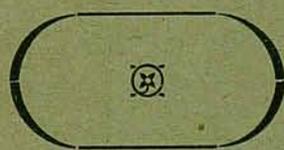


TEORÍA  
DE LA  
ELASTICIDAD

POR  
TIMOSHENKO



Tomo II

A.S  
7/2

2691

F.  
30

INDICE DEL TOMO II.

PARTE TERCERA.

DE LA ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL.

Capítulo VI

TENSIONES Y DEFORMACIONES.

	<u>Folios.</u>
52 Definición de la tensión en un punto.....	116.
53 Tensiones principales.....	117.
54 Elipsoide de las tensiones y superficie directriz.....	119.
55 Determinación de las tensiones principales.....	120.
56 Determinación del esfuerzo tangencial máximo.....	121.
57 Deformación homogénea.....	123.
58 Deformación alrededor de un punto.....	125.
59 Ejes principales de deformación.....	128.

Capítulo VII.

TEOREMAS GENERALES.

60 Ecuaciones diferenciales de equilibrio.....	130.
61 Condiciones de compatibilidad.....	132.
62 Determinación de los corrimientos.....	135.
63 Las ecuaciones de equilibrios como funciones de los corrimientos.....	135.
64 Unicidad de la solución.....	137.
65 Tensiones de origen térmico.....	139.
67 Tensión uniforme.....	149.
68 Barra prismática extendida por la acción de su propio peso.....	150.
69 Torsión de ejes cilíndricos de sección circular.....	153.
70 Flexión simple de barras prismáticas.....	155.
71 Flexión simple de placas planas.....	159.

Capítulo IX.

TORSION.

72 Torsión de barras prismáticas.....	162.
73 Corrimientos en barras prismáticas sometidos a torsión..	166.
74 Barras de sección elíptica.....	168.
76 Analogía con la membrana.....	169.

77 Barra de sección rectangular alargada sujeta a torsión	173.
78 Torsión de barras de sección rectangular.....	176.
80 El método elastico energetico aplicado a problemas de torsión. Metodo Ritz.....	179.
81 Torsión de hierros laminados.....	184.-
84 Torsión de árboles huecos.....	187.
85 Torsión de tubos de pared delgada.....	191.
87 Piezas de sección circular con diámetro variable.....	195.

Capitulo X.

FLEXION DE BARRAS PRISMATICAS.

88 Flexión de una viga volada.....	204.
89 Función de tensión.....	206.
90 Sección transversal circular.....	209.
91 Sección transversal eliptica.....	209.
92 Sección transversal rectangular.....	210.
96 Corrimientos.....	216.

FIN.



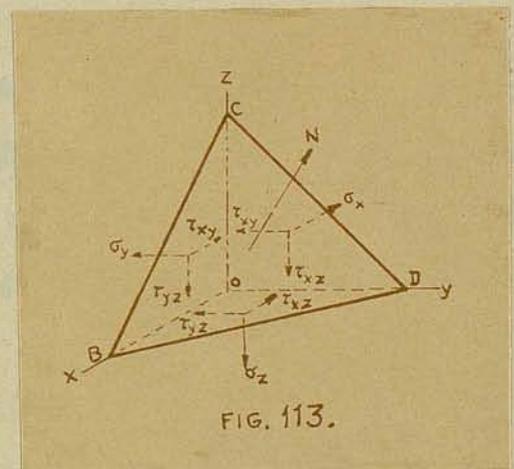
P A R T E T E R C E R A

DE LA ELASTICIDAD TRIDIMENSIONAL

CAPITULO VI.-

TENSIONES Y DEFORMACIONES

52.-Definición de la tensión en un punto.- Estudiados en los capítulos anteriores los problemas de elasticidad plana, salvamos ahora esa limitación, pasando a considerar el caso general del estado de esfuerzos de tres dimensiones. En el 4 quedó establecido que las tensiones que obran sobre las seis caras de un elemento cúbico quedan definidas mediante seis componentes del esfuerzo, a saber, las tres tensiones normales,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , y los tres esfuerzos tangenciales,  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Vamos a demostrar que si en un punto cualquiera se conocen esas seis



nos permitirán calcular la tensión que corresponde a un plano de orientación arbitraria pasante por dicho punto. Sea O un punto del cuerpo cargado y en equilibrio y supongamos conocidos los esfuerzos que corresponden a los planos coordenados  $xy, xz, yz$  (fig. 113). Para determinar la

tensión que se desarrolla en otro plano cualquiera que pase por O, tracemos a distancia muy pequeña de ese punto, el plano BCD paralelo al dado, el cual formará con el triedro O un tetraedro elemental, BCDO. Como según se ha supuesto las tensiones varían de manera continua en todo el volumen del cuerpo, la que actúa sobre el plano BCD, al acercarse éste al origen cuando el elemento se hace infinitésimo, tenderá a un límite, que es la tensión correspondiente al plano paralelo al mismo, por el punto O.

Al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro ele-

mental, se podrá despreciar las fuerzas másicas, según se explicó en el 4. Asimismo, podremos dejar de lado la variación de la tensión en las caras del elemento, por ser de orden infinitesimal, y suponer una distribución uniforme de tensiones, así que las fuerzas que actúan sobre el tetraedro se determinarán multiplicando las áreas de sus caras por las respectivas componentes del esfuerzo. Si con  $A$  denotamos el área de la cara BCD, las áreas de las otras caras, obtenidas proyectando  $A$  sobre los tres planos coordenados, tendrán por expresiones  $A_l, A_m, A_n$ , en las cuales  $l, m, n$ , representan los cosenos directores respectivos, o sea:

(a)

Sean  $X, Y, Z$  las componentes del esfuerzo que actúa en la cara BCD, paralelamente a los ejes coordenados, respectivos: la componente según la dirección  $x$  de la fuerza que obra sobre dicha cara será  $AX$ , y las componentes de las fuerzas que actúan en las otras tres caras del tetraedro, en la misma dirección serán  $A_l l, A_m m, A_n n$ , de manera que tendremos la siguiente ecuación de equilibrio del tetraedro:

De manera análoga, es decir, proyectando las fuerzas sobre los ejes  $y$  y  $z$ , se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y dividiendo luego ambos miembros de cada ecuación por el factor  $A$ , podremos escribir:

(102)

Estas son las ecuaciones buscadas, ya que ellas nos permiten determinar las componentes del esfuerzo que actúa en un plano cualquiera que pase por el punto  $O$ , de orientación definida por sus cosenos directores  $l, m, n$ , siempre que sean conocidas las seis componentes del esfuerzo, en dicho punto

53.--Tensiones principales.-- Consideremos ahora la componentes normal del esfuerzo, que actúa en el plano BCD (figura 113). Empleando las notaciones consignadas en (a) para los cosenos directores, tendremos:

y reemplazando los valores de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  de las ecuaciones (102),

(103)

Podemos representar geométricamente la variación de la tensión - cuando cambia la dirección de la normal  $N$ , es decir, la orientación del plano por medio de un radio vector de dirección  $\vec{R}$ , cuya intensidad  $r$  sea inversamente proporcional a la raíz cuadrada del valor absoluto del esfuerzo, esto es:

(b)

en la cual  $k$  es una constante. Las coordenadas de la punta del vector serán

(c)

Reemplazando en la ecuación (103) el valor

deducido de la igualdad (b), así como los cosenos directores  $l$ ,  $m$ ,  $n$  que resultan de las expresiones (c), tendremos:

(104)

Si se hace girar el plano BCD alrededor del punto O, la extremidad del radio vector  $r$  se mantendrá constantemente sobre la superficie de segundo orden representada por la ecuación (104), la cual está perfectamente definida por el estado de tensión en el punto O. Si cambiamos la orientación de los ejes del sistema de coordenadas rectangulares, dicha superficie permanecerá invariada y tan solo sufrirán modificaciones, las componentes del esfuerzo  $y$ , como consecuencia, también quedan alterados los coeficientes de la ecuación (104).

Es sabido que dada una superficie de segundo orden como la que representa la ecuación (104), siempre puede efectuarse una transformación de coordenadas que haga desvanecer los términos en que figuran los productos de variables, esto es, que podremos hallar una terna ortogonal de referencia que origine la desaparición de los esfuerzos tangenciales, lo que significa que las tensiones resultantes son perpendiculares a los planos sobre los cuales actúan. A estas fatigas se las denomina tensiones principales relativas al punto de que se trata; a sus direcciones, ejes principales, y planos principales a los planos sobre los cuales actúan. Se

ve enseguida que la tensión alrededor de un punto queda completamente definida cuando se conoce las direcciones de los ejes principales y las magnitudes de las tres tensiones principales.

54.-Elipsoide de las tensiones y superficie directriz.- Si se adopta como ejes coordinados,  $x, y, z$ , los ejes principales, el cálculo de las tensiones que corresponden a un plano cualquiera resulta muy simple. Los esfuerzos tangenciales son nulos en este caso y las ecuaciones de equilibrio del tetraedro (102) se transforman en

(105)

Reemplazando los valores de  $l, m, n$ , deducidos de estas ecuaciones, en la conocida relación  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , tendremos

(106)

Esto significa que si la tensión que corresponde a cada uno de los infinitos planos que pasan por  $O$  se representa por un vector con origen en dicho punto y cuyas proyecciones sobre los ejes sean  $X, Y, Z$ , el lugar geométrico de las extremidades de dichos vectores será la superficie del elipsoide cuya ecuación es (106). Esta superficie representativa de las tensiones se denomina elipsoide de las tensiones; sus semiejes son las tensiones principales en el punto considerado. Resulta de aquí que la tensión máxima en un punto cualquiera es el semieje mayor del mismo elipsoide, esto es, el mayor de los tres esfuerzos principales correspondientes. Si dos de las tensiones principales son iguales en valor absoluto el elipsoide de las tensiones es de revolución, y si además ellas tienen el mismo signo, las tensiones resultantes en todos los planos que pasan por el eje de simetría del elipsoide serán iguales y perpendiculares a los planos en que actúan. En este caso, las tensiones que corresponden a cualquier par de planos perpendiculares que se intersectan en ese eje pueden considerarse como tensiones principales.

Cuando las tres tensiones principales son iguales y del mismo signo, el elipsoide de las tensiones resulta ser una esfera, y cualquier terna de direcciones perpendiculares entre sí puede ser considerada como de ejes principales. Si una de las tensiones prin-

principales es nula, el elipsoide de las tensiones se reduce a una elipse y los vectores representativos de las tensiones en todos los planos que pasan por el punto son coplanares; el estado elástico correspondiente se denomina estado plano de tensión y ha sido ya estudiado en los capítulos precedentes. Cuando dos tensiones principales son nulas se tendrá el caso de una tracción o una compresión simples.

Cada radio vector del elipsoide de las tensiones representa, a cierta escala, la tensión que corresponde a uno de los planos pasantes por el centro del elipsoide. Para determinar este plano emplearemos además del elipsoide (106) la llamada superficie directriz, que está definida por la ecuación

$$(107)$$

Demostremos que el esfuerzo representado por un radio vector del elipsoide de las tensiones actúa en el plano paralelo al plano tangente a la superficie directriz por el punto en que la interseca. En efecto, la ecuación del plano tangente a la superficie directriz en un punto es

$$(a)$$

ecuación que también puede escribirse así:

$$lx + my + nz = h, \quad (b)$$

en la cual  $h$  es la distancia del origen al plano tangente y  $l, m, n$ , los cosenos directores de dicha perpendicular. Comparando (a) y (b), encontramos:

$$(c)$$

Llevando esos valores a las fórmulas (105), resulta

lo que nos dice que las componentes del esfuerzo en el plano definido por los cosenos directores  $l, m, n$ , son proporcionales a las coordenadas y por lo tanto, el vector representativo del esfuerzo pasa por el punto como se quería demostrar.

55.-Determinación de las tensiones principales.- Utilizando la propiedad de que gozan las tensiones principales de ser perpendiculares a los planos sobre los cuales actúan, podremos determinar las direcciones y magnitudes de las tensiones principales si cono-

cosenos las componentes de los esfuerzos que corresponden a tres planos coordinados. Sean  $l, m, n$ , los cosenos directores de uno de los planos principales y  $\sigma$ , la magnitud del esfuerzo principal correspondiente al mismo; las componentes del mismo serán entonces:

Reemplazando en las ecuaciones (102), encontraremos:

(a)

Para que estas tres ecuaciones lineales y homogéneas en  $l, m, n$ , tengan soluciones diferentes de cero es necesario que su determinante sea nulo. Si calculamos dicho determinante y lo igualamos a cero obtendremos la siguiente ecuación de tercer grado en  $\sigma$  llamada ecuación característica:

(108)

Las tres raíces de esta ecuación nos dan los valores de las tensiones principales, cuya sustitución en las ecuaciones (a), cuenta tenida de la relación  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , nos permite determinar tres grupos de cosenos directores para los tres planos principales.

Es de advertir que la ecuación (108), que permite determinar los valores de las tensiones principales, debe ser independiente de la dirección de los ejes coordinados,  $x, y, z$ , de manera que los coeficientes encerrados en paréntesis en la misma, serán invariantes, i. e., las expresiones

permanecerán constantes cualquiera sea el sistema de referencia. Lo que nos dice que la suma de las tres componentes normales de la tensión en un punto, correspondientes a tres direcciones perpendiculares, es constante e igual a la suma de las tensiones principales en el mismo punto.

56.- Determinación del esfuerzo tangencial máximo.- Supongamos que  $x, y, z$  son los ejes principales o, lo que es lo mismo, las tensiones principales y  $l, m, n$  los cosenos directores de un plano dado. El cuadrado de la tensión resultante, correspondiente al mismo será, con arreglo a las ecuaciones (105):

El cuadrado de la componente normal de la tensión en el mismo plano es, según la ecuación (103):

El cuadrado de la tensión tangencial en el mismo plano deberá ser, entonces,

(a)

Eliminaremos ahora, en esta ecuación, uno de los cosenos directores, verbigracia,  $m$ , empleando para ello la relación

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1,$$

y pasemos a determinar  $l$  y  $m$  de manera que resulte máximo. Reemplazando en la expresión (a)  $n^2$  por su igual  $1 - l^2 - m^2$ , deducido de la anterior ecuación, calculando las derivadas de la tensión tangencial respecto a  $l$  y a  $m$  e igualándolas a cero, llegaremos a las ecuaciones que nos permitirán determinar los cosenos directores de los planos en los cuales es máximo o mínimo; ellas son:

(b)

Se obtiene una solución de estas ecuaciones haciendo  $l = m = 0$ ; pero también podemos obtener soluciones diferentes de cero. En efecto, hagamos por ejemplo,  $l = 0$ ; la segunda de las ecuaciones (b) nos da entonces  $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  y con  $m = 0$ , de la primera de dichas ecuaciones resulta  $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Por medio de cálculos enteramente análogos, eliminaremos  $n$  y después  $l$  en la expresión (a) y finalmente llegamos a los siguientes valores de los cosenos directores que hacen máximo o mínimo el esfuerzo tangencial:

COSENOS DIRECTORES DE LOS PLANOS EN QUE OCURREN máx. Y mín.

$l =$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$m =$	0	$\pm 1$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$
$n =$	$\pm 1$	0	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0

Las tres primeras columnas nos dan las direcciones de los planos de coordenadas, los cuales coinciden, conforme al supuesto original con los planos principales; como para éstos el esfuerzo tangencial

es cero, es un mínimo la expresión (a). Las columnas restantes dan los planos que, conteniendo a los ejes principales, bisectan a los ángulos formados por los otros dos ejes principales. Reemplazando en la expresión (a) los cosenos directores que corresponden a estos tres planos, llegamos a los siguientes valores de los esfuerzos tangenciales correspondientes a los mismos:

(109)

Lo que nos demuestra que la máxima tensión tangencial actúa en el plano bisector del ángulo que forman las tensiones principales máxima y mínima, y que su valor es igual a la semidiferencia de las mismas.

57.-Deformación homogénea.- Nos ocuparemos tan solo de deformaciones pequeñas, que son las que prevé el ingeniero se han de producir en las construcciones. Los recorridos elementales de las partículas de un cuerpo deformado serán resueltos por lo general en sus componentes  $u, v, w$ , paralelas a los ejes coordenados  $x, y, z$ , respectivamente, y se supondrá que dichas componentes son cantidades infinitesimales que varían en forma continua en el ámbito del cuerpo.

Sea, por ejemplo, el caso de una barra prismática fija por su extremidad superior (figura 114), y sujeta a extensión axial. Si  $\epsilon$  es el alargamiento específico de la pieza en la dirección  $x$  y  $\delta$  el correspondiente acortamiento transversal, las componentes del corrimiento de un punto de coordenadas  $x, y, z$  serán, evidentemente,

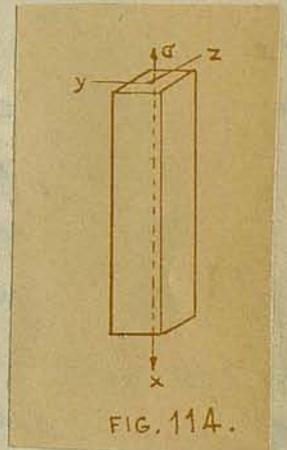


FIG. 114.

llamemos  $x', y', z'$  a las coordenadas del mismo punto una vez producida la extensión; sus valores serán:

(a)

y si consideramos en la barra antes de ser deformada una superficie plana tal como la que representa la ecuación

(b)

los puntos de aquella pertenecerán después de la deformación a un

nuevo plano cuya ecuación se obtiene sustituyendo en (b) los valores de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , dados por las ecuaciones (a). De este modo puede fácilmente demostrarse que los planos paralelos conservan su paralelismo después de la deformación y que las rectas paralelas lo siguen siendo una vez deformado el cuerpo a que pertenecen.

La superficie esférica de puntos de la barra, cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (c)$$

antes de la deformación de aquella, se transforma a consecuencia de la misma en un elipsoide cuya ecuación se obtiene reemplazando en (c) las expresiones de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , deducidas de las ecuaciones (a), hecho lo cual, tenemos:

(d)

Esto es, que la esfera de radio  $r$  se ha transformado en un elipsoide cuyos semiejes son  $r(1 + \epsilon)$ ,  $r(1 - \mu)$ ,  $r(1 - \nu)$ .

La extensión axial y el acortamiento transversal considerados en lo que antecede no son mas que un caso particular de una deformación de un tipo más general, en el que las componentes  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , del corrimiento, son funciones lineales de las coordenadas, deformación que -como puede probarse por un razonamiento análogo al anterior- tiene las mismas propiedades que hemos hallado para el caso de la tracción simple, esto es, que las rectas y planos se conservan como tales después de la deformación; que los planos y rectas paralelos también conservan su paralelismo y que una esfera -se transforma, a raíz de la deformación, en un elipsoide. Según se demostrará más adelante, en toda deformación homogénea, como se denomina a las de este género, todos los puntos del cuerpo deformado experimentan igual deformación en una dirección dada cualquiera y dos elementos geoméricamente semejantes y semejantemente orientados se conservan geoméricamente semejantes, luego de la deformación.

En casos mas generales, la deformación varia de punto a punto -del cuerpo deformado. Por ejemplo, cuando una viga es flexada, las dilataciones y acortamientos de las fibras longitudinales varian con sus distancias a la capa de fibras neutras; el esfuerzo de desgarramiento en los elementos de un eje circular sometido a torsión

es proporcional a las distancias que los separan del eje de la pieza. En tales casos de deformación no homogénea es necesario efectuar el estudio analítico de la deformación en el entorno de un punto.

58.-Deformaciones alrededor de un punto.- Para estudiar la deformación en contigüidad de un punto  $O$  de un cuerpo deformado (figura 115), consideremos un pequeño elemento lineal,  $OO_1$ , de largo  $r$ , cuyos cosenos directores llamamos  $l, m, n$ ,

Sus proyecciones sobre los ejes de coordenadas, a saber:

(a)

representan las coordenadas del punto  $O$ , con relación a los ejes  $x, y, z$ , que pasan por el origen  $O$ . Si  $u, v, w$  son las componentes del trayecto del punto  $O$  durante la deformación del cuerpo, las que corresponden al corrimiento del punto vecino  $O_1$ , estarán dadas por las siguientes ecuaciones:

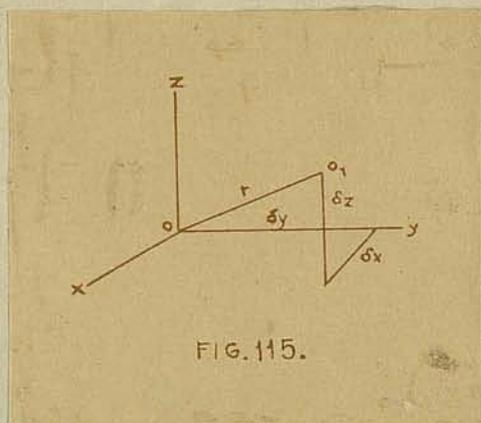


FIG. 115.

(b)

Se supone que las cantidades  $\delta x, \delta y, \delta z$ , son infinitamente pequeñas y por lo tanto los términos de grado superior al primero, así como sus productos, serán infinitésimos de orden superior y como tales pueden desprejarse en (b). De estas se deducen los incrementos o variaciones y de aquí las coordenadas del punto  $O_1$ , después de la deformación:

(c)

Estas coordenadas, como se ve, son funciones lineales de las primitivas,  $\delta x, \delta y, \delta z$  y conforme a la definición dada en el § 57, la de-

formación de un elemento muy pequeño de un cuerpo en el punto 0 puede, entonces, considerarse como homogénea.

Pasemos a considerar el alargamiento experimentado por el elemento r. El cuadrado de su longitud, después de la deformación será igual a la suma de los cuadrados de las nuevas coordenadas del punto 0, que están dadas en (c), así que si llamamos al alargamiento específico del elemento de que se trata, se tendrá:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (110)$$

En el caso particular de una deformación homogénea, las coordenadas x, y, z del extremo son simplemente lineales de las coordenadas x\_0, y\_0, z\_0, según las ecuaciones (a). Las componentes de la deformación son constantes en todos los puntos del cuerpo.

o bien, dividiendo por r^2 y teniendo en cuenta las ecuaciones (a) se obtiene:

$$\frac{x}{r} = \frac{x_0}{r_0} \cos \alpha + \frac{y_0}{r_0} \sin \alpha \quad (a)$$

Recordando ahora que tanto como las derivadas parciales  $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ , son cantidades muy pequeñas, cuyos cuadrados y productos pueden ser despreciados y simplificando en razón de ser  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , se deduce:

(110)

Relación que nos dice que podrá calcularse el alargamiento de un elemento r siempre que se conozcan las expresiones  $\frac{\partial x}{\partial x_0}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ , etc. La ecuación (110) puede expresarse en forma más simple si empleamos las notaciones  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{12}$ ,  $\epsilon_{13}$  que se definen así por las fórmulas  $\epsilon_{11} = \frac{\partial x}{\partial x_0} - 1$ ,  $\epsilon_{12} = \frac{\partial y}{\partial x_0}$ ,  $\epsilon_{13} = \frac{\partial z}{\partial x_0}$ .

(e)

Se tendrá así:

(111)

El significado físico de las cantidades  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  ha sido explicado en el § 5 y, según se indica en el mismo, son los alargamientos específicos en las direcciones  $x, y, z$ ; en tanto que  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{zx}$  son las distorsiones correspondientes a esas mismas direcciones. Como en dicho párrafo (in fine) se anuncia, - queda aquí demostrado que el alargamiento de un elemento cualquiera que pase por el punto  $O$  podrá ser calculado -aplicando a la ecuación (III)- en función de las seis componentes de la deformación.

En el caso particular de una deformación homogénea, las componentes  $u, v, w$  del trayecto son funciones lineales de las coordenadas, de manera que, según las ecuaciones (e), las componentes de la deformación son constantes en todos los puntos del cuerpo, esto es, que, en dicho caso, todos los elementos del cuerpo se deforman igualmente.

Al estudiar la deformación en el entorno de un punto  $O$ , es muchas veces necesario saber cuanto varía el ángulo que forman dos elementos lineales pasantes por ese punto. Sean  $l_1, m_1, n_1$  los cosenos directores del elemento  $r$  (figura 115) después de la deformación y  $l_2, m_2, n_2$  los de otro elemento  $r'$  caracterizado por valores  $l_1', m_1', n_1'$  antes de la deformación. Aplicando las ecuaciones (c) y (a) y considerando  $\epsilon$  como cantidad infinitésima, tendremos como expresiones de los primeros

$$(f)$$

Y otras tantas ecuaciones análogas para los cosenos directores del elemento  $r'$ . En la conocida ecuación que da el coseno del ángulo formado por dos direcciones, aplicada a las de los dos elementos después de la deformación, a saber:

las ecuaciones (f) nos darán, considerando como cantidades muy

pequeñas, los alargamientos  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$ , en dichas direcciones,

(112)

si las direcciones  $x$  y  $x'$  fueran perpendiculares entre sí, resultaría

y entonces la ecuación (112) da el valor de la distorsión que sufre el ángulo de esas direcciones.

59.-Ejes principales de deformación.—La ecuación (111) nos permite interpretar geoméricamente la variación de la deformación en un punto determinado. tracemos para ello en la dirección de cada elemento de recta tal como  $x$  (figura 115) un radio vector cuya intensidad sea inversamente proporcional a la raíz cuadrada del valor absoluto del alargamiento  $\epsilon_x$ , es decir:

Razonando, entonces, como se ha indicado en § 51, concluimos que el lugar geométrico de las extremidades de los radios vectores correspondientes es la superficie de ecuación

(113)

Esta superficie queda completamente determinada por el estado de deformación en el punto considerado y es independiente de la orientación de los ejes coordenados rectangulares. Es siempre posible dar a estos ejes ortogonales direcciones tales que los términos de la ecuación (113) que contengan productos de variables desaparezcan lo que entraña la nulidad de las variaciones angulares en tales direcciones. Estas han recibido el nombre de ejes principales de deformación; los planos correspondientes, planos principales de deformación y las deformaciones respectivas, deformaciones principales. De todo ello resulta evidente que los ejes principales de deformación siguen siendo perpendiculares después de ocurrida la deformación, de manera que un paralelepípedo rectangular de caras paralelas a los planos principales se conservará como tal después de la deformación.

Si los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  coinciden con los ejes principales de deformación, la ecuación (113) se transforma en

En este caso, la dilatación de un elemento lineal cualquiera cuyos ejes directores sean  $l, m, n$ , valdrá, con arreglo a las ecuaciones (111):

(114)

y según la ecuación (112) la deformación tangencial o distorsión correspondiente a dos direcciones  $r$  y  $r'$  perpendiculares entre sí, estará dada por la fórmula:

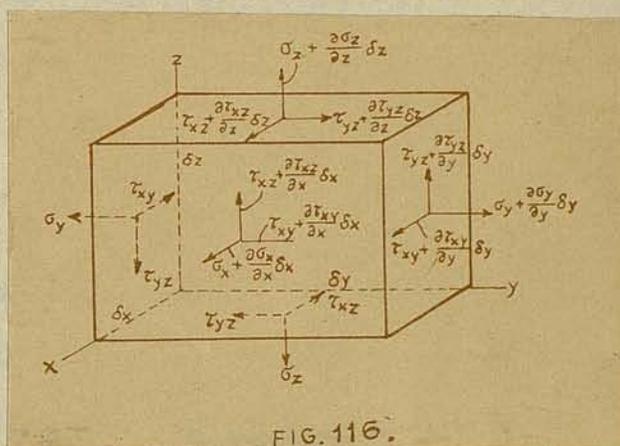
(115)

Resulta de lo que antecede que la deformación en un punto está completamente determinada si se conocen las direcciones de los ejes principales de deformación y las magnitudes de los alargamientos principales. La determinación de unos y otros se efectúa de una manera análoga a la que se explicó en el párrafo 55. Puede también demostrarse que cuando el sistema de ejes coordenados experimenta un giro, la suma  $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$  permanece constante. Como se sabe, el significado físico de esta suma es simple: se trata de la dilatación cúbica o relación del incremento de volumen que experimenta el paralelepípedo rectangular elemental, a su volumen primitivo, a causa de la deformación que se produce alrededor de un punto.

C A P I T U L O      V I I

T E O R E M A S      G E N E R A L E S

60.- Ecuaciones diferenciales de equilibrio.- En el 52 hemos desarrollado el estudio de la tensión en un punto de un cuerpo elástico. Nos proponemos efectuar ahora el análisis de la variación del esfuerzo al cambiar la posición del punto. Para ello debemos establecer las condiciones de equilibrio de un elemento de forma de paralelepípedo rectangular cuyas dimensiones son



como el que se presenta en la figura 116, en la cual se indica las componentes de la tensión que actúa en cada cara -las fatigas señaladas en la figura son las que corresponden a los centros de las caras, así como sus sentidos positivos. Tomaremos aquí en consideración las variaciones que experimentan dichas componentes como consecuencia de los incrementos infinitamente pequeños,

, de las coordenadas, y al calcular las fuerzas actuantes en el elemento, consideramos que las caras son infinitamente pequeñas, de manera que la fuerza que corresponde a cada cara se obtiene multiplicando por su área la tensión en el baricentro respectivo.

La fuerza másica relativa al elemento considerado, que fuera despreciada como infinitésimo de orden superior al establecer las condiciones de equilibrio del tetraedro (figura 113), deberá ahora intervenir en las ecuaciones, por ser del mismo orden de magnitud que los términos que corresponden a la variación de las componentes de la tensión. Si designamos entonces por X, Y, Z las componen

tes de la fuerza ponderal específica, obtendremos una de las ecuaciones de equilibrio proyectando las fuerzas en la dirección  $x$ :

De manera análoga se obtienen las otras dos ecuaciones de equilibrio y después de efectuar las simplificaciones, llegamos a las siguientes ecuaciones, que deben quedar satisfechas en todos los puntos del cuerpo considerado:

$$(116)$$

Las tensiones varían de uno a otro punto del cuerpo y en su periferia deberán equilibrar a las fuerzas exteriores que actúan sobre la superficie del mismo. Las expresiones matemáticas de las condiciones de equilibrio relativas a la superficie pueden obtenerse partiendo de las ecuaciones (102). Consideremos para ello que el tetraedro  $OBCD$  (figura 113) está dispuesto de manera que la cara  $BCD$  coincida con la superficie del cuerpo y llamemos  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  a las componentes de las fuerzas superficiales referidas a la unidad de área, en dicho punto; las ecuaciones mencionadas devienen entonces:

$$(117)$$

en las cuales  $l$ ,  $m$ ,  $n$  son los cosenos directores de la normal exterior a la superficie del cuerpo en el punto considerado.

Si el problema consiste en determinar el estado de tensión que se origina en un cuerpo sometido a la acción de fuerzas dadas, es necesario resolver las ecuaciones (116) de manera que la solución satisfaga a las condiciones de límite o condiciones de borde (117). Es evidente que estas ecuaciones, que contienen seis componentes del esfuerzo, . . . no bastan para determinar estas can-

tidades; el problema es estáticamente indeterminado y para resolverlo se deberá proceder como en el caso del estado plano de tensión, haciendo intervenir a las deformaciones elásticas del cuerpo.

61.--Condiciones de compatibilidad.— Para establecer las ecuaciones que busquemos, deberá tenerse en cuenta que las seis componentes de la deformación en cada punto quedan completamente determinadas por las tres funciones  $u, v, w$ , que representan las componentes de su corrimiento, así que las componentes de la deformación no pueden expresarse arbitrariamente en función de  $x, y, z$ , sino que habrán de satisfacer a determinadas relaciones que se deducen de las ecuaciones (2) (véase § 5).

De las ecuaciones (2) se deduce por derivación:

de donde resulta que

(a)

Una permutación cíclica de las letras  $x, y, z$  nos permitirá obtener otras dos relaciones análogas.

Calculando ahora las derivadas

llegamos a establecer que:

(b)

Por permutación de las letras  $x, y, z$ , obtendremos otras dos relaciones análogas a (b).

Procediendo como se ha indicado, se llega a seis ecuaciones diferenciales entre las componentes de la deformación, las cuales deberán quedar satisfechas en virtud de las ecuaciones (2). Ellas reciben el nombre de condiciones de compatibilidad y son las siguientes:

Las condiciones expresadas por las ecuaciones (118) pueden transformarse en relaciones entre las componentes de la tensión utilizando la ley de Hooke -ecuaciones (3)-, vide § 6. Tomemos, por ejemplo, una de ellas:

(c)

De las ecuaciones (3) resulta, teniendo en cuenta la igualdad (7), mediante una transformación sencilla:

y de la ecuación (4):

Reemplazando en (c) estas expresiones, obtenemos:

(d)

El segundo miembro de esta ecuación puede transformarse empleando las ecuaciones de equilibrio (116); en efecto, resulta de las dos últimas:

Sumando las derivadas de la primera ecuación con respecto a  $x$  y de la segunda con respecto a  $y$ , se tiene

o bien, si se tiene en cuenta la primera de las ecuaciones (116):

Si se lleva esta última a la ecuación (d) y para simplificar la escritura se utiliza el símbolo

encontramos

(e)

Las otras dos condiciones de compatibilidad del tipo (c) permiten escribir dos ecuaciones análogas a la anterior.

Susando ordenadamente las tres ecuaciones del tipo (e) así -  
obtenidas, se tiene

Reemplazando en la ecuación (e) el valor del laplaciano de , -  
que resulta de esta última expresión, se tiene

(f)

Podemos obtener tres ecuaciones de esta clase, correspondientes  
a las primeras, tres ecuaciones del grupo (118). Análogamente, las  
tres condiciones restantes de ese grupo pueden transformarse en ecuaciones del tipo siguiente:

(g)

con las fuerzas másicas constantes o nulas, (f) y (g) nos dan:

(119)

Se ve, pues, que además de las ecuaciones de equilibrio (116) y las condiciones de borde (117), las componentes de la tensión en un cuerpo isótropo habrán de satisfacer a las seis condiciones de compatibilidad (f) y (g) o a las seis condiciones (119). Este sistema de ecuaciones basta, por lo general, para determinar sin ambigüedad alguna las componentes de la tensión (véase 64).

Las ecuaciones que expresan las condiciones de compatibilidad - contienen según se ha visto, tan solo derivadas segundas de las componentes del esfuerzo; por lo tanto, si las fuerzas exteriores permitieran satisfacer las ecuaciones de equilibrio (116) conjuntamente con las condiciones de límite (117) mediante unas componentes de la tensión que fuesen constantes o funciones lineales de las coordenadas, las ecuaciones de compatibilidad quedarían idénticamente satisfechas y este sistema de tensiones representaría la solución correcta del problema. En el capítulo VIII desarrollamos varios ejemplos de problemas de esta clase.

62.-Determinación de los corrimientos.- La ley de Hooke -ecuaciones (3) y (4)- nos permitirá determinar las componentes de la deformación una vez calculadas las componentes de la tensión mediante las ecuaciones anteriores. Para determinar los corrimientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , se utilizan entonces las ecuaciones (2). Derivando éstas con respecto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , se puede obtener 18 ecuaciones entre las 18 derivadas segundas de  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , y calcular así dichas derivadas. Para  $u$ , por ejemplo, tendremos:

(a)

Si en las ecuaciones anteriores intercambiamos cíclicamente las letras  $x$ ,  $y$  y  $z$ , hallaremos las derivadas segundas de las componentes de los corrimientos  $v$  y  $w$ , y por medio de integraciones -dobles obtendremos  $u$ ,  $v$ , y  $w$ , a las cuales, como constantes arbitrarias de integración, añadiremos funciones lineales de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , evidentemente, no afectarán a las ecuaciones (a) y sus correlativas; tampoco modificarán a las componentes de la deformación [ecuaciones (2)], siempre que sean de la forma:

(b)

Lo que significa que las tensiones y las deformaciones no determinan por completo los corrimientos y que a las ecuaciones que los expresen, deducidas de (116), (117) y (119), podrá añadirse el trayecto que corresponde a un movimiento a la manera de cuerpo rígido. Las constantes  $a$ ,  $d$ ,  $f$ , en las ecuaciones (b) representan un movimiento de traslación del cuerpo y las constantes  $b$ ,  $c$ ,  $e$  son las tres rotaciones del cuerpo rígido alrededor de los ejes coordenados. Cuando existen vínculos bastantes a impedir el movimiento del cuerpo como si fuera rígido, las seis constantes de las ecuaciones (b) pueden ser calculadas fácilmente de manera que satisfagan las condiciones de vínculo. Más adelante se exponen diversos ejemplos de cálculos de esa naturaleza.

63.-Las ecuaciones de equilibrio como funciones de los corrimientos.- Un método que permite resolver los problemas de elasticidad

es el que conduce a formular tres ecuaciones de equilibrio cuyas incógnitas son las tres funciones  $u, v, w$ . Para ello se elimina - de las ecuaciones (116) y (117)., las componentes de la tensión - recurriendo a la ley de Hooke y a las ecuaciones (2), que nos per - miten expresar las componentes de la deformación en función de - los corrimientos. De acuerdo con las ecuaciones (11) y (12) se tie - ne

(a)

y las ecuaciones (4) y (2) nos dan:

(b)

Reemplazando esos valores en la primera de las ecuaciones (116) encontramos

Las otras dos ecuaciones pueden transformarse de la misma manera, así que utilizando el símbolo laplaciano, las ecuaciones de equilibrio (116) se transforman en

(120)

y, cuando no existen fuerzas másicas, se tendrá:

(121)

Derivando la primera de estas ecuaciones con respecto a  $x$ , la segunda con respecto a  $y$ , y la tercera con respecto a  $z$ , y sumando miembro a miembro las igualdades que se obtienen, se llega a

de donde resulta evidentemente que la dilatación cúbica,  $e$ , satisface a la ecuación diferencial

(122)

La misma conclusión es aplicable al caso en que las fuerzas másicas sean constantes para todo punto del cuerpo.

Reemplazando los valores que dan las ecuaciones (a) y (b) en las condiciones de borde (117), hallamos:

(123)

.....

Definidas así completamente las tres funciones  $u, v, w$  mediante las ecuaciones (120) y las condiciones de borde (123), podremos obtener las componentes de la deformación aplicando las ecuaciones (2), y luego las componentes de la tensión, valiendonos de las fórmulas (9) y (4). En el § 65 y en el capítulo XII se hace aplicación de estas ecuaciones.

64.-Unicidad de la solución.- Vamos a demostrar ahora la siguiente proposición: Para un sistema dado de fuerzas actuantes sobre un cuerpo elástico, la solución de las ecuaciones (116), que satisfaga a las condiciones de borde (117) y a las ecuaciones de compatibilidad (119) bajo ciertas condiciones limitativas, es única; i.e., el estado de tensión está determinado sin ambigüedad.

Comenzamos con lo que se entiende por cuerpo elástico libre de tensiones, a saber, que si el cuerpo queda libre de la acción de todas las fuerzas exteriores, no existirá deformación y las tensiones en todo el ámbito del cuerpo serán nulas. Supongamos, entonces, que las ecuaciones arriba mencionadas admiten dos soluciones diferentes y sean  $\dots$  las componentes de la tensión en una de esas soluciones y  $\dots$ , las que corresponden a la otra. Aplicando al primero de esos estados de tensión, las ecuaciones (116) y (117), tendremos:

..... ;  
..... ;  
..... ;  
..... ;

Para el segundo estado de tensión supuesto se tiene

..... ;  
..... ;  
..... ;  
..... ;

Restando estas últimas ecuaciones de las del primer grupo, resultará que la distribución de tensiones definidas por las diferencias satisface a las ecuaciones

..... ;  
..... ;  
..... ;

en las cuales se han desvanecido todas las fuerzas exteriores. De acuerdo con el concepto de cuerpo libre de tensiones que hemos indicado antes, resultará, por lo tanto, que todas las diferencias tambien desaparecen y los dos sistemas de distribución de tensiones deben ser idénticos.

El teorema de la unicidad de la solución puede demostrarse en forma análoga si en lugar de las fuerzas exteriores se da los corrimientos  $u, v, w$  en la superficie exterior del cuerpo.

En la demostración anterior se ha empleado el principio de superposición, ya que mediante una simple resta ha sido obtenida una distribución de tensiones . La legitimidad de la aplicación de este principio es admisible tan solo cuando los pequeños corrimientos correlativos de la deformación no afectan substancialmente la acción de las fuerzas exteriores, circunstancia que debe ser considerada, ya que en ciertos casos no se puede hacer caso omiso de las pequeñas deformaciones, sino que por el contrario deben tomarse en consideración al establecer las ecuaciones de equilibrio. En casos como esos, la demostración de unicidad de la solución que queda desarrollada, no es valedera, y para un mismo sistema de fuerzas externas puede haber diversas formas de equilibrio posibles. Tal ocurre en problemas referentes a la estabilidad elástica de estructuras formadas de barras finas o paredes poco espesor.

Para desestimar la unicidad de la solución nos hemos fundado en la suposición de que las tensiones en un cuerpo desaparecen cuando se lo libra de la acción de las fuerzas exteriores. Sin embargo, se dan casos de existir tensiones iniciales o latentes en un cuerpo sobre el cual no actúan fuerzas exteriores. En los párrafos 25 y 35

hemos encontrado un ejemplo de esta naturaleza al estudiar el caso de un anillo circular: uniendo por soldadura u otro medio los bordes obtenidos al separar de la pieza un trozo limitado por dos secciones según planos axiales contiguos, resulta un anillo con tensiones iniciales. Al tratar los problemas de elasticidad plana hemos desarrollado diversos ejemplos de esta clase.

Las deformaciones anelásticas que aparecen durante el proceso de modelado de un cuerpo simplemente conexo pueden originar también tensiones iniciales, tal como ocurre en piezas metálicas voladas de grandes dimensiones, por consecuencia del enfriamiento desigual y también en barras laminadas, a causa del flujo del material que origina el trabajo *ex. fric.* Las ecuaciones de la elasticidad no son suficientes para determinar esas tensiones iniciales y es necesario recurrir a datos suplementarios que se relacionen con el proceso tecnológico de formación del cuerpo de que se trata.

Debe tenerse en cuenta que siempre que sea aplicable el principio de superposición las tensiones iniciales no afectan a las deformaciones y tensiones que aparecen bajo la acción de fuerzas exteriores y podremos calcular estas exactamente en la misma forma que si no existieran dichos esfuerzos iniciales; y éstos, agregados a las tensiones debidas a fuerzas exteriores permiten obtener las tensiones totales. Por el contrario, el conocimiento de las tensiones iniciales es indispensable, cuando el principio de superposición no es aplicable, para calcular las tensiones originadas por cargas exteriores. Así, por ejemplo, no podemos calcular las tensiones de flexión que se producen en una barra delgada sujeta a la acción de cargas laterales si dicha barra soporta ya una extensión o una compresión axial, sin conocer la magnitud del esfuerzo inicial que ésta origina.

65.-Tensiones de origen térmico.- Una de las causas que originan tensiones iniciales en un cuerpo, es su desigual calentamiento. El fenómeno de la dilatación de los elementos que componen un cuerpo a consecuencia de la elevación de temperatura es bien conocido. Por lo general, ese proceso no puede desarrollarse libremente en un cuerpo continuo, y entonces el calor provoca en el mismo tensiones

internas. Estas tensiones de origen térmico tienen gran importancia en muchos proyectos de maquinarias como por ejemplo, turbinas de vapor y motores Diesel, por lo que deben ser estudiadas con todo detalle.

Imaginemos un pequeño elemento separado de un cuerpo sujeto a variaciones de temperatura, que supondremos ocurren de manera continua a través del cuerpo, con lo que la temperatura del elemento de que se trata puede ser considerada uniforme. Si la dilatación - del mismo no está impedida y  $T$  representa el cambio de temperatura -incremento en un punto, sobre cierta temperatura inicial uniforme en el cuerpo- y a el coeficiente de dilatación térmica lineal (que se considerará constante), la deformación originada por el cambio de temperatura tendrá por componentes:

(a)

Supongamos ahora que la temperatura  $T$  varíe a través del cuerpo de manera que las componentes de la deformación de origen térmico (a) satisfagan las ecuaciones de compatibilidad (118); como puede verse fácilmente, ello ocurre tan solo cuando todas las derivadas segundas de  $T$  respecto a  $x$ ,  $y$ ,  $z$  desaparecen o, lo que es lo mismo, cuando  $T$  es constante o una función de primer grado de las coordenadas. Entonces, quedan satisfechas las exigencias relativas a la existencia de funciones continuas,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , que definen la deformación de un cuerpo, y no habrá tensiones de origen térmico.

Pasemos ahora a considerar el caso general de distribuciones de temperaturas tales que las correspondientes deformaciones (a) no satisfacen las ecuaciones de compatibilidad y se originan tensiones de origen térmico. Para calcular estas tensiones usamos las ecuaciones de equilibrio en función de los corrimientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (ver § 63). Como las deformaciones obedecen no solamente a los esfuerzos sino también a la variación de temperatura, deberemos reemplazar las ecuaciones (3), que traducen la ley de Hooke por las siguientes

(b)

Por el contrario, las ecuaciones (6) que dan el deslizamiento, no se modifican, porque la libre dilatación de elementos muy pequeños de un material isótropo, originada por un cambio de temperatura - no produce distorsión alguna.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (b) y empleando los símbolos que indican las expresiones (7), llegamos a la siguiente:

Agregando esta relación a las ecuaciones (b) y despejando las tensiones, encontramos:

(c)

Si llevamos estos valores y los que dan las relaciones (6) a las ecuaciones de equilibrio (116), tendremos, en el supuesto de la - inexistencia de fuerzas másicas:

(124)

Ecuaciones, éstas, que reemplazan a las (120) en el cálculo de las tensiones originadas por cambios de temperatura. También las condiciones de borde se modifican al reemplazar en ellas las ecuaciones (c) y (6) y se transforman, en el supuesto de que no existan - fuerzas de superficie, en:

(125)

La comparación de las ecuaciones (124) y (125) con las ecuaciones (120) y (123) evidencian que los términos

sustituyen a las componentes X, Y, Z de las fuerzas másicas y que los términos

reemplazan a las componentes  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  de las fuerza superficiales. Lo que nos dice que los corrientes u, v, w que acarrea el cambio de temperatura T, son los mismos que los originados por las fuerzas másicas

(d)

y por las tensiones normales

(e)

distribuidas sobre la superficie.

Conocidos los corrimientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , podremos calcular los esfuerzos tangenciales y las tensiones normales, para lo cual nos servimos de las ecuaciones (6) del § 6 y (c) del presente párrafo, respectivamente. Se ve que las tensiones normales constan de una parte originada por las componentes de la deformación en la forma habitual cuando no existe cambio de temperatura y otra parte, constituida por una presión hidrostática constante, de magnitud

(f)

Así, pues, la tensión total que origina un calentamiento desigual se obtiene superponiendo la presión hidrostática (f) a las tensiones producidas por las fuerzas másicas (d) y las fuerzas de contacto, (e).

A la misma conclusión se puede llegar por otro camino. En efecto, podemos imaginar que el cuerpo sujeto a calentamiento desigual está subdividido en elementos infinitamente pequeños cuyas deformaciones de origen térmico (q), son contrarrestadas por medio de una presión uniforme aplicada a cada uno de ellos, que llamaremos  $p$  y que, de acuerdo con la ecuación (3), está dada por la expresión (f); eliminada de esa manera la deformación de origen térmico, los elementos toman su posición mutua para formar un cuerpo continuo que conserva su forma inicial. La distribución de la presión (f) puede realizarse aplicando al cuerpo, tal como lo hemos supuesto constituido, determinadas fuerzas másicas y presiones superficiales que deberán satisfacer a las condiciones de equilibrio (116) y a las de contorno (117).

Reemplazando en dichas ecuaciones los valores:

llegamos a la consecuencia siguiente: para mantener la forma inicial del cuerpo formado de la manera indicada, las fuerzas másicas necesarias son

(g)

y deberá aplicarse además, sobre su superficie, la presión (f).

Supongamos ahora que los elementos están vinculados entre sí y eliminemos las fuerzas (g) y la presión superficial (f). Obtendremos entonces, evidentemente, las tensiones ocasionadas por la

acción térmica, añadiendo a las presiones (f) las tensiones que producen en el cuerpo elástico las fuerzas de volumen

y además una tracción normal a la superficie, cuyo valor es:

Estas últimas tensiones satisfacen a las ecuaciones de equilibrio

(126)

y a las condiciones de límite

(127)

así como también a las condiciones de compatibilidad estudiadas en el 61. Superponiendo a la solución de estas ecuaciones la presión (f), se obtiene como resultado las fatigas que se producen en un cuerpo a consecuencia de los cambios de temperatura que experimenta.

Cuando el sólido tiene la forma de una placa delgada que limita dos planos,  $z = \text{constante}$ , y la temperatura es constante en todo su espesor, las variaciones de temperatura provocarán un estado plano de tensión. Por medio de un razonamiento análogo al que fué utilizado en el problema referente a un estado elástico tridimen-

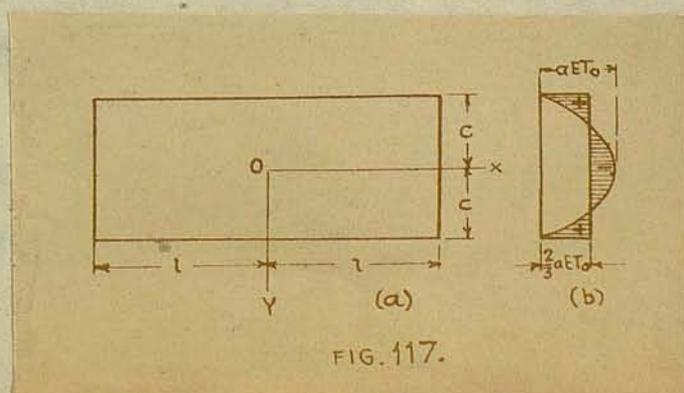


FIG. 117.

sional, podremos obtener en este caso las tensiones, procediendo como sigue. Al esfuerzo específico

añadimos las tensiones debidas a las fuerzas másicas

y las fatigas normales en el borde . Estas últimas satisfacen a ecuaciones que se deducen de las (126) y (127), haciendo en ellas  $\sigma = 0$  y poniendo  $1 - \frac{y}{c}$  en lugar de  $1 - 2 \frac{y}{c}$ .

Como ejemplo de aplicación de esta teoría consideremos las tensiones normales que aparecen en una placa rectangular delgada (figura 117) bajo la acción del calor cuando la ley de repartición de la temperatura está expresada por

(h)

Se verifica inmediatamente que las tensiones

(k)

satisfacen a las ecuaciones que expresan las condiciones de equilibrio con las fuerzas másicas que sean del caso, así como también a la condición de compatibilidad (21), establecida en el 12, que rige para un estado plano de tensión. Para satisfacer las condiciones de borde tan solo se requiere superponer las tensiones producidas por los esfuerzos de tracción,  $\sigma_{xy} = \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$ , aplicados a los extremos  $x = \pm l$  de la placa, y las tensiones (k). Las fatigas que originan esas tracciones fueron considerados en el 43, donde se demostró que la distribución de tensiones tiende a hacerse cada vez más uniforme a medida que aumenta la distancia a las extremidades de la pieza. Tenemos, entonces,

(l)

Superponiendo a las tensiones (k) y (l) las tensiones

se encuentra que, con excepción de todas las fatigas desaparecen; en cuanto a dicha tensión, está dada por

(m)

y su distribución se representa gráficamente en la figura 117b.

El método aplicado en el ejemplo ilustrativo anterior puede aplicarse en todos los casos en que la temperatura  $T$  que reina en una placa larga está representada por una función par de  $y$  (figura 117).

En esos casos, podemos obtener la solución razonando en la forma siguiente: si la distribución de la temperatura es independiente de  $x$ , las secciones transversales de la placa a suficiente distancia de los extremos deberán permanecer planas; aplicando tensiones de compresión.

suprimiremos por completo la deformación específica <sup>(n)</sup> originada por el cambio de temperatura, y, para satisfacer las condiciones del equilibrio, superponemos entonces a las compresiones (n) una tracción uniforme cuyo valor sea tal que anule a la resultante de las fuerzas normales que obran en la sección transversal de la placa. La fatiga normal, así obtenida, es, para cualquier punto de la sección transversal,

(o)

Esta solución comprende como caso particular a la señalada anteriormente con la letra (a).

Si la repartición de la temperatura  $T$  no fuera simétrica con respecto al eje  $x$ , comenzariamos de nuevo con tensiones de compresión (n), cuyo efecto es el de hacer desaparecer la dilatación. En los casos en que no existe simetría, estas tensiones originan no solamente una fuerza resultante, sino también un par,

, así que para satisfacer las condiciones de equilibrio debemos añadir a las tensiones de compresión (n) una tracción uniforme, determinada como antes, y tensiones de flexión que satisfagan a la condición de nulidad de la suma de momentos de las fuerzas distribuidas sobre una sección transversal, lo que se escribe así:

de la cual

La tensión total será, por lo tanto:

(p)

En el desarrollo anterior se ha supuesto que la placa es delgada; pero si, por el contrario, supusiéramos que en la dirección que en dicho desarrollo corresponde al espesor, que es la del eje  $z$ , la pieza tiene una dimensión considerable, se tratará entonces de una placa de espesor igual a  $2c$  y cuyo plano medio es coincidente con el plano  $xz$ . Si la ley de distribución de temperaturas es independiente de las variables  $x$  y  $z$  y, además,  $T$  es una función par de  $y$ , cuyo valor medio en el espesor de la pieza es igual a cero, las secciones transversales de la placa, perpendiculares a los ejes  $x$  y  $z$ , permanecen planas y los corrimientos  $u$  y  $w$  son nulos. Puesto que no hay fuerzas aplicadas a las superficies de la placa de ecuaciones  $y = \pm c$ , podemos admitir que  $\sigma_y = 0$  y en cuanto a las otras dos componentes de la tensión normal, que la supresión de las deformaciones térmicas,  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_z$  exige, serán, con arreglo a las ecuaciones (c):

(n')

Los bordes de la placa se suponen libres de fuerzas y la ecuación (n') no puede aplicarse para el cálculo de las tensiones en proximidad de los bordes.

Si el valor medio de la variación de temperatura no es nulo, para satisfacer las condiciones de equilibrio será necesario que las tracciones uniformes aplicadas en las direcciones  $x$  y  $z$  se superpongan a las compresiones (n'). Si, además, la temperatura no obedece a una distribución simétrica con respecto al plano  $xz$ , habrá que agregar las tensiones de flexión y de esta manera obtendremos, finalmente, la ecuación

(r)

que, como se ve, es análoga a la ecuación (p), obtenida anteriormente, y nos permitirá calcular fácilmente las tensiones térmicas que en una placa hace aparecer la temperatura  $T$ , distribuida en su espesor según una ley dada.

Tomemos como ejemplo el caso de una placa que a partir de una

temperatura inicial  $T_0$  es enfriada al mantener sus caras  $y = \pm c$  a una temperatura constante,  $T_1$ . Aplicando la teoría de Fourier - podemos escribir la siguiente ecuación, que da la temperatura para un instante  $t$ :

(s)

en la cual  $p_1, p_3 = 3^2 p_1, \dots, p_n = n^2 p_1, \dots$ , representan ciertas cantidades constantes. Reemplazando en (r), hallamos

(t)

El primer término adquiere importancia predominante al cabo de un lapso moderado, y entonces se podrá admitir que

Para  $y = \pm c$  tenemos tensiones de tracción

En el plano medio,  $y = 0$ , obtenemos tensiones de compresión:

La ecuación siguiente nos permite hallar para los puntos en que el esfuerzo es nulo:

Esta distribución de tensiones de origen térmico puede estudiarse en placas de material transparente mediante procedimientos foto-elásticos.

Manteniendo las caras  $y = \pm c$ , de una placa, a temperaturas diferentes  $T_1$  y  $T_2$ , se origina un flujo calorífico que después de cierto tiempo obedece aun estado de régimen y entonces la temperatura esta dada por la función de primer grado:

(u)

Como ya hemos visto, cuando la placa puede dilatarse libremente, la distribución de temperatura que esa ecuación refleja, no provoca la aparición de tensiones. Si los bordes de la pieza son mantenidos a temperatura cero, para suprimir las deformaciones originadas por el calor será necesaria la existencia de tensiones térmicas, que se -

puede calcular substituyendo en la ecuación (n') el valor de  $T$ . Si por ejemplo, hacemos  $T_2 = -T_1$ , se tendrá conforme a la ecuación (u):

y la ecuación (n') da, para ese valor de  $T$ :

(v)

De donde la tensión máxima:

(w)

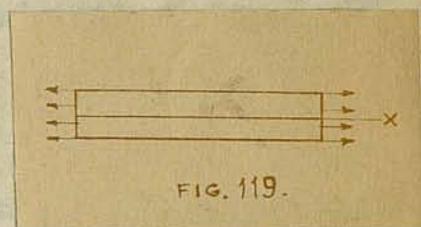
En esta fórmula no figura el espesor de la placa; pero tratándose de placas de un espesor mayor hay por lo general entre las dos caras una diferencia de temperatura de cierta entidad, lo que explica que una placa espesa de un material quebradizo esté más expuesta que una delgada, a romperse por causa de las tensiones de origen térmico.

En algunos casos, una de las caras de una placa está en contacto con gases cuya temperatura varía periódicamente. Cuando se trata de ciclos térmicos de alta frecuencia, se origina al cabo de cierto tiempo, a través, de la placa un flujo calorífico continuo como el que se consideró antes, y, superpuestos al mismo, los ciclos térmicos. La amplitud de los ciclos de variación de temperatura del material en la superficie de la placa es, por regla general, pequeña, en relación con la fluctuación de temperatura de los gases y disminuye rápidamente hacia su interior. Si sobre los bordes de la placa no actúa fuerza alguna, el flujo calorífico uniforme no origina tensiones térmicas y sólo se deberá considerar, entonces, las variaciones cíclicas de temperatura. La rápida disminución de amplitud de estas modificaciones con el aumento de la distancia a la superficie permite hacer caso omiso del segundo y del tercer término de la ecuación (x) y resultará entonces que la tensión máxima en un punto es proporcional a la amplitud de los ciclos térmicos que corresponden al mismo. Supongamos, por ejemplo,  $T = \pm 10^{\circ}\text{C}$  y que se trata de un acero cuyas características son:  $\alpha = 125 \times 10^{-7}$ ,  $E = 2,11 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$  y  $\nu = 0,3$ ; entonces resultará

Análogo método se puede aplicar para calcular las tensiones que -

en las rocas originan las fluctuaciones diarias de temperaturas éstas son amplias en las montañas elevadas y en los desiertos, y los esfuerzos de tracción, en correspondencia de la temperatura mínima, bastan a menudo en esos lugares para provocar la formación de grietas en las rocas de la corteza. Un problema análogo se presenta - al considerar las tensiones de origen térmico que se originan en estructuras de hormigón tales como muros de embalse, pilares y arcos.

67. Tensión uniforme. - Al estudiar en el capítulo VII las ecuaciones de equilibrio (116) y las condiciones de borde (117), quedó establecido que la verdadera solución del problema deberá satisfacer no solamente a aquéllas sino también a las condiciones de compatibilidad (118). Si las fuerzas másicas son constantes o inexistentes, las condiciones de compatibilidad solo contienen derivadas segundas de las componentes de la tensión. Por lo tanto, si unas componentes de la tensión que sean constantes o bien funciones lineales de las coordenadas pueden cumplir las ecuaciones (116) y (117), las condiciones de compatibilidad quedarán idénticamente satisfechas, y dichas tensiones constituyen, entonces, la solución exacta del problema (vide 61, in fine).



En el caso de una barra prismática sometida a una extensión de dirección axial (figura 119) -que constituye un ejemplo muy sencillo-, si se desprecia las fuerzas másicas, las ecuaciones de equilibrio quedan satisfechas tomando

(a)

Sobre la superficie lateral de la barra no actúa fuerza exterior alguna y las condiciones de borde (117) están evidentemente satisfechas desde que, con excepción de , todas las componentes de la tensión son nulas. Para las caras limitantes de la barra en ambas extremidades, las condiciones de límite están reducidas a:

(b)

Lo que no es más que decir que si las tensiones de tracción están uniformemente repartidas en las bases de una barra prismática, en cada sec-

ción recta habrá una distribución uniforme de tensiones normales. En este caso, las relaciones (a) satisfacen a las ecuaciones (116) y (117) y constituyen la solución correcta del problema, puesto que las condiciones de compatibilidad (119) quedan satisfechas idénticamente. La solución (a) deja de ser correcta cuando los esfuerzos de extensión no se reparten uniformemente sobre las extremidades, porque entonces no satisface en estas a las condiciones de límite. La solución verdadera resulta entonces más complicada, a causa de que la distribución de fatigas en una sección transversal deja de ser uniforme. Al tratar algunos problemas de elasticidad bidimensional (20 y 43), hemos encontrado ejemplos de ese género de repartición de esfuerzos.

Sea ahora, como segundo ejemplo, el caso de una compresión hidrostática uniforme. Con fuerzas másicas inexistentes, las ecuaciones de equilibrio (116) quedan satisfechas tomando

(c)

El elipsoide de Lamé es en este caso una esfera, lo que quiere decir que tres direcciones perpendiculares cualesquiera pueden ser consideradas como direcciones principales, y el esfuerzo en un plano elegido arbitrariamente es una tensión normal de compresión igual a  $p$ . Las condiciones periféricas (117) quedarán satisfechas evidentemente, si la presión  $p$  está uniformemente distribuida en la superficie del cuerpo.

68. Barra prismática extendida por acción de su propio peso.— Si

es el peso específico del material de la barra (fig. 120), las fuerzas de volumen serán:

(a)

Las ecuaciones diferenciales de equilibrio (116) quedan satisfechas poniendo en ellas

(b)

o, lo que es lo mismo, suponiendo que cada sección transversal está sujeta a una tracción uniforme originada por el peso de la parte de la barra situada por debajo de aquella.

Fácilmente se comprueba que para las superficies laterales sobre

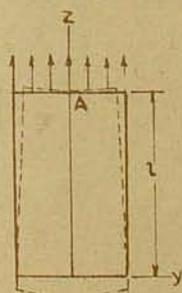


FIG. 120

las cuales no actúa fuerza alguna, las condiciones periféricas - (117) están satisfechas. Para la extremidad inferior de la barra de longitud  $l$ , las condiciones de límite se traducen en tensiones nulas y en una fatiga extensora uniformemente distribuida, sobre la extremidad superior. La solución (b), concordante con la que dan generalmente los textos elementales de resistencias de materiales, satisface también a las ecuaciones de compatibilidad (119) y, por lo tanto, es la solución correcta del problema para una repartición uniforme de fuerzas en la base superior del prisma.

Pasemos ahora a considerar los corrimientos (ver 62). Para la aplicación de la ley de Hooke empleamos las ecuaciones (3) y (4), con lo cual llegamos a

(c)

(d)

(e)

Los recorridos  $u$ ,  $v$ ,  $w$  pueden obtenerse, entonces, integrando las ecuaciones anteriores. Por integración de (c) se obtiene:

(f)

en la cual  $w$  es una función de  $x$  y de  $y$ , que se determinará más adelante. Reemplazando este último valor en las ecuaciones (e), - encontramos

de las cuales resulta

(g)

En ésta  $u$  y  $v$  son funciones de  $x$  y de  $y$  solamente. Reemplazando en (d) las expresiones (g), tenemos:

(h)

Si recordamos que  $u$  y  $v$  son independientes de  $z$ , concluiremos que las ecuaciones (h) quedarán satisfechas solamente si se verifica

(k)

Por sustitución de las expresiones (g), que nos dan  $u$  y  $v$ , en la primera de las ecuaciones (e), tendremos,

y, puesto que  $u$  y  $v$  no dependen de  $z$ , será necesario que

(1)

Las ecuaciones (k) y (1) nos permiten establecer las expresiones generales de las funciones  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Es fácil demostrar que todas estas ecuaciones se cumplen para los valores

en los cuales

son constantes arbitrarias.

Ahora bien, con arreglo a las expresiones (f) y (g), se tendrá - para los corrimientos las formulas siguientes:

(m)

Las seis constantes arbitrarias deberán ser determinadas teniendo en cuenta las condiciones de sustentación de la pieza, las cuales deben evitar el movimiento de la barra como cuerpo rígido. Con el objeto de impedir toda traslación de la misma, fijemos el baricentro  $A$  de su cara superior de manera que  $u = v = w = 0$  para  $x = y = 0$  y  $z = 1$ . Para eliminar la posibilidad de rotación de la barra alrededor de ejes paralelos a las direcciones  $x$  e  $y$ , pasantes por  $A$ , fijemos en dicho punto un elemento del eje  $z$ , con lo cual se verificará en él:  $\dots = 0$ ; en cuanto a la posibilidad de rotación alrededor del eje de las  $z$ , desaparece fijando alrededor del punto  $A$  un área elemental, en un plano paralelo al  $xz$ , con lo cual, en dicho punto se tendrá  $\dots = 0$ . Aplicando las ecuaciones (m), las seis condiciones mencionadas, relativas al punto  $A$ , devienen:

de donde resulta

de manera que, en definitiva, los recorridos son:

De aquí resulta que los puntos que están sobre el eje de las  $z$  - efectúan únicamente recorridos verticales dados por

A consecuencia de la contracción lateral, otros puntos de la barra experimentan, además del corrimiento vertical, otro horizontal, de manera que las rectas que antes de la deformación eran paralelas al eje de las  $z$ , formarán un ángulo con esa dirección luego de deformarse la barra, y ésta adquirirá la forma que se indica en la figura 120, de líneas punteadas; sus secciones rectas pasarán a ser paraboloides: por ejemplo, los puntos de la sección transversal  $z = c$  estarán situados, después de la deformación de la barra sobre la superficie de ecuación:

Esta superficie es perpendicular a todas las fibras longitudinales de la barra, las que, a causa de la deformación adquieren una inclinación respecto al eje  $z$ , y las distorsiones  $\gamma$  serán, entonces, nulas.

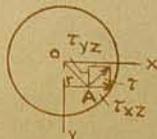
69.-Torsión de ejes cilíndricos de sección circular.- Con arreglo a la teoría elemental de la torsión de piezas cilíndricas de sección circular, el esfuerzo de desgarramiento,  $\tau$ , en un punto cualquiera de la sección transversal ( fig. 121), es perpendicular al radio  $r$  y proporcional a su distancia al eje y al ángulo específico de torsión,  $\theta$  :



(a).

en la cual,  $G$  es el módulo de rigidez.

Las componentes de la tensión tangencial según los ejes  $x$  e  $y$  son:



(b)

FIG. 121

De acuerdo con la teoría elemental, se supone también que

$$= 0.$$

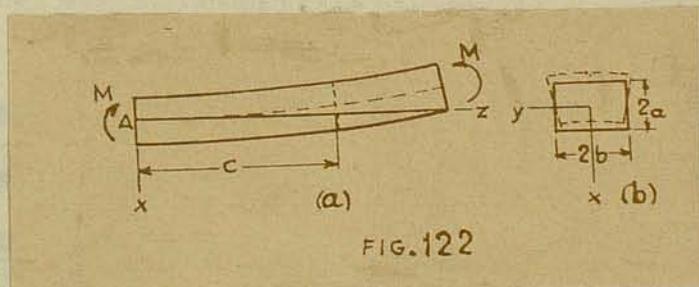
Podemos demostrar que bajo ciertas condiciones esta solución elemental es exacta. Para ello, tendremos presente que todas las componentes de la tensión son, si no nulas, funciones lineales de las coordenadas, de modo que las ecuaciones de compatibilidad (119) se cumplen y tan solo es necesario considerar las condiciones de equilibrio (116) y las condiciones de límite (117). Reemplazando las expresiones (b) en las (116), encontramos que estas últimas quedan satisfechas siempre que no existan fuerzas másicas. La superficie lateral del árbol considerado no está sometida a carga alguna, de manera que recordando que para las superficies cilíndricas  $\cos(Nz) = n = 0$ , las condiciones de límite (117) se reducen a

(c)

Para el caso de un cilindro circular se verifica, asimismo, que

(d)

La sustitución de estas expresiones y de las designadas con la letra (b) en la ecuación (c), patentiza que esta última queda satisfecha. Es también evidente que para secciones transversales no circulares, casos en los cuales no son aplicables las relaciones (d), las componentes de la tensión dadas en (b) no satis-



facen la condición de límite (c) y por lo tanto no es adecuada la solución (a). Estos problemas de torsión más complicados se tratarán en el capítulo IX.

Por lo que hace a las condiciones de límite en correspondencia con las bases, es visible que los esfuerzos cortantes superficiales deben repartirse en ellas de manera exactamente igual que lo están las tensiones en cualquiera -

de las secciones rectas intermedias de la pieza. La distribución de fatigas que dan las ecuaciones (b) representa la solución exacta del problema sólo para este caso; pero su aplicación práctica puede extenderse a otros, puesto que según el principio de de Saint Venant, a suficiente distancia de las extremidades de una barra larga sujeta torsión, las tensiones dependen únicamente de la magnitud del momento torsor  $M_t$  y son prácticamente independientes de la repartición de fuerzas que reine en las extremidades.

En este caso, los corrimientos pueden ser determinados de la misma manera que en el problema tratado en el párrafo anterior. Admitiendo en el punto A las mismas condiciones de vínculo supuestas en dicho problema, llegamos a:

Este resultado significa que las hipótesis de la conservación de las secciones transversales planas y de los radios rectilíneos, - que se formula habitualmente en el desarrollo de la teoría de la torsión, son correctas.

70.-Flexión simple de barras prismáticas.- Consideremos una barra prismática flexada bajo la acción de dos pares de fuerzas iguales y opuestas,  $M$ , que actúan en uno de sus planos principales (figura 122). Tomando como origen de coordenadas el baricentro de la sección recta y como plano  $xz$  el plano principal de flexión, la teoría elemental correspondiente nos da para las componentes de la tensión los valores:

(a)

$R$  es aquí el radio de curvatura de la barra deformada a consecuencia de la flexión. Llevando los valores que dan las expresiones (a) a las ecuaciones de equilibrio (116), se concluye que estas ecuaciones quedan satisfechas siempre que no existan fuerzas másicas. Las condiciones de límites (117) para la superficie lateral de la barra, que está exenta de fuerzas exteriores, también quedan satisfechas. Para las caras limitantes de la barra en sus extremidades, las condiciones de contorno (117) <sup>exigen</sup> que las fuerzas de superficie estén distribuidas en ellas de la misma manera que lo están las tensiones. Es ésta, condición sine qua non para que las -



Reemplazando ahora (e) y (g) en la primera ecuación incluida en la serie (d), llegamos a

Advirtiendo que tan solo el primer término de esta ecuación depende de  $u$ , concluimos que se deberá tener

Estas ecuaciones, así como las designadas con (f), exigen que se cumpla

en las cuales  $m, n, p, \dots$ , son constantes arbitrarias. De esa manera, las expresiones que corresponden a los recorridos serán:

Las constantes arbitrarias se determinan mediante las condiciones de sustentación de la pieza. Suponiendo fijos: el baricentro  $A$  de la cara limitante de la barra por la izquierda; un elemento del eje de las  $z$ , y un elemento del plano  $xz$ , tendremos para  $x = y = z = 0$ :

$$u = v = w = 0,$$

Estas condiciones quedan satisfechas si todas las constantes arbitrarias son iguales a cero, y entonces

(h)

Para obtener la elástica, reemplazamos en las ecuaciones (h) los valores  $x = y = 0$ ; se tiene entonces:

Que es la expresión de la elástica que da la teoría elemental de la flexión.

Consideremos ahora una sección transversal cualquiera,  $z = c$ , que dista  $c$  de la extremidad izquierda de la barra. Después de la deformación, los puntos de esa sección transversal se encontrarán

en el plano

es decir, que tal como lo admite la teoría elemental, en la flexión simple, las secciones transversales permanecen planas. Con el objeto de estudiar ahora la deformación de la sección transversal en su propio plano, consideremos las caras  $y = \pm b$ ; después de la flexión, los costados de la viga toman la inclinación que se indica con líneas de trazos en la figura 122b, con arreglo a la ecuación:

Los otros dos lados de la sección transversal  $x = \pm a$  se habrán curvado por efecto de la flexión y después de ésta estarán constituidas por curvas parabólicas, de ecuaciones:

Si la deformación es pequeña, esas curvas pueden ser sustituidas con suficiente exactitud por arcos de circunferencia de radio  $R/\mu$ . Cuando, a causa de la flexión, la curvatura de esos costados muestra en la dirección longitudinal su concavidad hacia arriba, transversalmente, presentan su concavidad hacia abajo. Podemos obtener la ecuación de las líneas de nivel que corresponden a esta superficie de curvaturas opuestas, cuyo aspecto será como el que indica la figura 123a, haciendo en la primera de las ecuaciones (h),  $x$  y  $u$  constantes; de esa manera, se tiene como ecuación de esas curvas:

$$z^2 - \mu y^2 = \text{constante},$$

que son, por lo tanto, hipérbolas de asíntotas

$$z^2 - \mu y^2 = 0.$$

De donde resulta para el ángulo  $\alpha$  (figura 123a):

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\mu}$$

Estas ecuaciones han sido utilizadas para determinar el coeficiente de Póisson,  $\mu$ .

Si se pule la cara superior de la viga y se coloca sobre ella u-

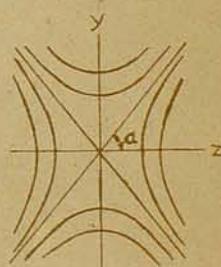


FIG. 123(a).

na lámina de vidrio, después de la flexión existirá un huelgo en-

Fig. 123(b).

tre la lámina de vidrio y la superficie curva de la barra, cuya amplitud, variable, puede medirse por procedimientos ópticos. Un haz luminoso monocromático, tal como el de una llava amarilla de sodio, dirigido normalmente sobre la placa de vidrio, se reflejará en parte sobre ésta y en parte sobre la superficie de la viga y, en aquellos puntos en los que el espesor de la capa de aire determine una diferencia de caminos ópticos de esos rayos, equivalente a un múltiplo impar de una semilongitud de onda luminosa, -

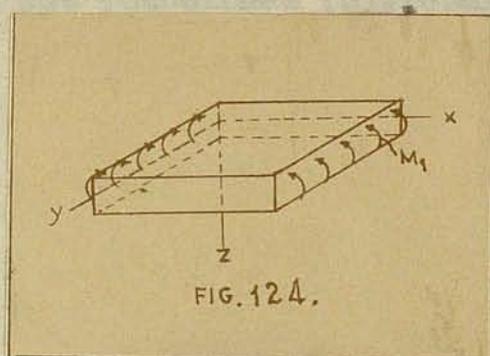


FIG. 124.

se producirá una interferencia de los dos rayos reflejados. De esa manera puede obtenerse una imagen tal como la que muestra la figura 123b, que permite apreciar las líneas hiperbólicas de nivel de las superficies

convexas.

71.-Flexión simple de placas planas.- Los resultados obtenidos en el párrafo anterior son de aplicación al caso de la flexión de placas de espesor uniforme. Si sobre los bordes de la placa paralelos al eje de las  $y$  (figura 124) están repartidas las tensiones  $= Ez/R$ , supuesto que las deformaciones sean pequeñas en relación con el espesor de la placa, la cara de esta se transformará en una superficie de curvaturas opuestas: en planos paralelos a  $xz$  es  $1/R$  y en dirección perpendicular,  $-\frac{1}{R}$ . Si  $h$  es el espesor de la placa,  $M_1$  el momento flector por unidad de longitud sobre los bordes paralelos al eje de las  $y$ , y

el momento de inercia por unidad de longitud, la relación entre  $M_1$  y  $R$  será, con arreglo a lo explicado en el párrafo precedente,

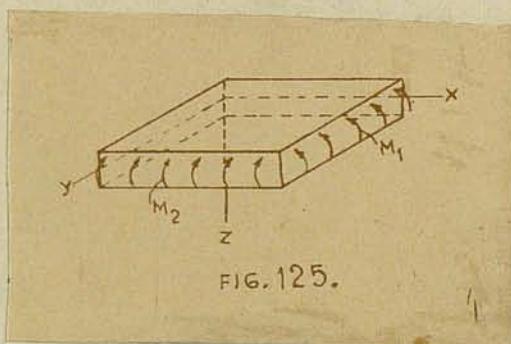
(a)

Si llegaran a actuar momentos flectores en dos direcciones ortogonales (figura 125) las curvaturas de las superficies deformadas pueden obtenerse por vía de superposición. Sean  $1/R_1$  y  $1/R_2$  las curvaturas de las superficies elásticas en los planos paralelos a los ejes de las coordenadas  $xz$  y  $yz$ , y  $M_1$  y  $M_2$  los momentos flectores por unidad de largo de los bordes paralelos a los ejes  $y$  y  $x$ , respectivamente. Aplicando la ecuación (a) y el principio de superposición, resulta

(b)

Los momentos se consideran de signo positivo si al deformar la placa ésta muestra su convexidad hacia abajo. Despejando  $M_1$  y  $M_2$  en las ecuaciones (b), resulta

(c)



Para pequeñas deformaciones, se puede admitir, aproximadamente:

Escribiendo, entonces,

(128)

se llega a

(129)

La constante D se denomina rigidez de flexión de la placa. En el caso particular en que la placa adquiere la forma de superficie cilíndrica de generatrices paralelas al eje y, tendremos y, de acuerdo con las ecuaciones (129).

(130)

Para el caso particular en que  $M_1 = M_2 = M$ , tenemos  $1/R_1 = 1/R_2 = 1/R$ ; la placa adquiere entonces forma esférica y la relación entre la curvatura y el momento flector es, según las ecuaciones (c),

(131)

Más adelante tendremos oportunidad de emplear estos resultados.

## CAPÍTULO IX

## TORSION

72.-Torsión de barras prismáticas.- Como quedó explicado anteriormente ( § 69), puede obtenerse la solución exacta del problema de la torsión de una pieza cilíndrica de sección circular bajo el supuesto de que durante la aplicación del par torsor sus secciones transversales permanecen planas y giran sin deformarse. Esta teoría, que se debe a Coulomb, fue extendida posteriormente por Navier al caso de barras de cualquier sección, lo que le condujo a estas conclusiones erróneas: para un momento torsor dado, el ángulo de torsión de una barra es inversamente proporcional al momento polar de inercia respecto al baricentro de su sección transversal; la tensión tangencial máxima aparece en los puntos más alejados del baricentro. Además, tal suposición está en evidente contradicción con las condiciones perimétricas: en una barra de sección rectangular (figura 126), por ejemplo, según la hipótesis de Navier, la dirección del esfuerzo tangencial en cualquier punto, A, del contorno debería ser perpendicular al radio OA, y resolviéndolo en dos componentes,  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yz}$ , sería necesario que actuara una tensión tangencial complementaria, - igual a  $\tau_{xy}$  sobre el elemento de superficie lateral de la barra que circunda al punto A (vide § 4), lo que contradice el supuesto de que sobre la superficie lateral de la barra no obra fuerza alguna, como que la torsión está originada por pares de fuerzas aplicados a las extremidades. Un simple experimento realizado retorciendo una barra de sección rectangular (figura 127) hace ver que sus secciones transversales no se mantienen planas durante la torsión y que los elementos superficiales que más se deforman son los del centro de cada cara lateral, o sea los más próximos al eje de la barra, todo lo cual se aprecia bien merced a la cuadrícula dibujada sobre las caras.

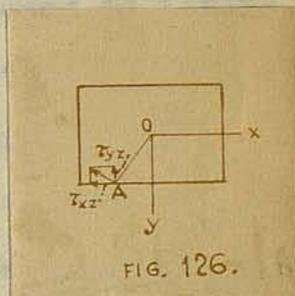


FIG. 126.

La solución correcta del problema de la torsión de barras prís-

máticas bajo la acción de pares de fuerzas aplicados a sus extremidades, ha sido dada por  $k\kappa$  de Saint-Venant. Se valió para llegar a ella, del denominado método semi-inverso, así llamado en cuanto supone primeramente que ciertas componentes de la tensión son nulas

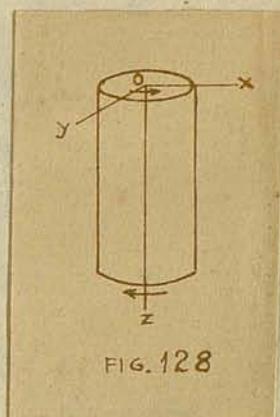


Fig. 127.

y demuestra que las restantes deben ser elegidas de manera tal - que las ecuaciones de equilibrio (116), las condiciones de límite (117) y las condiciones de compatibilidad (119) queden satisfechas, para demostrar, finalmente, en virtud de la unicidad de las soluciones de las ecuaciones de la elasticidad (§ 64), que la hipótesis formulada inicialmente respecto a las componentes de la tensión es legítima, y la solución obtenida es la que inobjetablemente corresponde al problema de la torsión.

Consideremos una barra prismática retorcida bajo la acción de - pares de fuerzas aplicadas en sus extremidades (figura 128). Guiándose por la solución que corresponde a un eje de sección circular, de Saint-Venant supone que en el caso más general, de una barra - prismática de sección cualquiera sujeta a torsión, todas las componentes del esfuerzo, con la sola excepción de  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{yx}$ , desaparecen, de manera que únicamente es preciso investigar acerca - de la distribución de los esfuerzos tangenciales en las secciones transversales de la barra. Si llevamos a las ecuaciones diferenciales de equilibrio (116) la antedicha condición, esto es,

(a)

y suponemos la inexistencia de fuerzas másicas, se tendrá:

(b)

Las dos primeras de estas ecuaciones indican, que la distribución de - tensiones es independiente de la coordenada  $z$  o, lo que es lo mis-

no, común a todas las secciones transversales de la barra; y en cuanto a la exigencia representada por la tercera de ellas, a la que deberá responder la distribución de los esfuerzos, se cumplirá fácilmente introduciendo una función de tensión, tal que se verifique:

$$(132)$$

Por lo que se refiere a las ecuaciones de compatibilidad (119), las tres primeras y la última de ellas se satisfacen idénticamente en virtud de nuestra suposición (a), y en cuanto a las dos restantes, recordando el significado del símbolo laplaciano, se reducen a:

$$(a)$$

y luego, reemplazando los valores (132), llegamos a

$$(a)$$

de donde resulta la ecuación entre derivadas parciales:

$$(133)$$

la cual deberá, pues, quedar satisfecha por la función de Airy, - introducida a favor de las ecuaciones (132). La constante,  $F$ , que en ella aparece, será motivo de ulteriores consideraciones.

Toca ahora el turno a las condiciones de límite (117). Puesto que sobre la superficie lateral de la barra - que consideramos en primer término- no obran fuerzas exteriores, y toda normal a las caras que la forman es perpendicular al eje  $z$ , tenemos  $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$  y  $\cos(Nz) = n = 0$ . Recordando, además, la condición (a), re-

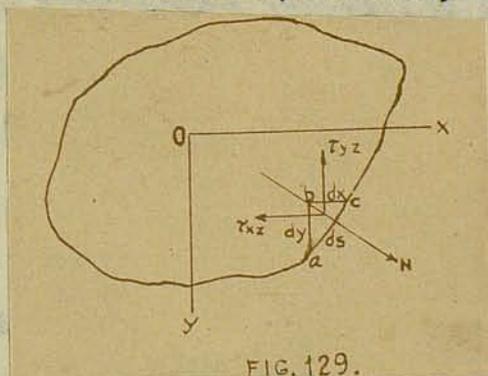


FIG. 129.

sulta evidente que las dos primeras de las ecuaciones (117) quedan idénticamente satisfechas, y la tercera se reduce a la forma

$$(e)$$

lo que significa que en todo punto del contorno el esfuerzo tangencial resultante está dirigido según la tangente al mismo en el pun-

considerado (ver figura 129), condición que, como se ha visto en este mismo artículo, página 272, debe quedar satisfecha si sobre la superficie lateral de la barra no actúa fuerza exterior alguna.

Si se considera (figura 129) un elemento infinitésimo,  $abc$ , - del contorno, de lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $ds$ , se tendrá

$$l = \cos(Nx) = \frac{dy}{ds}, \quad m = \cos(Ny) = -\frac{dx}{ds}$$

y reemplazando estos valores y los que dan las (132), en la ecuación (e), las condiciones periféricas vendrán a estar expresadas por

(134)

lo que nos dice que la función de tensión  $\phi$  debe ser constante a lo largo del contorno de la sección transversal. Si se trata de directrices que sean recintos simplemente conexos, verbigracia, la de una barra maciza, dicha constante puede ser arbitrariamente elegida. En el desarrollo siguiente asignaremos a la constante el valor cero, y entonces la investigación de la distribución de tensiones en la sección transversal de una barra sometida a torsión - consiste en determinar la función  $\phi$  que satisfaga a la ecuación (133) y que se anule en el contorno. Daremos más adelante algunos ejemplos de aplicación de esta teoría general a diversos casos particulares de secciones transversales.

Paseemos ahora a considerar las condiciones de límite en correspondencia de las extremidades de la barra sujeta a torsión. Las normales a los planos limitantes perpendiculares al eje  $z$  serán, por lo tanto, paralelas al mismo, es decir, que  $l = m = 0$ ,  $n = \pm 1$  y entonces las ecuaciones (117) devienen

(f)

en las cuales deberá tomarse el signo positivo para el plano limitante cuya normal exterior tiene el sentido del semieje positivo de las  $z$ , como ocurre para la extremidad inferior de la barra representada en la figura 128. En las bases, las fuerzas cortantes se distribuyen de la misma manera que las fatigas tangenciales lo están en las secciones rectas, y es fácil demostrar que tienen por resultante un par torsor. En efecto, reemplazando en las ecuaciones

(f) los valores (132) y teniendo presente la nulidad de  $\phi$  en la periferia, resulta:

como queríamos demostrar. Dicho par valdrá:

Efectuando la integración por partes y teniendo en cuenta que  $\phi = 0$  en el contorno, encontramos:

$$(135)$$

Queda, así, demostrado que la distribución de tensiones que se obtiene igualando a cero las cuatro componentes que indican las igualdades (a) y determinando las otras dos por medio de las ecuaciones (132), (133) y (134), satisface a las ecuaciones de equilibrio (116) y de compatibilidad (119). Ese estado elástico contempla la nulidad de las fuerzas exteriores sobre la superficie lateral de la barra y origina un momento de torsión dado por la ecuación (135). Las ecuaciones de la elasticidad quedan, pues, satisfechas y la solución del problema de la torsión, así obtenida, es la exacta.

Como se ha hecho notar, esa solución exige que los esfuerzos en las caras extremas de la barra estén distribuidos de cierta manera; pero tal exigencia no constituye una limitación a la aplicación práctica de la solución, puesto que, de acuerdo con el principio de de Saint-Venant, a suficiente distancia de las extremidades de una barra larga sometida a la torsión, las tensiones dependen solamente de la magnitud del momento de torsión  $M_t$  y son prácticamente independientes de la distribución de fuerzas que exista en sus bases.

73.-Corrimientos en barras prismáticas sometidas a torsión.-- Aplicando la ley de Hooke, podemos hallar los corrimientos lineales y deslizamientos en función de los valores que en el párrafo precedente obtuvimos para las componentes de la tensión:

(a)

(b)

Cuando la base o directriz es simétrica con respecto a dos ejes, se sigue de esa simetría que durante la torsión cada sección transversal gira alrededor de su baricentro, y el eje de la barra se mantiene rectilíneo. Considerando fija la base superior (figura 128) tal como se supone anteriormente en el caso de un eje de directriz circular (169), encontramos las ecuaciones (a) y las condiciones de vínculo quedan satisfechas tomando

(136)

en las cuales,  $\theta$  es el ángulo específico de torsión. En el caso de secciones transversales disimétricas o con sólo un eje de simetría, el giro de cada sección transversal se verifica alrededor de un punto que por lo general no coincide con el baricentro y al que se da el nombre de centro de torsión o sea la intersección del "eje de torsión" con la sección. Si fijamos -como antes- el centro de torsión de la base superior (figura 128), y adoptando dicho punto como origen de coordenadas, se podrá aplicar también en este caso las ecuaciones (136). Reemplazando los valores dados por éstas, en las ecuaciones (b), resultará:

(137)

Si se conoce las tensiones, estas ecuaciones nos permiten calcular los recorridos  $w$ , que definen el "curvado" o alabeo de la sección transversal durante la torsión que de Saint-Venant tuvo en cuenta, pero del cual Navier había hecho caso omiso. Mediante algunos ejemplos, hemos de ilustrar más adelante el cálculo de los corrimientos  $w$ .

Para obtener el ángulo específico de torsión,  $\theta$ , derivamos la primera de las ecuaciones (b) con respecto a  $y$  y la segunda con respecto a  $x$ , y luego restamos miembro a miembro, lo que nos da

(c)

y, teniendo en cuenta las ecuaciones (132) y (136) y operando, se llega a:

(138)

Por lo tanto, el ángulo de torsión puede ser calculado fácilmente siempre que la función de tensión se deduzca de las ecuaciones -

(133) y (134).

También podemos ver que la ecuación (138) permite establecer - que la constante  $F$  de la (133) tiene un significado muy simple, a saber:

(139)

74.-Barras de sección elíptica.- Supongamos que la elipse de ecuación

(a)

constituya la directriz de una barra sujeta a torsión (figura 130); en este caso la ecuación (133) y la condición de contorno (134) quedan satisfechas dando a la función de tensión la forma

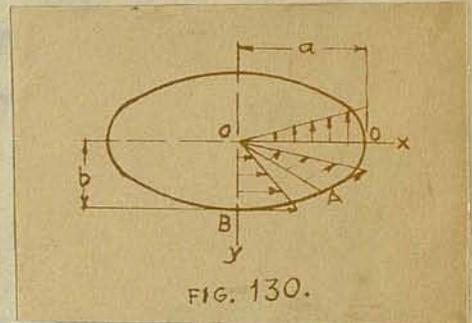


FIG. 130.

(b)

en la cual  $m$  es una constante, cuyo valor despejamos en la ecuación que se obtiene llevando (b) a la (133):

Por lo tanto

(c)

La ecuación (135) permitirá ahora determinar la constante  $F$ . Para ello, reemplazaremos en dicha ecuación el valor de  $\phi$  dado por (c) con lo que tendremos:

(d)

Pero:

luego, reemplazando en (d) y operando:

de la cual,

(e)

Llevando ahora el valor de  $F$ , así obtenido, a la ecuación (c):

(f)

Las componentes de la tensión se obtienen reemplazando en las ecuaciones (132), la función de Airy, (f), y operando:

(140)

La relación de las componentes del esfuerzo es proporcional a  $y/x$  y, por lo tanto, constante a lo largo de cualquier radio, tal co-

mo OA (figura 130). Esto significa que el esfuerzo tangencial a lo largo de un radio cualquiera OA tiene una dirección constante, que será, evidentemente, la de la tangente a la directriz en el punto A del contorno de la sección. A lo largo del eje vertical OB, la componente del esfuerzo tangencial es nula y la tensión resultante vale , mientras que siguiendo el eje horizontal OD la fatiga tangencial resultante es igual a . Es evidente que la máxima tensión se produce en la periferia y se puede demostrar fácilmente que tiene lugar en las extremidades del eje menor de la directriz elíptica. Reemplazando y por b en la primera de las ecuaciones (140), obtendremos el valor absoluto de dicho máximo:

(141)

Para  $a = b$ , esta expresión concuerda con la conocida fórmula correspondiente a la sección circular.

Reemplazando (e) en (139) resulta la siguiente expresión del ángulo específico de torsión:

(142)

Damos el nombre de rigidez torsional a la cantidad por la cual debe dividirse el momento torsor para obtener el barrenado; si la denotamos por C, será  $C = M_t / \theta$ . Para la sección de forma elíptica, la (142) nos da:

(143)

en la cual,  $A = \pi ab$  representa el área e  $I_p = \frac{ab^3}{4} + \frac{ba^3}{4}$ , el momento polar de inercia de la sección transversal.

Conocidas las componentes del esfuerzo, (140), podemos determinar fácilmente los trayectos; las componentes u y w están dadas por las ecuaciones (136) y el corrimiento w se deduce de (137). Reemplazando los valores dados por (140) y (142) e integrando, encontramos:

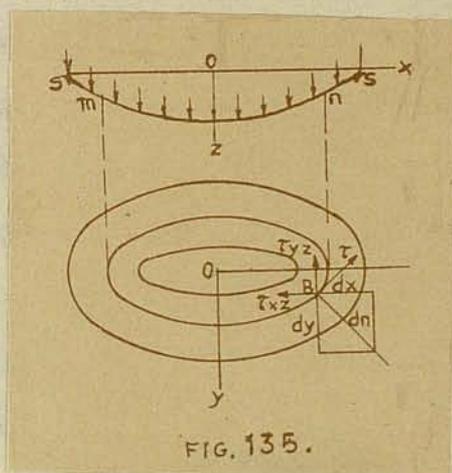
(144)

Deducimos de aquí que las curvas de nivel de las secciones alabeadas son hipérbolas, cuyas asíntotas son los ejes principales de la elipse.

76.-Analogía con la membrana.- De singular mérito y fecundidad ha

resultado la aplicación de la analogía con la membrana a la resolución de problemas de torsión, introducida por L. Prandtl.

Imaginemos una membrana homogénea, cuyos bordes se mantienen fijos sobre un contorno igual al de la sección recta de la barra sujeta a torsión, y que está sometida a una presión uniforme sobre sus caras, y uniformemente extendida en su perimetro (figura 134); sean  $q$  y  $S$  las intensidades de la presión y de la tracción uniformes, respectivamente. En el supuesto de que la deformación de la membrana sea muy pequeña; la ecuación de equilibrio del elemento infinitesimal  $abcd$ , obtenida proyectando en la dirección  $z$ , será:



siendo  $\frac{q}{S}$  la proyección -  
de la resultante de las tracciones que  
obran sobre los lados  $ad$  y  $bc$  y

$\frac{q}{S}$  la resultante, también hacia  
arriba, de las tracciones que actúan so-

bre los lados  $ab$  y  $dc$ .

De dicha ecuación se deduce:

$$(145)$$

En el borde de la membrana, la deformación es nula.

Al comparar la ecuación (145) y la condición de borde para las deformaciones en dirección vertical u ordenadas  $z$  de la membrana, con la ecuación (133), y la condición de contorno (134) deducidas en el § 72 para la función de Airy, surge la identidad de ambos problemas y, con ella, esta importante consecuencia: podremos obtener los valores de  $\phi$  valiendonos de las deformaciones de las membranas, para lo cual reemplazaremos la cantidad  $-\frac{q}{S}$ , de la ecuación (145), por  $F = -2G\theta$ , de la ecuación (133).

Mediante la representación de la superficie deformada de la membrana por curvas de nivel (figura 135), se pueden obtener diversas conclusiones de importancia acerca de la repartición de tensiones en la torsión. Consideremos un punto cualquiera,  $B$ , de la men-

brana: la deformación de ésta a lo largo de la curva de nivel que pasa por dicho punto es constante, o sea que

La ecuación que corresponde a la función de tensión,  $\phi$ , es

La expresión que antecede nos indica que la proyección del esfuerzo tangencial resultante sobre la normal,  $N$ , a la curva de nivel en el punto  $B$ , es nula y de ahí podemos concluir que dicho esfuerzo en el nombrado punto de la barra retorcida tiene la dirección de la tangente a la curva de nivel que pasa por el mismo. Si en la sección transversal de una barra sujeta a torsión se trazan curvas tales que la tensión tangencial resultante en cualquiera de sus puntos tenga la dirección de la tangente respectiva, dichas curvas serán las llamadas líneas de esfuerzos tangenciales.

Por lo tanto, las curvas de nivel de la membrana son las curvas de las tensiones tangenciales correspondientes a la sección transversal de la barra sometida a torsión.

La intensidad de la tensión resultante,  $\tau$ , en  $B$  (figura 135), se obtiene proyectando sobre la tangente las componentes,  $\tau_x$  y  $\tau_y$ , del esfuerzo. Por lo tanto:

Sustituyendo los valores

obtendremos

Lo que nos dice que la magnitud del esfuerzo tangencial en el punto  $B$  está dada por la pendiente máxima de la membrana en dicho punto, y para obtenerla será necesario solamente reemplazar, en la expresión de la pendiente,  $q/S$  por  $2G\theta$ . De aquí resulta que el esfuerzo máximo de desgarramiento se produce en aquellos puntos donde las curvas de nivel están más apretadas.

La ecuación (135) nos permite establecer que el duplo del volumen limitado por la membrana deformada y el plano  $xy$  (figura 135) representa el momento torsor, siempre que se reemplace  $q/S$  por  $2G\theta$ .

Estudiamos ahora las condiciones de equilibrio de la porción  $mn$  de la membrana, limitada por una curva de nivel (figura 135). La pendiente de la membrana a lo largo de esta curva es, en cualquier punto, proporcional al esfuerzo tangencial  $\tau$  e igual a  $\tau \cdot q/S \cdot l/2G$ . Llamando, entonces,  $A$ , a la proyección horizontal de la porción  $mn$  de membrana, la ecuación de equilibrio respectiva será

o bien,

(146)

Por medio de esta expresión se puede obtener el valor medio del esfuerzo tangencial a lo largo de una curva de nivel.

Haciendo  $q = 0$ , lo que significa considerar una membrana sobre la cual no actúe carga lateral alguna, se llega a la ecuación

(147)

la cual coincide con la ecuación de la función  $\phi$ , señalada con (b) en el 75. Si se toman las ordenadas del contorno de la membrana de manera que se verifique la ecuación

$$z + \frac{F}{4} (x^2 + y^2) = \text{constante}, \quad (148)$$

también se cumplirá la condición de borde designada con (c) en el mismo párrafo. De tal guisa podemos obtener la función  $\phi$ , valiéndonos de la superficie de deformación de una membrana no cargada, con tal que las ordenadas de la superficie de la misma tengan determinados valores en su contorno. Se demostrará más adelante que la determinación experimental de la distribución de tensiones en barras sujetas a la torsión, puede efectuarse tanto con membranas cargadas como con membranas no cargadas.

La comparación con la membrana es útil no solamente cuando el material de la barra retorcida se mantiene dentro del intervalo elástico, sino también cuando en determinados puntos de la sección transversal ha sido rebasado el límite de influencia del material. Suponiendo que el esfuerzo tangencial permanezca invariable durante la deformación plástica, la distribución de las tensiones en la zona de la sección transversal elásticamente deformada estará re-

presentada por la membrana, como antes; pero en la zona de las deformaciones plásticas la tensión está dada por una superficie de pendiente máxima y constante, representativa del límite de fluidez. Imaginemos que esa superficie está construida a la manera de un tejado sobre la sección transversal de la barra y que también está aplicada la membrana tensa y cargada como se explicó anteriormente: aumentando la presión se llegará a un punto tal que la membrana empieza a tocar el techo rígido, estado que corresponde a la fluencia inicial de la barra sometida a torsión; a medida que aumenta la presión, ciertas partes de la membrana entran en contacto y se adaptan al tejado y esas zonas representan las partes plásticas de la barra deformada. Esta teoría ha sido ilustrada con interesantes experimentos por A. Nádai.

77.—Barra de sección rectangular alargada, sujeta a torsión. La analogía con la membrana proporciona una solución muy sencilla del problema de la torsión de una barra de sección rectangular alargada. Suponiendo despreciable el efecto de los lados cortos del rectángulo y admitiendo que a consecuencia de una ligera deformación la membrana adquiere la forma cilíndrica (figura 136), podremos aplicar la fórmula elemental de la parábola funicular que corresponde a la curva del equilibrio de un hilo con carga uniformemente repartida sobre la luz (figura 136b):

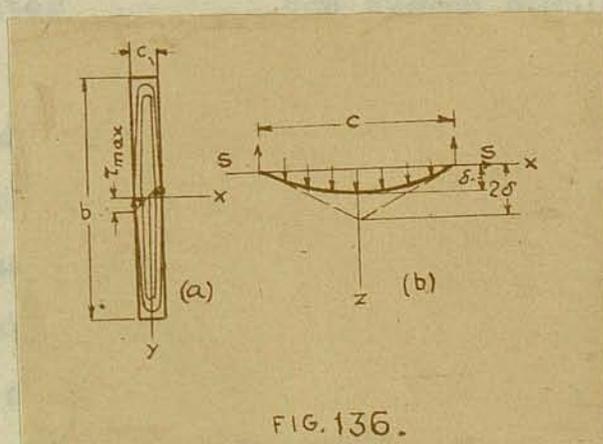


FIG. 136.

donde  $S$  es la tracción horizontal,  $q$  la carga uniforme y  $\delta$  la flecha.

La máxima pendiente, a la altura del punto medio de cada uno de los lados largos del rectángulo, es, de acuerdo con las conocidas propiedades de la parábola,

En cuanto al volumen limitado por la membrana deformada y el plano  $xy$ , calculado como cilindro parabólico, será:

(c)

Aplicando la analogía con la membrana y reemplazando en (b) y (c)  $q/S$  por  $2G$  (página 288), tenemos:

(d)

de donde

(149)

(150)

En la parábola funicular (figura 136b) se verifica:

y la pendiente de la membrana en cualquier punto es

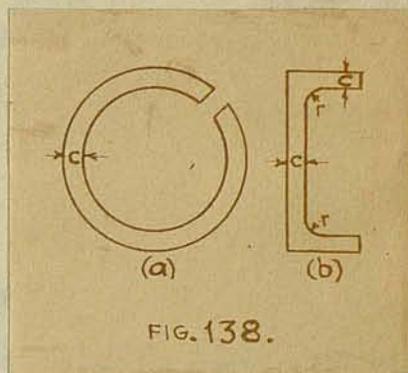
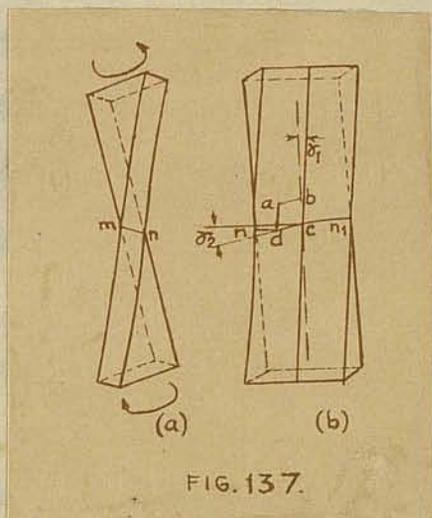
El esfuerzo que corresponde a la barra sometida a torsión es

La distribución de las tensiones obedece, pues, a una ley lineal, como se ve en la figura 136a, y el cálculo del momento de torsión que corresponde a dicha distribución nos da

es decir, la mitad del valor dado por (150); la otra, corresponde a las componentes  $T_x$  y  $T_y$ , que fueron completamente dejadas de lado al suponer que la superficie de la membrana deformada era cilíndrica. Aun cuando la magnitud de estas tensiones solamente es apreciable en proximidad de los lados cortos del rectángulo y los valores máximos que alcanzan son inferiores al del  $T_z$ , resultante del cálculo anterior, hay que tener presente que actúan a una mayor distancia del eje de la barra y su momento representa la segunda mitad del momento de torsión  $M_t$ .

Es interesante destacar que el valor máximo del esfuerzo, dado por la primera de las ecuaciones (d), es el duplo del que se origina en un cilindro circular de diámetro  $c$  que sufra el mismo giro,  $\theta$ , fenómeno que puede ser explicado si se tiene en cuenta el alabeo de las secciones transversales. En efecto, los lados de las

secciones transversales, tales como  $mn_1$  (figura 137), permanecen normales a las aristas de la barra, como se indica en los puntos  $n$  y  $n_1$  (vide tambien Fig. 127), en tanto que la deformación total que el esfuerzo de desgarramiento provoca en un elemento  $abcd$  consta de dos partes: la distorsión, debida a la rotación de la



sección transversal alrededor del eje de la barra, la cual es equivalente al deslizamiento que se produce en un cilindro circular de diámetro  $c$  y además, que es la parte de deformación atribuida al alabeo de la sección; y como en el caso de una sección rectangular angosta, el deslizamiento resultante equivale al doble del que experimenta una barra de directriz circular del diámetro indicado.

Las fórmulas (149) y (150), que han sido deducidas en lo que antecede para el caso de una sección rectangular angosta, pueden emplearse tambien cuando se trate de barras de secciones delgadas de diversas formas, tales como las que representa la figura 138, para lo cual se hará  $b$  igual al largo de la sección transversal desarrollada. Se justifica tal extensión, por el hecho de que si el espesor  $c$  de un tubo cilíndrico cortado a lo largo de una generatriz (figura 138a) es pequeño en relación con el diámetro, la pendiente máxima de la membrana y el volumen que la misma encierra son aproximadamente los mismos en una sección rectangular alargada de ancho  $c$  y de longitud igual a la circunferencia de diámetro medio de la sección transversal; y análoga conclusión resulta para el caso de la sección U, representada en la figura 138b. Corresponde advertir que en este último caso hay en los ángulos entrantes una considerable acumulación de esfuerzo, la cual depende

del radio  $r$  de la transición, de manera que la ecuación (150) resulta en ellos inaplicables. Este asunto se estudia con mayor detalle en el 81.

78.-Torsión de barras de sección rectangular.- La aplicación de la analogía con la membrana permite reducir este problema a la determinación de las deformaciones verticales de una membrana de planta rectangular uniformemente cargada, como la que representa la figura 139. Dichas deformaciones deben satisfacer a la ecuación (145)

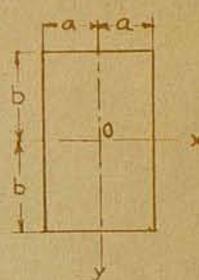


FIG. 139.

(a)  
y ser nulas en el contorno.

La condición de simetría con respecto al eje  $y$  y las condiciones de límite correspondientes a los lados  $x = \pm a$  del rectángulo quedan satisfechas si se expresan  $z$  bajo la forma de una serie:

(b)

en la cual  $b_1, b_3, \dots$  son coeficientes constantes e  $Y_1, Y_3, \dots$  son funciones de  $y$  solamente. Reemplazando (b) en la ecuación (a) y observando que el segundo miembro de esta última puede representarse bajo forma de serie, a saber,

(c)

llegamos a la siguiente ecuación, que permite determinar  $Y_n$ :

(d)

La solución es:

(e)

La simetría de la superficie de la membrana deformada, con relación al eje  $x$ , exige la nulidad de la constante de integración,  $A$ . En cuanto a la constante  $B$ , queda determinada por la condición de que las cotas de la membrana son nulas para  $y = \pm b$ , o sea -

(f)

(f)

y llevando este valor a la ecuación (b), se llegará a la siguiente

expresión general de la deformación de la superficie de la membrana:

Reemplazando  $q/8$  por  $2G$ , obtenemos para la función de tensión:

(g)

Calculamos ahora las componentes de la tensión aplicando las ecuaciones (132), esto es, por derivación de la ecuación (g). Por ejemplo, derivando respecto a  $x$ , se tiene:

(h)

Si se supone que  $b > a$ , el máximo esfuerzo tangencial correspondiente a la pendiente máxima de la membrana, ocurre en los puntos medios de los lados mayores,  $x = \frac{1}{2} a$ , del rectángulo. Llevando a la ecuación (h) los valores  $x = a$ ,  $y = 0$ , hallamos

o bien, teniendo presente que

tendremos, finalmente:

(151)

La serie infinita que figura en el segundo miembro es de convergencia muy rápida para  $b > a$  y no hay dificultad en el cálculo de  $\tau_{m\acute{a}x.}$  con suficiente exactitud, para cualquier valor de la relación  $b/a$ . Por ejemplo, en el caso de un rectángulo muy alargado,  $b/a$  resulta muy grande, por lo cual basta conservar el primer término en (151), despreciando la sustracción, con lo que se tiene:

concordante con la primera de las ecuaciones (d) del § 77.

Si la sección es cuadrada,  $a = b$  y entonces la ecuación (151) nos da:

$$= 2G\theta$$

$$= 1,351 G \theta a; \quad (152)$$

y como expresión general

$$(153)$$

en la cual  $k$  es un factor numérico que depende de la relación  $b/a$ . El cuadro inserto al final de este párrafo contiene algunos valores de dicho coeficiente.

Calculemos ahora el momento torsor,  $M_t$ , en función del ángulo específico de torsión,  $\theta$ . Utilizando para ello la ecuación (135) encontramos

y observando que

tendremos

$$(154)$$

La serie que figura en el segundo miembro es de convergencia muy rápida, así que  $M_t$  puede calcularse fácilmente para cualquier valor de la relación  $a/b$ . En el caso de un rectángulo alargado, podemos tomar

y entonces

$$(155)$$

Para la sección cuadrada,  $a = b$  y la fórmula (154) da, en ese caso:

$$(156)$$

El momento de torsión puede ser representado por la ecuación general

$$(157)$$

en la cual  $k_1$  es un coeficiente que depende de la magnitud de la relación  $b/a$ . En la siguiente table figuran diversos valores de

dicho coeficiente.

Reemplazando en la ecuación (153) el valor de  $\theta$ , deducido de (157), se obtiene el esfuerzo máximo de desgarramiento en función del momento de torsión:

$$(158)$$

en esta expresión  $k_2$  es un coeficiente, cuyos valores para diversos valores de  $a/b$  estan indicados en la tabla que va de seguida.

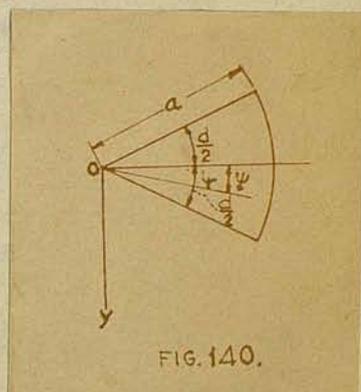


FIG. 140.

TABLA DE CONSTANTES DE LAS FORMULAS DE LA TORSION DE UNA BARRA DE SECCION RECTANGULAR

$\frac{b}{a}$	k	$k_1$	$k_2$	$\frac{b}{a}$	k	$k_1$	$k_2$
1,0	0,675	0,1406	0,208	3	0,985	0,263	0,267
1,2	0,759	0,166	0,219	4	0,997	0,281	0,282
1,5	0,848	0,196	0,231	5	0,999	0,291	0,291
2,0	0,930	0,229	0,246	10	1,000	0,312	0,322
2,5	0,968	0,249	0,258	..	1,000	0,333	0,333

30. El método elástico-energético, aplicado a problemas de torsión.

Método de Ritz. La solución de problemas de torsión está reducida -según se ha visto en lo que antecede- a determinar en cada caso particular la función de tensión que satisfaga a la ecuación diferencial (133) y a las condiciones perimétrales (134), deducidas en el § 72. Ahora bien, cuando se trata de obtener una solución aproximada del problema, resulta de utilidad investigar la función de tensión, no ya trabajando con ecuaciones diferenciales sino partiendo de la condición de mínimo de una cierta integral, lo que puede obtenerse por medio de la expresión de la energía potencial elástica de la pieza torcida. Con arreglo a la fórmula (84) - 39- la energía de deformación por unidad de longitud de la barra deformada es

De esta expresión podemos deducir la variación de la energía de deformación consiguiente a un pequeño incremento,  $\delta u$ , de la función  $u$ , incremento que se anula en el contorno, con lo cual no se introduce fuerza alguna actuante sobre la superficie lateral - de la pieza al variar  $u$ ; dicha variación es:

En cuanto al momento de torsión, atendida la ecuación (135), su variación será:

Por medio de un razonamiento análogo al empleado para establecer la ecuación (86) - (41) - podemos llegar a la ecuación

o bien,

Por lo tanto, la verdadera expresión de la función de tensión,  $T$ , es aquella que hace igual a cero la variación de la integral

(159)

En la resolución aproximada de problemas de torsión reemplazamos -según queda explicado- el cálculo de variaciones por una simple determinación mínimo de una función. Tomemos la función de tensión bajo la forma de una serie

en la cual  $u_1, u_2, \dots$  son funciones que satisfacen a las condiciones perimétricas, esto es, que se desvanecen al llegar a la periferia. Al elegirlos, debemos guiarnos por la analogía con la membrana, dándoles una forma adecuada a la representación de la función  $T$ . Las cantidades  $A_1, A_2, \dots$  son factores numéricos que deberán ser determinados con arreglo a la condición de mínimo de la integral (159). Reemplazando la serie (a) en la subintegral e integrando, se obtiene una función de segundo grado en  $A_1, A_2, \dots$  y la condición de mínimo de esta función está expresada por:

(b)

obtenemos así un sistema de ecuaciones lineales, mediante las cuales pueden ser valuados los coeficientes , , . . . Si el número de términos de la serie (a) aumenta, será mayor la exactitud de la solución aproximada, y utilizando una serie infinita se llegaría a la solución exacta del problema de la torsión.

Tomemos como ejemplo el caso de una sección transversal rectangular (figura 139). Las ecuaciones correspondientes al contorno son  $x = \pm a$ ,  $y = \pm b$  y la función  $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$  es nula en el perímetro. La serie (a) puede ponerse bajo la forma

(c)

en la cual,  $m$  y  $n$  deben ser pares, por razones de simetría.

Supongamos que la sección es cuadrada, y, limitando el desarrollo, de la serie (c) al primer término, tomemos:

(d)

Reemplazando esta expresión en (159), la condición de mínimo nos conduce a

Atendida la ecuación (135), el momento de torsión será, entonces:

El error en el momento de torsión es de 1 1/3 por ciento aproximadamente, como resulta comparando este valor con el de la solución exacta (156).

Para obtener mayor aproximación, tomemos ahora los tres primeros términos de la serie (c). Con arreglo a la condición de simetría llegamos a la expresión

(e)

Reemplazando esta última en (159) y empleando las ecuaciones (b) encontramos

Y el momento de torsión, resultará de sustituir en (135), lo que da:

valor que es tan solo 0,15 por ciento menor que el correcto.

En la determinación de la tensión máxima se comete un error considerablemente mayor: al llevar (e) a las expresiones (132) que -

dan las componentes del esfuerzo tangencial, encontramos como error en el valor de la tensión máxima un 4 por ciento aproximadamente, y para lograr mayor exactitud es necesario calcular con más términos de la serie (c).

Se comprueba mediante la analogía con la membrana que con el procedimiento arriba explicado se obtiene generalmente para el momento de torsión valores menores que el exacto. Y, en efecto, una membrana perfectamente flexible, sujeta a extensión uniforme en su contorno y uniformemente cargada es un sistema con un número infinito de grados de libertad; al limitarnos en el cálculo a unos pocos términos del desarrollo de la serie (c), ello equivale a introducir en el sistema ciertos vínculos que lo reducen a otro con un número pequeño de grados de libertad. Tales vínculos solamente pueden reducir la flexibilidad del sistema y disminuir el volumen limitado por la membrana deformada, u, por lo tanto el momento de torsión, deducción, como sabemos, de ese volumen, será, de ordinario, menor que el verdadero.

Otro método para obtener una determinación aproximada de la función ha sido sugerido por E. Trefftz. Como el momento torsor que se obtiene utilizando este método es mayor que el verdadero pueden establecerse los límites de error de la solución aproximada, utilizándolo en combinación el método de Ritz.

La aplicación del método de Ritz no entraña una limitación como sería el empleo exclusivo de los polinomios (c) sino que se extiende a toda función . . . integrante de la serie (a), cuya forma sea adecuada para representar la función de tensión. Así, por ejemplo, si como algoritmo funcional empleamos funciones trigonométricas y atendemos a las condiciones de simetría (figura 139), obtendremos:

(f)

Reemplazando en (159) y efectuando la integración, resulta

Las ecuaciones (b) devienen, entonces:

y de aquí:

donde  $c = b/a$ . Sustituyendo en (f) obtenemos la solución exacta del problema, bajo la forma de una serie trigonométrica. El momento torsor será, entonces:

(g)

Si se observa que

se comprobará la coincidencia de la expresión anterior con la fórmula (154), que obtuvimos antes. Otro ejemplo en el caso de un rectángulo alargado, con una dimensión,  $b$ , muy grande en comparación con la otra,  $a$  (figura 139), consistiría en tomar, como primera aproximación,

(h)

expresión que coincide con la solución estudiada en el 77. Para lograr una aproximación mayor, al par que el cumplimiento de las condiciones perimetrales para los lados cortos del rectángulo, podemos tomar

(k)

y valorar la cantidad  $\{$  de manera que haga mínimo el valor de la integral (159). Resulta, así,

La distribución de tensiones que se obtiene coincidirá prácticamente con la solución (h) en todos aquellos puntos que estén suficientemente alejados de los lados menores del rectángulo, a causa del término exponencial encerrado entre corchetes en la expresión (k). En proximidad de los lados cortos, la función (k) satis-

face la condición perimetral (134). Llevando (k) a la ecuación del momento de torsión (135), encontramos:

que coincide muy satisfactoriamente con la ecuación (155), determinada anteriormente mediante el empleo de una serie infinita.

En todos aquellos casos en que la sección transversal esté limitada por un polígono convexo, podrá usarse con excelente resultado, como función de tensión, una expresión polinómica análoga a la expresión (c), que utilizamos antes para una sección rectangular. Si son las ecuaciones correspondientes a los lados del polígono, podemos adoptar para la función de que se trata, la forma

y por regla general se obtiene una exactitud satisfactoria con solo considerar unos pocos términos de los del principio de la serie.

C. Runge ha proporcionado, para resolver aproximadamente problemas de torsión, un método basado sobre ecuaciones de diferencias, que su autor aplica a la torsión de una barra de sección transversal cruciforme, formada por cinco cuadrados.

51. Torsión de hierros laminados.— Las formulas obtenidas para las barras de sección rectangular angosta ( 77) son de aplicación en el caso de secciones como las que presentan los aceros laminados, tales como perfiles en U, L, y I. Si la sección transversal tiene un espesor uniforme, como en el caso de la figura 141a, se obtiene con suficiente exactitud el barrenado reemplazando en la ecuación (149) la altura  $b$  por la longitud desarrollada de la fibra media, esto es,  $b = 2a - c$ . En el caso de una sección en U (figura 141b), se obtiene con cierta aproximación el ángulo específico de torsión, considerando para las alas un espesor medio,  $c_2$ , descomponiendo la sección transversal en tres rectángulos y reemplazando en la ecuación (149)

lo que significa que la rigidez torsional del hierro U es igual a la suma de las rigideces de torsión de cada uno de los rectan-

gulos que integran el perfil.

(a)

Para el calculo de la tensión en los puntos de contorno situados a distancia considerable de los vértices de la sección transversal,

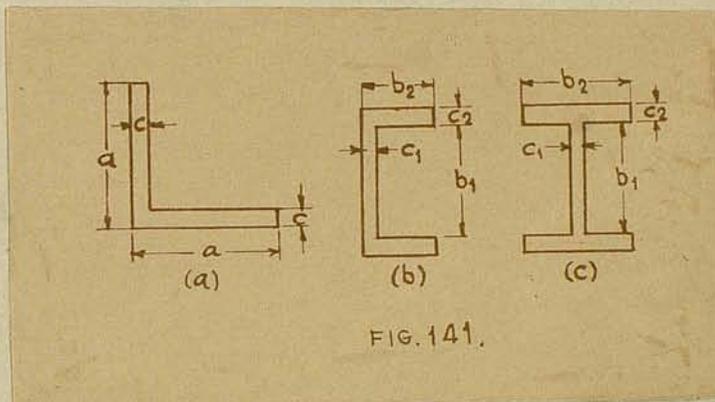


FIG. 141.

versal, podemos emplear una vez más la ecuación correspondiente a un rectángulo alargado, tomando

Por lo tanto, y de acuerdo con la ecuación (a), se obtiene para las alas del perfil:

(b)

Para una viga de sección I (figura 141c) puede emplearse las mismas ecuaciones aproximadas.

En los ángulos entrantes se produce una concentración de tensión, cuya magnitud depende del radio de las curvas de transición. Puede obtenerse con cierta aproximación la tensión máxima en los puntos de la identificación, recurriendo a la analogía con la membrana. Consideremos ahora sección transversal angular de espesor constante  $c$  (figura 142) y con un radio  $a$  en la transición que corresponde al ángulo entrante. Suponiendo que en correspondencia con el plano bisector  $CO_1$  la superficie de la membrana es aproximadamente de revolución, con su eje perpendicular al plano de la figura en el punto  $O$ , la ecuación (145) de la superficie deformada de la membrana, en coordenadas polares (21) se transformará en:

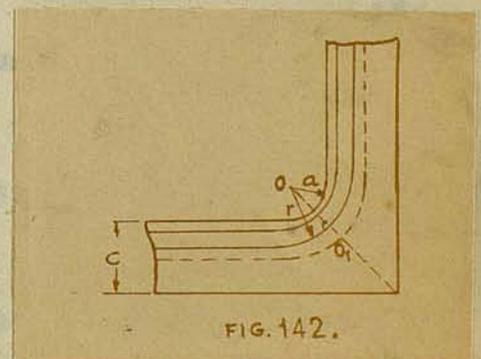


FIG. 142.

(c)

El esfuerzo tangencial,  $T$ , que, como se recordará, está dado por la pendiente de la superficie de la membrana, se obtendrá llevando a la ecuación (c) el valor  $dz/dr = T$  y reemplazando en ella  $q/S$  por  $2G\theta$ , con lo que tendremos la siguiente:

(d)

Para los puntos de las alas del ángulo, situados a considerable distancia de la rista, donde la membrana tiene una superficie aproximadamente cilíndrica, la ecuación correlativa será:

(e)

en la cual  $n$  es la normal al contorno. Llamando  $T_0$  a la tensión en el borde, la ecuación (e), obtenida anteriormente para el caso de un rectángulo alargado, nos da  $T_0 = G\theta c$ , que nos permite obtener de la ecuación (d):

(d')

y de ésta, por integración

(f)

en la cual  $A$  es una constante de integración, que podremos determinar poniendo que la tensión tangencial se anula en el punto  $O_1$ , a una distancia  $c/2$  del borde (figura 142). De acuerdo con la ecuación (f), se tendrá, entonces:

y

Reemplazando en (f) y tomando  $x = a$ , encontramos

(g)

Para  $a = l/2a$ , como en la figura 142, se tiene

Para una transición de radio muy pequeño, el valor de la tensión máxima resulta muy elevado. Si por ejemplo, hacemos  $a = 0$ , lo encontraremos

En un estudio realizado por E. Trefftz, para hallar una solución más rigurosa del problema de la acumulación de tensión en un ángu-

lo entrante, y pequeños radios en la transición, llegó a la siguiente ecuación para la tensión máxima:

(160)

Esta fórmula aplicada al caso de un radio,  $a$ , del orden de 0,1c, da resultados que concuerdan satisfactoriamente con los que se obtienen con la ecuación (g) de este párrafo.

La acumulación de tensión en el ángulo entrante ha sido también estudiada experimentalmente mediante la comparación con la película de jabón (cfr. 82). Las relaciones correspondientes a diversos valores de  $A/c$  constan en la siguiente tablilla

$\frac{a}{c} =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{máx.}{c} =$	2,50	2,25	2,00	1,75

Para pequeños radios de transición, estos valores de la relación son mucho menores que los que resultan de las fórmulas teóricas que se ha deducido anteriormente. Parece probable que para esos casos el método de la comparación con la película de jabón difícilmente permita obtener valores que resulten dignos de confianza.

84.-Formación de árboles huecos.- Extendamos ahora nuestro estudio de la torsión de jes, limitado hasta aquí al caso de directrices constituidas por recintos a simple conexión, a los árboles huecos con secciones transversales de dos o mas contornos. El más sencillo de los problemas de esta clase es el de un árbol hueco cuyo contorno interior coincide con una de las líneas de esfuerzo (vide 76) del eje macizo de contorno exterior igual al del eje hueco.

Tomemos, por ejemplo, el caso de una sección transversal de forma elíptica (figura 130). La función de tensión para el árbol macizo es

(a)

La ecuación

(b)

representa una elipse semejante a la curva exterior, limitante de la sección transversal; a lo largo de ella, la función  $(a)$  permanece constante y, por lo tanto, para valores de  $k$  menores que uno, esta elipse es una línea de esfuerzo correspondiente al árbol de sección elíptica llena; y los esfuerzos de desgarramiento en uno cualquiera de sus puntos tienen la dirección de la tangente a aquella, llevada por el mismo. Resulta de aquí que no existirán tensiones a través de la superficie cilíndrica

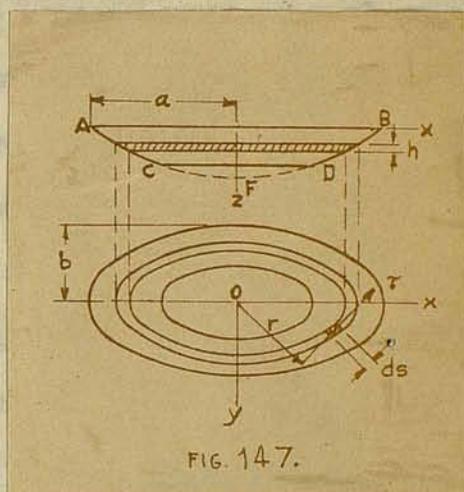


FIG. 147.

que podemos imaginar, de directriz, la línea de esfuerzo, y eje paralelo al árbol. Se puede, pues, suponer suprimido el material limitado por esa superficie sin que ello modifique la distribución de las tensiones en la parte exterior de la pieza. Por consiguiente, la función  $(a)$ , de tensión, es aplicable al caso de un árbol hueco.

Para valuar la constante  $F$  de dicha función, hay que tener presente que se trata ahora de un eje hueco. Fácilmente logaremos recurriendo a la analogía con la membrana: la porción media de la membrana que corresponde al agujero del eje hueco (figura 147), debe ser reemplazada en este caso por la placa horizontal  $CD$ , cuya pendiente es cero en correspondencia con esfuerzos malos en la abertura. Calculemos el momento tensor originado por los esfuerzos tangenciales distribuidos sobre un elemento anular comprendido entre dos líneas de esfuerzos adyacentes: si designamos con  $a$  el ancho variable del anillo elemental, la fuerza cortante que actúa sobre un elemento como el sombreado en la figura, será  $\tau a ds$ , y su momento con respecto a  $O$ ,  $\tau a ds r$ , así que el momento de torsión correspondiente al elemento anular a que nos referimos estará dado por la expresión

(c)

en la cual, la integración debe extenderse a todo lo largo del anillo. Si llamamos  $A$  al área limitada por éste y observamos que  $T$  es la pendiente de la superficie y, por lo tanto, la diferencia de nivel,  $h$ , entre dos curvas horizontales adyacentes resultará de la ecuación (c):

$$dM_t = 2hA, \quad (d)$$

lo que nos dice que el momento de torsión correspondiente al anillo elemental está dado por el doble del volumen indicado por el sombreado de la figura. El momento total será, pues, el doble del volumen  $ABCD$ , equivalente a la diferencia entre el volumen  $AEB$  del eje lleno y el volumen  $CED$  del vacío, es decir, el que corresponde a un árbol macizo, cuyos semiejes fueran  $k_a$  y  $k_b$ . Por lo tanto, en lugar de la ecuación (d) del 74, encontramos

de la cual resulta:

Reemplazando en (a), tendremos:

y de ella deducimos

Volviendo a la analogía con la membrana, observamos que la presión uniformemente distribuida sobre la parte  $CED$  de la membrana es estáticamente equivalente a una presión de igual magnitud, uniformemente repartida sobre la placa  $CD$ , y que las fuerzas de tracción  $S$  que obran sobre la membrana a lo largo del borde de la placa están en equilibrio con la carga uniforme que actúa sobre esta última. Consecuentemente, podrá emplearse también en el caso que estudiemos el procedimiento de la película de jabón, ya que al sustituir la porción  $CED$  de la membrana por la placa  $CD$  no se

altera la configuración ni el estado de equilibrio de la porción restante de membrana.

Estudiaremos ahora el caso mas general, en que el contorno interno del árbol hueco no coincide con una curva de esfuerzo del eje macizo. De acuerdo con la teoría general de la torsión (72), sabemos que la función de tensión debe ser constante a lo largo de cada perimetro, pero el valor de la constante no pueda ser arbitrariamente elegido. Al examinar el caso de los contornos de múltiple conexión en problemas de elasticidad bidimensional, quedó demostrado que para su resolución se debe echar mano de las expresiones de los corrimientos, y que las constantes de integración se han de determinar de manera tal que los valores de dichas expresiones resulten unicos; pues bien, cuando se trate de la torsión de árboles huecos será necesario emplear un procedimiento análogo; y los valores constantes de la función de la tensión a lo largo de los contornos deben ser establecidos de manera que los corrimientos resulten de valor único. Se obtendrá entonces un número de ecuaciones suficientes para la determinación de esas constantes.

Con arreglo a las ecuaciones (137), tenemos

(f)

Calculemos ahora la integral

(g)

a lo largo de cada perimetro. Resolviendo la tensión total en sus componentes y teniendo en cuenta las relaciones (f) se tiene:

La primera integral debe desvanecerse, desde que la integración se extiende sobre una curva cerrada y  $w$  es una función uniforme. Por lo tanto:

La integral del segundo miembro de esta ecuación es equivalente

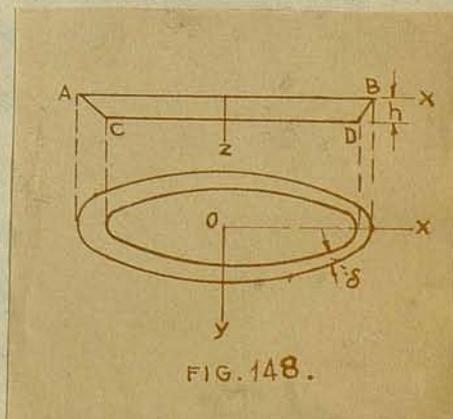
a la frás de nuestro cálculo anterior - efr. ecuación (c)- e igual al doble del área del orificio, es decir, que

(h)

Los valores constantes de la función de tensión a lo largo de los contornos de los agujeros deberán, pues, ser determinados de manera que para cada uno de ellos quede satisfecha la ecuación (h).

Ya se trató anteriormente lo referente al significado físico de la ecuación (h) - vide ecuación (146), § 76 -; resulta de lo siguiente: al aplicar la analogía con la membrana, el nivel de cada placa - como, por ejemplo, la CD de la figura 147 - debe tomarse de manera que la carga vertical sobre la placa sea igual y de sentido opuesto a la proyección de igual dirección de la resultante de las fuerzas de tracción que sobre las mismas ejerce la membrana. Si los contornos de los agujeros coinciden con las líneas de tensión del correspondiente eje macizo, esa condición basta para asegurar el equilibrio de las placas. Por lo general, dicha condición no es suficiente, de manera que para mantener el equilibrio de las placas en posición horizontal será necesario emplear mecanismos especiales de guía, lo cual complica los experimentos con pelicular de jabón en su aplicación a la resolución de problemas de torsión de árboles huecos.

85.-Torsión de tubos de pared delgada.- Se puede obtener una solución aproximada del problema de la torsión de tubos de pared delgada utilizando el método de la analogía con la membrana. Supongamos que AB y CD (figura 148) representan los niveles de los contornos exterior e interior, respectivamente, y sean AC y DB los perfiles de la membrana extendida entre dichos contornos. Por tratarse de una pared delgada, podemos despreciar la variación de la pendiente de la membrana en su espesor y admitir que AC y BD son líneas rectas, lo que equivale a suponer que en el grosor de la pared los esfuerzos tangenciales están uniformemente repartidos. Si llamamos  $h$  a la diferencia de nivel de dos contornos



y al espesor variable del tubo, la tensión en un punto, que está dada, según sabemos, por la pendiente de la membrana, será:

(a)

Ella es inversamente proporcional a dicho espesor y, por lo tanto, máxima en correspondencia del punto en que la pared es más delgada.

Para determinar la relación entre la tensión y el momento torsor,  $M_t$ , nos valemos otra vez de la analogía con la membrana y calculamos el momento de torsión en función del volumen ACDB, esto es:

(b)

De esta expresión, en la que  $A$  es la media de las áreas que encierran los contornos exterior e interior de la sección transversal del tubo, resulta una fórmula sencilla para el cálculo de las tensiones de desgarramiento, a saber:

(161)

Para determinar el ángulo específico de torsión,  $\theta$ , aplicamos la ecuación (146) - 76 - Así, tendremos:

(c)

de la cual

(162)

Si el grueso del tubo es constante, la fórmula (162) nos da, llamando  $t$  al espesor y  $s$  al desarrollo de la curva media de la sección anular del tubo:

(163)

Cuando el tubo tiene ángulos entrantes, como es el caso de la figura 149, se produce en ellos una considerable elevación de fatiga, así que la tensión máxima supera a la que resulta de aplicar la fórmula (161). Para calcular su valor, que depende del radio  $a$  de la curva de transición (figura 149b), usaremos la analogía con la membrana, tal como hicimos en el 81 al ocuparnos de los ángulos entrantes de los perfiles de hierros laminados. Podemos tomar como ecuación de la membrana en correspondencia con un ángulo entrante,

Sustituyendo en ella  $q/8$  por  $2G$  y atendiendo a que, como resulta de la figura 148,  $\sigma = -dz/dr$ , se tiene:

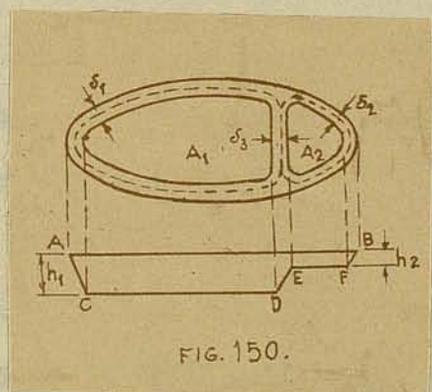
(d)

En el supuesto de que el grueso del tubo sea constante e igual a  $\delta$  y llamando  $\sigma$  a la tensión calculada con la fórmula (161) para un punto a distancia considerable de la arista, tendremos, según la ecuación (c):

así reemplazando en (d),

La solución general de esta ecuación es:

(f)



Si suponemos ahora que los ángulos salientes de la sección se redondean mediante un perfil de transición de radio  $a$ , como lo indica la figura, lo que no afectará mayormente a la distribución

de tensiones en el ángulo entrante, la constante de integración  $C$  se podrá determinar mediante la ecuación

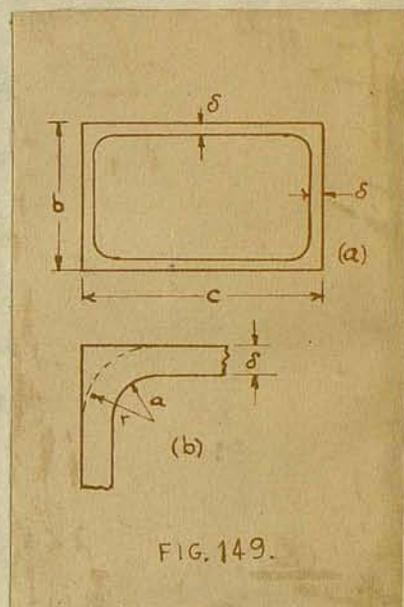
(g)

deducida de la analogía hidrodinámica (163), videlicet: si un líquido ideal circula por un conducto cuya sección transversal sea igual a la de la pieza tubular, la cantidad de líquido que atraviesa cada sección deberá ser constante. Reemplazando en la ecuación (g) la expresión de  $\sigma$  dada por (f) y efectuando la integración, resulta

y la ecuación (f) nos dará, entonces,

(h)

La tensión m'axima en el ángulo entrante resulta de reemplazar



(e)

en esta expresión  $r$  por  $a$ . Si, p. ej., en la sección de cajón, Fig. 149,  $b = c = 100$  mm,  $s = 10$  mm,  $a = 5$  mm, encontramos  $A = 8189$  mm<sup>2</sup> y  $s = 355,7$  mm; y aplicando la ecuación (h), se obtiene  $\tau = 1,533$ .

Examinemos ahora el caso de una pieza tubular cuya sección transversal está formada por más de dos contornos, como, por ejemplo, el que representa la figura 150. Suponiendo que el grueso de las paredes sea muy pequeño, el esfuerzo tangencial en cada una de las secciones de la pared, deducido de la analogía con la membrana, será, teniendo en cuenta la notación de la figura:

(k)

en las cuales  $h_1$  y  $h_2$  representan los niveles correspondientes a los contornos interiores CD y EF, y supuesto que las planchas estén guiadas de manera que se mantengan horizontales (véase § 84, in fine).

El momento torsor, calculado de acuerdo con la relación que lo liga al volumen  $A_1CDEFE_1$ , es

(l)

donde  $A_1$  y  $A_2$  representan las áreas encerradas por las líneas marcadas de trazos en la figura.

Aplicando la fórmula (146) a las curvas cerradas que se indica con líneas de trazos en la figura, se obtienen otras ecuaciones para resolver el problema que tratamos. Suponiendo constantes los espesores  $s_1$  y  $s_2$  y representando por  $h_1$  y  $h_2$  los desarrollos de las curvas mencionadas, resulta de la figura 150:

(m)

Utilizando la última de las ecuaciones (k), así como las expresiones (l) y (m), obtenemos las tensiones  $\tau_1$  y  $\tau_2$  en función del momento de torsión:

(n)

Si se trata de una sección transversal simétrica se tendrá -

. En este caso el momento torsor es absorbido por la pared exterior del tubo, en tanto que la nervadura queda exenta de toda tensión (despreciando en el cálculo los pequeños esfuerzos que corresponden a la variación de pendiente de la membrana en el espesor de nervadura).

El barrenado,  $\sigma$ , se calcula para cualquier sección análoga a la representada en la figura 150, reemplazando los valores de las fátigas en una de las ecuaciones (m). De esa manera se podrá obtener  $\sigma$  en función del momento torsor  $M_t$ .

87.-Piezas de sección circular con diámetro variable.- Consideremos ahora el caso de un árbol de la forma de sólido de revolución sometido a torsión bajo la acción de pares de fuerzas que obran en sus extremidades normalmente a su eje (Fig. 152). Podemos tomar

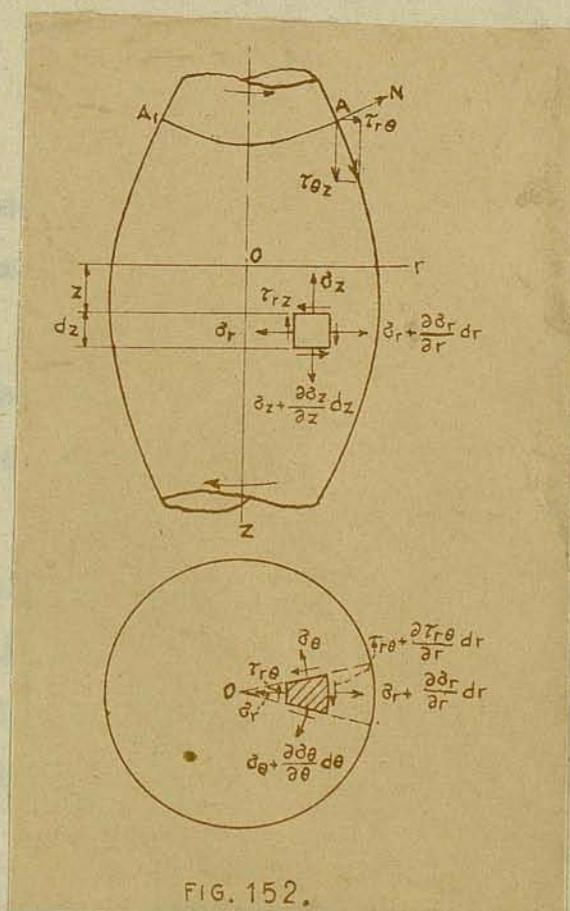


FIG. 152.

como eje de las  $z$  el eje del árbol y, para definir la posición de un elemento superficial de una sección transversal, usar las coordenadas polares,  $r, \theta$ . Las notaciones que corresponden a las compo-

mentos de la tensión serán en este caso ; Las componentes del corrimiento en las direcciones radial y tangencial, serán designadas por las letras  $u$  y  $v$ , respectivamente, mientras que con  $w$  denotamos la componentes del recorrido en la dirección  $z$ .

Las componentes del esfuerzo tendrán las siguientes expresiones, deducidas de las fórmulas que fueran establecidas al estudiar en el § 24 los corrimientos correspondientes a un estado elástico plano en coordenadas polares:

(164)

Las ecuaciones de equilibrio de un elemento (figura 152), en el supuesto de la inexistencia de fuerzas másicas, se deducen como en el caso de los problemas de elasticidad en dos dimensiones, tratados en el § 21, y se llega así a las siguientes ecuaciones diferenciales (en coordenadas cilíndricas):

(165)

Para aplicar estas ecuaciones al problema de la torsión empleamos el método semi-inverso (vide § 72), bajo el supuesto de que  $u$  y  $w$  son nulas, id, est, que durante la torsión solo hay corrimientos de las partículas en direcciones tangenciales, hipótesis que difiere de la que se estableció para el caso de un árbol cilíndrico de sección circular constante, en que dichos recorridos tangenciales ya no son proporcionales a las distancias del elemento considerado al eje de la pieza o, en otros términos, que los radios de una sección transversal se encorvan durante la torsión. Veremos luego que la solución que de tal hipótesis se deduce, satisface a todas las ecuaciones de la elasticidad y constituye, por ende la solución verdadera del problema.

Llevando a las relaciones (164) los valores  $u = w = 0$  y teniendo en cuenta que, en virtud de la simetría, el trayecto  $v$  no depen-

de del ángulo  $\psi$ , encontraremos que

(a)

Por lo tanto, resulta que, de todas las componentes del esfuerzo, tan sólo  $\sigma_r$  y  $\tau_{rz}$  son diferentes de cero. Las primeras dos ecuaciones del grupo (165) se satisfacen idénticamente y la tercera nos da

(b)

Podemos escribir esta última ecuación en la siguiente forma

(c)

Esta última queda satisfecha, como es notorio, empleando una función  $(r, z)$ , de tensión, tal que

(d)

Para cumplir las condiciones de compatibilidad es necesario tomar en consideración que  $\sigma_r$  y  $\tau_{rz}$  son funciones del corrimiento  $v$ . De las ecuaciones (a) y (d) resulta

(e)

De estas ecuaciones se sigue que

(f)

o bien:

(g)

Consideremos ahora las condiciones de contorno para la función  $(r, z)$ . De la condición de que la superficie lateral de la pieza está libre de piezas exteriores, se desprende que en cualquier punto, A, del contorno de una sección meridiana (figura 152), el esfuerzo total de desgarramiento debe tener la dirección de la tangente al contorno y por lo tanto su proyección sobre la normal, N, al mismo debe ser nula. De aquí resulta

en la cual  $ds$  es un elemento del perímetro. Reemplazando en esta expresión los valores (d), llegamos a la ecuación

(h)

que nos permite concluir que es constante a lo largo del contorno de la sección meridiana del árbol.

La ecuación (g), conjuntamente con la expresión de las condiciones de borde (h), determinan completamente la función , de la cual podemos deducir los esfuerzos que han de satisfacer a las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, así como a la condición relativa a la superficie lateral de la pieza.

En cuanto al momento de torsión, se obtiene considerando una sección normal y calculando el momento de los esfuerzos tangenciales que en ella se presentan; así:

$$(k)$$

donde  $a$  es el radio exterior de la sección normal de la pieza, El momento de torsión se calcula fácilmente si conocemos la diferencia entre los valores de la función de tensión en el contorno exterior y en el centro de la sección transversal.

En el estudio de los recorridos que tienen lugar durante la torsión de la pieza que consideramos, emplearemos la notación  $\theta = v/r$  para el ángulo de giro (medido en radianes) de un anillo elemental de radio  $r$  en el plano de una sección transversal del árbol, al que podremos considerar como sección recta de uno de los múltiples tubos elementales de paredes delgadas, en que supondremos subdividido el árbol de que se trata. Así, pues,  $\theta$  es el ángulo de torsión de una de esas envolventes cilíndricas elementales. Supuesto que los radios de la sección transversal devienen curvos, ese ángulo  $\theta$  variará en función de  $r$ , de manera que los ángulos de torsión de los tubos elementales difieren en una misma sección transversal de la pieza. Llevando a las ecuaciones (e) la notación aludida, dichas relaciones se pueden escribir bajo la forma

de donde

o bien

(1)

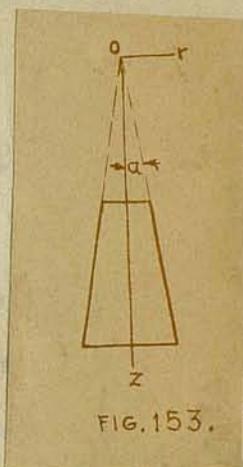
Una de las soluciones de esta ecuación nos da el ángulo de torsión en función de  $r$  y de  $z$ . Si en esa solución hacemos

$$= \text{constante}, \quad (11)$$

obtenéremos la ecuación del lugar geométrico de los puntos de igual ángulo de torsión, cuya intersección con la sección meridiana del árbol está representada en la figura 152 por la curva  $AA_1$ .

Por razones de simetría, las superficies dadas por la ecuación (11) son de revolución y  $AA_1$  será un meridiano de la misma, pasando por el punto  $A$ . Durante la torsión, estas superficies giran alrededor del eje  $z$  sin que experimenten deformación alguna, exactamente como lo hacen las secciones planas en el caso

de los ejes cilíndricos de sección circular. De ahí - que la deformación total en cualquier punto del meridiano  $AA_1$  es un deslizamiento puro en el plano normal al mismo y el esfuerzo tangencial en la sección axial de la pieza es perpendicular a dicho meridiano. En la periferia, este esfuerzo es tangente al contorno y los meridianos son perpendiculares a las curvas -



meridianas del árbol. Si pasamos de la superficie  $= \text{constante}$  a una adyacente, el módulo de variación de  $\alpha$  a lo largo del contorno de la sección meridiana de la pieza estará dada por  $\frac{d\alpha}{dz}$  y como en el caso de un eje cilíndrico de sección circular (69), tendremos

(12)

donde

es el esfuerzo tangencial resultante en la periferia. Si determinamos experimentalmente los valores  $\frac{d\alpha}{dz}$  se obtiene con facilidad ese esfuerzo tangencial.

Consideremos ahora como caso particular al de un árbol tronco-cónico<sup>2</sup> (figura 153). En este caso, la relación

es constante e igual a  $\cos \alpha$ , para todo el contorno de la sección

meridiana. Toda función de dicha relación satisfará la condición de límite (h). Con el objeto de cumplir también la ecuación (g), tomamos

(c)

donde  $c$  es una constante. Derivando, se llega a

(p)

En cuanto a la constante  $c$ , resulta de la ecuación (k). Reemplazando (a) en esta ecuación, se obtiene

Se calcula el ángulo de torsión por medio de las ecuaciones (e), de las cuales resulta la expresión de  $\theta$ , que satisface tanto a la ecuación (l) como a la condición relativa al contorno. Dicha expresión es

(q)

Como puede verse, las superficies de igual ángulo de torsión son esferas, concéntricas en el origen, 0.

De una manera análoga pueden ser tratados los casos de ejes de forma de elipsoide, hiperboloide o paraboloides de revolución.

En la práctica, los problemas que se presentan son más complicados, pues los diámetros de los ejes cambian generalmente en forma brusca, como se ve en el ejemplo de la figura 154a. El estudio de problemas de esta clase ha sido hecho por vez

primera por A. Föppl, y, empleando un método numérico propuesto por C. Runge para llegar a una solución aproximada, se demuestra que en puntos tales como  $m$  y  $n$  (figura 154a) se originan fuertes concentraciones de esfuerzos y también resulta que la magnitud del esfuerzo máxi-

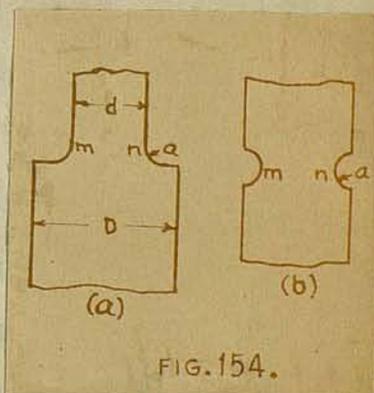


FIG. 154.

mo que se produce en un eje que tiene dos diámetros diferentes,  $d$  y  $D$ , depende de la relación del radio  $a$  de la transición al diámetro  $d$  del eje, así como también de la razón  $d/D$ .

En el caso de una muesca semicircular de muy pequeño radio,  $a$ , la tensión máxima en el fondo de la entalla (figura 154b) es el doble de la que se produce en la superficie del árbol cilíndrico carente de muescas.

Para el estudio de las concentraciones de esfuerzos que ocurren en correspondencia con transiciones de secciones y en las muescas en árboles de sección circular sujetos a torsión, tiene gran utilidad la analogía eléctrica. La ecuación general del flujo de corriente eléctrica que atraviesa una placa delgada homogénea de espesor variable es

(r)

en la cual  $h$  es el espesor variable de la lámina y  $\phi$  la función potencial.

Supongamos que la placa tiene el mismo contorno que la sección meridiana del árbol (figura 155), que los ejes  $x$  e  $y$  coinciden con los ejes  $z$  y  $r$ , y que el espesor de la placa obedece a la ley  $h = ar^3$ ; la ecuación (r) adquiere entonces

Comparando esta ecuación con la designada con la letra (1), concluimos que la ecuación de las líneas equipotenciales de la placa es la misma que la de los lugares geométricos de los puntos de un

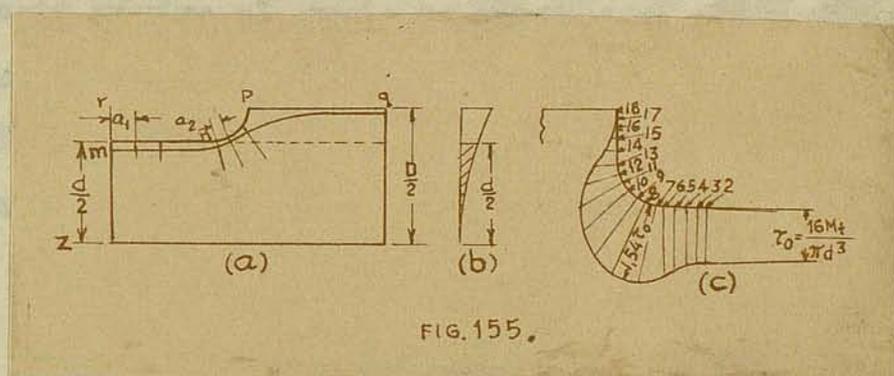


FIG. 155.

árbol de diámetro variable, a los cuales corresponden iguales ángulos de torsión.

Suponiendo que las extremidades de la placa, correspondientes a las del árbol, son mantenidas a una determinada diferencia de potencial, de modo que la corriente circule a lo largo del eje  $z$ : - las líneas equipotenciales serán normales a los bordes laterales de la placa o, lo que es lo mismo, existirán las mismas condiciones de borde que en el caso de las líneas de ángulo de torsión de constante. Si las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno son las mismas para las dos clases de líneas, éstas serán idénticas, de manera que al investigar la distribución del potencial en la placa se alcanzan resultados de gran utilidad para el

conocimiento de la distribución de esfuerzos en una barra sujeta a torsión.

La fatiga máxima aparece en la superficie del árbol y su valor se calcula aplicando la ecuación (n), de la cual resulta, teniendo en cuenta la analogía eléctrica, que el esfuerzo es proporcional a la variación de la caída de potencial a lo largo del borde de la placa.

Utilizando un modelo de acero de 610 mm. de largo, 152 mm. de ancho en su extremidad mayor y 25,4 mm de espesor máximo (figura 155 - a,b) se realizaron mediciones que han conducido a resultados concretos. La caída de tensión a lo largo del borde ampq del modelo se determinó por medio de un galvanómetro sensible cuyas terminales están conectados a dos agujas muy agudas, fijas a un bloque a la distancia de 2 mm; al tocar la placa con las agujas el galvanómetro indicaba la caída de tensión entre arbas y moviéndolas a lo largo del borde de la transición se pudo establecer la máxima variación de tensión y lugar en que se producía. La relación de este máximo al grado de variación que corresponde a un punto alejado, tal como  $m$  (figura 155a), permite evaluar el coeficiente de concentración de esfuerzo,  $k$ , de la ecuación

entendiendo que las pequeñas variaciones del radio  $r$  (vide ecuación (n)) pueden ser despreciadas en este caso. En la figura 155c se consigna los resultados de uno de los experimentos aludidos: la caída de potencial medida en cada punto se indica por el segmento de la normal al borde de la placa llevada por ese punto y, como se vé en la gráfica, el coeficiente de concentración resulta igual a 1,54. Operando con diversas operaciones de árboles, se obtiene una serie de valores para el coeficiente  $k$ , anotados en la figura 156, en la cual las abscisas representan los valores de la razón  $2a/d$  del radio de la curva de transición al radio de la parte mas delgada del árbol y -

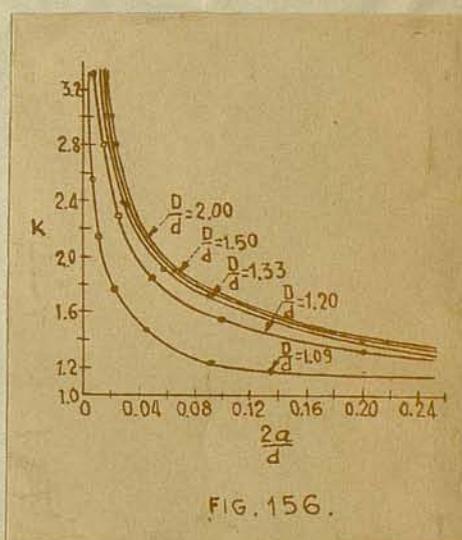


FIG. 156.

las ordenadas, el factor k para cada uno de los diversos valores de la relación D/d (véase figura 154). Mediante esas curvas puede determinarse por interpolación y con suficiente exactitud el coeficiente de concentración para diversos casos particulares.

-----

que de la curva obtenida de la figura 154 se ve al tomar el caso de una sola línea de acción (cuando  $D/d = 1$ ) que el coeficiente de concentración es igual a 1,00, que coincide con los resultados obtenidos en el caso de una sola línea de acción (véase figura 154).

Para poder obtener el coeficiente de concentración de una sola línea de acción se debe tomar  $D/d = 1$ , que equivale a una sola línea de acción (véase figura 154). En este caso el coeficiente de concentración es igual a 1,00, que coincide con los resultados obtenidos en el caso de una sola línea de acción (véase figura 154).

Para obtener el coeficiente de concentración de una sola línea de acción se debe tomar  $D/d = 1$ , que equivale a una sola línea de acción (véase figura 154).

## CAPITULO . . . X

## FLEXION DE BARRAS PRISMATICAS

88.-Flexión de una viga volada.- Se ha visto en el § 70, al estudiar la flexión simple o pura, que una barra prismática flexa en uno de sus planos principales si en él actúan los dos pares iguales y opuestos que, aplicados en sus extremidades, provocan esa sollicitación, y que la tensión normal paralela al eje de la pieza, única de las seis componentes del esfuerzo en una fibra que difiere de cero, es proporcional a la distancia de dicha fibra al eje neutro. La solución exacta concuerda, pues, en este caso, con la

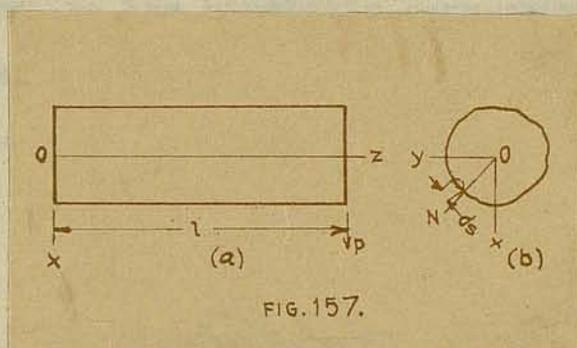


FIG. 157.

que da la teoría elemental de la flexión. También se vió al tratar el caso de una viga de sección rectangular angosta en voladizo, - flexada bajo la acción de una fuerza aplicada en su extremidad libre (§ 17), que, además de los esfuerzos normales, proporcionales en cada sección transversal al momento flector, se producen fatigas tangenciales que son proporcionales a la fuerza cortante.

Pasaremos ahora a estudiar el caso más general de la flexión - de una viga volada bajo una fuerza  $P$ , aplicada en el extremo libre paralelamente a uno de los ejes principales de la sección transversal, que supondremos de forma cualquiera (figura 157). Tomemos como origen de la terna de ejes coordenados,  $O$ , ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ), el baricentro de la sección fija, de manera que el eje  $z$  coincida con la fibra axial de la barra y los ejes  $x$  e  $y$  con los ejes centrales principales de dicha sección.

Para resolver este problema aplicamos el método "semi-inverso" de de Saint-Venant y establecemos in limine las siguientes hipótesis referentes a los esfuerzos: 1º En una sección transversal a la

distancia  $z$  de la sección fija, la distribución de las fatigas normales obedece a la misma ley que en el caso de la flexión simple, esto es:

(a)

2ª Existen esfuerzos tangenciales actuantes en las secciones transversales, los que en cada punto se resuelven en dos componentes,

3ª Las tres componentes restantes de la tensión son nulas.

Demostraremos ahora que por medio de esas hipótesis se llega a una solución que satisface a todas las ecuaciones de la teoría de la elasticidad y que, por lo tanto, constituye la solución exacta del problema.

En virtud de las hipótesis enumeradas y bajo el supuesto de - que las fuerzas másicas son despreciables, las ecuaciones diferenciales de equilibrio (116) se escribirán:

(b)

(c)

La ecuación (b) nos dice que los esfuerzos tangenciales son independientes de la variable  $z$  y, por lo tanto, iguales para todas las secciones transversales de la barra.

Aplicando ahora las condiciones de contorno (117) a la superficie lateral de la barra, libre de fuerzas exteriores, encontramos que las dos primeras ecuaciones quedan satisfechas idénticamente y que, con arreglo a la tercera,

De la figura 157b resulta,

en la cual,  $ds$  es un elemento periférico de la sección transversal. La condición de contorno será, entonces,

(d)

Pasando ahora a las ecuaciones de compatibilidad (119), vemos - que las tres primeras de ellas, que contienen componentes del esfuerzo normal, y la última, en la que figura resultan iden-

ticamente satisfechas: el sistema mencionado queda, así, reducido a las dos ecuaciones

(e)

De lo que antecede resulta que la solución del problema de la flexión de una pieza prismática en voladizo, de cualquier tipo de sección recta, se reduce a la investigación de las tensiones tangenciales  $\tau_x$  y  $\tau_y$  que, expresadas en función de  $x$  y de  $y$ , satisfagan a la ecuación de equilibrio (c), a las condiciones de contorno (d) y a las ecuaciones de compatibilidad (e).

89.- Función de tensión.- Al desarrollar los problemas de la flexión emplearemos otra vez una función de tensión  $\phi(x, y)$ . Fácilmente se comprueba que las condiciones diferenciales de equilibrio (b) y (c) del párrafo anterior quedan satisfechas haciendo

(166)

en las cuales, la función de tensión es  $\phi(x, y)$ , y  $f(y)$  es una función de  $y$  únicamente, que será determinada después, con arreglo a las condiciones de contorno.

Llevando los valores (166) a las ecuaciones de compatibilidad, (e), del artículo anterior, se obtiene

Resulta de estas ecuaciones, que

(a)

en la cual,  $c$  es una constante de integración, cuyo significado físico es muy simple. Para establecerlo, supongáms que un elemento superficial de área infinitesimal, perteneciente a una sección recta de la viga volada, gira en su plano; ese movimiento está expresado por la ecuación (cfr. 45):

y su módulo de variación en la dirección  $z$  se podrá escribir de la siguiente manera:

Aplicando la ley de Hooke y teniendo en cuenta las expresiones -  
(166) de las componentes del esfuerzo, llegamos a

y llevando este resultado a la ecuación (a), se tiene:

Lo que nos dice que el módulo de variación de la rotación en la -  
dirección  $z$  se compone de dos partes: una, constante y otra, varia-  
ble en función de  $y$ ; aquella, representada por el segundo término  
tiene el significado de una rotación del tipo de la que se produce  
en una barra sujeta a torsión, y el primer término representa la  
rotación de los elementos superficiales de la sección recta origi-  
nada por deformaciones que ocurren en el plano de la misma, como  
se ve en la figura 122b - 70 -. Supondremos aquí que la torsión  
que aquella causa en la viga, puede ser eliminada mediante una ade-  
cuada reducción de la fuerza  $P$ , que es trasladada paralelamente a  
sí misma en el plano limitante de la viga por su extremidad libre;  
entonces, la constante  $c$  de la ecuación (a) puede considerarse nu-  
la y de ahí:

(167)

Si en la condición de contorno, (d) del párrafo precedente, -  
reemplazamos los valores que nos da la expresión (166) para las -  
fatigas tangenciales, llegamos a

(168)

ecuación que nos permite calcular los valores de la función de -  
Airy a lo largo del contorno de la sección transversal, una vez -  
escogida la función  $f(y)$ . La ecuación (167), conjuntamente con la  
de contorno, (168), permite determinar la mencionada función de -  
tensión .

En los problemas que hemos de desarrollar a continuación eli-  
giremos la función  $f(y)$  de manera que el <sup>miembro</sup>segundo de la ecuación -  
(168) se anule, con lo que la función de tensión, , serán constan-  
te a lo largo del contorno. Si hacemos esa constante igual a cero,  
reducimos el problema de la flexión a la resolución de la ecuación

diferencial (167), con la condición de contorno  $\phi = 0$ . Este problema es análogo al de la deformación de una membrana uniformemente estirada, cuyo borde tiene un contorno igual al de la sección recta de la barra flezada, y que está sujeta a una carga continua dada por el segundo miembro de la ecuación (167). En lo que sigue veremos algunas aplicaciones de esta analogía.

90.-Sección transversal circular.- Sea

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (a)$$

la ecuación representativa del contorno de la sección recta. Es evidente que el segundo miembro de la ecuación (168) se anula haciendo

(b)

Llevando este valor a la ecuación (167), la función de tensión,  $\phi$ , queda entonces determinada por la ecuación

(c)

con más la condición de que el contorno  $\phi = 0$ . De esa manera, la función de tensión está más por las deformaciones de una membrana cuyo borde es una circunferencia de radio  $r$ , uniformemente estirada y sometida a una carga transversal cuya intensidad es proporcional a

La ecuación (c) y la condición de límite quedan manifiestamente satisfechas en este caso, haciendo

(d)

donde  $m$  es una cantidad constante. Esta función vale cero en los puntos del contorno (a) y satisfará a la ecuación (c) si tomamos

La ecuación (d) deviene entonces

(e)

Las ecuaciones (166) nos permite ahora hallar las componentes del esfuerzo:

(169)

La fatiga tangencial vertical,  $\tau_{xy}$ , es una función par de  $x$  e  $y$  y la tensión rasante horizontal,  $\tau_{yx}$ , es una función impar de las mismas variables; por lo tanto, la distribución de tensiones

(169) nos da una resultante cuya línea de acción coincide con el diámetro vertical de la sección transversal circular.

Según el diámetro horizontal de la sección recta,  $x = 0$ , y, por lo tanto, de acuerdo con (169), tendremos:

(f)

El esfuerzo tangencial máximo se presenta en el centro ( $y = 0$ ), - donde su valor es:

(g)

En las extremidades del diámetro horizontal ( $y = \pm r$ ) el esfuerzo tangencial vale

(h)

Como se ve, la magnitud de la tensión tangencial depende del valor del coeficiente de Poisson. Para  $\nu = 0,3$ , por ejemplo, resulta - de (g) y (h), respectivamente:

(k)

En ambas fórmulas,  $A$  es el área de la sección recta de la barra.

La teoría elemental de la flexión fundada en la hipótesis de la distribución uniforme del esfuerzo de corte, a lo largo del diámetro horizontal de la sección transversal, nos da

Resulta, pues, en este caso, un error de 4 por 100, aproximadamente, para la fatiga máxima.

91.-Sección transversal elíptica.- Podemos emplear en este problema el mismo método del párrafo anterior. Sea

(a)

la ecuación del perímetro de la sección. El segundo miembro de la ecuación (168) se anulará si hacemos

(b)

Reemplazando en la ecuación (167), resulta

(c)

ecuación que juntamente con la condición de nulidad de  $\tau$  en el perímetro, permite determinar la función de tensión,  $\tau$ . La condición de contorno y la ecuación (c) quedan satisfechas tomando para esa función la expresión:

(d)

Quando  $a = b$ , esta solución coincide con la señalada con la letra (c) en el artículo anterior.

Reemplazando (b) y (d) en las ecuaciones (166), obtendremos las componentes del esfuerzo

(170)

Para el eje horizontal de la sección elíptica ( $x = 0$ ), resulta

La tensión máxima acontece en el centro ( $y = 0$ ) y está dada por la fórmula:

Si  $b$  es muy pequeña comparada con  $a$ , podemos despreciar los términos que contienen  $b^2/a^2$ , y en ese caso,

solución concordante con la que resulta de aplicar la teoría elemental de la flexión. Si  $b$  es muy grande en relación con  $a$ , tendremos

El esfuerzo en las extremidades del diámetro horizontal ( $y = \pm b$ ), en este caso será:

La distribución de las tensiones a lo largo del diámetro horizontal dista mucho de ser uniforme en el presente caso y depende también del coeficiente de Poisson,  $\mu$ . Tomando para éste el valor 0,30 obtendremos

es decir, que la fatiga máxima así calculada es aproximadamente 14 por 100 mayor que la que da la fórmula elemental.

92.- Sección transversal rectangular.- La ecuación perimétrica del rectángulo de la figura 158, es

(a)

(a)

Si en la fórmula (168) reemplazamos  $f(y)$  por la constante  $Pa^2/2I$ , la expresión  $Px^2/2I - Pa^2/2I$  resulta nula a lo largo de los lados  $x = \pm a$  del rectángulo, y como para los lados verticales,  $y = \pm b$ , la derivada  $dy/dx$  es cero, el segundo miembro de la ecuación (168) resulta nulo a lo largo del perímetro, de manera que para éste podemos tomar  $\phi = 0$ . La ecuación diferencial (167), que entonces deviene

(b)

conjuntamente con la condición de contorno determina completamente la función de tensión. El problema queda reducido a determinar las deformaciones que produce en una membrana rectangular uniformemente estirada una carga continua de intensidad proporcional a

La curva  $mnp$  de la figura 158 representa la intersección de esta membrana con el plano  $yz$ .

Las ecuaciones (166) nos dicen que las fatigas tangenciales se pueden descomponer en los dos sistemas siguientes:

(1)

(c)

(2)

El primer sistema representa la distribución parabólica de esfuerzos que resulta de la teoría elemental de la flexión. El segundo depende de la función  $\phi$  y representa las correcciones que se debe introducir en la solución elemental, las cuales están dadas por las pendientes de la membrana. Por razones de simetría, a lo largo del eje  $y$ , así que las correcciones a la teoría elemental están representadas por los esfuerzos tangenciales verticales dados por la pendiente  $\phi$ . Conforme a la figura 158, la fatiga  $\phi$  es positiva en los puntos  $m$  y  $p$  y negativa en  $n$ . Por lo tanto, la distribución de tensiones a lo largo del eje ho-

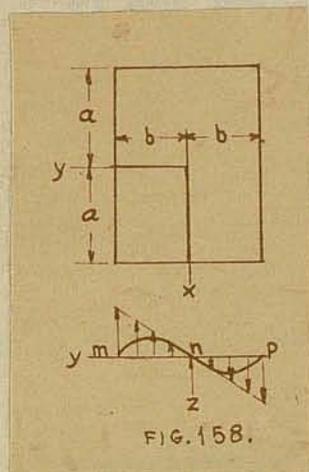


FIG. 158.

rizontal de simetría no es uniforme como la teoría elemental indica. En cuanto al máximo esfuerzo tangencial, se produce en las extremidades del eje - puntos m y p - y el mínimo en el centro, n.

De las condiciones de carga de la membrana resulta que  $\phi$  es una función par de  $x$  y una función impar de  $y$ , exigencias que, conjuntamente con la condición de contorno, quedan satisfechas dando a la función de Airy la forma de serie de Fourier:

(d)

Reemplazando este valor en la ecuación (b) y aplicando el método corriente para el cálculo de los coeficientes de una serie de Fourier, se llega a las ecuaciones

Reemplazando en (d), obtenemos

Con esta función de tensión, las ecuaciones (c) nos permiten determinar ahora las componentes del esfuerzo tangencial.

Pasemos a deducir las correcciones del valor que da la teoría elemental para la fatiga a lo largo del eje  $y$ . Para ello tengamos en cuenta que la deformación de la membrana (figura 158) nos hace ver que precisamente las correcciones alcanzan los máximos valores a lo largo de dicha recta y que, por lo tanto, la máxima tensión aparece en el punto medio de los lados de la ecuación  $y = \frac{1}{2} b$ . -  
Calculando la derivada  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  y haciendo  $x = 0$ , hallaremos

De aquí deducimos las siguientes fórmulas aplicables en el centro

de la sección transversal ( $y = 0$ ) y en el punto medio de los lados verticales del rectángulo:

Para simplificar el cálculo de estas series resulta ventajoso el empleo de las conocidas fórmulas

Se tendrá entonces

(171)

en la cual,  $A = 4ab$ , es el área de la sección recta de la pieza. Las series que figuran en estas fórmulas son rápidamente convergentes y no hay dificultad en el cálculo de las correcciones

que corresponden a los diversos valores de la relación  $a/b$ . Estas correcciones se deben añadir al valor  $3P/2A$ , dado por la fórmula elemental. En la primera línea de la tabla inserta a continuación se da los números por los que hay que multiplicar el valor aproximado de la fatiga tangencial,  $3P/2A$ , para obtener los valores exactos de la tensión.

Para el coeficiente de Poisson,  $\mu$ , se ha tomado en estos cálculos el valor  $1/4$ . Como se ve, la fórmula elemental proporciona valores de exactitud muy satisfactoria cuando  $a/b = 2$ . Para una sección cuadrada, la fórmula elemental da un error de 10 por 100, aproxi-

madamente, en la fátiga máxima. Si el ancho del rectángulo es grande en comparación con su altura, el valor calculado con la fórmula elemental discrepa mucho del real, el cual es considerablemente mayor que

$$\frac{3}{2} \frac{P}{A} .$$

Punto	$\frac{a}{b}$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$x = 0, y = 0$	Exacto	0,983	0,940	0,856	0,805
	Aproximado	0,981	0,936	0,856	0,826
$x = 0, y = b$	Exacto	1,033	1,126	1,396	1,988
	Aproximado	1,040	1,143	0,426	1,934

Para calcular esos esfuerzos de desgarramiento resultan muy útiles las fórmulas aproximadas que se pueden deducir partiendo de la analogía con la membrana. Si la dimensión  $a$  del rectángulo es grande en relación con  $b$  (figura 158), podremos admitir que a suficiente distancia de sus lados cortos la superficie de la membrana es prácticamente cilíndrica, de modo que la ecuación (b) será, para el caso:

y de ella resulta:

(e)

Los esfuerzos tangenciales a lo largo del eje y se obtienen sustituyendo (e) en (c), operando y haciendo  $x = 0$ ,

(f)

Se observará que para un rectángulo alargado la corrección de la fórmula elemental, dada por el segundo término dentro del corchete, es siempre pequeña.

En el caso de que  $b$  sea grande en comparación con  $a$ , las deformaciones que la membrana presenta en puntos distantes de los lados cortos del rectángulo pueden ser consideradas como funciones lineales de  $y$ , así que de acuerdo con la ecuación (b) se tendrá:

(g)

Sustituyendo en las ecuaciones (c), obtenemos las componentes del esfuerzo tangencial:

En el baricentro de la sección ( $x = y = 0$ ) los valores son:

Comparada esta tensión con la que se obtiene aplicando la fórmula elemental, resulta relacionada en la relación

Para satisfacer la condición de contorno en los lados menores del rectángulo tomaremos, como función de tensión, en lugar de la expresión (g), la siguiente

(h)

en la cual,  $n$  debe ser determinada con arreglo a la condición de mínima energía (vide § 80). De esa manera, encontramos

Con este valor de  $n$  y empleando la ecuación (k) se puede calcular con exactitud suficiente el esfuerzo tangencial máximo, que se presenta en el centro de los lados menores del rectángulo.

Si los lados del rectángulo son del mismo orden de magnitud, podremos obtener para la distribución de tensiones una solución aproximada de forma polinómica, dando a la función de esfuerzos la forma

(k)

Los coeficientes  $m$  y  $n$  se calculan aplicando la condición de mínima energía; resulta así:

Los esfuerzos tangenciales calculados con la fórmula (k), son

(l)

Los valores de las tensiones tangenciales dados en los segundos renglones de la tabla inserta en este párrafo han sido calculados empleando estas fórmulas aproximadas. Como se puede observar, los resultados ofrecen en todos los casos un grado de exactitud satisfactorio.

96.-Corrimientos.- Una vez determinadas las componentes de la tensión, los corrimientos  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , pueden ser calculados de la misma manera que en el caso de la flexión simple (véase 70). Consideremos la elástica de la viga en voladizo: las curvaturas de la misma  $e$  en los planos  $xz$  e  $yz$  están dadas con suficiente exactitud por los valores que toman las derivadas

para  $x = y = 0$ . Su cálculo puede hacerse por medio de las ecuaciones

(a)

Como podemos ver, la fibra axial de la pieza en voladizo se deforma en el plano  $xz$ , que es el plano de fuerzas, y la curvatura es en cada punto proporcional al momento flector en el mismo, tal como corrientemente se supone en la teoría elemental de la flexión. Integrada la primera de las ecuaciones (a), resulta:

(b)

donde  $c$  y  $d$  son constantes de integración, que se ha de determinar con arreglo a las condiciones de sustentación en la extremidad fija de la pieza volada. Si la extremidad de la fibra axial de la pieza está empotrada, serán nulas  $u$  y  $du/dz$  para  $z = 0$ , y entonces las constantes  $c$  y  $d$  de la ecuación (b) son iguales a cero. Las secciones transversales de la viga no permanecen planas sino que se deforman bajo la acción de los esfuerzos tangenciales. El ángulo que forma con la elástica un elemento de superficie de la sección transversal alabeada tomado alrededor del baricentro, a saber,

puede calcularse si se conoce las fatigas tangenciales que corres-

penden al centro de gravedad.

-----