R. ARANAZ

PERSPECTIVA

LECCIONES ELEMENTALES

SEGUNDA EDICIÓN

MADRID
IMPRENTA DE DON LUIS AGUADO
—
1891

INDICE

CAPÍTULO PRIMERO

Definiciones y bases fundamentales.

CAPÍTULO II

Perspectiva horizontal.

CAPÍTULO III

Perspectiva de elevaciones.

CAPÍTULO IV

Simplificación de los procedimientos generales de la perspectiva.

PERSPECTIVA LINEAL

CAPÍTULO PRIMERO

Definiciones y bases fundamentales.

1. **Definición de la perspectiva.**—La perspectiva enseña á representar, sobre una superficie plana, los objetos tales como aparecen á nuestra vista.

2. **División del estudio.**—Para que dichos fines sean cumplidamente satisfechos se ha dividido el estudio de esta ciencia en dos partes esencialmente distintas. La primera sirve para determinar la forma aparente de los cuerpos y sus posiciones relativas. La segunda enseña á escoger el mismo color de los objetos, con las modificaciones que experimentan por los diversos grados de luz y la transmisión de los rayos que ellos emiten á través de las capas atmosféricas.

3. La primera es una ciencia positiva, basada en los principios más elementales de Geometría. Se la da el nombre de *Perspectiva lineal.*

4. La segunda, basada en principios geométricos y físicos, es la *perspectiva aérea*. Las re-

glas para esta clase de perspectiva, si bien exactas también, no son de aplicación sencilla, como en la perspectiva lineal, y el dibujante se deja llevar del sentimiento y práctica que tenga, sin la cual, y una imaginación verdaderamente artística, es difícil que el dibujo pueda ser la expresión fiel del objeto que se haya querido representar en él.

5. Esta clase de perspectiva no puede conocerse sin el preliminar estudio de la primera, ó sea la perspectiva lineal; por otra parte, no tiene importancia alguna para nosotros, dada la idea que nos conduce á hacer el estudio de la perspectiva. Todas las figuras referentes á la Geometría del espacio conocidas ya, y cuantas en adelante se presenten en los cursos de aplicación, bien referentes á máquinas ú otros objetos cualesquiera, se ven dibujadas en perspectiva con auxilio de las proyecciones necesarias al conocimiento de los detalles. Es, pues, muy importante el conocimiento de la perspectiva lineal, de cuyo estudio nos ocuparemos exclusivamente.

6. **Fundamento de la perspectiva lineal.**—Para formarnos idea más exacta del principal objeto de esta perspectiva, imaginemos *(fig. 1.ª)* una superficie cualquiera, *S,* situada á cierta distancia del observador, *o.* Todos los rayos de luz que desde los diversos puntos de esta superficie van á parar al ojo de aquél forman una superficie cónica envolvente de la primera, cuya cúspide está en el punto *o.* Si imaginamos un plano *P,* comprendido entre el objeto *S* y el observador *o,* dará de intersección con la superficie cónica una línea, *c,* cuya

forma depende, por tanto, de la que afecta la superficie dada. El observador, al querer dibujar la superficie *S* en el plano *P*, la representará por medio de la curva *c*, verdadera forma del contorno aparente de aquélla en este plano.

7. Fundados en esto, y en el medio de construir las secciones planas de las superficies cónicas, podremos decir que los problemas de la perspectiva están reducidos en principio á *encontrar las intersecciones de los diversos rayos visuales con el plano del dibujo*. A este último se le da el nombre de *cuadro*.

8. **Teoremas preliminares.**—Para establecerlos y dar las definiciones de los elementos principales que son necesarios en este estudio, supongamos el caso más sencillo de una recta cualquiera, *a b* (*fig. 2.ª*).

Su perspectiva estará determinada, según lo dicho, por la intersección de plano *o a b*, á que se reduce la superficie cónica del caso general, con el cuadro *P*. Esta intersección será una recta *a′ b′*, pudiendo deducir que *la perspectiva de una recta es otra recta determinada por la perspectiva de dos de sus puntos*.

9. Mas si esta consideración es la principal base para la determinación perspectiva de las rectas, el estudio de las posiciones particulares que éstas puedan tener será un poderoso auxiliar que sirva de guía en la mayor parte de los casos. Así, cuando la recta sea vertical, como la *b c* de la figura 2.ª, su perspectiva *b′ c′* será la intersección del plano vertical *o b c*, con el del cuadro que ocupa igual posición, y por tanto, *la perspectiva de*

una vertical es perpendicular á la base B B' del cuadro.

10. Cuando la recta *c d* pase por cualquier punto *o'* de la vertical *o o'*, su perspectiva *c' d* será también la intersección de dos planos verticales; pudiendo decir que *la perspectiva de toda recta que corte á la vertical que pasa por el ojo del observador, es perpendicular á la base del cuadro.*

11. Por último, si la recta primitiva es paralela á la base del cuadro, análoga posición ocupará también su perspectiva, deduciéndose el principio de que *la perspectiva de una recta paralela á la base del cuadro, es también paralela á la mencionada base.*

12. Supongamos ahora *(fig. 3.ª)* varias rectas, *A, B, C,* paralelas entre sí. Si se concibe un plano que pase por cada una de las rectas y el ojo del observador, todos estos planos se cortarán según una recta *o H,* paralela á las dadas, y las líneas *o'a, o'b, o'c,* perspectivas respectivamente de las *A, B* y *C,* se contarán en el punto *o',* intersección de la recta *o H* con el cuadro. De aquí resulta que *las perspectivas de varias rectas paralelas concurren en un punto del cuadro.*

A este punto se llama *punto de concurso,* y se determina haciendo pasar por el ojo del observador una paralela á las rectas dadas.

13. Si éstas son perpendiculares al cuadro *(fig. 4.ª),* la *o H* también lo será, y el punto de concurso *o* será la proyección del ojo sobre el cuadro. En este caso se le da el nombre de *punto de vista* ó *centro del cuadro.*

De aquí se deduce que *cuando una recta es perpendicular al plano del cuadro, su perspectiva se dirige hacia el punto de vista.*

14. Si las rectas dadas son paralelas al plano horizontal, y forman, además, con el cuadro un ángulo de 45° (*fig. 5.ª*), la recta *o d*, por ser paralela á ellas, cumplirá con las mismas condiciones, y si *o'* es el punto de vista, los ángulos *o'd o* y *o'od* serán de 45°; por lo que, siendo isósceles el triángulo *o'od*, la distancia *o o'* será igual á la *o'd*; es decir, que esta última es igual á la distancia que hay del observador al cuadro. Por esta razón se llama al punto *d* punto de distancia.

Según esto, *cuando los horizontales formen ángulos de 45° con el cuadro, sus perspectivas se dirigen al punto de distancia.*

Si se observa que los puntos *o, o'* y *d* están en un mismo plano horizontal, que pasa por el ojo del observador, se comprenderá la denominación que se ha dado á la línea *o' d* que une los puntos de vista y de distancia, *de línea de horizonte.*

15. Las perspectivas de rectas paralelas son, según lo dicho, rectas concurrentes, y su punto de concurso ocupa posiciones particulares cuando las que aquéllas tienen son de esta misma naturaleza. Exceptúase de esta regla general el caso en que las rectas son paralelas á la base del cuadro; pues ya que sus perspectivas son también paralelas á la misma base, lo serán entre sí; pudiendo decirse, para considerar este caso comprendido en el general, que *cuando las rectas paralelas lo son también á la base del cuadro, su punto de concurso se ha alejado indefinidamente.*

16. **Observaciones sobre la elección del punto de vista.**—Antes de pasar á la determinación de las perspectivas, conviene hacer algunas observaciones importantes. No basta tratar la perspectiva exclusivamente como cuestión geométrica; es necesario considerar este estudio con relación al arte en sus aplicaciones al dibujo, el que debe resultar, no sólo con perfección geométrica, sino también con perfección artística en el conjunto y en los detalles.

Para que su efecto sea satisfactorio, es evidente que el espectador debe colocarse precisamente en el punto de vista adoptado por el dibujante; pero á su vez éste no puede ser elegido de un modo arbitrario.

Es necesario, con efecto, para que el dibujo pueda ser la verdadera representación del objeto ó conjunto de objetos, que puedan abarcarse en su totalidad desde el punto de vista y se observen desde él los detalles que sean necesarios. La elección de este importante punto exige una gran costumbre y experiencia en la práctica de la perspectiva, sin lo cual pudiera alucinarse el dibujante por la majestad del conjunto y belleza en los detalles del objeto de su dibujo, y encontrarse después con el desengaño de que los objetos más importantes estuvieran demasiado lejanos, ó los que estuvieran más cerca apareciesen en el dibujo deformados de una manera ridícula.

17. No pueden, por lo tanto, darse reglas fijas para determinar la situación de dicho punto en cada caso particular, y debe únicamente recomendarse la mayor escrupulosidad en su elección,

aproximándose y alejándose cuentas veces sea posible á los objetos para estudiar la influencia de la distancia en el aspecto general que presentan, y particular de los detalles que sea indispensable figuren en el dibujo.

18. En cuanto á la distancia del punto de vista al cuadro, debe, sin duda, variar con la naturaleza de los detalles que ha de contener; pero para que la visión sea bien distinta y el espectador pueda abrazarlo todo al primer golpe de vista, y sin necesidad de volver la cabeza á un lado y otro, es conveniente que la distancia en cuestión esté comprendida entre una y tres veces la longitud del cuadro. Sin embargo, puede disminuirse esta distancia á la mitad de dicha longitud, cuando la escena tiene mucha profundidad y presenta detalles lejanos que se quieren hacer figurar, como sucedería en el dibujo de un campo de batalla. Se comprende, en efecto, refiriéndose á la figura 6.ª, que con la posición $a'b'$ del cuadro, distante de o la cantidad $om' = \frac{1}{2} om$, la amplitud del ángulo $r'o\,s'$ formado por los rayos visuales extremos que partan de o, al que se da el nombre de *ángulo óptico*, habrá aumentado considerablemente, y podría figurar en el cuadro una extensión de terreno $r'a'b's'$, mayor que la $r\,a\,b\,s$ correspondiente á la distancia $o\,m$. Pero en todos los casos, no deben los rayos visuales encontrar al cuadro bajo un ángulo menor de 45°, por la poca costumbre que se tiene de observar de este modo los objetos. También es conveniente colocar el punto de vista en el centro del cuadro, pues de este modo

hay mayor facilidad para abarcarlo en conjunto.

19. Sin embargo, se ejecutan á veces perspectivas en las que el punto de vista se coloca de modo que los rayos visuales hieran muy oblicuamente al cuadro, en cuyo caso se les da el nombre de *perspectivas curiosas*. Presentado un dibujo de esta naturaleza á un observador que naturalmente lo mirará de frente, percibirá tan sólo contornos irregulares que le harán desconocer el objeto; mientras que, si dirige las visuales desde el verdadero punto de vista, se apercibirá de su verdadera forma. Citamos únicamente esta clase de perspectiva, objeto de distracción muchas veces, para hacer comprender más y más la gran importancia que tiene en este estudio, la buena elección del punto de vista.

20. Resumen de definiciones y teoremas generales.—Para la mejor inteligencia de los métodos que se han de exponer en los siguientes capítulos, es conveniente fijar las ideas que presiden á este estudio mediante una exposición de la doctrina explicada, después de haber descartado los razonamientos que para establecerla hemos hecho.

Resumimos, por lo tanto, en la forma siguiente las definiciones dadas en el primer capítulo:

a. *Punto de vista ó centro del cuadro,* es la proyección sobre plano del cuadro, del punto que marca la posición del ojo del observador.

b. *Puntos de distancia*, son los situados á derecha é izquierda del de vista, sobre la misma horizontal que éste y á una distancia igual á la que existe entre el ojo del observador y el cuadro.

c. *Base del cuadro,* se llama á la recta intersección con el terreno horizontal del plano del cuadro.

d. *Línea de horizonte,* es la paralela á la anterior, trazada por el punto de vista (esta recta contiene también á los puntos de distancia).

e. *Punto de concurso,* es la intersección de las perspectivas de varias rectas paralelas.

f. *Angulo óptico,* se llama al formado por las rectas que, pasando por los extremos de la línea de horizonte, concurren en el ojo del observador.

21. Los teoremas establecidos son los siguientes:

a. *La perspectiva de una vertical,* es perpendicular á la base del cuadro.

b. *La perspectiva de una recta que corte á la vertical que pasa por el ojo del observador*, es también perpendicular á la base del cuadro.

c. *Si la recta es paralela á la base del cuadro,* su perspectiva ocupa la misma posición.

d. *Cuando es perpendicular al plano del cuadro,* su perspectiva pasa por el punto de vista.

e. *Si es horizontal y forma* 45° *con el cuadro*, su perspectiva se dirige á uno de los puntos de distancia.

f. *Las perspectivas de varias rectas paralelas* se dirigen al punto de concurso de ellas.

CAPITULO II

Perspectiva horizontal.

22. **Interpretación del medio general que ha de servir para determinar las perspectivas de figuras situadas en planos horizontales.**—La mejor marcha de este estudio exige dar principio á él por la determinación de las perspectivas de objetos que están situados en planos horizontales; lo cual, una vez conseguido, facilitará notablemente el trazado de una perspectiva cualquiera, del que habremos de ocuparnos en el capítulo siguiente.

23. Para establecer las reglas que han de servir en dicha determinación, consideremos un punto, M, situado en el plano horizontal que pasa por los pies del espectador, y sea $P\ P$ el plano del cuadro que se representa en su verdadera magnitud en $P'\ P'$.

Marquemos ante todo en este plano, la posición de la *línea de horizonte* $B_1 B_2$, que, según sabemos, es paralela á la base del cuadro, y dista de ella la magnitud $O\ O'$. Marquemos también el *pun-*

to de vista, v, situándolo en el centro del cuadro y sobre la línea de horizonte $B_1 B_2$.

Si se dirige la visual *O M,* que es la que ha de proporcionarnos la perspectiva de *M,* se observará que corta al cuadro en un punto, *M',* que es el buscado, y cuya verdadera posición en el plano *P' P'* queremos determinar.

24. Para conseguirlo, supongamos que el plano horizontal *A M* gira alrededor de la traza *A* del cuadro hasta quedar en su prolongación. El pun- *M* ocupará la posición M_1, que corresponde á la *m* en la prolongación del plano *P' P'*.

Es natural que la perspectiva buscada ha de estar á una altura *M'A,* y, por consiguiente, debe encontrarse en la horizontal *M'H;* y si además trazamos la *m a* perpendicular á la base del cuadro, la perspectiva de esta recta (cuya verdadera posición es la *M A* perpendicular al cuadro) estará dirigida al *punto de vista v*, y será, por lo tanto, la *a v.* La perspectiva buscada será el punto *m',* intersección de las rectas *M'H* y *a v.*

25. No siendo fácil en el terreno de la práctica la investigación directa de la altura *M'A,* tratemos de proporcionarnos más datos que fijen de un modo sencillo la posición del punto *m'*.

Si á partir de *v* tomamos á derecha é izquierda, y sobre la *línea de horizonte,* distancias *v d* y *v d'* iguales á *O B,* los puntos *d* y *d'* serán los que hemos llamado *puntos de distancia.* Tomando también, á partir de *a* y sobre la base del cuadro, las distancias $a\ m_1$ y $a\ m_2$, las rectas $m\ m_1$ y $m\ m_2$ formarán ángulos de 45° con dicha base, y, por consiguiente, con el plano del cuadro pues, su verdadera posición está en el plano horizontal que pasa por los pies del espectador, y proyectadas en *A M.*

26. Las perspectivas de estas rectas, según uno de los principios fundamentales, se dirigirán á los puntos de distancia *d* y *d'*, y serán las m_1 *d'* y *d* m_2, que deberán pasar por el punto *m'*.

Conviene observar que la perspectiva de cualquier punto *n*, que dista del cuadro la cantidad *nb*=*AM*, estará en *n'* sobre la horizontal *m' H*. Esta será, por tanto, la perspectiva de la recta *m n* paralela al cuadro, y proyectada en *M*.

27. Tenemos, según lo dicho, para determinar la perspectiva del punto dado, cuatro rectas, á saber:

La *a v*, pespectiva de la recta *a m*, proyectada en *A M* y perpendicular al cuadro.

La *M' H*, perspectiva de *m n*, proyectada en *M* y paralela á la traza del cuadro.

Las m_1 *d'* y m_2 *d*, perspectivas de las líneas que, pasando por el punto dado, forman ángulos de 45° con la base del cuadro.

Puesto que dos rectas son suficientes para determinar por su intersección la posición de un punto, se podrán escoger entre las cuatro indicadas las dos que más nos convengan, según los datos del problema.

28. Perspectiva de un punto.—Pasando ya á la determinación de la perspectiva horizontal de figuras planas, empezaremos por la de un punto, la que nos servirá de base para todas las construcciones que se presenten en este estudio.

Sea *M* un punto situado de un modo cualquiera, bien en el terreno, bien en el plano construído de éste (*fig. 8.ª*). Empezaremos por elegir la posición del observador *V* y la del cuadro *C C'*, que en la figura 9.ª se ve en su verdadera magnitud, ó con arreglo á una escala determinada; marcaremos en el terreno, ó su plano, la línea *C H,* que nos va á servir como eje al que se han de referir las construcciones, pasando por el extremo del cuadro. Si en éste (*fig. 9.ª*) trazamos la línea de horizonte *h h'* y marcamos en ella el punto de vista *v*, la recta *c v* nos representará la perspectiva de la *C H,* según uno de los principios enunciados. A esta recta la llamaremos *escala de huída,* y es natural que sobre ella se ha de encontrar la perspectiva del punto *N*, pie de la perpendicular *M N* trazada á *C H.*

29. Para determinar la perspectiva de este punto *N* nos bastará considerar que se ennuentra también sobre la *N' N,* que forma 45° con el cuadro, y, por lo tanto, después de haber marcado el punto de distancia *d*, tomando la distancia *vd*, igual á la *D V* en la escala del cuadro, tomaremos con arreglo á la misma escala la distancia *c n'* = *C N'* = *C N,* y la recta *n' d* será la perspectiva de la *N' N,* según también uno de los principios enunciados, y el punto *n* lo será, por lo tanto, del *N;* la *n m* lo será á su vez de la *N M,* pues esta recta es paralela al cuadro.

Restará, pues, para determinar la perspectiva del punto *M* marcar la de la recta *M M',* lo que se conseguirá tomando la distancia *c m',* igual á la *C M'* en la escala del dibujo, y uniendo *m'* con *v*. El punto *m* será la perspectiva buscada.

30. **Simplificación de las construcciones.**—Observemos que si á partir de v se toma la distancia $v\ a$, igual en valor absoluto á la $C\ D$, y se trazan las $a\ b$ y $b\ l$, perdendicular y paralela respectivamente á la base del cuadro, la distancia $b\ b'$ resultará igual también en valor absoluto á la $M\ N$, pues de la proporción $\frac{v\ a}{h\ v}=\frac{b\ b'}{c\ m'}$ se deduce que, siendo $v\ h$ y $c\ m'$ los valores de $C\ D$ y $C\ M'=M\ N$, con arreglo á la escala, si $v\ a=C\ D$, $b\ b'$ será igual á $M\ N$.

A la recta $b\ l$ se le da el nombre de *escala lateral*, y su trazado nos evita el de la $v\ m'$.

31. Otra observación es conveniente hacer para la más fácil determinación de la perspectiva del punto M; y es, que si se toma la distancia $v\ h_1$, igual en valor absoluto á la $D\ V$, y se une el punto h_1 con el n, la distancia $c\ n_1$ será igual en valor absoluto á la $C\ N$; lo cual se deduce de la proporción $\frac{v\ h_1}{v\ d}=\frac{c\ n_1}{c\ n'}$ por razonamientos análogos á los de la observación anterior. Al punto h_1 se le llama *punto de huída*, y su construcción nos evita la del punto d, que la mayor parte de las veces se encontrará fuera de los límites del dibujo.

32. Las dos observaciones hechas nos proporcionan el medio de construir más sencillamente la perspectiva del punto M. Para mayor claridad se indican aparte, en la figura 10, las construcciones necesarias. Se marcarán en primer lugar la línea de horizonte $h\ h'$; el punto de vista v; la escala de huída $c\ v$; la escala lateral $b\ l$, y el punto de huída h_1, tomando después la distancia $c\ n_1=C\ N$, y

uniendo n_1 con h_1, tendremos el punto n, perspectiva de N, y $n\ m_1$ perspectiva de $N\ M$; tomando también $b\ b' = MN$, y uniendo v con b', se tendrá determinado el punto m, perspectiva del M.

Este método sencillo que acabamos de explicar, es el más comúnmente empleado para la determinación directa de la perspectiva horizontal de un punto; no excluyendo, sin embargo, el método general anteriormente explicado, y que no en todos los casos será de fácil aplicación.

33. **Perspectiva de una recta.**—Según lo explicado, ninguna dificultad ofrecerá ya la determinación de la perspectiva de una recta. Sea $A\ B$ (*fig. 11*) la recta dada, y $C\ C'$ el cuadro que en la figura 12 se ve en la escala del dibujo que se quiere construir. Se empezará por trazar la escala de huída $C\ V$, $c\ v$, el punto de huída h y la escala lateral $b\ l$ por el procedimiento indicado; advirtiendo únicamente que si el punto de vista v no se encontrase en los límites del plano, podría encontrarse la distancia $D\ V = v\ h$, tomando á la izquierda de $C\ C'$ una magnitud $C\ D' = C\ D$, y levantando la perpendicular $D'\ V'$, que será igual á la $D\ V$.

34. Dos puntos de la recta nos bastarán para determinar su posición en el cuadro, por lo cual pudiera parecer inútil la resolución de este problema, repetición literal del anterior; mas una conveniente elección de ellos lo simplifica notablemente, haciendo de él un problema de verdadera importancia.

35. Es natural elegir en primer lugar el punto M cuya perspectiva m sabemos determinar, pues

basta tomar la distancia $c\ m' = C\ M$, y unir el punto m' con el punto de huída h.

36. Otro punto notable de esta recta es el B situado en uno de los rayos visuales-límites del cuadro, á cuyo ángulo $P\ V\ P'$ le hemos dado el nombre de *ángulo óptico*. Es natural que la perspectiva de este punto estará situada en el lado $c'\ c'_1$ del cuadro, pues el observador colocado en V, al dirigir la visual al B y referirla al cuadro, lo observará siempre en la vertical levantada en C'; así, pues, para obtener su perspectiva bastará construir primero la del punto B', y trazar por ella la horizontal $b'\ b_1$, que nos dará el punto b_1, perspectiva del B. La recta $m\ b_1$ es, pues, la perspectiva buscada.

37. Podemos generalizar el principio que se acaba de citar diciendo que la *perspectiva de los diversos puntos de los lados del ángulo óptico está en los lados verticales del cuadro*, pues consideraciones análogas á las hechas para el punto B podrían repetirse para los demás puntos que cumplan con las condiciones dichas. Este principio es un caso particular de uno de los fundamentales enunciados en el párrafo 21.

38. Si se quiere comprobar la posición de un punto cualquiera de una recta, $A\ B$, no habrá más que encontrar su perspectiva por medio de las escalas de huída y lateral, ya marcadas en el cuadro, la que habrá de encontrarse precisamente sobre la $m\ b_1$. (La construcción, idéntica á la del caso anterior, no se hace por no complicar la figura.)

39. **Caso particular.**—Un caso particular de

este problema además de los ya consabidos, y que sirve de base para la determinación de la perspectiva del punto, es el de una recta, *V R*, que pasa por el punto de vista. La perspectiva de esta recta, según en uno de los principios fundamentales se dijo, debe ser perpendicular á la base del cuadro; por lo tanto, bastará tomar *c r'*, que en la escala del dibujo es igual á *C R'*, y la *r' r* resolverá el problema.

40. Aplicación de los principios expuestos.— *Perspectiva de un polígono*—Una sencilla aplicación hemos procurado presentar en las figuras 13 y 14, en que se representa en perspectiva el polígono *A B M N*, del que cada lado ocupa una posición particular. La perspectiva *a b* del lado *A B* es paralela á la base del cuadro, y se determina por medio del punto *A' — a'*. La del *B M*, dirigida al punto de vista, es perpendicular á la base, y se determina por medio del punto M_1—m_1. La del *A N*, perpendicular al cuadro, se dirige al punto de vista *v*; y por último, la *M N*, que ocupa una posición cualquiera, se determina por medio de las posiciones de sus extremos *m* y *n*. Como se ve, no ha sido necesaria la construcción de la escala lateral, que, por otra parte, pudiera servir de comprobante. También hubiéramos podido trazar una segunda escala de huída, *C' K*, *c' v*, y haber referido á ella parte de las construcciones, como también un segundo punto de huída *H'* que para ellas hubiera servido.

41. Con objeto de que sirvan de ejercicio en la práctica de la perspectiva horizontal, vamos á construir la de algunas otras figuras planas ha-

ciendo aplicación de los principios y reglas expuestas. En ellos procuraremos, cuando sea posible, evitar la construcción anterior de las figuras cuyas perspectivas trataremos de determinar directamente, siempre que lo permitan los datos del problema.

42. **Perspectiva de un cuadrado.**—Supongamos que se pida la perspectiva de un cuadrado, del que uno de los lados se apoya sobre la base del cuadro *c c* (*fig. 15*). Principiaremos por marcar la línea de horizonte d_1 d', el punto de vista v y los puntos de distancia d_1 d' cuando el cuadro esté, como en el caso presente, en su verdadera magnitud, ó los de huída si está con arreglo á una escala dada.

43. Los lados del cuadrado perpendiculares á *a b* se dirigirán al punto de vista, y las diagonales á los puntos de distancia; trazando va, *v b* y *a d'*, el punto *c* será la posición del vértice adyacente al *b*, y la recta *c d*, paralela á la base, será el lado opuesto. Como comprobación puede trazarse la recta *b* d_1, que debe pasar por el punto *d* precisamente.

44. **Perspectiva de una cuadricula.**—Si se pidiere la perspectiva de una cuadrícula (*fig. 16*), principiaremos por trazar su contorno *a b c d* del modo que se acaba de indicar; y como las diagonales todas forman ángulos de 45°, se dirigirán al punto de distancia *d*. Los puntos de intersección 4', 5', 6' con la *a d*, nos marcan los puntos de partida de las paralelas al lado *a b*, para cuya determinación pueden servirnos también los 7, 8 y 9. Las perpendiculares al cuadro son las rectas 1*v*, 2*v*, 3*v*, dirigidas al punto de vista.

45. **Perspectiva de una curva cualquiera.**—El problema explicado nos puede servir de auxiliar para la determinación de la perspectiva horizontal de una línea cualquiera. Basta cuadricular el papel donde esté ésta construída, ó el terreno si á él nos hemos de referir; determinar después próximamente y á la simple vista la dirección de la porción de curva comprendida en cada uno de los pequeños cuadrados. Es claro que la exactitud de este método será mayor á medida que lo sea el número de divisiones de la cuadrícula.

46. Si se quisiera que todavía fuese mayor, se determinaría la posición de los puntos notables de la curva por el medio explicado, haciendo lo mismo con los puntos intermedios que nos fueren necesarios.

47. La figura 18 nos representa la perspectiva de la curva, que en la figura 17 se ve en su verdadera magnitud. Si quisiéramos comprobar la posición de un punto cualquiera, tal como el e, nos bastaría tomar en la perspectiva la distancia $5\,e'_1 = 5e'$, y unir el punto e'_1 con el v; la recta $e'_1\,v$ será la perspectiva de la $e\,e'$, y sobre ella se ha de encontrar, por lo tanto, el punto e_1.

48. La elección de la cuadrícula depende de la naturaleza de la curva, debiendo procurarse que sus lados contengan los puntos notables de ella, sin lo cual tendríamos que marcar éstos por una construcción especial para cada uno, ó por medio de cuadrículas interiores á cada cuadrado de la total.

49. **Perspectiva de un círculo.**—Si fuese una curva cerrada, un círculo, por ejemplo, lo más

sencillo sería circunscribir á él un cuadrado y determinar cuantos puntos fueren necesarios por medio de la cuadrícula en él construída.

Pero puede simplificarse la construcción general tratando de hallar ejes ó diámetros conjugados, según los casos, que serán datos suficientes para el trazado de la elipse-perspectiva del círculo dado.

50. La investigación de los ejes será sencilla en el caso de que el centro de la circunferencia y el punto de vista estén sobre una misma perpendilar al cuadro, como indica la figura 19. Siendo C la posición del centro de la circunferencia, los puntos de contacto A B de las tangentes, trazadas desde el de vista V, nos proporcionarán en la figura 20 los a y b, perspectiva de aquéllos, que serán extremos de un eje en la perspectiva de la circunferencia. Con efecto: si bien en la posición de la circunferencia la recta A B dista mucho de ser diámetro de aquélla, como las perspectivas a a' y b b' de las mencionadas tangentes son perpendiculares á la base del cuadro según uno de los principios fundamentales, y deben, además, permanecer tangentes á la elipse-perspectiva que se busca, la recta a b que los una deberá ser diámetro conjugado de las cuerdas paralelas á dichas tangentes.

Para limitar el otro eje, cuya dirección será la m e, bastará encontrar la posición perspectiva del punto D por medio de la recta d_1 h *(fig. 20)*, y tomar la distancia o e=o d; pudiendo comprobar por medio de la recta $e_1 h$ si e es efectivamente la perspectiva de E, como debe suceder.

51. Las figuras 21 y 22 presentan el caso más general de perspectiva horizontal de una circunferencia, y en el cual será más sencillo encontrar diámetros conjugados. Consideraciones idénticas á las hechas anteriormente nos demuestran que la recta *a b*, á pesar de no ser diámetro en su posición primitiva *A B*, en perspectiva es el conjugado de las cuerdas paralelas á *a a'* y *b b'*.

El otro diámetro seguirá la dirección de la paralela *e d*, trazada á *a a'* por el punto medio de *a b*. Para limitarlo bastará encontrar la posición primitiva de dicha recta *e d*, que por ser en perspectiva perpendicular á la base del cuadro, deberá pasar por el punto de vista; tomando, pues, la distancia *M D'*, igual á la *m d'* en su escala correspondiente, la recta *V D'* será la que se busca; y trazando la DD_1 perpendicular al cuadro, se podrá determinar la perspectiva *d* del punto *D*, con lo que queda limitado el segundo diámetro *d e*. La posición del punto *e* puede comprobarse, ya que deberá resultar que es perspectiva del punto *E*, extremo de la recta *V D*.

52. **Perspectiva de una porción de terreno.**—En la presentación de una porción de terreno, ó cualquier figura cuya perspectiva quisiéramos construir con exactitud, sería necesario determinar cuantos puntos se consideren precisos por medio de las escalas de huída y lateral; medio que, si bien es más embarazoso, nos proporciona una gran exactitud. Pero deberá en todo caso hacerse uso de las reglas explicadas para simplificar la construcción, siempre que resulten figuras ó posiciones particulares á las que aquéllas puedan aplicarse.

CAPÍTULO III

Perspectiva de elevaciones.

53. **Principio fundamental de esta perspectiva.**— Para completar el estudio de la perspectiva lineal, nos resta determinar la posición de puntos situados de un modo cualquiera con respecto al cuadro.

Para esta determinación se empezará por proyectar el punto sobre el plano horizontal que contiene á la base del cuadro, y encontrando la perspectiva de su proyección, cuyo problema sabemos ya resolver, quedará únicamente por determinar la perspectiva de la línea proyectante, cuyo extremo nos dará la del punto buscado.

54. El principio fundamental para la determinación de esta perspectiva (además de los que sirven de base á la perspectiva horizontal) es que la *perspectiva de una vertical es siempre perpendicular á la base del cuadro;* pues resulta de la intersección del plano que pasa por dicha rec-

ta y el punto de vista con el plano del cuadro, ambos verticales.

55. **Perspectiva de un punto situado de un modo cualquiera en el espacio.**—Supongamos que se trata de determinar la perspectiva de un punto proyectado en A *(fig. 23)* y que dista del plano horizontal la cantidad $m\ n$. Marcadas por el medio ya sabido las escalas de huída y lateral, construiremos *(fig. 24)* la perspectiva a_1 del punto A. Si en el punto b se eleva la vertical $b\ z$, llamada *escala de alturas*, y tomando sobre ella $b\ b_1 = m\ n$, se une el punto b_1 con el v, la $a'b_2$ será la magnitud perspectiva de la proyectante buscada.

En efecto: la proporción $\frac{c\ b_3}{b\ b_1} = \frac{v\ p}{v\ q}$ nos hace ver que, siendo $v\ p$ la representación de la magnitud $v\ q$ en la escala de la perspectiva, la $c\ b_3$ será también la representación de $b\ b_1$, ó de su igual $m\ n$ en la misma escala; por tanto, la recta $b_3\ v$, por dirigirse al punto de vista, será la perspectiva de una perpendicular al cuadro cuya proyección fuera la $C\ A'$ y que estuviera elevada sobre éste la cantidad $m\ n$; su intersección b_2 con la vertical $a'b_2$, perspectiva de la proyectada en A', será la perspectiva del punto elevado sobre A' la cantidad $m\ n$. Referida la magnitud $a'b_2$ al punto α por medio de la $b_2\alpha$, como ésta representará la perspectiva de la recta cuya proyección es AA' y está elevada sobre ésta la cantidad $m\ n$, el punto pedido será el α.

Como puede muy bien observarse, para la determinación del punto α nos ha sido necesario el conocimiento de las distancias AA', $A'C$ y $m\ n$, con las cuales queda suficientemente fija su posición en el cuadro.

56. Podemos, pues, decir que un *punto queda determinado en perspectiva cuando se conocen sus distancias al plano horizontal, al plano vertical de la línea de huída y al plano del cuadro.* Pudiéramos, por lo tanto, habernos evitado la construcción de la figura 23, siempre que los datos del problema hubieran sido las distancias antedichas.

57. **Simplificación empleando la escala accidental de alturas.**—No es absolutamente indispensable que la escala de alturas pase por el puntó b. Cuando el dibujo es muy complicado y queda papel á derecha é izquierda del cuadro, puede transladarse á uno de estos lados del modo siguiente: Se tomará un punto cualquiera o sobre la línea de horizonte, y unido con c' se levantará en el punto l' de intersección de la $o\ c'$ con la escala lateral, la perpendicular $l'\ z'$, que será una *escala accidental de alturas*, pues nos proporciona una distancia $a_2\ \alpha'$ igual á la $a_1\ \alpha$ buscada. Con efecto; de las proporciones $\frac{a'\ b_2}{b\ b_1} = \frac{a'\ v}{b\ v}$ y $\frac{\alpha'\ a_2}{b_3\ l'} = \frac{o\ a_2}{o\ l'}$ se deduce que, siendo las segundas razones iguales, puesto que las paralelas $a'\ a_2$, $b\ l'$ y $v\ o$ cortan á las rectas $a'\ v$ y $a_2\ o$ en partes proporcionales, las primeras deben serlo también; y como $b\ b_1$ es igual á $l'\ b_3$, $a_2\ \alpha'$ será á su vez igual á $a'\ b_2$.

58. Como aplicación del método que se acaba de exponer, supongamos que se trata de construir la perspectiva de una recta cualquiera determi-

nada por dos puntos. Si éstos son dos cualesquiera de ella, la repetición de la anterior construcción nos conducirá al resultado pedido.

59. Mas si los puntos dados están sobre los lados del ángulo óptico, la construcción se simplifica bastante por la consideración de que sus perspectivas están situadas sobre los lados verticales del cuadro. Refiriéndonos á las figuras 25 y 26, y suponiendo ya trazadas las escalas de huída $c\,v$, lateral $p\,l$ y accidental de alturas $l\,z$, bastará encontrar la perspectiva a_1 del punto A', que referida al costado izquierdo del cuadro nos dará la del punto A. Para encontrar la posición del punto del espacio cuya proyección es A, no habrá más que tomar su altura $n\,l$ sobre la *escala accidental,* y referir el punto α_1 al borde del cuadro; el punto α será el pedido.

Una análoga construcción indicada en la figura nos conduce á determinar el punto β, con lo que queda conocida la perspectiva $\alpha\,\beta$ de la recta dada.

60. **Perspectiva de una curva cualquiera.**—El mismo método se aplicaría para la construcción de la perspectiva de una curva fijándonos, como es natural, en los puntos notables, y obteniendo cuantos puntos intermedios fueren necesarios, según la mayor ó menor precisión del dibujo.

61. **Aplicación á un círculo.**—Haciendo aplicación, como en el caso de la perspectiva horizontal, á la de un círculo que para mayor sencillez consideraremos por ahora situado en el plano de la escala de huída, supongamos que la figura 28 representa parte de la perspectiva de una habitación

en que la puerta, z, ha de estar determinada por un semicírculo. Construída la escala de alturas b_2, si la figura 27 representa la proyección horizontal después de rebatido el plano de la circunferencia, el diámetro $C' D'$ de ésta tendrá por perspectiva la recta $c' d'$ que resulta de unir el punto v con el δ que limita la magnitud $b \delta = C C'$ (los puntos c y d son respectivamente las perspectivas horizontales de los C y D). La recta $c' d'$ será un diámetro de la elipse que se busca, por ser paralelas las tangentes en sus extremos. El conjugado de éste se obtendrá análogamente á lo dicho al tratar de la perspectiva horizontal, trazando por su punto medio, o', la paralela $o\ o'$ á las tangentes $c\ c'$ y $d\ d'$, y buscando la primitiva posición del punto o sobre la escala de huída $A B$; esto será fácil uniendo el punto de distancia d con el o, con lo que la distancia $a\ o_1$, reducida según la escala de la perspectiva, será la que deba llevarse sobre $A\ O_1$ para obtener el punto O_1 que se busca. Las perspectivas m y n de los puntos M y N encontrados por la intersección con el círculo, de la recta $o_1\ M$, serán los extremos del diámetro que se busca.

62. Ninguna dificultad ofrecerá el encontrar la perspectiva del círculo de igual magnitud que éste y que estuviera situado en un plano paralelo al del cuadro. La figura 28 indica las construcciones que dan por resultado la circunferencia z', perspectiva de la dada.

63. **Perspectiva de un poliedro.**—Fácilmente podrá pasarse ya á la determinación de la perspectiva de un poliedro cualquiera. Basta encontrar las

perspectivas de sus vértices; pero si el poliedro ocupa una posición particular con respecto al cuadro, la construcción se simplifica notablemente. Si queremos, por ejemplo, representar en perspectiva un prisma de base cuadrada apoyado en el plano horizontal de la base del cuadro, y del que una de las caras laterales sea paralela á él, bastará (*fig. 29*) trazar primero la perspectiva $a\ b\ c\ d$, de la base, que dista del cuadro la cantidad $a'\ m$. Si en los puntos a' y b' elevamos las perpendiculares $a'\ \overline{a}'$ y $b'\ \overline{b}'$, iguales á la altura del prisma, las rectas $\overline{a}'\ v$ y $a'\ v$ nos representarán las paralelas distantes entre sí la magnitud de dicha altura, verificándose lo mismo con las $b'\ v$ y $\overline{b}'\ v$; y por lo tanto, en las rectas $\overline{a}'\ v$ y $\overline{b}'\ v$ deben terminar las proyectantes elevadas en los puntos a, b, c y d, pudiendo trazar, por lo tanto, el cuadrilátero $\overline{a}\ \overline{b}\ \overline{c}\ \overline{d}$ que representa la base superior del prisma, con lo que queda éste bien representado.

64. **Perspectiva de una superficie cualquiera.**— Para construir la perspectiva de una superficie cualquiera, nos bastará suponerla cortada por planos horizontales equidistantes entre sí, y encontrar las perspectivas de las diversas curvas de nivel así obtenidas, lo cual no puede ofrecer dificultad alguna, atendido á que basta suponer elevada la base del cuadro á una altura igual á la que tenga sobre ella el plano horizontal sobre que se quiere construir la curva, y encontrar la perspectiva horizontal de ésta por el medio ya indicado.

65. Mas á pesar de la sencillez de estas operaciones, fundadas únicamente en la perspectiva

horizontal, la figura resultaría muy confusa en la mayor parte de los casos. Puede emplearse otro procedimiento en algunos, que consiste en encontrar de antemano el contorno aparente de la superficie que se quiere representar, cuya perspectiva se determinará por puntos según lo dicho ya, bastando esto para la buena representación, y procurando marcar las líneas ó puntos notables que pueda haber. Es claro que este medio será ventajoso únicamente en el caso en que pueda encontrarse sin dificultad el contorno aparente.

66. **Representación perspectiva de un paisaje.**— Al hacer aplicación de los principios de la perspectiva á la representación de una porción cualquiera de terreno, podrá emplearse uno ú otro medio, según la naturaleza del dibujo. Si éste ha de ser correcto, en cuyo caso se hace preciso el levantamiento del plano del terreno, las curvas de nivel marcadas en él y los diversos puntos y objetos notables nos proporcionan la perspectiva que se busca. Mas si el dibujo ha de ser únicamente artístico, en el que se pide un conjunto agradable á la vista y parecido al terreno del cual quiere sacarse copia, es ya el contorno aparente el que sirve de guía en él; mas no es determinado en este caso por reglas geométricas, y sí únicamente por la buena imaginación del dibujante, el que necesita auxiliarse además de las reglas dadas, que ningún artista de esta naturaleza debe ignorar.

67. En ambos casos debe tenerse muy presente cuanto sobre la elección del punto de vista llevamos dicho, lo mismo que sobre la posición del

cuadro con respecto á éste y al objeto, para conseguir que no exista monotonía en los dibujos caprichosos, y que en los que deban ser la representación genuina de un objeto ó varios, estén representados con toda claridad cuantos detalles nos sean indispensables.

CAPÍTULO IV

Simplificación de los procedimientos generales de la perspectiva.

68. **Bases de la simplificación.**—Dadas ya las reglas generales para la construcción de la perspectiva lineal de cualquier objeto, indicaremos el medio práctico más usado, cuyo fundamento estriba en ellas, viniendo á ser una simplificación notable de los métodos generales ya explicados.

Se sabe que la línea de horizonte se encuentra á la altura de la vista del observador; según esto, se puede considerar á la altura *H C (fig. 30)*, como representando próximamente la altura de un hombre que esté situado en el mismo plano del cuadro; todas las personas *H C, m n, H' C'*, situadas en el mismo plano, se distinguirán con igual altura, terminando, por lo tanto, en la línea de horizonte. Para determinar la altura de otra persona situada en el punto *a* del plano horizontal que pasa por *C' C'*, bastará elevar la vertical *a b* hasta la línea de horizonte, y ella nos determinará la altura aparente que se busca. Con efecto: si se une el punto *a* con el *v* de vista, la recta *a' V* nos representará una perpendicular al cuadro; la

$a' b'$ marca la altura aparente de un hombre situado en éste; según lo cual, las rectas $a' v$ y $b' v$ representan dos paralelas distantes entre sí la altura de un hombre; $a b$ es, pues, la altura que se busca.

69. El mismo razonamiento, aplicado á las personas situadas en los puntos h p s..., nos hace ver que sus alturas son respectivamente $h k$, $p q$, $r s$...; pudiendo concluir que *las alturas de las diversas personas situadas sobre el plano horizontal de la base del cuadro terminan en la línea de horizonte, cualquiera que sea la distancia á que se encuentren.*

70. **Perspectiva rápida de los objetos situados en el plano horizontal de la base del cuadro.** — La sencillez notable que con esto se introduce, nos permite determinar con gran facilidad la altura aparente de un objeto cualquiera. Basta tomar como tipo de comparación la altura aparente de una persona que se supusiera colocada en el mismo sitio del objeto cuya altura se busca. Si, por ejemplo, en el punto α debe haber un objeto cuya altura es dos veces la de un hombre, basta elevar la vertical $\alpha\,\beta$ y tomar sobre ella una magnitud $\alpha\,\beta = 2\,\alpha\,\alpha'$ para obtener la altura aparente que se busca.

71. **Perspectiva rápida, cualquiera que sea el plano horizontal donde se considere apoyado el objeto.**— En el caso en que las personas ú objetos no estén sobre el plano horizontal de la base del cuadro, bastará proyectarlos sobre este plano y determinar la altura que tendrían si estuviesen en él situados; porque puede suponerse sin error

sensible que *un observador, á cierta distancia, distingue los objetos iguales bajo una misma magnitud, cualquiera que sea la altura á que se encuentren.* Es claro que esto será tanto más exacto cuanto mayor sea la distancia, y sobre todo cuando el observador pueda distinguir ambos objetos sin hacer movimiento alguno de cabeza.

72. Para mejor inteligencia de la regla dada supongamos (*fig. 31*) que $c\ c'\ a\ b\ a'\ b'\ c'_1\ c_1$ nos represente la perspectiva interior de una habitación, en cuyo fondo se encuentra una plataforma en escalones. La construcción de ésta no puede ofrecer dificultad, si se tienen muy presentes las reglas dadas; basta marcar en el contorno del suelo $c\ a\ b\ c'$ los pies a_2 y a_1 de los escalones por medio de las líneas de huída $D\alpha$ y $D\beta$. Las verticales $a_2\ d$ y $a_1\ g$, se terminarán en las línees $h_1\ v$ y $h_2\ v$, que distan del suelo respectivamente las magnitudes $c\ h_1$ y $c\ h_2$ de los peldaños, terminando el trazado con las horizontales $a_2\ a'_2$, dd', $e\ e'_1$, $g\ g'$, $i\ i'$.

73. Si una persona está colocada en el punto m del primer escalón, para determinar su altura aparente bastará, según se ha dicho, proyectar dicho punto sobre el suelo. Con este objeto uniremos el punto m con el v, prolongando esta recta hasta que corte á la $h_1\ h'_1$. Considerando que el plano horizontal de la base del cuadro se hubiese elevado hasta esta recta, podremos considerarla como una *base accidental*, en cuyo caso la $m'\ v$ será la posición de la perpendicular al cuadro, trazada por el punto m; la recta $p'\ v$ que pasa por le punto p', proyección del m', ocupará también

la misma posición; esta recta es, por lo tanto, la proyección de la $m' \, v$, y el punto p lo será á su vez del m. Según esto, la persona que estuviera situada en p tendría una altura aparente igual á $p \, n'$: bastará, pues, añadir á la $m \, n'$ una magnitud $m' \, n = m \, p$, para obtener la buscada, $m \, n$.

De idéntico modo se obtendría la altura aparente $m_1 \, n_1$ de una persona situada en m_1 sobre el segundo escalón. La base accidental, en este caso sería la $h_2 \, h'_2$ trazada sobre el cuadro en el plano horizontal que pasa por el punto m_1.

74. Las reglas dadas y aplicaciones hechas nos parecen suficientes para que pueda practicarse el alumno en la construcción de una perspectiva cualquiera, bien sea aplicando los procedimientos generales, ó el método rápido que acabamos de explicar.

La buena elección del punto de vista en primer lugar, el trazado del contorno y líneas principales de su dibujo en segundo término; y, por fin, la construcción de las bases accidentales que considere puedan ser útiles, le proporcionarán el medio más eficaz y práctico para completar su perspectiva, marcando en ella, con el auxilio de dichos elementos, cuantos detalles deban figurar, según sea el objeto á que esté destinado el dibujo.

75. **Perspectiva caballera.**—No terminaremos sin indicar, bien sea ligeramente, una de las aplicaciones más generalizadas de la perspectiva. Refiriéndonos á la figura 29, si suponemos que el punto de vista v se va separando del prisma, las rectas $a \, d$, $b \, c$, $\overline{a} \, \overline{d}$ y $\overline{b} \, \overline{c}$ se cortarán en un punto cada vez más lejano; y cuando aquél se haya ale-

jado indefinidamente, dichas rectas llegarán á ser paralelas. La perspectiva en este caso toma el nombre de *perspectiva caballera*. Como puede muy bien comprenderse, esta perspectiva es sumamente sencilla, y existe una idea intuitiva de ella en todo aquel que, sin conocimiento alguno de este estudio, quiera representar un sólido, cuya figura trata de hacer comprender en todas sus partes.

76. La perspectiva caballera es la que ordinariamente se emplea para la construcción de las figuras de Geometría del espacio, ó cualquier otra que en él tenga que imaginarse, no solamente porque en ella las operaciones son mucho más fáciles que en la perspectiva ordinaria, sino también porque las figuras son más convenientes para facilitar la inteligencia de las proyecciones, que si bien nos proporcionan una idea precisa de los cuerpos, necesitan su auxilio para poderse formar á la simple vista idea clara de la forma de ellos.

LAMINAS

Laminas.

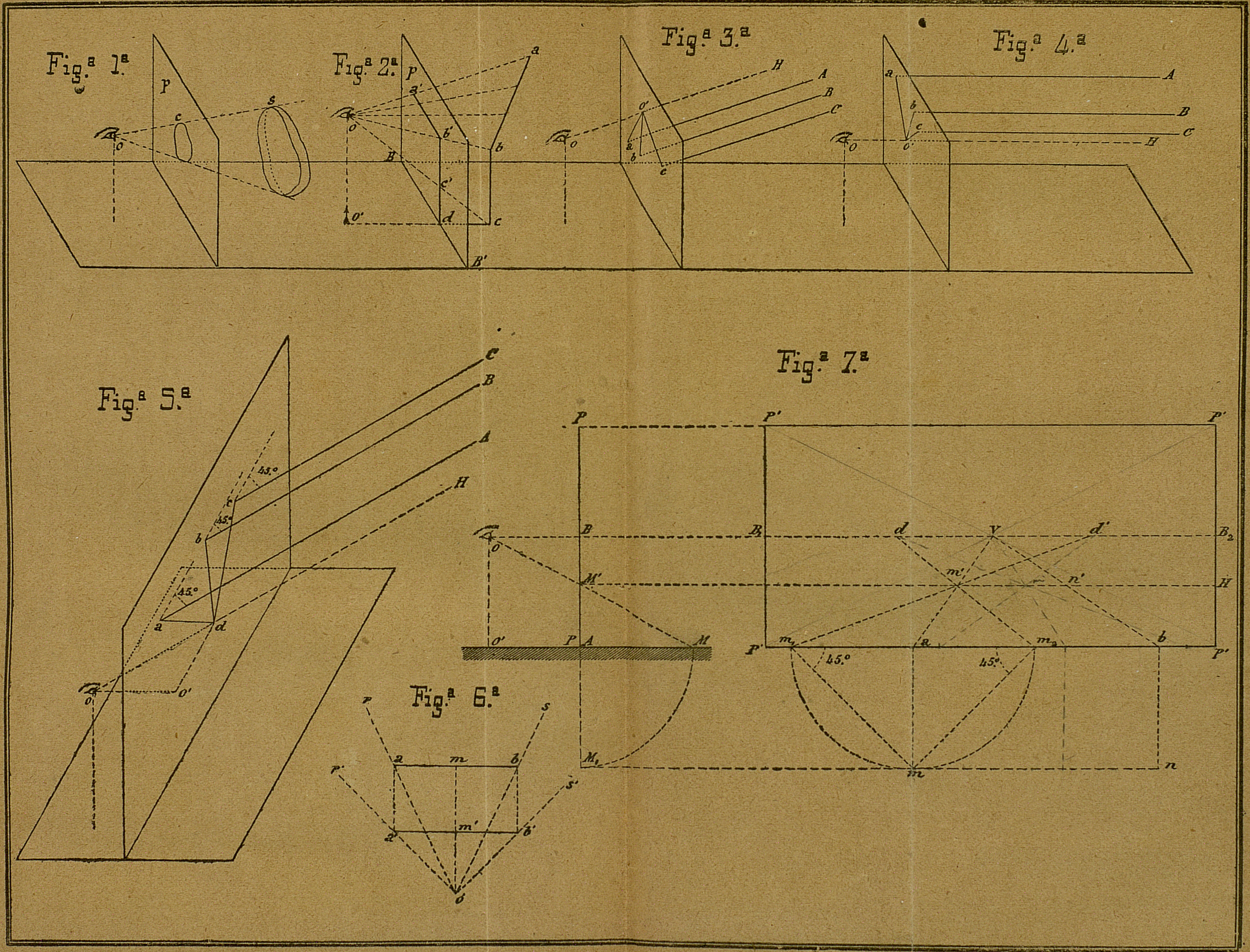


Fig.ª 1.ª
Fig.ª 2.ª
Fig.ª 3.ª
Fig.ª 4.ª
Fig.ª 5.ª
Fig.ª 6.ª
Fig.ª 7.ª
45.°
45.°
45.°
45.°
45.°

Fig.ª 8.ª

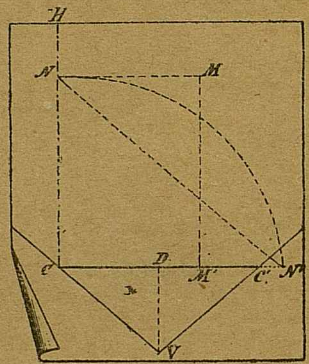


Fig.ª 9.ª

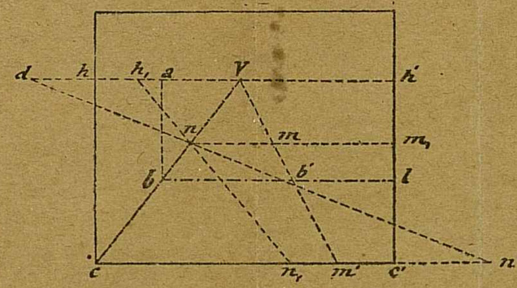


Fig.ª 10.ª

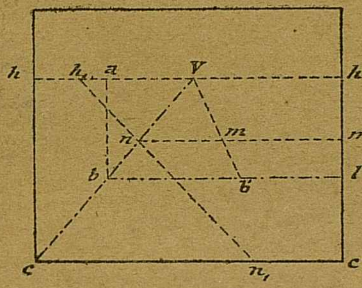


Fig.ª 11.

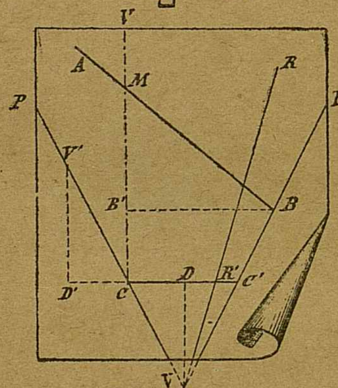


Fig.ª 12.

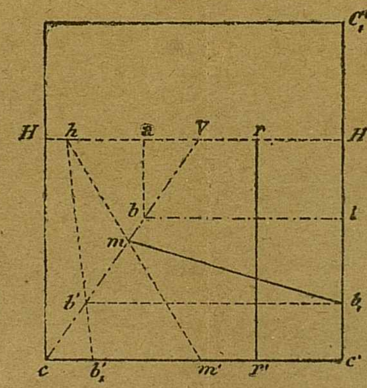


Fig.ª 13.

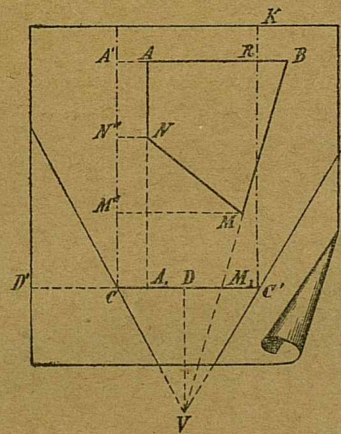


Fig.ª 14.

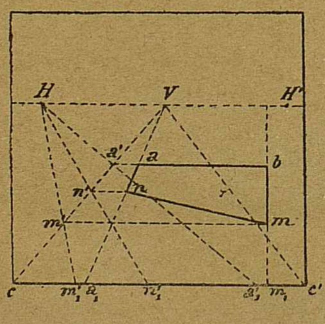


Fig.ª 15

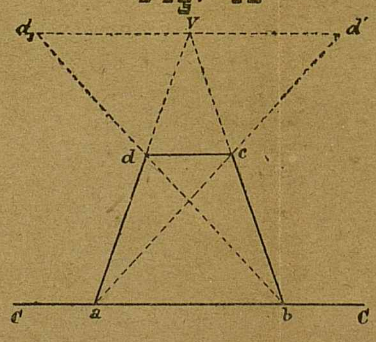


Fig.ª 16.

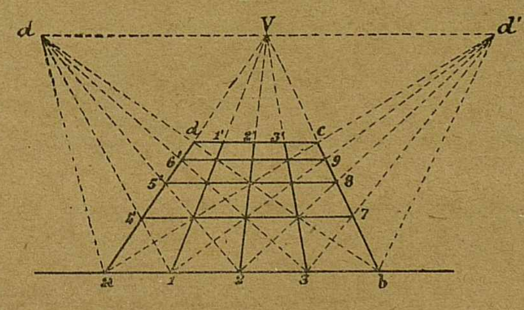


Fig.ª 17.

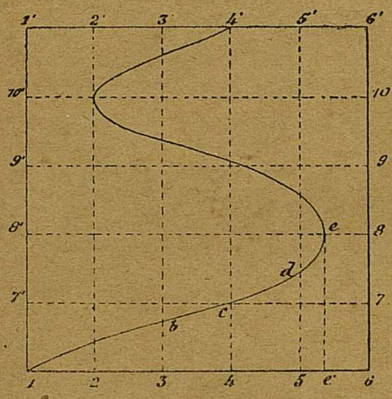


Fig.ª 18.

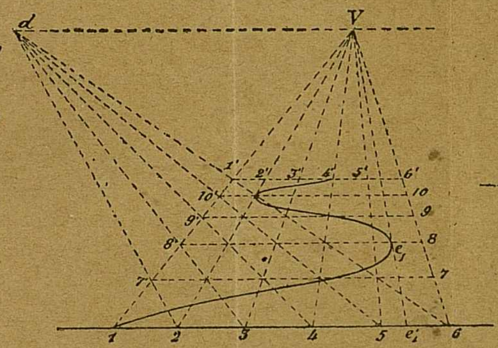


Fig.ª 19.

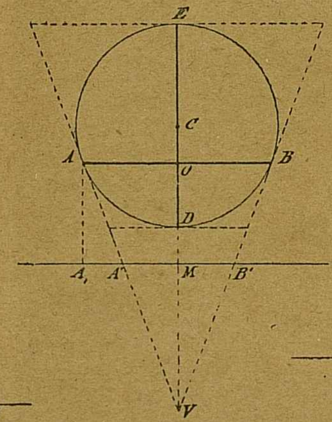


Fig.ª 20.

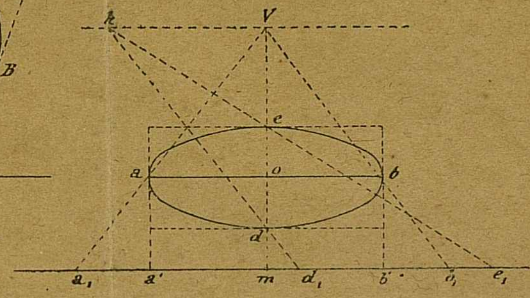


Fig.ª 21.

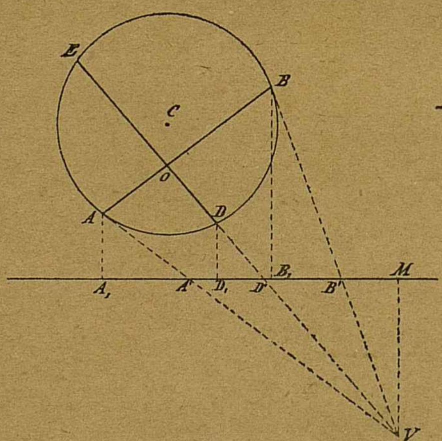


Fig.ª 22.

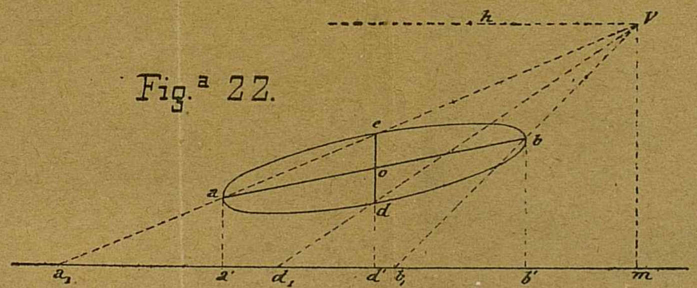


Fig.ª 23.

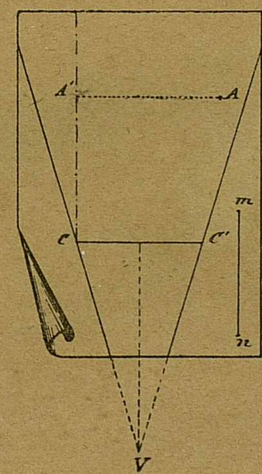


Fig.ª 24

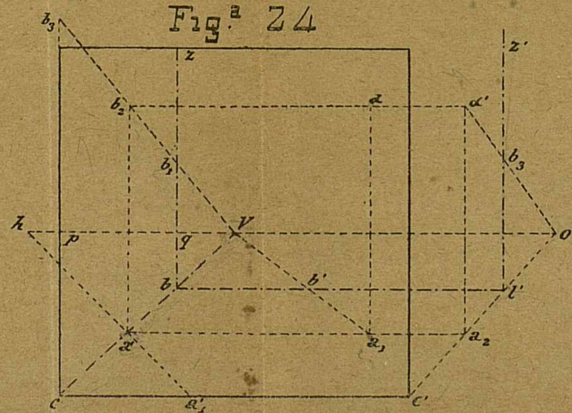


Fig.ª 25.

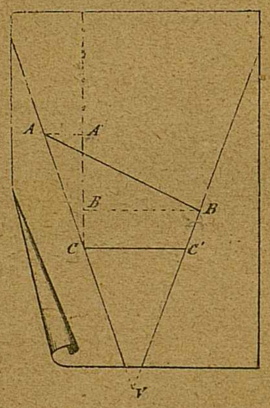


Fig.ª 26.

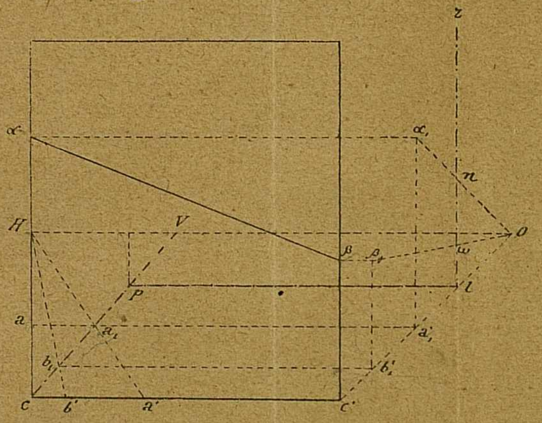


Fig.ª 27.

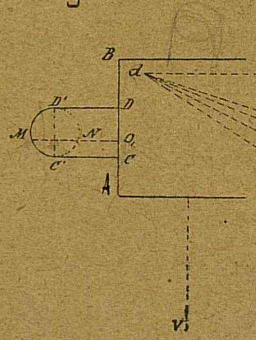


Fig.ª 28.

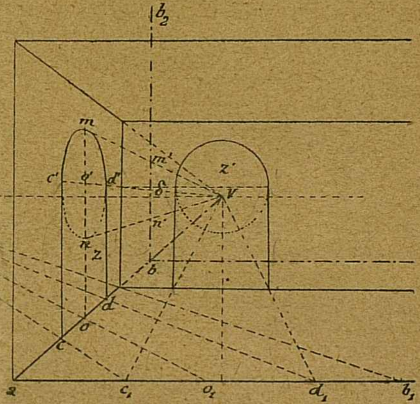


Fig.ª 29.

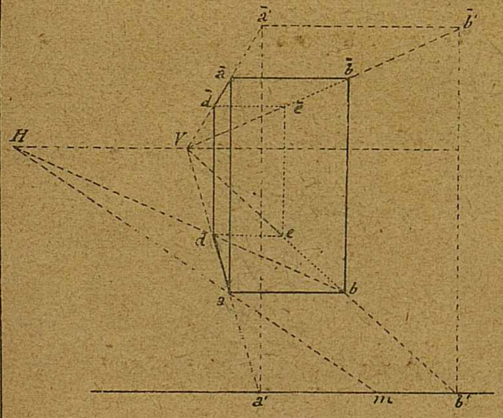


Fig.ª 30.

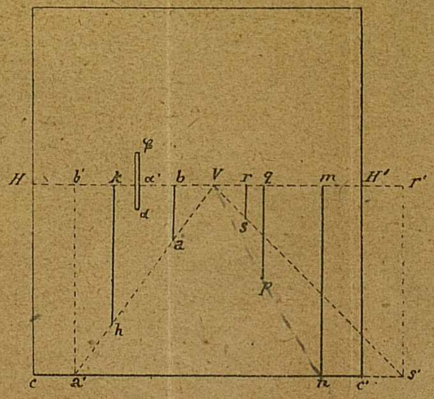
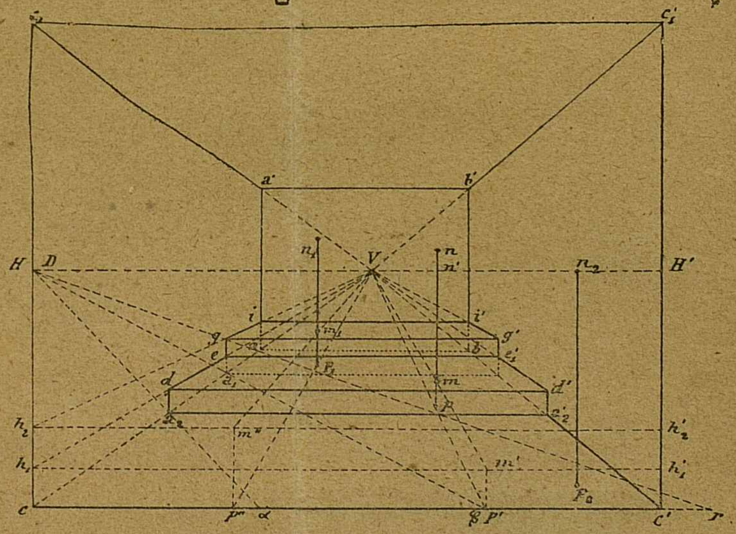
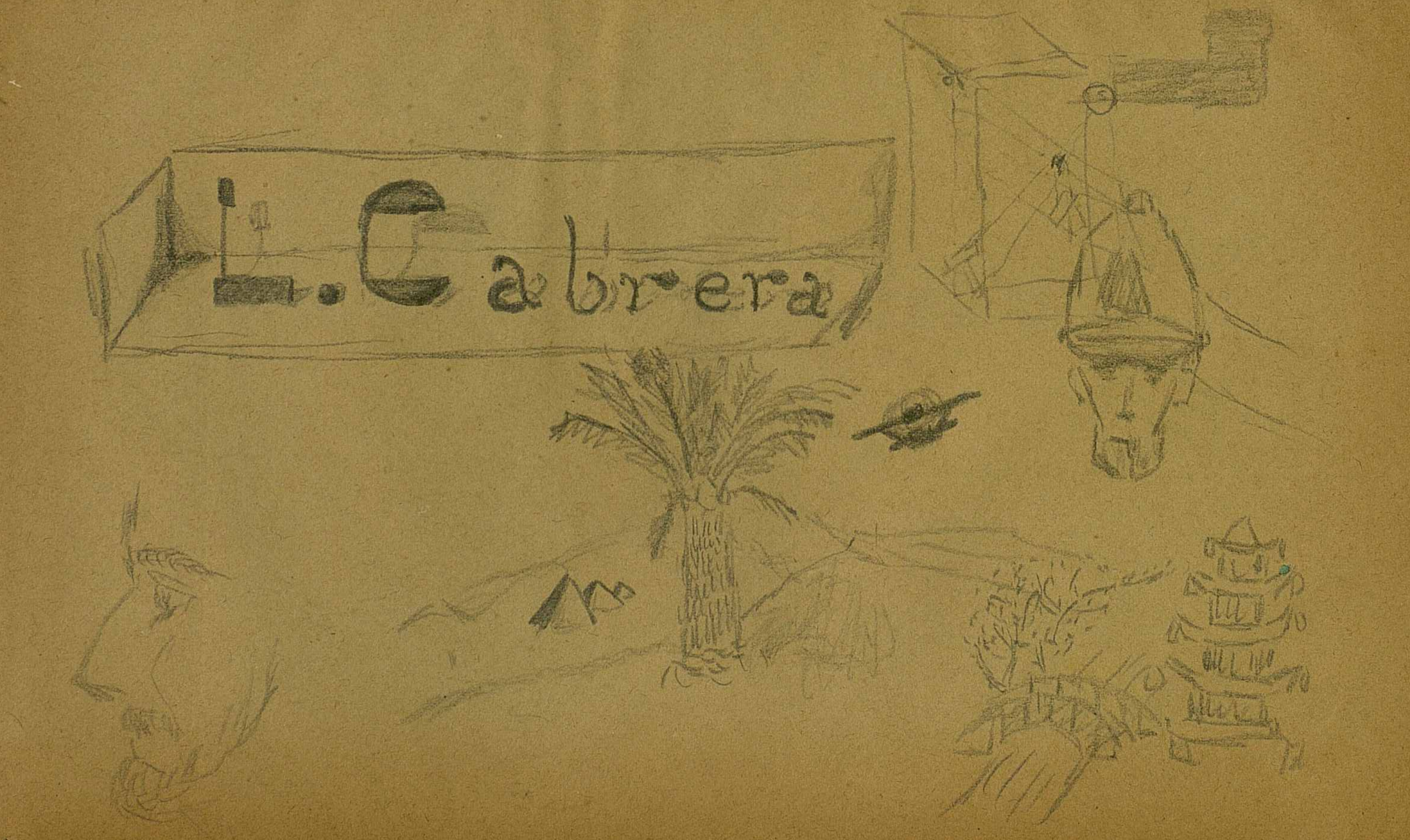


Fig.ª 31.




L. Cabrera