

J. L. V.

RESIS
TENCIA
GEY
MATE
MALES

F.A.S.
301

R

J. L. V.
BIBLIOTECA
N-62

RESISTENCIA DE MATERIALES.

1. **Necesidad de su estudio.**—Después de haber estudiado al tratar de los diversos mecanismos la forma que deben tener los distintos órganos que los componen para que las transmisiones de velocidad y movimiento se verificasen en las mejores condiciones, debemos estudiar ahora las dimensiones que deben darse á dichos órganos, para que soporten, sin romperse ni deformarse, los distintos esfuerzos á que se encuentren sometidos.

De estas consideraciones deducimos la necesidad del estudio de la *resistencia de los materiales* que se emplean en las construcciones.

2. **Materiales que se emplean.**—Algunos metales, piedras y maderas y otros cuerpos sólidos en reducido número forman la totalidad de los materiales de construcción.

3. **Manera de considerar los sólidos en esta parte de la Mecánica.**—En Mecánica racional consideramos á los sólidos como invariables de forma, pero en la naturaleza no existe ningún cuerpo que cumpla en absoluto estas condiciones, por lo que se admite:

1.º Que están constituidos por partes sumamente pequeñas, llamadas moléculas, y 2.º que estas moléculas se encuentran separadas las unas de las otras por espacios comparables á sus dimensiones, en virtud de fuerzas atractivas y repulsivas que se ejercen entre ellas, proporcionalmente á sus masas y en razón inversa del cuadrado de las distancias.

En estas hipótesis sobre la constitución de los cuerpos y auxiliados por la experiencia nos fundaremos para el estudio de esta materia.

4. **Elastoidad.**—Es la propiedad común á todos los cuerpos y que éstos gozan en mayor ó menor grado, en virtud de la cual tienden á recobrar su forma primitiva cuando cesan de actuar las fuerzas á que habían sido sometidas.

Cuando un cuerpo se somete á fuerzas exteriores, desaparece la igualdad que debe existir entre las acciones atractivas y repulsivas de sus moléculas, rompiéndose el equilibrio que antes existía. Si las fuerzas aplicadas se mantienen entre ciertos límites, se observa: que pasando breve tiempo adquieren nueva posición de equilibrio; si en esta situación se suprimen las fuerzas, acontecerá: ó que las moléculas no recuperen sus posiciones primitivas, ó que vuelvan á tomar exactamente las mismas que tenían; ocurrirá lo primero cuando el cuerpo haya estado bajo la acción de un esfuerzo cualquiera por pequeño que sea, con tal de no haber recibido antes la de otro, y se realizará lo segundo cuando después de sometido á un esfuerzo dado, suprimido éste experimente la acción de otro igual ó menor.

Los cuerpos se clasifican en perfectamente elásticos; perfectamente blandos y perfectamente duros; los primeros una vez deformados vuelven á su forma natural; los segundos conservan la deformación que han sufrido sin tendencia á recobrar su forma primitiva, y los terceros no admiten deformación alguna, siendo por lo tanto los sólidos geométricos que hemos estudiado en Mecánica Racional.

Los sólidos naturales no son, ni perfectamente blandos, ni perfectamente elásticos, estando todos comprendidos en estos dos extremos.

5. **Límite de elasticidad.**—Es el límite superior de los esfuer-

zos que puede sufrir un sólido sin producir en él deformación permanente.

6. **Método para determinarlo**—Según la definición anterior, para determinar este límite bastará someter sucesivamente el cuerpo considerado á la acción de fuerzas que vayan aumentando con lentitud midiendo á la vez las deformaciones producidas y observando si al cesar de actuar estas fuerzas recobra su forma primitiva: desde el momento que se le aplique una fuerza tal que al dejar de obrar sobre el cuerpo no recobra esta referida forma dicha fuerza será la que nos determine el expresado límite. La experiencia nos dice, 1.^o que cada cuerpo tiene una propiedad característica con respecto á su elasticidad. 2.^o que varia de un cuerpo á otro y aún para un mismo cuerpo de uno á otro de sus puntos. 3.^o que la elasticidad se puede medir. Se aprecia la propiedad elástica de los cuerpos mediante el coeficiente de elasticidad que es la relación sensiblemente constante entre el esfuerzo á que se somete una barra del mismo y el alargamiento que experimenta; la longitud de la barra así como su sección, son las unidades correspondientes. La invariabilidad de esta relación desaparece cuando el esfuerzo excede al límite de elasticidad.

8. **Rotura**.—Si se somete un cuerpo á un esfuerzo constantemente creciente, la deformación que experimenta también lo será y llegará un momento en que venciendo la cohesión de sus moléculas, perderán estas su posición de equilibrio, quedando el cuerpo fraccionado. El esfuerzo necesario para producir este efecto se llama esfuerzo de rotura.

9. **Objeto y método del curso de Resistencia de los materiales**.—La resistencia de materiales tiene por objeto resolver los dos problemas siguientes: 1.^o Conocer los esfuerzos que en un cuerpo ó en una construcción, se desarrollan mediante la acción de las fuerzas á que está sometida. 2.^o Investigar las mínimas dimen-

siones que haya de tener un cuerpo, á fin de que los esfuerzos interiores que se desarrollan por la acción de fuerzas exteriores no excedan de ciertos límites.

Esta ciencia es en parte racional y en parte experimental; tiene que recurrir á ciertas hipótesis cuyo número disminuye á medida que se perfecciona. Esta necesidad de las hipótesis no le quita su carácter científico; pues están como en Física, sometidas á un criterio absoluto. Los resultados que se deducen están de acuerdo con los de la observación.

En nuestro estudio seguiremos el método racional teniendo en cuenta los datos que la experiencia nos proporciona; y el procedimiento será analítico y experimental auxiliándose mutuamente.

IO. **Cargas permanentes de seguridad ó prácticas.**—Reciben este nombre todas aquellas cargas que puede sufrir un cuerpo sin que se produzca la rotura.

II. **Consideración sobre el esfuerzo á que deben referirse.**—La carga á que han de someterse los materiales de construcción ha de ser tal, que estos puedan resistirla indefinidamente según ya hemos indicado. No todos los ingenieros están conformes en el tipo que se ha de elejir para compararlas; unos se fijan en el límite de rotura, y otros prefieren el de elasticidad.

Ninguno de los dos tipos está exento de inconvenientes; si nos referimos al límite de elasticidad, tendremos que dar á los materiales mayores dimensiones que si tomamos como punto de partida el límite de rotura, porque evidentemente la resistencia de un material aumenta con su espesor, y á igualdad de este lo suponemos más resistente cuanto mayor sea el límite á que ha servido como tipo. Si tomamos el esfuerzo de rotura, y las dimensiones están perfectamente calculadas, en el momento que por cualquier circunstancia eventual (á que constantemente hay exposición en los mecanismos) nos excediesemos de dicho esfuerzo, el sólido se

rompería; por ejemplo según diremos, la temperatura modifica el valor de los límites indicados si esta modificación en algún caso hace descender el límite de rotura con el esfuerzo teóricamente calculado, el órgano mecánico no podría resistir. Por este motivo, nosotros partiremos siempre que sea posible del límite de elasticidad, porque de esta manera, aunque el esfuerzo en algún caso exceda al que habíamos supuesto, el sólido no sufrirá más que una deformación; si bien tiene esto una gran ventaja, presenta el inconveniente (en algunos casos muy digno de tener en cuenta) de las grandes dimensiones, las cuales aumentan el peso y el coste de la obra, y en este caso tomaremos un esfuerzo menor que el de rotura y mayor que el de elasticidad. Si por la excesiva rigidez de cuerpo no se puede obtener el límite de elasticidad acudiremos al de rotura.

12. **Influencia de la temperatura.**—Como el estado molecular de los cuerpos varía con la temperatura, también variarán sus límites de rotura y elasticidad, y como consecuencia las cargas máximas bien se refieran á uno ó á otro.

13. **Efecto de un esfuerzo con relación al tiempo.**—La experiencia enseña que el efecto de una fuerza varía con el tiempo que dura su acción; pero transcurrido cierto periodo, su influencia se debilita hasta anularse, aunque el esfuerzo se diferencie poco del que produce la rotura.

También aparentemente depende hasta cierto punto el límite de elasticidad, del tiempo durante el cual obran las fuerzas que utilizamos para su determinación.

Un esfuerzo se llama pasajero cuando no ha producido todo su efecto.

14. **Formación de los sólidos naturales.**—Los sólidos que han de someterse á esfuerzos determinados, serán considerados como sensiblemente prismáticos les llamaremos prismas, sólidos

prismáticos, sólidos de resistencia, ó simplemente sólidos. Con el objeto de facilitar la teoría, de acuerdo con lo que la experiencia nos enseña, supondremos que son homogéneos mecánicamente considerados, ó de igual resistencia en todas sus partes, admitiendo que estos sólidos están formados de rebanadas $abcd$, (fig. I.^a) producidas por la intersección con el prisma de planos normales á sus aristas, y separadas por pequeños resortes que impiden hasta cierto límite su variación de lugar.

De esta manera, estos sólidos ideales tendrán cierta resistencia mayor ó menor para deformarse: cada uno de estos discos será considerado como un sólido invariable, así es que la acción de cualquier fuerza por considerable que sea, solo podrá variar su posición respecto de los contiguos.

Cada sección tendrá su centro de gravedad que será á su vez el de figura; á la línea que une estos centros, que constituye el eje de figura del prisma, se le dá el nombre de fibra media ó central. Tal es la línea ff' .

Se consideran también otras fibras paralelas á la fibra media, las cuales unirán entre si un átomo de cada sección como las representadas en ee' , gg' . A la parte mm' de fibra comprendida entre dos rebanadas consecutivas, se le llama fibra ó resorte elemental, este último nombre obedece á que siendo los átomos el arranque de las fibras en el sólido artificial que sustituimos al natural, podemos suponer á los resortes que separan á las rebanadas constituidos por estas fibras elementales.

15. Equivalencia entre las fuerzas exteriores que actúan sobre un sólido y las interiores que en él se desarrollan.—

Consideremos aplicado á un sólido prismático un sistema cualquiera, el cual producirá siempre una cierta deformidad inapreciable. Si no se ha pasado el límite de elasticidad, el sólido quedará en equilibrio y como consecuencia cada una de sus secciones, si no llegamos al

de rotura en algunas de estas. De aquí resulta que si determinamos la resultante de las fuerzas aplicadas á cada sección, las acciones moleculares han de proporcionar otra igual y contraria, que anule su efecto. Si las resultantes del sistema de fuerzas á que nos hemos referido obran según la dirección de la fibra media, tendiendo á separar la sección $abcd$ de la (figura 1), para que exista el equilibrio será condición necesaria, que todas las acciones moléculas sean paralelas, puesto que debiendo ejercerse las acciones en la dirección de las fibras, claro está que la resultante de los correspondientes á una sección tendrá que pasar por el centro de fuerzas paralelas de la misma, que llamaremos centro de elasticidad por tratarse de fuerzas elásticas, como le llamábamos centro de gravedad cuando considerábamos la pesantez. Para que exista este centro, es necesario proporcionalidad entre cada acción molecular y la masa de la molécula correspondiente, y esta relación constante entre una y otro siempre que el cuerpo sea homogéneo mecánicamente considerado, será un coeficiente que dependerá de la naturaleza del cuerpo.

Consideremos un sólido (figura 2) sobre el cual actúa un sistema de fuerzas, situadas todas en un plano de simetría cuya resultante esté en la dirección de la fibra media; para efectuar el estudio de las fuerzas interiores que se desarrollan por la aplicación de este sistema y venir en conocimiento de ellas, supongamos dividido el sólido en dos partes separadas por la sección AB y determinemos las resultantes R y R' de las fuerzas que sobre cada una de estas partes obran; para que el equilibrio exista será necesario que haya equivalencia entre estas resultantes y las reacciones que resultan de una de las partes sobre la otra, que llamaremos R' y R_1 ; prescindamos ahora de una de las partes, por ejemplo la de la izquierda, con lo que desaparecerá la reacción R_1 , que ésta ejercía sobre la de la derecha, pero para que siga subsistiendo el equilibrio como antes,

será necesario que R'_1 sea igual á R' : del mismo modo obtendremos la igualdad de R y R_1 ; se deduce por consiguiente que para encontrar la resultante de las acciones que las fuerzas interiores produzcan en una sección, basta considerar una de las partes en que queda dividido el prisma por dicha sección, componiendo las fuerzas exteriores que sobre el prisma actúan y la resultante será igual y directamente opuesta á la que se busca.

16. **Equilibrio de un sólido sometido á fuerzas exteriores.**— Dos cuestiones hemos dicho se propone resolver la resistencia de material; la 1.^a está resuelta; pues sabemos determinar en un prisma las fuerzas interiores que se desarrollan en cada sección; réstanos la 2.^a, para lo cual, nos valdremos de las condiciones de equilibrio encontradas en Mecánica racional. Un prisma es un sistema material, al cual no podemos aplicar solo las seis ecuaciones encontradas, sinó que tendremos que estudiar separadamente el equilibrio de cada uno de los puntos, pero si acudimos á la hipótesis de considerar cada una de las secciones como sólidos invariables, nos bastará estudiar el equilibrio de cada una de ellas. En cada sección del prisma actuarán además de las fuerzas directamente aplicadas, las reacciones que experimente de los que están á su inmediación; los primeros son datos de la cuestión; los segundos hemos aprendido á determinarlos en el párrafo anterior, con lo cual, tenemos todo lo necesario para establecer el equilibrio; las acciones que se desarrollan entre dos rebanadas, dependen de las fuerzas que actúen á uno y otro lado de ellas, y como éstas acciones tendrán un máximo que dependerá de su area y del coeficiente de que en el párrafo anterior hemos hecho mención, queda determinada la magnitud de dicha área, y como conocemos su forma prismática, hemos resuelto el 2.^o problema.

17. **Sección peligrosa.**—Las reacciones que cada sección desarrolla, sobre la contigua, depende según hemos dicho, de las fuer-

zas directamente aplicadas, y como éstas no estarán igualmente repartidas en todo el prisma, habrá una sección en la que ésta tenga un máximo valor; esta sección en que hay más facilidad de llegar al límite de rotura, se llama sección peligrosa.

18. **Deformaciones simples y su composición.**—Vamos á considerar el concepto cinemático de los efectos producidos por los esfuerzos, tomando en consideración las deformaciones. Consideremos un prisma S (fig. 3) en el que MN y PQ representan dos secciones, que como sabemos se hallan separadas por una distancia infinitamente pequeña; es evidente, que la posición más general que PQ puede ocupar con respecto á MN (ó deformación más general del prisma) será la originada por el movimiento más general, esto es el helizoidal; ahora bien: como PQ puede ir á la posición final de infinitos modos, parece que las deformaciones podrán también ser infinitas, sin embargo no es así, como vamos á ver enseguida.

Para ello, descompongamos el movimiento elemental más general que será una rotación y una traslación según el eje $o o'$ que pasa por el centro de gravedad de la sección PQ. Esta rotación y traslación simultánea podremos descomponerla en tres rotaciones y otras tantas traslaciones alrededor de los ejes de un sistema coordenado $(x y z)$ cuyo eje $o x$ lo supone nos coincidiendo con el eje de figura ó fibra media del prisma.

Consideremos sucesivamente estos 6 movimientos analizando los que producen resultado distinto y éstos serán los de formación simple.

1.º La traslación según el eje $o x$ separará á PQ paralelamente á sí misma sin que su centro de gravedad desaparezca de la fibra media, y la deformación que por este motivo sufre el prisma, se llama *extensión simple* y la ocasiona una fuerza que obra según la fibra media. 2.º La rotación de PQ alrededor

de la fibra origina una torsión simple y el esfuerzo se llama esfuerzo de torsión simple, siendo ocasionado por un par situado en el plano de la sección. 3.^o La resultante de las fuerzas que obren según los ejes $o\zeta$ y $o\gamma$, ó cualquiera otra cuya dirección esté situada en el plano $Z O Y$ producirá un resbalamiento de $P Q$ sobre el plano indefinido que pasa por ella; la deformación correspondiente se llama *cizallamiento simple* y es ocasionado por un esfuerzo que recibe el nombre de *esfuerzo cortante ó de cizallamiento simple*; está constituido por una fuerza situada en el plano de la sección. 4.^o La rotación alrededor de los ejes $o\zeta$ y $o\gamma$ ó resultante de ambas que se verificará al rededor de un eje contenido en el plano de $P Q$, pasando por su centro de gravedad, produce una *flexión simple*, y el esfuerzo correspondiente se llama *esfuerzo de flexión simple ó de flexión* solamente, y es debido á un par cuyo plano es perpendicular á la sección.

Si la tracción longitudinal en vez de ser según el eje $O X$, como hemos supuesto, se verificase en dirección contraria, la deformación sería una contracción y el esfuerzo se llama de compresión.

Llamaremos flexión y torsión á un giro al rededor de cualquier eje que sea respectivamente paralelo ó perpendicular al plano de la sección.

Como no siempre estarán colocadas las fuerzas en las condiciones que hemos dicho, tampoco serán idénticas las deformaciones, pero vamos á ver que cualquiera que sea el esfuerzo y su correspondiente deformación, siempre será el resultado de varias de las anteriores.

Si la fuerza tal como la R , tiene su punto de aplicación en el centro de gravedad de una de las secciones, el efecto producido sobre ella será una extensión y un cizallamiento, lo cual puede demostrarse descomponiéndola en dos que sean sus proyecciones sobre el eje $o x$ y el plano $\zeta o \gamma$.

Si la fuerza tal como R' , no pasa por el centro de gravedad de la sección, podemos trasladarla paralelamente á sí misma á este punto, con tal que se aumente un par $R'R''$; el efecto de la R'' será una extensión y un cizallamiento. Si ahora proyectamos el par $R'R'''$ sobre los tres planos coordenados, obtendremos otros tres pares, de ellos, los correspondientes á zox é yox , producirán flexión por hacer girar la sección al rededor de un eje paralelo á su plano por serlo perpendicular á los zox e yox , y por último, el par proyectado sobre el plano zoy originará una torsión por ser su efecto una rotación al rededor de un eje perpendicular á su plano; resulta que la fuerza R' dá lugar á extensión, cizallamiento, flexión y torsión, es decir, todas las deformaciones elementales.

Veamos ahora como una fuerza produce distinto efecto según la sección que se considere; sea por ejemplo la fuerza R , que actuando en la sección HK produce extensión y cizallamiento, y las cuatro deformaciones elementales si se toma en cuenta el efecto sobre la PQ .

De lo dicho se deduce que los efectos de los esfuerzos que obran simultáneamente, son independientes y que pueden por esta razón componerse las deformaciones elementales del mismo modo que los movimientos de igual nombre en mecánica racional.

CAPÍTULO I.

19. **Extensión simple.**—Ya hemos dicho que la extensión simple es la deformación que sufre un prisma, mediante la acción de un esfuerzo que obra según la dirección de su eje de simetría, ó lo que es lo mismo, de un sistema de fuerzas paralelas á dicho eje, cuya intensidad sea proporcional á la masa de cada molécula,

Supongamos que un sólido prismático $S S'$ (fig. 4) esté sometido á una fuerza N en las condiciones indicadas. Este sólido sufrirá una cierta deformación, pero, si la intensidad de N no es mayor que el límite de rotura se restablecerá el equilibrio entre dicha fuerza y las reacciones moleculares, cuya resultante en cualquier sección $b b$ nos proponemos determinar.

20. Para ello consideremos la porción del sólido $b S'$ y apliquemos las seis condiciones de equilibrio, estudiadas en Mecánica Racional; puesto que las reacciones moleculares se ejercen en la dirección de las fibras, y el sólido es homogéneo mecánicamente considerado, tendrán una resultante R_1 aplicada en el centro de gravedad de la sección y según la fibra media. Eligiendo, por lo tanto, un sistema coordinado, cuyo eje de las X se confunda con la fibra media, vemos desde luego que dichas seis ecuaciones se reducen á una sola, que es; la suma de proyecciones sobre el eje de las X ha de ser igual á cero; las demás se satisfacen por sí mismo; según esto, tendremos

$$N - R_1 = 0$$

de donde se deduce que N y R_1 son iguales y de sentido contrario. Partiendo de la igualdad $N = R_1$ (1) y auxiliados por la experiencia, veamos como se pueden resolver los tres problemas referentes á la extensión.

1.º Problema. Dado el esfuerzo á que se ha de someter un sólido determinar su sección mínima para que resista sin romperse.

2.º Problema. Dada la sección de un sólido, determinar el máximo esfuerzo que puede soportar.

3.º Problema. Dada la sección y el esfuerzo á que ha de estar sometido un sólido, investigar si esta en buenas condiciones de resistencia.

Aunque la resistencia de materiales se propone determinar la forma y dimensiones más convenientes que han de tener los sólidos

dos empleados en las construcciones, hemos prescindido de la forma por suponer que es la prismática, y de la longitud, porque según pronto veremos es independiente de ella la resistencia á la extensión, con tal que prescindamos del peso del cuerpo.

Llamemos L á la longitud del prisma, ω á su sección recta, l al alargamiento total, de modo que $\frac{l}{L} = i$ será el alargamiento por unidad de longitud. La esperiencia demuestra que R_t es proporcional á ω y á i , y por lo tanto, á su producto; luego $\frac{R_t}{\omega \cdot i}$ será igual á una cantidad constante para cada cuerpo que representamos por E y que recibe el nombre de *coeficiente ó modulo de elasticidad*. Podemos, pues, establecer la igualdad

$$\frac{R_t}{\omega \cdot i} = E \quad \text{ó bien} \quad R_t = E \cdot \omega \cdot i \quad (2).$$

Para dar otra forma á la ecuación (2) pongamos en lugar de i su valor y resultará:

$$R_t = E \omega \frac{l}{L} = E \cdot \omega \frac{\delta}{\Delta} \quad (*)$$

representando por Δ la distancia entre dos secciones contiguas y por δ el alargamiento que sufre Δ en virtud del esfuerzo N .

Hasta ahora, solo hemos relacionado el esfuerzo N que á su vez nos representa la reacción de la sección ω , con el área de dicha sección, el alargamiento producido, y un coeficiente constante E : Si suponemos que N sea el máximo esfuerzo á que puede estar sometido el prisma sin romperse, ó transformarse permanentemente (según se tome en cuenta el límite de elasticidad ó el de rotura) la fórmula será igualmente cierta, y vamos á darle otra forma más conveniente para las aplicaciones.

(*) $\frac{e}{L} = \frac{\delta}{\Delta}$ por ser los alargamientos proporcionales á las longitudes para un mismo esfuerzo.

Puesto que N es la resistencia de una barra del material propuesto cuya sección sea ω , la de otra barra de la misma materia y sección unidad sería,

$$R = \frac{N}{\omega} \text{ de donde } N = R \omega.$$

21. Tanto esta ecuación como la obtenida anteriormente

$$R_1 = \frac{N}{\omega} = E \omega i$$

nos demuestran que para un valor del esfuerzo N las reacciones interiores en cualquiera sección alcanzan el mismo valor y en consecuencia que en este caso no existe sección peligrosa.

22. Mediante el auxilio de las fórmulas anteriormente encontradas, vamos inmediatamente á plantear la resolución de los problemas indicados teniendo en cuenta que la cantidad R representará la mayor resistencia que pueda presentar la unidad de superficie y se halla calculada en tablas especiales, viniendo expresada en kgs. por m^2 . En todos estos problemas haremos abstracción del peso de la barra, pues como veremos su acción puede tomarse fácilmente en cuenta aumentándolo al esfuerzo que ha de soportar.

1.º Datos, R N incógnita ω .

$$N = R \omega \quad \omega = \frac{N}{R}:$$

con lo cual tenemos el problema resuelto.

Hemos de advertir por ser de lo más importante en esta teoría, la correspondencia entre las unidades, para lo cual diremos que N y R son magnitudes de la misma especie y por lo tanto su relación será un número abstracto, el cual nos expresa la medida de la sección ω en m^2 si el valor de R está referido á esta unidad superficial.

2.º Datos, R ω incógnita N .

$$N = R \omega.$$

En esta expresión ω es un número abstracto (medida de la sección con el m^2) y R un número de kilogramos de modo que N viene expresado en kilogramos como debía de suceder.

3.º Datos, ω N R en este problema no hay incógnitas pues según veremos se reduce á una comparación.

Habrá que encontrar el valor de ω en esta ecuación y se comparará con el de las tablas. Si el valor deducido de la anterior ecuación, es igual ó mayor que el de las tablas, el sólido estará en buenas condiciones. En caso contrario no lo estará.

28. **Interpretación mecánica de E.**—Hemos dicho que E es constante entre ciertos límites (mientras el esfuerzo varíe entre 0 y el límite de elasticidad) y vamos ahora á interpretar su valor. Para ello supongamos en la fórmula

$$N = E \omega \frac{l}{L} \left\{ \begin{array}{l} \omega = 1 \\ l = L \end{array} \right\}$$

con cuyas hipótesis se obtiene $N = E$; podemos por lo tanto decir que E representa el esfuerzo á que hay que someter una varilla cuya sección sea la unidad superficial para que el alargamiento sea igual á su longitud, es decir, para que se haga doble de lo que era.

24. **Sólido no homogéneo.**—Se supone que aisladamente lo es cada fibra y entonces llamando $d\omega$ su sección y f su resistencia tendremos

$$f = E \cdot d\omega \cdot i = R \cdot d\omega$$

si integramos para los valores de R correspondientes á cada fibra tendremos

$$N = \int R d\omega = \int E \cdot d\omega \cdot i = i \int E \cdot d\omega$$

sacamos i fuera del signo \int porque todas las fibras se alargarán del mismo modo al trasladarse las secciones paralelamente á sí

mismas. A la cantidad $\int E d \omega$ se llama *resorte longitudinal del prisma*. Vemos por lo tanto, que las fórmulas en el caso de sólido no homogéneo, varían de las obtenidas en que la cantidad $E \omega$ viene reemplazada por $\int E d \omega$.

25. **Representación gráfica.**—Ocupémonos ahora de representar geoméricamente la ley de variación de la cantidad E , con lo cual estudiaremos de una manera tangible, las propiedades elásticas de los sólidos referentes á la extensión. Sabemos que

$$N = E \cdot i;$$

en esta expresión N representa la tracción "por unidad superficial ó lo que es lo mismo el esfuerzo de tracción á que hay que someter un sólido para que sufra un alargamiento i por unidad de longitud. La experiencia nos dice que E es constante mientras N no exceda del límite de elasticidad, y por lo tanto en estas condiciones el valor de N es función de i , y su representación gráfica será una recta OR (fig. 5) cuyo coeficiente angular es E ; en el momento que pasemos el límite de elasticidad, E vá tomando valores sucesivos, y como á cada valor corresponderá un coeficiente angular distinto y estos coeficientes angulares variarán de una manera continua la línea recta se transformará en quebrada de lados infinitamente pequeños, es decir en curva. La ventaja de esta representación es; que esta curva, en general se aproximará á alguna de ecuación conocida, y de este modo obtendremos una relación empírica, entre N é i con cuya aproximación tendremos bastante cuando hayamos de calcular esfuerzos que exceden al límite de elasticidad.

26. **Compresión simple.**—Esta deformación reconoce por causa un esfuerzo de la misma dirección y sentido contrario al de tracción, y su efecto es aproximar las secciones. Podemos aplicar todo lo

que hemos dicho, sustituyendo en las fórmulas $-N$ y $-i$ en lugar de N é i y de este modo, como en los dos miembros aparece el signo menos equivale á haber multiplicado por -1 con lo cual quedan sin alteración alguna. La interpretación mecánica de E , no solo no es practica como en el caso anterior, sino que carece de sentido; nos indicará el esfuerzo necesario para que un sólido de sección unidad, se comprima una cantidad igual á su longitud, lo cual es un absurdo porque tendría que reducirse á 0 y esto no lo conseguiríamos ni con una fuerza infinita; si admitimos que esta fuerza fuese capaz de hacer sufrir la deformación, es evidente que estamos fuera del límite de elasticidad y que E no tiene el valor constante que hemos indicado, para valores del esfuerzo menores que dicho límite. En la representación geométrica á $i=1$ corresponde $R=E=\infty$ y por lo tanto la ordenada sería asíntota de la curva; la cual estaría en el tercer cuadrante por ser negativos los esfuerzos y deformaciones.

27. **Problemas.**— *Calcular el diámetro de un vástago de hierro dulce para que resista un esfuerzo de tracción en sentido de su eje.*

Datos... $\left\{ \begin{array}{l} L \text{ longitud del vástago.} \\ D \text{ diámetro del mismo} \\ Q \text{ peso á que está sometido} \\ R \text{ esfuerzo de seguridad por } m \text{ m}^2 \text{ correspondiente al} \\ \text{hierro dulce.} \end{array} \right.$

La incógnita de la cuestión es como el enunciado indica ω (sección del vástago) con lo cual podremos determinar su lado ó radio en los casos que respectivamente sea cuadrada ó circular, y cuando sea rectangular veremos como la experiencia nos aconseja una relación entre sus dos dimensiones con lo cual y el valor del área tenemos los datos necesarios.

Hemos dicho que en su vástago no había sección peligrosa, pero esta consecuencia la obtuvimos prescindiendo de su peso; si ahora lo tomamos en consideración no ocurrirá esto, por que si el vástago lo suponemos vertical, la sección inferior solo soporta el esfuerzo Q y la superior soportará además todo el peso $L \omega p$ del vástago, siendo esta por lo tanto la sección peligrosa.

Nosotros supondremos el vástago vertical, y en esta disposición si nos propusiéramos encontrar la forma de la pieza de longitud dada y dimensiones absolutamente indispensables para resistir el esfuerzo Q en dirección de su eje, obtendríamos un tronco de cono, entre la sección inferior y la superior que respectivamente soportan los esfuerzos Q y $Q + L \omega p$ variarían de un modo continuo los esfuerzos y del mismo modo las secciones, pero como se nos impone la condición de que tenga forma prismática ó cilíndrica, es decir todas las secciones iguales, nos bastará suponer que todos están sometidos al máximo esfuerzo y de este modo, con absoluta seguridad el prisma estará en buenas condiciones de resistencia.

Estableciendo la ecuación, y resolviéndola con respecto á ω , tendremos

$$Q + \omega L p = \omega \cdot R \quad (1) \quad \omega (R - L p) = Q \quad \omega = \frac{Q}{R - L p} \quad (2)$$

Si la sección ha de ser circular, determinaremos el diámetro del modo siguiente.

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \pi \frac{D^2}{4} \\ \omega &= \frac{Q}{R - L p} \end{aligned} \right\} \pi \frac{D^2}{4} = \frac{Q}{R - L p};$$

$$\left. \begin{aligned} D^2 &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{Q}{R - L p} \\ \frac{4}{\pi} &= 1,273 \end{aligned} \right\} D^2 = \frac{1,273 \cdot Q}{R - L p};$$

$$D = \sqrt{\frac{1,273 Q}{K - L p}}$$

28. Supongamos ahora L desconocido y que no se somete el vástago á más esfuerzo que su peso; claro está que de este modo obtendremos la longitud y sección que ha de tener para romperse por sí mismo con tal que tomemos para valor de R el esfuerzo de rotura correspondiente á la unidad de sección; planteando el problema,

$$\omega L p = \omega R, \quad L p = R, \quad L = \frac{R}{p} \quad (3)$$

lo que nos dice por desaparecer ω , que la resistencia á la rotura es independiente de la sección y que la mayor longitud que puede darse, es $\frac{R}{p}$; podíamos haber deducido que la resistencia es independiente de la sección, combinando las ecuaciones (2) (3) y la hipótesis $Q = 0$, del modo siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} L = \frac{R}{p} \quad L p = R \\ \omega = \frac{Q}{R - L p} \end{array} \right\} \omega = \frac{0}{0}$$

29. *Determinar el alargamiento que sufre un prisma de longitud y sección determinadas por efecto de un esfuerzo conocido.*

Para este problema acudiremos á la ecuación (1), sustituyendo en lugar de R su valor, para que aparezca la incógnita l , nos dará:

$$\left. \begin{array}{l} Q + \omega L p = \omega \cdot R \\ R = E \frac{l}{L} \end{array} \right\} Q + \omega L p = E \omega \frac{l}{L}, \quad l = \frac{L (Q + \omega L p)}{E \cdot \omega}$$

Si la sección fuese circular, tendremos:

$$D^2 = \frac{1,273 Q}{R - L p} \quad D^2 R - D^2 L p = 1,273 Q$$

$$\left. \begin{aligned} D^2 R &= D^2 L p + 1,273 Q \\ R &= E \frac{l}{L} \end{aligned} \right\} D^2 E \frac{l}{L} = D^2 L p + 1,273 Q$$

$$l = \frac{L (D^2 L p + 1,273 Q)}{E D^2}$$

30. **Resistencia de un cilindro de pequeño espesor.**—Supongamos un cilindro de esta condición lleno de un fluido perfecto el cual ejercerá presiones uniformes del interior al exterior y admitamos también que las bases que lo cierran están unidas de tal manera que no pueden separarse por grande que sea la presión á que estén sometidos. Estas presiones tienden á comprimir las paredes, transmitiéndose de una á otra de las capas sucesivas que constituyen el espesor; estamos, por lo tanto, en presencia de un fenómeno de extensión y como tal nos servirá de base la fórmula:

$$N = R \cdot \omega.$$

Ante todo, hagamos ver las secciones peligrosas del cilindro y determinemos el espesor que debe tener para no romperse por estas secciones, y claro es que calculado este espesor para las secciones de mínima resistencia, las demás la tendrán con exceso; estas serán las que presenten menor superficie como sucede á las causadas por planos que pasen por el eje ó que le sean perpendiculares á la resistencia que ofrece; la primera se llama tangencial y longitudinal á la segunda. Ocupémonos de la primera.

31. **Resistencia tangencial,** (fig. 6.^a).—Representemos por p la presión referida á la unidad superficial, L longitud del cilindro D diámetro interior, D' el exterior, $2 e' = D' - D$ el espesor, $d \omega$ un elemento superficial y R el esfuerzo de seguridad correspondiente á la unidad de superficie.

Para calcular el espesor que nos proponemos, encontremos la presión á que se encuentra sometida la sección $a a' b b'$ que consideramos, é igualándola á su correspondiente carga de seguridad $R \omega$, tendremos la ecuación de equilibrio en la cual figurará la incógnita.

Siendo p la presión por unidad superficial, la que soportará un elemento $d \omega$, será $p d \omega$ y su dirección la perpendicular $o g$ trazada de este elemento al eje como indica la fig. 6.^a; descompongamos esta fuerza en dos direcciones perpendiculares entre sí y situadas en un plano normal al eje, tales como F_1 y F_2 siendo F_1 normal al plano $a a' b b'$ de la sección, F_1 tendrá por valor $p \cdot d \omega \cdot \cos. \alpha$; la F_2 no la tomamos en consideración, por existir siempre otra F'_2 igual y contraria que anule su efecto. Tomando análogas á F_1 su suma será el esfuerzo total N á que se encuentra sometida la sección, por lo

$$N = \Sigma p \cdot d \omega \cdot \cos. \alpha = p \cdot \Sigma d \omega \cdot \cos. \alpha = p \cdot D \cdot L,$$

puesto que

$$\Sigma d \omega \cdot \cos. \alpha$$

es la proyección de la semi-superficie cónica sobre el plano de la sección que será un rectángulo de dimensiones D y L .

Hemos dicho que $N = R \cdot \omega$, representándonos ω el área de la sección cuyo valor es la diferencia de dos rectángulos de base común L y de alturas D' y D luego

$$\omega = L (D' - D)$$

por lo tanto la ecuación de equilibrio será

$$p \cdot D L = L (D' - D) R = L 2 e \cdot R$$

de donde

$$p \cdot D = 2 R \cdot e \quad \text{y} \quad e = \frac{p \cdot D}{2 R}$$

quedando así determinado el valor de e pues R es conocido por las tablas y tanto D como p son datos de la cuestión.

32. **Espesor práctico.**—En la práctica se aumenta este valor de e en la cantidad $0,^{\text{ms}}. 003$ pues hay que tener en cuenta los de-

fectos en la fabricación de los tubos y presiones anormales á que pueden encontrarse sometidos. Por este motivo se hace uso de la fórmula ya corregida

$$e = \frac{p \cdot D}{2 R} + 0,^{ms.} 003.$$

33. Valor de la presión cuando se expresa en atmósferas.

—Generalmente se dá el número de atmósferas á que se encuentra sometida la pared interior del cilindro, y entonces es muy sencillo determinar la presión p por unidad superficial; para ello basta tener en cuenta que esta presión está contrarrestada en parte por la atmósfera y que por lo tanto, si n (atmósferas) es la presión de la masa fluida, la que soportan las paredes será $n - 1$ siendo

$$(n - 1) \times 10, 334 \text{ kg.}$$

por m^2 la presión p que deseábamos conocer. El espesor del cilindro teniendo en cuenta el valor p y la corrección del párrafo anterior será

$$e = \frac{10, 334 (n - 1)}{2 R} D + 0,^{ms.} 003.$$

34. Resistencia longitudinal —Partiremos de la misma ecuación de equilibrio $N = R \cdot \omega$; en este caso consideremos las presiones á que se encuentra sometida una sección causada por un plano normal al eje, las cuales tendrán por valor $p \cdot \Delta$ siendo Δ el área

$$\pi \frac{D^2}{4}$$

de esta sección; por lo tanto el de N tendrá por expresión

$$\pi \frac{D^2}{4} p.$$

por lo tanto, sustituyendo en la ecuación fundamental, quedará

$$p \cdot \pi \frac{D^2}{4} = R \cdot \pi \frac{D'^2 - D^2}{4} = \pi \frac{(D' + D)(D' - D)}{4} R$$

de donde

$$p \cdot D^2 = R (D' + D)(D' - D) = R (D' + D) \cdot 2e$$

y con objeto de eliminar D' hagamos las siguientes transformaciones:

$$D' - D = 2e; \quad D' - D + 2D = 2e + 2D; \quad D' + D = 2e + 2D$$

$$p D^2 = R (2D + 2e) \cdot 2e; \quad p D = 4e R + \frac{4e^2 R}{D}$$

de la cual podríamos determinar el valor de e que comparado con el deducido en el caso anterior nos hace conocer á la simple vista que es menor que su mitad, por lo tanto, con el espesor práctico que ya hemos encontrado, estamos seguros de que el cilindro resiste en buenas condiciones.

35. Cálculo del número de bolones necesarios para fijar el fondo del cilindro y diámetro de los mismos.—Hemos admitido que el fondo del cilindro estaba unido á éste, de modo que no podía ceder á la acción de los esfuerzos interiores; generalmente esta unión se hace por medio de bolones y de aquí la necesidad de determinar el número y diámetro de éstos para que el cilindro se encuentre en las condiciones supuestas.

Para ello, llamemos (fig. 7) D_1 el diámetro de la circunferencia que pasa por los centros de bolones; n el número de éstos y d su diámetro; siendo D el diámetro interior, el valor de la presión total N sobre el fondo será

$$p \cdot \pi \frac{D^2}{4},$$

y para valor de la resistencia de un bolón, la expresión

$$R \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4},$$

por lo tanto, la resistencia total de los n bolones será

$$R \cdot n \cdot \pi \frac{d^2}{4},$$

quedando expresada la ecuación fundamental por

$$p \cdot \pi \frac{D^2}{4} = R \cdot n \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4}.$$

En esta ecuación aparecen las dos incógnitas d y n por lo tanto sería indeterminada si la experiencia no nos diese la relación

$$\pi \frac{D_1}{n} = K \cdot d$$

en la cual K es un coeficiente dependiente de la forma y naturaleza de los bolones, con lo cual el sistema es determinado, pudiéndose encontrar los valores de n y d .

[36. **Resistencia de una esfera.**— Desde luego se comprende por el enunciado de este problema, que nos encontramos en el correspondiente al 2.^o de los resueltos con referencia á la extensión; esto es, que se trata de determinar el máximo esfuerzo (en este caso es máxima presión) que podrá soportar una esfera hueca, de cuyos diámetros interior y exterior, son conocidos. Empezaremos como siempre determinando la sección peligrosa y después la presión que esta puede soportar.

Toda sección plana de una esfera hueca, es una corona circular; si demostramos que no pasando el plano por el centro, tiene mayor área y ha de soportar menor esfuerzo que si este plano es diametral, quedará probado que por la segunda está la esfera más expuesta á abrirse que por la primera. Observemos para ello (fig 8.^a) que el área de la sección según el plano $P P'$ tiene por valor

$$\pi \frac{d'^2 - d^2}{4}$$

y la sección por el plano $Q Q'$ vale

$$\pi \frac{(d' \cos. \alpha')^2 - (d \cos. \alpha)^2}{4}$$

como evidentemente α es mayor que α' la segunda es mayor que la

primera; si hacemos con las presiones que se ejercen según los rádios la misma descomposición que en el caso de un tubo, veremos que el esfuerzo de tracción que obliga á separar los dos porciones en que queda dividida la esfera por P P' tiene por expresión

$$N = p \cdot \pi \frac{d^2}{4}$$

y el esfuerzo que ha de soportar las sección por Q Q' sera

$$N_1 = p \pi \frac{(HK)^2}{4}$$

el cual vemos que es más pequeño que el anterior.

Convencidos ya de que la sección peligrosa es la P P' planteemos la cuestión partiendo de la fórmula $N = R \omega$ en la cual N ya lo hemos determinado y ω es el área

$$\pi \frac{d'^2 - d^2}{4}$$

de la sección: sustituyendo y resolviendo la ecuación con respecto á p tendremos

$$p \approx \frac{d^2}{4} = R \pi \frac{d'^2 - d^2}{4}; \quad p = R \frac{d'^2 - d^2}{d^2}.$$

37. Datos y experiencias sobre la extensión y compresión.

—Hemos admitido que la seguridad de una construcción, depende únicamente de que los esfuerzos que ha de soportar cada una de sus piezas sean siempre menores ó como máximo iguales a la carga de rotura ó elasticidad correspondiente á la sustancia de que se hallan construidas, y para calcular las dimensiones de estas piezas, hemos acudido a tablas que nos dan estas cargas referidas a la unidad de sección; no obstante, la experiencia ha demostrado que calculadas las dimensiones de los sólidos con arreglo á los datos suministrados por las tablas y a las fórmulas encontradas, pueden romperse: 1.ó Cuandose someten a extensiones ó compresiones del mismo sentido, repetidas suficiente número de veces. 2.ó Si obran alter-

nativamente en extensión y compresión. Por este motivo es necesario emplear un coeficiente de corrección, el cual por no poder afectar á las formulas por ser de rigor matemático, tendrá que influir en el dato R que queda modificado del modos siguiente para el hierro y acero para piezas sometidas á esfuerzos del mismo sentido,

$$R = \frac{\lambda}{n} \left\{ 1 + \left(\frac{\rho}{\lambda} - 1 \right) \frac{f_{\text{mín.}}}{f_{\text{máx.}}} \right\}$$

representando $f_{\text{máx.}}$ el esfuerzo máximo de extensión $f_{\text{mín.}}$ el mínimo ρ la carga de rotura y λ la carga límite de elasticidad para esfuerzos del mismo sentido.

Para piezas sometidas á esfuerzos alternativos de sentidos contrarios,

$$R = \frac{\lambda}{n} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{\lambda'}{\lambda} \right) \frac{f'_{\text{máx.}}}{f_{\text{máx.}}} \right\}$$

$f'_{\text{máx.}}$ representa el esfuerzo máximo de compresión y λ' el límite de elasticidad para esfuerzos iguales y alternativos de sentido contrario.

Los cálculos de resistencia exigen el conocimiento de un cierto número de constantes que dependen de la naturaleza del cuerpo á los cuales se dá el nombre de *constantes específicas*. Estas se encuentran calculadas en tablas (*) y son las siguientes: *carga práctica*, *límite de elasticidad*, *de ruptura*, considerando en cada una de estas cargas los tres casos de obra por tracción, compresión ó cizallamiento; *coeficiente de elasticidad* á la tracción, compresión ó cizallamiento; *alargamiento correspondiente al límite de elasticidad y peso específico de la sustancia*.

38. **Resistencia de cuerdas à la extensión.**—Para determinar la resistencia de las cuerdas, haremos uso de las dos fórmulas empíricas siguientes: la primera del General Morín es:

(*) Véase el prontuario Laharpe.

$$F = (45 - 0,25 c) c^2$$

siendo F el esfuerzo en kgs. c la sección recta de la cuerda, la segunda menos exacta es:

$$F = 35 c^2.$$

Hemos de tener en cuenta si están embreadas ó no, pues en el primer caso, como hay resbalamiento entre las fibras resisten menos, teniendo en cambio la ventaja de no deteriorarse tan pronto por los agentes atmosféricos. La relación entre la resistencia de las embreadas á las que no lo están es $\frac{2}{3}$ y de las mojadas á las secas $\frac{3}{4}$.

39. **Resistencias vivas de elasticidad y rotura.**—Se dá este nombre á la suma de trabajos elementales que desarrollan una serie de fuerzas crecientes de un modo continuo desde cero al límite de elasticidad.

Sea F uno de estos esfuerzos que producirá un alargamiento x menor que el correspondiente al límite de elasticidad: el valor de dicho esfuerzo será

$$F = E \omega \frac{x}{L}$$

y su trabajo elemental será

$$dT = E \omega \frac{x}{L} dx.$$

Integrando esta expresión para valores de x comprendidos entre 0 y l tendremos el trabajo finito ó resistencia viva de elasticidad

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l E \omega \frac{x dx}{L} = \frac{E \omega}{L} \int_0^l x dx = \frac{E \omega}{L} \cdot \frac{l^2}{2} = \\ &= \frac{E \omega l}{L} \cdot \frac{1}{2} l \quad (1) \quad \text{ó bien} \quad T = \frac{E \omega}{L} \cdot \frac{l}{2} \cdot l. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que la resistencia viva de elasticidad es el trabajo de una fuerza correspondiente á la mitad del alargamiento del límite de elasticidad recorriendo todo este alargamiento su pun-

to de aplicación. Esto por otra parte es una consecuencia inmediata de la definición porque evidentemente por cada par de esfuerzos equidistantes de los extremos podemos sustituir su semisuma recorriendo naturalmente el punto de aplicación doble camino y de este modo quedará para resistencia viva la suma de trabajos elementales de la fuerza constante

$$\frac{E \omega \frac{1}{2} l}{L}$$

mientras que su punto de aplicación recorre el espacio l en su misma dirección.

40. Este trabajo podremos también obtenerlo gráficamente valorando el área del triángulo curvilíneo $O i D$ (fig. 9^a) cuyas abscisas fueran los alargamientos x y sus ordenadas los correspondientes esfuerzos que las producen. Para demostrarlo, recordemos que según se dijo en Cálculo Integral dicha área tendrá por expresión

$$\int_0^1 y dx = \int_0^1 F dx = \int_0^1 \frac{E \omega x}{L} dx.$$

Puede también demostrarse observando que entre los límites o y l hay proporcionalidad entre los esfuerzos y sus alargamientos correspondientes, reduciéndose la curva á una línea recta, cuya cuadratura sería el área del triángulo $o D i$ que tiene por expresión

$$A = \frac{1}{2} o i \times i D = \frac{1}{2} l \times F = \frac{1}{2} l \times \frac{E \omega l}{L} = T.$$

Para obtener el trabajo en función de la resistencia R por unidad de superficie, bastará observar el cálculo siguiente cuyo objeto es sustituir en la fórmula (1) en lugar de l su valor.

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{E \omega l^2}{L} \\ R &= E i = E \frac{l}{L} \end{aligned} \right\} R L = E l$$

$$l = \frac{R L}{E} \left\} T = \frac{1}{2} \frac{E \omega \frac{R^2 L^2}{E^2}}{L} = \frac{R^2 \omega L}{2 E}$$

Del mismo modo se define y determina la resistencia viva de rotura sin más que sustituir en vez de esfuerzo y alargamiento, al límite de elasticidad las correspondientes al de rotura.

41. **Resistencia de elasticidad y rotura por kg. de materia en acción.**—Esta cantidad se obtendrá, dividiendo el trabajo total por el peso del cuerpo: el peso tendrá por valor llamando p al de la unidad de volumen ω la sección y L la longitud

$$P = p \int_0^L \omega dx$$

en la hipótesis de ser desiguales las distintas secciones ω pues en caso contrario la sacaríamos fuera del signo \int ; el trabajo total digimos que tenía por expresión

$$T = \frac{\omega L R^2}{2 E}$$

pero esto también era bajo el supuesto de ser constante tanto R como ω porque en el caso general será

$$T = \frac{\int_0^L \omega R^2 dx}{2 E}$$

Dividiendo ambas expresiones y llamando T' la resistencia viva por kg. tendremos

$$T' = \frac{1}{2 E p} \cdot \frac{\int_0^L R^2 \omega dx}{\int_0^L \omega dx}$$

Si el cuerpo es homogéneo mecánicamente considerado $R =$ constante y

$$T' = \frac{1}{2 E p} \cdot \frac{R^2 \int_0^L \omega dx}{\int_0^L \omega dx} = \frac{R^2}{2 E p}$$

Si es prismático y no homogéneo

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{2 E p} \cdot \frac{\omega \int_0^L R^2 dx}{\omega \int_0^L dx} \\ &= \frac{1}{2 E p} \cdot \frac{\int_0^L R^2 dx}{\int_0^L dx} = \frac{\int_0^L R^2 dx}{2 E L p} \end{aligned}$$

Por último, si cumplen las dos condiciones anteriores

$$\begin{aligned} T' &= \frac{\int_0^L R^2 dx}{2 E L p} = \frac{R^2 \int_0^L dx}{2 E L p} \\ &= \frac{R^2 L}{2 E L p} = \frac{R^2}{2 E p} \end{aligned}$$

Esta última expresión podríamos haberla obtenido dividiendo los valores T y P,

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{R^2 \omega L}{2 E} \\ P &= p \omega L \end{aligned} \right\} T' = \frac{T}{P} = \frac{R^2}{2 E p}$$

CAPÍTULO 2.º

Cizallamiento simple.

42. Ya hemos dicho que esta deformación era producida por

un esfuerzo que obra perpendicularmente al eje de prisma y que está en el plano de la sección, teniendo su punto de aplicación en el centro de gravedad de ésta.

Para estudiar esta deformación, seguiremos la misma marcha que en los anteriores, es decir, que dividiremos en trozos el prisma y consideraremos uno cualquiera de ellos como por el ejemplo el $a b c d$ (fig. 10); y aplicaremos en él, una vez sufrida la deformación y encontrándose en equilibrio, el teorema del trabajo virtual.

En el caso que nos ocupa, de las seis ecuaciones de equilibrio solo nos queda la de proyecciones sobre el eje de Z pues las cinco restantes se verifican por sí solas, de modo que si llamamos R' la resultante de las reacciones moleculares y F el esfuerzo, dicha ecuación será

$$F - R' = 0 \quad \text{ó bien} \quad F = R'.$$

La experiencia nos demuestra que R' es proporcional á ω é i' siendo i' el cizallamiento por unidad y ω la sección, verificándose por consiguiente que será á su producto, es decir, que se verificará

$$\frac{R'}{\omega \cdot i'} = \text{Constante} = G,$$

siendo G un coeficiente dependiente de la materia del prisma y que se llama *coeficiente ó módulo de elasticidad al resbalamiento transversal ó al cizallamiento*.

De la última igualdad deducimos

$$R' = G \cdot \omega \cdot i'$$

y como $i' = \frac{e}{\Delta}$ siendo $e = a a'$ y $\Delta = o f$,

$$\text{tendremos} \quad R' = G \cdot \omega \cdot \frac{e}{\Delta}.$$

Si llamamos R_1 la resistencia al cizallamiento por unidad superficial, esta resistencia tendrá por valor

$$R_1 = \frac{F}{\omega} \quad \text{de donde} \quad F = R_1 \cdot \omega.$$

Esta deformación no suele presentarse aislada sino como consecuencia de estar doblado el sólido; además, tampoco existe sección peligrosa puesto que aún cuando se aplica á una determinada, como esta puede ser cualquiera, todas se encontrarán en las mismas condiciones.

Vemos pues, que la fórmula que nos dá el valor del esfuerzo, $F = R_1 \cdot \omega$ es análogo á la de extensión simple, pudiéndose resolver por lo tanto, los mismos tres problemas que cuando nos ocupamos de éste.

43. **Interpretación mecánica de G.**—Si en la fórmula

$$F = G \cdot \omega \cdot \frac{e}{\Delta}, \quad \text{hacemos} \quad \left. \begin{array}{l} \omega = 1 \\ e = 1 \\ \Delta = 1 \end{array} \right\} \frac{e}{\Delta} = i' = 1;$$

por lo tanto, $G = F$, lo que nos dice que G es el esfuerzo necesario para producir un cizallamiento igual á uno en un prisma de sección unidad.

44. **Sólido no homogéneo.**—Para obtener la fórmula

$$F = G \cdot i' \omega$$

hemos supuesto que el prisma era homogéneo, pero en caso de que esto no suceda, podemos suponer se verifica para cada fibra, de modo que llamando f el esfuerzo producido en uno de ellos y $d\omega$ su sección se verificará

$$f = G \cdot i' d\omega$$

é integrando ambos miembros entre 0 y ω obtendremos

$$F = \int_0^\omega G \cdot i' \cdot d\omega = i' \int_0^\omega G \cdot d\omega;$$

á esta última integral se llama resorte transversal ó de cizallamiento del prisma.

45. **Resolución de los problemas fundamentales.**—Del mismo modo que en la extensión simple, mediante la fórmula $F = R_1 \omega$,

se pueden resolver los problemas relativos al cizallamiento, que serán; dado un sólido, determinar el esfuerzo máximo; dado el esfuerzo, construir el sólido con las mínimas dimensiones y conociendo las dimensiones y el esfuerzo, ver si el cuerpo está en buenas condiciones de resistencias.

Hemos de observar al resolver los indicados problemas que entre los coeficientes relativos á la extensión y los análogos del cizallamiento hay las siguientes relaciones que nos evitan la construcción de nuevas tablas

$$G = \frac{2}{5} E \quad R_1 = \frac{4}{5} R.$$

46. **Problema 1.^o**—Determinar la sección del prisma sometido á un esfuerzo cortante T para que la resistencia de la materia no exceda de R_α kg. por m^2 .

Acudiremos á la ecuación $F = R_1 \omega$ en la que sustituyendo por F y R_1 respectivamente T y R_α se obtiene

$$T = R_\alpha \omega \quad \text{de donde} \quad \omega = \frac{T}{R_\alpha}$$

47. **Problema 2.^o**—Calcular una cadena de Galle.

Sea la cadena representada en la figura 11; en el cálculo de sus dimensiones tendremos que combatir dos causas distintas de rotura que son: cizallamiento en los pernos $a b$ y extensión en las láminas por efecto del peso máximo que se le obliga á soportar, si como generalmente puede formar parte de una *grua* ú otro aparato de este género. Consideremos primero el cizallamiento que se producirá en las juntas 1, 2, 3, 4 de cada lámina con la contigua porque el perno, en la sección correspondiente al punto 1 se encuentra sometido á un esfuerzo cortante, que será la cuarta parte del peso suspendido en el gancho por distribuirse éste uniformemente en las cuatro uniones; representando por d el diámetro del perno el área ω de su sección tendrá por valor

$$\pi \frac{d^2}{4}$$

y sustituyendo en la fórmula $F = R_1 \omega$ en vez de cada letra su valor, tendremos la ecuación que nos permitira calcular el diámetro del perno

$$\frac{P}{4} = \pi \frac{d^2}{4} \times \frac{4}{5} \times R, \text{ o' } P = 4 \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{4}{5} R.$$

Nos queda ahora determinar el espesor y anchura de las dos series de chapas tal como la (A, B) que como sabemos están alternativamente compuestas de n y $n + 1$; para ello observemos que una cualquiera de ellas está sometida á un esfuerzo de extensión que será en el caso de la série (A, B) de la figura la mitad del peso P ; acudiendo á la fórmula correspondiente $N = R \omega$; N y ω son respectivamente $\frac{P}{2}$ y el área de la sección causada en la chapa por el plano que contiene el eje del perno (esta es la más pequeña y por lo tanto á igualdad de esfuerzo la peligrosa) este área tendrá por valor la anchura e por el espesor l disminuído en el diámetro d de modo que será $e(l - d)$ y sustituyendo estos valores tendremos la ecuación

$$\frac{P}{2} = e(l - d) R \quad \text{ó} \quad P = 2 e(l - d) R.$$

Considerando por último la segunda série de chapas sometidas á un esfuerzo de extensión igual á $\frac{P}{3}$ en el caso de la figura y llamando e' su ancho y l el espesor por ser el mismo que en la série anterior tendremos la nueva ecuación

$$\frac{P}{3} = e'(l - d) R \quad \text{ó} \quad P = 3 e'(l - d) R.$$

Tenemos para resolver el problema, un sistema de tres ecuaciones.

$$n = 4 \quad d = \sqrt{\frac{1P}{Rn}} = \sqrt{\frac{1000}{4 \cdot 7}} \text{ m m} = \sqrt{360} \text{ m m} = 19 \text{ m m}$$

$$l = 3 \cdot 19 \text{ m m} = 57 \text{ m m} \quad e = 0,5 \cdot 19 \text{ m m} = 9,5 \text{ m m}$$

$$L' = 4 \cdot 19 \text{ m m} = 76 \text{ m m} \quad L = 7,5 \cdot 19 \text{ m m} = 142 \text{ m m}.$$

49. **Problema 3.^a** Determinar las dimensiones de un perno. En el perno A B (fig. 12) consideraremos la *cabeza* q el *cuerpo cilíndrico* n y el *extremo roscado* p con su *tuerca* m. Al hacer girar esta última estando ya en contacto con las piezas que une, se produce un esfuerzo según la dirección del eje que tiende á arrojar la cabeza ó solo la parte que en la figura está con rayado más fuerte, hacer saltar los filetes del extremo roscado y romper el perno según una sección transversal. Los dos primeros efectos son de cizallamiento puesto que las deformaciones serían: una resbalar la parte q sobre el núcleo y otra resbalar la tuerca sobre el fondo de los rebajos del tornillo, el último es una extensión puesto que la rotura sería ocasionada por una fuerza que obra según el eje y tiende á separar los extremos del núcleo.

Ocupémonos ahora de los dos cizallamientos posibles llamando *h* y *h'* las alturas de la cabeza y rosca; *r* el radio del núcleo y *r'* el de la parte roscada. En el cizallamiento de la ~~rosca~~^{cabeza} las superficies que resbalan son las cilíndricas *a a' b b'* cuya área es $2 \pi r h$ y en el de la ~~rosca~~^{rosca} también son dos cilindros de radio *r'* y altura *h'* siendo el área $2 \pi r' h'$; el esfuerzo es idéntico en ambas deformaciones y lo representaremos por *F*; teniendo en cuenta la ecuación fundamental tendremos,

$$F = 2 \pi r h \times \frac{4}{5} R$$

$$F = 2 \pi r' h' \times \frac{4}{5} R$$

Para el esfuerzo de extensión tendremos acudiendo á la fórmula

correspondiente observando que $\omega = \pi r'^2$ (por ser esta la sección más débil),

$$F =: \pi r'^2 R$$

Combinando estas ecuaciones. se obtiene

$$\begin{array}{l} R \pi r'^2 = \frac{4}{5} R 2 \pi r' h' \\ R \pi r'^2 = \frac{4}{5} R 2 \pi r h \\ \frac{4}{5} R 2 \pi r h = \frac{4}{5} R 2 \pi r' h' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} r' = \frac{8}{5} h' \\ h' = \frac{5}{8} r' \\ r h = r' h' \end{array} \right.$$

Dos ecuaciones con cuatro incógnitas, habrá que dar valores á dos de ellas que generalmente son r y h es decir las dimensiones de la cabeza.

50. **Problema 4.^o**—Calcular las dimensiones de una chaveta (fig. 13). Suponiendo que no puede doblarse, la chaveta A B tenderá á cizallarse por las dos secciones $c d$, $c' d'$; ambos cizallamientos son debidos al mismo esfuerzo que es la mitad de la tensión á que esté sometida la pieza H que hace solidaria con la pieza K, por cuya razón nos bastará determinar las dimensiones de la sección menor (peligrosa) $c' d'$. Llamando b y h la base y altura de esta sección y aplicando la fórmula $F = R_1 \omega$ tendremos la ecuación

$$\frac{F}{2} = b h \frac{4}{5} R. \quad F = 2 b h \frac{4}{5} R.$$

b y h serán las dimensiones de las dos secciones supuestas iguales generalmente no lo son pero podemos aumentar la segunda cuanto queramos pues de este modo se aumentará la resistencia. En la ecuación anterior hay dos indeterminadas b y h pero la práctica dá una relación entre ellas, b es en general pequeño para no debilitar el vástago.

51. **Problema 5.^o**—Calcular las dimensiones de piezas unidas por remaches así como los de estos. Sea n el número de remaches

y supongamos las piezas sometidas á un esfuerzo de extensión N (fig. 14). Sea L la longitud total de las piezas, y d el diámetro de los remaches cilíndricos, y e el espesor de las piezas ó chapas. Los remaches están expuestos á romperse por cizallamiento y las chapas por extensión, habrá dos ecuaciones para resolver este problema que serán para los remaches,

$$N = n \pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{4}{5} R.$$

y para las chapas, $N = (L - n d) e \times R$. puesto que la rotura de las chapas tendrá lugar por la línea de los centros de los remaches. Las incógnitas son $n d$ y e en mayor número que ecuaciones por cuyo motivo se dan valores á una de estas tres cantidades que generalmente es n ; L pudiera también considerarse como incógnita lo cual aumentaría la indeterminación de la cuestión pero generalmente su valor es conocido por las condiciones de la instalación.

CAPÍTULO 3.º

Torsión simple.

52. **Esfuerzo que produce esta deformación.**—La torsión se produce cuando una pieza prismática, fija por uno de sus extremos está sometida á fuerzas susceptibles de reducirse á un par, en un plano perpendicular á la dirección del eje. Este par tiende á hacer girar en su plano las secciones transversales, y á desviar las fibras rectilíneas haciéndolas tomar una forma curva que más adelante indicaremos,

53. **Consecuencias que proporciona la experiencia.**—Cuando un cilindro (fig. 15) se someta á un par (P , P') cuyo momento no exceda de ciertos límites todas sus secciones á partir de la de

encastre que posee una absoluta inmovilidad, girarán alrededor de los ejes o'' , o'''' , o'''''' , o'''''''' ,... obedeciendo á las dos leyes siguientes demostradas por la experiencia.

1.^a Las dimensiones del sólido no varían, permaneciendo las secciones planas circulares y normales al eje, como si fuesen sólidos invariables.

Como consecuencia de esta ley el volumen y densidad permanecerán constantes, y toda recta perpendicular al eje antes de la torsión, continuará siéndolo mientras ésta tiene lugar y después de terminadas. Nos podemos asegurar de esto último, sometiendo á torsión un cilindro de cobre, por ejemplo, en el cual se introducirán con anterioridad agujas delgadas colocadas en orificios normales al eje, después de la torsión podrán extraerse con facilidad sin que hayan sufrido deformación alguna.

2.^a Los ángulos θ' , θ'' , θ''' ,... llamados de torsión y descritos en el mismo tiempo, por los radios $o' S'$, $o'' S''$, $o''' S'''$,... son proporcionales á la distancia de su sección respectiva á la de encastre, es decir que se verifica

$$\frac{\theta'}{L'} = \frac{\theta''}{L''} = \frac{\theta'''}{L'''} = \dots = \text{constante.}$$

De aquí se deduce que el camino recorrido por un punto cualquiera es proporcional á su distancia á la sección de encastre, porque este camino vendrá expresado por $\theta' r'$, $\theta'' r''$, $\theta''' r'''$,... y de la serie de razones iguales que acabamos de obtener, resulta la siguiente multiplicando por r

$$\frac{\theta' r'}{L'} = \frac{\theta'' r''}{L''} = \frac{\theta''' r'''}{L'''} = \dots =$$

Además si consideramos la posición $S S_1' S_1'' S_1'''$,... de la fibra $S S' S'' S'''$,... después de la torsión, como camino recorrido por un punto móvil, éste, en su movimiento avanzará cantidades pro-

porcionales á los ángulos, girando al rededor de $o o''$, siendo su trayectoria ó posición final de la fibra, una hélice trazada sobre la superficie del cilindro.

54. **Estudio análtico de la relación que existe entre el momento del par y el ángulo correspondiente de torsión.**—Claro es que el ángulo girado por cada sección varía de una á otra, y por este motivo para referirnos á uno determinado, tomaremos el que corresponde á la sección situada á la unidad de distancia de la de encastre. Apliquemos al cilindro momentos crecientes á partir de cero, hasta llegar á fracturarlo; si tomamos como abcisas (fig. 16) ob , ot , ou , las deformaciones medidas por los valores del ángulo de torsión, ó bien por su arco rectificado, y como ordenados los momentos ab , st , mn , etc. obtendremos una línea $o a s m$ que representa la ley de variación que nos proponíamos encontrar, en la cual observamos dos porciones $o a$ y $a m$, correspondiendo cada una á un periodo distinto.

Primer periodo ó periodo elástico.—La parte $o a$ es rectilínea lo cual demuestra la proporcionalidad entre los momentos y deformaciones, Este periodo se llama *elástico* porque cuando el par deja de obrar, desaparece la deformación; el punto a corresponde al *límite de elasticidad*; la ordenada ab es el *momento límite de elasticidad* relativa al material que se considere, y la abcisa $o b$ la *deformación límite de elasticidad*.

Segundo periodo.—A partir de ab las deformaciones $ot \dots$ crecen con más rapidez que los momentos de torsión $t s \dots$ hasta llegar al momento de fractura mn , y torsión correspondiente on . En este segundo periodo, si el momento de torsión se anula, la deformación no desaparece, quedando una parte visible, cuyo valor $o o'$ obtendremos trazando por el punto s una paralela á ab ; la razón del trazado de esta paralela consiste, en que al dejar de obrar el par de torsión y quedar el cilindro abandonado á sus rea-

ciones moleculares, nos encontramos en un caso análogo al período elástico y debe haber la misma relación entre la deformación y el esfuerzo que había en el caso anterior; por ese motivo, el triángulo cuyos catetos sean el momento de torsión y la deformación correspondiente, debe ser semejante al $ao'b$, y lo construiremos trazando la paralela que hemos indicado; es evidente que si teníamos la deformación ot y en virtud de las reacciones moleculares desaparece la parte $o't$, quedará permanente en el sólido la torsión correspondiente al ángulo cuya longitud sea oo' . Si en estas condiciones empezamos á aplicar nuevos momentos de torsión, crecientes desde cero, se presentará el fenómeno trasladándose á ot y st la deformación y momento límite de elasticidad, porque según acabamos de decir, el sólido tiene la aptitud suficiente para hacer desaparecer una deformación igual á $o't$. La fractura se producirá cuando apliquemos el momento mn por una sección cualquiera, empezando por el perímetro por ser esta parte la que ha de soportar mayores esfuerzos como luego indicaremos.

55. Resolución de las dos cuestiones en que se apoya la resistencia de materiales. -- Sabemos que para entrar en los tres problemas de la resistencia de materiales, es necesario determinar: 1.º Las reacciones interiores que se desarrollan por el concurso de las fuerzas exteriores. 2.º Expresar dichas reacciones en función de las dimensiones de los cuerpos, y de coeficientes prácticos que se encuentran calculados en tablas, los cuales varían con la sustancia; vamos por lo tanto á resolver cada una de dichas cuestiones:

1.ª Cuestión. Para determinar las reacciones interiores, acudiremos á las seis ecuaciones de equilibrio que pueden aplicarse á un sistema material, siempre que se tomen en consideración dichas reacciones en unión de las fuerzas directamente aplicadas; estas últimos nos son conocidas y sabemos que se reducen á un par cuyo momento con relación al eje del sólido es Pp ; respecto de los pri-

meros, solo sabemos que tienen todas dirección normal al eje, porque si consideramos por ejemplo la sección S' de la fibra $S S' S'' \dots$ en virtud del esfuerzo (P, P') tiende á trasladarse á S'_1 , ó lo que es lo mismo se deforma la fibra por cizallamiento y la resistencia que presenta á esta deformación, está situada en el plano de la sección S' que es normal al eje. Con estos datos podemos pasar á establecer las ecuaciones de equilibrio, y tomando el eje del sólido por eje de las X facilmente se observa que por sí mismas se satisfacen todas menos la relativa á momentos con respecto á dicho eje, por lo tanto llamando M á la suma de momentos de todas las reacciones interiores y aplicando la ecuación tendremos

$$Pp - M = 0, \quad M = Pp,$$

2.^a Cuestión. La experiencia ha demostrado que la resistencia de una fibra es proporcional á su sección ω , á su distancia al eje r , y por último al ángulo θ recorrido por el punto intersección de cualquier fibra, con la sección que dista la unidad de longitud de la de encastre. Hay que advertir que el ángulo θ se mide con el módulo de 57° y por consiguiente tiene la misma interpretación que el camino recorrido por un punto que estando en la sección que hemos dicho, pertenezca á una fibra cuya distancia al eje sea la unidad, de modo que se tendrá

$$\frac{f}{d \omega \cdot r \cdot \theta} = G' = \text{constante.} \quad f = G' \cdot d \omega \cdot r \cdot \theta.$$

G' es un coeficiente que se llama *modulo de elasticidad á la torsión* y varía con la sustancia.

No es de extrañar el resultado que acabamos de obtener porque si observamos que segun hemos dicho la resistencia que presenta una fibra á la torsión es un esfuerzo cortante el cual será proporcional á su sección $d \omega$ y al cizallamiento i' por unidad de longitud; de modo que tendremos,

$$\frac{f}{d\omega \cdot i'} = G' = \text{constante},$$

pero i' será el desplazamiento del punto S' (fig. 15) que dista la unidad de longitud de la sección de encastre, de modo, que su valor será $S'S'$, ó lo que es lo mismo θr de modo que sustituyendo tendremos,

$$\frac{f}{d\omega \cdot r \cdot \theta} = G'. \quad f = d\omega \cdot r \cdot \theta G'.$$

El momento de la reacción de esta fibra f será por lo tanto $fr = G' \cdot d\omega r^2 \theta$ y la suma M de momentos, ó sea el momento de torsión tendrá por valor:

$$M = \Sigma fr = \int g' d\omega r^2 \theta = g' \theta \int r^2 d\omega$$

á la expresión $\int r^2 d\omega$ se dá el nombre de momento de inercia polar (*) de la sección con relación al punto o' ó centro de gravedad y se representa por Y tendremos por lo tanto;

$$M = P \cdot p = g' \theta \int r^2 d\omega = g' \theta Y. \quad (1)$$

(*) En mecánica racional hemos aprendido á determinar el momento de inercia de una figura cualquiera con respecto á un eje; vamos á demostrar que el momento con relación á un punto ó momento polar, es igual á la suma de los momentos con relación á dos ejes perpendiculares que pasan por dicho punto.

En efecto, el momento de una figura plana con relación á un punto de su plano tiene por valor $\int \int r^2 d\omega$; si la referimos á un sistema coordenado rectangular cuyo origen se confunda con dicho punto, podremos establecer las igualdades,

$$\int \int r^2 d\omega = \int \int (x^2 + y^2) dx dy = \int \int x^2 dx dy + \int \int y^2 dx dy \quad \text{lo cual demuestra la proposición.}$$

56. **Resistencia por unidad superficial.**—Siendo f la resistencia de una fibra cuya sección es $d \omega$ la resistencia de una superficie igual á la unidad será:

$$R = \frac{f}{d \omega} = \frac{G' \theta r d \omega}{d \omega} = G' \theta r. \quad (2)$$

57. **Modulo de torsión.**—

De la fórmula (1) se deduce $\frac{Pp}{Y} = G' \theta$

Idem (2) id. $\frac{F}{r} = G' \theta$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{Pp}{Y} = G' \theta \\ \frac{F}{r} = G' \theta \end{array} \right\} \frac{Pp}{Y} = \frac{F}{r} \text{ ó } \frac{Pp}{F} = \frac{Y}{r} \quad (3)$$

al segundo miembro de la igualdad (3) se dá el nombre de módulo de torsión y su valor se encuentra en tablas.

58. **Interpretación mecánica de G' .**—Si en la fórmula $F = G' \theta r$ hacemos $\theta = 1$ y $r = 1$ resultará $F = G'$ lo cual nos indica que G' es la resistencia de una fibra colocada á la unidad de distancia del eje del sólido, cuando éste se encuentra sometido á un momento tal, que hace girar á la indicada fibra un ángulo igual á la unidad.

La integral $\int d \omega r^2$ que hemos llamado momento de inercia polar se refiere solo á una sección y por lo tanto el momento M que hemos calculado, será la resistencia de dicha sección; como estas son todas iguales, (Y constante) de la misma materia, (G constante) y θ también lo es para todas, resulta (1) $M = G' \theta Y =$ constante, lo cual nos dice que las secciones son igualmente resistentes no habiendo en su consecuencia sección peligrosa.

Debe observarse de acuerdo con lo dicho al final del párrafo 54 que aunque las secciones son igualmente resistentes, en las fibras que componen una cualquiera, soportan mayor esfuerzo cuanto más retiradas estén del eje porque su momento $f r = G' d \omega r^2 \theta$ crece con r .

59. **Propiedades del eje de torsión.**—Hasta ahora hemos supuesto que el sólido era homogéneo y de revolución, de modo que el eje de simetría se confundía con el lugar geométrico de los centros de gravedad de las distintas secciones, vamos á considerar el caso de un sólido de revolución que no sea homogéneo ó que tenga una forma cualquiera. Sea S una de las secciones, m la de una fibra, (fig. 17) y g el centro alrededor del cual gira m ; la dirección de la reacción igual y contraria á la torsión será mF . Refiramos la sección á un sistema coordinado cuyo origen coincida con g , y vamos á demostrar que este punto es el centro de gravedad de la misma.

Sabemos que el valor de la reacción es $f = G' \theta r d\omega$; la proyección sobre el eje de los \times será, $f \sin \alpha = G' \theta r d\omega \sin \alpha$, pero llamando y' á la ordenada de la fibra m , se tendrá $y' = r \sin \alpha$, por lo tanto $f \sin \alpha = G' \theta d\omega y'$; esta expresión nos representa la proyección de la reacción desarrollada por la fibra m sobre el eje de las \times por lo tanto, sumando las correspondientes $f \sin \alpha$ á todas las fibras, tendremos la proyección de las resultantes de las reacciones desarrolladas en la sección; hemos dicho que estas resultantes constituyen un par . por lo tanto su proyección será igual á cero de modo que tendremos,

$$\Sigma f \sin \alpha = \int G' \theta y' d\omega = G' \theta \int y' d\omega = 0. \quad \text{pero } G' \theta \neq 0.$$

$$\text{luego } \int y' d\omega = 0.$$

ahora bien llamando y'' la coordenada del centro de gravedad tendremos:

$$y'' = \frac{\int y' d\omega}{\int d\omega} = \frac{0}{\omega} = 0.$$

por lo tanto el centro de gravedad está en el eje de las X ; del

mismo modo demostraríamos que está en el de las Y luego se confundirá con el origen ó sea con el centro de rotación de la sección S.

Demostrada esta proposición resulta inmediatamente que el eje de torsión del sólido está constituido en todos los casos por la línea lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones.

60. **Ángulo de la hélice.**—Vamos á determinar el ángulo que forma con el eje del cilindro la tangente á la hélice en que se transforma una fibra cualquiera, para lo cual bastará recordar que su tangente tiene por valor la relación entre el desarrollo del arco $S' S'$, (fig. 15) y el segmento de fibra $S S'$, que es igual á la unidad; tendremos por lo tanto

$$tgd = S' S' = \theta r \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\theta}{1} = \frac{\theta'}{L'} = \frac{\theta''}{L''} = \dots \\ tgd = r \frac{\theta'}{L'} = \frac{r \theta'}{L'} = \frac{r \theta''}{L''} = \dots \end{array} \right\}$$

61. **Ángulo de torsión.**—Esle ángulo θ lo determinaremos de la ecuación (1.^a) $P p = G' \theta Y$ de donde

$$\theta = \frac{P p}{G' Y}.$$

El valor de G' ha demostrado la experiencia que es $G' = \frac{2}{3} E$; es decir las dos terceras partes del módulo de elasticidad á la extensión.

62. **Problema 1.^o** Conocido el momento de torsión que actúa sobre un sólido homogéneo, y la forma geométrica de su sección, calcular sus dimensiones de modo que su resistencia por m^2 no exceda de una cantidad dada.—Para resolver este problema acudiremos á la ecuación (3) y supondremos para mayor sencillez que es de forma cilíndrica

$$\frac{P p}{F} = \frac{Y}{r}$$

en esta ecuación son conocidas todas las cantidades menos r cuyo valor entra también implícitamente en Y , de modo que debemos empezar por determinar el momento de inercia polar de un círculo de radio r .

$$Y = \int d\omega r^2 \quad d\omega = d(\pi r^2) = 2\pi r dr$$

$$Y = \int 2\pi r^3 dr = 2\pi \int r^3 dr = 2\pi \frac{r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2} =$$

$$\frac{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

sustituyendo en la ecuación anterior en lugar de Y y r sus valores tendremos.

$$\frac{P p}{F} = \frac{\frac{\pi d^4}{32}}{\frac{d}{2}} = \frac{2\pi d^3}{32} = \frac{\pi d^3}{16} \quad d^3 = \frac{16, P p}{\pi F} = 5,1 \frac{P p}{F}$$

2.º **Investigar si un sólido está en buenas condiciones de resistencia.**—Nos valdremos de la misma fórmula empleada anteriormente, siendo en este caso cantidades conocidas, P , p , Y , r se calculará el valor de

$$F = \frac{P p \cdot Y}{r}$$

el cual comparemos con el que den las tablas; si F es igual ó menor que el que dan las tablas, el sólido podrá resistir en caso contrario se encuentra en malas condiciones.

CAPÍTULO 4.º

Flexión plana.

63. **Esfuerzo que produce esta deformación.**—Hemos dicho al ocuparnos de las deformaciones elementales, que la flexión es debida á un par cuyo plano pasa por el eje de simetría del prisma ó lo que es igual por la fibra media.

Consideremos un prisma $o n$ (fig. 18) solidamente sujeto por el extremo O y solicitado en n por la fuerza P . Vamos á estudiar el efecto de P sobre una sección cualquiera DC para lo cual trasladaremos la fuerza P paralelamente á P'' aumentando un par $P' P$. Se desarrollará en DC una rotación debida al par $P' P$ cuyo momento es $P \times m n$ y prescindiremos del efecto de la fuerza P'' por que estamos ocupandonos del estudio separado de cada una de las deformaciones simples.

Lo mismo ocurrirá á cualquiera otra sección que consideremos y del conjunto de las rotaciones que cada uno experimenta, resulta la deformación por flexión ó encorvadura del prisma. Al producto $P \times m n$ se denomina *momento de flexión* y varía de una sección á otra por variar su brazo de palanca $m n$. La materia de que está formado el prisma, se opondrá á esta deformación, mediante el auxilio de reacciones moleculares ó fuerzas elásticas.

64. **Hipotesis admitidas en el estudio de la flexion.**—Tomemos por eje de las X el del prisma antes de ser deformado y por eje de las Y una recta perpendicular á la anterior y contenida en el plano de la fuerza P . Admitiremos: 1.º Que la deformación del sólido es de simple curvatura; es decir, que la deformación se efectúa en el plano $X Y$ en que según hemos dicho actúan las fuerzas

exteriores. Este caso aunque no es general casi siempre se presenta en las construcciones y por lo tanto á él nos debemos referir.

2.^a Las compresiones y extensiones y demás fuerzas á que según veremos resulta sometida la materia por la flexión, son inferiores al límite de elasticidad; por lo tanto operaremos en e periodo *elástico*, y podremos utilizar el principio de que *las deformaciones de las fibras elementales del prisma, por extensión, compresión, etc., son proporcionales á las fuerzas que lo producen.*

3.^o La encorvadura total del prisma, es suficientemente pequeña para que las fuerzas exteriores que en un principio eran normales al eje, continúen siéndolo sensiblemente, después de la flexión.

65. **Estudio experimental de la flexión, y consecuencias que de él se deducen.**—1.^a Las secciones planas normales al eje antes de la deformación continúan lo mismo después de flexado.

Esto se ha comprobado trazando rectas normales á las aristas de un prisma de madera, de modo que dibujaban secciones perpendiculares al eje, y verificando que estas líneas, después de la flexión, continuaban siendo rectas, normales á las aristas encorvadas y contenidas en un mismo plano.

2.^a Unas fibras del prisma se comprimen y otras se extienden por motivo de la flexión del mismo.

De este hecho resulta que dos secciones A B, C D, (fig. 18) primitivamente paralelas, tomen la posición A' B', C' D' después de flexado el prisma; por lo tanto se alteran las dimensiones longitudinales de las fibras comprendidas entre las dos secciones pero como no sabemos todavía cuales sufren una ú otra de estas deformaciones están indeterminadas las fuerzas que las producen.

Si $A' C' > A C$ con mayor razón $B' D' > B D$ y entónces todas

las fibras se alargarán obedeciendo á esfuerzos de extensión.

Si $B'D' < BD$ desde luego $A'C' < BC$ y todas las fibras se comprimirán obedeciendo á esfuerzos de compresión.

Por último si $A'C' < AC$ y $B'D' > BD$ unas fibras se comprimirán y otras por el contrario habrán sido extendidas. Este ultimo caso es el que se presenta en la práctica como ha sido comprobado por las siguientes experiencias.

Duhamel demostró que no todas las fibras se extienden. Para ello sometió á flexión vigas de pino del Norte en las que había practicado un corte trasversal $a b$ (fig. 19) en su punto medio con lo cual alteró la continuidad de las fibras y notó que presentaban la misma resistencia que cuando estaban intactos, lo cual no hubiese podido ocurrir trabajando las fibras cortadas por extensión.

Para justificar que unas fibras trabajan por compresión y otras por extensión ejecutó Morín la siguiente experiencia. En una barra de acero dulce, sometida á flexión hasta producir encorvadura permanente, la sección $M N$ (fig 19) que era primitivamente cuadrada, se convirtió en trapecio, ensanchándose por la parte superior y adelgazándose por la inferior, lo cual prueba que en la primera parte sufrió extensión y en la segunda compresión.

Las anteriores experiencias prueban que existe una capa de fibras que no sufren extensión ni compresión, es decir *una capa de fibras neutras* que experimenta cambio de forma tomando una cierta curvatura pero que no varía su longitud.

66. **Resolucion de las dos cuestiones en que se apoya la resistencia de materiales.**—Sabemos que estas cuestiones son dos: 1.^a Conocidas las fuerzas exteriores que actúan sobre el sólido, determinar las reacciones que en él se desarrollan. 2.^a Expresar dichas reacciones moleculares ó fuerzas elasticas en función de las dimensiones del sólido, y de coeficientes conocidos para cada sustancia.

1.^a Question. Consideremos la sección DC; (fig. 18) las reacciones que en ella se desarrollan, serán las necesarias para que el trozo de prisma DCn permanezca en equilibrio á pesar de estar sometido á la acción del par PP' cuyo momento es $P \times mn$. Si consideramos un sistema coordinado cuyos ejes sean los X, Y marcados en la figura, y un tercero Z, perpendicular al plano de los dos, las seis ecuaciones de equilibrio se reducen á

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0 & \Sigma Y &= 0 & \Sigma Z &= 0 & \Sigma (Zy - Yz) &= 0 \\ \Sigma (Xz - Zx) &= 0 & Pp - M &= 0 \end{aligned}$$

en estas ecuaciones X, Y, Z, representan las componentes de cada reacción molecular según los ejes coordinados, y prescindimos en los cinco primeros de las fuerzas exteriores, porque tanto sus proyecciones sobre cualquiera de ellos, como los momentos con relación á los X é Y son nulos por sí mismos; resulta por lo tanto, que el sistema de dos fuerzas á que según sabemos pueden reducirse las reacciones moleculares, tiene en virtud de las tres primeras ecuaciones su suma de proyección nula sobre cualquier eje, de donde resulta que ambas fuerzas son iguales y contrarias, ó lo que es lo mismo constituyen un par; de la cuarta y quinta se deduce que el plano determinado por ellas, pasa por los dos ejes X é Y, ó lo que es lo mismo, coincide con el plano X Y, y por último, la ecuación sexta nos indica que su momento es igual al momento del par directamente aplicado.

La ecuación sexta se utilizará en la forma siguiente:

$$M = P \cdot p$$

la cantidad M representa el *momento de las fuerzas elasticas*.

2.^a Question. Hagamos coincidir las secciones A'B' y AB (fig. 18) y supongamos que la distancia BD es muy pequeña con lo cual B'D' y A'C' se confundirán en dirección sensiblemente con

B D y A C, C' D' tomará la posición marcada en la figura 20, cortando á C D en un punto H comprendido entre C y D correspondiente á la proyección N H de la capa de fibras neutras, más adelante aprenderemos á determinar la posición de esta capa.

67. Observando la figura 20, se vé que las distintas fibras que corta la sección D C se extienden ó contraen de una manera creciente, desde la capa neutra hasta las caras laterales que constituyen las capas de máximo trabajo.

Llamemos R' la reacción que desarrolla por motivo de la extensión, la unidad superficial de una fibra que esté separada de la capa neutra, la unidad de distancia. Damos á R' el nombre de reacción y no resistencia, porque resistencia es la reacción máxima y como esta reacción, por considerarnos dentro del período elástico, es directamente proporcional al alargamiento $b c$, el cual á su vez lo es á la distancia H b á la capa neutra, por lo tanto, las fibras que distasen de esta capa más de una unidad, quedarían deformadas permanentemente ó se romperían, según que refiramos las cargas de seguridad al límite de elasticidad ó al de rotura.

Generalmente la resistencia R por unidad superficial de un sólido á la extensión, no es la que opone á la compresión, pero nosotros supondremos que son iguales, teniendo presente que hemos de tomar la mínima para medir las cargas permanentes, pues si suponemos para fijar las ideas que la resistencia á la compresión es menor que la relativa á la extensión y tomamos como tipo la segunda, al calcular el sólido con las dimensiones absolutamente indispensables, habría algunas capas de fibras expuestas á ~~extensión~~^{compresión} que se romperían.

Si R' es la reacción por unidad superficial de una fibra que diste de la capa neutra la unidad de longitud, la reacción correspondiente á otra fibra situada en la capa $c b$ cuya distancia es y será R' y porque llamándola N tendremos

$$\frac{N}{\gamma} = \frac{R'}{1} \quad N = R' \gamma.$$

Según esto, la reacción de una fibra situada á la distancia, y sería llamando $d\omega$ su sección $R' \gamma d\omega$; como esta reacción es paralela al eje del prisma antes de sufrir deformación, ella misma será su proyección sobre dicho eje y si sumamos esta expresión para todas las fibras comprendidas en la sección D C, tendremos la proyección de la reacción total, que según sabemos debe ser igual á cero; tendremos por lo tanto.

$$\Sigma R' \gamma d\omega = R' \int \gamma d\omega = 0. \quad R' \neq 0. \quad \int \gamma d\omega = 0.$$

la coordenada γ , del centro de gravedad tiene por valor,

$$\gamma_c = \frac{\int \gamma d\omega}{\int d\omega} = \frac{0}{\omega}.$$

lo cual nos dice que dicho centro está situado en la capa neutra, como por otra parte todos los centros de gravedad están en el eje del prisma, se deduce que la capa neutra contiene este eje siendo en su consecuencia un plano que pasando por la fibra media es perpendicular al de las acciones exteriores ó par de flexión.

68. Expresion del momento de las fuerzas elásticas.—

Siendo $R' \gamma d\omega$ la reacción ó fuerza elástica correspondiente á una fibra que diste γ de la capa neutra su momento será $R' \gamma^2 d\omega$ y la suma de momentos de dichas fuerzas elásticas que hemos representado por M tendrá por valor,

$$M = \Sigma R' \gamma^2 d\omega = \int R' \gamma^2 d\omega (x)$$

es de advertir que el valor de M está dado por una integral doble aunque para facilitar la expresión la supongamos sencilla, porque $d\omega = d\gamma d\zeta$ y el verdadero valor de M será,

$$M = R' \int_{-oH}^{oH} d\zeta \int_{-oD}^{oD} y^2 dy$$

Si llamamos R la resistencia por unidad superficial de la materia que forma el prisma, como esta resistencia ó máxima reacción corresponderá al valor máximo de y que convenimos en representar por esta misma letra, tendremos,

$$\frac{R'}{1} = \frac{R}{y} \quad R' = \frac{R}{y}$$

y sustituyendo en la fórmula anterior resultará:

$$M = \frac{R}{y} \int y^2 d\omega = \frac{R}{y} \cdot Y \quad (1)$$

Y, representa el momento de inercia con relación al eje $o\zeta$, M el momento de fuerzas elasticas así como Y é y son variables y con ellas varía la reacción R' á la unidad de distancia; en esta por el contrario la resistencia R es invariable, por lo tanto al dar valores á Y é y ó sea al fijar las dimensiones, queda determinado el momento M y recíprocamente.

69. **Modulo de flexión.**—De la ecuación (1) se deduce, $\frac{M}{R} = \frac{Y}{y}$ la expresión $\frac{Y}{y}$ recibe el nombre de módulo de flexión y se encuentra calculado en tablas.

70. **Otra forma de la ecuación de equilibrio.**—Sabemos que la resistencia R tiene por expresión,

$$R = E \frac{l}{L} = E \frac{DD'}{BD} = E \frac{DD'}{NH} = E \frac{DH}{oN} = \frac{y}{\rho} E.$$

y sustituyendo este valor en la fórmula (1) resultará,

$$M = R \frac{Y}{y} = \frac{y}{\rho} E \frac{Y}{y} = \frac{E Y}{\rho}$$

de donde se deduce, $\rho = \frac{E Y}{M}$ por lo tanto si E, Y y M son

constantes en las distintas secciones ρ será constante también y el eje después de la deformación afectará la forma circular.

70. **Sección peligrosa.**—Será aquella para la cual M tenga un valor máximo, y como $M = P p$ claro que esta condición se cumplirá en la sección que esté más alejada del punto de aplicación de la fuerza normal al eje que actúa sobre el sólido; si este último está encastrado y la fuerza actúa en su extremo libre, la sección peligrosa es la de encastre.

71. **Momentos de elasticidad y rotura.**—Aunque las expresiones $\frac{E Y}{\rho}$ y M son idénticas, se acostumbra á llamarlas respectivamente momento de elasticidad y momento de flexión ó de rotura; la razón de esta distinta denominación, consiste en que $\frac{E Y}{\rho}$ es la máxima reacción que puede desarrollar una sección y se conoce independientemente de las fuerzas directamente aplicadas; mientras que M es el momento del par (P, P') (fig. 18) que es independiente y por lo tanto creciendo sucesivamente puede ocasionar la rotura.

72. **Problemas que pueden resolverse con las fórmulas anteriores.**—Hemos dicho que son tres los problemas que resuelve la resistencia de materiales; veamos como podemos conseguirlo con auxilio de las fórmulas que hemos establecido.

Problema 1.º Se conoce el momento del par M y se desean las dimensiones de la sección á quien corresponde, dando á esta la forma que se desee.

De la fórmula (1) se deduce:

$$M = \frac{R Y}{\gamma}$$

sustituyendo en lugar de Y é γ sus valores según queramos que la sección sea cuadrada

$$\left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{a^4}{12} \\ y = \frac{a}{2} \end{array} \right\} \text{rectángular} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{a b^3}{12} \\ y = \frac{b}{2} \end{array} \right\} \text{circular} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{\pi r^4}{4} \\ y = r \end{array} \right\} \text{etc (*)}$$

tendremos una ecuación con una ó dos incógnitas, en este último caso la experiencia aconseja relaciones entre ellas.

Problema 2.^o Se conocen las dimensiones y por lo tanto Y é y fácil es determinar el momento M de rotura.

Problema 3.^o Se conocen las dimensiones y el momento de rotura, de modo que de la ecuación anterior despejaremos el valor de R ; si este es igual ó menor que el que nos dan las tablas, el prisma estará en buenas condiciones de resistencia, en caso contrario no lo estará.

73. **Ecuacion del eje medio deformado.**—Suponiendo el prisma encorvado representamos la ecuación de su eje por $y = f(x)$. Teniendo en cuenta la pequeñez de la deformación y por cuyo motivo el eje casi será una línea recta ^{que para ser el} ~~paralelo al~~ origen, $\frac{dy}{dx}$ también

será muy pequeño su cuadrado también lo será respecto de la unidad y podrá por este motivo despreciarse quedando reducida la expresion

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

del radio de curvatura á la siguiente

(*) Estos momentos de inercia dijimos que estaban tomados con relación al eje de las ζ pero como en algunos casos habrá dificultad en determinarlos y á veces imposibilidad por ser la sección de forma irregular pueden encontrarse sus valores en tablas.

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}}$$

sustituyendo en lugar de ρ su valor tendremos

$$\frac{E Y}{M} = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \quad \frac{d^1 y}{d x^2} = \frac{M}{E Y}$$

Siendo $\frac{d^2 y}{d x^2}$ la segunda derivada de y integraremos dos veces la ecuación anterior lo cual nos dará el valor de la ecuación finita

$$\int \frac{d^2 y}{d x^2} d x = \int \frac{M}{E Y} d x \quad \frac{d y}{d x} = f'(x) + C'$$

$$\int \frac{d y}{d x} d x = \int f'(x) d x + \int C' d x \quad y = f(x) + C' x + C$$

que nos resuelve el problema.

74. Definición y división de cargas inmediatas — Se da este nombre á los esfuerzos que actúan directamente sobre un sólido; se llaman aislados, cuando son varios que obran de cualquier modo y uniformemente repartidos cuando el esfuerzo es tal, que trozos de igual longitud soportan la misma carga, como sucede por ejemplo, á un prisma de grandes dimensiones colocado horizontalmente y sometido solo á la acción de su peso.

75. Prisma que descansa horizontalmente sobre dos apoyos y sometido á la acción de varias cargas aisladas estáticas situadas en su plano de simetría y normales al eje — Estudiaremos por analítica y gráficamente: 1.º Las reacciones de los apoyos sobre el prisma: 2.º El esfuerzo de cizallamiento en una sección cualquiera: 3.º El momento de flexión.

Estudio analítico.—Reacciones en los apoyos. — El sólido, prescindiendo de su peso se encuentra sometido á la acción de las

fuerzas P_1, P_2, P_3, P_4 y las reacciones de los apoyos, por hipótesis se encuentra en equilibrio, luego se verificará el teorema de momentos relativo á un sistema de fuerzas paralelas situadas en un plano con relación á un punto de este; aplicando dicho teorema para los puntos de los apoyos A y B (fig. 21) tendremos llamando P_0, P'_0 á dichas reacciones y l á la longitud del prisma.

$$\text{Para el punto A } P'_0 l = P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 + \dots$$

$$\text{Idem. B } P_0 l = P_1 (l - x_1) + P_2 (l - x_2) + P_3 (l - x_3) + P_4 (l - x_4) + \dots$$

$$\text{de donde } \begin{cases} P'_0 = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + \dots}{l} \\ P_0 = \frac{P_1 (l - x_1) + P_2 (l - x_2) + P_3 (l - x_3) + \dots}{l} \end{cases}$$

Para estudiar el efecto de las fuerzas exteriores sobre una sección cualquiera tal como la ab , estableceremos el equilibrio de uno de los dos trozos en que resulta dividido el prisma por dicha sección; nosotros consideraremos siempre el trozo de la izquierda porque según hemos dicho, las fuerzas de la izquierda y las de la derecha forman un sistema en equilibrio, de donde se deduce que los resultados obtenidos serán los mismos. Si consideramos el esfuerzo de cizallamiento trasladando á la sección ab las fuerzas de la izquierda, y este esfuerzo resulta dirigido hácia abajo por ejemplo, al tomarlos de la derecha, resultaría un nuevo esfuerzo dirigido hácia arriba; ahora bien, estando dichos esfuerzos aplicados á dos secciones distintas que se tocan en ab , el efecto de ambos esfuerzos será cizallar el prisma de modo que la parte de la izquierda resulte más baja que la de la derecha.

Tomaremos por origen de coordenadas, uno de los extremos del eje del prisma, que servirá de eje ox , y el sistema coordenado quedará constituido por los ejes ox, oy y el perpendicular á ambos

en su punto de encuentro. Consideremos positivas las fuerzas dirigidas según el eje $+y$, y como negativas las de dirección opuesta. Siendo los esfuerzos de cizallamiento paralelos al eje oy , puede aplicarse esta regla de signos,

Asignaremos cualidad positiva á los momentos de las fuerzas positivas que obrando aisladamente, producen en el prisma una encorvadura cuya concavidad está del lado del eje oy y daremos signo menos á los momentos de la fuerzas negativas que flexan el prisma en sentido contrario.

En las partes del prisma cuyo momento de flexión sea positivo están comprimidas las fibras situadas encima de la capa neutra y extendidas las demás.

Si consideramos trasladadas las fuerzas á la sección ab , para hacer el estudio del trozo Ab se introducirán los correspondientes Pares. Las fuerzas producirán cizallamiento en la sección ab , los pares flexión.

2.º Esfuerzos de cizallamiento —En la sección ab , dicho esfuerzo tiene por valor trasladando las fuerzas de la izquierda.

$$T = P_0 - P_1 - P_2 \quad (1)$$

Hemos dicho que tiende á la misma deformación el esfuerzo $-y$ obtenido trasladando las de la derecha.

3.º Momentos de flexión. —Este momento será la suma de los correspondientes á todas las fuerzas situadas á la izquierda de la sección ab , de modo que tendremos

$$M = P_0 x - P_1 (x - x_1) - P_2 (x - x_2) \quad (2)$$

ó en general.

$$M = P_0 (x - x_0) - P_1 (x - x_1) - P_2 (x - x_2)$$

$$= \sum_{n=0}^n P_n (x - x_n) \quad (3)$$

Si como sucede en este caso, el origen coincide con el apoyo $x_0=0$

Resultan completamente conocidos los valores de T y M; se observa que $T = \frac{dM}{dx}$ y esto ocurrirá siempre que las cargas están situadas normales al eje en un plano de simetría.

La ecuación (1) nos dice que T es constante entre dos esfuerzos consecutivos.

76. **Determinar las dimensiones de un prisma apoyado que soporta cargas normales.**—Haremos uso de la fórmula obtenida al ocuparnos de la flexión plana,

$$M = \frac{R Y}{\mathcal{J}}$$

y sustituyendo en lugar de M su valor, tendremos

$$\sum_{n=n}^{n=0} P_n (x - x_n) = \frac{R Y}{\mathcal{J}}$$

como Y é \mathcal{J} son funciones de las dimensiones, podemos eliminar las de esta ecuación con lo cual se resuelve el problema. Tendremos presente que no nos proponemos determinar un sólido de resistencia cuya forma sea cualquiera, sino un sólido prismático y por este motivo investigaremos el valor máximo de M con lo cual obtendremos las dimensiones de la sección peligrosa; dando á todo el prisma esta sección evidentemente resistiría si solo estuviese sometido á esfuerzos de flexión, pero como también lo está á fuerzas de cizallamiento, tendremos que encontrar el valor máximo de T con con lo cual y mediante la fórmula

$$R_s = \frac{T}{\omega}$$

determinaremos la sección peligrosa correspondiente á esta deformación y construiremos el prisma, de modo que su base sea la mayor de ellas.

77. **Investigar si un prisma está en buenas condiciones de resistencia.**—Utilizando las fórmulas,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^n P_n (x - x_n) &= \frac{R Y}{\gamma} \\ \frac{T}{\omega} &= R, \end{aligned} \right\} \text{deduciendo los valores de } R \text{ y } R'$$

$$\left\{ \begin{aligned} R &= \frac{\sum_{n=0}^n P_n (x - x_n) \times \gamma}{Y} \\ R' &= \frac{T}{\omega} \end{aligned} \right\} \text{el primero se comparará con la}$$

mejor de las resistencias por unidad superficial á la extensión y compresión de la materia que constituye el prisma y el 2.^o con las $\frac{4}{5}$ partes de este valor; si son menores el sólido, se encontrará en buenas condiciones.

78. **Caso en que puede desprejarse la deformación por cizallamiento.**—Vamos á demostrar que en los prismas de sección constante y longitud algo considerable, los esfuerzos de cizallamiento pueden desprejarse. En efecto si representamos por T (fig. 22) el esfuerzo normal al eje que actúa sobre el prisma, tendremos considerando el equilibrio de la sección A A

$$\frac{T}{\omega} = R,$$

$$T p = \frac{Y R}{\gamma} \quad \gamma = \frac{1}{2} h \quad Y = \frac{1}{12} b h^3 \quad T p = \frac{R \frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} h} =$$

$$\frac{R b h^3}{6 h} = \frac{R b h \cdot h}{6} = \frac{R \omega \cdot h}{6} \quad \text{luego } T p = \frac{R \omega h}{6}$$

de esta última igualdad se deduce,

$$\frac{T}{R \omega} = \frac{h}{6 p} \quad \frac{T}{\omega} = \frac{h}{6 p} \cdot R$$

teniendo en cuenta que $R_1 = \frac{T}{\omega}$ resulta $\frac{R_1}{R} = \frac{h}{6p}$, pero siendo muy grande $6p$ al considerar el otro extremo del prisma la relación $\frac{R_1}{R}$ es muy pequeña y por consiguiente R_1 también pequeño con relación á R y podremos prescindir del primero.

79. **Cálculo gráfico.**— Distinguiremos las tres cuestiones que hemos resuelto en el cálculo analítico.

1.º *Reacciones en los apoyos.*—Sea el prisma $H S$ (fig 23.) sometido á la acción de las fuerzas 1, 2, 3, 4 y 5 normales á su dirección; tomemos la recta $D C$ también perpendicular al eje del prisma y sobre ella sucesivamente cada una de las fuerzas indicadas, y unimos el polo o con cada uno de los puntos así determinados tendremos o_1, o_2, o_3 , los radios polares del polígono auxiliar; partiendo de un punto cualquiera a de la perpendicular $H A'$ y trazando paralelas á los radios polares tendremos el polígono funicular abierto $a h \dots b$ que cerraremos con la recta $a b$, trazando á esta última la paralela $o n'$ tendremos dividida la suma de fuerzas $D C$ en dos partés $D n'$ y $n' C$ que representan respectivamente las reacciones en los apoyos H y S .

2.º *Esfuerzos de cizallamiento.*—En la sección del apoyo H evidentemente su valor es 7_1 , desde esta sección á la en que actúa 1 permanecerá constante é igual á 7_1 ; entre las secciones 1 y 2 tendrá por valor la diferencia entre 7_1 y 1; en la sección 2, y en todas las comprendidas entre 2 y 3 valdrá 7_1 menos la suma 1 más 2 y así sucesivamente. El valor de este esfuerzo será negativo cuando se le reste á 7_1 una suma mayor que ella.

Siendo estos esfuerzos constantes entre cada dos secciones consecutivas correspondientes á dos fuerzas podrán ser representados por la ordenada de una recta paralela al eje, que en nuestra figura es la que pasa por el punto n' ; tomando hacia la parte

superior, en la perpendicular de la izquierda una magnitud $n' D = 7$ y trazando la paralela hasta su encuentro con la ordenada correspondiente á la fuerza 1, tendremos representado el esfuerzo correspondiente á todas las secciones comprendidas entre 7 y 1 continuando del mismo modo resultará el contorno escalonado que está rayado en la figura, en el cual vemos que el esfuerzo empieza á ser negativo en la sección 3.

Momentos de flexión.—Vamos á demostrar que tomando el polo o á la unidad de distancia, el *momento de flexión* en A es la ordenada $m n$ inscrita en el polígono funicular. Este momento será la suma algébrica de los correspondientes á las fuerzas 7, 1 y 2 ó lo que es lo mismo el momento de su resultante cuya magnitud es $m' n'$ en el polígono de fuerzas; conocida la magnitud de la resultante nos falta su punto de aplicación para conocer el momento, el cual determinaremos trazando por los puntos a y f paralelas á los radios polares primero y último del polígono de fuerzas, que como ya están trazados en el polígono funicular los prolongaremos hasta que se corten; el polígono de fuerzas teniendo en cuenta que 7 es de signo contrario á las demás, está construido en la siguiente forma; $n', D, 1, 2, m'$ siendo $o n'$ y $o m'$ los radios polares primero y último, resulta aplicando la regla que F es el punto de aplicación buscado. El momento resultante será $m' n' \times FB$ y teniendo en cuenta la semejanza de los triángulos $F m n$ y $o m' n'$ así como la hipótesis $o B'' = 1$ resulta

$$\frac{FB}{m n} = \frac{o B''}{m' n'} \quad FB \times m' n' = m n \times o B'' \quad M = m n.$$

Sección peligrosa.—Corresponderá al máximo de ordenada que es la sección en que actúa la fuerza 3. La figura nos demuestra que, á este máximo de M corresponde el mínimo de T y recíprocamente al mínimo de M que es cero en las secciones de apoyo corresponde el máximo 7 de T .

El momento de la reacción γ con respecto á una sección T es la ordenada tp comprendida por la línea de cierre ab y la prolongación del primer lado ah del polígono funicular.

En efecto los triángulos semejantes atp y Don' dan la proporción

$$\frac{tp}{HT} = \frac{Dn'}{OB''}$$

de donde $tp = HT \times Dn' = HT \cdot \gamma = M^{\text{to}} \gamma$.

El momento de la fuerza 1 con respecto á la misma sección T será el segmento sp de ordenada comprendida por las prolongaciones de los lados del polígono funicular concurrentes en el vértice h situado en la ordenada de 1 . Lo demostraremos comparando los triángulos semejantes hsp y Dor de cuya comparación se obtiene

$$\frac{ps}{hh'} = \frac{Dr}{OB''} \quad ps = Dr \times hh' = hh' \times 1 = M^{\text{to}} \text{ de } 1.$$

Podemos decir en general; el momento de una fuerza con relación á una sección cualquiera T , está representado por la parte de ordenada trazada por T que interceptan las prolongaciones de los lados del polígono funicular que se cortan en un punto de dicha fuerza.

Ahora bien, el momento de flexión en T es igual al momento de la reacción γ menos la suma de momentos de las fuerzas $1, 2,$ y 3 , es decir, según lo que antecede,

$$M = tp - (ps + s\zeta + \zeta d) = td.$$

Cuando M sea positivo el sustraendo será menor que el minuendo; t el origen, el punto d queda debajo de la línea final ab y lo mismo sucede á la ordenada td que representa dicho momento. Por el contrario si M es negativo, se verificará

$$ps + s\zeta + \zeta d > tp$$

y entonces tanto el punto d como la ordenada $l d$ está por encima de $a b$.

80 Sólido apoyado por sus extremos y sometido a una carga uniformemente repartida —Sea p la carga por unidad de longitud, si l es la del sólido su carga total será $p l$. Resolveremos las cuestiones principales lo mismo que en el caso anterior.

1.ª Reacciones en los apoyos.—Estando la carga uniformemente repartida facilmente se comprende que siendo $p l$ la carga total, las reacciones en los apoyos tendrán por valor $\frac{1}{2} p l$ y su dirección será contraria á la de dicha carga.

2.ª Esfuerzos de cizallamiento.—Siguiendo la marcha de siempre, para determinar el esfuerzo correspondiente á la sección C (fig. 24) trasladaremos á ella paralelamente todas las fuerzas que actúan á su izquierda; estas fuerzas son: la reacción $P_0 = \frac{1}{2} p l$ y la carga que actúa sobre el trozo AC cuyo valor será $p x$; como estas fuerzas son de signo contrario el esfuerzo de cizallamiento tendrá por expresión

$$T = P_0 - p \cdot x = p \cdot \frac{l}{2} - p x$$

3.ª Momento de flexión.—En el mismo trozo AC, dicho momento será la suma correspondiente á las fuerzas P_0 y $p \cdot x$; el brazo de palanca de la primera es x , el de la segunda será $\frac{x}{2}$ puesto que estará aplicada al centro de gravedad del prisma AC por lo tanto

$$M = P_0 x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = p \cdot \frac{l}{2} \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2} p (l x - x^2)$$

81. Consecuencias: 1.ª El máximo de T corresponde á $x = 0$ es decir, que dicho máximo corresponde á las secciones de apoyo;

como para este valor de x se anula también el momento de flexión, se obtiene, según fórmulas anteriores

$$\rho = \frac{E \cdot Y}{M} = \infty$$

la que nos dice que el eje del prisma permanece recto en los apoyos o lo que es igual, no se deforma.

2.^a El valor máximo de M corresponderá al de x que anule su primera derivada siempre que la segunda, como fácilmente se deduce sea negativa; la ecuación condicional que así se obtiene será

$$p \frac{l}{2} - p \cdot x = 0 \quad \frac{p \cdot l}{2} = p \cdot x \quad x = \frac{l}{2}$$

resulta por lo tanto que la sección peligrosa corta al eje en su punto medio.

Para el valor $x = \frac{l}{2}$, $T = 0$ de donde se deduce que el máximo valor de M corresponde al mínimo de T .

3.^a Los momentos de flexión siguen la misma ley que las ordenadas de una parábola cuyo eje de abscisas coincide con la fibra media antes de encorvarse, siendo el origen el apoyo de la izquierda, y de este modo cada ordenada será el momento de la sección correspondiente á su abscisa. En efecto representando el momento por y tendremos

$$y = \frac{1}{2} p \cdot l \cdot x - \frac{1}{2} p \cdot x^2$$

ecuación que satisface la condición $B^2 - 4AC = 0$.

Esta parábola pasa por los apoyos puesto que para $x = 0$; lo mismo que para $x = l$, se anula el valor de y . La ordenada en el vértice, corresponderá á $x = \frac{l}{2}$ siendo su valor ó momento máximo de flexión

$$y = \frac{1}{2} p \cdot l \cdot x - \frac{1}{2} p \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot p \cdot l \cdot \frac{l}{2} - \frac{1}{2} p \cdot \frac{l^2}{4}$$

$$= \frac{p l^2}{4} - \frac{p l^2}{8} = \frac{1}{8} p l^2 \cdot]$$

4.^a Si sobre l como diámetro se describe una semicircunferencia, los momentos de flexión serán proporcionales á los cuadrados de las ordenadas de esta, pues se verifica

$$\frac{M}{y'^2} = \frac{1/2 p \cdot x (l - x)}{x (l - x)} \quad (*)$$

5.^a Dando valores á x entre cero y l se puede conocer la marcha de los correspondientes á M y T .

82. **Condiciones de resistencia de un sólido.**—De los tres problemas cuya resolución hemos indicado varias veces con anterioridad, solo vamos á fijarnos en el tercero. Representemos por

ω sección normal al eje.

Y momento de inercia de la sección.

R . . . menor valor de las cargas por unidad superficial, (extensión ó compresión).

R_1 resistencia al cizallamiento por unidad,

De las ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{R \cdot Y}{y} \\ T = R_1 \cdot \omega \end{array} \right\} \text{ se deduce: } \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{M \cdot y}{Y} \\ R_1 = \frac{T}{\omega} \end{array} \right.$$

estos valores se comparan con los de las tablas y han de ser iguales ó menores para que el sólido resista.

83. **Cálculo gráfico** (fig. 25).—Suponiendo dividido el prisma

(*) La ordenada y' es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre el diámetro.

en partes iguales á la unidad, sobre cada una de éstas actuará una carga p aplicada á su punto medio que es el de gravedad. Tomando la recta $K H$ perpendicular á $A B$ construiremos sobre ella el polígono de fuerzas tomando magnitudes sucesivas iguales á p . Construyendo á partir de A el polígono funicular $A a b c d e B$ resulta á su vez construído, según digimos en el problema anterior, el polígono de momentos. Aumentando el número de divisiones, (dejando de ser iguales á la unidad) y disminuyendo por tanto las fuerzas resultantes parciales, aumentará el número de las del polígono, el cual se convertirá en el límite, en una curva parabólica como demostraremos á continuación, cuya ordenada máxima es

$$h c = \frac{1}{2} h l,$$

siendo A y B puntos de tangencia con las rectas $A l$ y $B l$ paralelas á los radios polares extremos $o K$ y $o H$.

No cabe duda que la representación geométrica (contorno escalonado de la figura) de los esfuerzos de cizallamiento se reduce á la recta $R S$ cuando sean infinitamente pequeños los lados del polígono de fuerzas; esto está de acuerdo con lo dicho en la teoría pues de este modo el valor de T que corresponde á la sección distante x del apoyo de la izquierda tendrá por expresión,

$$T = (D N - x) \frac{R D}{D N} = \left(\frac{1}{2} l - x \right) \frac{\frac{1}{2} l p}{\frac{1}{2} l} =$$

$$\left(\frac{1}{2} l - x \right) p = \frac{p l}{2} - p x$$

según vimos en el estudio analítico.

Parece natural que demostrásemos también del mismo modo la forma parabólica de la curva á que se reduce el polígono de fuerzas; pero para ello tendríamos que acudir á lo diferencial y es más sencillo utilizar otra construcción que nos permita demostrarlo antes de llegar al límite.

Sea $A B$ (fig. 26) la suma de las cargas repartidas, es decir $p l$ trazaremos el triángulo funicular $A' O' B'$ como si todas ellas estuviesen sustituidas por su resultante $P = p l$. Por los puntos medios de los intervalos $H N$ y $N Q$ trazemos las rectas $L P'$ y $S P'_1$, uniendo los puntos m y n de intersección con los lados $A' o'$ y $o' B'$ obtendremos un nuevo polígono funicular según vamos á demostrar. Las rectas $L P'$ y $S P'_1$ pueden considerarse como ordenadas correspondientes á dos fuerzas

$$P' = P'_1 = \frac{1}{2} p l$$

cuya resultante sea la carga total $p l = P$.

El polígono de las fuerzas para P' y P'_1 será el $A C B$ en el cual

$$A C = C B = \frac{1}{2} p l;$$

si construimos el nuevo polígono funicular partiendo de A' , terminaremos en el mismo vértice B' pues de otro modo cambiaría la dirección de $A' B'$ y por lo tanto su paralela $o C$, es decir las reacciones en los apoyos determinados por el punto C variarían, lo cual es imposible no habiendo cambiado la resultante de las cargas. De aquí se deduce que el nuevo lado $m n$ ha de cortar á $S P'_1$ en un punto que esté situado sobre $o' B'$ para que al trazar la paralela al radio $o B$ se confunda en dirección con $o' B'$. Es de advertir que el nuevo polígono funicular se ha obtenido uniendo los puntos medios m y n de los lados del anterior.

Si sustituimos la fuerza P' por las dos b y ζ iguales entre sí y á la mitad de P' que obran en los puntos medios de los intervalos $L H$ y $L N$ demostramos como en el caso anterior que uniendo el punto b y ζ y efectuando la misma operación á la derecha de $N o'$ se obtiene un nuevo polígono funicular. En efecto; en las as secciones comprendidas por el intervalo $u \zeta$ no puede haber

variado el momento de flexión, por lo tanto si dividimos la recta AC en dos partes iguales por el punto d , al trazar por b la paralela $b\zeta$ al radio od cortará á la nueva ordenada, en un punto ζ situado en el lado mn del polígono anterior. El nuevo polígono será en su consecuencia $A, b, \zeta, \zeta', b', B'$ que como vemos se ha obtenido uniendo el punto b' medio de nB' con ζ' y el b medio de $A'm$ con ζ .

Hay que observar que el lado $\zeta\zeta'$ se irá estrechando en las operaciones sucesivas pero siempre formará parte del polígono y en el límite se reducirá á su punto medio u el cual forma parte de la curva que fácilmente demostraríamos, admite la tangente mn paralela á $A'B'$; del mismo modo demostraríamos que los puntos t y t' son también pertenecientes a la curva. Por el modo de generación indicado comprendemos de acuerdo con las construcciones de Geometría analítica que el límite del polígono funicular es una parábola.

84. **Sólido empotrado.**— Cuando una pieza está apoyada, las secciones extremas giran por efecto de la flexión, es decir la capa de fibras neutras se deforma en toda su longitud. Si la pieza se coloca en un muro, de tal modo que dicha deformación no pueda existir, se dice que está *empotrada* en él; de esta definición se deduce que en las piezas empotradas por uno ó sus dos extremos hay un trozo mayor ó menor de fibra neutra en cada uno de ellos, que continúa invariable después de la encorvadura. En esta invariabilidad consiste el *empotramiento perfecto*; toma el nombre de *imperfecto*, cuando el sólido puede separarse en la parte empotrada de su posición primitiva, aunque no tanto como cuando está solamente apoyado. (Fig. 27).

Entre el empotramiento y el simple apoyo hay una diferencia notable; un sólido apoyado sólo por uno de sus extremos no puede

quedar por sí sólo en equilibrio si se le coloca horizontalmente lo cual se verifica cuando está empotrado.

Se llama *sección de empotramiento* la que separa la parte empotrada de la libre; también se suele llamar sección de encastre, así como al sólido empotrado se le suele llamar *sólido encastrado*.

85. El empotramiento equivale á una fuerza y un par.— En efecto, del macizo de la parte superior podemos prescindir, introduciendo fuerzas tales como las ζ que impidan todo movimiento á la parte del prisma que debe ser empotrada. La resultante Z (fig. 28) es equivalente á una fuerza $\zeta' = \zeta$ y á un par (ζ, ζ') con lo cual está demostrada la proposición. Al par (ζ, ζ') se dá el nombre de *par de empotramiento*.

86. Sólido empotrado sometido á varias cargas concentradas.—Lo mismo que en los problemas anteriores haremos dos estudios distintos, el analítico y el gráfico.

Estudio analítico.—Para este estudio establecemos el equilibrio entre las fuerzas directamente aplicadas y las reacciones que cada trozo desarrolla sobre el contíguo, de modo que para conocer los esfuerzos á que está sometida la sección (fig. 29) $m n$ consideraremos el trozo $m n A$ y determinaremos las cantidades siguientes.

1.^a *Esfuerzo de cizallamiento.*—Trasladando á $m n$ las fuerzas P_1 y P_2 tendremos $T = P_1 + P_2$.

2.^a *Momento de flexión.*—Los brazos de palanca de las fuerzas P_1 y P_2 son respectivamente ~~los brazos de palanca~~ ^{$l - x$ y x} de modo, que teniendo en cuenta que los pares $P_1 P_1$ y $P_2 P_2$ flexan el sólido haciéndolo convexo hacia la región superior y por lo tanto según los convenios admitidos, sus momentos son negativos, el momento de flexión tendrá por valor,

$$M = - P_1 (l - x) - P_2 (x - x).$$

Conocidos los valores de T y M en cualquier sección, podemos

pasar á resolver los problemas que en todos los casos hemos resuelto teniendo en cuenta las consecuencias siguientes.

1.^a T es la derivada de M con respecto á x . En efecto:

$$\frac{dM}{dx} = (-P_1 \times -1) + (-P_2 \times -1) = P_1 + P_2 = T.$$

2.^o M tendrá un valor mínimo cuando x sea máximo, y verificándose esta condición para $x = l$ resulta, que M es nulo en el extremo libre.

A primera vista parece que M no se reduce á cero cuando $x = l$ porque aunque el primer término se anula, el segundo se hace positivo, pero debemos tener en cuenta, que dicho segundo término desaparece por sí mismo cuando la sección está en el extremo libre.

3.^a El valor máximo de M corresponde á $x = 0$, es decir que la sección peligrosa de un sólido encastrado es la de encastre.

4.^a Los esfuerzos de cizallamiento toman un valor máximo, cuando entran todas las fuerzas directamente aplicadas por tener la misma dirección; esto ocurrirá en todas las secciones comprendidas entre la de encastre y la que contiene á la primera carga.

87. **Determinación de la flecha.**—Cuando un prisma está sometido á flexión se encorva su fibra neutra sin cambiar de longitud; cuando este prisma está encastrado, dicha deformación empezará en la sección de encastre, de modo que la posición recta primitiva on será tangente á la posición final curva on_1 (fig. 30): la ordenada $nn_1 = f$ del punto extremo que corresponderá á la abscisa l recibe el nombre de *flecha*.

Para encontrarla, empezaremos por determinar la ecuación de la fibra media deformada, valiéndonos de la relación ya establecida

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{E Y}$$

supondremos que solo actúa una fuerza en el extremo del prisma, para que de este modo el momento de flexión sea solo función de x y de parámetro constante en todas las secciones.

$$M = -P_1 (l - x) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{1}{EY} P_1 (l - x); \int \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \\ &= -\frac{l P_1}{EY} \int dx + \frac{P_1}{EY} \int x dx + C \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{l P_1}{EY} x + \frac{P_1}{EY} \cdot \frac{x^2}{2} + C \end{aligned} \right.$$

pero como para $x = 0$ se anula $\frac{dy}{dx}$ ha de anularse el segundo miembro lo cual exige $C = 0$

$$\int \frac{dy}{dx} dx = -\frac{l P_1}{EY} \int x dx + \frac{P_1}{EY} \int \frac{x^2}{2} dx + C' =$$

$$-\frac{l P_1}{EY} \frac{x^2}{2} + \frac{P_1}{EY} \cdot \frac{x^3}{6} + C'.$$

para $x = 0$ se anula y , y por lo tanto C' para que la ecuación quede satisfecha por $x = 0$ ó $y = 0$.

Para hallar el valor de la flecha, sustituiremos en lugar de x l , lo que nos dará

$$y = f = \frac{P_1}{EY} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l x^2}{2} \right) = \frac{P_1}{EY} \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right) =$$

$$-\frac{P_1}{EY} \cdot \frac{2 l^3}{6} = -\frac{1}{3} \frac{P_1 l^3}{EY}.$$

88. **Calculo grafico.**—Consideremos la pieza ST (fig. 31) empujada en T; formemos en ap el polígono de las fuerzas tomando sucesivamente á partir de a magnitudes iguales á 1 2 3 4; tracemos la recta VD paralela á oa hasta que encuentre en D á la dirección

de la primera fuerza por D la paralela ai segundo radio polar hasta que encuentre en R á la dirección 2 y así sucesivamente; si prolongasemos las rectas P F y V D se cerrará el polígono funicular, y el nuevo vértice sería el punto de aplicación de la resultante, cuyo valor absoluto $a p$ nos es conocido; pero como no necesitamos para nada dicha resultante, vamos á demostrar que prolongando V D y P F hasta que corten á la sección de encastre la parte rayada representa el polígono de momentos, es decir, que el momento de flexión de la sección N está determinado por B C, en efecto; dicho momento es igual al producto de la resultante $a b$ de las fuerzas 1 y 2 por la distancia H de su punto de aplicación A al plano de la sección, de modo que tendremos

$$M = R \cdot H = a b \cdot H .$$

Los triángulos semejantes

$$\left\{ \begin{array}{l} A B C \\ a o b \end{array} \right\} \text{ dán } \frac{B C}{a b} = \frac{H}{h} \quad B C = \frac{a b \times H}{h}$$

luego tomando h igual á la unidad queda demostrada la proposición

$$B C = a b \times H = M .$$

La figura nos hace ver que el máximo valor del momento corresponde á la sección de encastre, y el mínimo que es nulo en la sección libre.

El polígono de los esfuerzos cortantes $m n o s t \dots z r$ se deduce con facilidad del de las fuerzas y del procedimiento indicado en otros ejemplos. En este polígono se observa que el máximo y mínimo esfuerzo de cizallamiento corresponden respectivamente á las secciones de encastre y libre lo mismo que los momentos de flexión.

Combinando ambos resultados se deduce, que cuando un sólido empotrado está sometido á fuerzas normales á su eje la sección de encastre es peligrosa por todos conceptos.

89. **Sólido empotrado con carga uniformemente repartida.**

—Sea p la carga por unidad superficial; para estudiar los esfuerzos correspondientes á la sección $m n$, consideremos las fuerzas que actúan en el trozo $A m n$ (fig. 32) estas fuerzas las podemos sustituir por su resultante cuyo valor es $p(l-x)$ y está aplicada al centro de gravedad ó punto medio del eje de este trozo; con estos datos pasemos á obtener:

1.^o *El esfuerzo de cizallamiento.* Su valor será $T = p(l-x)$

2.^o *El momento de flexión.* Siendo $\frac{l-x}{2}$ el brazo de palanca de la fuerza $p(l-x)$ el momento de flexión valdrá teniendo en cuenta que encorva al prisma presentando hacia arriba su convexidad

$$M = -p(l-x) \frac{l-x}{2} = -p \frac{(l-x)^2}{2}$$

Siendo perfectamente conocidos los valores de M y T utilizaremos las fórmulas que nos son conocidas á fin de obtener las dimensiones que ha de obtener el sólido para sufrir la carga sin deformarse.

Observaciones. 1.^a Derivando el valor de M se obtiene

$$\frac{dM}{dx} = -p \cdot 2 \frac{l-x}{2} \times -1 = p(l-x) = T.$$

2.^a Se vé sin necesidad de cálculo alguno, que el valor mínimo de M corresponde á $x=l$ es decir que en el extremo libre es nulo el momento de flexión, siendo máximo para $x=0$, es decir en la sección de encastre dicho máximo es

$$M = -\frac{pl^2}{2}$$

3.^a Del mismo modo el esfuerzo de cizallamiento tiene su máximo para $x=0$ ó sea en la sección de encastre siendo este

máximo $T = pl$ y su mínimo que es cero para $x = l$ ó sea en el extremo libre.

4.^a La curva que expresa la ley de variación de los momentos de flexión será una parábola $y = -p \frac{(l-x)^2}{2}$ cuyo eje es perpendicular al del sólido estando su vértice proyectado en el punto medio de este y la que expresa la ley de variación de los esfuerzos de cizallamiento una línea recta $y = p(l-x)$.

90. **Cálculo gráfico.**—Siguiendo el mismo procedimiento geométrico que en el sólido apoyado por sus dos extremos demostraremos que el polígono funicular se reduce á la parábola $A b B$ (fig. 33) tangente en A y B á los lados extremos del polígono funicular ó sea á las paralelas $A c$ y $B c$ á los radios polares extremos. El polígono funicular completo será $A b B c$ correspondiendo c al punto de aplicación de la resultante, (comprobación: la perpendicular trazada por c al eje pasa por su punto medio que es el centro de gravedad) pero si queremos obtener el polígono de momentos prolongaremos $A c$ hasta que encuentre en d á la sección de encastre.

Observando dicho polígono de momentos deducimos las mismas consecuencias obtenidas analíticamente respecto á máximos y mínimos y como comprobación vamos á demostrar que

$$BD = \frac{1}{2} pl^2.$$

En efecto del triángulo $A B D$ se deduce

$$BD = AB \operatorname{tg.} DAB \quad \text{pero} \quad DAB = m o o' \quad \text{y}$$

$$\operatorname{tg.} m o o' = \frac{m o'}{o o'} = \frac{\frac{1}{2} pl}{l} = \frac{1}{2} pl$$

sustituyendo en $B D$ tendremos

$$BD = AB \frac{1}{2} pl = \frac{1}{2} pl^2$$

El polígono de esfuerzos cortantes se reduce al triángulo *def* y como comprobación demosetremos que sus ordenadas varían del mismo modo que *f*.

En efecto para una sección distante *x* de la de encastre tendremos,

$$f = (l - x) \frac{fe}{de} = (l - x) \frac{pl}{l} = p(l - x)$$

De este modo justificamos la conformidad entre el cálculo gráfico y el analítico.

91. **Sólido empotrado por sus dos extremos y con carga uniformemente repartida.**—Sea *p* la carga por unidad de longitud si *l* es la del sólido, la carga total será *pl* y las reacciones en las secciones de empotramiento tendrán por valor $\frac{1}{2} pl$ para determinar los esfuerzos que obran en la sección DD consideremos el equilibrio del trozo AD sobre el cual actúan las fuerzas siguientes: reacción en la sección AA de empotramiento $\frac{1}{2} pl$ brazo de palanca *x*, carga que soporta AD aplicada á su punto medio *p x*, idem $\frac{1}{2} x$; par de empotramiento que nos es desconocido.

Siguiendo el método de siempre, resolveremos las cuestiones siguientes:

1.^a *Determinar el momento de flexión.*—Si representamos por X el momento del par desconocido podremos establecer

$$M = \frac{1}{2} plx - \frac{1}{2} px^2 - X$$

es necesario determinar el valor de X para lo cual acudiremos á la ecuación de la fibra media deformada; para ello sabemos que

$$M = \frac{E Y}{\rho} \left[1 + \left(\frac{d y}{d x} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\frac{d^2 y}{d x^2}} \left. \begin{array}{l} \text{ó bien} \\ \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E Y} \frac{d^2 y}{d x^2} = \\ \frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{d x^2} \end{array} \right\}$$

$$\frac{M}{E Y} = \frac{1}{E Y} M = \frac{1}{E Y} \left[\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - X. \right] (1)$$

Si la ecuación anterior se integra dos veces obtendremos la ecuación finita de la fibra media deformada, en la cual no solo aparecerá el parámetro desconocido X, sino que introduciremos otras dos por motivo de los constantes de ambas integraciones pero las tres se harán desaparecer por el conocimiento de tres pares de valores simultáneos de x é y los cuales son consecuencia de una propiedad que según la definición de empotramiento, ha de cumplir la fibra media deformada.

Dicha curva $o a q b H$ (fig. 35) será tangente al eje $o H$ ó eje de las X en las secciones de empotramiento.

De esta propiedad se deduce que para $x = 0$ $y = 0$ para $x = l$ $y = 0$ y para

$$x = 0, \frac{d y}{d x} = 0$$

porque al confundirse la tangente en el origen con el eje de las X, su coeficiente angular ha de anularse.

Pasemos ya á la integración de la ecuación (1)

$$\int \frac{d^2 y}{d x^2} d x = \frac{1}{E Y} \left[\int \frac{1}{2} p l x d x - \int \frac{1}{2} p x^2 d x - \int X d x \right] = \frac{1}{E Y} \left[\frac{1}{4} p l x^2 - \frac{1}{6} p x^3 - X x + C \right] =$$

$$= \frac{d y}{d x} \quad \text{integrando de nuevo resulta.}$$

$$\int \frac{d y}{d x} d x = \frac{1}{E Y} \left[\frac{1}{4} \int p l x^2 d x - \frac{1}{6} \int p x^3 d x - \right. \\ \left. - \int \times x d x + \int C d x \right] = y = \frac{1}{E Y} \left[\frac{1}{12} p l x^3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{24} p x^4 - \frac{1}{2} \times x^2 + C x + C' \right]$$

$$x = 0, y = 0, 0 = \frac{1}{E Y} \cdot C'$$

$$x = 0, \frac{d y}{d x} = 0, 0 = \frac{1}{E Y} \cdot C$$

$$x = l, y = 0, 0 = \frac{1}{E Y} \cdot \left[\frac{1}{12} p l^4 - \frac{1}{24} p l^4 - \frac{1}{2} \times l^2 + C l + C' \right]$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{E Y} \neq 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} C' = 0. \\ C = 0. \\ \frac{1}{12} p l^4 - \frac{1}{24} p l^4 - \frac{1}{2} \times l^2 = 0; \frac{1}{24} p l^2 = \\ = \frac{1}{2} \times; \times = \frac{1}{12} p l^2. \end{array} \right. \end{array} \right\}$$

Sustituyendo el valor que acabamos de encontrar en la fórmula (1) resulta:

$$M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{12} p l^2 \quad (2)$$

92. **Variaciones de M.**—Consideremos la variación que sufre M al pasar de una sección á otra, es decir al recibir x distintos valores. Para ello observemos en primer lugar que si tomamos el

eje del sólido por eje de abscisas y su perpendicular en uno de los encastres, el de la izquierda por ejemplo por eje de ordenadas, si damos á éstos los valores de M correspondientes á las mismas abscisas obtendremos como ley de variación una parábola de eje vertical y parametro $\frac{1}{2} p$. Habiendo imposibilidad de construir esta curva exactamente, nos limitaremos á marcar sus puntos principales; empezaremos por el valor máximo de M que corresponderá al vértice de la parábola,

$$\text{ecuaciones condicionales} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dx} = 0 \left(\frac{1}{2} pl - px = 0 \right) \\ \frac{d^2M}{dx^2} < 0 \left(-\frac{1}{2} p < 0 \right) \end{array} \right\} \text{ambas}$$

quedan satisfechas para $x = \frac{1}{2} l$.

Luego para este valor de x , M se hace máximo y el máximo será:

$$M_{max} = \frac{1}{2} pl - \frac{1}{2} p \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} p \frac{l^2}{4} - \frac{1}{12} pl^2 = \frac{1}{4} pl^2 - \frac{1}{8} pl^2 - \frac{1}{12} pl^2 = \frac{1}{8} pl^2 - \frac{1}{12} pl^2 = \frac{1}{24} pl^2.$$

Podemos formar el siguiente cuadro:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Para } x = 0 \dots y = -\frac{1}{12} pl^2 \text{ (dimensión } o d) \\ \text{íd. } x = l \dots y = -\frac{1}{12} pl^2 \text{ (dimensión } H r) \\ \text{íd. } x = \frac{1}{2} l \dots y = +\frac{1}{24} pl^2 \text{ (dimensión } A m) \end{array} \right\} \text{de este modo}$$

conocemos tres puntos de la curva.

Entre o y H habrá dos secciones para las que $M = 0$ que corresponden á los puntos de intersección a y b de la parábola de los momentos de flexión con el eje oH : Sus abscisas nos faltan solo para conocerlos y las determinaremos por la siguiente ecuación que á continuación se resuelve;

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{12} p l^2 &= 0 \quad ; \quad x - x^2 - \frac{1}{6} l^2 = 0 \\ x^2 - l x + \frac{1}{6} l^2 &= 0 \quad x = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} - \frac{1}{6} l^2} \\ &= \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{12} l^2} = \frac{l}{2} \pm l \sqrt{\frac{1}{12}} = l \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ &= l \left(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2 \times 1,7} \right) = \begin{cases} x' = l \left(0,5 + \frac{1}{2 \times 1,7} \right) = l \left(0,5 + \frac{1}{3,4} \right) \\ x'' = l \left(0,5 - \frac{1}{2 \times 1,7} \right) = l \left(0,5 - \frac{1}{3,4} \right) \end{cases} \\ &= l \left(0,50 + 0,290 \right) = 0,790 l \left. \right\} \\ &= l \left(0,50 - 0,290 \right) = 0,210 l \left. \right\} \end{aligned}$$

luego tomando $oa = 0,210 l$ y $ob = 0,790 l$, ó lo que es lo mismo $Hb = 0,210 l$, tendremos los dos puntos en que la curva corta al eje.

Si el prisma hubiese estado solamente apoyado, la parábola de momentos hubiese sido $o n H$ ó sea la $d m r$ trasladada paralelamente á si misma la cantidad

$$O d = \frac{1}{12} p l^2$$

En efecto, llamando M' el momento de flexión correspondiente á la sección x en un sólido simplemente apoyado, tendremos

$$M' = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$$

de donde se deduce de acuerdo con la ecuación (2)

$$M' = M + \frac{1}{2} p x^2$$

2.^a *Determinar el esfuerzo de cizallamiento.*—Hemos indicado que dicho esfuerzo T viene expresado de la manera siguiente:

$$T = \frac{dM}{dx} = \frac{1}{2} p l - p x$$

y será máximo para $x = 0$ y mínimo cuando $T = 0$ ó bien

$$\frac{1}{2} p l - p x = 0; \quad \frac{1}{2} p l = p x \quad \text{de donde } x = \frac{1}{2} l$$

Si representamos T por y la ecuación

$$y = \frac{1}{2} p l - p x$$

representa una línea recta D r, análoga á la del caso de pieza apoyada; para

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right. \quad y = T = \pm \frac{1}{2} p l$$

93. **Calcular las dimensiones de una manivela.**—(Fig. 36)

La manivela se considera como sólido empotrado por uno de sus extremos, y sometido por el otro á la acción de un esfuerzo. Si representamos por n el número de vueltas que dá la manivela en un minuto, el trabajo desarrollado que podremos medir con un dinamómetro Prony, será llamando F al esfuerzo y suponiendo que es á doble efecto

$$T^o = F \times 4 D \times n$$

siendo D , n y T^0 conocidos, podremos despejar el valor de F que será $F = \frac{T^0}{4 D n}$.

Esta operación de medir el trabajo, solo la ejecutaremos en el caso de que no se conozca el esfuerzo, y en su lugar se den las condiciones de velocidad á que ha de satisfacer el mecanismo.

Si suponemos que el esfuerzo obra normalmente á la longitud de la manivela, caso más desfavorable, y consideramos una sección á la distancia x de la de empotramiento imaginaria, suponiendo además que la manivela es prismática, el momento de flexión será

$$F (D - x) = \frac{R Y}{\gamma} \quad \text{ó} \quad R = F \frac{(D - x) \gamma}{Y}$$

si este momento lo referimos á la sección, en la cual sabemos tiene el valor máximo, siéndo esta sección la peligrosa tendremos

$$R = F \frac{D \gamma}{Y}$$

Y , es la diferencia de momentos correspondientes á las secciones planas del anillo $m m'$ y del eje o siendo ambas rectángulos, el valor de Y será

$$Y = \frac{1}{12} b d^3 - \frac{1}{12} b d'^3 = \frac{1}{12} b (d^3 - d'^3)$$

γ tendrá por valor la ordenada máxima de esta sección ó sea $\frac{1}{2} d$ de modo que sustituyendo tendremos

$$R = F D \frac{\frac{1}{2} d}{\frac{1}{12} b (d^3 - d'^3)} = F D \frac{6 d}{b (d^3 - d'^3)} \quad (1)$$

b expresa la dimensión de la manivela en sentido del eje o . En

esta fórmula conocemos el diámetro d' del árbol, de modo que contiene dos cantidades desconocidas b y d , podemos por lo tanto disponer arbitrariamente de cualquiera de ellas y obtener el correspondiente de la otra. La práctica aconseja, que la diferencia

$$d - d' = 2h$$

debe tener un valor comprendido entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$ del diámetro d' de donde resulta la ecuación

$$d - d' = \frac{m}{n} d'$$

de aquí se deduce el valor de d y sustituido en la ecuación (1) quedará en ella como incógnita solamente el grueso b de la manivela, el cual podemos determinar con facilidad, teniendo para ello en cuenta que en vez de R debe ponerse la menor carga máxima por unidad superficial correspondiente á la extensión ó á la compresión.

Para concluir la construcción, haremos extensiva á la articulación con la biela, la misma relación práctica en los diámetros \overline{d} y \overline{d}' con lo cual trazando las tangentes exteriores $m n$ y $m' n'$ á los círculos de diámetro d y \overline{d} hemos obtenido la forma de dicho órgano; el espesor es constante en todas sus partes y lo hemos determinado resolviendo la ecuación. (1)

CAPÍTULO 5.º

94. **Solidos de igual resistencia à la flexión.**—Si observamos la ecuación del momento de rotura en las distintas secciones de un sólido sometido á la flexión, y como consecuencia de ella determinamos las dimensiones en sentido normal al eje, resultarán esta:

variables; hasta ahora no hemos tenido en cuenta esta particularidad y hemos dado á todo el prisma las dimensiones de su sección peligrosa; de este modo el sólido fuera de dicha sección, presentará un exceso de resistencia que no está demás en la generalidad de los casos; pero cuando se trata de piezas metálicas cuyo aumento debido en sus dimensiones, representará mucho peso y coste; hay necesidad de determinar su forma de modo que todas ellas tengan las dimensiones absolutamente indispensables para resistir el esfuerzo y como en este caso podrá romperse indistintamente por cualquier sección, siendo igual la resistencia que todas oponen, llama al ~~xxx~~ ^{sólido} así constituido, *sólido de igual resistencia*.

Hemos dicho que cuando un sólido está sometido á la flexión, las reacciones de las distintas fibras crecen desde la capa neutra que es cero, hasta el exterior que será la máxima resistencia de la materia; de aquí se deduce, que podrá prescindirse de la parte interior, construyendo los sólidos huecos. En el caso de ser su forma exterior cilíndrica, obtendremos tubos y cuando sea prismática habrá que unir las dos partes superior é inferior por un tirante, resultando los sólidos en doble T, de los que nos ocuparemos más tarde.

95. **Sólido apoyado en los dos extremos y con carga uniformemente repartida.**—El momento de flexión tiene las expresiones siguientes:

$$M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \dots\dots\dots$$

$$M = \frac{R Y}{J} \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{1}{2} h \\ Y = \frac{1}{12} b h^3 \end{array} \right\} M = \frac{R \frac{1}{12} b h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{R b h^2}{6}$$

de las que deducimos la ecuación

$$\frac{1}{6} R b h^2 = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$$

en la cual hay dos incógnitas de modo que el problema es indeterminado pero esta indeterminación favorece nuestro propósito porque podremos construir un sólido de igual resistencia, con una de sus dimensiones conocidas de antemano.

1.^{er} Caso $b = \text{constante}$ $h = \text{variable}$ representando h por y tendremos

$$\frac{1}{6} R b y^2 = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 = \frac{1}{2} p (l x - x^2)$$

de donde
$$y^2 = \frac{6 p}{2 b R} (l x - x^2) = \frac{3 p}{R b} (l x - x^2)$$

vemos por lo tanto que la ley de variación entre y y x es la misma que existe entre la ordenada y abscisa de una elipse, (se cumple la condición $B^2 - 4 A C < 0$): puesto que para $x = 0$ y $x = l$; y es igual á cero, pasa por los apoyos; y como por ser de segundo grado en y el eje $o x$ lo es de la curva, su eje mayor será l ; el menor se obtendrá haciendo $x = \frac{1}{2} l$ con lo que resulta

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{3 p}{R b} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{3 p l^2}{R b} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \frac{3 p l^2}{R b} \quad \text{é} \quad y = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{p l^2}{R b}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 p}{R b}}. \end{aligned}$$

De este modo dando á cada sección la altura y y haciendo coincidir todas las bases con el eje medio, resultará la forma que representa en proyecciones la figura 37. Construído así el sólido no resulta simétrico; para conseguir este último, imaginemos que la paralela media de cada sección se confunde con el eje, y entónces la altura sobre dicha línea será la mitad de la anterior, de modo que su ley de variación se obtendrá sustituyendo $2 y'$ en lugar de h con lo cual resultará una elipse del mismo eje mayor l y de eje menor mitad, la forma del sólido se vé proyectada en la figura 38.

La proyección horizontal es un rectángulo porque hemos dicho que es constante la base b .

2.º *Caso*. Supongamos ahora $h = \text{constante}$ y $b = \text{variable}$; repitiendo el mismo razonamiento del caso anterior, llegaremos al cálculo y resultados siguientes:

$$R \cdot \frac{1}{6} b h^2 = \frac{P}{2} (l x - x^2) \quad (1) \quad b = z$$

$$R \frac{1}{6} z h^2 = \frac{P}{2} (l x - x^2) \quad z = \frac{3 P}{h^2 R} (l x - x^2)$$

$$B^2 - 4 A C = 0 \quad \text{parábola} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} z = 0$$

pasa por los apoyos; los valores de Z no son otra cosa que las ordenadas con respecto al eje medio del contorno de la proyección horizontal. (Fig. 39)

Para obtener un sólido simétrico, haremos $b = 2 z'$ y la nueva parábola pasará también por los apoyos siendo sus ordenadas la mitad de las de la parábola anterior (fig. 40). La proyección vertical es un rectángulo por ser $h = \text{constante}$ para todas las secciones.

3.º *Caso*. Cuando no encontremos motivo alguno para dar preferencia á que sea constante h ó b supondremos lo es su producto $b h = \omega$ y sustituyendo este valor en la ecuación (1) despejaremos h cuya ley de variación sería una parábola; de este modo para cada valor de x conocemos h y ω constante de donde $b = \frac{\omega}{h}$, hay que observar que en los apoyos $h = 0$ y por lo tanto $b = \infty$ resultando el sólido deformado: por este motivo aunque nos apartamos de las condiciones teóricas de los sólidos de igual resistencia, se forman estos teniendo en vez de eje geométrico un núcleo de mayor ó menor espesor, según los casos.

en la cual hay dos incógnitas de modo que el problema es indeterminado pero esta indeterminación favorece nuestro propósito porque podremos construir un sólido de igual resistencia, con una de sus dimensiones conocidas de antemano.

1.^{er} Caso $b = \text{constante}$ $h = \text{variable}$ representando h por y tendremos

$$\frac{1}{6} R b y^2 = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 = \frac{1}{2} p (l x - x^2)$$

$$\text{de donde} \quad y^2 = \frac{6 p}{2 b R} (l x - x^2) = \frac{3 p}{R b} (l x - x^2)$$

vemos por lo tanto que la ley de variación entre y y x es la misma que existe entre la ordenada y abscisa de una elipse, (se cumple la condición $B^2 - 4 A C < 0$): puesto que para $x = 0$ y $x = l$; y es igual á cero, pasa por los apoyos; y como por ser de segundo grado en y el eje $o x$ lo es de la curva, su eje mayor será l ; el menor

se obtendrá haciendo $x = \frac{1}{2} l$ con lo que resulta

$$y^2 = \frac{3 p}{R b} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right) = \frac{3 p l^2}{R b} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \frac{3 p l^2}{R b} \quad \text{é} \quad y = \sqrt{\frac{3}{4} \frac{p l^2}{R b}} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{3 p}{R b}}$$

De este modo dando á cada sección la altura y y haciendo coincidir todas las bases con el eje medio, resultará la forma que representa en proyecciones la figura 37. Construído así el sólido no resulta simétrico; para conseguir este último, imaginemos que la paralela media de cada sección se confunde con el eje, y entónces la altura sobre dicha línea será la mitad de la anterior, de modo que su ley de variación se obtendrá sustituyendo $2 y'$ en lugar de h con lo cual resultará una elipse del mismo eje mayor l y de eje menor mitad, la forma del sólido se vé proyectada en la figura 38.

La proyección horizontal es un rectángulo porque hemos dicho que es constante la base b .

2.^o Caso. Supongamos ahora $h = \text{constante}$ y $b = \text{variable}$; repitiendo el mismo razonamiento del caso anterior, llegaremos al cálculo y resultados siguientes:

$$R \cdot \frac{1}{6} b h^2 = \frac{P}{2} (l x - x^2) \quad (1) \quad b = \zeta$$

$$R \frac{1}{6} \zeta h^2 = \frac{P}{2} (l x - x^2) \quad \zeta = \frac{3 p}{h^2 R} (l x - x^2)$$

$$B^2 - 4 A C = 0 \quad \text{parábola} \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x = l \end{array} \right\} \zeta = 0$$

pasa por los apoyos; los valores de Z no son otra cosa que las ordenadas con respecto al eje medio del contorno de la proyección horizontal. (Fig. 39)

Para obtener un sólido simétrico, haremos $b = 2 \zeta'$ y la nueva parábola pasará también por los apoyos siendo sus ordenadas la mitad de las de la parábola anterior (fig. 40). La proyección vertical es un rectángulo por ser $h = \text{constante}$ para todas las secciones.

3.^{er} Caso. Cuando no encontremos motivo alguno para dar preferencia á que sea constante h ó b subpondremos lo es su producto $b h =: \omega$ y sustituyendo este valor en la ecuación (1) despejaremos h cuya ley de variación sería una parábola; de este modo para cada valor de x conocemos h y ω constante de donde $b = \frac{\omega}{h}$, hay que observar que en los apoyos $h = 0$ y por lo tanto $b = \infty$ resultando el sólido deformado: por este motivo aunque nos apartamos de las condiciones teóricas de los sólidos de igual resistencia, se forman estos teniendo en vez de eje geométrico un núcleo de mayor ó menor espesor, según los casos.

96. **Valor de la flecha.**—Ya sabemos que se dá este nombre á la máxima ordenada de la línea media deformada, para obtener la ecuación de esta línea nos valdremos del cálculo siguiente:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{M}{E \cdot Y} \\ M &= \frac{R Y}{y} \end{aligned} \right\} \rho = \frac{R Y}{E \cdot Y y} = \frac{R Y}{E Y y} = \frac{R}{E y} \quad y = \frac{1}{2} h,$$

$$\text{por lo tanto } \rho = \frac{R}{E \cdot \frac{1}{2} h} = \frac{2 R}{E h}$$

$$h^2 = y^2 = \frac{3 P}{b R} (l x - x^2) \quad h = \sqrt{\frac{3 P}{b R} (l x - x^2)}$$

$$\text{luego } \rho = \frac{2 R}{E} \cdot \sqrt{\frac{R b}{3 P} \frac{1}{l x - x^2}} = \frac{d^2 y}{d x^2}$$

Mediante dos integraciones obtendremos la ecuación de la fibra neutra deformada $y=f(x)$; por cada integración aparece una constante, cuyos valores se determinarán teniendo en cuenta que conocemos dos pares de valores, uno de la ecuación finita y otro de la ecuación derivada que han de satisfacerlos; estas dos pares de valores son

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{l}{2} \\ \frac{d y}{d x} &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right\}$$

ál valor $x = \frac{l}{2}$ corresponde $y = \text{flecha} = f$

97. **Prisma empotrado en un extremo y con su peso suspendido en el otro.**—Consideremos los dos primeros casos del problema anterior, partiendo de la misma ecuación de

$$M = \frac{R Y}{y} \quad \text{siendo } Y = \frac{1}{12} b h^3 \text{ é } y = \frac{1}{2} h \quad \text{se tendrá}$$

$$M = \frac{\frac{1}{12} R b h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} R b h^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{de donde } \frac{1}{6} R b h^2 = p (l-x) \\ \text{por otra parte } M = p (l-x) \end{array} \right.$$

(2) resultando el problema indeterminado lo mismo que el anterior; consideraremos los dos casos siguientes:

1.^{er} *Caso.* $b = \text{constante}$ $h = \text{variable}$ de la (2) se deduce

$$h^2 = \frac{6 p (l-x)}{R b} :$$

ecuación de una parábola puesto que $B^2 - 4AC = 0$; para $x = l$, $h = 0$ luego su vértice corresponde al extremo libre, y el sólido afectará la forma de la figura 41.

Si queremos que sea simétrico, tomaremos las secciones de modo que su altura quede dividida en dos partes por su eje de simetría lo cual equivale á dar á cada sección sobre dicho eje la altura h' , obtenida sustituyendo en la ecuación anterior h por $2h'$; la nueva forma está indicada en la figura 42.

2.^o *Caso.* $h = \text{constante}$ y $b = \text{variable}$ de la ecuación (2) se deduce

$$b = \frac{6 p (l-x)}{R h^2}$$

según vemos la ley de variación de b con respecto á x es la de una recta por ser de primer grado la relación anterior. La forma del sólido está indicada en la figura 43; si quisiéramos darle forma simétrica, tomaríamos para ordenada la mitad de los valores que resultan para h y entonces afectaría la indicada en la figura 44

98. **Prisma apoyado con un peso en el centro y carga uniformemente repartida.**—Representamos por:

p — carga correspondiente á la unidad de longitud,

2 D — longitud del prisma, (Figura 45)

2 P — esfuerzo que actua en su sección media,

La carga total del prisma aplicada á su centro de gravedad ó punto medio del eje será $2 P + 2 D p$ y por lo tanto las reacciones en los apoyos A y B tendrán por valor

$$\frac{1}{2} (2 P + 2 D p) = P + D p .$$

Si consideramos una sección cuya distancia al apoyo de la izquierda sea x , para hallar el momento de flexión correspondiente consideraremos los dos esfuerzos siguientes:

reacción en el apoyo A, $P + D p$ brazo de palanca x }
 carga del trozo A x $p x$ idem $\frac{1}{2} x$ } por lo tanto,

$$M = (P + p D) x - \frac{1}{2} p x^2$$

por otra parte

$$M = \frac{R Y}{\mathcal{J}} = \frac{R \frac{1}{12} h h^3}{\frac{1}{2} h} = \frac{1}{6} R b h^2$$

de donde se deduce igualando

$$\frac{1}{6} R b h^2 = (P + p D) x - \frac{1}{2} p x^2 \quad (3).$$

resultando el problema indeterminado como en los casos anteriores considerando invariable b ó h res .ltan los casos siguiente:

1.^{er} Caso. $b =$ constante $h =$ variable despejando h de la ecuación (3) resulta

$$h^2 = \frac{6}{R b} \left[(P + p D) x - \frac{1}{2} p x^2 \right]$$

la cual representa una elipse por ser $B^2 - 4 A C = 0$: como solo

entra la segunda potencia de h el eje de las x es un eje de simetría, con quien ha de confundirse su eje mayor; los extremos de este eje se obtendrán determinando los valores de x correspondientes á $h = 0$ resolviendo la ecuación que se obtiene de este modo tendremos

$$\frac{6}{Rb} \left[(P + pD)x - \frac{1}{2} px^2 \right] = 0, \quad \frac{6}{Rb} \neq 0, \quad (P + pD)x - \frac{1}{2} px^2 = 0, \quad \left[(P + pD) - \frac{1}{2} px \right] x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ (P + pD) - \frac{1}{2} px = 0 \quad x = 2 \left(\frac{P}{p} + D \right) \end{array} \right.$$

de donde se deduce que el eje mayor excede al del prisma; por esta razón, atendiendo también á que los resultados serían simétricos tomando por origen de abscisas el apoyo B, emplearemos la construcción siguiente: se trazan las dos elipses A C m y B C n; la porción A C B marcada con línea seguida en la figura, nos representa la proyección vertical del contorno del prisma, la proyección horizontal será un rectángulo.

Si se quiere dar forma simétrica al contorno de la proyección vertical, se trazarían completas las elipses, pero con ordenadas mitad de las anteriores figura 46.

2.^o Caso. $h =$ constante y $b =$ variable, en este caso se obtendrá despejando b de la ecuación (3) el siguiente resultado:

$$b = \frac{6}{R h^2} \left[(P + pD)x - \frac{1}{2} px^2 \right]$$

vemos por lo tanto que b varía con x del mismo modo que la ordenada de una parábola con su abscisa porque se cumple la condición $B^2 - 4AC = 0$.

Para hallar los puntos en que corta al eje de las x ó eje del sólido, resolveremos la siguiente ecuación que se obtiene haciendo $b=0$

$$\frac{6}{R h^2} \left[(P + p D) x - \frac{1}{2} p x^2 \right] = 0, \quad \frac{6}{R h^2} \neq 0, \quad (P + p D) x -$$

$$\frac{1}{2} p x^2 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ (P + p D) - \frac{1}{2} p x = 0 \quad x = 2 \left(\frac{P}{p} + D \right) \end{array} \right.$$

Por razones análogas á las indicadas en el caso anterior, trazaremos las dos parábolas $A C m$ y $B C n$ (fig. 47) siendo $A C B$ la proyección horizontal del contorno del prisma; la vertical seria un rectángulo como indica la figura.

Sí se desea simetría en el trazado, daremos á la ordenada valores mitad de los anteriores, y lo repetiremos á una y otra región del eje, obteniéndose para proyección horizontal del contorno, $A C B D$ (fig. 48).

99. **Sólidos cuya sección efecta la forma de doble T.**—Para justificar las buenas condiciones que presentan estos sólidos, bajo los puntos de vista económicos y de lijereza, vamos á demostrar que con un área ω , se puede conseguir dándole forma conueniente, que la sección de un sólido resista un momento de flexión M por considerable que sea.

Sabemos que M tiene por valor $M = \frac{R Y}{j}$ de donde $R = \frac{M j}{Y}$

siendo Y el momento de inercia de la sección y R la resistencia de la materia por unidad superficial. Empezamos dando á ω la forma rectangular que indica la figura 49, y supongamos que sustituyendo en lugar de Y su valor y en vez de j el suyo $A a$, resulta para R un valor mayor que la indicada resistencia, claro está que el prisma se rompería por dicha sección, pero si la dividimos en dos partes $A A C c$ y $B b D d$ y los trasladamos á igual distancia del eje $Y Y'$,

se observa que su momento de inercia crecerá proporcionalmente al cuadrado de h por otra parte, J también crece y es sensiblemente igual á h , de modo que el valor de R decrece sensiblemente en la relación $\frac{h^2}{h} = h$ ó lo que es lo mismo dando á h un valor conveniente podemos hacer que R sea igual á la expresada resistencia, con lo cual hemos demostrado lo que nos proponíamos. Vemos por lo tanto que la mejor sección que puede darse á un sólido es la que indica la figura, pero como esto es imposible, se unen las dos porciones A' C' y B' D' llamadas *brazos* por un cuerpo que recibe el nombre de *alma ó nervio*. con lo cual resulta la forma de doble T.

Generalmente estos sólidos como todos los que hasta ahora hemos considerado, tienen que sufrir esfuerzos normales á su eje los que originan flexión y cizallamiento; como con una sección de pequeña área ω , no es posible resistir un esfuerzo cortante grande, se calcula el nervio de modo que por sí sólo sea capaz de resistirlo sin preocuparse en él de la flexión, así como en los brazos prescindimos del cizallamiento, sabemos que donde uno es máximo por regla general es el otro mínimo, y para estos casos es donde más conviene el empleo de la sección en doble T.

100. **Construcción de una viga en doble T de igual resistencia para una carga uniformemente repartida,** (fig. 50).—Representemos por

l distancia entre los apoyos.

h separación de los centros de gravedad de los brazos.

a anchura del prisma, la cual es siempre dato de la de la cuestión.

e espesor de los mismos.

Aplicando la fórmula

$$M = \frac{R Y}{J}$$

y teniendo en cuenta que

$$\begin{cases} Y = \frac{a c h^2}{2} & (*) \\ \gamma = \frac{h}{2} & (**) \end{cases}$$

resulta $M = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$

$$R = \frac{\frac{a c h^2}{2}}{\frac{h}{2}}$$

(*) Según hemos dicho, como solo nos ocupamos ahora del momento de flexión, prescindimos del alma del sólido por cuyo motivo la expresión $Y = \frac{a c h^2}{2}$ representa solo la suma de momentos correspondientes á los dos brazos cuyo valor podemos determinar fácilmente como sigue: si dividimos el brazo superior en elementos diferenciales tales como n cuya área es $c \cdot d a$ tendremos siendo Y' el momento de dicho brazo superior,

$$d Y' = c \cdot d a \cdot \frac{h^2}{4} \text{ integrando } Y' = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} c d a \frac{h^2}{4} = c \frac{h^2}{4} \cdot a$$

$$= \frac{c a h^2}{4} \text{ y como } Y \text{ es igual á } 2 Y' \text{ resultará}$$

$$Y = 2 \frac{c a h^2}{4} = \frac{c a h^2}{2}$$

(**) γ no es exactamente igual á $\frac{h}{2}$ al admitir este error es para facilitar las fórmulas, porque de otro modo tendríamos que introducir una nueva variable en ellas; se comprende fácilmente que el error es más pequeño tomando para valor de la máxima ordenada la distancia h de los centros de gravedad, que haciéndolo á la inversa.

de donde $R a c h = \frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2$ (1); en esta ecuación hay dos cantidades desconocidas c y h , de modo que podemos fijar arbitrariamente una de ellas, determinando el valor correspondiente de la otra, de aquí dos casos distintos, de los que se deducen dos formas para el sólido de igual resistencia y sección en doble T.

1.^{er} Caso. $c =$ constante y $h =$ variable. Despejemos h de la ecuación (1) y obtendremos

$$h = \frac{1}{R a c} \left(\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \right)$$

ecuación de una parábola en la cual vemos por anularse h para $x = 0$ y $x = l$ que pasa por los apoyos, la ordenada máxima correspondería á $x = \frac{l}{2}$ lo cual se obtiene aplicando las reglas correspondiente: dicho valor máximo sería

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{R a c} \left(\frac{1}{2} p l \frac{l}{2} - \frac{1}{2} p \frac{l^2}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{R a c} \left(\frac{1}{4} p l^2 - \frac{1}{8} p l^2 \right) = \frac{1}{8} \frac{p l^2}{R a c} . \end{aligned}$$

Dos formas distintas pueden darse á este sólido de igual resistencia; la 1.^a se obtiene tomando á partir de la recta que une los apoyos, los distintos valores de h (figura 51) y la 2.^a tomando dicha altura h de modo que dicha recta los divida en dos partes iguales: de este modo el contorno de la proyección vertical sería una parábola cuya ordenada es mitad de la del caso anterior. (fig) 52.

El volumen de uno de los brazos sería el producto del área $a c$ de de su sección por la longitud del arco de parábola A B H pero atendiendo á que presenta poca curvatura, se susituye en lugar de dicha línea la separación l de los apoyos con lo cual resulta,

$v = a l c$ y el de los dos será $V = 2 v = 2 a c l$
 aunque c en este caso es constante, vamos á ponerlo en función de la altura máxima, que como sabemos corresponde al momento máximo de flexión ó sea á la sección media; de este modo tendremos

$$\left. \begin{aligned}
 H &= \frac{1}{R a c} \cdot \frac{1}{8} p l^2 \\
 8 R a c H &= p l^2; c = \frac{p l^2}{8 R a H} \\
 V &= a c l
 \end{aligned} \right\} V = 2 a l \frac{p l^2}{8 R a H} = \frac{p l^3}{4 R H}$$

2.º *Caso.* $h =$ constante y variable el espesor c de los brazos
 Aunque h es constante podemos darle el valor que queramos porque la condición que se ha de cumplir es que sea el mismo para todas las secciones; nosotros queremos comparar el sólido obtenido, de este modo con el del caso anterior, y por ese motivo debemos de considerar en él la misma forma en la sección media, para la cual es condición indispensable que en dicha sección ambos tengan la misma altura; evidentemente esta altura H será la correspondiente á todas las secciones del nuevo sólido. despejando c en la ecuación (1) se obtiene

$$c = \frac{1}{R H a} \left(\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2 \right)$$

ecuación de una parábola que pasa no por los apoyos, porque en este caso debemos tomar por eje de las x la recta cm (fig. 53) sino por los puntos c y m , de este modo suponiendo el sólido simétrico, resultará en proyección vertical cmd uno de los brazos y nrs el otro.

Si tenemos en cuenta que la altura H es muy grande con relación al máximo valor de c , apartándonos poco de las condiciones de los sólidos de igual resistencia, podemos tomar las paraboloides hacia el exterior, resultando el sólido que indica la figura 54 que es más resistente que el anterior pero en cambio más pesado.

El volumen de los brazos en este sólido para un trozo de longitud dx será

$$dV' = 2 a c dx \text{ de donde } V' = \int_0^l \frac{1}{2} a c dx = 2 a \int_0^l c dx$$

reemplazando en lugar de c su valor en función de x

$$c = \frac{\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2}{R a H} \text{ se obtiene } V' = 2 a \int_0^l \frac{\frac{1}{2} p l x - \frac{1}{2} p x^2}{R a H}$$

$$\frac{2 a}{R a H} \left[\int_0^l \frac{1}{2} p l x dx - \int_0^l \frac{1}{2} p x^2 dx \right] = \left[\frac{p l}{R H} \frac{x^2}{2} - \right.$$

$$\left. \frac{p}{R H} \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{p l^3}{2 R H} - \frac{p l^3}{3 R H} = \frac{p l^3}{R H} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \frac{p l^3}{R H}$$

101. **Comparación entre los dos sólidos en doble T que hemos obtenido.**—El de forma parabólica correspondiente al primer caso, es peor que el de forma rectilínea que hemos obtenido en el segundo por ser más pesado, basta para ello observar

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1}{4} \frac{p l^3}{R H} \\ V' &= \frac{1}{6} \frac{p l^3}{R H} \end{aligned} \right\} \frac{V}{V'} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad V > V'$$

el error cometido al determinar V , obra en nuestro favor porque dijimos era por defecto.

No es esta la sola ventaja que presenta el sólido rectilíneo sobre el parabólico, además de ser más ligero, su deformación es más pequeña, para lo cual observaremos que el radio de curvatura de su fibra media deformada es mayor; en efecto

$$M = \frac{E Y}{\rho} = \frac{R Y}{\gamma} \text{ de donde } \frac{E Y}{R Y} = \frac{\rho}{\gamma} \text{ ó } \frac{E}{R} \gamma = \rho$$

$$\text{siendo } \gamma = \frac{1}{2} h \text{ se tiene } \rho = \frac{E h}{2 R}$$

de aquí se deduce que ρ varía proporcionalmente á h de modo que crecerá con esta altura; ahora bien, en el sólido rectilíneo h es constantemente igual á H y en el parabólico este es su valor máximo, de modo que ρ es mayor en el primero que en el segundo, ó lo que es lo mismo este último es menos rígido que el primero.

Desde luego cuando se desee mucha flexibilidad, debe adoptarse la forma parabólica.

102. **Esfuerzo de cizallamiento.** --Según hemos dicho, al nervio hay que darle el espesor necesario para que resista su sección aisladamente todo el esfuerzo de cizallamiento; para satisfacer esta condición llamando c' dicho espesor, su sección será representando por h en este caso la distancia entre los brazos, aplicando la ecuación correspondiente al cizallamiento tendremos,

$$T = R_1 \omega \left\{ \begin{array}{l} T = \frac{d M}{d x} = \frac{1}{2} p l - p x \\ \omega = h c' \end{array} \right\} R_1 h c' = \frac{1}{2} p l - p x.$$

Ahora bien, para que ésta ecuación se verifique, es necesario que las cantidades c' y h , sea cualquiera de ellas la variable, están elegidas de manera que su producto sea constante; de modo que bien sea el sólido parabólico ó cilíndrico, el nervio tendrá siempre el mismo peso.

CAPÍTULO 6.º

103. **Sagitas y elásticas.**—Se llama *elástica* á la fibra media deformada, y *sagita ó flecha* la ordenada máxima de la elástica tomando por eje de abscisas dicha fibra media antes de encorvarse el sólido.

104. **Determinación de la flecha.**—El procedimiento que se deduce inmediatamente de la definición, consiste en hallar la ecuación de la fibra media deformada A B (fig. 55) y en ella si no se desea gran exactitud, determinar el valor de y correspondiente á $x = l$ pero si dicha exactitud es necesaria, el problema se complica, pues tendremos que emplear el procedimiento siguiente: hallar la longitud de un arco de elástica indeterminado, considerándolo á partir del punto A correspondiente á $x = 0$ ó sección de encastre: esta longitud será función de la abscisa del extremo del arco en cuestión, igualando á l esta longitud tendremos una ecuación en x la cual resuelta, nos dará la abscisa del extremo B de la elástica, y sustituyendo este valor en la ecuación $y = f(x)$ de dicha curva obtendremos la flecha.

Siendo estos cálculos muy pesados, se emplea para su determinación de sagitas y tangentes á las elásticas el procedimiento que vamos á indicar, el cual es debido á *Poncelet*.

Sea A B' la fibra media antes de encorvarse el prisma que suponemos empotrado en su extremo A y A B la elástica; el problema que nos proponemos resolver, es determinar C B. Para ello supongamos trazada la envolvente B B' de la elástica, tomemos de ésta un elemento $m m' = ds$ y tiremos las tangentes $m n m' n'$, si además imaginamos trazadas otras tangentes de tal modo que la distancia entre los puntos de contacto de cada dos consecutivas sea ds obser-

vamos que la sagita BC incógnita de esta cuestión se compone de la suma de sagitas elementales $n K n' K'$ por lo tanto para hallar su valor, será necesario determinar el de uno de estos elementos é integrarlo entre los correspondientes límites; determinemos por ejemplo el elemento $n' K' = d f$ los triángulos $n n' K'$ y $m m' t$ semejantes por ser rectángulos y tener los ángulos $K' n' n$ y $t m m'$ iguales, dan la proporción

$$\frac{K' n'}{n n'} = \frac{m t}{m m'} \quad \text{y sustituyendo} \quad \frac{d f}{n n'} = \frac{d x}{d s}$$

$$\text{de donde} \quad d f = n n' \frac{d x}{d s}$$

en el triángulo $n m n'$ se verifica $n n' = m n t g d \alpha = m n d \alpha$ y como según la propiedad de las tangentes á la evolvente

$$n n' = m B d \alpha,$$

sustituyendo en el valor de $d f$ se obtiene;

$$d f = m B d \alpha \frac{d x}{d s} = (l-x) d \alpha \frac{d x}{d s}$$

(admitiendo que la deformación sea muy pequeña y por lo tanto $A m = A q = x$): por otra parte tendremos

$$d s = \rho \operatorname{tg} . d \alpha = \rho d \alpha \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d \alpha}{d s}$$

de modo que sustituyendo

$$d f = (l-x) d x \frac{1}{\rho}$$

$$M = \frac{E Y}{\rho} \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E Y} = \frac{p(l-x)}{E Y} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} d f = \frac{p(l-x)^2}{E Y} d x$$

é integrando entre 0 y l resulta

$$f = C B = \int_0^l \frac{p(l-x)^2}{E Y} d x = \frac{1}{3} \frac{p l^3}{E Y}$$

cuya expresión resuelve el problema.

105. **Determinación del ángulo que forma con el eje sin deformarse un elemento cualquiera de la elástica** —Sea $m m'$ y α el ángulo en cuestión, tendremos el siguiente cálculo.

$$\left. \begin{aligned} m m' &= d s = \rho d \alpha \\ d x &= d s \cos. \alpha \end{aligned} \right\} d s d x = \rho d s d \alpha \cos. \alpha$$

$$d x = \rho d \alpha \cos. \alpha = \rho d \operatorname{sen.} \alpha \quad d \operatorname{sen.} \alpha = \frac{d x}{\rho}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E Y} = \frac{p(l-x)}{E Y} \left. \right\} d \operatorname{sen.} \alpha = \frac{p(l-x) d x}{E Y}$$

é integrando resulta

$$\begin{aligned} \int d \operatorname{sen} \alpha &= \frac{P}{E Y} \int (l-x) d x = \frac{P}{E Y} l x - \\ &- \frac{P}{E Y} \frac{x^2}{2} + C = \operatorname{sen.} \alpha \end{aligned}$$

solo nos falta determinar el valor de la constante C, para lo cual observaremos que la tangente en el primer elemento se confunde con la fibra sin deformar según las condiciones de empotramiento y por lo tanto á $x = 0$ corresponde $\alpha = 0$ ó $\operatorname{sen} \alpha = 0$, sustituyendo este par de valores simultáneos en la fórmula anterior resulta la ecuación $0 = C$ quedando para valor de $\operatorname{sen} \alpha$ la expresión

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{P}{E Y} l x - \frac{P}{E Y} \frac{x^2}{2}$$

si ahora queremos el ángulo correspondiente al extremo B de la (elástica, haremos sensiblemente) $x = l$, y resultará

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{P}{E Y} l^2 - \frac{P}{E Y} \frac{l^2}{2} = \frac{P l^2}{2 E Y}$$

Si se desea su valor en función del de la flecha, tendremos

$$f = \frac{1}{3} p l^3 \times \frac{1}{E Y} \text{ de donde } p = \frac{3 Y E f}{l^3}; \text{ sustituyendo}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\frac{3 E Y f}{l^3} l^2}{2 E Y} = \frac{3 E Y f l^2}{2 E Y l^3} = \frac{3}{2} \frac{f}{l}$$

Observación. Hasta ahora hemos supuesto que el sólido era de sección constante de modo que Y también lo era, pero si se tratase de un sólido de igual resistencia, γ será función de x ; en este caso, suponiendo que la base de la sección es constante y variable su altura, tendremos

$$M = \frac{R Y}{\gamma} \text{ é } \frac{Y}{\gamma} = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{M}{R} \text{ de donde } h = \sqrt{\frac{6 M}{R b}}$$

$$\begin{aligned} \text{y por lo tanto } Y &= \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} b \left(\sqrt{\frac{6 M}{R b}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{12} b \left(\frac{6 p (l-x)}{R b} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

sustituyendo este valor en las expresiones diferenciales de f y $\text{sen } \alpha$ é integrando de nuevo tendremos el problema resuelto.

106. **Trazado geométrico de la elástica.** -- De la ecuación $M = \frac{E Y}{\rho}$ ó $\rho = \frac{E Y}{M}$, resulta, considerando como hemos hecho anteriormente un sólido empotrado en uno de sus extremos,

$\rho = \frac{E Y}{p (l-x)}$ si en esta expresión damos á x valores sucesivos que varían en proporción aritmética, por ejemplo, obtendremos para $l-x$ diferencias que varían de igual modo; si representamos estas diferencias por $l, l', l'' \dots$ y llamamos R, R_1, R_2, \dots etc., los correspondientes de ρ tendremos el cuadro siguiente, en el cual se indica también la construcción (figura 56.)

Sección de encastre A... $R = \frac{E Y}{P \cdot l}$ } tómesese A o igual á esta magnitud y con centro en o, trácese un arco A A' de pequeña amplitud 1.º ó 2.º (*) únase A' con o.

Sección que pasa por A'... $R = \frac{E Y}{P l'}$ } sobre la recta A' o que se acaba de trazar, tomese A' o' igual á esta magnitud y trácese el arco A' A'' en las mismas condiciones que el anterior.

Sección que pasa por A''... $R_2 = \frac{E Y}{P l''}$ } repítase la misma construcción y así sucesivamente.

En el límite la elástica serie envolvente de la curva A A' A''...

107. **Caso en que los valores de los rádios sean muy grandes.**—Si esto ocurre no podemos emplear la construcción anterior porque los centros estarían fuera del dibujo y por este motivo emplearemos la siguiente suponiendo que la indicada particularidad empieza en el punto A''

Evidentemente el ángulo de contingencia es igual al de los rádios de curvatura, por lo tanto, si este es α por ejemplo para el indicado punto, prolongaremos el elemento A' A'' y trazando la recta M A'' que forme con A' N el ángulo α con lo cual conocemos la dirección del nuevo elemento; si conociéramos su longitud, bastaría tomarla en A'' A''' y continuaríamos de este modo hasta concluir la construcción.

Para determinar la longitud A'' A''', observemos que corresponde á un arco de radio R_2 y valor gradual α , de modo que si llamamos α_1 dicha longitud y α la del arco de igual número de grados y radio unidad tendremos

(*) Este valor gradual puede encontrarse para cada elemento, restando los ángulos que forman las tangentes en los extremos con la fibra media antes de deformarse.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a_1}{a} = \frac{R^2}{1} \text{ de donde } a_1 = R_2 a \\ \frac{a}{2\pi} = \frac{\alpha}{360} \text{ id. } a = \frac{2\pi \times \alpha}{360} \end{array} \right\} a_1 = \frac{2\pi \times \alpha}{360} R_2$$

si suponemos $\alpha = 2^\circ$ tendremos

$$a_1 = \frac{2\pi \times 2}{360} R_2 = 0,0349 R_2 = \frac{E Y}{P l'} 0,0349.$$

CAPITULO 7.º

Resbalamiento longitudinal de las fibras, motivado por la flexión de los sólidos.

108. En la hipótesis de considerar un sólido prismático como un haz de fibras yustapuestas, veamos de que modo trabajan estas fibras por efecto de la flexión, y supongamos para fijar las ideas, que se trata de un prisma apoyado en los extremos y cargado de un peso en su punto medio. (Fig. 67)

La flexión origina compresiones en las fibras situadas en la parte superior de la capa neutra cc y extensiones en las capas de fibras situadas debajo. La intensidad del esfuerzo que produce estas extensiones y compresiones que puede medirse fácilmente recordando que en una sección transversal cualquiera del prisma se

$$\text{verifica } M = \frac{R Y}{Y}$$

de donde se deduce

$$R = \frac{M y}{Y}$$

El valor de R suponiendo el sólido prismático como estamos haciendo y por lo tanto Y constante dependerá de M é y de modo

que para estudiar la variación de R debemos considerar separadamente la de cada una de dichas cantidades.

Dentro de una misma sección transversal BB , es decir para el mismo valor de M , la resistencia que han de oponer las fibras á la extensión ó compresión depende solo de γ de modo que su valor máximo, corresponde á las capas m extremas siendo nula en la fibra media h .

Dentro de una misma capa aa de fibras, R depende de M de modo que en el caso que estamos considerando, este máximo trabajo corresponderá á la sección media r . Resulta de aquí que una fibra de un sólido prismático, trabaja de distinto modo en cada punto de su longitud.

Combinando las dos influencias de M é γ se tendrá la verdadera variación de R de una á otra capa. En dos secciones AA BB (figura 58) hay igual distribución de valores de R pero si se comparan las fibras correspondientes á la misma capa, se halla que en la sección AA trabajan mas que en la BB . Los puntos en que más trabaja el material corresponderán á los máximos valores de M é γ siendo en la figura los r y s . Se ha representado por intensidad de tintas la correspondiente á estos trabajos resultando de este modo más visible la variación que hemos estudiado.

Fácilmente se obtendrán para otra cualquier pieza los resultados indicados: en las empotradas por un extremo teniendo un peso suspendido en el otro los puntos r y s corresponderán á la parte más elevada de la sección de encastre.

De estas consideraciones resulta, que si consideramos la superficie común á dos capas de fibras aa y bb por ejemplo, (fig. 57) en un punto cualquiera m , se desarrollarán dos compresiones distintas paralelamente al eje de la viga, correspondientes á las dos capas de fibras á que pertenece al mismo tiempo dicha superficie común; y obedeciéndolo á la diferencia de compresiones, la capa superior aa

tenlerá á resbalar sobre la bb separándose por *desgarramiento longitudinal*. Lo mismo diríamos con relación á las fibras que se extienden.

109. **Causa productora del desgarramiento en un sólido sometido à flexion.**—Supongamos un sólido empotrado por uno de sus extremos y obrando un peso en el extremo libre, (fig. 59). Llamemos R la resistencia á la extensión por unidad superficial en un punto a y R' la correspondiente al punto a' . En la faja infinitamente pequeña mn correspondiente al punto a , el esfuerzo ó más bien la reacción desarrollada por la materia tendrá por valor

$$F = R \omega = R b d y = \frac{M y}{Y} b d y$$

en la faja correspondiente al punto a' , dicha sección será

$$F' = R' \omega = R' b d y = \frac{M' y}{Y} b d y$$

y según ya hemos indicado el esfuerzo que hace resbalar el prisma infinitamente pequeño de dimensiones b, dx y dy sobre el inmediato inferior tendrá por valor

$$\begin{aligned} F' - F &= (R' - R) b d y = \frac{M' - M}{Y} b y d y = \\ &= \frac{dM}{Y} b y d y = \frac{dM}{dx} dx \frac{b y d y}{Y} = \\ &= T dx \frac{b y d y}{Y}. \end{aligned}$$

La resultante de los esfuerzos que tienden á desgarrar la rebanada AB ó lo que es igual á hacer resbalar su parte media superior sobre la inferior, se obtendrá considerando que la dimensión en sentido del eje de las y pasa á ser la mitad de la altura de la sección del prisma resultante que se obtendrá integrando la expresión

entre los límites 0 y $\frac{1}{2}h$ considerando la variabilidad lo cual dá por resultado

$$\begin{aligned} N' &= \int_0^{\frac{1}{2}h} T dx \frac{b y d y}{Y} = T dx \int_0^{\frac{1}{2}h} b \frac{y d y}{Y} = \\ &= T dx \int_0^{\frac{1}{2}h} b \frac{y d y}{\frac{1}{12} b h^3} = T dx \int_0^{\frac{1}{2}h} \frac{12 y d y}{h^3} = \\ &= 12 \frac{T dx}{h^3} \int_0^{\frac{1}{2}h} y d y = 12 \frac{T dx}{h^3} \frac{4}{2} = \\ &= \frac{T dx}{h} \cdot \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \frac{T dx}{h} \end{aligned}$$

110. **Resistencia al desgarramiento longitudinal de las fibras por unidad superficial.**—La expresión que acabamos de obtener, nos indica la resistencia al resbalamiento de dos prismas elementales de base $\frac{1}{2}h \times b$ y altura dx puestos en contacto por una de sus caras laterales cuya área es $b dx$. El esfuerzo total del desgarramiento longitudinal, que tiende á hacer resbalar la mitad superior sobre la inferior de un sólido de resistencia, y por lo tanto á romperlo según una sección que pasa por su eje, bien esté apoyado ó empotrado por uno ó sus dos extremos, se obtendrá integrando la expresión anterior para valores de x comprendidos entre 0 y l .

En el caso que necesitemos construir una viga formada por dor porciones iguales superpuestas, es preciso conocer la resistencia que ha de darse al ligamento que las une, para lo cual determinaremos la correspondiente á la unidad superficial.

Para conseguirlo, siendo N' el esfuerzo que ha de soportar la superficie del área $\omega' = b dx$ la resistencia por unidad superficial que presente la materia, ha de ser igual ó mayor que dicho esfuerzo, de modo que llamándole R'' tendremos

$$R'' b d x > \frac{3}{2} \frac{T d x}{h} \text{ de donde } R'' > \frac{3}{2} \frac{T}{b h}$$

siendo T el esfuerzo de cizallamiento que sufre la sección de área $\omega = b h$ claro está que $\frac{T}{b h}$ es el correspondiente á la unidad y como en su máximo la relación $\frac{T}{b h}$ tendrá por valor R_1 resulta que la resistencia R'' debe tener un valor igual ó mayor que vez y media la correspondiente al cizallamiento.

CAPÍTULO 8.º

III. **Flexión por compresión.**—Consideremos un prisma AB (fig. 60) de longitud l y sección rectangular apoyado en B y sometido á la acción de una fuerza de compresión F con respecto á la cual es despreciable el peso propio de la pieza y admitamos que por un procedimiento cualquiera los puntos A y B están sujetos á permanecer constantemente en la vertical AB .

Si el prisma es de materia homogénea, su eje perfectamente rectilíneo y la fuerza F obra perfectamente á lo largo de este eje, no puede producirse flexión lateral alguna, puesto que es igual á cero el brazo de palanca de la fuerza F . Pero si por una causa accidental cualquiera, como puede ser la acción del viento, el prisma se flexa y adquiere la flecha f , nace un par de flexión cuyo momento es $F \cdot f$ y como consecuencia se desarrollará un par de fuerzas elásticas que ha de hacerle equilibrio.

Este estará expresado para una sección cualquiera m por la ecuación

$$M = F \times -y = -F y$$

representando por y la ordenada del punto del eje correspondiente

á la sección que se considera, y dándole signo menos por el sentido en que se produce la encorvadura; vamos á determinar el menor valor de F para que la flexión se produzca, para lo cual acudiremos á la ecuación de la fibra media deformada.

El momento M de fuerzas elásticas tiene por expresión

$$M = E Y \frac{d^2 \gamma}{d x^2}$$

Llamando Y el momento de inercia más pequeño correspondiente á las distintas rectas que pueden trazarse por el centro de gravedad de la sección, puesto que evidentemente la flexión se producirá en el plano que encuentre menor resistencia, observando que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 \gamma}{d x^2} = \frac{d \frac{d \gamma}{d x}}{d x} = \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d x}$$

y sustituyendo en las ecuaciones anteriores tendremos

$$M = E Y \frac{d \operatorname{tg} \alpha}{d x} \quad E Y d \operatorname{tg} \alpha = M dx = -F \gamma dx \quad (1)$$

é integrando

$$E Y \operatorname{tg} \alpha = - \int F \gamma dx$$

haciendo $u = \operatorname{tg} \alpha$ y sustituyendo en (1)

$$E Y du = -F \gamma dx \quad \left\{ \begin{array}{l} -F \gamma = E Y \frac{du}{dx} \\ \frac{d \gamma}{dx} = u \end{array} \right.$$

y multiplicando estas expresiones

$$-F \gamma \frac{d \gamma}{dx} = E Y \frac{du}{dx} u \quad \text{ó} \quad -F \gamma d \gamma = E Y u du$$

integrando entre los límites γ y f teniendo en cuenta que á γ co-

responde u y al valor $y = f$ corresponde $u = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg.} \alpha = \operatorname{tg.} 0 = 0$ se obtiene

$$-F \int_f^y y \, dy = EY \int_0^u u \, du$$

de donde $-F(y^2 - f^2) = EY u^2$ $F(f^2 - y^2) = EY u^2$
sustituyendo en vez de u su valor.

$$EY \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = F(f^2 - y^2) \quad \text{de donde} \quad \frac{EY}{F} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = f^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} \sqrt{\frac{EY}{F}} = \sqrt{f^2 - y^2} \quad \sqrt{\frac{EY}{F}} \frac{1}{dx} = \frac{\sqrt{f^2 - y^2}}{dy}$$

$$\sqrt{\frac{F}{EY}} dx = \frac{dy}{\sqrt{f^2 - y^2}} \quad \text{é integrando}$$

$$x \sqrt{\frac{F}{EY}} = \operatorname{arc.} \operatorname{sen.} \frac{y}{f} \quad \text{ó} \quad \frac{y}{f} = \operatorname{sen} \left(x \sqrt{\frac{F}{EY}} \right)$$

$$y = f \operatorname{sen.} \sqrt{\frac{F}{EY}} x$$

hemos prescindido de la constante en esta integración, porque el valor $x = 0$ debe corresponder $y = 0$ en virtud de la condición que impusimos al punto A de no poder separarse nunca de la vertical en que se encontraba al principio.

Si l es la abscisa de A, para $x = l$ $y = 0$ por lo tanto

$$f \operatorname{sen.} \sqrt{\frac{F}{EY}} l = 0 \quad f \neq 0 \quad \operatorname{sen.} \sqrt{\frac{F}{EY}} l = 0$$

ahora bien, recordando que todos los arcos cuyo seno es cero están comprendidos en la expresión formular

$n\pi$, (número exacto de semicircunferencias) tendremos

$$l \sqrt{\frac{F}{EY}} = n\pi \quad \text{de donde} \quad F = \frac{n^2 \pi^2 EY}{l^2}$$

y como tratamos de determinar el valor de F más pequeño para que la flexión pueda producirse, haremos $n = 1$ con lo cual queda determinado lo que nos proponíamos demostrar

$$F = \frac{\pi^2 E Y}{l^2}$$

en esta expresión sustituiremos por Y el momento de inercia mínimo; si la sección fuese circular Y sería constante para cualquier eje que pasa por el centro del círculo, que se confunde con el de gravedad, de modo que la flexión se produciría en cualquier plano vertical.

112. **Caso en que el punto medio del sólido este obligado à permanecer en la vertical que pasa por el apoyo.**—(Fig. 61) En este caso podemos aplicar cuanto hemos dicho relativamente à la ecuación de la fibra media deformada, de modo que ésta tendrá la misma forma, variando solo la relación entre sus parámetros, dicha relación se obtendrá teniendo en cuenta que para $x = \frac{1}{2} l$ se ha de verificar $y = 0$ y por lo tanto nos resultará la siguiente ecuación condicional

$$\text{sen. } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{E Y}} = 0 \quad \text{de donde } \frac{l}{2} \sqrt{\frac{F}{E Y}} = n \pi \quad \text{ó}$$

$$F = \frac{4 \pi^2 n^2 E Y}{l^2}$$

El mínimo corresponde à $n = 1$ de modo que

$$F = \frac{4 \pi^2 E Y}{l^2}$$

resultado conforme con el anterior y las condiciones mecánicas de la cuestión, porque mientras mayor sea el número de puntos fijos más difícil será la flexión.

En general será el equilibrio estable, cuando el esfuerzo de compresión sea menor que

$$\frac{E Y \pi^2}{l^2} (m + 1)^2$$

designado por m el número de puntos fijos. Decimos que estas son las condiciones de estabilidad, porque en el momento que la fuerza de compresión adquiera el indicado y por cualquier causa accidental comience la flexión por pequeña que haya sido la flecha el momento de rotura será muy grande, así es que el de las fuerzas elás-

ticas,
$$M = \frac{R Y}{\gamma}$$

no podrá hacerle equilibrio; aumentando la encorvadura y por consiguiente cada vez mas la flecha hasta que el sólido se rompa.

Si por el contrario F tiene un valor menor que el que hemos calculado, las fuerzas elásticas podrán equilibrar al momento de flexión, y cuando desaparezca la causa accidental necesaria para producirla, volverá el sólido á su forma primitiva.

De esto resulta, que la carga de seguridad no será la que hemos calculado, sinó una fracción $\frac{1}{m}$ de ella, dependiente de la sustancia que forma la barra, así como de la solidéz que se desée obtener en la construcción.

113. **Experiencias de Mr. Hodgkinson y Rondelet sobre la resistencia del hierro y las maderas** —A las vigas de madera se las dá generalmente una de las formas rectangular ó cuadrada, construyéndose siempre macizas. Según la fórmula hallada para el caso de obligar solo uno de los puntos de la viga á permanecer constantemente en la vertical que pasa por el apoyo, y teniendo en cuenta cada una de las ecuaciones anteriores, calculemos el esfuerzo de rotura que á cada una corresponde

$$N = \frac{E Y \pi^2}{l^2} \dots \text{sección cuadrada} \dots Y = \frac{1}{12} b^4$$

$$N = \frac{\pi^2 E}{12} \times \left(\frac{b^2}{l} \right)^2 = K \left(\frac{b^2}{l} \right)^2$$

id rectangular ... $Y = \frac{1}{12} b^3 h$

$$N = \frac{\pi^2 E}{12} \times \frac{h b^3}{l^2} = K \frac{h b^3}{l^2}$$

como vemos K es un coeficiente que solo depende del módulo de elasticidad ó sea de la naturaleza de las maderas.

Según Rondelet un cubo tanto de roble como de pino, se rompe por compresión mediante una carga de 420 kg. por centímetro cuadrado y Hodgkinson, aunque sus experiencias en este punto son muy reducidas, también ha podido llegar á modificar mediante ciertos coeficientes de corrección las fórmulas anteriores, obteniendo otras más prácticas; han deducido ambos experimentadores que las cargas de seguridad en condiciones medias deben ser la $\frac{1}{10}$ parte de las de rotura.

Las columnas de fundición se construyen macizas ó huecas pero generalmente de sección circular; aplicando las fórmulas obtenidas resultan las siguientes cargas de rotura.

$$\begin{aligned} \text{Columna maciza... } Y &= \frac{1}{4} \pi r^4 & N &= \frac{\pi^2 E Y}{l^2} = \frac{\pi^3 E r^4}{4 l^2} \\ &= \frac{\pi^3 E}{4} \frac{r^4}{l^2} & &= K \frac{r^4}{l^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Idem hueca... } Y &= \frac{1}{4} \pi (r^4 - r'^4) & N &= \frac{\pi^2 E Y}{l^2} = \\ &= \frac{\pi^3 E (r^4 - r'^4)}{4 l^2} & &= \frac{\pi^3 E}{4} \frac{r^4 - r'^4}{l^2} \end{aligned}$$

K como en las maderas, depende solo de la clase de hierro.

En función de los diámetros.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{maciza... } N = \frac{\pi^3 E r^4}{4 l^2} = \frac{\pi^3 E d^4}{64 l^2} = \frac{\pi^3 E}{64} \cdot \frac{d^4}{l^2} = K' \frac{d^4}{l^2} \\ \text{hueca... } N = \frac{\pi^3 E}{4} \cdot \frac{r^4 - r'^4}{l^2} = \frac{\pi^3 E}{64} \cdot \frac{d^4 - d'^4}{l^2} = K' \frac{d^4 - d'^4}{l^2} \end{array} \right.$$

Mr. Hodginson ha deducido de sus experiencias.

1.º Los prismas de hierro colado, cuya longitud sea á lo más igual á cinco veces el diámetro, sometidos á un esfuerzo de compresión, no se doblan para romperse; lo hacen por *aplastamiento* simplemente cuando aquél llega á ser próximamente de 63 kilogramos por milímetro cuadrado.

2.º Cuando la longitud se halla comprendida entre 5 y 25 veces el diámetro, los prismas se rompen por *flexión* y *aplastamiento*.

3.º De 25 veces el diámetro en adelante, la flexión es inevitable, aún para esfuerzos muy moderados respecto de los que pueden soportar los prismas cuando se rompen solo por *aplastamiento*.

4.º Las columnas de bases planas ofrecen mayor resistencia que cuando estas son redondeadas á igualdad de las demás condiciones.

5.º A igualdad de altura y cantidad de materia, las columnas bombeadas resisten más que las cilíndricas, siendo el aumento de las primeras, la séptima ú octava parte de la resistencia correspondiente á las segundas.

6.º Bajo la misma hipótesis de entrar igual cantidad de materia, las columnas huecas resisten más que las llenas, y las que tienen por sección una cruz.

Estos hechos estan de acuerdo con lo dicho en la teoría, y casi todos con gran facilidad podríamos justificarlos.

De estas consecuencias han deducido Hodgkinson y Love, la manera de introducir en las fórmulas que acabamos de obtener, coeficientes de corrección con objeto de hacerlas más aceptables.

Las cargas de seguridad también han deducido que son la sexta parte de los valores encontrados para las de rotura.

CAPÍTULO 9.º

Manera de aumentar la resistencia de los prismas de gran longitud.

114. **Vigas armadas.**—Siendo necesario en algunas máquinas el empleo de vigas de considerable longitud, sometidas á la acción de su gran peso, además de los esfuerzos ó cargas que en distintos puntos han de soportar, se flexionarían ó romperían con gran facilidad si además de los dos apoyos de los extremos, no se aumentase su resistencia con otros intermedios; estos nuevos apoyos podrían ser columnas en que la viga descansase, pero este sistema tiene por grave inconveniente, dificultar las operaciones mecánicas del taller y por este motivo se hace uso de las *vigas armadas*, que consisten en una viga A C (fig. 62), apoyada en sus extremos A y C, teniendo uno ó varios apoyos intermedios tales como el B, facilitado por la *mangueta* o B; las piezas o A y o C que sostienen la mangueta, se llaman *tirantes* ó *pares*; resulta, por lo tanto, que en una viga armada se llaman manguetas, las piezas que directamente la sustentan, y tirantes aquéllas que estando fijas á los muros de la construcción, apoyan á las manguetas.

Las vigas armadas pueden serlo inferior ó superiormente; la figura 62 representa una armadura inferior, y la armadura superior varía de ella, en que los tirantes están por encima de la viga; á las manguetas se dá en este caso el nombre de *péndolas*.

Vamos á calcular las dimensiones de todas las piezas que constituyen una viga armada, y para ello, supondremos que en cada uno de los vértices del sistema formado por la viga, péndolas ó man-

guetas y tirantes, hay una articulación, de modo que mediante la acción de las fuerzas exteriores; pueden ocasionarse dos deformaciones distintas, que necesitamos evitar; estas deformaciones son: flexionarse los lados del polígono, variar sus ángulos.

Para que no tengan lugar, es necesario que se cumplan las dos condiciones siguientes:

1.^a Ha de haber equilibrio entre todas las fuerzas exteriores.

2.^a Equilibrio en cada elemento de la viga, de las fuerzas exteriores que le están aplicadas, y de las reacciones de los elementos contiguos.

La primera condición dá el medio de determinar las reacciones en los apoyos: la segunda, servirá para hallar las fuerzas de extensión ó compresión á que se hallen sometidas cada una de las piezas.

Las fuerzas exteriores pueden todas estar aplicadas en los vértices de la construcción, y en este caso serán de extensión ó compresión los esfuerzos que han de sufrir cada uno de los lados, y si alguno de estos está sometido además á la acción de una fuerza que obra en cualquiera de sus puntos, tendremos que considerar en él un esfuerzo de flexión. Como ejemplo de lo que acabamos de decir consideremos la viga de la figura 62 en la cual son vértices articulados A, O, C y B; si prescindimos de su peso, y suponemos que en el punto medio B actúa una carga $2P$ estaremos en el primer caso, porque dicha fuerza exterior, obra en una articulación, y no hay ninguna que actúe en un punto tomado arbitrariamente en uno de los lados; pero si además de la expresada carga, admitimos otra uniformemente repartida, cada uno de los lados AB y BC estaría sometido á un nuevo esfuerzo en su punto medio, y entónces todos menos los dos indicados que pueden flexionarse, estarían solo expuestos á compresiones y extensiones.

115. Para el cálculo de las dimensiones, solo necesitaremos conocer la intensidad y naturaleza del esfuerzo que cada elemento so-

porta y aplicar las fórmulas que hemos encontrado. Se pueden seguir dos procedimientos que son el analítico y el gráfico; éste último es el que utilizaremos, pero antes vamos á ver el modo de proceder analíticamente, calculando las dimensiones de los distintos elementos de una viga apoyada en sus extremos, y armada en su punto medio por una mangueta y dos tirantes sometida á una carga concentrada móvil y otra uniformemente repartida. Sean h (figura 62) la longitud de la vigueta, l' la de los tirantes, $2l$ la de la viga, $2P$ la carga concentrada, p la carga por unidad de longitud, T la tensión de los tirantes y α el ángulo que éstos forman con la horizontal.

Consideremos la parte AB de la viga, y puesto que deseamos que no se flexione quedando siempre horizontal, será necesario que la suma de momentos de todas las fuerzas que obran sobre dicho trozo, con relación al punto B correspondiente á la sección media sea igual á cero. Dichas fuerzas son: la reacción P' en el apoyo A cuyo brazo de palanca es l , la carga uniformemente repartida $p l$ cuyo brazo de palanca es $\frac{1}{2} l$, y por último, la componente normal de la tensión T correspondiente al tirante $A o$. Aplicando los convenios admitidos para los signos de los momentos tendremos la siguiente ecuación condicional, que nos vá á servir para determinar el valor de la tensión T .

$$M = P' l - \frac{1}{2} l p l - T l \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

sustituyendo en lugar de P' y $\operatorname{sen} \alpha$ sus valores respectivos

$$P' = P + p l \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{l'}$$

resultará

$$M = P l + p l^2 - \frac{1}{2} p l^2 - T l \frac{h}{l'} = 0,$$

de donde

$$P + \frac{1}{2} p l = T \frac{h}{l'} \quad (1)$$

y despejando el valor de T

$$T = \frac{l'}{2h} (2P + pl) \quad (2)$$

Este sería el valor que hemos de dar á la tensión del tirante, si la carga fuese fija, pero como está en movimiento, es necesario examinar como varía el momento de flexión correspondiente á la sección del centro, cuando la expresada carga se mueve desde B hasta C. A medida que $2P$ va acercándose á C, el término P de la ecuación (1), va decreciendo llegando á anularse cuando la carga actúe en dicho extremo y la ecuación se reduce á la siguiente:

$$\frac{1}{2} pl = T \frac{h}{l'} \quad \text{de donde} \quad T = \frac{l'}{2h} pl$$

este valor, no es el mismo que anteriormente hemos obtenido, y como á la tensión solo podemos dar un valor observemos en que se convierte el momento M de flexión haciendo $P = 0$ y dando á T el valor de la fórmula (2)

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} pl^2 - l \frac{h}{l'} \frac{l'}{2h} (2P + pl) = \\ &= \frac{1}{2} pl^2 - Pl - \frac{1}{2} pl^2 = -Pl \end{aligned}$$

lo cual nos indica que la viga se flexionaría en sentido contrario. Esto nos hace ver que convendrá dar á T un valor tal, que produzca dos flexiones iguales y de sentido contrario, porque de este modo al recorrer la carga toda la viga, ambas flexiones se neutralizarían quedando horizontal.

Para conseguir esto, determinaremos á T con la condición de que cuando $2P$ actúe en el centro,

$$M = \frac{1}{2} P l \quad \text{y} \quad M = -\frac{1}{2} P l$$

cuando obre en uno de los extremos. De esta manera resulta para momento de flexión positivo cuando $2P$ actúe en B.

$$M = P l + \frac{1}{2} p l^2 - T \frac{h}{l'} l = \frac{1}{2} P l$$

de donde

$$P l - \frac{1}{2} P l + \frac{1}{2} p l^2 = T \frac{h}{l'} l \quad \text{ó bien}$$

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} p l = T \frac{h}{l'} \quad T = \frac{l'}{2h} (P + p l)$$

y para momento negativo cuando $2P$ obre en C

$$M = \frac{1}{2} p l^2 - T \frac{h}{l'} l = -\frac{1}{2} P l \quad \text{de donde}$$

$$\frac{1}{2} P l + \frac{1}{2} p l^2 = T \frac{h}{l'} l \quad \text{y} \quad T = \frac{l'}{2h} (P + p l)$$

que es el valor anteriormente encontrado.

116. **Cálculo de las dimensiones**—Para la viga AC tendremos en cuenta el esfuerzo de flexión que según hemos dicho tiene por momento en la sección peligrosa $M = \frac{1}{2} P l$ y como por

otra parte $M = \frac{R Y}{\gamma}$ resulta la ecuación $\frac{1}{2} P l = \frac{R Y}{\gamma}$

en la cual sustituyendo en lugar de Y é γ sus respectivos valores

$\frac{1}{12} b h^3$ y $\frac{1}{2} h$ obtendremos una ecuación con dos indeterminadas b y h pudiendo disponer arbitrariamente de una de ellas.

Las dimensiones de los tirantes se obtendrán aplicando la fórmula $N = R \omega$ correspondiente á la extensión simple, en la cual N representa el esfuerzo T que hemos calculado.

Nos queda solamente conocer el esfuerzo de compresión á que se encuentra sometida la mangueta o B, para lo cual compondremos según su dirección las tensiones de los tirantes; la componente de uno cualquiera de ellos tiene por valor $T \cos. \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = T \times \text{sen. } \alpha$ siendo por lo tanto el esfuerzo de compresión que soporta dicha mangueta, $2 T \text{ sen. } \alpha$. Las dimensiones se obtendrán por la fórmula $N = R \omega$ de donde se deduce $\omega = \frac{N}{R}$ y substituyendo en lugar de N su valor se obtiene

$$\omega = \frac{2 T \text{ sen. } \alpha}{R}$$

117. **Cálculo gráfico.**—Para el cálculo gráfico supondremos que todas las cargas obran concentradas en puntos de la viga apoyados mediante manguetas, es decir, que las distintas fuerzas actúan en vértices del polígono formado por las piezas, estando por lo tanto en el caso que todas ellas sufren esfuerzos de extensión ó compresión. Para determinar estos esfuerzos, aplicaremos en cada vértice la condición de equilibrio entre las extensiones ó compresiones correspondientes á las distintas piezas que en él se reúnen, teniendo en cuenta que todas ellas obran según el eje de simetría de la pieza correspondiente, y que gráficamente la condición de equilibrio de un sistema equivale á la de cierre del polígono de fuerzas. De este modo obtendremos para cada vértice un polígono distinto, y todos reunidos por tener cada uno un lado común con el siguiente formarán la figura llamada *diagrama* de fuerzas. Elegiremos una escala geométrica para representar las fuerzas conocidas por ser datos de la cuestión, mediante líneas rectas, y pasando inversamente con las incógnitas, de las magnitudes geométricas á las fuerzas, tendremos conocidos los esfuerzos N correspondientes á cada pieza, con lo cual y el empleo de la fórmula $N = R \omega$, siendo R la

resistencia por unidad superficial á la extensión ó compresión, determinaremos las dimensiones. Tanto en los diagramas como en las armaduras representaremos por una línea sencilla los esfuerzos de extensión y dibujaremos de trazo doble las de compresión.

118. **Armadura de una sola mangueta.**—Consideremos la viga $A B C$, (fig. 63) que soporta una carga $2 P$ concentrada en su punto medio B . Las reacciones en los apoyos A y C , tendrán cada una por valor la mitad de la carga total ó sea P .

El diagrama de fuerzas se obtendrá empezando por establecer el equilibrio en el vértice A , para lo cual como conocemos la magnitud y dirección de la fuerza P que obra en él, y las direcciones $A D$ y $A B$ de las otras dos fuerzas, trazaremos la recta $a c$ cuya magnitud sea equivalente en la escala adoptada á la fuerza $2 P$, si esta recta la dividimos en dos partes iguales, cada una de ellas representará las reacciones de los apoyos; tomando la mitad superior $a b$ como representación gráfica de la reacción correspondiente al apoyo A , y trazando por los puntos a y b paralelas respectivamente á la viga y al tirante $A D$, tendremos en 1 y 2 la magnitud de los esfuerzos á que estas piezas están sometidas, falta solamente determinar la naturaleza de estos esfuerzos lo cual conseguiremos observando que en un polígono de fuerzas tal como el $a d b$ todas tienen sus direcciones de modo que siguiendo su sentido, se recorra el perímetro de una manera determinada y como el sentido de la fuerza P es el $b a$, resulta para los 1 y 2 respectivamente $a d$ y $d b$ ó lo que es igual la viga se encuentra solicitada por una fuerza en la dirección $B A$ que la comprime y el tirante de la izquierda por otra, que actuando en el sentido $A D$ produce una extensión.

Pasemos ahora al vértice ó articulación B , en donde nos encontramos que actúan cuatro fuerzas, dos conocidas en magnitud y dirección y otros dos en dirección solamente: podemos componer las

dos conocidas y descomponer su resultante como en el caso anterior; la composición de las fuerzas 1 y 2 p que actúan en B, dá por resultante la fuerza dc dirigida según cd , porque las fuerzas 2 P obra en la dirección ac siendo en su consecuencia acd el sentido en que hay que recorrer el perímetro del polígono correspondiente al vértice B; al recorrer de este modo el perímetro del triángulo acd se obtiene para sentido de la fuerza 1 el ad opuesto al anterior, lo cual es muy natural porque estamos considerando como varillas rígidas las porciones comprendidas entre cada dos articulaciones y para que el equilibrio exista separadamente en cada una de ellas, se necesitan dos fuerzas iguales y contrarias, de modo que si en el vértice A actúa una fuerza 1 en la dirección AB en el vértice B ha de obrar otra fuerza de la misma magnitud, dirigida según BA; así es que la compresión 1 tiene distinto sentido según que se considere al vértice A ó el vértice B. Conocida la magnitud y sentido cd de la resultante de las fuerzas que obran en el vértice B, construiremos el triángulo correspondiente trazando los ce y de paralelas á la viga y á la mangueta BD, de este modo tendremos en ec y de los esfuerzos á que respectivamente se encuentran sometidas las piezas indicadas que por obrar en los sentidos BD y BC producen ambas compresiones.

Por último componiendo las fuerzas 2 y 3 tendremos en eb la dirección y sentido de la fuerza á que está sometido el tirante DC que por obrar según CD tiende á extenderle.

Podríamos haber construido para el vértice C el triángulo bec análogo al adb pero el diagrama de fuerzas es simétrico con relación á la paralela trazada por b al lado da , del mismo modo que la armadura lo es con relación á la recta BD.

119 **Armadura de dos manguetas.** (Fig. 64.)—En los puntos B y C equidistantes de los extremos, actúan dos fuerzas iguales P , siendo, por lo tanto, iguales y contrarias á estas fuerzas las reaccio-

nes de los apoyos. Tomemos la fuerza ab igual á P y trazando las paralelas ac y cb al trozo de viga $A B$ y al tirante $A E$ tendremos el triángulo $b a c$ que nos dá la dirección y sentido de los esfuerzos soportados por cada una de dichas piezas que resultan compresión para la mangueta y extensión para el tirante. La fuerza 2 considerada actuando en el vértice E , tiene la dirección bc y descompuesta en las direcciones cd y db nos dá un nuevo triángulo con los esfuerzos de compresión y extensión que respectivamente corresponden á la mangueta $B E$ y al tirante $E F$. Por último, componiendo las tres fuerzas P , 1 y 3 que obran en el vértice B tendremos en bd la dirección y sentido del esfuerzo de compresión 4 soportado por el trozo de viga $B C$.

Si las cargas que actúan en los puntos B y C no son iguales no puede admitirse esta armadura, por que al considerar la parte de la derecha obtendríamos para el esfuerzo de compresión correspondiente al trozo $B C$, un valor distinto del 4 que últimamente hemos calculado, lo cual se opone al equilibrio de dicho trozo considerado como varilla seguida. Se hace necesario en este caso el empleo de dos nuevos tirantes los cuales representa de puntos la figura en $B F$ y $E C$.

120 **Armadura de tres manguetas.** (Fig. 65.)—Sea la viga $A B C D E$ en la cual actúan tres fuerzas en los puntos B , C y D , iguales entre sí; las reacciones en cada uno de los apoyos tienen la magnitud $3 P$. Empezaremos descomponiendo la fuerza $3 P = ab c$ en otras dos $ea = 1$ y $ce = 2$ que representen respectivamente la compresión del trozo $A B$ de viga y del tirante $A F$: después compondremos la fuerza 1 con la $ab = 2 P$ descomponiendo en seguida la resultante be en las ef y fb que son las compresiones 3 y 4 que soportan la mangueta $B F$ y el trozo $B C$ de viga. Pasando al vértice F compondremos las fuerzas 2 y 3 obteniendo por resultante la fc que á su vez descompuesta proporciona las extensiones

5 y 6 de los tirantes F C y F G. Siendo evidentemente iguales las extensiones 6 y 10 trazando la ch paralela á G H é igual á 6 se obtiene la compresión gh de la mangueta C G; no continuamos las construcciones por la simetría que presenta la figura.

121. **Armadura de varias manguetas.**—Sea la viga A J apoyada en sus extremos y reforzadas por siete manguetas en cada una de las cuales soporta una carga concentrada igual á 2 P: (fig. 66) el cálculo gráfico se hará como hemos indicado en los casos anteriores recorriendo sucesivamente los vértices A, B y K pero al llegar al vértice L, tropezamos con el inconveniente de tener que descomponer la única fuerza conocida 6 en tres direcciones y si nos vamos al C también hemos de descomponer de igual manera la resultante de las fuerzas 4, 5 y 2 P: estas operaciones son imposibles de efectuar, pero se salva la imposibilidad determinando la fuerza 7 por la consideración de ser resultante de la carga 2 P y las componentes verticales de las extensiones sufridas por los tirantes 5 y 9 los cuales son iguales por apoyar estos tirantes á manguetas igualmente comprimidas. Para obtener la fuerza 7 en el diagrama trazaremos la hi la cual vemos se compone de tres partes que sucesivamente son, la componente según dirección de la fuerza 5 una magnitud igual á 2 P y otra igual á la primera; pasando ya el vértice L compondremos 7 con 6 obteniendo por resultante la ie que se descompone en las 10 y 11 continuando de igual modo sin dificultad alguna concluiríamos la construcción.

122 **Armaduras de cubiertas.**—Estas armaduras pueden considerarse como vigas compuestas de un cordón superior, formado por partes poligonales (figs. 68 y 69) ó curvas llamadas *pares*, y un cordón inferior, recto ó poligonal, que recibe el nombre de *tirante*; el núcleo, semejante al alma de las vigas, está constituido por combinaciones de piezas comprimidas, (*montantes, manguetas ó bielas* y piezas extendidas, (*pendolón, péndolas, tirantes, etc.*)

La parte esencial de una armadura, está constituida por dos ó más piezas proyectadas en el contorno superior rayado en las figuras, sobre las cuales se apoyan horizontalmente listones unidos mediante las piezas que forman el núcleo interior.

123 **Cubierta sin ninguna mangueta** (fig. 68).—Supongamos que en la arista superior de la cubierta actúa una carga $2P$ con lo cual serán iguales á P las reacciones en cada uno de los apoyos; partiendo de la fuerza $ab = P$ se construye el diagrama de fuerzas con mucha facilidad, de manera análoga á la indicada en las vigas armadas.

Cubierta con dos manguetas.—La figura 69 representa esta cubierta así como su cálculo gráfico que no tiene ninguna dificultad. Solo en él se ha tenido en cuenta la mitad izquierda de la cubierta por ser simétricas las construcciones.

125. **Armadura de un sólido empotrado.**—Consideremos una pieza fija, empotrada en sus extremos B y C (fig. 70) cargada con un peso P normal á su eje de simetría. Para el cálculo gráfico tomaremos $ab = P$ y trazando la ac y cb tendremos los esfuerzos 1 y 2; el primero lo descompondremos en 4 y 3 mediante el triángulo cbe y el segundo en los 5 y 6; pasando al vértice siguiente, compondremos las fuerzas 3 y 5, para lo cual trasladaremos el esfuerzo 5 á ef dando por resultante la fb que á su vez descompondremos en 7 y 8; continuando de igual manera, al llegar á las fuerzas 15 y 16, 17 y 18 quedan conocidos los esfuerzos que soportan todas las varillas, pero el polígono no se cierra; para conseguirlo compondremos las fuerzas 15 con 17 y 16 con 18, obteniendo de este modo, las reacciones que los apoyos han de ejercer sobre la pieza, para asegurar su estabilidad.

126. **Viga de la grúa de 60 toneladas.**—Consultando la figura 67 se comprende enseguida la manera de efectuar este cálculo gráfico en el cual no se han representado por líneas de puntos como

en los ejemplos anteriores las resultantes parciales para no complicarla.

El diagrama de fuerzas, se compone de dos partes simétricas que se refieren á los análogos de la viga. Compouiendo las fuerzas 16 y 18 y esta resultante con la simétrica de 16' y 18', obtendremos una fuerza, que aumentada en la carga 2 P, nos dá el esfuerzo que soporta la varilla 19.

CAPÍTULO 10.

Deformaciones compuestas.

127. **Extensión y compresión compuestas.** — Consideremos un prisma recto rectangular sometido paralelamente á uno de sus sistemas de aristas á un esfuerzo de extensión uniformemente repartido, las aristas de que se trata se alargarán, pero como la cantidad de materia no ha variado, es necesario que las demás se acorten, de donde resulta que la extensión en un sentido viene acompañada de compresión en sentido normal, ó lo que es lo mismo, todo prisma que se extienda longitudinalmente, se comprime transversalmente, y recíprocamente la compresión longitudinal es origen de dilatación transversal.

128. **Cálculo del incremento de volumen.** — Supongamos que un prisma de dimensiones a, b , y L sea sometido á un esfuerzo de tracción dirigido según su longitud; por efecto de dicho esfuerzo, se alargarán la arista L pero las otras dos se acortarán, y si representamos por i el alargamiento y Σ el acortamiento por unidad de longitud tendremos para las distintas aristas las longitudes siguientes:

$L \dots$ aumenta iL y se convierte en $L + iL = L(1 + i)$

$a \dots$ id. $-a\Sigma$ id. $a - a\Sigma = a(1 - \Sigma)$

$b \dots$ id. $-b\Sigma$ id. $b - b\Sigma = b(1 - \Sigma)$

por lo tanto llamando $V = a b L$ el volumen antes de la deformación y $V + \Delta V$ dicho volumen después de ella tendremos:

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= L a b (1 + i) (1 - \Sigma)^2 = V (1 + i) (1 - 1 \Sigma + \Sigma^2) \\ &= V (1 - 2 \Sigma + \Sigma^2 + i - 2 \Sigma i + i \Sigma^2) \end{aligned}$$

si tenemos en cuenta la pequeñez de las cantidades Σ é i podremos despreciar sus productos y potencias con lo cual se obtiene,

$$V + \Delta V = V (1 + i - 2 \Sigma)$$

Si restamos V á los miembros de la ecuación anterior obtendremos el incremento de volumen,

$$\Delta V = V (i - 2 \Sigma)$$

y si dividimos este incremento por el volumen primitivo, tendremos el correspondiente á la unidad que representándolo por u será

$$u = \frac{V (i - 2 \Sigma)}{V} = i - 2 \Sigma \quad (1)$$

129. **Relación entre los alargamientos correspondientes á la extensión y compresión simultáneas** — Muchas son las experiencias que se han efectuado para obtener dicha relación, pero las más importantes son debidas á Poisson, Wertheim y M. Lamé; los dos primeros, determinaron experimentalmente el incremento de volumen correspondiente á la unidad en función del alargamiento por unidad de longitud y fundándose en la fórmula (1) hallaron el valor de la relación pedida, que designaremos por m

Poissón halló $u = \frac{1}{2} i$ y sustituyendo en (1) se obtiene

$$\frac{1}{2} i = i - 2 \Sigma \quad \frac{1}{2} i = 2 \Sigma \quad m = \frac{\Sigma}{i} = \frac{1}{4}$$

Wertheim encontró $u = \frac{1}{3} i$ y sustituyendo en (1) resulta

$$\frac{1}{3} i = i - 2 \Sigma \quad \frac{2}{3} i = 2 \Sigma \quad m = \frac{\Sigma}{i} = \frac{1}{3}$$

Por último, según M. Lamé, las cantidades i y Σ son funciones por él encontradas del esfuerzo F de tracción y dos coeficientes indeterminados y asegura que la relación m es variable con la naturaleza de los cuerpos. La cuestión no está resuelta según se vé, pero como admitimos, al menos para los límites de la práctica, proporcionalidad entre los esfuerzos y los alargamientos, debemos también admitir que sea constante la relación que nos ocupa,

Habiendo Wertheim efectuado sus experiencias con mucha precisión, la relación $\frac{1}{3}$ será considerada en adelante como verdadero valor de m .

130. **Determinación del esfuerzo hipotético de contracción.**

—Hemos dicho que cuando un prisma está sometido á un esfuerzo de extensión, se contrae en dirección normal á este esfuerzo; evidentemente, esta contracción puede suponerse ocasionada por la acción de un nuevo esfuerzo, al cual se llama hipotético de contracción; vamos á determinar su valor referido á la unidad de longitud en función del correspondiente de extensión que nos es conocido. Para ello, acudiremos á la fórmula de la compresión simple, según la cual se tiene; $N = -E \omega i$, haciendo $\omega = 1$ y teniendo en cuenta que el acortamiento es en este caso Σ , tendremos llamando F' el esfuerzo hipotético de contracción por unidad de longitud y F al de extensión.

$$F' = -E \Sigma = -E m i = -E \frac{1}{3} i = -\frac{1}{3} (E i) = -\frac{1}{3} F$$

131. **Preliminares á la resistencia de tubos.**—Antes de establecer las ecuaciones de equilibrio de un tubo, estudiemos los esfuerzos que obran en la dirección de las aristas de un prisma, cuando este se somete á uno determinado en dirección de cada una de ellas; refiramos el prisma á un sistema coordenado, cuyo eje de los X (fig. 71) coincida con su eje de figura, siendo los de las Y y Z pa-

ralelos á las otras dos aristas. Sean X Y y Z , los esfuerzos que obren sobre el prisma, en la dirección de los ejes de igual nombre, evidentemente, cada uno de ellos, se encontrará contrarrestado por los esfuerzos hipotéticos de contracción, que provienen de los otros dos, así es, que modificándolos según hemos dicho en el párrafo anterior, y teniendo en cuenta que el esfuerzo es igual al producto del módulo de elasticidad, por el alargamiento referido á la unidad resultará el siguiente cuadro, llamando i_x i_y é i_z los alargamientos por unidad en dirección de los respectivos ejes.

$$\text{Esfuerzo } X \dots X - \frac{1}{3} Y - \frac{1}{3} Z = E i_x$$

$$\text{Id. } Y \dots Y - \frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Z = E i_y$$

$$\text{Id. } Z \dots Z - \frac{1}{3} X - \frac{1}{3} Y = E i_z$$

132. **Aplicación a un filete anular.**—Fundándonos en estas ecuaciones, vamos á determinar las correspondientes al caso de un filete anular, entendiéndose por este nombre un cilindro de espesor infinitamente pequeño. Refiramos el filete á un sistema coordinado constituido por su radio, la tangente en el extremo y la perpendicular á ambos; representemos por p , t y q los esfuerzos en dirección de cada uno de los ejes, y vamos á modificar dichos esfuerzos, del mismo modo que lo hemos hecho para el caso de un prisma, considerando las compresiones como tracciones negativas, y los acortamientos como alargamientos igualmente negativos. El esfuerzo p en la dirección del radio, produce acortamiento en el espesor del filete, que es la dimensión correspondiente, y por lo tanto, este esfuerzo debe considerarse negativo; veamos ahora como es modificado por los otros dos; el esfuerzo t según la tangente, tiende á aumentar la longitud de la circunferencia, y por lo tanto á disminuir

el espesor del filete, luego también su modificación $\frac{1}{3} t$ debe considerarse negativa; por último, el esfuerzo q según el tercer eje, tiende á aumentar la altura del filete, y por lo tanto, á disminuir su espesor, de modo que su modificación $\frac{1}{3} q$ también será negativa. El esfuerzo que realmente actúa en la dirección del radio del filete tendrá por expresión

$$- \left(p + \frac{t}{3} + \frac{q}{3} \right)$$

y dividiéndolo por el módulo de elasticidad, obtendremos el alargamiento negativo en la dirección del radio, que llamaremos adelgazamiento

$$- \frac{1}{E} \left(p + \frac{t}{3} + \frac{q}{3} \right)$$

Razonando de igual manera, tendremos para los otros dos:

según el eje el alargamiento $\frac{1}{E} \left(q + \frac{p}{3} - \frac{t}{3} \right)$

» la circunferencia » $\frac{1}{E} \left(t + \frac{p}{3} - \frac{q}{3} \right)$

133. **Equilibrio de un filete anular.**—El filete está representado en la figura 73 por las circunferencias de puntos; llamemos

				de radio R
P'	»	»	»	R'
p	»	»	»	p
T la tensión	»	»	»	R
T'	»	»	»	R'
t	»	»	»	p

La ecuación de equilibrio de un cilindro de pequeño espesor la hemos determinado y tenía por expresión

$$p D L = 2 R e L (1)$$

en ella, el primer miembro representa el esfuerzo total que tiende á romper el tubo por una sección que pasa por su eje, y el segundo la resistencia que opone la materia á esta rotura; en el caso que consideramos, $p D L$ será la diferencia de los componentes normales al plano de la sección, de las presiones ejercidas en las superficies de radios R y ρ ; cada una de estas, tendrá respectivamente por valor teniendo en cuenta que $d h$ es la altura comun del cilindro y del filete,

$$P \ 2 R d h \quad \text{y} \quad p \ 2 \rho d h, \quad \text{siendo su diferencia}$$

$$P \ 2 R d h - p \ 2 \rho d h = p D L \quad (a)$$

el segundo miembro de la ecuación (1) será en el caso presente, la ensión total, según la tangente que presenta la sección del tubo por un plano que pasa por su eje; ahora bien, dicha sección son dos rectángulos, de modo que la tensión será doble de la de cualquiera de ellos; descomponiendo uno de estos en rectángulos infinitesimales de altura $d \rho$ y base-común $d h$, la tensión que le corresponde se obtendrá multiplicando su área $d \rho d h$ por la tensión t referida á la unidad superficial, la cual es función de la distancia ρ al eje, del rectángulo infinitesimal que se considere; de modo que dicha tensión tendrá por valor

$$d h \int_R^\rho t d \rho \quad \text{y por lo tanto} \quad 2 R e = 2 d h \int_\rho^R t d \rho \quad (6)$$

combinando las ecuaciones (1), (a) y (b) se obtiene

$$P \ 2 R d h - p \ 2 \rho d h = 2 d h \int t d \rho \quad \text{de donde}$$

$$P R - p \rho = \int t d \rho \quad (3)$$

esta es la ecuación de equilibrio de un tubo de espesor $\rho - R$ y diferenciándola obtendremos la correspondiente á un filete anular que será

$$d(p \rho) = t d \rho \quad (4).$$

133. **Ecuación de las deformaciones.**—Dos son las deformaciones que vamos á considerar; una según el radio, y otra según la circunferencia; para la primera, llamando i_p la contracción correspondiente á la unidad de longitud y valiéndonos de la formula

$$E i_p = p \text{ deducimos } i_p = \frac{p}{E}$$

La correspondiente á la longitud $d\rho$ será

$$i_p d\rho = \frac{p}{E} d\rho \text{ y para el espesor } \rho - R \int_R^{\rho} p d\rho.$$

La ecuación de la deformación relativa á la circunferencia, se obtendrá de una manera análoga observando que en este caso corresponde á la unidad de longitud el alargamiento $i_t = \frac{t}{E}$; á la circunferencia completa de radio ρ corresponderá

$$2\pi\rho i_t = \frac{t}{E} 2\pi\rho.$$

La longitud de dicha circunferencia deformada tendrá por expresión

$$2\pi\rho + 2\pi\rho\frac{t}{E} = 2\pi\rho\left(1 + \frac{t}{E}\right) \text{ y el radio será } \rho\left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

La circunferencia de radio R se convertirá en

$$2\pi R\left(1 + \frac{t}{E}\right) \text{ siendo su nuevo radio } R\left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

El espesor del tubo después de la deformación será

$$\rho\left(1 + \frac{t}{E}\right) - R\left(1 + \frac{t}{E}\right)$$

y la diferencia de espesores ó deformación según el radio, tendrá por valor,

$$\left(\rho - R\right) - \left\{\rho\left(1 + \frac{t}{E}\right) - R\left(1 + \frac{t}{E}\right)\right\} = R\frac{t}{E} - \rho\frac{t}{E}$$

pero hemos dicho que esta deformación era

$$\frac{1}{K} \int_R^{\rho} p d\rho,$$

deduciendo de ambos resultados la nueva ecuación

$$R \frac{t}{E} - \rho \frac{t}{E} = \frac{1}{E} \int_R^{\rho} p d\rho \quad \text{ó bien} \quad R t - \rho t = \int_R^{\rho} p d\rho$$

que diferenciada, dá la siguiente, relativa al equilibrio del filete anular

$$- d(t\rho) = p d\rho \quad (5)$$

134. **Ecuaciones del equilibrio de un tubo.**—Las ecuaciones obtenidas son:

$$\left. \begin{array}{l} -d(\rho t) = p d\rho \\ -d(p\rho) = t d\rho \end{array} \right\} \text{de donde} \left\{ \begin{array}{l} p d\rho + t d\rho + \rho dt = 0 \\ t d\rho + p d\rho + \rho dp = 0 \end{array} \right\} \quad (6)$$

sumándolas miembro á miembro tendremos

$$2 p d\rho + 2 t d\rho + \rho (dt + dp) = 2 (p+t) d\rho + \rho d(t+p) = 0$$

Dividiendo por $(t+p)$ se obtienen

$$2 \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d(t+p)}{t+p} = 0 \quad \text{é integrando}$$

$$\int 2 \frac{d\rho}{\rho} + \int \frac{d(t+p)}{t+p} = C^{te}$$

ó bien $2 \log. \rho + \log. (t+p) = C^{te}$ de donde $\log. \rho^2 (t+p) = C^{te}$ para que esto se verifique, es necesario que

$$\begin{aligned} \rho^2 (t+p) &= C^{te} \quad \text{y por lo tanto} \quad \rho^2 (t+p) = R^3 (T+P) \\ &= R'^2 (T'+P') = \dots \end{aligned}$$

de donde se deduce la 1.^a condición del equilibrio de un tubo.

La suma en ue punto cualquiera de la tensión según la circunferencia y de la presión según el radio del círculo, varía en razón inversa del cuadrado de dicho radio.

Restando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene

$$\rho dt - \rho dp = \rho (dt - dp) = \rho d(t - p) = 0$$

y como ρ no puede ser nulo, lo será el factor $d(t - p)$ ó lo que es lo mismo

$$t - p = T - P = T' - P' = \dots C^{te}$$

de donde se deduce la segunda condición de equilibrio.

La diferencia entre la tensión y la presión, es la misma para todos los puntos.

Los esfuerzos en sentido del eje por unidad superficial son constantes porque se verifica,

$$q - \frac{t}{3} + \frac{p}{3} = C^{te}$$

y diferenciando.

$$dq - \frac{1}{3} d(t - p) = 0 \quad \text{ó} \quad dq = \frac{1}{3} d(t - p)$$

pero hemos dicho que

$$d(t - p) = 0 \quad \text{luego} \quad dq = 0 \quad \text{y} \quad q = C^{te}$$

según nos proponíamos demostrar.

La tracción total según el eje, tendrá por expresión

$$Q = q \omega$$

y substituyendo en lugar de ω su valor $\pi(R'^2 - R^2)$ se obtiene

$$Q = q \pi (R'^2 - R^2).$$

135 **Cálculo del espesor de un tubo**—Las ecuaciones de equilibrio que hemos encontrado son:

$$\left. \begin{aligned} R^2 (T + P) &= R'^2 (T' + P') = C^{te} & (1) \\ T - P &= T' - P' = C^{te} & (2) \end{aligned} \right\} \text{de la (2) se deduce}$$

$$T' = T - P + P'$$

y substituyendo en la (1) se deduce

$$R^2(T + P) = R'^2(T - P + 2P')$$

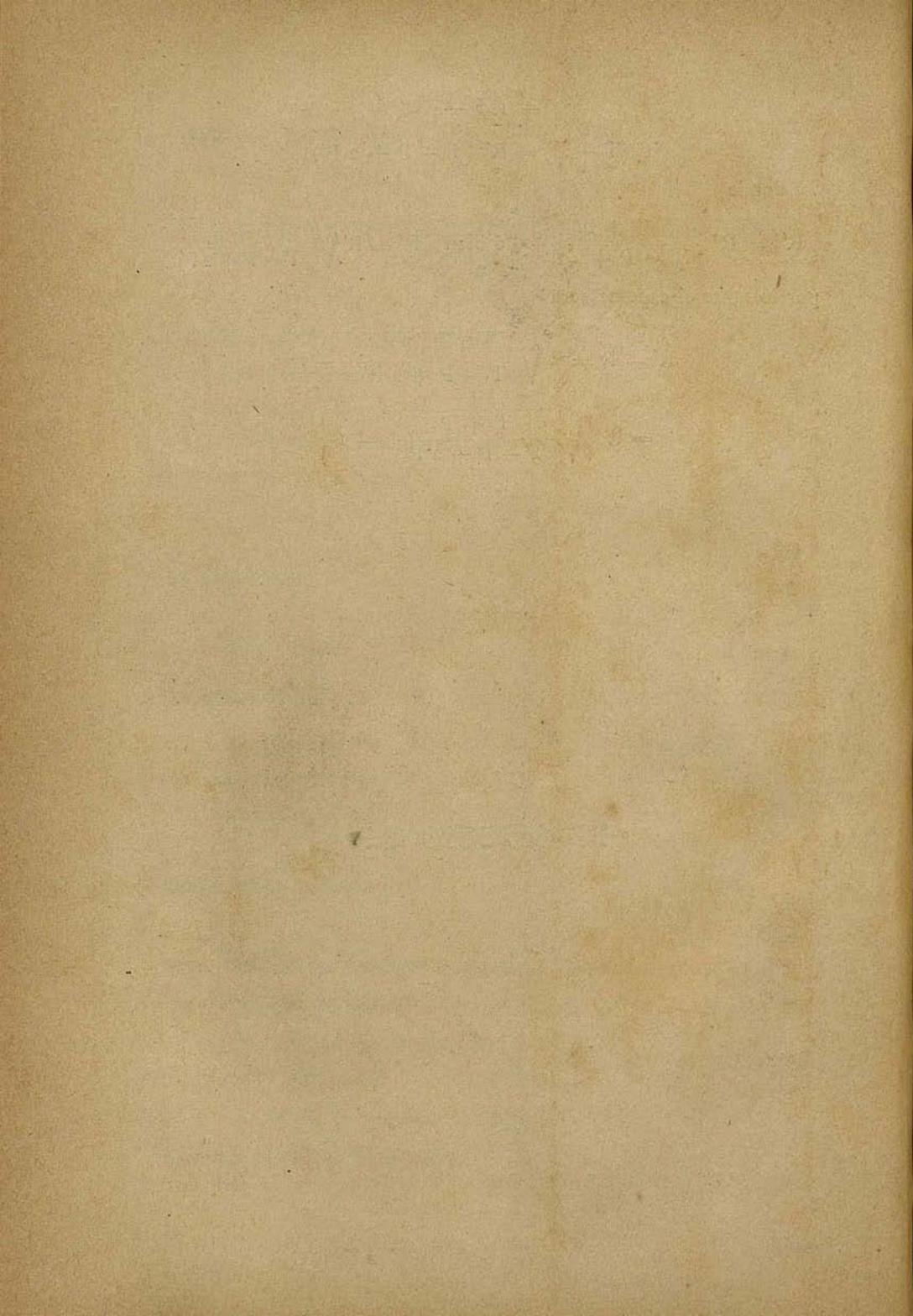
de donde

$$R'^2 = R^2 \frac{T + P}{T - P + 2P'} \quad \text{ó bien} \quad R' = R \sqrt{\frac{T + P}{T - P + 2P'}}$$

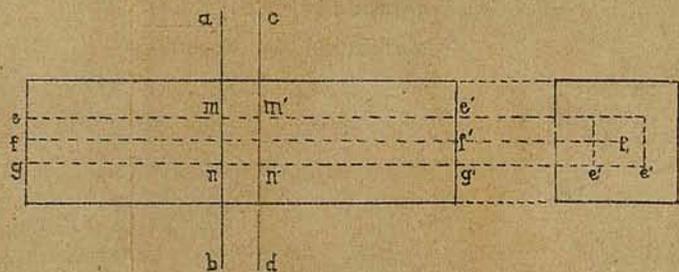
por lo tanto el espesor será

$$\begin{aligned} R' - R &= R \sqrt{\frac{T + P}{T - P + 2P'}} - R \\ &= R \left\{ \sqrt{\frac{T + P}{T - P + 2P'}} - 1 \right\} \end{aligned}$$

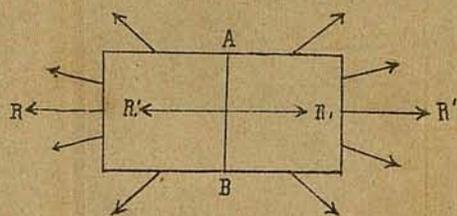




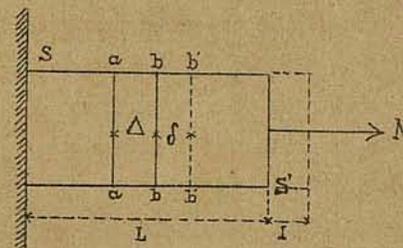
Fig^a 1^a



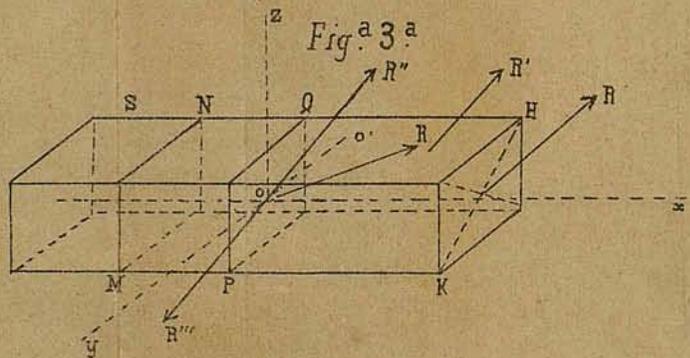
Fig^a 2^a



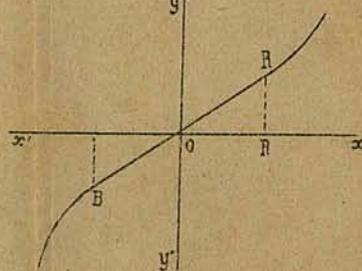
Fig^a 4^a



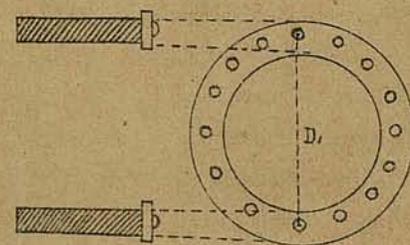
Fig^a 3^a



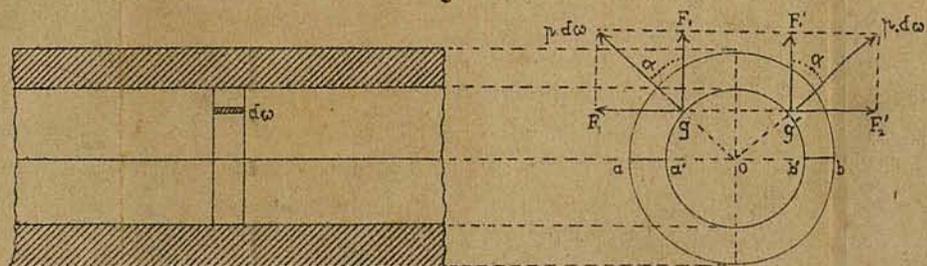
Fig^a 5^a



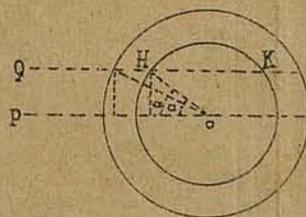
Fig^a 7^a



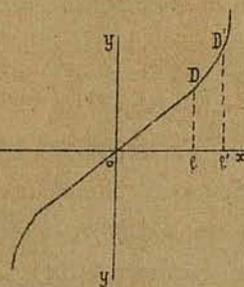
Fig^a 6^a



Fig^a 8^a



Fig^a 9^a



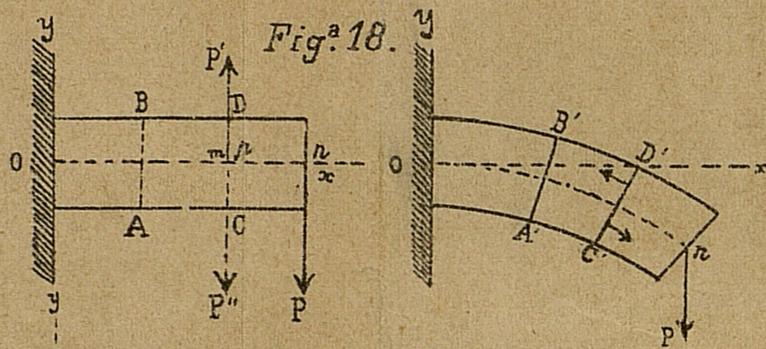


Fig.^a 18.

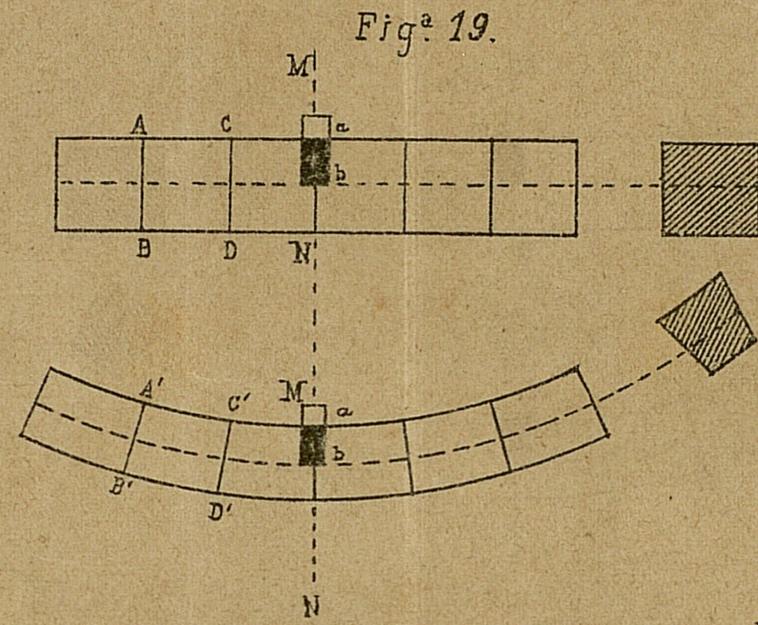


Fig.^a 19.

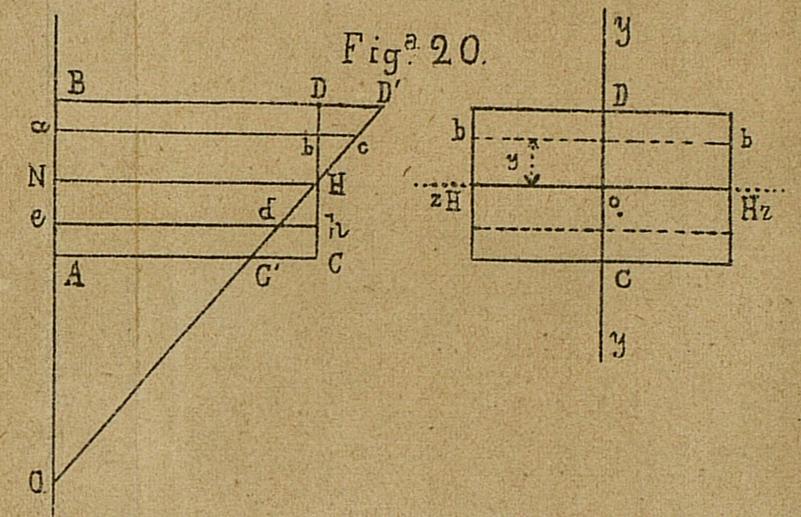


Fig.^a 20.

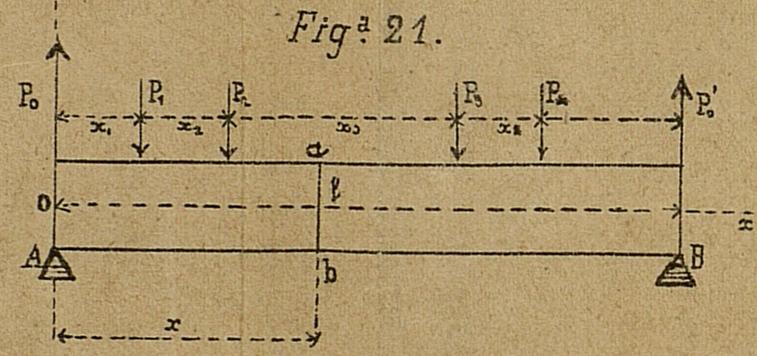


Fig.^a 21.

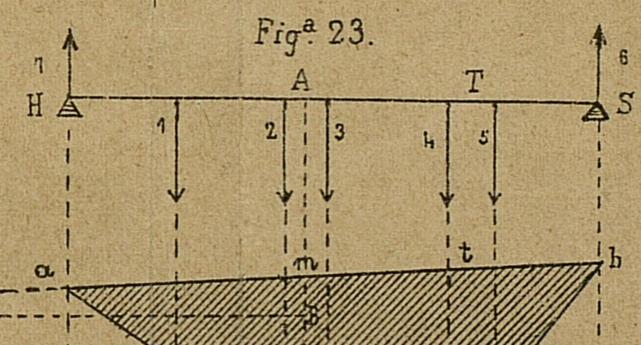


Fig.^a 23.

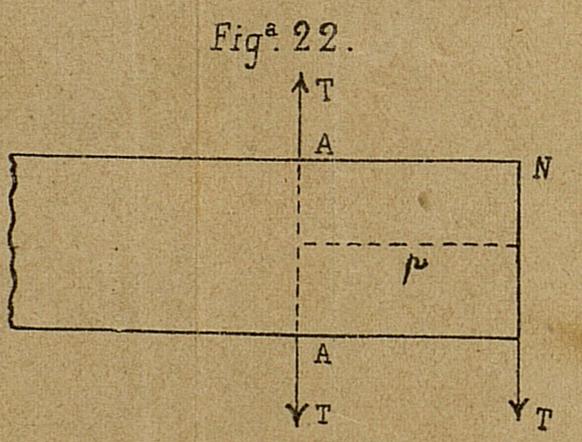


Fig.^a 22.

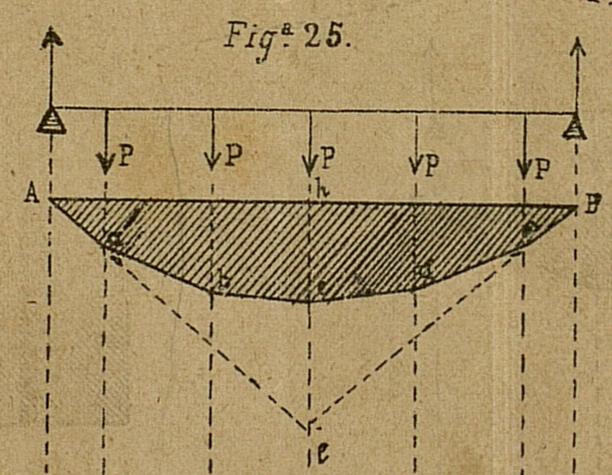


Fig.^a 25.

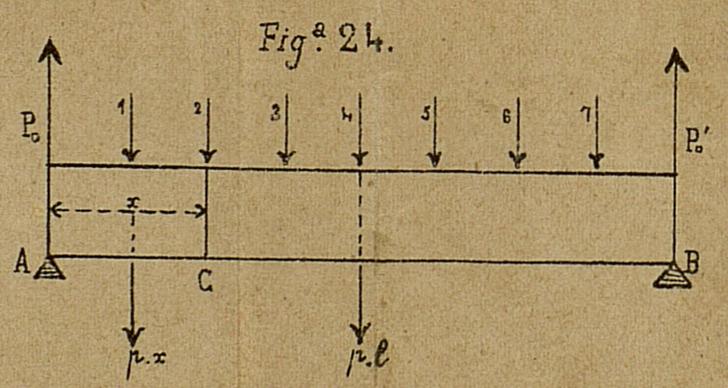
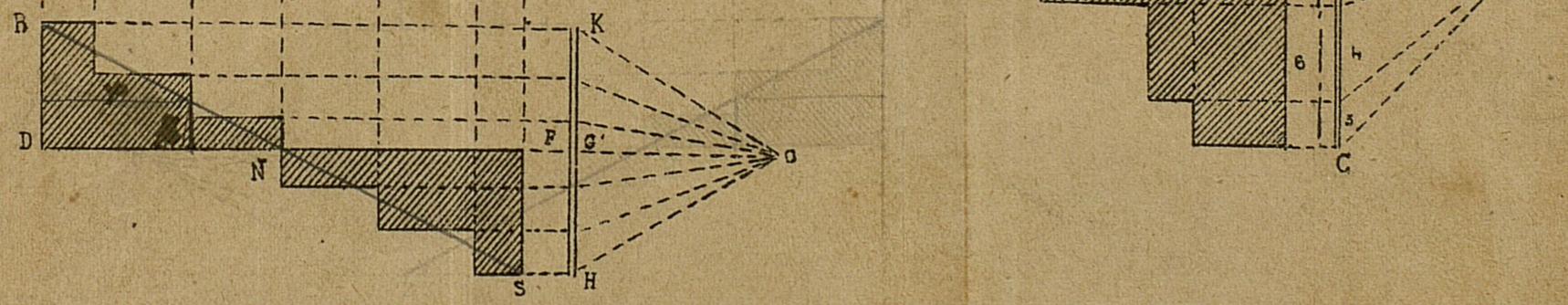
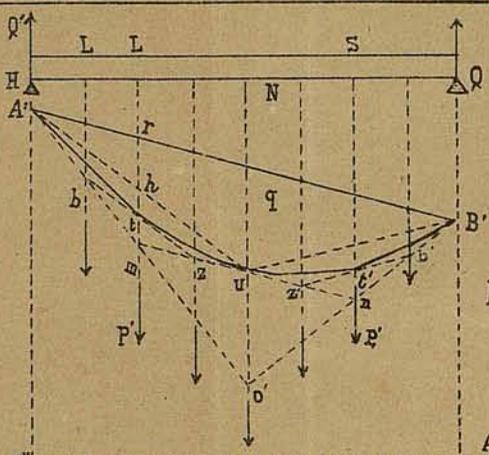
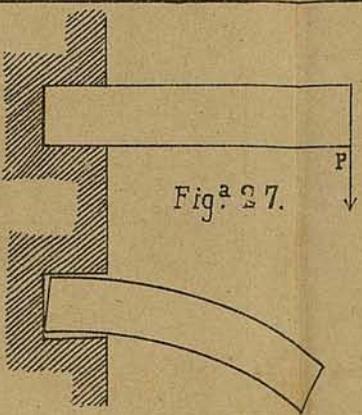


Fig.^a 24.

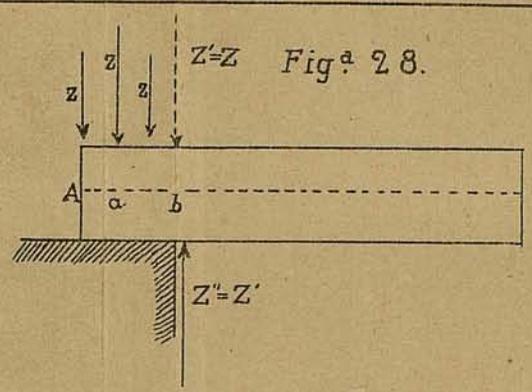




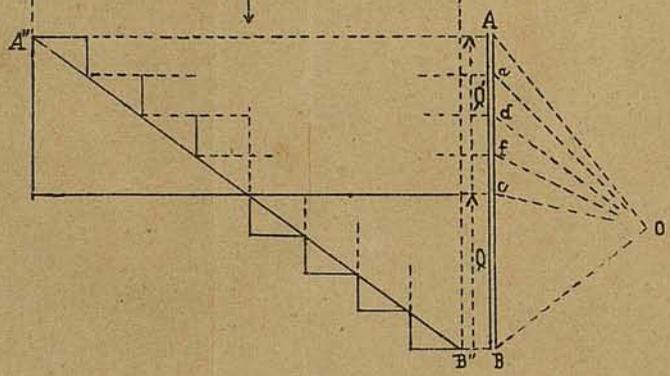
Fig^a 26.



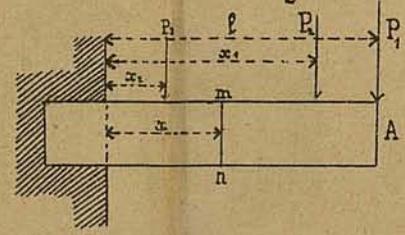
Fig^a 27.



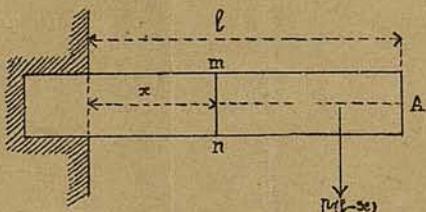
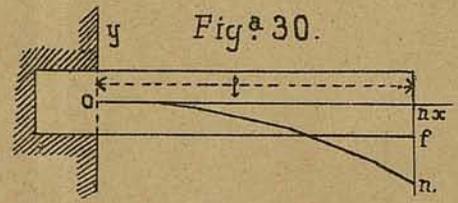
Fig^a 28.



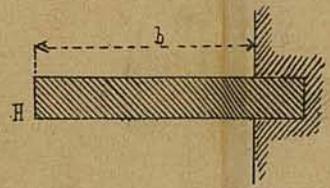
Fig^a 29.



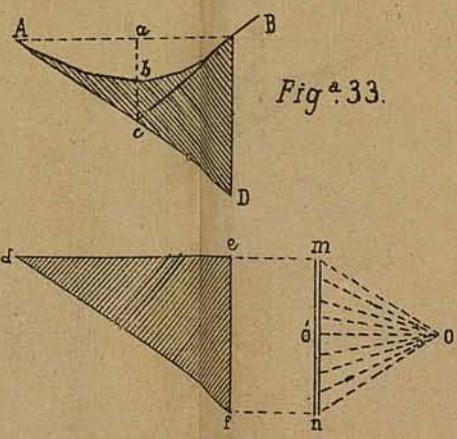
Fig^a 30.



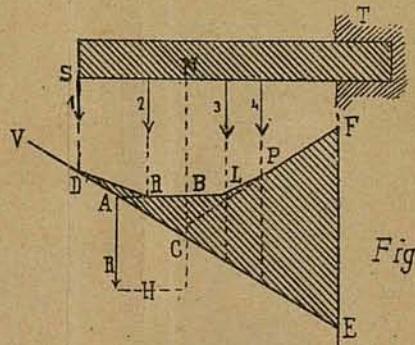
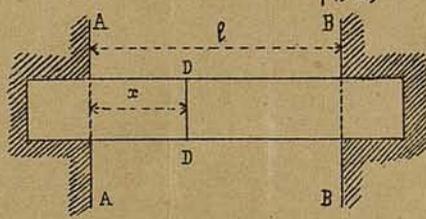
Fig^a 32.



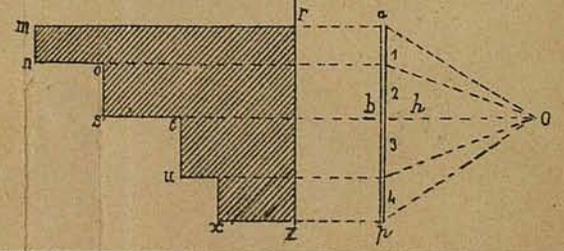
Fig^a 33.



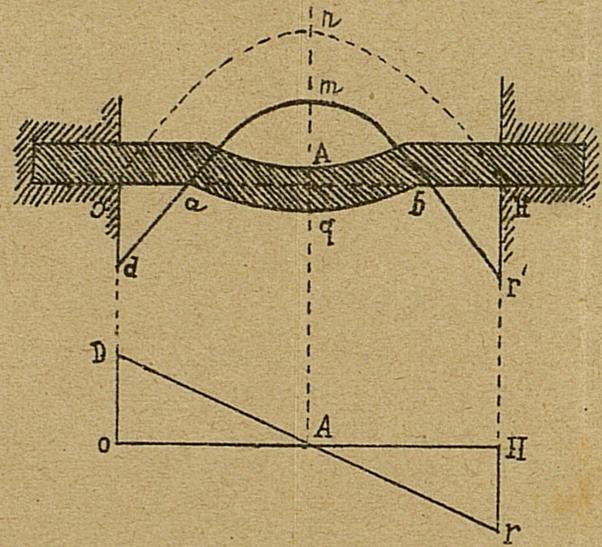
Fig^a 34.



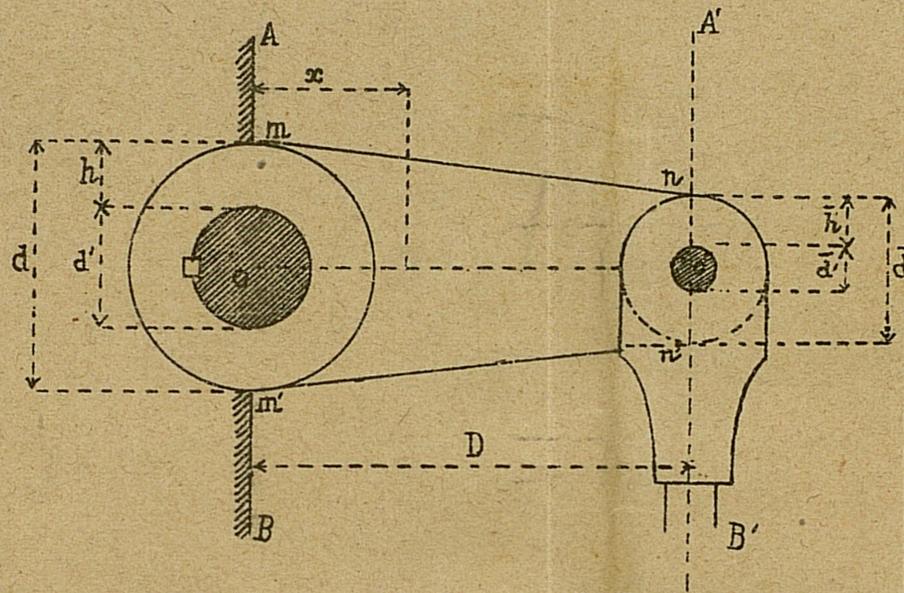
Fig^a 36.



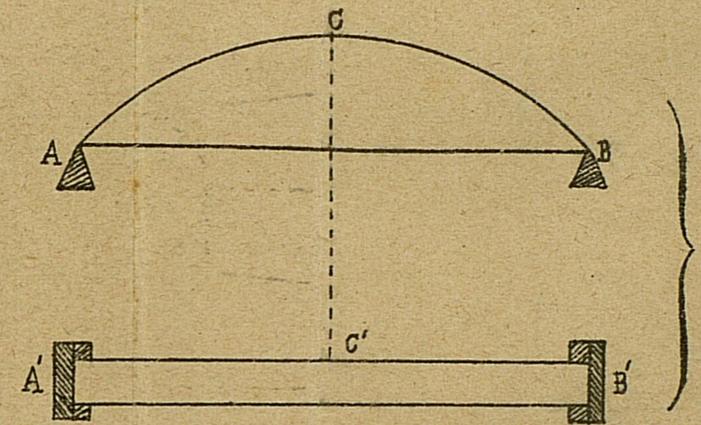
Fig^a 35



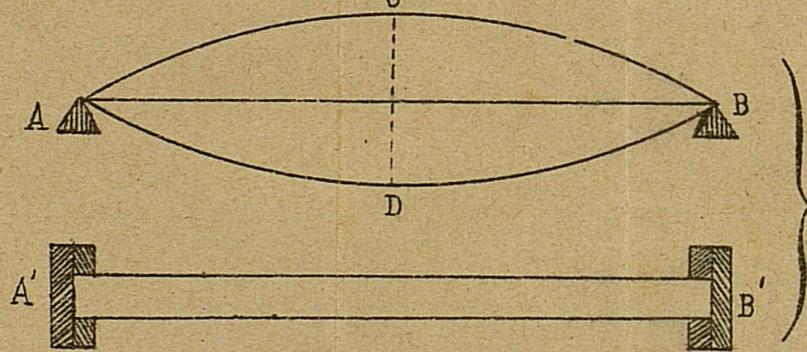
Fig^a 36



Fig^a 37



Fig^a 38



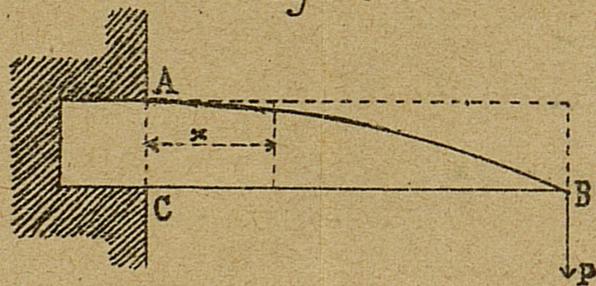
Fig^a 39



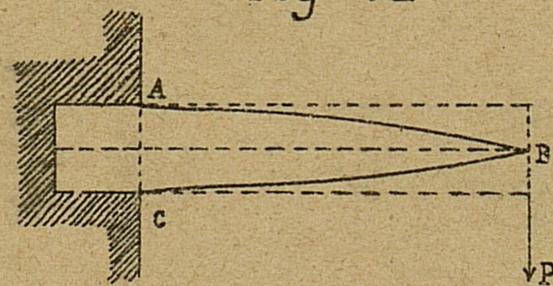
Fig^a 40



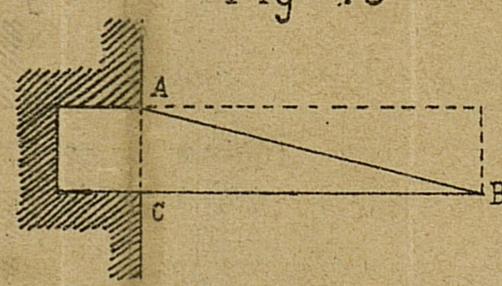
Fig^a 41



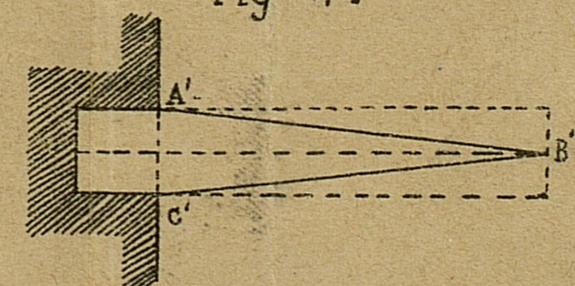
Fig^a 42



Fig^a 43



Fig^a 44



Calcular las dimensiones de un solido
 en forma de un cilindro que soporta una carga concentrada
 en una seccion



$$R = 600000 \quad a = \frac{5}{6} b$$

seccion poligonaria + R_1 y R_2 en el centro

$$P = 900 \times 1.80 = 1620 \text{ Kg}$$

momento de elasticidad $M = \frac{P l^3}{48}$

calculo de las dimensiones

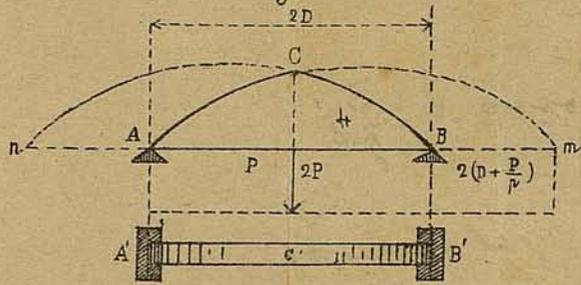
$$\frac{P l^3}{48} = 1620 \text{ Kg} = \frac{600000 \times \frac{1}{12} a b^3}{48} = \frac{600000 \times \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{6} b^3}{48} =$$

$$= \frac{10^5 \cdot 5 \cdot b^3}{48} = \frac{2000000 \cdot b^3}{48} \cdot 6 = \frac{10^5 \cdot 5 \cdot b^3}{48} = 0.102$$

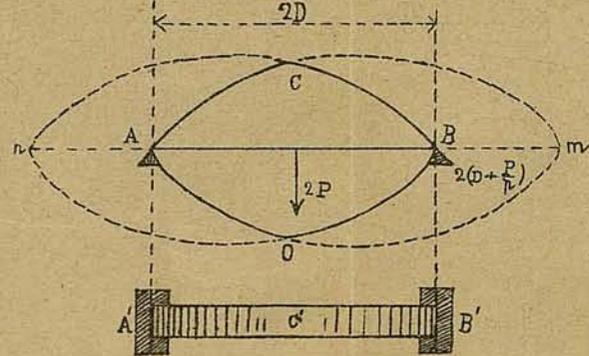
$$b = 0.02268$$

$$a = \frac{5}{6} \cdot 0.02268$$

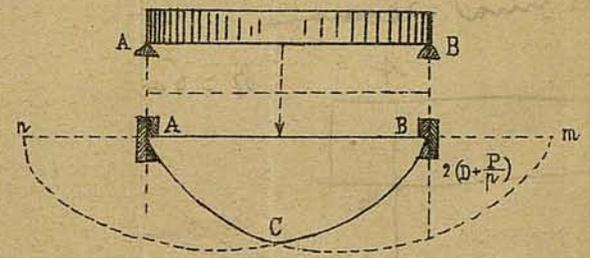
Fig^a 45.



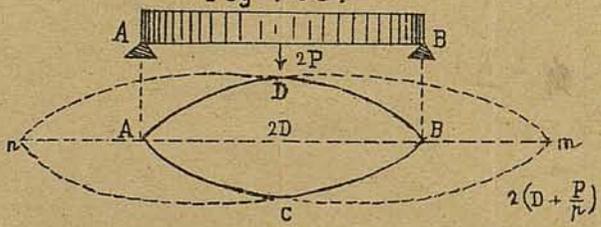
Fig^a 46.



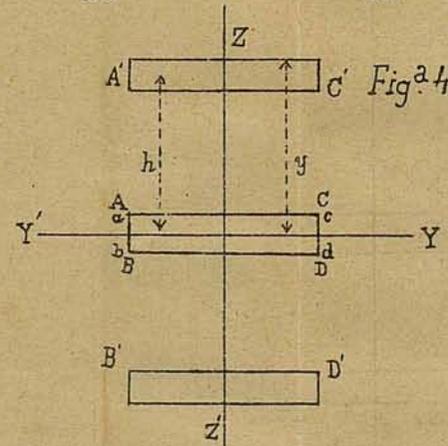
Fig^a 47.



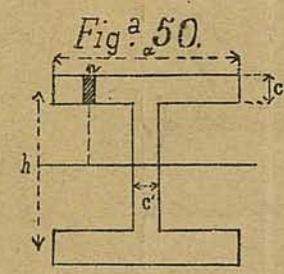
Fig^a 48.



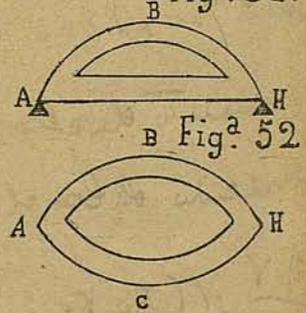
Fig^a 49.



Fig^a 50.

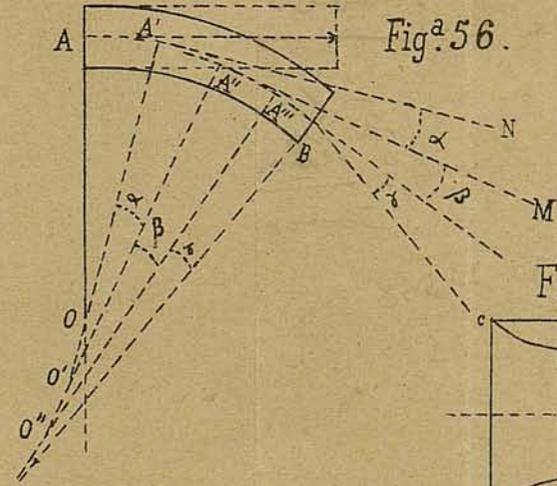


Fig^a 51.

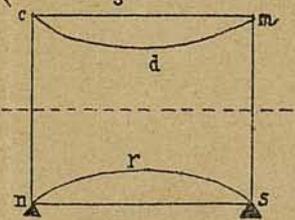


Fig^a 52.

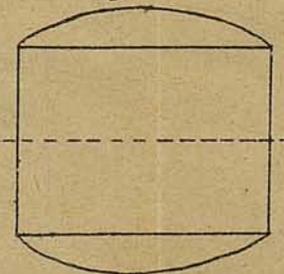
Fig^a 56.



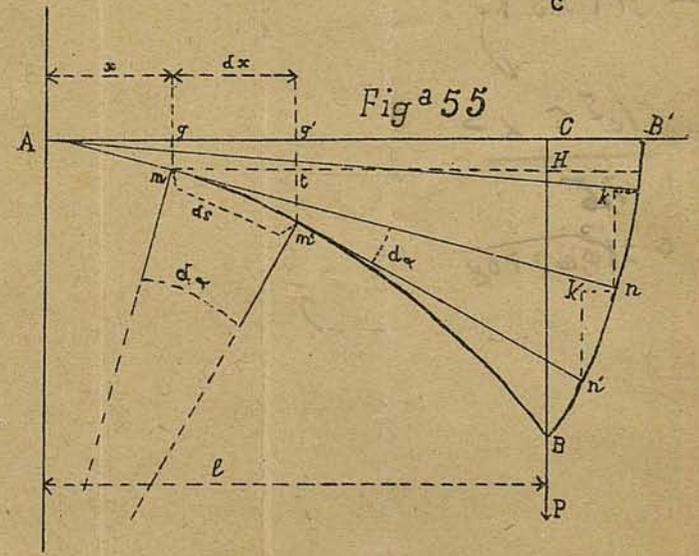
Fig^a 53.



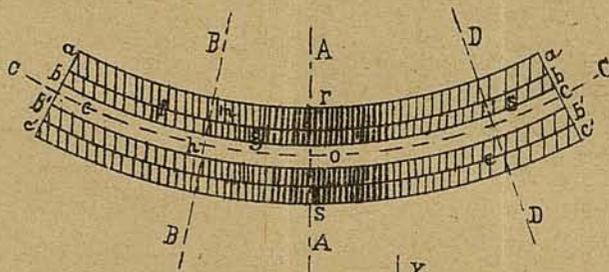
Fig^a 54.



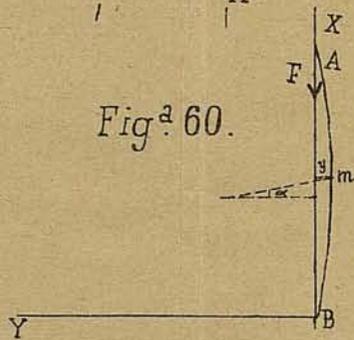
Fig^a 55.



Fig^a. 57.



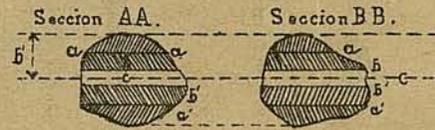
Fig^a. 60.



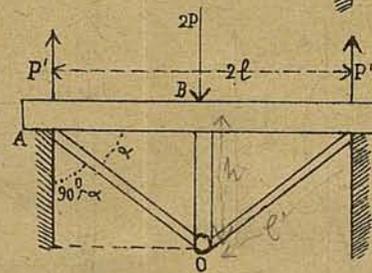
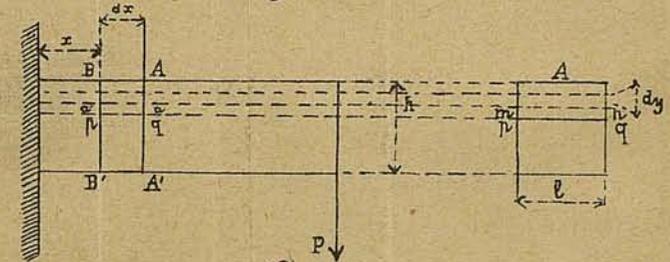
Fig^a. 61.



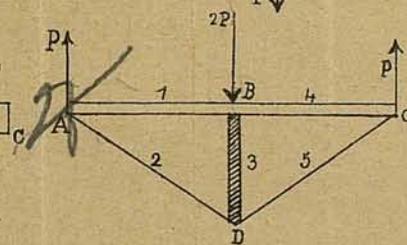
Fig^a. 58.



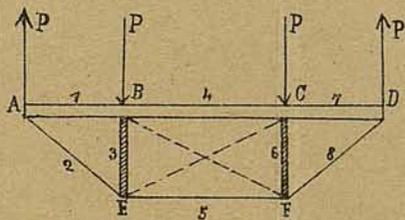
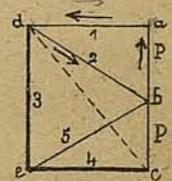
Fig^a. 59.



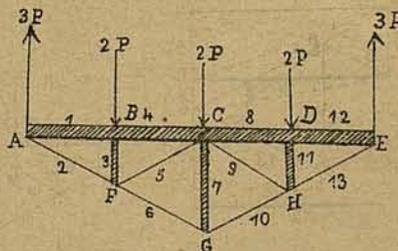
Fig^a. 62.



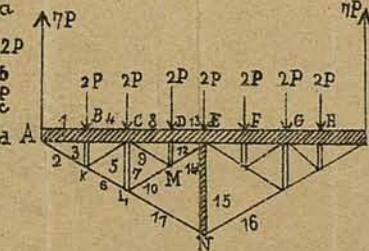
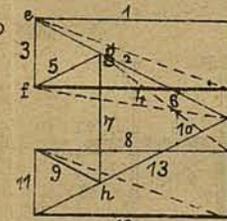
Fig^a. 63.



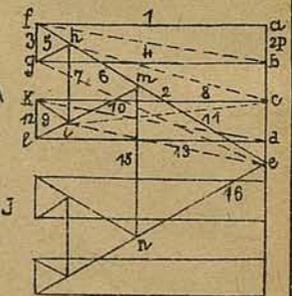
Fig^a. 64.

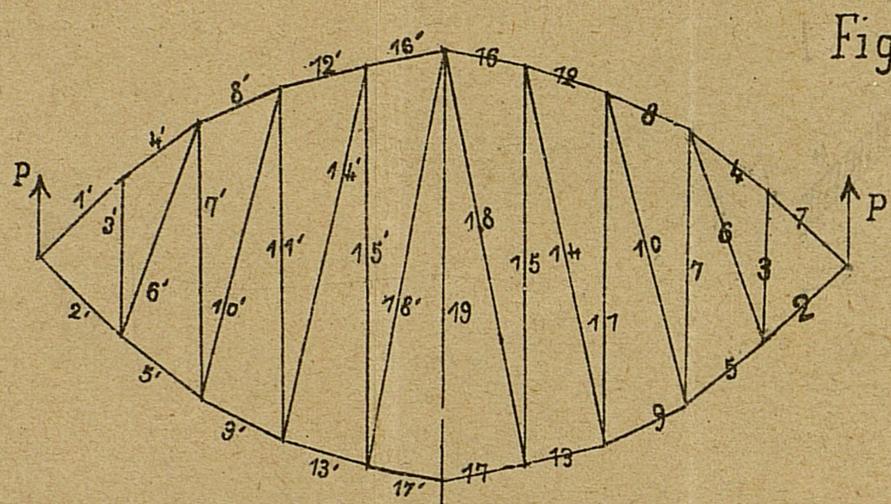


Fig^a. 65.

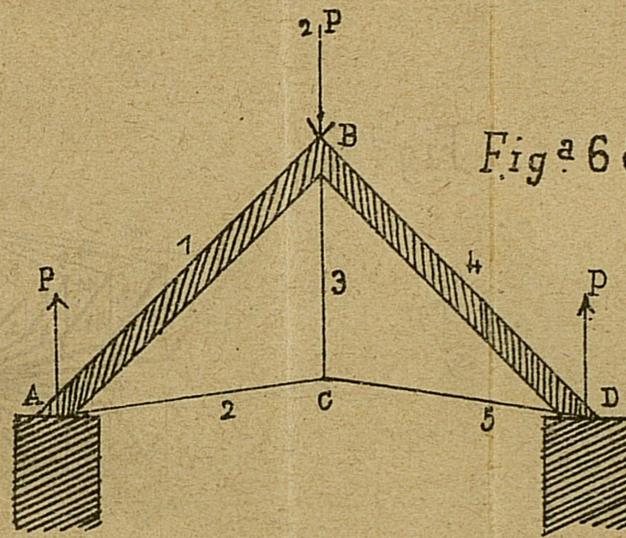
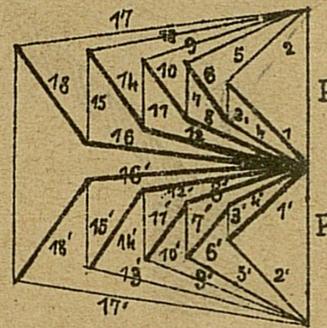


Fig^a. 66.

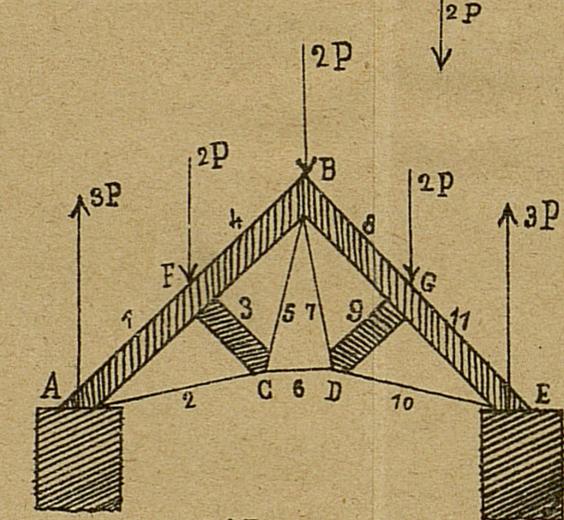
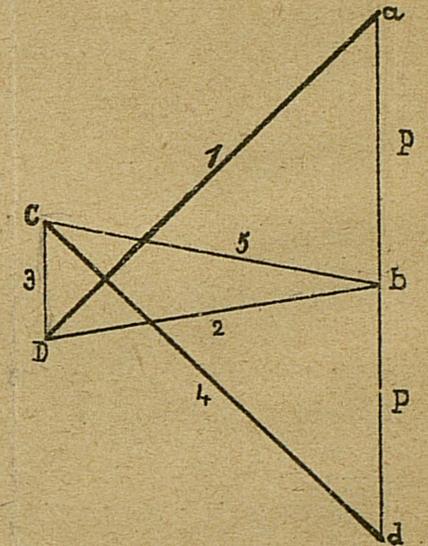




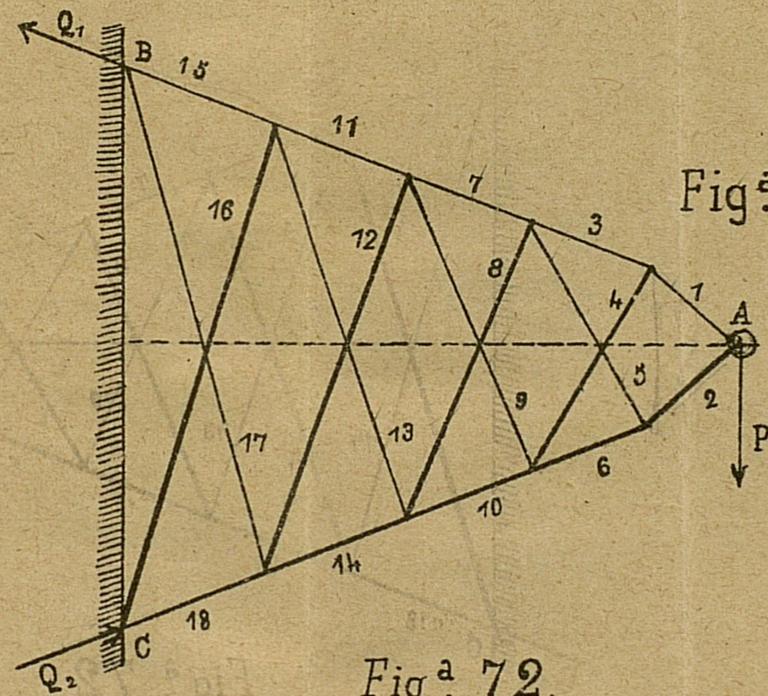
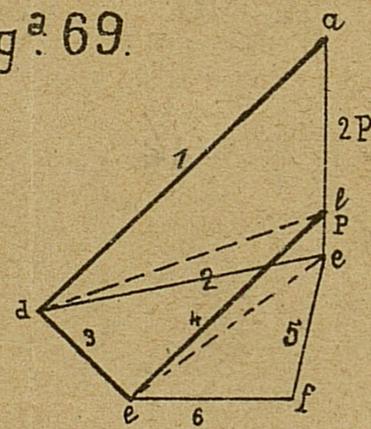
Fig^a 67.



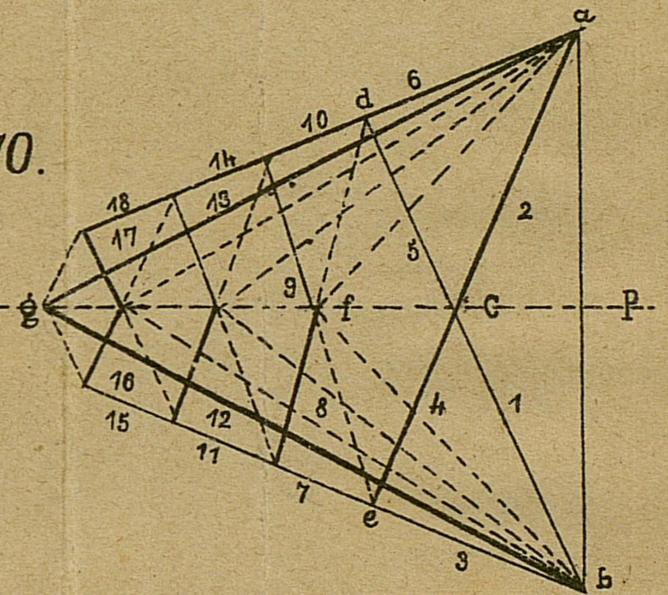
Fig^a 68.



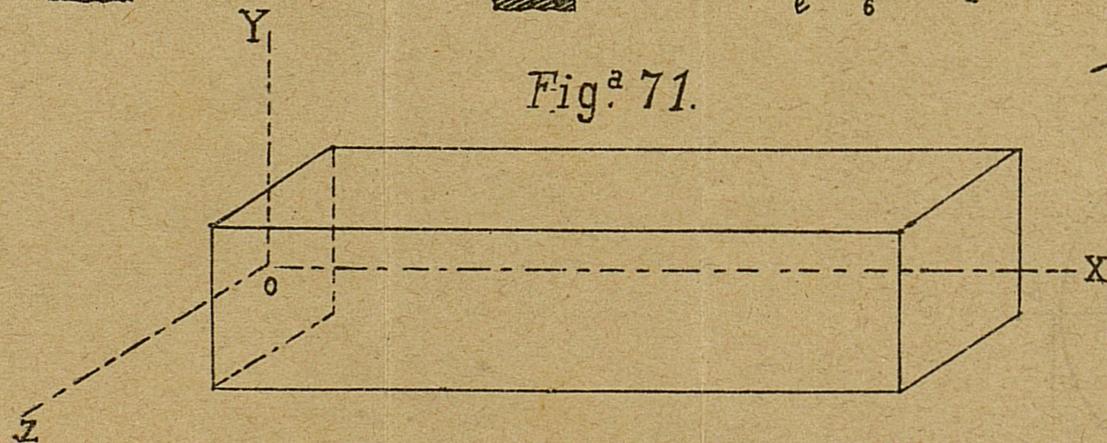
Fig^a 69.



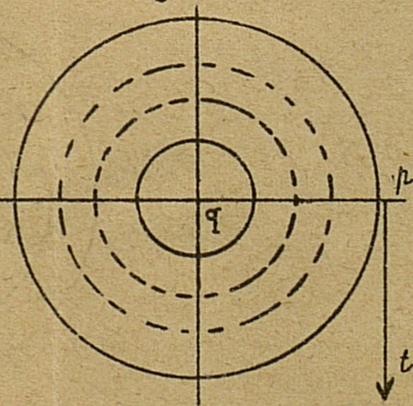
Fig^a 70.



Fig^a 71.



Fig^a 72.



Fig^a 73.

