$\left.\begin{array}{l} a \text{ dif. de las cuart. pot.} \\ b \text{ suma ó dif. de los cuad.} \end{array}\right\}\text{datos}; \quad 1.^{er}\text{ Caso } \left.\begin{array}{r} x^4-y^4=a \\ x^2+y^2=b \end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ núm.} \\ y \text{ otro} \end{array}\right\}\text{incógn.};$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4-y^4=a \\ x^2+y^2=b \end{array}\right\}, \ldots x^2-y^2=\frac{a}{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=b \\ x^2-y^2=\frac{a}{b} \end{array}\right\}, \ldots 2x^2=b+\frac{a}{b}, \ldots x=\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b+\frac{a}{2b}\right)};$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=b \\ x^2-y^2=\frac{a}{b} \end{array}\right\}, \ldots 2y^2=b-\frac{a}{b}, \ldots y=\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{2}b-\frac{a}{2b}\right)}.$$

$$2.^{\circ}\text{ Caso } \left.\begin{array}{r} x^4-y^4=a \\ x^2-y^2=b \end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^4-y^4=a \\ x^2-y^2=b \end{array}\right\}, \ldots x^2+y^2=\frac{a}{b}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\frac{a}{b} \\ x^2-y^2=b \end{array}\right\}, \ldots 2x^2=\frac{a}{b}+b, \ldots x=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}+\tfrac{1}{2}b\right)};$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=\frac{a}{b} \\ x^2-y^2=b \end{array}\right\}, \ldots 2y^2=\frac{a}{b}-b, \ldots y=\pm\sqrt{\left(\frac{a}{2b}-\tfrac{1}{2}b\right)}.$$

$$\text{Aplic.}\begin{cases} 1.^{er}\text{ Caso: Sea}\begin{cases} a=65; \\ b=13; \end{cases} \quad x=\pm\sqrt{\left(\frac{13}{2}+\frac{65}{2.13}\right)}=\pm 3;\quad y=\pm\sqrt{\left(\frac{13}{2}-\frac{65}{2.13}\right)}=\pm 2. \\ 2.^{o}\text{ Caso: Sea}\begin{cases} a=65; \\ b=5; \end{cases} \quad x=\pm\sqrt{\left(\frac{65}{2.5}+\frac{5}{2}\right)}=\pm 3;\quad y=\pm\sqrt{\left(\frac{65}{2.5}-\frac{5}{2}\right)}=\pm 2. \end{cases}$$

$$\text{Comprob.}\begin{cases} 1.^{er}\text{ Caso: } 3^4-2^4=81-16=65; \quad 3^2+2^2=9+4=13. \\ 2.^{o}\text{ Caso: } 3^4-2^4=81-16=65; \quad 3^2-2^2=9-4=5. \end{cases}$$

PROBLEMA XX. Baco encontró á Sileno dormido junto á un tonel de vino, y se aprovechó de la ocasion bebiendo por un espacio de tiempo igual á las tres quintas partes del tiempo que Sileno hubiera empleado en beberse todo el tonel. Sileno despierta y se bebe el vino que queda. Si Baco y Sileno hubieran bebido juntos, el tonel se hubiera vaciado seis horas antes, y Baco no hubiera bebido sino los dos tercios de lo que dejó á Sileno. Se pregunta ¿Cuantas horas necesitaria cada uno por si solo para beberse todo el tonel?

c número de cuartillos, que contenia el tonel: dato;

x núm. de horas en que Baco solo se podia beber el tonel } incógnitas;
$5z$ núm. de horas en que Sileno podia hacer lo mismo }

PREPARACION.

$$\text{El tonel de } c \text{ cuartillos se lo bebe}\begin{cases}\text{Baco en } x \text{ horas} \\ \text{Sileno en } 5z \text{ horas}\end{cases},\ldots \text{ En 1 hora beberá}\begin{cases}\text{Baco } \frac{c}{x} \text{ cuartillos;} \\ \text{Sileno } \frac{c}{5z} \text{ cuartillos;}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Baco bebió durante los } \tfrac{3}{5} \text{ del tiempo en que Sileno se} \\ \quad\text{hubiera bebido todo el tonel} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Sileno se hubiera bebido todo el tonel en } 5z \text{ horas} \ldots\end{array}\right\}$$

$$\text{Baco}\left\{\begin{array}{l}\text{bebia en cada hora } \dfrac{c}{x} \text{ cuartillos} \ldots\ldots\ldots \\ \text{bebió durante } 3z \text{ horas} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{El tonel contenia } c \text{ cuartillos} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{Baco se bebió } \dfrac{3cz}{x} \text{ cuartillos} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}$$

$$\text{Sileno}\left\{\begin{array}{l}\text{bebia en 1 hora } \dfrac{c}{5z} \text{ cuartillos} \ldots\ldots\ldots \\ \text{tiene que beberse } \dfrac{c}{x}(x-3z) \text{ cuartillos} \ldots\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}\text{Se ha vaciado el tonel be-} \\ \quad\text{biendo sucesivamente}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{Baco durante } 3z \text{ horas} \\ \text{Sileno } \dfrac{5z}{x}(x-3z) \text{ horas}\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}\text{Si los dos hubiesen bebido juntos} \\ \quad\text{hubieran consumido en 1 hora}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{Baco } \dfrac{c}{x} \text{ cuartill.} \\ \text{Sileno } \dfrac{c}{5z} \text{ cuartill.}\end{array}\right\}$$

..., Baco bebió durante $\frac{3}{5}\cdot 5z=3z$ horas;

..., Baco, durante $3z$ horas, bebió $3z\cdot\frac{c}{x}$...

..$=\frac{3cz}{x}$ cuartillos;

,, Baco dejó á Sileno $c-\frac{3cz}{x}=\frac{c}{x}(x-3z)$ cuartillos;

., Sileno bebió $\frac{c}{x}(x-3z)$ cuartillos en

$\frac{c}{x}(x-3z):\frac{c}{5z}=\frac{5z}{x}(x-3z)$ horas;

, Se ha vaciado el ton. en $3z+\frac{5z}{x}(x-3z)$...

..$=8z-\frac{15z^2}{x}=\frac{z}{x}(8x-15z)$ horas;

. Los dos hubieran bebido juntos en 1 hora

$\frac{c}{x}+\frac{c}{5z}=\frac{c(5z+x)}{5xz}$ cuartillos;

Bebiendo juntos hubieran consumido $\frac{c(5z+x)}{5xz}$ cuartillos en 1 hora . . . . ,
Suponese que hubiesen bebido juntos los c cuartillos del tonel . . . .

Suponiendo que bebiesen juntos hubieran estado bebiendo $\frac{5xz}{5z+x}$ horas . . . . ,
Baco bebia cada hora $\frac{c}{x}$ cuartillos . . . .

Bebiendo sucesivamente se ha vaciado el tonel en $\frac{z}{x}(8x-15z)$ horas . . . .
Bebiendo juntos se hubiera vaciado el tonel en $\frac{5xz}{5z+x}$ horas . . . . ,
69 Bebiendo junt. se hubiera vaciado el ton. 6 hor. antes

Baco, bebiendo juntos, hubiera consumido $\frac{5cz}{5z+x}$ cuartillos . . . .
Baco, bebiendo juntos, no hubiera consumido mas que los $\frac{2}{3}$ del vino, que dejó á Sileno . . . . ,
Baco dejó á Sileno $\frac{c}{x}(x-3z)$ cuartillos . . . . .

...Los dos, bebiendo juntos, hubiéran gastado, para consumir todo el tonel,

$$c : \frac{c(5z+x)}{5xz} = \frac{5xz}{5z+x} \text{ horas};$$

...Baco, bebiendo juntos, hubiera en $\frac{5xz}{5z+x}$ horas consumido $\frac{5xz}{5z+x} \cdot \frac{c}{x} = \frac{5cz}{5z+x}$ cuartillos;

...$\frac{z}{x}(8x-15z)-6 = \frac{5xz}{5z+x}$, condicion de tiempo;

...$\frac{5cz}{5z+x} = \frac{c}{x}(x-3z) \cdot \frac{2}{3}$, condicion de consumo del vino.

$$\left.\begin{aligned} \frac{z}{x}(8x-15z)-6&=\frac{5xz}{5z+x} \\ \frac{5cz}{5z+x}&=\frac{2c}{3x}(x-3z) \end{aligned}\right\}\text{Probl.}$$

$$\frac{5z}{5z+x}=\frac{2x-6z}{3x},$$

$$15xz=(2x-6z)(5z+x)=4xz-30z^2+2x^2,$$

$$30z^2+11xz=2x^2,$$

$$z=-\frac{11}{60}x\pm\sqrt{\left(\frac{2}{30}x^2+\frac{121}{3600}x^2\right)}=-\frac{11}{60}x\pm\frac{19}{60}x\ldots//\ldots z=\frac{2x}{15}//-\tfrac{1}{2}x;$$

$$\frac{5xz}{5z+x}=\frac{z}{x}(8x-15z)-6=\frac{8xz-15z^2-6x}{x},$$

$$5x^2z=(8xz-15z^2-6x)(5z+x)=25xz^2-75z^3+8x^2z-6x^2-30xz,$$

$$6x^2=-75z^3+25xz^2+3x^2z-30xz,$$

$$z=\frac{2}{15}x,\ \ldots\ 6x^2=-75\cdot\frac{2^3}{15^3}x^3+25\cdot\frac{2^2}{15^2}x^3+3\cdot\frac{2}{15}x^3-30\cdot\frac{2}{15}x^2,$$

$$6=-\frac{8x}{45}+\frac{20x}{45}+\frac{18x}{45}-4=\frac{2}{3}x-4,$$

$$\frac{2}{3}x=6+4=10\quad ,\quad\ldots\quad x=\frac{3\cdot10}{2}=15;$$

$$z=\frac{2}{15}x,$$

$$x=15\ ,\ .\ .\ .\ z=\frac{2}{15}.15=2\quad ,\quad .\quad .\quad .\quad 5z=5.2=10.$$

OBSERVACIONES.

1ª Para traducir este problema en álgebra se requiere mucha preparacion. A este fin dispongo dos columnas, y estampo en la de la izquierda las premisas ó circunstancias, que reuno y comparo entre si, para llevar, por consecuencias, los resultados á la columna de la derecha.

2ª La deducion de las ecuaciones, que espresan la condicion del tiempo y la del consumo, y que por tanto constituyen la planta, no necesitan mas esplicacion que el mismo raciocinio con que la preparacion está formada.

3ª Las operaciones del cálculo se entienden bastante en las ecuaciones por los miembros indicativos.

4ª Hemos desechado el segundo valor de $z=-\frac{11}{60}x\pm\frac{19}{60}x=\frac{2}{15}x\ //\ -\frac{1}{2}x$, porque, siendo negativo, no hace al caso de la cuestion.

5ª Este problema no admite comprobacion numérica; pues, segun su naturaleza, solo podria comprobarse con la práctica.

6ª Tambien puede resolverse por la comparacion de las ecuaciones constituyentes, en esta forma;

$$\left.\begin{aligned}\frac{5xz}{5z+x}&=\frac{z}{x}(8x-15z)-6\\ \frac{5xz}{5z+x}&=\tfrac{2}{3}(x-3z)\end{aligned}\right\}, \ldots\, 8z-\frac{15z^2}{x}-6=\tfrac{2}{3}x-2z,$$

$$24xz-45z^2-18x=2x^2-6xz,$$

$$45z^2-30xz=-2x^2-18x,$$

$$z^2-\tfrac{2}{3}xz=-\frac{2x^2}{45}-\frac{18x}{45},$$

$$z^2-\tfrac{2}{3}xz+\frac{x^2}{9}=\frac{x^2}{9}-\frac{2x^2}{45}-\frac{18x}{45}=\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15},$$

$$z-\frac{x}{3}=\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15}\right)}, \ldots\, z=\frac{x}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15}\right)};$$

pero, debiendo ser z una cantidad racional, es necesario que $\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15}$ sea un cuadrado perfecto.

7.ª Supongo $\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15}=m^2$, $\ldots$ $x^2-6x=15m^2$,

$x=3\pm\sqrt{(15m^2+9)}$, donde observo que m^2 ha de ser un cuadrado perfecto, y lo ha de ser tambien $15m^2+9$ para que x sea una cantidad racional. Advierto asimismo que, tratando esta ecuacion como indeterminada, y suponiendo primero $m=1$ y despues $m=2$, nada se consigue; pero, sustituyendo 3 en lugar de m, tendremos $\sqrt{(15m^2+9)}=\sqrt{(15\cdot9+9)}=12$, y por tanto $x=3+12=15$, como hallamos en la resolucion anterior.

8ª Volvamos á la ecuacion del valor de z para sustituirle el de x, lo que haremos asi: $z=\frac{x}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{x^2}{15}-\frac{6x}{15}\right)}\ldots$

$\ldots=\frac{15}{3}\pm\sqrt{\left(\frac{15^2}{15}-\frac{6.15}{15}\right)}=5\pm3=8 \,/\!/\, 2.$

9ª Este valor es dudoso por la ambigüedad del signo, y aunque la resolucion anterior manifiesta que el verdadero es $z=2$, nos desentendemos de este conocimiento, y vamos á inquirir el resultado admisible, por el método de sustitucion, de esta manera:

$$\frac{5z}{5z+x}=\frac{2x-6z}{3x}=\tfrac{2}{3}-\frac{2z}{x},$$

$$5z=2\left(\frac{1}{3}-\frac{z}{x}\right)(5z+x),$$

$$x=15,\ldots 5z=2\left(\frac{1}{3}-\frac{z}{15}\right)(5z+15)=\tfrac{10}{3}\left(1-\frac{z}{5}\right)(z+3)=\frac{4z-2z^2+30}{3},$$

$$15z=4z-2z^2+30,$$

$$z^2+\tfrac{11}{2}z=\tfrac{30}{2},$$

$$z=-\tfrac{11}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{11^2}{4^2}+\frac{30}{2}\right)}=-\tfrac{11}{4}\pm\tfrac{19}{4}=2;$$ esto es, $z=2$, desechando el otro valor $z=-\frac{15}{2}$ por ser negativo.

PROBLEMAS PROPUESTOS.

1º Se pide un número, cuyo cuadrado sumado con su séptuplo dé 44.

Respuesta: El número es 4 ó bien -11.

2º Un agente de comercio recibe para el giro de cada negociante tantas veces 15 doblones cuantos son aquellos individuos. Su ganancia, que es tantas veces 2 doblones por 100 como negociantes hay, multiplicada por $\frac{2}{15}$ da de producto el número justo de negociantes. ¿Cuantos son?

Resp. Son 5 negociantes.

3º Un ganadero empleó en corderos 2400 reales, siendo el precio tal que con el mismo dinero podia haber comprado 20 mas si se los hubieran dado 4 reales mas baratos. ¿Cuantos corderos compró y cuanto le costó cada uno?

Resp. Compró 100 corderos á 24 reales.

4º Dos andarines salen al mismo tiempo de un pueblo para otro distante 99 leguas: el primero anda cada dia 2 leguas mas que el otro, y llega 2 dias antes. ¿Cuantas leguas anda diariamente cada uno, y cuantos dias tarda en llegar?

Resp. El primero anda diariamente 11 leguas y tarda 9 dias, y el segundo anda diariamente 9 leguas y tarda 11 dias.

5º Un menestral, que ha trabajado varios dias, ha percibido 384 reales; y otro, que ha trabajado 6 dias menos ganando distinto jornal, ha recibido 216 reales. Si este hubiera trabajado todos los dias, y el primero hubiera faltado 6, hubiera ganado cada uno la misma cantidad. Se pregunta ¿cuantos son los dias de trabajo y el jornal de cada menestral?

Resp. El primero trabajó 24 dias á 16 reales, y el segundo 18 dias á 12 reales.

6º Hallar un número cuya raiz cuadrada tenga con su raiz cúbica la razon de 5 á 2.

Resp. El número es 244,140625.

7º De dos personas, que han formado compañia, la una ha puesto 30 doblones, que han estado 17 meses en el comercio, y la segunda ha puesto su caudal 7 meses despues, por lo que ha permanecido en giro solo 12 meses.

El caudal del segundo socio, que no conocemos, asciende con su ganancia á 26 doblones, y la ganancia total ha sido 18 y $\frac{3}{4}$ doblones. Se pregunta ¿cuanto habia puesto el segundo, y cual era la ganancia de cada uno?

Resp. El segundo habia puesto 20 doblones, su ganancia eran 6 doblones y la del primero eran 12 y $\frac{3}{4}$.

8º Hallar tres números en proporcion continua tales que el segundo sea igual al primero aumentado de 3, y el tercero sea el cuádruplo del primero aumentado de 5.

Resp. Los tres números son los que forman esta proporcion $\div \frac{1 \pm \sqrt{109}}{6} : \frac{19 \pm \sqrt{109}}{6} : \frac{34 \pm 4\sqrt{109}}{6}$.

9º Se pide descomponer el número 6 en dos factores tales que la suma de sus cubos componga 35.

Resp. Los factores racionales son 2 y 3.

El caudal del segundo socio, que no conocemos, asciende con su ganancia á 26 doblones, y la ganancia total ha sido 18 y $\frac{3}{4}$ doblones. Se pregunta ¿cuanto habia puesto el segundo, y cual era la ganancia de cada uno?

Resp. El segundo habia puesto 20 doblones, su ganancia eran 6 doblones y la del primero eran 12 y $\frac{3}{4}$.

8º Hallar tres números en proporcion continua tales que el segundo sea igual al primero aumentado de 3, y el tercero sea el cuádruplo del primero aumentado de 5.

Resp. Los tres números son los que forman esta proporcion $\div\div \frac{1 \pm \sqrt{109}}{6} : \frac{19 \pm \sqrt{109}}{6} : \frac{34 \pm 4\sqrt{109}}{6}$.

9º Se pide descomponer el número 6 en dos factores tales que la suma de sus cubos componga 35.

Resp. Los factores racionales son 2 y 3.

PROBLEMAS.

COLECCION QUINTA.

Indeterminados de Segundo Grado.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la LECCION *XVII*.

PROBLEMA I. Hallar dos cuadrados, que se diferencien en a cantidad entera y positiva.

$\left.\begin{array}{l} x \text{ suma de las raices de los cuad.} \\ z \text{ diferencia de estas raices} \end{array}\right\}$ incógn.;

$$\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2=a \text{ Probl.}$$

$$\frac{x^2+2xz+z^2-x^2+2xz-z^2}{4}=a \,//\, xz=a,$$

$$x=\frac{a}{z}.$$

Aplic. Sea $a=60$; $z=1//2//3//4//5//6//10//12//15//20//30//60$;

$$x=\frac{60}{z}=60//30//20//15//12//10//6//5//4//3//2//1.$$

$$\text{Comprob. } \left(\frac{10+6}{2}\right)^2-\left(\frac{10-6}{2}\right)^2=8^2-2^2=60.$$

OBSERVACIONES.

1ª Para resolver facilmente este problema tomamos por incógnitas la suma x y la diferencia z de las raices de los cuadrados pedidos; y como sabemos que con estos datos (Probl. I. Col. seg.) el número mayor es la mitad de la suma y de la diferencia, y el menor la mitad del esceso que lleva la suma á la diferencia; resulta que la raiz mayor es $\frac{x+z}{2}$, y la menor $\frac{x-z}{2}$. Y con la diferencia de sus cuadrados formamos la ecuacion constituyente $\left(\frac{x+z}{2}\right)^2-\left(\frac{x-z}{2}\right)^2=a$.

2ª Desenvolvemos estos cuadrados, y la ecuacion $xz=a$ manifiesta que una de las indeterminadas es igual al cociente de la cantidad conocida dividiendola por la otra indeterminada.

3ª Como a no tiene valor numérico le suponemos 60 para hacer alguna aplicacion.

4ª Bajo este supuesto buscamos los divisores ecsactos de 60, que son valores de una de las indeterminadas, para hallar con las divisiones la otra.

5ª Aunque se presentan doce soluciones, no hay en realidad mas que seis; porque, desde la mitad de ellas, las incógnitas cambian de espresion una con otra.

6ª Para la comprobacion hemos tomado la sesta solucion, en que 10 es la suma de las raices y 6 su diferencia, con lo que ha resultado 8 la raiz mayor y 2 la menor, cuyos cuadrados 64 y 4 tienen la diferencia dada 60.

7ª Pudieramos haber planteado el problema segun viene propuesto, suponiendo N^2 el cuadrado mayor y n^2 el menor, de modo que $N^2-n^2=a$, con lo que obtendriamos $N=\sqrt{a+n^2}$; pero sería muy engorroso sustituir una multitud de valores á la indeterminada n para hallar con este tanteo los de la otra N.

PROBLEMA II. Buscar dos números tales que, añadiendo á su suma el producto de uno por otro, resulten 79.

$\left.\begin{array}{l} x \text{ un núm.} \\ z \text{ otro} \end{array}\right\}$ incógn.; $x+z+xz=79$ Probl.

$$xz+z=79-x,$$

$$z=\frac{79-x}{x+1}=-\frac{x-79}{x+1}=-1+\frac{80}{x+1};$$

Los divisores de 80 son $x+1=1\,//\,2\,//\,4\,//\,5\,//\,8\,//\,10\,//\,16\,//\,20\,//\,40\,//\,80$;

$$x=0\,//\,1\,//\,3\,//\,4\,//\,7\,//\,9\,//\,15\,//\,19\,//\,39\,//\,79;$$

$$z=-1+\frac{80}{x+1}=79\,//\,39\,//\,19\,//\,15\,//\,9\,//\,7\,//\,4\,//\,3\,//\,1\,//\,0.$$

OBSERVACIONES.

1ª En este problema procuramos desde luego separar las incógnitas para que, dando valor á la una, resulte la otra, como sucede en la ecuacion final $z=-1+\frac{80}{x+1}$.

2ª A este fin buscamos los divisores ecsactos de 80, y los igualamos sucesivamente con $x+1$. Rebajando de cada uno de ellos la unidad sacamos los diferentes valores de x.

3ª Estos valores sustituidos en la ecuacion final nos dan los correspondientes de z.

4ª La primera mitad de las soluciones es lo mismo que la segunda, considerando una variable en lugar de otra.

PROBLEMA III. Hallar dos números racionales, cuya suma sea á la de sus cuadrados como 3 á 5.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ un núm.} \\ y \text{ otro} \end{array}\right\}\text{incógn.};\qquad x+y : x^2+y^2 :: 3 : 5 \text{ Probl.}$$

$$3x^2+3y^2=5x+5y,$$

$$3x^2-5x=-3y^2+5y,$$

$$\text{Supongo } y=xz,\ \ldots\ 3x^2-5x=-3x^2z^2+5xz,$$

$$3x-5=-3xz^2+5z,$$

$$3x+3xz^2=5+5z=5(1+z),$$

$$x=\frac{5(1+z)}{3(1+z^2)};$$

$$y=zx,$$

$$x=\frac{5(1+z)}{3(1+z^2)},\ \ldots\ y=\frac{5z(1+z)}{3(1+z^2)}.$$

$$\text{Sup. } z=2,\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5(1+z)}{3(1+z^2)}=\frac{5(1+2)}{3(1+2^2)}=\frac{15}{15}=1; \\ y=\frac{5z(1+z)}{3(1+z^2)}=\frac{5\cdot2(1+2)}{3(1+2^2)}=\frac{15\cdot2}{15}=2. \end{array}\right.$$

$$z=3,\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5(1+z)}{3(1+z^2)}=\frac{5(1+3)}{3(1+3^2)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}; \\ y=\frac{5z(1+z)}{3(1+z^2)}=\frac{5\cdot3(1+3)}{3(1+3^2)}=\frac{20\cdot3}{30}=2. \end{array}\right.$$

&c.

$$\text{Comprob.}\begin{cases}1+2:1^2+2^2::3:5\ ;\\ \left(\frac{2}{3}+2=\frac{24}{9}\right):\left(\frac{2^2}{3^2}+2^2=\frac{40}{9}\right)::24:40::3:5.\end{cases}$$

OBSERVACIONES.

1.ª Introducimos la variable z de modo que sea $y=xz$ para que la derivacion $3x^2-5x=-3x^2z^2+5xz$ se pueda dividir por x, y las dos incógnitas, que constituyen el problema, no pasen del primer grado.

2.ª Este problema tiene una infinidad de soluciones con los diferentes valores, que se quieran dar á la variable intermedia z en números racionales.

PROBLEMA IV. Partir un cuadrado aa en otros dos cuadrados.

$$\left.\begin{array}{l}x \text{ raiz de un cuad.}\\ y \text{ raiz de otro}\end{array}\right\}\text{incógn.};$$

$$xx+yy=aa \text{ Probl.}$$

$$xx=aa-yy,$$

$$\text{Sup. } y=xz-a\ ,\ \ .\ \ .\ \ .\ xx=aa-x^2z^2+2axz-aa,$$

$$xx-2axz+x^2z^2=x(x-2az+xz^2)=0,\ldots\begin{cases}x=0;\\ x-2az+xz^2=0;\end{cases}$$

$$x-2az+xz^2=0,$$

$$(z^2+1)x=2az\ ,\ \ .\ \ .\ \ .\ x=\frac{2az}{z^2+1};$$

$$y=xz-a,$$

$$x=\frac{2az}{z^2+1}\ ,\ .\ .\ .\ y=\frac{2az}{z^2+1}.z-a\ \ldots\ //\ \ldots\ y=\frac{a(z^2-1)}{z^2+1}.$$

$$\text{Aplic. } aa=25\ ,\ .\ .\ .\ \left.\begin{array}{r}a=5\\ z=3\end{array}\right\},\ldots\begin{cases}x=\dfrac{2az}{z^2+1}=\dfrac{2\cdot 5\cdot 3}{3^2+1}=3\ ;\\[2ex] y=\dfrac{a(z^2-1)}{z^2+1}=\dfrac{5(3^2-1)}{3^2+1}=4\ ;\end{cases}$$

Comprob. $3^2+4^2=25$.

OBSERVACIONES.

1.ª Con la suposicion $y=xz-a$ hemos logrado rebajar un grado á las ecuaciones derivadas en el primer período.

2.ª Bien se resuelve el problema con la resultante $x=0$, en cuyo caso viene á ser $yy=aa$, que dá $y=\pm a$; pero, como suponemos que ecsiste un cuadrado efectivo xx, desechamos la espresion $x=0$.

3.ª Dando nuevos valores á z se resuelve el problema con otras cantidades; pero no podemos suponer $z=1$, porque entonces $y=\frac{a(z^2-1)}{z^2+1}=\frac{5(1^2-1)}{1^2+1}=\frac{0}{2}=0$, y volvemos al mismo caso de la observacion anterior, pues que resulta $xx=aa$ ó bien $x=\pm a$.

PROBLEMA V. Busquemos dos números tales que la diferencia de sus cuadrados sea igual á un cuadrado conocido aa.

$\left.\begin{array}{l}x \text{ un núm.}\\ y \text{ otro}\end{array}\right\}$ incógn.;

$$yy-xx=aa \text{ Probl.}$$

$$xx=yy-aa,$$

$$\text{Sup. } y=xz-a, \ldots xx=x^2z^2-2axz+aa-aa,$$

$$x^2z^2-2axz-xx=x(xz^2-2az-x)=0, \ldots \left\{\begin{array}{l}x=0;\\ xz^2-2az-x=0;\end{array}\right.$$

$$xz^2-2az-x=0,$$

$$(z^2-1)x=2az \quad , \quad . \quad . \quad . \quad x=\frac{2az}{z^2-1};$$

$$y=xz-a,$$

$$x=\frac{2az}{z^2-1}, \ldots y=\frac{2az}{z^2-1}.z-a \ldots // \ldots y=\frac{a(z^2+1)}{z^2-1}.$$

$$\text{Aplic. } aa=25, \ldots a=5 \\ z=\tfrac{3}{2}\Bigg\}, \ldots \left\{ \begin{aligned} x&=\frac{2az}{z^2-1}=\frac{2 \cdot 5 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{3^2}{2^2}-1}=12; \\ y&=\frac{a(z^2+1)}{z^2-1}=\frac{5\left(\frac{3^2}{2^2}+1\right)}{\frac{3^2}{2^2}-1}=13. \end{aligned} \right.$$

Comprob. $13^2-12^2=25$.

OBSERVACIONES.

1ª Desechamos, como en el problema antecedente, la ecuacion resultante $x=0$, porque xx debe ser un verdadero cuadrado.

2ª Si hubieramos supuesto $y=xz+a$ hubieramos sacado $x=\frac{2az}{1-z^2}$, $y=\frac{a(1+z^2)}{1-z^2}$; pero estas fórmulas no ofrecen ninguna ventaja sobre las que presentamos, pues se necesita siempre hacer en ellas á z menor que la unidad para sacar valores positivos.

3ª En las nuestras $x=\frac{2az}{z^2-1}$, $y=\frac{a(z^2+1)}{z^2-1}$, es necesario sustituir en lugar de z números enteros ó fraccionarios mayores que la unidad para que resulten valores positivos.

4ª Si el cuadrado conocido fuese $aa=16$, y supusieramos $z=3$, tendriamos

$$x=\frac{2az}{z^2-1}=\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{3^2-1}=\frac{8 \cdot 3}{8}=3;$$

$$y=\frac{a(z^2+1)}{z^2-1}=\frac{4(3^2+1)}{3^2-1}=\frac{4 \cdot 10}{8}=5;$$

esto es, $yy-xx=5^2-3^2=16=aa$.

PROBLEMA VI. Hallar dos números tales que, sumando el cuadrado de uno de ellos con el producto del cuadrado del otro por un número dado b, resulte un cuadrado conocido aa.

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ un núm.} \\ y \text{ otro} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$xx+byy=aa \text{ Probl.}$$

$$byy=aa-xx,$$

$$\text{Sup. } x=zy-a, \ldots byy=aa-y^2z^2+2ayz-aa,$$

$$y^2z^2-2ayz+byy=y(yz^2-2az+by)=0, \ldots \left\{\begin{array}{l} y=0; \\ z^2y-2az+by=0; \end{array}\right.$$

$$z^2y-2az+by=0,$$

$$(b+z^2)y=2az, \quad \ldots \quad y=\frac{2az}{b+z^2};$$

$$x=zy-a,$$

$$y=\frac{2az}{b+z^2}, \ldots x=z.\frac{2az}{b+z^2}-a \ldots // \ldots x=\frac{a(b-z^2)}{b+z^2}.$$

$$\text{Aplic. } aa=49, \ldots \left.\begin{array}{l} a=7 \\ b=5 \\ z=\frac{5}{3} \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{a(b-z^2)}{b+z^2}=\dfrac{7\left(5-\dfrac{5^2}{3^2}\right)}{5+\dfrac{5^2}{3^2}}=2; \\ \\ y=\dfrac{2az}{b+z^2}=\dfrac{2\cdot7\cdot\frac{5}{3}}{5+\dfrac{5^2}{3^2}}=3. \end{array}\right.$$

$$\text{Comprob. } 2^2+5\cdot3^2=49.$$

OBSERVACION.

Aunque la derivada del tercer período es $x=z.\dfrac{2az}{b+z^2}-a\ldots$ $\ldots=\dfrac{a(z^2-b)}{b+z^2}$, hemos sacado la resultante $x=\dfrac{a(b-z^2)}{b+z^2}$ porque ibamos á hacer una aplicacion en que $b>z^2$; pero, mediante á que la suposicion de valor á la primer indeterminada puede ser $x=\pm zy\mp a$, que da siempre el mismo resultado

$xx = y^2z^2 - 2ayz + aa$, tenemos en general $x = \pm zy \mp a \ldots$

$\ldots = \pm z . \frac{2az}{b+z^2} \mp a = \mp \frac{a(b-z^2)}{b+z^2}$, tomando el signo superior cuando $b < z^2$ y el inferior cuando $b > z^2$, para que en las aplicaciones resulte siempre á x un valor positivo.

PROBLEMA VII. Hallar dos números tales que, si del cuadrado del uno se resta el producto del cuadrado del otro por el cuadrado de un número dado b, la resta sea igual á un número dado a.

x un núm. } incógn.;
y otro }

$$xx - b^2y^2 = a \text{ Probl.}$$

$$-b^2y^2 = a - xx,$$

Supongo $x = z - by$, $\ldots -b^2y^2 = a - zz + 2bzy - b^2y^2$,

$$2bzy = zz - a, \quad . \quad . \quad . \; y = \frac{zz-a}{2bz};$$

$$x = z - by,$$

$$y = \frac{zz-a}{2bz}, \; . \; . \; . \; x = z - b . \frac{zz-a}{2bz} \ldots // \ldots x = \frac{zz+a}{2z}.$$

Aplic. $\left.\begin{array}{l} a = 28 \\ b = 2 \\ z = 14 \end{array}\right\}, \; . \; . \; . \left\{\begin{array}{l} x = \frac{zz+a}{2z} = \frac{14^2+28}{2.14} = 8; \\ y = \frac{zz-a}{2bz} = \frac{14^2-28}{2.2.14} = 3. \end{array}\right.$

Comprob. $8^2 - 4 . 3^2 = 28$.

PROBLEMA VIII. Partir la suma de dos cuadrados $aa+bb$ en otros dos cuadrados.

x raiz de un cuad. } incógn.;
y raiz de otro }

$$xx + yy = aa + bb \text{ Probl.}$$

$$\text{Sup.}\ \left.\begin{array}{l} x=a-z \\ y=zu-b \end{array}\right\},\quad\ldots\quad \begin{array}{l} aa+bb=xx+yy, \\ aa+bb=a^2-2az+z^2+z^2u^2-2bzu+b^2, \end{array}$$

$$z^2+z^2u^2-2az-2bzu=z(z+zu^2-2a-2bu)=0,\ldots \left\{\begin{array}{l} z=0; \\ z+zu^2-2a-2bu=0; \end{array}\right.$$

$$z+zu^2-2a-2bu=0,$$

$$(1+u^2)z=2(a+bu),\quad\ldots\quad z=\frac{2(a+bu)}{1+u^2};$$

$$x=a-z,$$

$$z=\frac{2(a+bu)}{1+u^2},\quad\ldots\quad x=a-\frac{2(a+bu)}{1+u^2}\ \ldots\ /\!/\ \ldots\ x=\frac{auu-a-2bu}{1+u^2};$$

$$y=zu-b,$$

$$z=\frac{2(a+bu)}{1+u^2},\quad\ldots\quad y=\frac{2(a+bu)}{1+u^2}.u-b\ \ldots\ /\!/\ \ldots\ y=\frac{2au+bu^2-b}{1+u^2}.$$

$$\text{Aplic.}\ \left.\begin{array}{l} aa=144,\ldots a=12 \\ bb=\ \ 1,\ldots b=1 \\ \qquad\qquad u=\frac{5}{2} \end{array}\right\},\ \ldots \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{auu-a-2bu}{1+u^2}=\dfrac{12.\frac{25}{4}-12-2.1.\frac{5}{2}}{1+\frac{25}{4}}=8; \\ y=\dfrac{2au+bu^2-b}{1+u^2}=\dfrac{2.12.\frac{5}{2}+1.\frac{25}{4}-1}{1+\frac{25}{4}}=9. \end{array}\right.$$

Comprob. $8^2+9^2=145=12^2+1^2$.

PROBLEMA IX. Un tabernero compra vino de dos suertes: la arroba del uno le cuesta a, la arroba del otro le cuesta b: paga por toda la partida un cuadrado incógnito tal que, si se le añade un número dado d, la suma es un cuadrado, cuya raiz es el número de todas las arrobas. ¿Cuantas arrobas compró al precio a y cuantas al precio b?

$$\left.\begin{array}{r}xx \text{ cuad.}\\ t \text{ tot. arr.}\\ u \text{ arr. á } b\\ t-u \text{ arr. á } a\end{array}\right\}\text{incógn.}; \quad \left.\begin{array}{c}xx=bu+a(t-u)\\ \sqrt{xx+d}=t\end{array}\right\}\text{Probl.}$$

$$xx+d=tt,$$

$$xx=tt-d;$$

$$\left.\begin{array}{l}xx=tt-d\\ xx=bu+a(t-u)\end{array}\right\}, \ldots tt-d=bu+at-au,$$

$$(a-b)u=at-tt+d, \quad \ldots \quad u=\frac{at-tt+d}{a-b};$$

$$u=\frac{at-tt+d}{a-b}, \ldots t-u=t-\frac{at-tt+d}{a-b} \ldots // \ldots t-u=\frac{tt-bt-d}{a-b};$$

$$u=\frac{at-tt+d}{a-b}, \ldots \frac{at-tt+d}{a-b}>0,$$

$$at-tt+d>0,$$

$$tt-at-d<0,$$

$$tt-at<d,$$

$$tt-at+\frac{aa}{4}<d+\frac{aa}{4},$$

$$t-\frac{a}{2}<\sqrt{d+\frac{aa}{4}},$$

$$t<\frac{a}{2}+\sqrt{d+\frac{aa}{4}};$$

$$t-u=\frac{tt-bt-d}{a-b}, \ldots \frac{tt-bt-d}{a-b}>0,$$

$$tt-bt-d>0,$$

$$tt-bt>d,$$

$$tt-bt+\frac{bb}{4}>d+\frac{bb}{4},$$

$$t-\frac{b}{2}>\sqrt{d+\frac{bb}{4}},$$

$$t>\frac{b}{2}+\sqrt{d+\frac{bb}{4}}.$$

$$\text{Apl.}\left.\begin{array}{l}a=8\\ b=5\\ d=60\end{array}\right\},\ldots\left\{\begin{array}{l}t<\left(\frac{a}{2}+\sqrt{d+\frac{aa}{4}}=\frac{8}{2}+\sqrt{60+\frac{8^2}{4}}=4+\sqrt{76}\right);\\ t>\left(\frac{b}{2}+\sqrt{d+\frac{bb}{4}}=\frac{5}{2}+\sqrt{60+\frac{5^2}{4}}=\frac{5+\sqrt{265}}{2}\right);\end{array}\right.$$

$$\text{Sup.}\left\{\begin{array}{l}t<\left(4+\sqrt{64}=4+8=12\right);\\ t>\left(\frac{5+\sqrt{289}}{2}=\frac{5+17}{2}=11\right);\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}t<12\\ t>11\end{array}\right\},\ldots t=\frac{12+11}{2}=\frac{23}{2};$$

$$\left.\begin{array}{l}a=8\\ b=5\\ d=60\\ t=\frac{23}{2}\end{array}\right\},\ldots u=\frac{at-tt+d}{a-b}=\frac{8\cdot\frac{23}{2}-\frac{23^2}{2^2}+60}{8-5}=\frac{79}{12};$$

$$\left.\begin{array}{l}t=\frac{23}{2}\\ u=\frac{79}{12}\end{array}\right\},\ldots t-u=\frac{23}{2}-\frac{79}{12}=\frac{59}{12};$$

$$\left.\begin{array}{l}t=\frac{23}{2}\\ d=60\end{array}\right\},\ldots x=\sqrt{tt-d}=\sqrt{\frac{23^2}{2^2}-60}=\frac{17}{2}.$$

$$\text{Comprob.}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{17}{2}\right)^2=5\times\frac{79}{12}+8\times\frac{59}{12}=\frac{289}{4};\\ \sqrt{\frac{289}{4}+60}=\sqrt{\frac{529}{4}}=\frac{23}{2}.\end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª La plantificacion de este problema no ofrece dificultad, pues debiendo ser el cuadrado incógnito igual á la suma de los valores de cada especie de vino, resulta que la primer ecuacion constituyente es $xx=bu+a(t-u)$, y habiendo de componer la suma de este cuadrado y del dato d otro cuadrado, cuya raiz sea el total de arrobas, tendremos para la segunda ecuacion constituyente $\sqrt{xx+d}=t$.

2ª Las operaciones, que ejecutamos en el primero, segundo y tercer período, se comprenden facilmente por su simple inspeccion.

3ª Despues traemos la ecuacion resultante $u=\frac{at-tt+d}{a-b}$ á la columna lateral, y deducimos á la central que $\frac{at-tt+d}{a-b}>0$, pues que u ha de tener un valor positivo. En seguida hacemos las derivaciones correspondientes, mudando en la segunda el signo $>$ en $<$ porque ponemos en sentido contrario todos los términos de la cantidad comparada, y concluye el período con $t<\frac{a}{2}+\sqrt{d+\frac{aa}{4}}$.

4ª Lo mismo se practica con $t-u=\frac{tt-bt-d}{a-b}$, y sacamos $t>\frac{b}{2}+\sqrt{d+\frac{bb}{4}}$.

5ª Ahora, haciendo aplicacion con valores numéricos de los datos a, b, d, obtenemos $t<4+\sqrt{76}$ y $t>\frac{5+\sqrt{265}}{2}$ consiguiente á la comparacion que hacemos de t con cada uno de los miembros iguales comprendidos dentro de paréntesis.

6ª Como 76 no es cuadrado perfecto tomamos en su lugar el menor mas inmediato, que es 64; y como tampoco es cuadrado cabal 265 tomamos en su lugar el mayor mas inmediato, que es 289, siguiendo en esto la indicacion de los signos de diferencia ó esceso. En virtud de estas suposiciones sacamos $t<12$ y $t>11$.

7ª Este resultado de $t<12$ y $t>11$ lo llevamos á la columna lateral, y deducimos á la central que t puede ser la semisuma de estos valores, esto es, $t=\frac{12+11}{2}=\frac{23}{2}$.

8ª Con este valor y con los datos continuamos la aplicacion, y sacamos que de las $t=11+\frac{1}{2}$ arrobas de vino, las $u=6+\frac{7}{12}$ se compraron á 5, y las $t-u=4+\frac{11}{12}$ á 8; siendo el cuadrado $xx=\left(\frac{17}{2}\right)^2$ su importe, que sumado con el dato $d=60$ da la cantidad, de que estraida la raiz cuadrada, resulta la totalidad de arrobas, es decir, $\sqrt{xx+d}=\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2+60}=\frac{23}{2}=t$.

do cabal 256, tomamos en su lugar el mayor mas inmediato, que es 289, siguiendo en esto la indicacion de los signos de diferencia ó exceso. En virtud de estas suposiciones sacamos $r < r_2$ y $r > r_1$.

7º Este resultado de $r < r_2$ y $r > r_1$ lo llevamos á la columna lateral, y deducimos de la central que r puede ser la semisuma de estos valores, esto es, $r = \frac{r_2 + r_1}{2} = \frac{23}{2}$.

8º Con este valor y con los datos continuamos la aplicacion, y sacamos que de las $r = 11\frac{1}{2}$ arrobas de vino, las $u = 6 + \frac{7}{12}$ se compraron á 5, y las $r - u = 4 + \frac{11}{12}$ á 6; siendo el cuadrado $ux = \left(\frac{17}{2}\right)^2$ su importe, que sumado con el dato $d = 60$ da la cantidad, de que estraida la raiz cuadrada, resulta la totalidad de arrobas, es decir, $\sqrt{ux + d} = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 + 60} = \frac{23}{2} = r$.

PROBLEMAS.

COLECCION SESTA.

Tercer Grado.

ADVERTENCIA.

Para estudiar estos problemas conviene tener presente la LECCION *XXIII.*

PROBLEMA I. Hallar dos números, siendo conocido su producto a y la suma b de sus cubos.

$\left.\begin{array}{l} N \text{ núm. may.} \\ n \text{ men.}\end{array}\right\}$ incógn.;

$$\left.\begin{array}{r} Nn=a \\ N^3+n^3=b \end{array}\right\} \text{Probl.}$$

$$N^3=b-n^3,$$

$$n=\frac{a}{N}, \quad \ldots \quad N^3=b-\frac{a^3}{N^3},$$

$$N^6-bN^3=-a^3,$$

$$N^3=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}, \quad \ldots \quad N=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^3}\right)};$$

$$n=\frac{a}{N}, \quad \ldots \quad n=\frac{a}{\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{b^2-4a^3}\right)}}.$$

Aplic. Sea $\left\{\begin{array}{l} a=10; \\ b=133; \end{array}\right.$ $N=\sqrt[3]{(\frac{133}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{133^2-4.10^3})}=5 \;//\; 2;\quad n=\frac{10}{5}=2 \;//\; n=\frac{10}{2}=5.$

Comprob. $5.2=10;\quad 5^3+2^3=133.$

OBSERVACIONES.

1ª Paso el segundo término del primer miembro de la segunda ecuacion constituyente al otro miembro para formar la primer ecuacion principal, y sustituyo el valor de la segunda incógnita tomado de la primer ecuacion constituyente.

2ª Luego hago la resolucion como de una ecuacion comparable á las de segundo grado, segun la doctrina de la Leccion XXI.

PROBLEMA II. Dada la diferencia 4 de dos números y la suma 2240 de sus cubos, hallar los números.

t mitad de la suma de los núm.: incógn.;

$$(t+2)^3+(t-2)^3=2240 \quad \text{Probl.}$$

$$t^3+12t-1120=0;$$

$$\left.\begin{array}{r} t^3+pt+q=0 \\ t^3+12t-1120=0 \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} p=12; \\ q=-1120; \end{array}\right.$$

$$t=\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})}+\sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3})},$$

$$\left.\begin{array}{r} p=12 \\ q=-1120 \end{array}\right\}, \ldots t=\sqrt[3]{(\tfrac{1120}{2}+\sqrt{313600+64})}+\sqrt[3]{(\tfrac{1120}{2}-\sqrt{313600+64})} \ldots // \ldots t=\sqrt[3]{(560+\sqrt{313664})}+\sqrt[3]{(560-\sqrt{313664})};$$

$$P+\sqrt{Q}=560+\sqrt{313664}\,,\ \ldots \begin{cases} P= & 560\,; \\ Q= & 313664\,; \end{cases}$$

$$c=\frac{\sqrt[3]{(P^2-Q)z}}{z}\,,$$

$$\left.\begin{matrix} P= & 560 \\ Q= & 313664 \end{matrix}\right\}, \quad . \quad . \quad . \ c=\frac{\sqrt[3]{(560^2-313664)z}}{z}=\frac{\sqrt[3]{-64z}}{z}\,,$$

Supongo $z=1$, . . . $c=\dfrac{\sqrt[3]{-64.1}}{1}$ . . . $/\!/\ldots c=-4\,;$

$$\left.\begin{matrix} c=-4 \\ z=\ \ 1 \\ P=560 \end{matrix}\right\}, \ldots 4zx^3-3czx-P=4.1x^3-3.-4.1x-560=4x^3+3.4x-560=0,$$

$$x^3+3x-140=0,$$

$$\frac{x^3+3x-140}{x-5}=x^2+5x+28=0\ , \quad . \quad . \quad . \quad x=5\,;$$

$$u=x^2-c,$$

$$\left.\begin{matrix} x= & 5 \\ c= & -4 \end{matrix}\right\}, \quad . \quad . \quad . \ u=5^2+4 \quad . \quad . \quad . \quad /\!/\ldots u=29\,;$$

$$\sqrt[3]{(560\pm\sqrt{313664})}=\sqrt[3]{(P\pm\sqrt{Q})}=(x\pm\sqrt{u})\sqrt[3]{z},$$

$$\left.\begin{matrix} x= & 5 \\ u= & 29 \\ z= & 1 \end{matrix}\right\},\ldots\sqrt[3]{(560\pm\sqrt{313664})}=(5\pm\sqrt{29})\sqrt[3]{1}\ \ . \ . \ . \ /\!/\ldots\sqrt[3]{(560\pm\sqrt{313664})}=5\pm\sqrt{29}\,;$$

$$t=\sqrt[3]{(560+\sqrt{313664})}+\sqrt[3]{(560-\sqrt{313664})},$$

$$\left.\begin{matrix} \sqrt[3]{(560+\sqrt{313664})}=5+\sqrt{29} \\ \sqrt[3]{(560-\sqrt{313664})}=5-\sqrt{29} \end{matrix}\right\}, \quad . \quad . \quad . \ t=5+\sqrt{29}+5-\sqrt{29} \quad . \quad . \quad . \quad /\!/\ldots t=10\,;$$

$$t=10\ , \quad . \quad . \quad . \ \begin{cases} t+2=10+2 \\ t-2=10-2 \end{cases} \quad \begin{matrix} . \quad . \quad . \quad /\!/\ldots t+2=12\,; \\ . \quad . \quad . \quad /\!/\ldots t-2=\ 8. \end{matrix}$$

Comprob. $12-8=4$; $12^3+8^3=1728+512=2240$.

OBSERVACIÓNES.

1ª Como sabemos que el número mayor es la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia, y que el menor es la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia, planteamos el problema con la ecuacion $(t+2)^3+(t-3)^3=2240$.

2ª La primera derivacion es el desarrollo y reducion de los cubos, la traslacion del segundo miembro al primero, y la division por 2.

3ª Comparo con la fórmula de tercer grado la ecuacion que he de resolver, y saco $p=12$, $q=-1120$.

4ª Presento la fórmula de resolucion de tercer grado, y le sustituyo los valores de p, q.

5ª Luego concluyo la resolucion del problema, teniendo presente la doctrina enseñada en la LECCION XXIX art. 315 á 317 para estraer la raiz cúbica de cantidades en parte racionales y en parte incomensurables.

6ª Despejada la incógnita en $t=10$ es el número mayor 12 y el menor 8, los cuales satisfacen en la comprobacion.

PROBLEMA III. Partir el número 24 en dos partes, de modo que la diferencia de sus cubos sea 3584.

x mitad de la diferencia de las partes: incógn.;

$$(12+x)^3-(12-x)^3=3584 \text{ Probl.}$$

$$x^3+432x-1792=0,$$

$$\frac{x^3+432x-1792}{x-4}=x^2+4x+448=0,\ \ldots x=4;$$

$$x=4,\ \ldots \begin{cases} 12+x=12+4 \ldots // \ldots 12+x=16; \\ 12-x=12-4 \ldots // \ldots 12-x=8. \end{cases}$$

$$\text{Comprob. } 16+8=24;\ 16^3-8^3=3584.$$

OBSERVACIONES.

1ª Tomando por incógnita la mitad de la diferencia de las partes, es la parte mayor la mitad del número sumada con la incógnita, y la parte menor es el esceso que la mitad del número lleva á la incógnita. Bajo este concepto hemos planteado el problema.

2ª En la primera derivacion desenvolvemos y reducimos los cubos, trasladamos el segundo miembro al primero y tomamos la mitad, con lo que resulta $x^3+432x-1792=0$.

3ª En esta ecuacion, que da $x^3+432x=1792$, se advierte desde luego que $x>2$: tampoco puede ser $x=3$, porque 3 no es divisor ecsacto de 1792; pero, ensayando el 4, satisface á la condicion, de consiguiente $x=4$; la parte mayor es 16 y la menor 8.

4ª Pudieramos haber resuelto este problema del mismo modo que el anterior; pero hemos tenido presente la ventaja, que resulta de ecsaminar atentamente las espresiones algebráicas [140], para descubrir por su simple inspeccion propiedades conducentes á nuestro intento.

PROBLEMA IV. Pidese un número tal que, restando de su cubo el producto del mismo número por 36, resulten 91.

x núm. incógn.; $\quad x^3-36x=91$ Probl.

$$\left.\begin{array}{l} x^3+px+q=0 \\ x^3-36x-91=0 \end{array}\right\}, \ldots \left\{\begin{array}{l} p=-36; \\ q=-91; \end{array}\right.$$

$$x=\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)},$$

$$\left.\begin{array}{l} p=-36 \\ q=-91 \end{array}\right\}, \ldots x=\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot 91^2-\tfrac{1}{27}\cdot 36^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}-\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot 91^2-\tfrac{1}{27}\cdot 36^3}\right)} \ldots$$

$$\cdot\cdot=\sqrt[3]{\left(\frac{91}{2}+\sqrt{\frac{8281-6912}{4}}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{91}{2}-\sqrt{\frac{8281-6912}{4}}\right)}\cdots$$

$$\cdot\cdot=\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{1369}\right)}+\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{1369}\right)}\ldots$$

$$\cdot\cdot=\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}+\tfrac{37}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\tfrac{91}{2}-\tfrac{37}{2}\right)}\ldots$$

$$\cdot\cdot=\sqrt[3]{64}+\sqrt[3]{27}\ldots$$

$$\cdot\cdot=4+3=7.$$

Comprob. $7^3-36.7=343-252=91.$

OBSERVACIONES.

1ª En este problema se puede hacer la estraccion de todos los radicales que contiene la ecuacion final, y para facilitar su intelijencia hemos puesto en ella varios miembros indicativos.

2ª Si queremos hallar los otros dos números, que satisfacen á la cuestion [241], tendremos, en el concepto de que $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}=4$, y $\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3})}=3$, las espresiones siguientes:

$$x'=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\ldots$$

$$\therefore=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot 4-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\cdot 3=-\tfrac{7}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3};$$

$$x''=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}+\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}q^2+\tfrac{1}{27}p^3}\right)}\ldots$$

$$\therefore=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\cdot 4-\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\cdot 3=-\tfrac{7}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

PROBLEMAS.

COLECCION SÉPTIMA.

Varias Clases.

PROBLEMA I. De dos lugares, distantes entre sí 630 leguas, salen dos amigos á encontrarse: el uno camina 1 legua el primer dia, 3 el segundo, 5 el tercero, &c.; y el otro anda 2 leguas el primer dia, 3 el segundo, 4 el tercero, &c. Se pregunta ¿qué dia se encontrarian, y cuantas leguas andaria cada uno?

$$\left.\begin{array}{l} n \text{ dias de camino} \\ S' \text{ leg. que anduvo el } 1^{\circ} \\ S'' \text{ leg. que anduvo el } 2^{\circ} \end{array}\right\} \text{incógn.};$$

$$(\div 1 . 3 . 5 . \&c.) + (\div 2 . 3 . 4 . \&c.) = \div 3 . 6 . 9 . \&c.;$$

$$S = \frac{n(A+L)}{2},$$

$$L = A + Dn - D, \ldots S = \frac{n(A+A+Dn-D)}{2} = \frac{Dn^2 + (2A-D)n}{2},$$

$$n^2 + \frac{2A-D}{D}n = \frac{2S}{D},$$

$$n = -\frac{2A-D}{2D} \pm \sqrt{\left(\frac{D-2A}{2D}\right)^2 + \frac{2S}{D}},$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 3 \\ D = 3 \\ S = 630 \end{array}\right\}, \ldots n = -\frac{2 . 3 - 3}{2 . 3} \pm \sqrt{\left(\frac{3 - 2 . 3}{2 . 3}\right)^2 + \frac{630 . 2}{3}} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1681}{4}} \ldots // \ldots n = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{41}{2} = 20;$$

$\div 1 . 3 . 5 . \&c.;$

$$S'=\frac{D'n^2+(2A'-D')n}{2},$$

$$\left.\begin{array}{l} A'=1 \\ D'=2 \\ n=20 \end{array}\right\}, \ldots S'=\frac{2.20^2+(2.1-2)20}{2} \ldots \ldots /\!/ \ldots S'=400;$$

$\div 2 . 3 . 4 . \&c.;$

$$S''=\frac{D''n^2+(2A''-D'')n}{2},$$

$$\left.\begin{array}{l} A''=2 \\ D''=1 \\ n=20 \end{array}\right\}, \ldots S''=\frac{1.20^2+(2.2-1)20}{2} \ldots \ldots /\!/ \ldots S''=230;$$

OBSERVACIONES.

1ª Desde luego se advierte que este problema es relativo á la progresion de equidiferencia. Consiste primeramente en que, siendo conocidos el primer término, la razon y la suma de todos los términos, se busca el número de ellos; y despues, conociendo el primer término, la razon y el número de términos, buscamos la suma de ellos.

2ª Como los dos amigos caminaban á un tiempo, cada uno segun su progresion, sumamos ambas progresiones para que resulte otra, cuya suma de términos ha de componer 630 leguas, esto es, $S=630$.

3ª Tomamos la fórmula [154] de la suma $S=\frac{n(A+L)}{2}$ y le sustituimos la otra [153] del último término $L=A+Dn-D$, lo que produce una ecuacion de segundo grado, de que resulta $n=20$ dias de camino.

4.ª Ahora vamos á ver cuantas leguas anduvo uno de los caminantes. A este fin sustituimos en la ecuacion derivada $S'=\frac{D'n^2+(2A'-D')n}{2}$ el primer término de la respectiva progresion, su razon y número de términos, con lo que sacamos $S'=400$ leguas, que anduvo el primer caminante en los 20 dias.

5.ª Practicando lo mismo respecto al otro resulta que en los mismos 20 dias anduvo $S''=230$ leguas.

PROGRESION DE EQUIDIFERENCIA.

PROBLEMA II. ¿Cuantos golpes da el relox de 12 horas en medio dia?

S tot. de hor. : incógn.; $\quad S=(A+L)\frac{n}{2}$,

$$\left.\begin{array}{l} A=1 \\ L=12 \\ n=12 \end{array}\right\} , \quad . \quad . \quad . \quad S=(1+12)\frac{12}{2}=78.$$

OBSERVACION.

Este problema pertenece tambien á la progresion de equidiferencia, y sus datos son el primer término, el último y el número de todos. La incógnita es la suma, que se halla por la fórmula [154] que ya conocemos.

PROGRESION DE EQUIDIFERENCIA.

PROBLEMA III. Una porcion de bolas está dispuesta en 18 filas, que crecen de 2 en 2, y la primera fila tiene 3. ¿Cuantas bolas hay?

S tot. de bolas : incógn.;

$$S = (A+L)\frac{n}{2},$$

$$L = A + Dn - D, \ldots S = (A + A + Dn - D)\frac{n}{2} = (2A + Dn - D)\frac{n}{2},$$

$$\left.\begin{array}{l} A = 3 \\ D = 2 \\ n = 18 \end{array}\right\}, \ldots . S = (2.3 + 2.18 - 2)\frac{18}{2} = 360.$$

OBSERVACION.

Aunque en este problema la incógnita es la misma que en el anterior son diferentes los datos, y se resuelve como la segunda circunstancia pedida en el primer problema de esta coleccion.

PROGRESION DE EQUIDIFERENCIA.

PROBLEMA IV. Un viagero, que quiere llegar á su destino en 4 dias, acelera cada dia su marcha en 3 leguas, y el último anduvo 29 y $\frac{1}{2}$ leguas. ¿Cuantas anduvo el primer dia?

A camino del prim. dia : incógn.;

$$L = A + (n-1)D,$$

$$\left.\begin{array}{l} D = 3 \\ n = 4 \\ L = 29 + \frac{1}{2} \end{array}\right\}, \ldots . \begin{array}{l} A = L - (n-1)D, \\ A = 29 + \frac{1}{2} - (4-1)3 = 20 + \frac{1}{2}. \end{array}$$

OBSERVACION.

Aqui terminarémos las cuestiones relativas á la progresion de equidiferencia; pues otras cualesquiera, que puedan ofrecerse de esta naturaleza, son bien fáciles de resolver.

PROGRESION POR COCIENTE.

PROBLEMA V. Un pródigo ha disipado su caudal en 5 meses, gastando en cada uno el cuádruplo del mes anterior, y habiendo gastado en el primer mes 100 duros. ¿Cuanto era al principio su caudal?

s caud.: incógn.;

$$s=\frac{a(c^n-1)}{c-1},$$

$$\left.\begin{array}{l}a=100\\ c=4\\ n=5\end{array}\right\}, \ldots s=\frac{100(4^5-1)}{4-1}=100.\frac{1024-1}{3}=34100.$$

OBSERVACIONES.

1ª Bien se echa de ver que este problema se refiere á una progresion por cociente, cuyo primer término, el esponente y el número de términos son conocidos, y se busca la suma de la progresion.

2ª Para hallar esta suma tomo [159] la fórmula $s=\frac{a(c^n-1)}{c-1}$, y haciendo las sustituciones correspondientes, resulta que el caudal del pródigo habia sido 34100 pesos fuertes.

PROGRESION POR COCIENTE.

PROBLEMA VI. De un barril, que contiene 100 botellas de vino, se sacan diariamente 10 botellas, remplazandolas con agua. Se desea saber, al cabo de 4 dias, cuanto vino quedaria en el barril?

l vino restante: incógn.;

$$\left.\begin{array}{l}100-10=90=9.10\\ 10:1::90:9, \ldots 90-9=81=9^2\\ 10:1::9^2:\frac{9^2}{10}, \ldots 9^2-\frac{9^2}{10}=\frac{10.9^2-9^2}{10}=\frac{9^3}{10}=9^2.\frac{9}{10}\end{array}\right\}, \ldots c=\frac{9}{10};$$

$$l=ac^{n-1},$$

$$\left.\begin{array}{l}a=90\\ c=\frac{9}{10}\\ n=4\end{array}\right\}, \ldots l=90\left(\frac{9}{10}\right)^{4-1}=65,61.$$

OBSERVACIONES.

1.ª De los tres datos, que ofrece este problema, los dos son implicitos. El primero se obtiene restando del vino total lo que se saca la primera vez, esto es, $100-10=90$, que viene á ser el primer término de una progresion por cociente. El segundo dato se deduce de la operacion de estraer diariamente 10 botellas de licor; pues, como la primera vez se sacó una botella de vino puro por cada 10 que contenia el barril, tenemos dos términos de una proporcion, siendo sucesivamente el tercero lo que queda de vino puro, y resulta en el cuarto la cantidad de vino puro que cada vez se saca; con lo que los residuos sucesivos forman la progresion, cuyo esponente es $c=\frac{9}{10}$, segun se manifiesta en el primer período. El tercer dato está espresado por $n=4$ que es el número de términos; y la incógnita es el último término como residuo despues de todas las estracciones.

2.ª En este concepto tomo [156] la fórmula $l=ac^{n-1}$, y sustituyendo los datos, resulta $l=65,61$ botellas de vino puro que quedaron en el barril.

3.ª Bien pudieramos haber resuelto inmediatamente el problema continuando la progresion; pues, constando de 4 términos, habia de ser el último igual á $\frac{9^4}{10^2}=65,61$; pero hemos preferido ejecutar la resolucion general por dar un ejemplo de ella para otros casos.

4.ª Hay una comprobacion, que consiste en sumar todas las cantidades de vino puro estraidas con el último residuo, lo que ha de componer la totalidad del vino, de esta manera

$$10+9+\frac{9^2}{10}+\frac{9^3}{10^2}+65,61=19+8,1+7,29+65,61=100.$$

PROGRESION POR COCIENTE.

PROBLEMA VII. De otro barril, que contenia 100 botellas de vino, se sacaron tambien 10 botellas cada dia remplazandolas con agua, y se desea saber en cuantos dias quedarian solo 65,61 botellas de vino puro en el barril.

n núm. de dias: incógn.;

$$\left.\begin{array}{l} 100-10=90=9.10 \\ 10:1::90:9,\ldots 90-9=81=9^2 \\ 10:1::9^2:\frac{9^2}{10},\ldots 9^2-\frac{9^2}{10}=\frac{10.9^2-9^2}{10}=\frac{9^3}{10}=9^2.\frac{9}{10} \end{array}\right\},\ldots c=\frac{9}{10};$$

$$l=ac^{n-1},$$

$$\mathcal{L}l=\mathcal{L}ac^{n-1}=\mathcal{L}a+n\mathcal{L}c-\mathcal{L}c,$$

$$n=\frac{\mathcal{L}c+\mathcal{L}l-\mathcal{L}a}{\mathcal{L}c},$$

$$\left.\begin{array}{l} a=90 \\ c=\frac{9}{10}=\frac{90}{100} \\ l=65,61 \end{array}\right\},\ldots n=\frac{\mathcal{L}\frac{90}{100}+\mathcal{L}65,61-\mathcal{L}90}{\mathcal{L}\frac{9}{10}}=\frac{\mathcal{L}100-\mathcal{L}65,61}{\mathcal{L}10-\mathcal{L}9}\ldots$$

$$\ldots=\frac{2-1,8169700}{1-0,9542425}=4.$$

OBSERVACIONES.

1.ª Este problema se diferencia del anterior en que se sabe el vino que quedó en el barril, y se pide el número de veces que se sacó licor.

2.ª El primer período es lo mismo que en el otro problema.

3.ª Despues hacemos la resolucion por logaritmos.

4.ª El resultado $n=4$ dias ó veces sirve de comprobacion al otro problema.

PROGRESION POR COCIENTE.

PROBLEMA VIII. Se ha vendido un caballo con la condicion de que por el primer clavo de sus herraduras se daria 1 maravedí, por el segundo 2, por el tercero 4, por el cuarto 8, y asi de los demas duplicando siempre. Se pregunta ¿con cuantos clavos, empezando desde el primero, pasaria el valor del caballo de 6000 duros?

n núm. de clavos que se busca: incógn.;

$$s=\frac{a(c^n-1)}{c-1},$$

$$\left.\begin{matrix}a=1\\ c=2\end{matrix}\right\},\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ s=\frac{1(2^n-1)}{2-1}=2^n-1;$$

$$\left.\begin{matrix}s=2^n-1\\ s=4080000\end{matrix}\right\},\ldots\ 2^n-1=4080000,$$

$$2^n=4080000+1=4080001,$$

$$n\mathcal{L}2=\mathcal{L}4080001,$$

$$n=\frac{\mathcal{L}4080001}{\mathcal{L}2}=\frac{6{,}6106602}{0{,}3010300}=21+\frac{2890302}{3010300}.$$

OBSERVACIONES.

1ª Este problema ofrece dos datos y una condicion de que se deduce otro. Con efecto conocemos el primer término y el esponente de una progresion, y sabemos que el importe del caballo ha de ser mas de 6000 duros ó de 4080000 mrs., esto es, $s>4080000$.

2ª Operando en el primer período con los dos primeros datos sacamos $s=2^n-1$. Luego suponemos que el valor del caballo fuese igual á 6000 duros, es decir $s=4080000$ mrs., é igualando ambos valores de s sacamos que el número de clavos es $n=21+\frac{2890302}{3010300}$, de consiguiente con 22 clavos valia el caballo mas de 6000 duros.

3ª Para hacer una comprobacion buscaremos cuanto valdria el caballo con 21 clavos y cuanto con 22, procediendo de esta forma:

$$n=21\ ,\ .\ .\ .\ s=\frac{a(c^n-1)}{c-1}=\frac{1(2^{21}-1)}{2-1}=2^{21}-1,$$

$$\mathcal{L}(s+1)=21\,\mathcal{L}2=21\times0{,}3010300=6{,}3216300=\mathcal{L}2097152,$$

$$s=2097152-1=2097151 \text{ mrs.}\ ,\quad .\quad .\quad .\quad s<6000 \text{ duros};$$

$$n=22\ ,\ .\ .\ .\ s=\frac{a(c^n-1)}{c-1}=\frac{1(2^{22}-1)}{2-1}=2^{22}-1,$$

$$\mathcal{L}(s+1)=22\,\mathcal{L}2=22\times0{,}3010300=6{,}6226600=\mathcal{L}4194304,$$

$$s=4194304-1=4194303 \text{ mrs.}\ ,\quad .\quad .\quad .\quad s>6000 \text{ duros}.$$

INTERÉS.

PROBLEMA IX. Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de interés.

CASO 1.º INTERÉS SIMPLE:

p capital puesto á interés ;
r interés de una unidad de moneda cada año ;
t tiempo en que el capital está puesto á interés ;
s suma de capital é intereses devengados ;

$1:r::p:pr$ interés anual del capital ;
$1:pr::t:prt$ interés del capital en t ;
$s=p+prt$ capital é intereses.

CASO 2º INTERÉS COMPUESTO:

p capital puesto á interés ;
r interés de una unidad de moneda al 1.^{er} año ,... $1+r$ una unidad y su interés al cabo de un año ;
t tiempo en que el capital está á interés compuesto ;
s suma del capital é intereses compuestos ;

$1+r$ una unidad y su interés al cabo del primer año ;

$1:1+r::1+r:(1+r)^2$ al cabo de 2 años ,...$(1+r)^t$ al cabo de t años ;

$1:(1+r)^t::p:s=p(1+r)^t$ capital é intereses compuestos al fin del último año.

OBSERVACIONES.

1ª Es claro que, en el Caso 1º, si 1 gana r el capital p ganará pr en el primer año, como se manifiesta en la primera proporcion, y si en un año adquiere el capital la ganancia pr, en t años tendrá la ganancia prt, que es la segunda proporcion. Por tanto la suma, que se compone del capital y su ganancia, es $s=p+prt$.

2ª En el Caso 2º la unidad de moneda se ha convertido al cabo del primer año en $1+r$, que es capital para el año siguiente ; por lo que decimos: si en un año 1 unidad de moneda se convierte en $1+r$, al cabo de dos años se habrá convertido en $(1+r)^2$, y asi sucesivamente $(1+r)^3$ al fin del tercer año, $(1+r)^4$ al cabo de 4 años &c. ; de consiguiente, en cumpliendo t años, cada unidad se habrá convertido en $(1+r)^t$ dando á la base $1+r$ un esponente igual al número de años transcurridos para su elevacion á la potencia que indica este número. Y, como hasta ahora no hemos buscado mas que el incremento de una unidad del capital primitivo, debemos multiplicar este resultado por el mismo capital para obtener la totalidad, segun lo manifiesta la proporcion $1:(1+r)^t::p:s=p(1+r)^t$.

3ª Aunque hemos supuesto que en ambos casos eran conocidos el capital, el interés y el tiempo para hallar la suma, se puede, conociendo tres de estas cuatro cosas, determinar la otra. Asi, respecto al interés simple,

$$\text{de } s=p+prt \text{ sacamos } \begin{cases} p=\dfrac{s}{1+rt}; \\ r=\dfrac{s-p}{pt}; \\ t=\dfrac{s-p}{pr}; \end{cases}$$

Y, tocante al interés compuesto,

$$\text{de } s=p(1+r)^t \text{ deducimos } \begin{cases} p=\dfrac{s}{(1+r)^t}; \\ t=\dfrac{\mathcal{L}s-\mathcal{L}p}{\mathcal{L}(1+r)}; \\ \mathcal{L}(1+r)=\dfrac{\mathcal{L}s-\mathcal{L}p}{t} \;//\; 1+r=\sqrt[t]{\dfrac{s}{p}}. \end{cases}$$

4ª Respecto al interés simple, que consiste en la imposicion de un capital á un tanto por 100, que ha de producir cada año la misma utilidad, haremos aplicaciones á sus fórmulas, suponiendo conocidas tres de las cuatro circunstancias para hallar la otra en los ejemplos siguientes:

1º

$$\left.\begin{array}{l} p=15600 \\ r=0{,}08 \\ t=5 \end{array}\right\} ,\ldots s=p+prt=15600+15600\times0{,}08\times5\ldots$$
$$\ldots=15600+6240=21840.$$

2º

$$\left.\begin{array}{l} s=21840 \\ r=0{,}08 \\ t=5 \end{array}\right\} ,\ldots p=\frac{s}{1+rt}=\frac{21840}{1+0{,}08\times5}=\frac{218400}{14}=15600.$$

3.º

$$\left.\begin{array}{l} s=21840 \\ p=15600 \\ t=5 \end{array}\right\} \ldots r=\frac{s-p}{pt}=\frac{21840-15600}{15600\times 5}=\frac{6240}{78000}=0{,}08.$$

4.º

$$\left.\begin{array}{l} s=21840 \\ p=15600 \\ r=0{,}08 \end{array}\right\} \ldots t=\frac{s-p}{pr}=\frac{21840-15600}{15600\times 0{,}08}=\frac{6240}{1248}=5.$$

5.ª Para el interés compuesto, en que se aumenta cada año la utilidad por acumularse al capital anualmente los intereses, haremos aplicaciones á sus fórmulas en los ejemplos siguientes:

1.º Un tutor tiene el caudal de su pupilo, que consiste en 20000 pesos, y lo da al 5 por 100: al cabo del primer año recoje el capital é intereses, y lo coloca todo del mismo modo en otra parte: repite esta operacion hasta el sesto año. ¿Cuanto percibió al fin?

$$s=p(1+r)^t=20000(1+0{,}05)^6=20000\times 1{,}3401=26802 \text{ pesos.}$$

2.º Supongamos que, habiendose hecho la imposicion al mismo interés y por el mismo tiempo, haya el tutor percibido al fin 26802 pesos, y se quiera saber cual era al principio el caudal del púpilo.

$$p=\frac{s}{(1+r)^t}=\frac{26802}{(1+0{,}05)^6}=\frac{26802}{1{,}3401}=20000 \text{ pesos.}$$

3.º Un deudor destina 10000 duros para pagar 12000, poniendo aquel capital á 5 por 100 de interés compuesto. ¿En cuantos años habrá pagado su deuda?

$$t=\frac{\mathcal{L}s-\mathcal{L}p}{\mathcal{L}(1+r)}=\frac{\mathcal{L}12000-\mathcal{L}10000}{\mathcal{L}(1+0{,}05)}=\frac{0{,}0791813}{0{,}0211893}=3 \text{ años y } 9 \text{ meses poco menos.}$$

4.º ¿A cuanto por 100 de interés compuesto se han impuesto 6000 duros para convertirlos, al cabo de 3 años, en 7986?

$$1+r=\sqrt[3]{\frac{s}{p}}=\sqrt[3]{\frac{7986}{6000}}=\sqrt[3]{1,331}=1,1\ , \quad . \quad . \quad . \quad . \quad r=1,1-1=0,1=\frac{10}{100}.$$

INTERÉS SIMPLE Y PROGRESION DE EQUIDIFERENCIA.

PROBLEMA X. Dada una cantidad que se ha de pagar cada año, el número de años que deja de pagarse y el interés simple que devenga anualmente por razon del atraso; hallar cuanto se ha de pagar al cabo de este tiempo por la renta y los intereses.

a cantidad dada;
t tiempo sin pagarse;
r interés de 1 cada año;
s suma total;

$$\text{Intereses}\left\{\begin{array}{l} 1.^{\text{er}}\ \text{año} \ldots 0 \\ 2.^{\text{o}} \ldots\ldots\ldots ar \\ 3.^{\text{o}} \ldots\ldots\ldots 2ar \\ \quad \&\text{c.} \\ t \ldots (t-1)ar \end{array}\right\}, \ldots 0+ar+2ar\ldots\ldots+(t-1)ar=(t-1)ar\cdot\frac{t}{2};$$

$$s=at+(t-1)ar\cdot\frac{t}{2} \quad . \quad . \quad . \quad // \quad . \quad . \quad . \quad s=\frac{r(t-1)+2}{2}\cdot at;$$

$$\frac{r(t-1)+2}{2}\cdot at=s\ , \quad . \quad . \quad . \quad a=\frac{2s}{\{r(t-1)+2\}t};$$

$$2s=\{r(t-1)+2\}at=art^2+(2a-ar)t,$$

$$t^2+\frac{2-r}{r}\cdot t=\frac{2s}{ar}\ , \quad . \quad . \quad . \quad t=-\frac{2-r}{2r}+\sqrt{\frac{2s}{ar}+\left(\frac{2-r}{2r}\right)^2}:$$

$$2s=art^2-art+2at,$$

$$r(t-1)at=2s-2at\ , \quad . \quad . \quad . \quad r=\frac{2(s-at)}{(t-1)at}.$$

OBSERVACIONES.

1ª Como la cantidad propuesta es de un pago períodico, que no se hace hasta cumplido el año, no devenga interés en el primer año; pero desde el segundo queda impuesta hasta el fin del tiempo, y lo mismo sucede á cada renta ó contribucion sucesiva, la cual resulta impuesta durante un año menos que la anterior. Asi al cabo del segundo año el interés será ar, al cabo del tercero será $2ar$, y al cabo de los t años será $(t-1)ar$. Estos intereses forman una progresion de equidiferencia, cuya suma sacamos en el primer período del mapa con la espresion

$$0+ar+2ar\ldots\ldots+(t-1)ar=\{0+(t-1)ar\}\frac{t}{2}=(t-1)ar.\frac{t}{2}.$$

2ª Luego agregamos el número de contribuciones anuales, que es at, y tenemos la suma $s=at+(t-1)ar.\frac{t}{2}$.

3ª Ultimamente buscamos por esta ecuacion el valor de cada cosa, que llevamos á la columna final.

4ª Bastará una aplicacion en el ejemplo siguiente:

Un negociante tiene que pagar á otro 100 doblones cada año; pero, siendole incómodo este pago, consigue de su acreedor que no le pida nada por espacio de 8 años, ofreciendo que le pagará todos los atrasos con el interés simple á razon de 5 por 100. ¿Cuanto deberá?

$$s=\{r(t-1)+2\}\frac{at}{2}=\{0{,}05(8-1)+2\}\frac{100.8}{2}=2{,}35\times400=940.$$

INTERÉS COMPUESTO Y PROGRESION POR COCIENTE.

PROBLEMA XI. Dada una cantidad que se ha de pagar cada año, el tiempo que deja de pagarse y el interés;

hallar cuanto se deberá al cabo de un tiempo dado por los atrasos é intereses compuestos.

p cant. dada;
t tiempo sin pagarse;
r interés de 1 al año;
s suma total;

p deuda al cabo del 1.^{er} año;

$1:1+r::p:p(1+r)$ renta del 1.^{er} año y su interés, . . . $p+p(1+r)$ deuda al cabo del 2.º año;

$1:1+r::p+p(1+r):p(1+r)+p(1+r)^2$ renta del 1.º y 2.º año y sus intereses, . . . $p+p(1+r)+p(1+r)^2$ deuda al cabo del 3.^{e} año;

$p+p(1+r)+p(1+r)^2 \ldots\ldots +p(1+r)^{t-1}$ deuda al cabo de t años.

$$s=p\{1+(1+r)+(1+r)^2 \ldots\ldots +(1+r)^{t-1}\}=p.\frac{1\{(1+r)^t-1\}}{1+r-1} \ldots // \ldots s=p.\frac{(1+r)^t-1}{r};$$

$$p.\frac{(1+r)^t-1}{r}=s \quad , \quad . \quad . \quad . \quad p=\frac{rs}{(1+r)^t-1};$$

$$(1+r)^t=\frac{sr}{p}+1 \quad , \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{\mathcal{L}\left(\frac{rs}{p}+1\right)}{\mathcal{L}(1+r)}; \\ \mathcal{L}(1+r)=\dfrac{\mathcal{L}\left(\frac{rs}{p}+1\right)}{t}. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1ª Segun vemos en el mapa p es la renta del primer año: $p+p(1+r)=2p+pr$ es la renta del primer año y la del segundo y el interés de la renta del primer año; y $p+p(1+r)+p(1+r)^2=3p+3pr+pr^2$ son las rentas del primero, segundo y tercer año y los intereses de las rentas del primero y segundo año. De aqui se deduce

$$s=p+p(1+r)+p(1+r)^2.....+p(1+r)^{t-1}$$ por deuda total.

2ª La deuda de cada año se considera como nuevo capital, que se impone á principios del año siguiente.

3ª Hagamos una aplicacion suponiendo que la renta es de 2400 pesos fuertes, él tiempo 3 años y el interés 4 por 100. Entonces

$$s=p.\frac{(1+r)^t-1}{r}=2400.\frac{(1+0{,}04)^3-1}{0{,}04}=60000\times0{,}124864=7491$$ ps. 16 rs. y 27 mrs.

ANUALIDADES.

PROBLEMA XII. De estas cinco cosas el capital prestado, el tanto por 100, el número de años, la anualidad y lo que se debe del capital al cabo del mismo número de años, dadas cuatro determinar la quinta; en intelijencia de que se trata no solo de pagar los intereses, sino tambien de amortizar el capital.

p capital prestado;
r tanto por 1;
x anualidad;
t núm. de años;
z cant. debida del capital al cabo de los t años;

$p(1+r)$ cap. con sus int. al cabo del 1.er año, . . . $p(1+r)-x$ deuda para el 2.º año;

$p(1+r)^2-x(1+r)$ .... 2.º, . . . $p(1+r)^2-x(1+r)-x$ 3.º;

$p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)$ ...... 3.º, . . . $p(1+r)^3-x(1+r)^2-x(1+r)-x$ 4.º;

$$z=p(1+r)^t-x\{1+(1+r)+(1+r)^2\ldots\ldots+(1+r)^{t-1}\}=p(1+r)^t-\frac{x\{(1+r)^t-1\}}{r},$$

Sup. $z=0$, . . . $z=0=p(1+r)^t-x.\dfrac{(1+r)^t-1}{r}$,

$$x\{(1+r)^t-1\}=pr(1+r)^t \quad , \quad . \quad . \quad . \quad x=\frac{pr(1+r)^t}{(1+r)^t-1};$$

$$pr(1+r)^t=x\{(1+r)^t-1\} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad p=\frac{x\{(1+r)^t-1\}}{r(1+r)^t};$$

$$(x-pr)(1+r)^t=x,$$

$$(1+r)^t=\frac{x}{x-pr},$$

$$\mathcal{L}(1+r)^t=\mathcal{L}x-\mathcal{L}(x-pr) \quad , \quad . \quad . \quad . \quad \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{\mathcal{L}x-\mathcal{L}(x-pr)}{\mathcal{L}(1+r)}; \\ \mathcal{L}(1+r)=\dfrac{\mathcal{L}x-\mathcal{L}(x-pr)}{t}. \end{array}\right.$$

OBSERVACIONES.

1.ª Cada año convierto el capital del anterior en lo que debe importar con sus intereses y le rebajo la anualidad, con lo que al cabo de t años saco

$$z=p(1+r)^t-x\{(1+r)^{t-1}+(1+r)^{t-2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(1+r)+1\}.$$

2ª El segundo miembro de esta ecuacion tiene en su segundo término un factor, que es una progresion por cociente, la cual, escrita al reves y sumada, da

$1+(1+r)+(1+r)^2.....+(1+r)^{t-1}=\frac{(1+r)^t-1}{r}$, de modo que $z=p(1+r)^t-\frac{x\{(1+r)^t-1\}}{r}$.

3ª Suponemos que al cabo del tiempo t nada se deba, y en este caso

$z=0 // p(1+r)^t-x.\frac{(1+r)^t-1}{r}=0$, de donde sacamos las ecuaciones derivadas y resultantes.

4ª Tanto en este problema como en el anterior no podemos despejar la incógnita r, porque seria necesario resolver en general una ecuacion de grado superior á que no alcanzan los conocimientos adquiridos hasta ahora.

5ª Haremos una aplicacion con este ejemplo:

Se desea saber cual es la cantidad, que se deberia satisfacer anualmente para estinguir en 12 años una deuda de 100 pesos con sus intereses, siendo el interés anual 5 por 100.

$$x=\frac{pr(1+r)^t}{(1+r)^t-1}=\frac{100\times 0,05(1+0,05)^{12}}{(1+0,05)^{12}-1}=\frac{5\left(\frac{21}{20}\right)^{12}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{12}-1};$$

$$\pounds\left(\frac{21}{20}\right)^{12}=12(\pounds 21-\pounds 20)=12\times 0,0211893=0,2542716=\pounds 1,79586,$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{12}=1,79586;$$

$$x=\frac{5\left(\frac{21}{20}\right)^{12}}{\left(\frac{21}{20}\right)^{12}-1},$$

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{12}=1{,}79586,\ldots x=\frac{5\times 1{,}79586}{1{,}79586-1}=\frac{8{,}9793}{0{,}79586}=11{,}2826 \text{ pesos.}$$

DOBLE FALSA POSICION.

PROBLEMA XIII. Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de doble falsa posicion con el siguiente ejemplo:

De dos jugadores el mas diestro pone 12 reales contra 8 en cada juego: al cabo de 10 juegos ha ganado 20 reales. ¿Cuantos juegos ganó y cuantos perdió?

Supongo ganados 4 juegos,... $8.4-12(10-4)=20.4-120=-40=20-60$,... -60 error;
Supongo ganados 6 juegos,... $8.6-12(10-6)=20.6-120=\ 0\ =20-20$,... -20 error;
Número verdadero x, . . . $8x-12(10-x)=20x-120=20$;

$$\left.\begin{array}{r}20x-120=\ \ 20\\ 20.6-120=\ \ \ 0\end{array}\right\}, \ldots 20(x-6)=20-0=20;$$

$$\left.\begin{array}{r}20x-120=\ \ 20\\ 20.4-120=-40\end{array}\right\}, \ldots 20(x-4)=20+40=60;$$

$$\left.\begin{aligned}20(x-6)&=20\\20(x-4)&=60\end{aligned}\right\}, \ldots \frac{x-6}{x-4}=\frac{20}{60},$$

$$60x-60.6=20x-20.4,$$

$$(60-20)x=60.6-20.4,$$

$$x=\frac{60.6-20.4}{60-20}=7.$$

$$\left.\begin{array}{l}a \text{ prim. suposic.}\\ b \text{ segunda}\\ c \text{ prim. error}\\ d \text{ segundo}\end{array}\right\}, \ldots x=\frac{cb-da}{c-d}.$$

OBSERVACIONES.

1ª Ya sabemos que la falsa posicion consiste en suposiciones para hallar la verdad, pues hemos estudiado la falsa posicion simple en la Leccion XXIV de la Aritmética, donde hemos esplicado suficientemente su naturaleza y fundamentos. Respecto á la doble falsa posición no podiamos desenvolverla bien sin el ausilio del álgebra, por lo que la hemos reservado para este lugar.

2ª Llamase doble porque, cuando no se acierta con la primera suposicion, se hace otra.

3ª Asi lo practicamos en el mapa con la suposicion del 4 que da el error —60, y con la del 6 que da —20 de error. Despues planteamos la cuestion en términos algebráicos.

4ª De la ecuacion constituyente restamos las dos anteriores, y dividimos un residuo por otro, con lo qne continuando el cálculo sin hacer reduciones, y poniendo letras en lugar de las cantidades numéricas, sacamos $x = \frac{bc - ad}{c - d}$. Esto quiere decir que el número verdadero es igual á la diferencia de los productos de cada supuesto por el error del otro, partida por la diferencia de los errores.

5ª Si los errores son de sentido contrario las diferencias se convierten en sumas, porque si $d = -d'$ sacamos $x = \frac{bc - ad}{c - d} = \frac{bc + ad'}{c + d'}$; y si $c = -c'$ resulta $x = \frac{bc - ad}{c - d} \ldots$

$\ldots = \frac{-bc' - ad}{-c' - d} = \frac{bc' + ad}{c' + d}$; de modo que la fórmula general es $x = \frac{bc \mp ad}{c \mp d}$.

6ª Cuando ninguno de los dos números supuestos es el que se busca, puede abreviarse la operacion averiguando la correccion necesaria para que resulte el número verdadero. A este fin, siendo $b < x$ y la correccion z, tendremos $b + z = x = \frac{bc \mp ad}{c \mp d}$, de que sale $z = \frac{(b - a)d}{c \mp d}$; pero si $b > x$ será $b - z = x = \frac{bc \mp ad}{c \mp d}$, de donde resulta $z = \frac{(a - b)d}{c \mp d}$. Esto significa que la correccion equivale á la diferencia de los supuestos multiplicada por el error procedente del número á que se hace la correccion, y dividida por la diferencia de los errores cuando son de un mismo sentido, y por su suma cuando son de sentido contrario. Asi, para la correccion del segundo supuesto del problema, sacamos $z = \frac{(6 - 4)20}{60 - 20} = 1$, y con efecto $x = 6 + 1 = 7$, que es el número verdadero.

7ª Toda esta doctrina debe contraerse á la Aritmética como un apéndice á la LECCION XXIV de ella, pues cualquiera que sepa álgebra sacará facilmente de la ecuacion $20x-120=20$ el resultado $x=7$, lo que manifiesta la gran superioridad de calcular con caractéres generales.

8ª Como el jugador mas hábil ganó 7 juegos á 8 reales, y perdió los 3 restantes á 12, salió ganando los 20 reales que enuncia el problema.

ALIGACION.

PROBLEMA XIV. Manifestar los fundamentos y la práctica de la regla de aligacion con los siguientes ejemplos:

1º Conociendo las cantidades A, B, C, &c. de géneros y sus precios respectivos a, b, c, &c. ¿cual deberá ser el precio x de la mezcla?

$$(A+B+C+\&c.)x=Aa+Bb+Cc+\&c.,$$

$$x=\frac{Aa+Bb+Cc+\&c.}{A+B+C+\&c.}.$$

2º Pidense las cantidades X, Z de dos especies, cuyos precios g, f son conocidos, para que la mezcla se pueda vender á un precio dado e.

$$Xg+Zf=(X+Z)e,$$

$$X(g-e)=Z(e-f),$$

$$\frac{X}{Z}=\frac{e-f}{g-e} \;//\; e-f:X::g-e:Z;$$

Supongo $X+Z=M, \ldots (g-e+e-f=g-f):(X+Z=M) :: \left\{\begin{array}{l} e-f : X = M\times\dfrac{e-f}{g-f}; \\ g-e : Z = M\times\dfrac{g-e}{g-f}. \end{array}\right.$

OBSERVACIONES.

1ª Aunque conocemos bastante la regla de aligacion por la LECCION XXIII de la ARITMÉTICA, hemos creido conveniente generalizarla por ÁLGEBRA.

2ª En el primer ejemplo vemos que, conociendo las cantidades de los géneros y sus precios, el precio de la mezcla es igual á la suma de los productos de cada género por su precio, dividida por la suma de las cantidades de los géneros.

3ª En el segundo ejemplo la ecuacion $\dfrac{X}{Z}=\dfrac{e-f}{g-e}$ manifiesta que las cantidades pedidas de ambas especies estan en razon inversa de la diferencia de los precios con el precio medio.

4ª Para determinar el problema se necesita fijar la cantidad de la mezcla, que suponemos M ó bien $X+Z=M$; y, como en toda proporcion [147] la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes como cada antecedente á su consecuente, resulta $X=\dfrac{M}{g-f}(e-f)$, $Z=\dfrac{M}{g-f}(g-e)$.

5ª Estas ecuaciones manifiestan que cada incógnita ó cantidad de cada especie es igual á la diferencia entre el precio medio y el de la otra especie, multiplicada por la cantidad de mezcla y dividida por la diferencia de los precios de cada cosa.

6ª No se necesitan aplicaciones; pero el que quiera hacerlas podrá contraer á las fórmulas las cuestiones resueltas en los art. 251 y 252 de la ARITMÉTICA.

FIN DE LA IDEOLOGÍA DEL ÁLGEBRA.

ÍNDICE.

SECCION PRIMERA: *Gramática del Álgebra ó Reglas del Cálculo.*