DISTRITO UNIVERSITARIO DE VALENCIA.

INSTITUTO PROVINCIAL DE ALICANTE.

PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

POR

DON RAMÓN BANÚS Y CASTELLVÍ,

Catedrático en este Instituto.

ALICANTE:
IMPRENTA DE ANTONIO SEVA.

1884.

DISTRITO UNIVERSITARIO DE VALENCIA.

INSTITUTO PROVINCIAL DE ALICANTE.

PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

POR

DON RAMÓN BANÚS Y CASTELLVÍ,

Catedrático en este Instituto.

ALICANTE:
IMPRENTA DE ANTONIO SEVA.

1884.

PROGRAMA

DE

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

GEOMETRÍA.

Preliminares.

LECCIÓN 1.ª—Extensión, dimensiones de una extensión.—Cuerpo geométrico.—Superficie.—Línea. Punto.—Tres especies de extensión. Definición de la Geometría.—Tres cualidades propias de toda extensión.—Extensiones iguales, equivalentes y semejantes.—Del punto; cómo se le representa.—De las líneas; diferentes clases de líneas; definición de línea recta; consecuencia relativa á la manera de estimar la distancia entre dos puntos.—Cuántas rectas pueden pasar por dos puntos: consecuencias que tratan del número de puntos suficientes para determinar la posición de una recta; de la condición de dos rectas que tienen dos puntos comunes; y de los puntos comunes á dos rectas que se cortan. Línea quebrada ó poligonal. Línea curva. Línea mixta.

LECCIÓN 2.ª—Mayor común medida de dos rectas; cómo se determina; y cómo la razón de sus magnitudes. Rectas comensurables é inconmensurables; cómo se puede hallar aproximadamente la razón de dos rectas incomensurables. Qué hay que hacer para medir una recta. Relación entre las líneas quebradas que, estando compuestas cada una de dos rectas, tienen comunes sus extremos, y se hallan situadas á un mismo lado de una recta que los une.

LECCIÓN 3.ª—Diferentes clases de superficies.—Definición del plano ó superficie plana: consecuencia relativa á la condición de toda recta que pasa por dos puntos de un plano.—Definición de superficie quebrada ó poliédrica.—Definición de las superficies curvas y mixtas.—Definiciones de la circunferencia, del círculo, del radio, del diámetro, de las cuerdas y arcos. Comparación de los radios de un mismo círculo; comparación de los diámetros.—Condiciones que deben reunir los teoremas recíprocos para que pueda omitirse su demostración.—División de la Geometría en plana y del espacio.

GEOMETRÍA PLANA.

Rectas concurrentes.

LECCIÓN 4.ª—Ángulo, lados y vértice. Cómo se designa ó nombra un ángulo. Influencia de la longitud de los lados en el valor ó tamaño del ángulo. Los ángulos se suman, se restan y se multiplican ó dividen por un número entero abstracto; cómo se consigue hacerlo. Bisectriz de un ángulo.—Ángulos adyacentes, rectos y oblicuos. Relación entre dos ángulos rectos no adyacentes.—Ángulos agudos, obtusos, complementarios y suplementarios. Complemento de un ángulo; suplemento de un ángulo. Consecuencia relativa á la igualdad de dos ángulos cuando ambos tienen el mismo complemento ó complementos iguales, ó el mismo suplemento ó suplementos iguales.—Valor de la suma de los ángulos adyacentes; proposición recíproca, y cinco consecuencias del teorema directo que investigan: la especie de un ángulo cuando su adyacente es recto ú oblicuo; el límite superior de un ángulo; la suma de todos los ángulos de vértice común, construidos sobre una recta que pasa por este vértice; la suma de todos los ángulos formados alrededor de un punto en todas direcciones; y la suma de los cuatro ángulos que forman dos rectas que se cortan.—Ángulos opuestos por el vértice; demostración de la igualdad entre ellos.

Perpendiculares y oblicuas.

LECCIÓN 5.ª—Línea perpendicular á otra, línea oblicua á otra. La perpendicularidad entre dos rectas es recíproca, asi como la oblicuidad. Especie de los ángulos que forman dos rectas que se cortan perpendicularmente. Por un punto dado, en ó fuera de una recta, no se puede trazar más que una perpendicular á ella. Si desde un punto, fuera de una recta, se traza á ésta una perpendicular y una oblicua, la perpendicular es menor que la oblicua. Cómo se estima ó mide la distancia de un punto á una recta. Proposición recíproca: la menor de todas las rectas, que van de un punto á otra recta, es perpendicular á ésta.

LECCIÓN 6.ª—Relación entre las oblicuas trazadas desde un punto á una recta, según sean entre sí los apartamientos de sus piés del pié de la perpendicular, y recíprocamente. Consecuencia referente al número de rectas iguales que desde un punto pueden ser trazadas á una recta. Relación entre las distancias de un punto á los extremos de una recta, según esté ó no situado en la perpendicular levantada en el punto medio de dicha recta, y recíprocamente. Lugar geométrico de ciertos puntos. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta. Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de otra, es perpendicular á esta otra en su punto medio.

Paralelas.

LECCIÓN 7.ª—Rectas paralelas.—Teorema fundamental que prueba la posibilidad de que existan rectas paralelas. Postulado de Euclides, ó sea dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á una tercera, no son paralelas. Seis consecuencias de este postulado, que tratan: del número de rectas paralelas que por un punto se pueden trazar á otra recta; de probar que si una recta corta á una de dos paralelas, también será secante de la otra; de demostrar que toda perpendicular á una de dos paralelas, es perpendicular á la otra; que dos rectas paralelas á una tercera, son paralelas entre sí; que si dos rectas son paralelas, sus perpendiculares respectivas tambien lo serán; y que si dos rectas no son paralelas, sus perpendiculares respectivas tampoco lo serán.

LECCIÓN 8.ª—Línea secante ó trasversal.—Número y nombres de los ángulos que forma una trasversal con las dos rectas cortadas por ella. Demostrar el teorema que prueba el paralelismo ó no paralelismo de dos rectas, según sean ó no iguales los ángulos alternos ó correspondientes, ó según sean ó no suplementarios los internos de un mismo lado de la secante. Teorema recíproco del anterior.

LECCIÓN 9.ª—Relación entre las partes de paralelas comprendidas entre paralelas: consecuencia relativa á las distancias de los puntos de una recta á su paralela. Relación entre los ángulos de lados respectivamente paralelos, ya estén estos dirigidos en un mismo sentido ó en sentido contrario, ya estén dos dirigidos en un mismo sentido y dos en sentido contrario: consecuencia resúmen de estas proposiciones. Relación entre los ángulos de lados respectivamente perpendiculares: observación que advierte la señal práctica de conocer la igualdad ó suplementarismo.

Circunferencia.

LECCIÓN 10.—Propiedades de la circunferencia. Primera: dos circunferencias de igual radio son iguales; dos arcos de igual radio y superpuestos sus centros y primeros extremos, si son iguales, coinciden en toda su extension; y si son desiguales, el menor se ajusta sobre el mayor, pero termina antes; y dos arcos de centros superpuestos y de igual radio, si coinciden sus extremos, son iguales. Segunda: el diámetro divide á la circunferencia y al círculo en dos partes iguales, llamadas semicircunferencias y semicírculos. Tercera: el diámetro es mayor que una cuerda cualquiera. Cuarta: por tres puntos, que no estén en línea recta, puede pasar una circunferencia, y nada más que una; consecuencias referentes al número de puntos que determinan la posición de una circunferencia, y al número de puntos comunes que pueden tener dos circunferencias.—Relación entre las cuerdas de una misma circunferencia ó de circunferencias iguales, según la que haya entre los arcos correspondientes, y recíprocamente.

LECCIÓN 11.—Relación entre las distancias de las cuerdas al centro, según la que éstas tengan entre sí, y recíprocamente; observación referente á la magnitud relativa de los ángulos formados por cada una de dos cuerdas, que tienen un extremo común, con el radio que vá al punto de concurso. Propiedades del diámetro perpendicular á una cuerda: observación referente á las condiciones que reune ó cumple la recta, sujeto del teorema anterior: dos de estas cinco condiciones determinan la posición de dicha recta: si una recta reune dos de estas condiciones, reunirá también las restantes.

LECCIÓN 12.—*Líneas secantes y tangentes á la circunferencia.* Una recta no puede tener más de dos puntos comunes con la circunferencia. Definición de secante de una circunferencia, y de tangente á la misma; punto de contacto. Toda recta perpendicular al radio en su extremo exterior es tangente á la circunferencia; toda recta oblicua al radio en su extremo exterior es secante de la circunferencia. Proposiciones recíprocas. Consecuencia referente al número de tangentes, que se pueden trazar por un punto de la circunferencia. Consecuencia relativa á la posición de los puntos de contacto de dos paralelas tangentes á una circunferencia. Observación acerca de la distancia de la secante, de la tangente, y de una recta exterior, al centro; y recíprocamente. Relación entre los arcos comprendidos entre dos paralelas, ya sean estas cuerdas ó secantes, ya una secante y la otra tangente, ó ambas tangentes.

Dos circunferencias.

LECCIÓN 13.—Circunferencias secantes; circunferencias tangentes. Si dos circunferencias tienen un punto común, fuera de la línea de los centros, serán secantes; consecuencia referente á la posición del único punto común á dos circunferencias tangentes; consecuencia relativa á la posición de la línea de los centros con respecto á la cuerda común á dos circunferencias secantes. Relación entre la distancia de los centros y la suma ó diferencia de los radios, según la posición relativa de dos circunferencias situadas en un mismo plano; y recíprocamente.

Medida de los ángulos centrales.

LECCIÓN 14.—Arco correspondiente á un ángulo; consecuencia referente al arco correspondiente á un ángulo recto. Igualdad ó desigualdad de dos arcos, según la de los ángulos á que corresponden, y recíprocamente; consecuencia relativa al tamaño del ángulo, cuyo arco correspondiente es un cuadrante. Proporcionalidad entre los ángulos y sus arcos correspondientes. Naturaleza de la unidad de medida de los ángulos. Naturaleza de la unidad de medida de los arcos. Convenio que es necesario establecer para que resulte cierta la proposición siguiente: La medida de un ángulo es igual á la medida de su arco correspondiente. Cuando se dice que la medida de un ángulo es su arco correspondiente, qué se quiere significar. Cuál es el ángulo unidad, y cuál es el arco unidad. Siendo la medida de un ángulo igual á la medida de su arco correspondiente, para medir aquel se procederá á la medida de éste. Para medir los diferentes arcos no basta una sola unidad de arcos; de aquí la división de la unidad principal de arcos en unidades submúltiplas; cuáles son éstas; división sexagesimal y centesimal. Una vez hallada la medida del arco, expresada en partes del cuadrante, cómo debería expresarse la medida ó valor numérico del ángulo central.

Medida de los àngulos no centrales.

LECCIÓN 15.—Ángulos excéntricos: inscrito, semi-inscrito, interior excéntrico, y exterior. ¿Puede hallarse la medida de estos ángulos trazando sus arcos correspondientes? ¿Puede hallarse la medida de estos ángulos con solo medir los arcos de círculo comprendidos entre sus lados? Medida del ángulo inscrito. Medida del semi-inscrito. Medida del interior excéntrico. Medida del exterior. Consecuencias relativas á la relación que existe entre los ángulos inscritos ó semi-inscritos, cuyos lados comprenden un mismo arco, ó arcos iguales; al tamaño de todo ángulo inscrito cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, ó comprenden una semicircunferencia; así como al de los que comprenden un arco mayor ó menor que media circunferencia. Observación acerca del tamaño de un ángulo cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro, según tenga el vértice en la circunferencia, dentro del círculo, ó fuera; proposición recíproca. Lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro.

Problemas gráficos.

LECCIÓN 16.—Problemas gráficos de perpendiculares, de ángulos y paralelas: 1.º Dividir una recta en dos partes iguales por medio de una perpendicular: dividirla en cuatro, ocho, diez y seis, etc. partes iguales. 2.º Por un punto dado trazar una perpendicular á una recta (tres casos). 3.º En un punto de una recta formar un ángulo igual á otro dado. 4.º Dividir un arco en dos partes iguales, conocido ó no el centro: dividir un arco en cuatro, ocho, etc. partes iguales: dividir un ángulo en dos partes iguales, ó sea, trazar su bisectriz. 5.º Por un punto fuera de una recta, trazarle una paralela. 6.º Por un punto fuera de una recta, trazar otra que forme con la primera un ángulo igual á otro ángulo dado.

LECCIÓN 17.—Problemas relativos á la circunferencia. 1.º Por tres puntos que no estén en línea recta, trazar la circunferencia que ellos determinan: dada una circunferencia ó un arco, hallar su centro. 2.º Por un punto dado trazar una tangente á la circunferencia, ó las que se puedan: relación entre las magnitudes de las dos tangentes exteriores que tienen un punto común: posición de la recta que une el punto común con el centro, respecto al ángulo de las dos tangentes, y al arco convexo comprendido entre las mismas. 3.º Describir una circunferencia tangente á tres rectas dadas, que forman entre sí ángulos cualesquiera (cuatro soluciones). 4.º Trazar una circunferencia tangente á otra en un punto dado, y que pase por otro punto también dado, exterior ó interior á ella: caso en que sería imposible este problema.

Polígonos; propiedades del triángulo.

LECCIÓN 18.—Definiciones de polígono, lados, ángulos y vértices del polígono; diagonales del polígono; perímetro. Polígono convexo, cóncavo, equilátero, equiángulo, regular é irregular. Nomenclatura de los polígonos, según el número de lados, ángulos ó vértices. *De los triángulos.* Relación entre los lados de un triángulo cualquiera, ó sea condiciones á que está sujeto el tamaño de un lado de un triángulo con respecto al tamaño de los otros dos. Relación entre los ángulos de un triángulo, expresada por la constancia de su suma. Cinco consecuencias: 1.ª Un ángulo de un triángulo es suplemento de la suma de los otros dos; 2.ª Valor del ángulo externo de un triángulo; 3.ª En un triángulo no puede haber más que un ángulo recto ú obtuso; 4.ª Cuando un triángulo tiene un ángulo recto, los otros dos son agudos y complementarios; y recíprocamente; 5.ª Si desde un punto de una oblícua se baja una perpendicular sobre la recta á que lo es, la perpendicular caerá dentro del ángulo agudo. Triángulo rectángulo; catetos é hipotenusa; triángulo obtusángulo; triángulo acutángulo.

Igualdad de los triángulos.

LECCIÓN 19.—Principales casos de igualdad de triángulos: 1.º cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; 2.º cuando tienen dos lados respectivamente iguales, é igual el ángulo comprendido; 3.º cuando tienen un lado igual, contiguo á dos ángulos respectivamente iguales. También son iguales dos triángulos cuando tienen un lado igual y dos ángulos cualesquiera respectivamente iguales, con tal que estos tengan la misma colocación en los dos triángulos respecto al lado igual. Dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen las hipotenusas iguales y un cateto igual á otro cateto. Observación que manifiesta que en triángulos que son iguales, á los lados que nos conste que son iguales, se oponen ángulos iguales; y recíprocamente. Observación que nos manifiesta que si dos triángulos rectángulos tienen igual un cateto y desigual la hipotenusa, el ángulo opuesto á dicho cateto es mayor en el que tiene menor hipotenusa.

Triángulos de lados ó ángulos iguales.

LECCIÓN 20.—Clasificación de los triángulos por la igualdad ó desigualdad de sus lados. Base de un triángulo, vértice y altura; altura en un triángulo rectángulo cuando se toma un cateto por base; lado del triángulo isósceles que suele llamarse base del mismo. Relación entre dos ángulos de un triángulo, según la que haya entre sus lados opuestos, y recíprocamente: consecuencias relativas á los ángulos contiguos á la base de un triángulo isósceles; á la condición que reune un triángulo equilátero de ser también equiángulo, y recíprocamente; y al lado de mayor tamaño en un triángulo obtusángulo ó rectángulo. Condiciones que reune la recta que desde el vértice vá perpendicular á la base del triángulo isósceles. Relación entre los lados de dos triángulos, opuestos á ángulos formados por lados iguales, según la que haya entre dichos ángulos, y recíprocamente.

Cuadriláteros; propiedades del paralelógramo.

LECCIÓN 21.—Tres clases de cuadriláteros: trapezoide, trapecio y paralelógramo. Bases y altura del trapecio; base y altura del paralelógramo. Valor de la suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero cualquiera. Cuatro propiedades del paralelógramo: lados opuestos iguales dos á dos; dos lados opuestos, iguales y paralelos; los ángulos opuestos iguales; las diagonales se dividen mútuamente en mitades. Proposiciones recíprocas. Consecuencias referentes á la division del paralelógramo por la diagonal, y á la igualdad de dos paralelógramos cuando tienen un ángulo igual, formado por dos lados respectivamente iguales.

Clases de paralelógramos; diagonales.

LECCIÓN 22.—Diferentes clases de paralelógramos, definidos por la igualdad ó desigualdad de los lados que forman un mismo ángulo, y de los ángulos contiguos á un mismo lado: consecuencia que manifiesta que hay un paralelógramo, que es polígono regular. Propiedades de las diagonales del romboide, del rombo, del rectángulo y del cuadrado; propiedades recíprocas, que permiten conocer, por el tamaño relativo de las diagonales y por su posición relativa, la clase del paralelógramo á que pertenecen.

De los polígonos en general.

LECCIÓN 23.—Valor de la suma de los ángulos de un polígono cualquiera; fórmula. Valor de un ángulo de polígono regular. Valor de la suma de los ángulos externos de un polígono cualquiera. Valor de un ángulo externo de polígono regular. Consecuencia relativa al mayor número de ángulos agudos que puede tener un polígono convexo cualquiera. Igualdad de polígonos cuando tengan sus lados y sus ángulos, respectivamente iguales é igualmente dispuestos. Igualdad de polígonos cuando estén compuestos de igual número de triángulos, respectivamente iguales é igualmente dispuestos; y recíprocamente.

Problemas gráficos.

LECCIÓN 24.—Problemas de construcción de triángulos, de paralelógramos y de polígonos en general. 1.º Construir un triángulo, dados los tres lados: condición de los datos para que el problema sea posible; construir un triángulo isósceles, dados los dos lados desiguales; construir un triángulo equilátero, dado su lado. 2.º Dados dos lados y el ángulo comprendido, construir el triángulo. 3.º Dado un lado y los dos ángulos contiguos, construir el triángulo; dado un lado, un ángulo contiguo y el ángulo opuesto á dicho lado, construir el triángulo: condición de los datos para que este problema sea posible. 4.º Dada la hipotenusa y un cateto, construir un triángulo rectángulo. 5.º Construir un triángulo igual á otro dado. 6.º Dados dos lados y el ángulo comprendido, construir un paralelógramo; dado el lado y un ángulo, construir un rombo; dados los dos lados desiguales, construir un rectángulo; dado el lado, construir un cuadrado. 7.º Dado un polígono, construir otro igual al dado; dos procedimientos para conseguirlo.

De las líneas proporcionales.

LECCIÓN 25.—Teorema fundamental que demuestra la igualdad entre las partes interceptadas, en un lado de un ángulo, por las paralelas trazadas por los puntos de división del otro lado, préviamente dividido en partes iguales á partir desde el vértice. Teorema que demuestra que la paralela á un lado de un triángulo, divide á los otros dos lados en partes proporcionales, y recíprocamente. Consecuencias de dicha proporcionalidad. Teorema de la bisectriz de un ángulo de un triángulo. Consecuencia que patentiza la no proporcionalidad entre los lados de un triángulo y sus ángulos opuestos. El teorema de la bisectriz es cierto también cuando se refiere al ángulo externo del triángulo, siendo en este caso sustractivos los segmentos del lado opuesto.

De los triángulos semejantes.

LECCIÓN 26.—Polígonos semejantes; vértices homólogos; lados homólogos. Cuando se dice que los polígonos semejantes tienen sus lados homólogos proporcionales, qué se quiere significar. En los triángulos semejantes, cuáles son los lados que resultan homólogos. Teorema que demuestra la semejanza entre el triángulo total y el parcial, cuando en el primero se traza una paralela á un lado. Tres casos principales de semejanza de triángulos, á saber: cuando tienen los tres lados proporcionales; cuando tienen dos lados proporcionales é igual el ángulo comprendido; y cuando tienen los tres ángulos, ó dos, respectivamente iguales.

Semejanza de triángulos y de polígonos

LECCIÓN 27.—Otros casos de semejanza de triángulos: dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen la hipotenusa y un cateto proporcionales; dos triángulos cualesquiera son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares. Semejanza de polígonos: dos polígonos compuestos de igual número de triángulos, respectivamente semejantes, y semejantemente dispuestos, son semejantes; y recíprocamente. Dos polígonos regulares del mismo número de lados, son semejantes.

Consecuencias de la semejanza de triángulos.

LECCIÓN 28.—Cómo cortan á dos paralelas tres ó mas rectas que concurren en un punto: consecuencia acerca de la igualdad de las partes de una de las paralelas, provocada por la igualdad de las partes de la otra. Cuándo se dice que dos rectas están divididas en partes recíprocamente proporcionales. Cómo se cortan dos cuerdas en el círculo; constancia del producto de las dos partes de toda cuerda que pasa por un punto. Cómo corta la circunferencia á dos secantes que parten de un punto exterior, y terminan en los segundos puntos de encuentro: constancia del producto de cada secante por su segmento externo. Relación entre la tangente, la secante y su segmento externo. Proporcionalidad entre las bases y las alturas de dos triángulos semejantes.

LECCIÓN 29.—Proyección de un punto y de una línea cualquiera sobre una recta; proyección de la hipotenusa sobre un cateto; proyección de un cateto sobre el otro. Demostrar las cuatro relaciones que provoca la perpendicular á la hipotenusa, trazada desde el vértice del ángulo recto. Aplicación de estas relaciones al círculo, cuando desde un punto de la circunferencia se traza una perpendicular al diámetro, y las dos cuerdas á los extremos de éste.

LECCIÓN 30.—Teorema de Pitágoras: Demostrar que en el triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos. Demostrar también á qué es igual el cuadrado del lado opuesto á un ángulo obtuso de un triángulo; y á qué es igual el cuadrado de un lado de triángulo, opuesto á un ángulo agudo. Formúlense estas relaciones, y enúnciese el teorema de Pitágoras de cuatro maneras, según se despeje el cuadrado de la hipotenusa, el cuadrado de un cateto, la hipotenusa sencilla, ó un cateto sencillo. Proposiciones recíprocas. Proporcionalidad entre los perímetros de polígonos semejantes y sus lados homólogos.

Problemas gráficos y numéricos.

LECCIÓN 31.—Problemas. 1.º Dividir una recta en partes proporcionales á otras rectas dadas. 2.º Dividir una recta en un número cualquiera de partes iguales (tres procedimientos). 3.º Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas. 4.º Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas. 5.º Hallar una media proporcional entre dos rectas dadas. 6.º Dividir una recta en media y extrema razón. 7.º Dado un triángulo, construir otro semejante, sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de uno de los del primero (tres procedimientos.) 8.º Dado un polígono, construir otro semejante sobre una recta dada, considerada como lado homólogo de un lado del propuesto. Problemas numéricos: 1.º Dados los valores numéricos de dos lados de un triángulo rectángulo, determinar el tercer lado. 2.º Dados los valores numéricos de los lados de un triángulo, determinar la especie de sus ángulos.

Polígonos inscritos y circunscritos.

LECCIÓN 32.—Polígono inscrito en una circunferencia; polígono circunscrito. Posibilidad de la inscripción y circunscripción de polígonos regulares: definiciones de centro, radios y apotemas de un polígono regular: consecuencias sobre igualdad de los radios y de las apotemas de un polígono; sobre radios bisectrices, y sobre igualdad de los ángulos centrales de un polígono regular. Observaciones acerca del modo de determinar el centro de un polígono regular, y acerca del valor de todos y de cada uno de los ángulos centrales. Regularidad del polígono inscrito equilátero; regularidad del circunscrito equiángulo. Proporcionalidad entre los perímetros de polígonos regulares de igual número de lados, y las líneas homólogas en ambas figuras.

Problemas gráficos.

LECCIÓN 33.—*Problemas*: 1.º Inscribir en una circunferencia un polígono regular de cualquier número de lados. 2.º Dado un polígono regular inscrito, circunscribir á la misma circunferencia otro del mismo número de lados, y hallar después el valor del lado de este último en valores del lado del primero y del radio: alineación entre los vértices de uno y otro con el centro, cuando los lados de ambos son paralelos: fórmula del valor del apotema de un polígono inscrito en función del lado y del radio. 3.º Dado un polígono regular inscrito, inscribir otro de doble número de lados; y hallar despues el valor del lado de éste en valores del lado del primero y del radio. 4.º Dada una circunferencia, inscribir en ella un cuadrado, y hallar después el lado de éste en función del radio: razón del lado del cuadrado al radio: razón entre la diagonal y el lado del cuadrado: construir una recta, cuyo valor sea raiz cuadrada del número dos.

LECCIÓN 34.—5.º Dada una circunferencia, inscribir en ella un exágono regular, demostrando antes, que el lado del exágono regular inscrito es igual al radio: inscribir un triángulo regular ó equilátero, determinando después el valor del lado de dicho triángulo en valores del radio; razón del lado al radio, y construir una recta que represente exactamente el valor de raiz cuadrada del número tres: valor del apotema del triángulo equilátero inscrito. 6.º Dada una circunferencia, inscribir en ella un decágono regular, demostrando antes, que el lado del decágono regular inscrito, ó sea la cuerda de treinta y seis grados, es igual á la parte mayor del radio dividido en media y extrema razón: inscribir un pentágono regular: inscribir un pentadecágono regular. 7.º Hallar el valor del lado del decágono regular inscrito en función del radio; hallar el valor del lado del pentágono regular inscrito en función del radio; hallar también en función del radio el lado del pentadecágono regular inscrito. 8.º Dado el lado de un polígono regular cualquiera, construir dicho polígono.

Razón de la circunferencia al diámetro.

LECCIÓN 35.—Qué se entiende por razón de la circunferencia al diámetro. Teoremas en que se funda el procedimiento seguido en geometría elemental para hallar dicha razón, á saber: Todo círculo se puede mirar como un polígono regular de infinito número de lados. Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus radios, y á sus diámetros. La razón de la circunferencia al diámetro es una cantidad constante; ó es la misma siempre, cualquiera que sea la circunferencia que se considere. Llamando π la razón de la circunferencia al diámetro, c la circunferencia y d ó $2r$ el diámetro, formular la relación que liga á estas cantidades; despejando, en dicha fórmula, cualquiera de ellas tres. Toda línea convexa cerrada, comprendida dentro de otra cualquiera, es menor que esta otra. Comparación de la circunferencia con los perímetros de los polígonos inscritos y circunscritos. Variación de los perímetros inscritos y circunscritos á medida que el número de lados se duplica. Límite superior de los perímetros inscritos, é inferior de los circunscritos.

LECCIÓN 36.—*Problema:* Hallar de una manera elemental el valor de π, ó sea, el valor de la razón de la circunferencia al diámetro. Valor de π aproximado con cuatro cifras decimales. Valor aproximado de π, dado por Arquímedes. Valor aproximado de π, dado por Pedro Mecio. Problema: dado el valor del radio, hallar la longitud ó valor de la circunferencia; y recíprocamente. Problema: Dado el valor del radio, hallar la longitud ó valor de un arco de cierto número de grados. Problema: Dada una circunferencia de radio conocido, hallar el número de grados que ha de tener un arco de radio también conocido, para que sea este arco tan largo como la circunferencia dada. Problema gráfico: Dada una circunferencia, hallar una recta tan larga como ella, ó como su mitad; ó sea, rectificar una circunferencia.

Áreas de las figuras planas.

LECCIÓN 37.—Superficies equivalentes. Equivalencia entre dos paralelógramos de igual base y altura; todo paralelógramo es equivalente á un rectángulo de igual base y altura. Equivalencia entre un triángulo y la mitad de un paralelógramo de igual base y altura. Equivalencia entre dos triángulos de igual base y altura. Definición de área de una superficie. Superficie que se toma siempre por unidad de superficies. Teoremas fundamentales para la determinación de las áreas de las figuras planas; á saber: Dos rectángulos, de iguales bases, son proporcionales á sus alturas: dos rectángulos de iguales alturas, son proporcionales á sus bases; dos rectángulos cualesquiera, ó sea, de bases y alturas diferentes, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas respectivas.

Determinación de las áreas.

LECCIÓN 38.—Área de un rectángulo; demostrar cómo se deduce; área de un cuadrado. Área de un paralelógramo cualquiera. Área de un triángulo: comparación de las áreas de dos triángulos cualesquiera; de dos triángulos de igual base; de dos triángulos de igual altura. Área de un trapecio; triángulo equivalente al trapecio; área del trapecio en función de la altura y la paralela media. Área de un polígono regular. Área de un polígono irregular. Fórmula del área de un triángulo en función de sus lados.

LECCIÓN 39.—Definiciones de sector poligonal y base del sector poligonal. Área de un sector poligonal. Sector circular. Área de un sector circular. Área de un círculo, mirado como un sector, ó mirado como un polígono regular de infinito número de lados. Segmento circular; de una base, menor y mayor que un semicírculo; de dos bases. Área de un segmento de una base, menor que un semicírculo. Área de un segmento de una base, mayor que un semicírculo. Área de un segmento de dos bases. Área de una corona ó anillo circular. Área de una figura plana no terminada completamente por líneas rectas, ni comprendida entre las superficies circulares antes dichas.

Comparación de las áreas de figuras semejantes.

LECCIÓN 40.—Comparación de las áreas de dos triángulos semejantes; de dos polígonos semejantes cualesquiera; de dos polígonos regulares del mismo número de lados; de dos círculos; de los polígonos semejantes construidos sobre la hipotenusa y catetos, tomados como lados homólogos; de los cuadrados construidos sobre las mismas rectas; de los círculos ó semicírculos construidos con radios ó diámetros iguales á dichas rectas; de los polígonos regulares semejantes inscritos ó circunscritos en circunferencias trazadas con radios ó diámetros iguales á dichas rectas. Comparación de las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual ó común.

LECCIÓN 41.—Problemas 1.º Trasformar un polígono en otro equivalente que tenga un lado menos. 2.º Cuadrar un triángulo ó sea trasformarle en cuadrado equivalente; cuadrar un polígono cualquiera. Cómo pueden cuadrarse los polígonos cuya área tiene fórmula determina-da. Cómo puede calcularse el lado del cuadrado equivalente á una figura cualquiera. 3.º Cuadrar un círculo aproximadamente. 4.º Dado un polígono, construir otro semejante al primero, y cuyas áreas estén en una razón dada.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

Preliminares; líneas trigonométricas; valores absolutos.

LECCIÓN 42.—Qué se entiende por resolver un triángulo. La resolución gráfica de este problema y de los demás problemas no alcanza la exactitud, que en muchos casos sería de desear. Conviene, pues, resolver un triángulo por medio del cálculo. Qué se entiende por resolver un triángulo por medio del cálculo. Definición de la Trigonometría. Por qué medio consigue la trigonometría su objeto. Líneas trigonométricas: seno, tangente, coseno y cotangente; definir estas líneas, así como los arcos complementarios y suplementarios. Orígen de los arcos, de los complementos y de los suplementos. Nótense los valores que adquieren las líneas trigonométricas de un arco cero, cuadrante, dos, tres y cuatro cuadrantes; así como el mayor valor absoluto del seno, coseno, tangente y cotangente. Nótese tambien que el coseno de un arco viene á ser igual á la distancia del centro al pié del seno; así como que la tangente y cotangente de medio cuadrante son iguales entre sí y al radio. Tres deducciones ó conclusiones: 1.ª Respecto al número de líneas propias y de colíneas correspondientes á un arco. 2.ª Respecto á la relación entre las líneas de dos arcos complementarios. 3.ª respecto á las variaciones que sufren en sus magnitudes las líneas trigonométricas de un arco, cuando éste crece desde cero á cuadrante, desde un cuadrante á dos, desde dos á tres, desde tres á cuatro cuadrantes.

Valores relativos de las líneas trigonométricas.

LECCIÓN 43.—Valores positivos y negativos de los arcos y de las líneas trigonométricas. Convenio establecido para distinguir los arcos positivos de los negativos. Convenio establecido para distinguir las líneas trigonométricas positivas de las negativas. Según estos convenios cuáles serán los arcos positivos, y cuáles los negativos; cuáles serán los senos y tangentes positivos, y cuáles los negativos; cuáles serán los cosenos y cotangentes positivos y cuáles los negativos. Consecuencia relativa á los signos de las líneas trigonométricas de un arco que, contado desde el punto de orígen, termine en el primer cuadrante, ó en el segundo, en el tercero ó en el cuarto. Relación entre las líneas trigonométricas de dos arcos de igual longitud, pero de signo contrario; fórmulas que expresan dicha relación; enunciado breve de la misma, diciendo lo que pasa cuando un arco cambia de signo.

LECCIÓN 44.—Relación entre las líneas trigonométricas de dos arcos que tienen un extremo común y los segundos extremos terminan en los de un mismo diámetro. Consecuencias: 1.ª Relación entre las líneas de dos arcos suplementarios. 2.ª Las líneas de un arco no varian de valor absoluto aún cuando se añade ó quite al arco una semicircunferencia. Relación entre las líneas de dos arcos que se diferencian en una ó más circunferencias. Consecuencias: 1.ª Las líneas de un arco no varian aunque se le agreguen ó resten de él una ó más circunferencias. 2.ª Una línea trigonométrica dada corresponde á infinitos arcos. Todo arco positivo ó negativo puede reducirse á otro contenido en el primer cuadrante, y cuyas líneas trigonométricas sean respectivamente iguales en valor absoluto á las del arco dado.

Relaciones entre las líneas de un arco y el radio.

LECCIÓN 45.—Relación entre el seno, coseno y radio de un arco; relación entre tangente, radio, seno y coseno de un arco; relación entre cotangente, radio, coseno y seno de un arco. Fórmulas que traducen al lenguaje algébrico dichas relaciones. Escribir dichas fómulas ó relaciones en el caso especial de que el radio del círculo fuese igual á la unidad que sirve para medir dichas líneas. Las primeras fórmulas se llaman fórmulas á radio r, y las segundas á radio 1. Cómo se pasa de éstas á aquellas, ó sea, cómo se restablece el radio r en una fórmula á radio 1. Generalización de dichas fórmulas, ó sea, demostrar que dichas relaciones son ciertas, cualquiera que sea el arco á que se refieran. En dichas fórmulas, á radio 1, ó en las generales cuando es conocido el radio, hay cuatro cantidades variables, que son las cuatro líneas trigonométricas de un arco; son, pues, tres ecuaciones con cuatro incógnitas ó variables, y se pide hallar tres de ellas, dada la cuarta. Deducir de las fórmulas segunda y tercera por via de multiplicación ordenada una cuarta fórmula, por la cual se ve que la tangente y cotangente, á radio 1, son cantidades recíprocas, y sus logaritmos complementarios á cero.

Fórmulas del seno y coseno de la suma ó diferencia de dos arcos

LECCIÓN 46.—Relaciones entre las líneas trigonométricas de tres arcos, de los cuales el uno es la diferencia ó la suma de los otros dos; ó sea: 1.º Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar el coseno de la diferencia de los mismos; 2.º Deducir de la fórmula del problema anterior la fórmula que da el valor del seno de la diferencia; 3.º Deducir de las dos fórmulas de los problemas anteriores las que dan los valores del coseno de la suma, y del seno de la suma. Recordar estas fórmulas empezando por la del seno suma, y siguiendo por seno diferencia, coseno suma y coseno diferencia; traducción de ellas al lenguaje ordinario. Indicar cómo se habría de proceder con dichas cuatro fórmulas para hallar las de tangente suma, tangente diferencia, cotangente suma, cotangente diferencia. Generalización de todas estas fórmulas, ó sea demostrar que las relaciones que expresan son ciertas, cualesquiera que sean los valores de los arcos considerados.

Fórmulas del seno y coseno del arco duplo: consecuencias.

LECCIÓN 47.—Consecuencias de las fórmulas obtenidas en la lección anterior, y que tratan: 1.º De hallar la relación entre el seno ó coseno de un arco, y el seno y coseno del arco mitad; 2.º De igualar á un producto la suma de uno mas el coseno de un arco, ó la diferencia entre uno y el coseno de un arco; 3.º De hallar á qué es igual la razón que existe entre la suma de los senos de dos arcos y su diferencia, Escribir dichas fórmulas; y ejercicios mnemónicos para recordarlas.

De las tablas trigonométricas.

LECCIÓN 48.—Determinación del seno del arco un minuto en valores del radio.—Teorema 1.º: Todo arco positivo y menor que un cuadrante es mayor que su seno y menor que su tangente. Teorema 2.º: La diferencia entre un arco del primer cuadrante y su seno es menor que la cuarta parte del cubo del arco. Problema: Calcular el valor del seno de un minuto, suponiendo el radio igual á la unidad.

Formación de las tablas.

LECCIÓN 49.—Qué es lo que contienen las *tablas trigonométricas naturales*. Basta que se extiendan á noventa grados. Basta calcular las líneas trigonométricas de los arcos que van desde cero á cuarenta y cinco. Si en las tablas, cuya formacion se intenta, crecen los arcos de minuto en minuto, cómo podrán calcularse los valores de líneas trigonométricas de los arcos, desde cero á cuarenta y cinco. Trasformación de las *tablas naturales* en *tablas artificiales* ó logarítmicas, llamadas simplemente *tablas trigonométricas*. Los logaritmos de todos los senos y cosenos, así como los logaritmos de las tangentes de los arcos cero á cuarenta y cinco, y los de las cotangentes de cuarenta y cinco á noventa resultarán negativos, suponiendo que calculamos con fórmulas á radio uno.

Disposición y manejo de las tablas.

LECCIÓN 50.—Manejo de las tablas trigonométricas de Vazquez Queipo. Primer problema: 1.er caso; dada la graduación de un arco ó ángulo, que contenga sólo grados y minutos, hallar el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas. 2.o caso; dada una graduación que contenga segundos, siendo mayor que cuatro grados y menor que ochenta y seis, hallar el logaritmo de cualquiera de sus lineas trigonométricas. 3.er caso; dada una graduación que contenga segundos, siendo menor que cuatro grados, hallar el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas. 4.o caso; dada una graduación, que contenga segundos, siendo aguda y mayor que ochenta y seis grados, hallar el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas; 5.o caso; dada una graduación obtusa, hallar el logaritmo de cualquiera de sus líneas trigonométricas.

Manejo de las tablas.

LECCIÓN 51.—Manejo de las tablas trigonométricas de Vazquez Queipo. Segundo problema: 1.er caso; dado el logaritmo de una línea trigonométrica de una graduación desconocida, que esté contenido exactamente en las tablas, buscar la graduación á que corresponde. 2.o caso; dado el logaritmo de una línea trigonométrica de una graduación desconocida, que no esté exactamente contenido en las tablas, hallar la graduación á que corresponde; hay que distinguir en este segundo caso, tres casos particulares, á saber: cuando el logaritmo dado caiga entre dos de las tablas, fuera de las cuatro primeras planas; cuando caiga entre dos de las tablas, dentro de las cuatro primeras planas, columnas descendentes; cuando caiga entre dos de las tablas, dentro de las cuatro primeras planas, columnas ascendentes.

Resolución de los triángulos rectángulos

LECCIÓN 52.—Teoremas en que se funda: Primero: relación entre el radio, el seno de un ángulo agudo, la hipotenusa y el cateto opuesto á dicho ángulo: valor del cateto cuando calculamos á radio uno. Segundo: relación entre el radio, el coseno de un ángulo agudo, la hipotenusa y el cateto contiguo á dicho ángulo: valor del cateto cuando trabajamos á radio uno. Tercero: relación entre el radio, la tangente de un ángulo agudo, y los dos catetos; valor de un cateto, cuando el radio es igual á uno. Teorema de Pitágoras. Diferentes casos que conviene distinguir en la resolución de un triángulo rectángulo: Primer caso; dada la hipotenusa y un cateto, determinar los tres elementos desconocidos. Observación.

LECCIÓN 53.—Segundo caso de resolución de triángulos rectángulos: Dados los dos catetos, hallar los dos ángulos agudos y la hipotenusa; observación. Tercer caso: Dada la hipotenusa y un ángulo agudo, determinar el otro, y los dos catetos; observación. Cuarto caso: dado un cateto y un ángulo agudo, determinar el otro, la hipotenusa y el segundo cateto; observación. Observaciones generales referentes á las condiciones que han de reunir los datos del primero, tercero y cuarto caso, para que el problema sea posible; y á la manera de comprobar los valores hallados al resolver los cuatro problemas.

Problemas.

LECCIÓN 54.—Problemas ó ejemplos de resolución de triángulos rectángulos: 1.º Resolver un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide trescientos quince metros y un cateto mide doscientos veinte. 2.º Resolver un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide doscientos treinta metros, y un ángulo agudo mide diez y siete grados, veinte minutos y trece segundos. 3.º Resolver un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden sesenta y dos metros el primero, y cincuenta y siete con cinco centímetros el segundo. 4.º Resolver un triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos mide cuarenta y siete metros, y el ángulo agudo opuesto mide cuarenta grados, quince minutos y veinte segundos.

Triángulos oblicuàngulos.

LECCIÓN 55.—Teoremas en que se funda la resolución de los triángulos oblicuángulos ó generales. Primero; que establece relación entre los tres lados y un ángulo. Segundo; que establece relación entre los lados y los senos de los ángulos opuestos. Tercero; que investiga la relación entre la suma y diferencia de dos lados, y las tangentes de la semisuma y semidiferencia de los ángulos opuestos á dichos lados.

LECCIÓN 56.—Casos ó problemas diferentes que ofrece la resolución de los triángulos oblicuángulos ó generales. Detállense los datos que figuran en cada uno de los cuatro problemas ó casos. Primer caso: Dados los tres lados, resolver el triángulo, ó sea hallar los tres ángulos; preparación de las fórmulas para el cálculo logarítmico.

LECCIÓN 57.—Segundo caso: Dados dos lados y el ángulo comprendido, determinar los otros dos ángulos y el tercer lado. Tercer caso: Dado un lado y dos ángulos cualesquiera, determinar el tercer ángulo y los otros dos lados. Cuarto caso: Dados dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos, determinar los otros dos ángulos y el tercer lado.

LECCIÓN 58.—Discusión del cuarto caso de resolución de triángulos oblicuángulos: Decir por qué este caso se llama dudoso, y cuándo lo es; decir tambien cuándo tiene una sola solución, cuándo tiene dos, cuándo estas dos se refunden en una, y cuándo no tiene ninguna ó es imposible. Observaciones acerca de las condiciones que han de reunir los datos de los problemas primero, tercero y cuarto, para que sean posibles; y acerca de la manera de comprobar los cuatro problemas.

Problemas.

LECCIÓN 59.—Problemas ó ejemplos de resolución de triángulos oblicuángulos. Primero: Resolver un triángulo, cuyos tres lados miden respectivamente cuarenta y siete, cincuenta y dos y sesenta y tres metros. Segundo: Resolver un triángulo que tiene dos lados que miden setenta y cuatro y cincuenta y seis metros, y el ángulo comprendido tiene treinta y dos grados, quince minutos cuarenta y dos segundos. Tercero: Resolver un triángulo que tiene un lado de ochenta y tres metros, un ángulo opuesto de setenta grados cuarenta y dos minutos y un ángulo contiguo de cuarenta y siete grados ocho minutos cincuenta y dos segundos. Cuarto: Resolver un triángulo que tiene dos lados de setenta y seis metros el primero, cincuenta y cuatro el segundo, y el ángulo opuesto al primero de sesenta y ocho grados, diez minutos, cuarenta segundos.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

Del plano.

LECCIÓN 60.—Teorema que demuestra que por tres puntos, no en línea recta, puede pasar un plano, pero nada más que uno. Consecuencias que tratan de las condiciones que determinan un plano, y de la naturaleza de la intersección de dos planos. Pié de una línea que encuentra ó atraviesa un plano. Recta perpendicular á un plano; recta oblicua á un plano. Si una recta es perpendicular á otras dos, que pasan por su pié en un plano, lo será tambien á cualquiera otra que en dicho plano pase por su pié. Consecuencia: Siéndolo á dos, lo es á todas, y por tanto es perpendicular al plano; lugar geométrico de los puntos equidistantes de los extremos de una recta. Teorema recíproco: Si dos rectas son perpendiculares á una tercera en un punto dado, otra perpendicular á la misma y en el mismo punto, estará en el plano de las dos primeras. Lugar geométrico de las perpendiculares trazadas á una recta en un mismo punto de ella.

Perpendiculares y oblicuas á un plano.

LECCIÓN 61.—Por un punto dado, no se puede trazar á un plano más de una perpendicular. Por un punto dado no se puede trazar á una recta mas que un plano perpendicular. Relación entre la perpendicular y una oblicua, trazadas á un plano desde un punto situado fuera de él. Proposición recíproca. Distancia de un punto á un plano. Relación entre las oblicuas á un plano, salidas de un mismo punto exterior á él, según la que haya entre los apartamientos de sus piés al pié de la perpendicular y recíprocamente. Lugar geométrico de los piés de las oblicuas iguales. Lugar geométrico de los puntos equidistantes de una circunferencia. Teorema de las tres perpendiculares; observación. Proyección de un punto sobre un plano; proyección de una recta sobre un plano. Teorema del ángulo de una recta con un plano.

Paralelas en el espacio.

LECCIÓN 62.—Teoremas relativos á las rectas paralelas en el espacio. Primero; que demuestra la existencia de paralelas en el espacio. Segundo; que prueba que por un punto dado en el espacio, no se puede trazar á una recta mas qué una paralela. Consecuencias: Dos rectas, una perpendicular y otra oblicua á un plano, no son paralelas; si un plano es perpendicular á una de dos paralelas, lo será también á la otra; ó si una recta es perpendicular á un plano, toda paralela á ella también lo será; y si dos rectas son paralelas á una tercera, son paralelas entre sí.

Recta y plano paralelos.

LECCIÓN 63.—Relación entre los ángulos de lados paralelos y situados en diferentes planos. Rectas paralelas á un plano. Teorema que demuestra la existencia de rectas paralelas á un plano. La intersección de un plano con otro que pasa por una paralela al primero, es paralela á ésta. Consecuencias: si una recta es paralela á un plano, y por un punto de éste se traza una paralela á la primera, dicha recta estará contenida en el mismo plano; y si una recta es paralela á dos planos que se cortan será paralela á la intersección de estos planos.

Planos concurrentes.

LECCIÓN 64.—Ángulo diedro; caras y arista. Cómo se nombra ó designa un diedro. Su magnitud independiente de la magnitud de sus caras. Diedros adyacentes; diedros rectos y diedros oblicuos. Igualdad de los diedros rectos, aunque no sean adyacentes. Diedro agudo; diedro obtuso. Diedros complementarios y suplementarios; consecuencia. Los diedros adyacentes son suplementarios, y recíprocamente. Cinco consecuencias análogas á las de geometría plana. Diedros opuestos por la arista; su igualdad. Ángulo rectilíneo correspondiente á un diedro. Igualdad entre los rectilíneos correspondientes á un mismo diedro. Relación entre los rectilíneos correspondientes á dos diedros, segun la que haya entre estos; y recíprocamente. Condición del rectilíneo correspondiente á un diedro recto; y recíprocamente. Proporcionalidad entre dos diedros y sus rectilíneos correspondientes. Convenio que es necesario establecer para que sea cierta esta proposición: La medida de un diedro es igual á la medida del rectilíneo correspondiente. Cómo se medirá un diedro.

Planos perpendiculares y oblicuos entre sì.

LECCIÓN 65.—Definición de plano perpendicular á otro; plano oblicuo á otro; reciprocidad de posición; dos planos perpendiculares forman cuatro diedros rectos. Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano que pase por ella será perpendicular al primero. Consecuencias: Cuántos planos perpendiculares á otro se pueden trazar por un punto situado en ó fuera de él, ó por una recta perpendicular á él; si dos planos son perpendiculares entre sí, y por un punto de la común intersección se traza una perpendicular á uno de ellos, en dónde estará situada; si dos planos son perpendiculares á un tercero, la intersección común de los dos será perpendicular al tercero; por una recta no perpendicular á un plano, sólo puede pasar un plano perpendicular al primero. Relación entre un diedro y el ángulo rectilíneo formado por perpendiculares trazadas desde un punto interior del mismo, una á cada cara.

Planos paralelos.

LECCIÓN 66.—Planos paralelos. Teorema que demuestra la existencia de planos paralelos. Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercero son paralelas. Si dos ángulos, situados en diferentes planos, tienen sus lados paralelos, los planos que determinan son también paralelos. Por un punto dado, no se puede trazar á un plano más que otro paralelo: Dos planos, uno perpendicular y otro oblicuo á una recta, no son paralelos. Si una recta es perpendicular á un plano, también lo será á su paralelo. Dos planos, paralelos con un tercero, son paralelos entre sí: Número y nombres de los diedros que forman dos planos cortados por un tercero. Si dos planos cortados por otro, de modo que las intersecciones sean paralelas, forman con él diedros alternos ó correspondientes iguales, ó internos de un mismo lado suplementarios, dichos planos son paralelos; proposiciones contrarias y recíprocas de unas y otras. Observación.

Consecuencias de la teoría de planos paralelos.

LECCIÓN 67.—Las partes de paralelas, comprendidas entre planos paralelos, son iguales. Los puntos de un plano equidistan de su paralelo. Dos rectas comprendidas entre dos planos paralelos, cortadas por un tercer plano paralelo á los primeros, quedan divididas en partes proporcionales; tanto en el caso de que dichas rectas estén ambas en un plano, como cuando estén en planos diferentes.

Ángulos poliedros; ángulo triedro.

LECCIÓN 68.—Ángulo poliedro; caras ó ángulos planos, ángulos diedros, aristas y vértice. Cómo se designa ó nombra un ángulo poliedro. La prolongación de las caras no influye en el tamaño del ángulo poliedro. Ángulo poliedro convexo. Ángulo triedro, ó simplemente triedro. Triedros suplementarios. Dado un triedro, se puede formar otro suplementario. Número de elementos de un triedro. Relación entre los ángulos planos expresada por la comparación de cada uno con los otros dos. Límites de la suma variable de dichos ángulos planos. Límites de la suma variable de los ángulos diedros de un triedro. La suma de dos diedros de un triedro, rebajada en el tercero, es menor que dos rectos.

Igualdad de triedros.

LECCIÓN 69.—Cuatro casos de igualdad: Dos triedros son iguales cuando tienen respectivamente iguales é igualmente dispuestos tres ángulos planos, ó dos ángulos planos y el diedro comprendido, ó un ángulo plano y los dos diedros contiguos, ó los tres diedros. Triedros simétricos: caso especial en que dos triedros simétricos serán iguales. Relación entre los diedros de un triedro, según la que haya entre los ángulos planos opuestos; y recíprocamente. Dado un plano y un punto fuera de él, trazarle una perpendicular; dado un plano y un punto en él, trazarle una perpendicular; dado un plano y un punto fuera de él, trazarle una recta paralela; dado un plano y un punto fuera de él, trazarle otro plano paralelo.

Superficies de revolución; superficie cónica; cono.

LECCIÓN 70.—Superficies de revolución, generatriz y eje; principales superficies de revolución. Superficie cónica de revolución; superficie cónica en general; vértice, generatriz y eje en la primera; vértice, generatriz, directriz y eje en la segunda. Superficie cónica recta y oblicua. Superficie cónica circular. Cono, vértice, base, lados y eje del cono. Cono recto y oblicuo. Altura del cono. Cono circular. La altura del cono recto coincide con el eje. Los lados del cono recto y circular son iguales. Cómo puede suponerse también engendrado el cono recto circular. Figura de la sección de la superficie curva de un cono circular por un plano paralelo á su base. Tronco de cono, ó cono truncado; bases y altura del tronco. Problemas relativos á la altura total del cono truncado y al desarrollo de la superficie curva del cono sobre un plano.

Superficie cilíndrica; cilindro.

LECCIÓN 71.—Superficie cilíndrica de revolución; superficie cilíndrica en general; eje y generatriz en la primera; generatriz, directriz y eje en la segunda. Superficie cilíndrica recta, oblicua, circular. Cilindro, bases, lados y eje del cilindro. Cilindro recto, oblicuo; altura del cilindro. Cilindro circular; altura del cilindro recto igual al eje; los lados del cilindro son iguales. Cómo puede también suponerse engendrado el cilindro recto y circular. Sección de la superficie curva de un cilindro por un plano paralelo á las bases. Desarrollar la superficie curva de un cilindro sobre un plano.

Superficie esférica; esfera.

LECCIÓN 72.—Superficie esférica. Esfera; centro, radio, diámetro; igualdad de radios y de diámetros; eje de la esfera y polos. Intersección de la superficie esférica y un plano. Polos de una circunferencia trazada en la superficie esférica. Curva que se traza sobre una superficie esférica, haciendo centro con el compás en un punto cualquiera de ella; el punto en que se fija el compás es polo. Relación entre la distancia de dos planos al centro de la esfera, segun la que haya entre las circunferencias que dichos planos determinan; y recíprocamente. Consecuencias que dicen cuál es la mayor circunferencia en una esfera; qué son entre sí las circunferencias máximas de una esfera; cuántos puntos de la superficie esférica bastan para determinar una circunferencia máxima; cómo se cortan mútuamente dos circunferencias máximas; y cómo una circunferencia máxima divide á la superficie esférica.

Ángulos y triángulos esféricos.

LECCIÓN 73.—Ángulo esférico; vértice y lados; medida del ángulo esférico; su relación con la del diedro formado por los planos que determinan sus lados. Triángulo esférico. Observación acerca de la armonía entre las propiedades de los triángulos esféricos y las de los ángulos triedros correspondientes; cinco consecuencias, que tratan: del valor de un lado comparado con los otros dos; de la suma de los tres lados; de la suma de los tres ángulos; de los casos de igualdad; y de que á lados iguales se oponen ángulos de igual condición, y á mayor lado, mayor ángulo. Triángulos esféricos suplementarios; la suma de dos ángulos, rebajada en el tercero, es menor que dos cuadrantes; la mitad del perímetro rebajada en un lado es siempre positiva, tratándose de triángulo convexo. Menor distancia entre dos puntos sobre la superficie esférica.

Planos tangentes y secantes de la esfera.

LECCIÓN 74.—Planos tangentes y secantes de la superficie esférica. Condiciones de un plano que pasa por el extremo exterior de un radio para ser tangente ó secante; y recíprocamente. Consecuencia relativa al número de planos tangentes á una esfera, que se pueden trazar por un punto de ella. Número y condición de los puntos que determinan una superficie esférica. Consecuencias que tratan del lugar que ocupan los puntos de la intersección de dos superficies esféricas, y de la figura que tiene dicha intersección. Problemas: Hallar el radio de una esfera. Distancia, en arco, desde el polo de una circunferencia máxima á cualquier punto de ella. Trazar en una superficie esférica una circunferencia máxima.

De los poliedros.—Pirámides.

LECCIÓN 75.—Poliedro, caras, ángulos diedros, ángulos poliedros, vértices y aristas; diagonal. Poliedros convexos y cóncavos; regulares é irregulares; nomenclatura de los poliedros, según el número de caras. Pirámide; base, caras laterales, vértice y altura. Nombres de las pirámides, según el número de lados de la base. Pirámide regular é irregular. Igualdad de aristas laterales en la pirámide regular; igualdad de las caras laterales, y condición de cada una. Apotema de la pirámide regular. Única pirámide regular que es á la vez poliedro regular. Tetraedro. Casos de igualdad de tetraedros: cuando tienen iguales tres caras, ó dos caras y el diedro comprendido, ó una cara y los tres diedros contiguos á ella.

Propiedades de las pirámides; tronco.

LECCIÓN 76.—Sección de una pirámide por un plano paralelo á la base; razón entre las áreas de base y sección. Si dos pirámides de igual altura se cortan por planos paralelos á las bases, y equidistantes de los vértices, las áreas de las secciones, á qué son proporcionales. Si, en las mismas condiciones, fuesen las bases equivalentes, qué serian las secciones. Tronco de pirámide ó pirámide truncada; pirámide deficiente; bases y altura del tronco. *Problema.* Dado un tronco de pirámide, cuya altura sea conocida, y conocidos los lados homólogos de ambas bases, hallar la altura de la pirámide total y de la deficiente.

Prismas; paralelepípedos.

LECCIÓN 77.—Prisma: bases, caras laterales, altura. Posición y magnitud de las aristas laterales. Modo de construir ó dibujar un prisma. Prisma recto, oblicuo, regular, irregular. Altura en el prisma recto, caras laterales; caras laterales del prisma regular. Nombres de los prismas, según el polígono de la base. Único prisma que es poliedro regular.—Sección de un prisma por un plano paralelo á las bases. Igualdad de dos prismas, cuando tienen un triedro igual, formado por caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas. Dos prismas rectos, de igual base y altura, qué son entre sí. Paralelepípedo; relación entre las caras opuestas de un paralelepípedo; dos caras opuestas pueden servir de bases. Clasificación de los paralelepípedos. Propiedades de las caras y de los diedros de un paralelepípedo rectángulo. El cubo es poliedro regular.

Igualdad de poliedros; poliedros regulares.

LECCIÓN 78.—Igualdad de poliedros en general. Si dos poliedros tienen sus caras y ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos, qué serán entre sí. Si dos poliedros se componen del mismo número de tetraedros, respectivamente iguales é igualmente colocados, qué serán entre sí; y recíprocamente. El número de poliedros regulares no puede pasar de cinco. Nombres de los cinco poliedros regulares, con expresión del número y condición de sus caras.

Poliedros semejantes.

LECCIÓN 79.—Poliedros semejantes, aristas homólogas, caras homólogas. Relación entre las aristas homólogas de poliedros semejantes. Teorema fundamental de los tetraedros semejantes: Cortado un tetraedro por un plano paralelo á una de sus caras, el parcial y total son semejantes. Tres casos de semejanza de tetraedros. Semejanza entre la pirámide total y la deficiente; relación entre las bases de dos pirámides semejantes, y las alturas de estas. Semejanza de los poliedros en general, cuando están compuestos de igual número de tetraedros respectivamente semejantes y semejantemente dispuestos; y recíprocamente.

Poliedros inscritos en el cono, cilindro y esfera.

LECCIÓN 80.—Inscripción y circunscripción de la pirámide y del prisma en el cono y en el cilindro. Consecuencias: Todo cono se puede mirar como una pirámide; el cono recto circular como una pirámide regular. Todo cilindro se puede mirar como un prisma. Posibilidad de inscribir y circunscribir una esfera en los poliedros regulares. Definiciones de centro, radios y apotemas de un poliedro regular. Relación entre los radios y entre las apotemas. Todo poliedro regular se puede descomponer en pirámides regulares é iguales, cuyos vértices estén en el centro.

Áreas de las superficies de los cuerpos.

LECCIÓN 81.—Áreas de las superficies que limitan á los cuerpos geométricos. Área de la superficie lateral de la pirámide regular. Área de la del tronco de pirámide regular. Área de la de un prisma cualquiera; área de la del prisma recto. Área de la superficie curva de un cono recto y circular; fórmula que la expresa en función del lado y del radio de la base; fórmula que la indica en función del lado y del rádio de la sección media, y fórmula que la determina en función del eje y de la perpendicular al punto medio del lado, comprendida entre este punto medio y el eje.

LECCIÓN 82.—Cómo se podria determinar el área de la superficie curva de un cono cualquiera. Área de la super ficie curva de un tronco de cono recto y circular; fórmula que la expresa en función del lado y los radios de sus bases; fórmula que la determina en función del lado y el radio de la sección media; fórmula que la indica en función del eje y de la perpendicular al punto medio del lado, comprendida entre este punto medio y el eje. Cómo podria determinarse el área de la superficie curva de un tronco de cono cualquiera. Área de la superficie curva de un cilindro cualquiera, y de la de un cilindro recto circular. Área de la superficie descrita por la base de un sector poligonal que gira alrededor del diámetro, que pasa por uno de los extremos de dicha base.

LECCIÓN 83.—Zona esférica, base ó bases de la zona, altura; casquete esférico. Área de la zona esférica. Área de la superficie esférica; fórmulas que las expresan: relación entre el área de la superficie esférica y la de su circulo máximo. Relación entre las áreas de las superficies de dos poliedros semejantes; de dos conos y cilindros también semejantes; y de dos esferas, que son siempre semejantes.

Equivalencia de los poliedros.

LECCIÓN 84.—Cuerpos geométricos equivalentes. Equivalencia entre dos paralelepípedos, que tienen igual base y la misma altura. Equivalencia entre un paralelepípedo cualquiera, y otro recto rectangular de igual altura y base equivalente; ó sea: Todo paralelepípedo se puede convertir en otro recto rectángulo equivalente, de la misma altura y base equivalente á la del primero.

LECCIÓN 85.—Relación entre el prisma triangular y el paralelepípedo de igual altura y dupla base; tanto en el caso de considerar un prisma triangular recto, como en el de uno oblicuo. Consecuencia que relaciona los prismas triangulares de igual altura y bases equivalentes. Relación entre los tetraedros de igual altura y bases equivalentes.

LECCIÓN 86.—Prisma truncado. Equivalencia entre el prisma triangular truncado y tres tetraedros de la misma base que él. Consecuencia sobre la relación que existe entre un tetraedro cualquiera y un prisma triangular de igual base y altura. Equivalencia entre un tetraedro truncado y tres tetraedros de igual altura que él.

Volúmenes de los poliedros.

LECCIÓN 87.—Volúmen de un cuerpo geométrico. Unidad de volúmen. Teorema fundamental para la determinación de los volúmenes de los cuerpos geométricos. Dos paralelepípedos rectángulos de igual base á qué son proporcionales. Observación acerca de dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones iguales. Consecuencia: Dos paralelepípedos rectángulos de igual altura, á qué son proporcionales; ó dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimensión igual, á qué son proporcionales. Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, ó sea, que no tienen ninguna dimensión igual, á qué son proporcionales. Cómo se determina, y á qué es igual el volúmen de un paralelepípedo rectángulo. Volúmen de un cubo.

LECCIÓN 88.—Volúmen de un paralelepípedo cualquiera. Volúmen del prisma triangular; volúmen de un prisma cualquiera; relación entre dos prismas de igual altura y bases equivalentes. Volúmen de un tetraedro; volúmen de una pirámide; relación entre dos pirámides de igual altura y bases equivalentes. Volúmen de un prisma triangular truncado cualquiera; volúmen del mismo cuando es recto respecto á una de sus bases; volúmen del mismo en función de la suma de aristas laterales y de la sección recta.

LECCIÓN 89.—Volúmen de un tetraedro truncado; volúmen de un tronco de pirámide cualquiera; relacion entre dos troncos de pirámide de igual altura y bases equivalentes. Cómo se puede determinar el volúmen de los cinco poliedros regulares. Fórmulas sencillas que dan el volúmen de los cinco poliedros regulares en funcion de la arista. Problemas de volúmenes.

Volúmenes de los cuerpos redondos.

LECCIÓN 90.—Volúmen de un cilindro cualquiera; fórmula del volúmen de un cilindro circular. Volúmen de un cono cualquiera; fórmula del volúmen de un cono circular. Volúmen de un tronco de cono cualquiera; fórmula del volúmen de un tronco de cono circular. Volúmen de la esfera; fórmula. Sector esférico: volúmen del mismo. Segmento esférico, base ó bases; volúmen de un segmento esférico de una base, menor que una semi-esfera; del de una base, mayor que una semi-esfera; y del de dos bases. Cómo se determina el volúmen de cuerpos no comprendidos en las cuatro lecciones que tratan de volúmenes.

Comparación de volúmenes de los cuerpos semejantes.

LECCIÓN 91.—Los volúmenes de dos tetraedros semejantes, á qué son proporcionales. Los volúmenes de dos poliedros semejantes, á qué son proporcionales. Los volúmenes de dos conos semejantes, los de dos cilindros semejantes, y los de dos esferas, á qué son proporcionales. Problemas numéricos.

FIN.