IBRAZA

GEO-
METRIA
DESCRIP-
TIVA

1

TEXTO

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

PRIMERA PARTE

LECCIONES

DE

GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

POR LOS TENIENTES CORONELES DE INGENIEROS

D. PEDRO PEDRAZA Y CABRERA

Y

D. MIGUEL ORTEGA Y SALA

RECTAS Y PLANOS

OBRA ELEGIDA DE TEXTO

por R. O. de 11 de Agosto de 1885, en el concurso celebrado en 30 de Marzo del mismo año, por la Dirección general de Instrucción Militar.

CUARTA EDICIÓN

TOLEDO—1892

IMPRENTA Y LIBRERÍA DE JUAN PELÁEZ DEL ARCO

Comercio, 29 y 31—Alcázar, 20.

Teléfonos 31 y 32.

Las pocas variaciones que se introdujeron en esta obra al hacer la tercera edición, y que se han conservado en ésta, tuvieron por objeto adaptarla al programa del concurso en que fué elegida para servir de texto en la Academia General Militar.

ERRATAS

Páginas.	Líneas.	Dice.	Debe decir.
19	28	$(a\,b\,a_1\,b_1)$	$(a\,b\text{-}a_1\,b_1)$
29	22	**53**	**23**
74	15	al círculo	á la circunferencia
79	última	del círculo	de la circunferencia
82	19	un círculo	una circunferencia
82	22	dicho círculo	dicha circunferencia
89	23	cambios,	cambios
101	última	conocimiento	conocimientos
104	2	PROBLEMA 15	PROBLEMA 14
104	12	PROBLEMA 16	PROBLEMA 15
132	32	intersección	intersección,
132	última	recta,	recta
146	18	hasta	basta
146	18	(12-12'),	(12-12')

ÍNDICE

Capítulo III.

Problemas de aplicación.

Distancias entre puntos, rectas y planos.

ADVERTENCIA DE LA PRIMERA EDICIÓN [1]

Cuando tantos y tan buenos Tratados de *Geometría Descriptiva* se han dado á luz, se tildará por lo menos de vanidoso atrevimiento la publicación de un nuevo libro que se ocupe de esta materia, calificándolo todavía peor una vez conocidos su escaso mérito y sobra de defectos.

Pero destinada esta obra á servir de texto en la Academia del Cuerpo para la enseñanza de la primera parte de la *Geometría Descriptiva,* se reconocerá que aquel calificativo sería injusto si se atiende á que en dicha Academia hay que limitar á un tiempo determinado, y por demás breve, la duración de los múltiples y extensos estudios que su plan de enseñanza requiere, condensando, por decirlo así, las importantes y variadas teorías que abrazan los programas de sus cursos y exigiendo del alumno una verdadera y constante aplicación.

Esta es la razón principal de que sean pocas las obras convenientes para servir de texto, pues unas por muy extensas, otras por demasiado concisas, ó se ocupan de-

(1) Conservamos esta advertencia por exponerse en ella el plan de la obra y subsistir para la Academia General Militar los motivos que indujeron á escribir el libro.

tenidamente de detalles, ó sientan de un modo vago é incompleto los principios fundamentales de la ciencia sobre que versan. Establecer sólidas bases, insistir en los puntos culminantes indicando no más aquellos detalles que el alumno pueda ya comprender con el desarrollo gradual de su inteligencia, concisión en el lenguaje, claridad y buen método al exponer las teorías, son las principales circunstancias que han de reunir dichas obras, para que en tiempo, relativamente corto, puedan adquirirse los conocimientos necesarios al buen desempeño de los servicios de nuestro Instituto.

Si no es posible elegir una sola obra para cada asignatura que reuna aquellas condiciones, se podría, sí entresacar de varias las teorías que constituyen aquélla; mas este paliativo ofrece á todas luces muchos inconvenientes, que desaparecen recopilando en un solo libro dichas teorías.

Tal es, en general, el objeto de la mayor parte de las obras publicadas por profesores de esta Academia, y éste es también el que nos proponemos al presentar estos apuntes sobre «Rectas y Planos» de *Geometría Descriptiva*.

Mucha y notoria es la importancia de esta asignatura. Si la *Geometría Descriptiva* es el lenguaje del Ingeniero, no hay duda que éste debe poseer perfectamente esta ciencia, y más perfectamente aún sus principios fundamentales, esto es, la representación de los puntos, rectas y planos, las propiedades geométricas que de su combinación resultan y la solución gráfica de los problemas que le son anexos, que constituyen, como si dijéramos, el a b c de aquel lenguaje.

Por este motivo se ha dado siempre en nuestra Academia la debida predilección á esta asignatura, cuyas aplicaciones son tan frecuentes como variadas, requiriéndose, por lo tanto, que al llegar á ellas tengan los alumnos mucha práctica en las operaciones gráficas de la Descriptiva, costumbre de ver en el espacio y estén muy ejercitados en el empleo de las proyecciones.

Así, pues, al redactar el presente *Tratado de Rectas y Planos,* hemos procurado principalmente establecer los principios fundamentales de esta ciencia, imbuir desde luego aquellas ideas no sólo peculiares de esta parte, sino también generales á toda la *Geometría Descriptiva* y á sus diversos ramos de aplicación, y desarrollar gradualmente la inteligencia de los alumnos en una materia de índole tan distinta de los demás conocimientos que han adquirido al llegar á ella.

A este fin hemos dado gran importancia á la parte gráfica, siendo el texto un auxiliar de ella, y del cual se puede y debe prescindir en muchos casos, especialmente cuando se trata de resolver algún problema, pues el alumno debe intentar hacerlo por los medios que le sugieran los principios estudiados.

Con este mismo objeto se indican nada más las operaciones efectuadas en ciertas figuras, y de este modo se obliga al alumno á esforzar su imaginación para deducir de las teorías aprendidas los recursos que necesita, resultado tanto más necesario cuanto que cada caso que se presenta en la práctica de *Geometría Descriptiva* ha de variar, por lo menos en algunos detalles, de los demás que se hallan resuelto.

También necesita el alumno para dominar esta ciencia mucha práctica en el manejo de la regla y el compás;

pero esto sólo puede conseguirse por completo resolviendo muchos problemas ó ejercicios de delineación, quedando al criterio del profesor el número y elección de ellos en armonía con las facultades de cada individuo.

A pesar de tener en cuenta al confeccionar esta obra las condiciones expuestas y de haber procurado llenarlas todas, distamos mucho de creer que lo hayamos conseguido; pero hemos puesto de nuestra parte muy buena voluntad y cuanto nos ha sido posible dentro de nuestras facultades, pudiendo, sí, asegurar que no está en relación el resultado obtenido con el trabajo empleado, que está en relación inversa de los recursos intelectuales.

Los Autores.

Guadalajara 6 de Diciembre de 1879.

INTRODUCCIÓN

Leído

DEL estudio de las Matemáticas puras en sus diferentes ramos, se deducen los medios de resolver los problemas de aplicación que se presentan en las ciencias y en las artes. Por dos procedimientos generales puede llegarse al conocimiento de las incógnitas de un problema; bien por cálculos numéricos, bien por construcciones gráficas, debiendo elegir en cada caso el método más adecuado, pues casi siempre uno de ellos presenta ventajas señaladas sobre el otro, y sólo en circunstancias especiales será indiferente emplear cualquiera de estas dos soluciones.

Por consecuencia de la imperfección de los instrumentos matemáticos y del uso de escalas bastante reducidas en que han de ejecutarse los dibujos, las construcciones gráficas no pueden tener tanta precisión como los cálculos numéricos, sobre todo cuando exista cierta desproporción entre las magnitudes de los datos. Pero si en general el método gráfico sólo da soluciones imperfectas de los problemas, en muchos de cierta clase, por ejemplo, en los de Estereotomía, los trazados gráficos dan fácilmente y con toda la exactitud que pueda desearse las soluciones que por el cálculo se obtendrían de un modo largo y penoso, además de que la gran precisión que proporcionara este método desaparecería al traducir geométricamente los resultados del mismo.

Los problemas que requieren procedimientos gráficos entran desde luego en el dominio de la *Geometría general,* que nos enseña las propiedades de la extensión y el modo de medirla.

Mas si su estudio sugiere cuanto teóricamente pueda necesitarse para la resolución de los problemas que abraza, no sucede lo propio en la parte práctica, pues es difícil, si no imposible, en muchos casos, realizar las operaciones que allí se prescriben. Sabido es que la *Geometría* prescinde por completo de las cualidades físicas de los cuerpos para considerar solamente la forma que reviste el lugar que ocupan en el espacio, ó sea la extensión, cuyos principales atributos son la penetrabilidad, divisibilidad y movilidad. Pero al pasar al terreno de la práctica, hay que admitir la materia de que están formados los cuerpos, con sus inherentes propiedades de impenetrabilidad, dureza, etc., y de ahí proviene el que no pueden realizarse tan fácilmente, como establece la *Geometría,* sus operaciones teóricas. Así, para hallar el volumen de una pirámide, hace falta trazar su altura y medirla; y ¿cómo trazar la perpendicular del vértice á la base, si el cuerpo es sólido y el pie de dicha altura cae en el interior de aquélla?

Casos hay, sin embargo, en que dichas construcciones puedan efectuarse, y son cuando basta considerar únicamente una ó dos de las tres dimensiones de que está dotado todo cuerpo. En la representación de un terreno poco extenso, en el estudio de una superficie plana, al señalar el curso de un río ó trazado de un camino, bastan los conocimientos de *Geometría plana;* pero cuando se trata de las cuestiones que se presentan en los cuerpos, tales como son en la naturaleza, ya para estudiar sus propiedades, ya para conocer la relación que bajo cualquier aspecto pueden tener entre sí, es decir, cuando entramos en los límites de la *Geometría en el espacio,* se hace muy difícil, primero, la representación de las tres dimensiones en un solo plano, y luego la ejecución material de las reglas y operaciones que aquélla enseña, á cuyo fin, cierto es que han debido representarse los cuerpos, pero se ha hecho de un modo vago, sujetándose tan sólo á los amplios límites de la perspectiva caballera, y esta misma vaguedad, que allí es ventajosa por cuanto una misma figura representa en general los cuerpos de la misma naturaleza, es inadmisible al considerar cuerpos determinados.

Además, á medida que se progresa en el estudio de las ciencias y de las artes se encuentra la necesidad de transmitir á los demás hombres el conocimiento exacto de las formas que afectan los cuerpos, sea para manifestar las relaciones geométricas que se han descubierto, sea para guiar al artífice encargado de reproducir los objetos en dimensiones y circunstancias determinadas.

Mucho facilitaría el satisfacer estas necesidades, tener á mano los cuerpos que son objeto del problema de que se trata ó modelos de los que se han de construir; pero casi nunca se tiene esta facultad y sólo se conocen aquéllos por su representación mediante un dibujo.

Pero, ¿será suficiente dibujar los cuerpos tales como se presentan á nuestra vista? Basta mirar un objeto conocido cualquiera para convencerse de que la impresión que causa á nuestros ojos afecta forma y dimensiones distintas de las que realmente tiene, circunstancias que se renuevan cada vez que cambiamos el punto de vista desde el cual se mira. Por otra parte, estos dibujos no son más que perspectivas cuyos trazados obedecen á principios que tienen por base las teorías que vamos á estudiar.

Así, pues, sólo por convenios y procedimientos especiales se pueden representar en un plano las formas y dimensiones de los cuerpos, considerándose descriptos éstos *cuando por una cierta combinación de líneas y puntos se llega á expresar todas sus cualidades geométricas, y sea fácil deducir de aquel conjunto, la forma, dimensiones y posición de todos sus elementos.*

A estos medios ha tenido que recurrir la ciencia para salvar las dificultades enunciadas, y aun cuando el cuerpo de doctrina que constituyen es relativamente moderno, datan aquéllos de fecha muy remota. Los tiempos de la antigüedad, que tantos monumentos nos legaron, lo atestiguan con elocuencia, pues sólo se comprende la grandiosa ejecución de aquellas obras, suponiendo en los hombres que las concibieron medios de hacerlas comprender á los encargados de erigirlas.

Pero entonces para cada dificultad que surgía se arbitraba un modo de orillarla; se sentaron nuevos principios, se establecieron luego teorías, y reunidos más tarde todos estos elementos, relacionándolos convenientemente, constituyeron al fin la *Geometría Descriptiva,* de que vamos á tratar, siendo al célebre Monge á quien debe más esta ciencia.

Por consiguiente, diremos que *Geometría Descriptiva es la parte de la Geometría general que enseña á representar los cuerpos y á realizar en ellos las soluciones gráficas de los problemas.*

En esta definición se advierte desde luego los dos problemas inversos que resuelve esta ciencia, y como los términos concisos de una definición sólo pueden encerrar la idea general que definen, ampliaremos ésta comentando aquélla. El primer problema consiste en representar un cuerpo conocido, esto es, dado un cuerpo cuya forma, magnitud y posición están fijadas, representarlo de un modo tal, que la sola inspección de ésta su imagen nos dé á conocer aquellas circunstancias esenciales. Una vez realizadas las soluciones gráficas de los problemas, que es el segundo objeto de la *Geometría Descriptiva,* resulta la cuestión inversa de la anterior, ó sea, dada la representación de un cuerpo, poderlo construir de modo que ninguna de sus partes constitutivas quede indeterminada.

Acaso pudiera creerse que el primer problema envuelve la idea de que el cuerpo considerado ha de existir materialmente para poderlo representar por los procedimientos que se van á exponer; mas no es así ni debe tomarse aquel enunciado bajo una acepción tan restrictiva. Basta que se conozcan sus propiedades geométricas para que pueda entrar en el dominio de esta ciencia, y este conocimiento puede existir tan sólo en la mente del que lo ha ideado ó estar expresado por números, respecto á magnitudes y descripciones sobre su forma y posición.

Dichos dos problemas presentan la *Geometría Descriptiva* bajo dos conceptos bien distintos. Es el primero puramente gráfico y el segundo en estremo analítico, por cuanto sólo puede ejecutarse el cuerpo representado, después de un detenido examen, y se comprende que por este medio pueden estudiarse y deducirse las propiedades de la extensión figurada, concurriendo así al mismo fin que se propone la *Geometría* en general como ciencia especulativa. Bajo estos dos aspectos la *Geometría Descriptiva* no sólo es útil sino necesaria é imprescindible para el Ingeniero. De nada le serviría su inteligencia, el caudal de conocimientos que posee, si no pudiera expresar y transmitir á sus semejantes las concepciones que ha ideado, utilizando sus vastos conocimientos en todas las ciencias que constituyen su profesión. Este es indudablemente su principal objeto; pero no se crea por esto que no le compete el segundo extremo, pues aun cuando sólo los artífices son los encargados de la ejecución material de los cuerpos, debe el Ingeniero dirigir esta construcción y ante todo arbitrar los medios para ella, descomponer el conjunto en partes íntimamente relacionadas entre sí y estrictamente sujetas á las reglas del arte de construir. Y para esto tiene que resolver problemas, ejecutar operaciones, que si bien entran en el dominio de la *Geometría* en lo que se refiere á su razón de ser y para las que no habría dificultad si tuvieran que ejecutarse sobre los cuerpos materiales, sólo por los procedimientos de la *Geometría Descriptiva* pueden realizarse cuando del cuerpo no se conoce más que su representación.

Y considerada la *Geometría Descriptiva* como ciencia de investigación, es necesaria á todo aquel que trate de adelantar las ciencias y descubrir nuevas verdades.

Esta parte de las Matemáticas, puesta así en forma de ciencia especulativa, no sólo se utiliza, como hemos dicho, para representar en un solo plano los cuerpos de la naturaleza con todos los detalles y las verdaderas formas que tienen en el espacio, sino que sirve también para dar idea exacta de un pensamiento artístico cualquiera, con la claridad y precisión necesarias para que todo el que conozca los secretos de esta ciencia pueda representar aquél y llevar á cabo su desarrollo material, facilitando además fecundos medios de investigación y estudio de las propiedades de los cuerpos. Verdad es que sus procedimientos revisten un carácter de exclusivismo, no siendo, por consiguiente, tan generales como los recursos del análisis; pero en cambio hieren más vivamente la imaginación y pueden conducir á los mismos resultados por medios más sencillos y expeditos.

En resumen, la *Geometría Descriptiva* es el lenguaje que emplea el Ingeniero para transmitir á los demás hombres sus ideas, y el que necesita para traducir en hechos las que no son más que concebidas.

Nada hay absoluto en la naturaleza, y el hombre sólo puede guiarse en sus acciones refiriendo unas á otras; sólo puede darse cuenta de la forma, magnitud y posición de los cuerpos comparándolos con otras formas conocidas, con otras magnitudes determinadas y con otros objetos fijos de posición. Cuando en alta mar apercibimos un buque, no sabemos si es un barco grande que está lejos ó uno pequeño que está relativamente cerca. Si así es, debe considerarse definido un cuerpo cuando se conozcan las posiciones de todos sus puntos, líneas y superficies con relación á otros objetos conocidos; mas como todo cuerpo está limitado por superficies y éstas se pueden considerar engendradas por líneas y á su vez cada una de éstas por uno de sus puntos, el problema principal y preliminar es determinar la posición de un punto en el espacio.

Pero éste es indefinido, y como no es posible encontrar en él ningún límite natural de referencia, hay que establecerlo para cada caso, y elegirlo, como es consiguiente, de modo tal, que nos proporcione la determinación del punto de la manera más fácil y sencilla posible, puesto que estas ventajosas circunstancias las originarán también en los procedimientos que emplea la *Geometría Descriptiva*.

Veamos, pues, qué términos de referencia conviene elegir, ciñéndonos tan sólo á considerar otros puntos, rectas ó planos, por la utilidad de que estos límites convencionales sean de por sí los más sencillos también.

Un punto queda determinado en el espacio ligándolo á otros tres fijos por medio de un tetraedro, cuyas aristas serán las distancias del punto considerado á los tres dados y las de éstos entre sí, ó lo que es lo mismo, aquel punto debe ser la intersección de tres esferas cuyos radios sean las primeras distancias y sus centros los puntos fijos.

Tomando rectas, y puesto que el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una dada es la superficie de un cilindro, circular, recto, cuyo eje y radio sean aquella recta y aquella distancia, vemos que una sola recta no basta para fijar la posición de un punto. También dos dejarían indeterminada la posición del propuesto por cualquiera de los comunes á las superficies de dos de dichos cilindros en análogas circunstancias, y sólo con tres rectas conseguiríamos determinar aquél, pues tendría que ser uno de los de intersección de las tres superficies cilíndricas correspondientes, y éstos son limitados en número, siempre que las rectas elegidas no sean paralelas.

Y si eligiéramos planos para términos de referencia, no bastaría uno sólo, pues dada la distancia de un punto á este plano, podría confundirse con todos los de otro plano paralelo á aquél y á la distancia dicha, bien hacia un lado, bien hacia otro.

Con dos planos habría menos ambigüedad, pero aún se confundiría el punto que se refiriese á ellos con todos los de las rectas, intersecciones de otros planos paralelos á los elegidos y á las distancias correspondientes; pero si aquéllos fuesen en número de tres, desaparecería la ambigüedad, resultando que el punto cuya posición se quiere fijar sería el común á tres planos paralelos á los de referencia, trazados á las distancias respectivas y tomando éstas en convenientes sentidos.

Tanto al tomar dos planos, como tres, hay que suponer que no sean paralelos entre sí.

En resumen, queda fijada la posición de un punto, referido á otros tres, por medio de tres esferas, referido á tres rectas, por medio de otros tantos cilindros y mediante tres planos, cuando los límites elegidos son tres elementos de esta naturaleza. El último de estos sistemas debe ser indudablemente el más ventajoso, por emplear medios de referencia más sencillos y fáciles de trazar. Este es, pues, el adoptado universalmente, pudiéndose comprobar desde luego su analogía con los planos coor-

Capítulo I.

Del punto, de la recta y del plano.

Proyecciones.—1. Los métodos de proyección que satisfacen al doble objeto de la Geometría Descriptiva, son los siguientes:

I. Proyección cónica.—Si se corta por un plano P el haz de rectas que partiendo de un punto del espacio pasan por los diversos puntos de una figura, la sección que resulta será una *transformada* de aquélla, y se llama *proyección cónica* de la figura dada, sobre el plano P: Poncelet la llama también *proyección central*. El plano P recibe el nombre de *plano de proyección*, el haz de rectas el de *haz proyectante* y el vértice de éste el de *vértice ó polo de proyección*.

II. Proyección cilíndrica.—Cuando este vértice se considera en el infinito, la proyección cónica se convierte en *cilíndrica*, las rectas del haz proyectante son paralelas y según que su dirección sea perpendicular ú oblicua al plano de proyección, ésta se llama *ortogonal* ú *oblicua*.

III. Proyección axonométrica.—Si por un punto O del espacio consideramos tres planos que se corten en ángulo recto, formarán alrededor de este punto ocho triedros trirrectángulos, llamándose *origen, triedros de coordenadas, ejes coordenados* y *planos coordenados* respectivamente el punto O, los triedros obtenidos, sus aristas y sus caras; y si por otro punto A del espacio se hacen pasar planos paralelos á los coordenados, cortarán á los ejes de este nombre en puntos que son las *coordenadas* del punto A referidas al origen O. Consideremos ahora un plano cualquiera P, distinto de los coordenados sin ser perpendicular á ninguno de éstos, y proyectemos sobre este plano, llamado *plano de figura*, el orígen O, el punto A y todo el paralelepípedo de coordenadas, siendo entonces fácil concebir que la proyección del punto A sobre P, puede deducirse de las proyecciones sobre el mismo plano de las coordenadas de A. Esta clase de proyecciones se llaman *axonométricas*, y *Axonometría* es el método de estas proyecciones.

IV. Proyección acotada.—Las proyecciones ortogonales sobre un plano de *comparación*, indicando con números ó *cotas* las distancias de cada punto á dicho plano, constituyen el sistema de *acotaciones*.

V. Proyección sobre dos planos.—El empleo de dos planos de proyección, no paralelos, sobre los cuales se proyectan oblicua ú ortogonalmente los puntos del espacio, es el sistema de *planos de proyección:* la figura que resulta sobre cada plano, es una *proyección* de la figura dada.

En general, los planos se toman perpendiculares empleando la proyección ortogonal.

2. Los métodos expuestos no se usan indistintamente. Cada uno de ellos tiene determinadas sus aplicaciones y de este exclusivismo nacen las ventajas que caracterizan á cada sistema, obteniendo así una sencillez imposible de alcanzar con un solo procedimiento general para todos los casos.

La proyección cónica tiene en este concepto dos aplicaciones principales. Una de ellas es cuando se quiere representar los objetos en un plano conservando su apariencia, en cuyo caso este procedimiento toma el nombre de *perspectiva regular* y la figura proyección toma del mismo modo el de *perspectiva* de la figura proyectada; el polo de proyección es el punto en que se considera colocado el observador y se llama *punto de vista,* siendo las líneas proyectantes los *rayos visuales* y el plano P el *cuadro*. La segunda aplicación tiene lugar cuando se trata de señalar la sombra arrojada por una figura sobre un plano estando el punto luminoso á distancia finita, tal como la luz de una bujía. En esta hipótesis el vértice de proyección es el *punto luminoso* y las proyectantes los *rayos luminosos*.

La proyección cilíndrica se aplica en casos análogos. Si en la perspectiva regular se supone en el infinito el punto de vista, resulta una aplicación de la proyección cilíndrica; pero la figura obtenida no reune ya la ventaja de conservar la apariencia rigurosa de la figura propuesta, alterándose además las dimensiones. Sin embargo, se usa frecuentemente por la sencillez con que se obtiene la perspectiva y porque permite dar idea aproximada de los objetos aun cuando sólo existan en la imaginación, sirviendo por lo tanto para la representación de un proyecto del cual no se hayan precisado las dimensiones. Esta perspectiva se llama *perspectiva caballera* y es la empleada para representar los cuerpos en la Geometría en el espacio. Se llama también *perspectiva rápida*.

En la segunda de las aplicaciones citadas en la proyección cónica, si se considera que el punto luminoso se aleja al infinito, se recae también en la proyección cilíndrica, presentándose este caso cuando se trata de determinar la sombra de un objeto producida por el sol, que es el caso más general.

La perspectiva y la sombra son un poderoso auxiliar para la fiel representación de los cuerpos, y se emplean, por consiguiente, en los proyectos de construcciones, fortificación, máquinas y en otras muchas aplicaciones de la profesión militar.

La proyección axonométrica se emplea con ventaja en la determinación de las perspectivas de este nombre, y á causa de la facilidad con que se determinan se llaman también *rápidas*, como las caballeras, no entrando en más detalles sobre esta clase de trazados por ser ajenos á estas lecciones.

El sistema de acotaciones encuentra generalmente su adecuada aplicación en los casos en que las dimensiones en sentido paralelo al plano son muy grandes relativamente á las medidas en sentido perpendicular, como sucede en la Topografía, Fortificación, proyectos de caminos, canales, planos de batallas, etc., etc.

Por último, las proyecciones ortogonales sobre dos planos de proyección perpendiculares son las empleadas en general y fuera de los casos concretos que hemos enumerado, sirviendo no tan sólo en innumerables casos prácticos sino también en la exposición teórica de gran parte de las materias que constituyen el saber humano. Además, este método es en cierto modo la base ó fundamento de todos los demás medios especiales de proyección y, por lo tanto, es de sumo interés su estudio, del cual nos vamos á ocupar exclusivamente en este libro.

leído

Lám. 1.ª **3.** Sean YXH y VYX (fig. 1) los dos planos mencionados, cortándose perpendicularmente según la recta XY: esta recta recibe el nombre de *línea de tierra*, así como de los planos uno toma el nombre de *plano horizontal* y el otro el de *vertical de proyección*.

Los planos de proyección deben suponerse siempre indefinidos, y entonces dividen el espacio en cuatro ángulos diedros rectos, que se llaman *cuadrantes*, y que se distinguen por un número ordinal, siendo el primero y segundo los que están encima del plano horizontal, respectivamente delante y detrás del vertical, y tercero y cuarto los que están debajo del plano horizontal, detrás y delante del vertical, con referencia siempre á la posición que ocupa el que observa el dibujo. Según esto, serán respectivamente 1.º, 2.º, 3.º y 4.º cuadrante los diedros $VXYH$, $VYXH'$, $H'XYV'$ y $V'XYH$, suponiendo al observador colocado en el primero de dichos diedros, pues en otra posición cualquiera variaría el número de orden de los cuadrantes.

Las proyecciones situadas sobre el plano horizontal se llaman *proyecciones horizontales*, y *verticales* las que se hallan sobre el plano vertical, así como las líneas que causan las primeras se llaman *líneas proyectantes verticales*, por ser perpendiculares al plano horizontal, y las que originan las segundas *líneas proyectantes horizontales*, por serlo al otro plano, teniendo, por lo tanto, estas líneas nombres contrarios al de la proyección que producen.

Del punto.—**4.** Si A es un punto del espacio, y trazamos desde él las perpendiculares $A\,a$, $A\,a_1$ á los planos de proyección, estas líneas serán respectivamente las proyectantes vertical y horizontal del punto A; a será la proyección horizontal, y a_1 la vertical.

Dichas dos proyectantes determinan un plano perpendicular á los de proyección, y por consiguiente á la línea de tierra, siendo la intersección de aquel plano con los de proyección las rectas $a\,b$ y $a_1\,b$, resultando el rectángulo $A\,a_1\,b\,a$, del cual se deduce:

1.º Que las distancias de un punto al plano horizontal H y al vertical V (en adelante y para abreviar designaremos los planos de proyección y la línea de tierra por las letras H, V y $X\,Y$) son iguales á las que hay desde $X\,Y$ á la proyección de nombre contrario.

2.º Que la distancia de un punto á la línea $X\,Y$ es igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son las distancias de aquél á los dos planos de proyección.

$$A\,b = \sqrt{\overline{a_1\,b}^2 + \overline{b\,a}^2}.$$

Y 3.º Que las perpendiculares trazadas á la línea $X\,Y$ desde las proyecciones de un punto la encuentran en un mismo punto.

5. Con lo dicho se comprende perfectamente que dado un punto en el espacio, y elegidos los planos de proyección, podemos trazar sus dos proyecciones y por medio de éstas hacer la representación de aquél, y recíprocamente, dadas en un sistema de planos de proyección las dos de un punto, se puede determinar éste en el espacio, bien trazando las líneas proyectantes, bien buscando las distancias de las proyecciones á la línea $X\ Y$.

6. Mas en realidad no hemos llenado todavía el objeto de la Geometría Descriptiva; pues según lo que hemos dicho necesitamos emplear dos planos distintos y no es posible hacer la representación de los cuerpos en uno solo ó *en un papel*. Pero esto se consigue si el plano V, por ejemplo, lo hacemos girar alrededor de $X\ Y$ hasta que se confunda con el H, es decir, abatiendo el primero sobre el segundo, sin que este abatimiento perjudique en nada á la buena representación y determinación del punto en el espacio, debiendo imaginarse que el plano V vuelve á su posición primitiva siempre que por medio de las proyecciones queramos determinar ó formarnos idea de la posición de un cuerpo en el espacio con relación á los planos de proyección, y únicamente suponerle abatido para las operaciones gráficas que exija el problema.

Siendo indefinidos los planos de proyección, al hacer el abatimiento quedará el V confundido completamente sobre el H, pudiendo hacerse el giro en dos sentidos distintos, pues colocándose en el primer cuadrante, el plano V puede girar hacia delante ó hacia atrás. Se ha convenido en que se verifique siempre este segundo movimiento, como se indica en la figura por la flecha F, y en su consecuencia resultará que las partes superior é inferior del plano que gira, quedarán adaptadas respectivamente sobre las posterior y anterior del fijo, de modo que las dos caras del diedro que constituían el primer cuadrante quedarán en prolongación una de otra, pero separadas por su arista $X\ Y$, siendo la parte inferior á ésta el plano H, y la superior el V; las caras del segundo cuadrante estarán confundidas por encima de dicha línea; las del tercero, en prolongación una de otra, pero invertidas con relación al primer cuadrante, siendo ahora plano *V* lo que entonces era *H*, y recíprocamente; y las del cuarto cuadrante, confundidas por la parte inferior de aquella línea.

7. En cuanto á las proyecciones que contengan dichos planos, y fijándonos en las a y a_1 del punto *A*, es claro que la horizontal no tendrá variación ninguna, y la a_1 describirá un arco de círculo cuyo centro será b y su radio $a_1\,b$, permaneciendo éste constantemente perpendicular á la *X Y*, de modo que, después de verificado el abatimiento, subsistirá esta perpendicularidad, quedando en prolongación de la recta $a\,b$ que llena igual condición. Resulta, pues, que verificado el movimiento del plano *V*, existe entre las dos proyecciones de un mismo punto una correspondencia muy notable, cual es que *la recta que las une ha de ser perpendicular á la X Y.* Por consiguiente, dos puntos cualesquiera, uno en cada plano de proyección, pueden ser las proyecciones de un cierto punto del espacio, siempre que los primeros estén en una perpendicular á la línea de tierra; además las distancias desde dichas proyecciones á esta misma línea miden siempre las que hay desde el punto del espacio á cada uno de los dos planos, suponiendo el *V* en su verdadera posición, y como todos los puntos de este plano y las proyecciones que puede haber trazadas en él, conservan constantemente su posición relativa, ya se le considere antes ó después del giro, resulta que este abatimiento en nada perjudica, como hemos dicho antes (6), á la buena representación y determinación de los cuerpos en el espacio. En virtud de lo que antecede, un punto *A* del espacio quedará determinado en un solo plano por medio de sus proyecciones, de la manera que indica la figura 2.

Distintas posiciones de un punto con relación á los planos de proyección.—8. En las figuras 1 y 2 hemos aprendido á encontrar y representar debidamente las proyecciones de un punto *A* del espacio situado en el primer cuadrante, dando por resultado las proyecciones (*a-a'*), y se comprende que según sea la posición del punto escogido relativamente á los planos de proyección, distintas serán también las proyecciones; pero como el medio de hallarlas es siempre el mismo, bastará para ejercitar á los alumnos, en esta parte tan importante, resumir en la figura 3 en perspectiva y en la 4 en proyecciones, las distintas posiciones que puede tener un punto, que son las siguientes:

El punto *A* en el segundo cuadrante, sus proyecciones	(*a—a'*)
B en el tercero	(*b—b'*)
C en el cuarto	(*c—c'*)
D en el plano *H*, delante del *V*	(*d—d'*)
E en el plano *H*, detrás del *V*	(*e—e'*)
F en el plano *V*, encima del *H*	(*f—f'*)
G en el plano *V*, debajo del *H*	(*g—g'*)
K en el plano bisector del primer cuadrante	(*k—k'*)
L en el plano bisector del segundo	(*l—l'*)
M en el plano bisector del tercero	(*m-m'*)
N en el plano bisector del cuarto	(*n—n'*)
P en la línea *X Y*	(*p—p'*)

Cuando un mismo punto del papel representa dos ó más puntos distintos, se señalan con las letras correspondientes, como se ve en los últimos casos.

9. En todos ellos, conocidas las proyecciones de un punto, puede venirse en conocimiento de la posición que ocupa en el espacio, con sólo suponer que el plano *V* vuelve á la posición que tenía antes del giro, y trazar por cada proyección su línea proyectante, ó buscando las distancias del punto á cada uno de los planos de proyección.

Es muy conveniente ejercitarse en este estudio, que puede hacerse representando en perspectiva los puntos cuyas proyecciones se dan al arbitrio, es decir, pasar de la figura 4 á la 3, y también es de mucha utilidad, dadas las proyecciones de varios puntos, comparar sus posiciones relativas.

Proyecciones de líneas: líneas rectas.—10. La proyección de una línea *A C B* (fig. 5) sobre un plano *PQ*, es el lugar geométrico *a c b* de las proyecciones de todos los puntos de la línea sobre el plano; las proyectantes *A a*, *C c*, *B b*, perpendiculares al plano *P Q* son paralelas entre sí y forman un cilindro que se llama *cilindro proyectante* de la curva.

Cuando la línea que se proyecta es una recta *A B* (fig. 6), las proyectantes están en un mismo plano, que se llama *plano proyectante de la recta*, y la intersección de éste con el de proyección es la *proyección* de la recta, que es, por consiguiente, otra recta.

Así, pues, en Geometría Descriptiva llamaremos proyección horizontal de una recta la intersección del plano *H* con otro que, siéndole perpendicular, pase por la recta dada, y proyección vertical á la intersección del plano *V* con otro que, siéndole perpendicular, pase también por aquélla.

11. Quedando una recta determinada por dos de sus puntos, se deduce que para obtener las proyecciones de una recta bastará buscar las de dos de sus puntos y unir las dos proyecciones horizontales de éstos para obtener la horizontal de aquélla, y las dos verticales de dichos puntos para obtener la del mismo nombre de la recta.

Si *A B* (figs. 7 y 8) es la recta dada, hallaremos las proyecciones (a-a_1) del punto *A*, las (b-b_1) del punto *B* y las rectas ($a\,b$-$a_1\,b_1$) serán las proyecciones horizontal y vertical de la recta *A B*. Luego no hay más que hacer el abatimiento del plano *V* para que queden trazadas en ($a\,b$-$a'\,b'$) las dos proyecciones en un solo plano.

De lo dicho se deduce inmediatamente una consecuencia interesante, y es *que si un punto está sobre una recta, las proyecciones de aquél estarán sobre las de ésta.*

12. Es evidente también, que conocidas las proyecciones de una recta, queda ésta determinada en el espacio, pues bastará trazar por cada una de aquéllas el plano proyectante correspondiente, después de suponer el plano vertical en su debida posición, y la intersección de estos dos planos será la recta pedida.

En su consecuencia, dos rectas cualesquiera, una en cada plano de proyección, pueden ser las proyecciones de una recta en el espacio, siempre que aquellas sean tales que los planos proyectantes que determinen se corten, salvo algunas excepciones que haremos notar más adelante.

Leido

Notaciones.—13. Expuestas estas sucintas nociones, y antes de proseguir, conviene fijar las ideas sobre los convenios y sistemas de notación y representación adoptados en Geometría Descriptiva, y las condiciones con que se ejecutan los problemas en que se aplican sus teorías.

Un dibujo es un medio de expresar una idea; así como éstas pueden emitirse de palabra ó por escrito, también pueden hacerse públicas por medio de un dibujo. En este concepto, es evidente que un dibujo será tanto mejor cuanto más explícito, conciso y exacto sea.

La primera circunstancia depende de la notación que se emplee en él, de la buena combinación de las distintas clases de líneas que pueden usarse, y del cuidado que se ponga en representar debidamente los cuerpos en sus partes vistas y ocultas, por sí mismos ó con relación á otros cuerpos ó superficies que puedan ocultarlos, siguiendo para ello las reglas que se darán en su lugar. La concisión se refiere especialmente al empleo acertado de los medios más ventajosos para resolver cada una de las cuestiones secundarias que surjan en un problema, de manera que sólo se tracen las líneas indispensables, pero sin faltar ninguna, para la buena inteligencia de la cuestión que se resuelva. Y la exactitud puede obtenerse siempre ejecutando todas las operaciones gráficas con sumo cuidado y prolija atención, no olvidando nunca las reglas y precauciones que requiere el dibujo lineal, y empleando para cada cuestión particular el medio de solución más apropiado á las circunstancias en que se encuentran los datos, además de servirse siempre de buenos y adecuados instrumentos.

Y para conseguir todas estas cualidades influye principalmente el esmero con que se ejecute el dibujo, el acierto y el gusto del que lo trace, y casi pudiéramos decir también del sentimiento artístico; circunstancias todas que no pueden sujetarse á reglas, y que sólo la mucha práctica y la inspección de buenos modelos pueden desarrollar en el que las tenga innatas.

Además, la Geometría Descriptiva en sus aplicaciones es el lenguaje que emplea el ingeniero para hacer comprender sus proyectos á los encargados de ejecutarlos, que por lo general comprenden mejor una idea viéndola representada gráficamente que sujetándose á una descripción más ó menos detallada, y por esta nueva razón se comprenderá cuán útiles son las reglas que expondremos ahora y en el transcurso de estas lecciones referentes á este asunto.

Muy ventajoso sería que los medios de representación y notación fueran universales; mas por desgracia, pocos son los autores que tienen completa uniformidad en la materia, pues á pretexto de corregir pequeños inconvenientes, han establecido procedimientos distintos. Nosotros adoptaremos los más generalmente admitidos y que al parecer cumplen mejor con su objeto.

14. Hemos convenido (3) en llamar plano horizontal y vertical á cada uno de los planos de proyección, y línea de tierra á la intersección de ambos. No está exenta de inconvenientes esta nomenclatura, pero gran parte de ellos desaparece añadiendo la observación de que ni aquellos planos ni aquella línea han de tener precisamente la posición que su nombre indica, sino que pueden ser dos planos cualesquiera, con tal que sean perpendiculares entre sí. Sin

embargo, dicha nomenclatura debe su origen á que en muchos casos, como en los problemas de corte de piedra, proyectos de edificios, representación de máquinas y otros, uno de los planos es horizontal y el otro vertical, y como en alguno de ellos el primero representa el suelo sobre que ha de levantarse la construcción, esta circunstancia ha motivado el nombre de línea de tierra dado á la intersección de aquel plano con el vertical; mas no porque esto tenga lugar algunas veces, hay que creer que se verifica siempre, debiendo, por lo tanto, tenerlo en cuenta y conservar estas calificaciones, que si no son siempre exactas, al menos tienen la ventaja de su sencillez y distinguir unos elementos de otros.

Hemos dicho también (6) que para la ejecución de las operaciones gráficas se considera el plano vertical abatido sobre el horizontal, y en este caso constituyen un solo plano, representado por el papel en que se haga el dibujo y en que se ha de trazar la línea de tierra. Generalmente se coloca ésta paralela á uno de los lados del rectángulo que forma el papel y se la señala con las letras *X Y*, la primera á la izquierda y la segunda á la derecha, y para distinguir más fácilmente esta línea de todas las demás se la hace más gruesa.

En esta disposición queda el papel dividido en dos regiones, que juntas, representan (6) el primero y tercer cuadrante; para el primero, la parte inferior es el plano *H* y la superior el *V*, siendo á la inversa para el tercero. Además, la región superior representa el segundo cuadrante y la inferior el cuarto, pues en ambos están confundidas las caras de los diedros que los constituyen. Por otra parte, como á la inspección de un dibujo no podría determinarse cuál es la parte del papel que representa el plano *H* ó el *V* en el primer cuadrante, se evita esta incertidumbre colocando las letras *X* é *Y*, que designan la línea de tierra, siempre en la región que representa el plano *H*, de modo que cuando las letras están debajo, esta parte representa aquel plano y la superior el V, y viceversa si estuvieran las letras por encima. De modo que estas letras llenan el triple objeto de distinguir la línea de tierra de las demás líneas del dibujo, señalar las partes que constituyen el primer cuadrante, y por consiguiente los demás, é indicar el sentido en que se ha verificado el abatimiento del plano V, que es al lado opuesto al que ocupan las letras.

Generalmente se representan las partes principales de los cuerpos en el primer cuadrante, por más que algunas de ellas puedan estar en los otros, á los cuales pueden conducirnos también las operaciones ulteriores que requiera el problema de que se trate.

Los puntos en el espacio se consideran señalados por letras mayúsculas, y á sus proyecciones se les ponen las mismas letras, pero minúsculas, y para distinguir la horizontal de la vertical, puesto que cada región del papel puede representar ambos planos, se acentúa siempre la segunda. Así un punto A del espacio tendrá por proyección horizontal el punto a, y por vertical al a', leyéndose el punto A ó el $(a\text{-}a')$; en este último caso se sobreentiende el punto cuyas proyecciones son a y a'. Pueden también usarse números en vez de letras, haciendo la misma distinción.

Para las rectas, puesto que basta señalar dos de sus puntos, seguiremos para cada uno de ellos las reglas dichas, de modo que si tenemos una recta AB en el espacio, sus proyecciones serán, la horizontal una recta ab, y la vertical otra $a'b'$, enunciándose la recta AB ó la $(ab\text{-}a'b')$. En las figuras 2 y 8 se pone de manifiesto cuanto acabamos de decir, y en ellas se ven las proyecciones del punto A de la figura 1 y de la recta AB de la figura 7.

Siempre que sea indiferente señalar una recta por unos ú otros de sus puntos como sucede casi siempre, y en todas las líneas que sin ser proyecciones de rectas intervengan en un problema, es conveniente poner las letras en su extremidad, prolongadas hasta el marco del dibujo, por ser allí más fácil encontrarlas, y también porque es donde hay generalmente menos confusión de líneas. Para estos casos deben preferirse las letras más extendidas, como las *b, d, f, p,* etc., guardando las *a, c, m, n,* etc., para el centro del dibujo.

Los puntos vienen en general determinados por la intersección de dos líneas, mas si ocurre tener que representar un punto aislado, se acostumbra hacerlo por una cruz, en esta forma —|—, con la letra ó número correspondiente.

No todas las líneas se representan del mismo modo, sino que se emplean medios especiales, según el papel que juega cada una. Las líneas que intervienen en un dibujo pueden clasificarse de dos maneras distintas, aparte de la línea de tierra de que ya hemos hablado; las principales y las auxiliares de construcción. Constituyen las primeras los datos y los resultados del problema, y las segundas las que son preciso trazar para su resolución. Las principales se marcan de trazo lleno ó continuo, dando un poco más grueso á las que son resultado. En cuanto á las auxiliares, se marcan siempre de trazo interrumpido, y pueden tener distintas combinaciones, como de trazos iguales, trazo y un punto, ó trazo y dos ó más puntos, y en su acertada combinación consiste en gran parte la claridad del dibujo. Entre estas líneas hay que distinguir las de correspondencia entre las proyecciones de un mismo punto, que deben indicarse siempre empleando los trazos iguales. Del mismo modo se trazan también las demás líneas auxiliares, pero si entre ellas hay alguna notable por algún concepto, ó que convenga llamar la atención sobre ella, se trazará de trazo y punto, empleando uno ó más de éstos, cuyo número indicará el orden según el cual se han establecido aquéllas.

En las líneas principales, que son las que únicamente pueden existir en el espacio, hay que distinguir las partes vistas de las ocultas. Para la proyección horizontal, el observador se supone colocado por encima del plano horizontal á una distancia infinita, y para la vertical á la misma distancia delante del plano vertical; situado aquél en el primer cuadrante, desde luego se comprende serán ocultas todas las líneas ó parte de líneas situadas en cualquiera de los otros tres, y de las que existen en el primero, también pueden estarlo por algún cuerpo ó superficie, y natural es que las proyecciones indiquen esta particularidad, para lo cual se ha convenido en marcar de trazo lleno, con la distinción que hemos dicho, las líneas que son vistas, y de puntos las partes ocultas.

En los problemas en que pueda haber confusión de líneas no se suelen trazar en toda su extensión aquellas líneas auxiliares de las cuales baste indicar su dirección, marcándose sólo sus extremos. En las de correspondencia es donde se usa generalmente esta abreviatura de tiempo y trabajo; suele también indicarse el punto en que corta á la línea de tierra. En la figura 9 están representadas algunas de las reglas anteriores.

Advertiremos antes de concluir con este asunto, que nada hemos fijado como regla invariable, pues desde un principio indicamos que no todos los autores están conformes en un mismo método de notación y representación.

Leido

P. 13

Trazas de una recta.—15. Considerando indefinidos los planos de proyección, es evidente que una recta indefinida también ha de cortar á dichos planos, excepto cuando les sea paralela. Estos puntos de intersección se llaman *trazas* de la recta, siendo la horizontal el punto en que la recta atraviesa el plano de este nombre, y traza vertical el punto análogo sobre este plano.

Al pasar una recta del primer cuadrante á cualquiera de los otros tres, ha de cortar forzosamente á uno de los planos de proyección, por consiguiente las trazas de una recta son dos puntos muy importantes y que conviene determinar casi siempre, por ser los que hacen la separación de la parte vista de la oculta de una recta, y también porque muchas veces se toman estos puntos con preferencia á otros para determinarla.

16. Tratemos, pues, de buscar las trazas de una recta, y sea ésta la dada por sus proyecciones ($a\,b$-$a'\,b'$) (fig. 10); la traza horizontal es un punto de la recta, por lo tanto, su proyección horizontal ha de estar sobre la $a\,b$, y la vertical sobre la $a'\,b'$ (**11**); además, dicha traza es un punto del plano horizontal, que tendrá su proyección vertical sobre la línea de tierra (**8**), por cuyas razones, la proyección vertical de la traza horizontal no puede ser otro punto que el h'. La proyección horizontal de la traza de este nombre se ha de corresponder con el punto h' por una perpendicular á $X\,Y$ (**7**), y debe estar situado sobre $a\,b$, luego será el punto (h); (h-h') son pues las proyecciones de la traza horizontal, y el punto h además la traza misma.

Para la traza vertical haremos el mismo razonamiento. Esta traza es un punto común á la recta y al plano V, de modo que su proyección horizontal ha de estar en las rectas $a\,b$ y $X\,Y$, luego será el v. La proyección vertical v' tiene que hallarse sobre la perpendicular $v\,v'$ y en la recta $a'\,b'$, siendo, pues, fácil encontrarla, resultando que (v-v') son las dos proyecciones de la traza vertical, y el segundo punto la traza misma.

17. Traducidas las operaciones efectuadas en regla práctica, veremos *que para hallar una de las trazas de una recta hay que prolongar la proyección de nombre contrario hasta que corte á la línea de tierra; por este punto trazar una perpendicular á esta última línea, hasta que encuentre á la otra proyección de la recta; el punto en que se cortan será la traza buscada, y el mismo punto y el anterior sus dos proyecciones.*

18. Recíprocamente, si v' y h son las dos trazas de una recta, y quisiéramos hallar sus proyecciones, observaremos que la traza horizontal h se proyecta verticalmente en h' sobre la línea $X\,Y$; la traza vertical v' es ella misma su proyección vertical, luego $v'\,h'$ es la proyección de este nombre de la recta; del mismo modo se obtiene la proyección horizontal, proyectando horizontalmente en v sobre la línea XY la traza vertical v', y uniéndola con la h por medio de la recta vh.

Posiciones de una recta respecto á los planos de proyección.—**19**. Cualquiera que sea la posición de una recta en el espacio, es fácil encontrar siempre sus proyecciones siguiendo el método enseñado en el núm. **11** para obtener las proyecciones de la figura 8. Pero es claro que en las posiciones particulares que puede tener la recta, las proyecciones las tendrán también, y para familiarizar á los alumnos en este estudio, presentaremos en las figuras 11, 12, 13 y 14 las proyecciones de varias de ellas, habiendo aplicado en los casos posibles la regla dada (**17**) para encontrar las trazas.

Dichas figuras contienen:

Las rectas (1, 2), (3, 4), (5, 6) y (7, 8) de la figura 11, oblicuas á los planos de proyección, sin cortar á la XY, y teniendo cada una la parte comprendida entre sus trazas en un cuadrante distinto.

Las (9, 10) y (11, 12) (fig. 12) en el mismo caso que las anteriores, pero cortando á la XY.

Las (13, 14) y (15, 16), situadas en los planos bisectores.

Las (17, 18), (19, 20) y (21, 22) de la figura 13, paralelas al plano H, encima, en ó debajo de este plano. Estas rectas podrían estar también detrás del plano V, es decir, en el segundo ó tercer cuadrante.

Las (23, 24), (25, 26) y (27, 28) de la figura 14, parale- Lám. 2.ª
las al V, y delante, en ó detrás de él. Estas rectas podrían estar también debajo del H, ó sea en el tercero ó cuarto cuadrante.

La (29, 30) paralela á ambos planos; podría estar en cualquiera de los cuatro cuadrantes, y también en los planos bisectores, siendo fácil en estos casos comprender cómo estarían las proyecciones.

La (31, 32), confundida con la XY, viéndose en esta figura el medio de indicar esta circunstancia.

Las (33, 34), (35, 36) y (37,38), perpendiculares al *H*, y delante, en ó detrás del *V*; en estos casos, la proyección horizontal se reduce á un punto, y la vertical es perpendicular á la *X Y*.

Las (39, 40), (41, 42) y (43, 44), perpendiculares al *V*, y encima, en ó debajo del *H*; en este caso, la proyección vertical se reduce á un punto y la horizontal es perpendicular á la *X Y*.

Las (45, 46) y (47, 48), situadas en planos perpendiculares á la *X Y*, y cortando ó no á ésta. La recta (45, 46) puede estar situada en el plano bisector, como se representa en la (49, 50), y la (47, 48) ser perpendicular al mismo plano, como en la (51, 52), viéndose desde luego la particularidad que presentan las proyecciones en estos dos últimos casos.

20. Cuando las rectas ocupen las posiciones de que son ejemplos las (45, 46), (47, 48), (49, 50) y (51, 52), es infructuosa la regla dada (**17**) para hallar sus trazas, y hay que recurrir á otros medios que veremos más adelante. Además, en estos mismos casos las proyecciones solas no bastan para determinar la recta en el espacio, pues confundidos los dos planos proyectantes de cada una de ellas en uno solo, perpendicular á la *X Y*, todas las rectas situadas en él podrán corresponder á las proyecciones dadas. Para determinar la recta en estos casos es preciso conocer además las proyecciones de dos de sus puntos.

21. Hemos dicho (**12**) que dos rectas cualesquiera, una en cada plano de proyección, podrían ser proyecciones de una cierta recta, con tal que se corten los planos proyectantes que determinan, excepto en algún caso que vamos á ver ahora. Las rectas *a b* y *a′ b′* (fig. 15) determinan dos planos proyectantes que se cortan, y sin embargo, no pueden ser proyecciones de ninguna recta, pues el plano proyectante correspondiente á *a′ b′* será perpendicular al *H*, por pasar por *a′ b′* que también lo es. El correspondiente á *a b* reunirá igual circunstancia y la intersección de dos planos perpendiculares á un tercero es una recta perpendicular al mismo, luego la recta del espacio lo ha de ser al plano *H*, y en este caso la proyección de este nombre ha de reducirse á un punto (19) y no puede ser la recta *a b* como se había establecido.

22. Para el problema inverso de dadas las proyecciones determinar la recta, como sabemos (12), no hay más que suponer al plano *V* en su verdadera posición y trazar los planos proyectantes, ó bien buscar la posición de dos de sus puntos (con preferencia las trazas) y unir éstos por una recta. Así es muy sencillo pasar de las figuras anteriores á las perspectivas correspondientes, en lo que debe ejercitarse el alumno. Cuando sólo se desee formarse idea de la inclinación de una recta, basta comparar las posiciones de dos puntos de ella, viendo cuál es el que está más cerca ó más lejos de cada plano de proyección. Por lo demás, basta tener un poco de práctica para comprender la posición de una recta á la sola inspección de sus proyecciones, sobre todo en los casos de paralelismo y perpendicularidad á los planos de proyección.

23.

Posiciones relativas de dos rectas.—~~63~~. Dos rectas en el espacio pueden cortarse, ser paralelas ó cruzarse.

En el primer caso, las proyecciones del punto común á las dos rectas deben cumplir la regla general de corresponderse por una perpendicular á la *X Y*, pero además por pertenecer dicho punto á cada una de aquéllas, sus proyecciones deberán estar á la vez sobre las de las rectas; luego el punto de intersección de las proyecciones horizontales deberá estar sobre una perpendicular á la *X Y* con el de intersección de las verticales. Cuando esto no suceda, las dos rectas no pueden cortarse, y así es fácil reconocer desde luego si dos rectas se cortan ó no, viendo si sus proyecciones les señalan un punto común.

Cuando son paralelas, los planos proyectantes del mismo nombre lo serán también, y las intersecciones de éstos con cada uno de los de proyección, es decir, las proyecciones también lo serán. Se comprende desde luego que la recíproca es cierta, y podemos decir que siempre que dos rectas tengan las proyecciones del mismo nombre paralelas, ellas lo serán asimismo.

De los dos casos examinados se deduce en seguida que las proyecciones de dos rectas que se cruzan no presentan ninguna particularidad.

La figura 16 presenta ejemplos de dos rectas que se cortan, dos rectas paralelas y dos rectas cualesquiera.

24. Hay un caso en que á pesar de tener dos rectas sus proyecciones paralelas en uno y otro plano de proyección, no puede afirmarse que ellas lo sean. Esto ocurre cuando se trata de rectas situadas en planos perpendiculares á la *XY*, pues cualesquiera que sean estas rectas, sus proyecciones siempre son perpendiculares á aquella línea, y por lo tanto, paralelas.

En este caso, cuando las dos rectas son paralelas, se verifica otra circunstancia, cual es que sus cuatro proyecciones son proporcionales. Sean *AB* y *CD* (fig. 17) dos rectas en las condiciones dichas: tracemos sus proyecciones y de la semejanza de los triángulos *ABE* y *CDH* resulta:

$$BE : AE :: DH : CH \quad \text{ó} \quad ab : a'b' :: cd : c'd'.$$

Para que la recíproca sea cierta, hay que añadir la condición de que dos puntos, elegidos uno en cada recta, que á la vez estén más ó menos distantes de uno de los planos de proyección, disten también más ó menos del otro.

Por ejemplo, las proyecciones $(ab\text{-}a'b')$ y $(cd\text{-}c'd')$ que son proporcionales, corresponden á las paralelas *AB* y *CD*, mas las $(ab\text{-}a'b')$, $(gh\text{-}g'h')$, proporcionales también, pertenecen á las *AB* y *GH*, que no reunen aquella cualidad; pero se observa en las primeras que los puntos *A* y *C*, que son los más elevados, están también más cerca del plano *V*, y los *B* y *D*, que están más lejos de éste, distan á la vez menos del *H*, mientras que en las segundas dos de sus puntos *A* y *G*, que están más altos, uno está más cerca y otro más lejos del plano *V*, respecto á los *B* y *H*.

25. Problema.—Por un punto (*m-m'*) trazar una recta paralela á otra dada (*a b-a' b'*) (fig. 18).

La proyección horizontal de la recta pedida ha de ser paralela á *ab* (23) y pasar por el punto *m*; queda, pues, determinada, y será la *c d*; se obtiene del mismo modo la proyección vertical, llevando por *m'* una paralela *c' d'* á *a' b'*.

Del plano.—26. Así como para hallar las proyecciones de una recta hemos buscado el lugar geométrico de las proyecciones de todos sus puntos, parecía natural seguir el mismo procedimiento para representar un plano por medio de sus proyecciones y trazar las de cada uno de los puntos que lo constituyen. Mas, fácil es comprender que suponiendo indefinido el plano considerado y los de proyección, las proyecciones de aquél cubrirían por completo á éstos, y darían lugar á gran confusión en el dibujo, requiriendo un detenido estudio para darse cuenta de la posición del plano ó planos que se hubieren representado.

Cierto es que bastaría fijar sólo la posición de tres de sus puntos que no estuviesen en línea recta, pues con ellos quedaría determinado el plano, y como éste lo está también por un punto y una recta, por dos rectas que se corten, ó sean paralelas, se podrían substituir aquellos datos por los dichos; mas como quiera que es raro el problema en que no intervengan rectas que se corten, paralelas ó más de dos puntos, sin que para nada deban considerarse los planos que determinan, habría lugar también á confusión, y nada indicaría en qué casos aquellos elementos tenían por objeto representar realmente un plano, ó eran sólo consecuencia de las operaciones de los problemas.

27. A fin de evitar tales inconvenientes, se ha creído más ventajoso representar un plano por sus trazas, es decir, por las intersecciones de dicho plano con los de proyección, recibiendo cada una de dichas trazas el nombre del plano de proyección que la ha causado. Además, por este procedimiento salta mejor á la vista la posición del plano. El PQP' de la figura 19, quedará perfectamente determinado, según esto, por medio de sus trazas QP y QP' en la forma de la figura 20 después de hecho el abatimiento del plano vertical, sin que este abatimiento modifique en nada la posición del plano, pues ésta, como acabamos de ver, depende de la de sus trazas, y la de éstas de los ángulos que cada una de ellas forma con la XY, los cuales no varían al hacer aquel giro, y basta, cuando se den las trazas de un plano, suponer al V en su debida posición, para venir en conocimiento de la del dado.

Desde luego observaremos que todos los puntos comunes al plano dado y al horizontal de proyección están sobre la traza PQ, así como los comunes á aquél y al V sobre la $P'Q$; luego si hay algún punto común á los tres planos, tendrá que pertenecer á la vez á ambas trazas y no podrá ser otro que el de intersección de ellas. Pero punto común á los tres planos no puede serlo más que el de intersección del plano dado con la XY; luego las dos trazas de un plano han de encontrarse en un mismo punto de dicha línea, que será además el de encuentro de ella con el plano, y cuando esto no suceda en los límites del dibujo, hay que cerciorarse de que prolongadas lo efectuarían. Según esto, puede considerarse al plano determinado por dos rectas que se cortan, si bien son dos rectas en condiciones especiales.

28. De aquí se deduce que dos rectas cualesquiera, una en cada plano de proyección, pueden representar á un plano, con tal que dichas rectas corten ó puedan cortar, prolongadas suficientemente, á la XY en un mismo punto, pues aparte de esta condición no existe entre las trazas de un mismo plano relación ninguna. Para comprender bien esta independencia, consideremos el plano $R\,Q$ de la figura 21, y supongamos que gire alrededor de su traza horizontal, con lo que la vertical tendrá á cada momento una posición distinta, tal como la $Q\,1$, $Q\,2$, $Q\,3$, es decir, que podrá formar con la $X\,Y$ todos los ángulos desde 0° á 180°. Y es evidente también que si nos fijamos en cada una de estas posiciones, podremos hacer girar al plano alrededor de ella, y entonces será la horizontal la que tomará posiciones diferentes, variando entre iguales límites los ángulos que formará con aquella línea. Así, pues, cualquiera que sean los ángulos que formen con la $X\,Y$ dos rectas distintas, situadas una en cada plano de proyección, siempre podrán ser trazas de un mismo plano si cumplen con la condición que hemos dicho antes.

29. Para señalar las trazas de un plano, se emplea generalmente una misma letra para ambas, mayúsculas y acentuando la de la traza vertical, como se ve en la figura 20, y se lee $P\,Q\,P'$; también pueden emplearse números en iguales condiciones. De esta manera, á la simple vista de un dibujo, puede distinguirse qué rectas representan planos y cuáles no.

Generalmente sólo se considera de los planos la parte comprendida en el primer cuadrante, y por esta razón se limitan sus trazas en el punto de encuentro con la $X\,Y$; pero de ningún modo debe creerse que allí terminan dichas trazas, pues siendo indefinido el plano que determinan, deben serlo también sus intersecciones con los de proyección que reunen igual circunstancia. Así es que la traza horizontal ha de considerarse prolongada más allá de la línea $X\,Y$, como una recta situada en el plano H que atraviesa al V en el punto de encuentro con aquella línea, y la traza V debe imaginarse prolongada también más allá de este punto, por ser una recta situada en el plano V que atraviesa al H en el mismo punto. Estas prolongaciones deben trazarse realmente siempre que las condiciones del problema exijan operar con ellas, y desde luego deberán serlo de puntos, por ser líneas ocultas.

Posiciones de un plano relativamente á los de proyección.—30. Para las posiciones especiales que pueda tener un plano respecto á los de proyección, especiales serán también las posiciones de sus trazas, con las cuales es conveniente familiarizarse desde un principio, por más que no deben ofrecer dificultad estos casos particulares, entendido lo que antecede, y bastará reseñarlos ligeramente para fijar la atención del alumno.

31. Las figuras 22 y 23 contienen las perspectivas y trazas de distintas posiciones de planos, todos oblicuos con relación á los de proyección. Las trazas son las *P-P'*, *R-R'* y *T-T'*; las últimas en prolongación la una de la otra, lo cual sucederá al abatir el plano *V*, siempre que los ángulos que forman las dos trazas con la *X Y* sean suplementarios (28).

32. El plano *P Q P'* (figs. 24), cuyas trazas son *P* y *P'*, es perpendicular al horizontal, y como el vertical también lo es, su intersección, ó sea la traza *P'*, debe serlo asimismo, y por consiguiente á la *X Y*, que es una recta trazada por su pie en dicho plano.

33. En la figura 25 el plano es perpendicular al *V*; sus trazas *P-P'*, siendo la primera susceptible de análogas observaciones que la *P'* del caso anterior.

34. El plano *P Q P'* de las figuras 26 es perpendicular á los dos de proyección, y, por lo tanto, á la *X Y*; sus trazas reunen las circunstancias de la *P'* y *P* de los dos casos anteriores; este plano se llama *plano de perfil.*

Lám. 3.ª **35.** En las figuras 27 el plano es paralelo al *H*; su traza del mismo nombre está en el infinito, y la vertical es paralela á la línea $X\,Y$, por ser intersecciones de dos planos paralelos por un tercero. Si el plano estuviese debajo del horizontal, su traza estaría debajo de la $X\,Y$, y si aquél fuese el mismo H, su traza sería la $X\,Y$.

36. El $P\,Q$ (figs. 28) es paralelo al V, siendo su única traza la horizontal, sobre las que pueden hacerse consideraciones semejantes á la del caso anterior.

37. El representado en las figuras 29 es paralelo á la $X\,Y$, y sus trazas $P\,Q$ y $P'\,Q'$ también lo serán, pues si un plano es paralelo á una recta, la intersección de aquél con cualquier otro que pase por la recta también lo será. En este caso el plano puede estar situado en cualquiera de los cuatro cuadrantes, y fácil es hallar la situación de las trazas en las cuatro posiciones, como es igualmente sencillo el determinarlas en el caso más particular todavía de ser el plano perpendicular á uno de los bisectores, pues entonces las trazas equidistarán de la línea $X\,Y$.

38. (Figs. 30.) Representa un plano que pasa por la línea de tierra; sus trazas quedan confundidas con ella y determinado por la línea $X\,Y$ y un punto del plano fuera de ésta.

39. En todos los casos enumerados bastan las trazas para fijar y formarse idea á la simple inspección de ellas de la posición del plano, pues dos rectas que se cortan ó son paralelas bastan para determinarlo; aun en el caso de la figura 26 y último de la 23, en que las dos trazas aparecen como una sola recta, en el espacio son realmente dos rectas distintas, así como en los de las figuras 27 y 28 debe tenerse en cuenta que las trazas que faltan son paralelas á las existentes, pero situadas en el infinito; mas no así en el último caso, en que sólo se conoce una recta del plano, dejando á

éste indeterminado. Esta indeterminación cesa si se conocen además las proyecciones de un punto (a-a') del plano; en el caso particular de estar el punto equidistante de los planos de proyección (8) el plano será bisector.

Puntos y rectas situados en un plano.—40. Hemos dicho (11) que si un punto está situado sobre una recta, las proyecciones de ésta han de contener á las de aquél, siendo, por lo tanto, fácil distinguir si un punto dado está colocado ó no sobre una recta, y pudiendo contener un plano á una recta ó á un punto, vamos á ver cómo se puede averiguar, á la simple inspección de las proyecciones, si se verifica dicha circunstancia.

41. Es evidente que toda recta situada en un plano debe cortar á los de proyección sin salirse de dicho plano; por consiguiente, lo verificará en el punto en que encuentre á las trazas de aquél, es decir, que las trazas de una recta contenida en un plano han de estar sobre las del mismo nombre de éste, cuyas trazas, son, por lo tanto, el lugar geométrico de las de todas las rectas contenidas en él.

42. Así, pues, podemos muy fácilmente conocer si una recta está trazada ó no en un plano dado, con sólo hallar sus trazas y ver si están sobre las del plano, pudiendo también por esta consideración trazar una recta que esté contenida en un plano, con sólo escoger un punto de cada traza de aquél, y unirlos por medio de una recta. Según esto, la figura 31 nos demuestra que la recta ($a\,b$-$a'\,b'$) está situada en el plano $P\,Q\,P'$, mientras que la ($c\,d$-$c'\,d'$) no cumple con esta condición. Si en el plano $P\,Q\,P'$ queremos trazar una recta cualquiera, bastará tomar los puntos (h-h') y (v-v'), uno en cada traza, y uniéndolos entre sí resultará la recta ($a\,b$-$a'\,b'$) situada en el plano.

43. Para averiguar si un punto está en un plano, bastará que por él se pueda trazar una recta en dicho plano. Por lo tanto, si tomamos un punto en una de las trazas, y lo unimos con el dado, es preciso que la otra traza de esta recta esté sobre la del mismo nombre del plano, para que éste contenga al punto dado. El punto $(m\text{-}m')$, por ejemplo, unido con el $(h\text{-}h')$, tomado sobre la traza horizontal P, da la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$, cuya traza vertical se halla sobre la P', luego el punto $(m\text{-}m')$ está en el plano. No así el $(n\text{-}n')$, que unido con el $(c\ c')$ da la recta $(c\,d\text{-}c'd')$, cuya traza horizontal está fuera de P.

44. En general, bastando que una recta tenga dos puntos en un plano para estar contenida en él, siempre que de un plano se conozcan dos rectas cualesquiera, será suficiente que una tercera corte á estas dos para estar situada en dicho plano, y tomando un punto en cada una de aquellas rectas, y uniéndolos entre sí, habremos trazado una recta en el plano que determinan aquéllas.

De manera que cuando un plano esté determinado por dos rectas que se corten ó que sean paralelas, tendremos que acudir á este medio para averiguar si una recta está situada en dicho plano, ó para trazar una que cumpla con esta condición. Si el plano estuviere determinado por tres puntos, ó una recta y un punto, se reduciría al caso anterior, uniendo aquellos puntos dos á dos por medio de dos rectas, ó bien, en la segunda hipótesis, uniendo el punto dado con cualquiera de los de la recta, ó trazando por aquél una paralela á ésta.

En la figura 32 se ve gráficamente lo manifestado en el párrafo anterior.

En adelante, y únicamente en algunos casos muy especiales, tomaremos como datos de un plano tres puntos ó una recta y un punto, por quedar reducidos al caso de venir dado por dos rectas.

45. Entre las infinitas rectas que por un punto se pue-

den trazar en un plano, hay algunas que relativamente á las trazas de aquél, ofrecen sumo interés. Supongamos el plano PQ en perspectiva (fig. 33), y una recta AB trazada en él por el punto A, que gire alrededor de éste tomando varias posiciones AC, AD, AE, AF, etc.; entre ellas habrá las siguientes: una AC, que será perpendicular á la traza horizontal P; una AE, que le será paralela; una AF, perpendicular á la traza P', y otra AD, paralela á la misma traza, siendo además ésta y la AE paralelas á los planos V y H respectivamente. Estas rectas reciben por su orden los nombres de *líneas de máxima pendiente (L. M. P.)*, con relación al plano *H; paralela al plano H; L. M. P.*, con relación al plano *V*, y *paralela al plano V*. Los nombres de paralelas á los planos *H* y *V* provienen de la propiedad de que gozan dichas líneas, y en cuanto á los de máxima pendiente se comprende también que siendo las rectas AC y AF las más cortas distancias sobre el plano desde el punto A á cada uno de los de proyección, deben marcar en el dado la máxima pendiente con relación á aquéllos.

46. En cuanto á las proyecciones, siendo la recta AE paralela á la traza P, las proyecciones de aquélla lo han de ser á las de ésta (23), luego ae será paralela á P, y $a'e'$ á XY. Por la misma razón, las proyecciones de AD serán ad, paralela á XY, y $a'd'$ paralela á P'. Vemos, pues, que toda recta de un plano paralela al V ó al H, tendrá la proyección del mismo nombre paralela á la traza del plano sobre el mencionado de proyección, y la otra paralela á la XY. A las rectas paralelas á la traza horizontal se les llama también *horizontales del plano*.

Para las proyecciones de la recta AC observaremos que ésta es perpendicular á la PC, trazada sobre el plano H; la Aa también lo es al mismo plano, luego aC, que une los pies de ambas perpendiculares, lo es á PC en virtud de un teorema conocido de Geometría. Vemos, pues, *que la proyección de una recta sobre un plano, con relación al cual es* *aquélla de máxima pendiente, es perpendicular á la traza sobre el mismo del plano que contiene á la recta.* En cuanto á la otra proyección no ofrece particularidad ninguna.

Por el mismo razonamiento veríamos que la proyección vertical de la recta AF es perpendicular á la traza $P'F$.

En la figura 34 se han hallado las proyecciones de las rectas que acabamos de considerar, las cuales, como veremos, son de una aplicación muy frecuente en la Geometría Descriptiva, especialmente las paralelas á los planos de proyección.

47. Una línea de un plano que sea de máxima pendiente con relación á uno cualquiera de los planos de proyección, nos da á conocer desde luego la dirección de una de las trazas del plano que la contiene, y podremos, por lo tanto, trazar de este plano una recta paralela al de proyección, respecto del cual es de máxima pendiente la línea dada (46), con lo que se conocerán dos rectas situadas en el propuesto, dejándolo determinado. Así, si la recta $(ab\text{-}a'b')$ (fig. 35), es línea de máxima pendiente de un plano con relación al H, bastará tomar sobre ella un punto $(a\text{-}a')$ y trazar por él una paralela $(ad\text{-}a'd')$ al plano H, siendo sus proyecciones, ad perpendicular á ab y $a'd'$ paralela á XY. En su consecuencia, un plano puede estar determinado de posición por una $L.\ M.\ P.$ respecto á cualquiera de los de proyección.

Trazas de un plano.—**48.** Siendo necesario muchas veces hallar las trazas de un plano, vamos á tratar de determinarlas, cualquiera que sea el medio que se emplee para representarle.

Sabido que las trazas de un plano han de contener las de todas las rectas trazadas en él, fácil es comprender el método general que debe seguirse para resolver la cuestión que nos ocupa. Así, si el plano viniese dado por las dos rectas $(ab\text{-}a'b')$, $(cd\text{-}c'd')$ ó $(de\text{-}d'e')$ y $(fg\text{-}f'g')$ (fig. 36) buscaremos las trazas $(h\text{-}h')$, $(v\text{-}v')$ ó $(k\text{-}k')$, $(u\text{-}u')$ de dichas rectas, las cuales, unidas las del mismo nombre, darán las P y P' del plano. Las trazas del plano han de cortar siempre á la XY en un mismo punto, y cuando esto se verifique dentro de los límites del dibujo, puede dispensar de encontrar una de las cuatro trazas de las dos rectas.

La dificultad que pudiera presentarse es que una ó las dos rectas dadas no tuviesen sus trazas en los límites del papel, en cuyo caso habría que substituir dichas rectas por una ó dos nuevas (44). La figura 39 pone de manifiesto esta observación. También podríamos buscar un punto y la dirección de cada traza del plano, valiéndose de alguna de las proyecciones de rectas paralelas al plano H ó V (46), como indican las figuras 40 y 41.

Si el dato fuese una línea de máxima pendiente, hágase lo dicho (47) y estaremos en el caso de dos rectas que se cortan.

Podría ocurrir también que alguna de las proyecciones de las rectas dadas fuese paralela á la XY, en cuyo caso la recta correspondiente sería paralela al plano de proyección que contiene á la otra que no es paralela á aquella línea, y claro está que entonces la traza del plano sobre este último tendrá que ser paralela á dicha proyección (46), bastando, por consiguiente, un solo punto para determinar aquella traza. En las figuras 37 y 38 se presentan ejemplos de este caso.

Cuando el plano esté determinado por tres puntos ó una recta y un punto, se reducirá al caso de dos rectas que se cortan ó paralelas, según la observación (44). Como caso particular, puede ocurrir que el plano venga dado por una de sus trazas y un punto. Para encontrar la otra, podrán buscarse dos puntos ó un punto y la dirección de ella por
Lám. 4.ª medio de rectas situadas en el plano (figs. 42 y 43), y si la traza dada corta á la XY en los límites del papel, bastará un punto ó la dirección de la otra.

Comprendidos los métodos anteriores, no habrá dificultad en resolver los casos particulares de las figuras 44 y 45.

P. 35

Posiciones relativas de dos planos.—49. Dos planos pueden ser paralelos ó cortarse; en este último caso, hacerlo oblicua ó perpendicularmente.

50. Cuando dos planos son paralelos, sus intersecciones con un tercero son rectas paralelas; de consiguiente, las trazas horizontales de dos planos paralelos han de serlo también, y lo mismo sucede con las verticales. Esta es, pues, la condición precisa para que dos planos sean paralelos, y en general es suficiente, pues estarán determinados por dos sistemas de rectas paralelas entre sí, y según la Geometría del espacio, debe tener lugar el paralelismo de los planos.

Hay, sin embargo, un caso en que no por ser paralelas las trazas del mismo nombre de dos planos lo son también los planos, y es cuando éstos sean paralelos á la línea XY. Las trazas serán entonces paralelas á dicha línea, y por lo tanto entre sí, pero los planos pueden dejar de serlo. La figura 46 ofrece un ejemplo de planos paralelos, y la 47 es el caso de excepción.

Si los planos no estuviesen definidos por sus trazas, ninguna circunstancia indicaría su paralelismo. No obstante, podemos cerciorarnos de si los planos dados cumplen esta condición, viendo si es posible trazar en cada uno de ellos dos rectas que se corten, de manera que las de un plano sean una á una paralelas á las del otro.

Intersección de planos.—51. Cuando dos planos se cortan, pueden hacerlo oblicua ó perpendicularmente, y como los elementos que hemos indicado para determinar un plano no pueden señalar en proyecciones en cuál de las dos circunstancias lo verifican, sólo diremos que para que un plano sea perpendicular á otro es preciso que en uno de ellos se pueda trazar una recta perpendicular al segundo, por el medio que diremos más adelante.

52. En ambos casos, lo primero que ocurre es hallar la

intersección de los dos planos, y siendo este problema de suma importancia lo trataremos detenidamente. Desde luego esta intersección es una recta, y, por consiguiente, bastará encontrar dos de sus puntos ó un punto y su dirección. Si tuviéramos dos rectas tales que estando cada una de éstas en uno de los planos se cortasen entre sí, indudablemente este punto de intersección pertenecería á la recta que buscamos. Mas para que dos rectas puedan cortarse, es preciso ante todo que se hallen en un mismo plano, de modo que para encontrar un punto de la intersección de dos planos hay que buscar dos rectas situadas en un mismo plano, y pertenecientes una á cada uno de los dados.

Si los planos son conocidos por sus trazas, es evidente que las del mismo nombre reunen las circunstancias dichas, pues estarán sobre uno de los de proyección y son rectas de los dados. Así, pues, para encontrar la mutua intersección de los dos planos PQP' y RSR' (fig. 48), buscaremos el punto (v-v') en que se cortan las trazas verticales de aquéllos, el (h-h') de intersección de las trazas horizontales, y uniéndolos entre sí tendremos la recta (hv-$h'v'$), que es la línea buscada. Es evidente, además, que los puntos (h-h') y (v-v') son las trazas de esta recta.

La figura 49 presenta nuevos ejemplos de lo mismo, y la 50 casos particulares en que, aplicando el procedimiento indicado, sólo se obtiene un punto de la intersección. Pero conocido éste, bastará hallar las proyecciones de una recta paralela á la que se busca para tener su dirección, la que obtendremos cortando uno de los planos por un tercero paralelo al otro.

44-53. Pero cuando no se conocen las trazas de los planos, ó no se encuentran en los límites del dibujo las del mismo nombre, el método anterior no puede aplicarse y hay que buscar otras rectas que, llenando análogas condiciones que las trazas, puedan substituirlas. Fácil es obtenerlas cortando los planos dados por un tercero auxiliar y las intersecciones de éste con aquéllos darán en su punto de encuentro uno de los de la intersección buscada.

Cualquier plano sirve como auxiliar, pero entre todos los que pueden emplearse habrá unos que den sus intersecciones con los dados con más facilidad que otros, y lo natural es escoger aquéllos con preferencia á éstos. Además, aun tomando los planos auxiliares determinados por sus trazas, puede resultar que éstas y las de los dados estén en análogas circunstancias que las de estos últimos entre sí, y entonces, en vez de eludir la dificultad, la habríamos repetido.

Por estos motivos se comprende la importancia que tiene el hacer una acertada elección de planos auxiliares, por lo que nos detendremos en algunas consideraciones sobre este particular.

16-54. Teóricamente, una recta queda determinada conociendo dos de sus puntos, y un punto por dos rectas que se corten; mas si aquéllos están muy próximos puede haber error en la dirección de la recta, y si dos rectas se encuentran bajo un ángulo múy agudo, dejan en cierto modo indeterminado su punto de intersección.

Para evitar estos inconvenientes y los anteriormente expuestos, es preciso escoger los planos auxiliares que cumplan, en cuanto sea posible, las condiciones siguientes:

1.ª Que sus trazas corten á las de los dados en los límites del dibujo.

2.ª Que lo hagan bajo ángulos, por lo menos de 45°.

3.ª Que las intersecciones del plano auxiliar con cada uno de los dados se corten también en los límites del papel y bajo ángulos no inferiores á 45°.

4.ª Que los dos puntos que determinan la intersección buscada no resulten muy próximos.

Los planos auxiliares más ventajosos bajo dichos conceptos son los paralelos á cualquiera de los de proyección, á la línea de tierra, ó pasando por ésta: así, pues, debemos ante todo ocuparnos de buscar la intersección de uno de estos planos con otro cualquiera.

46 55. La figura 51 contiene los datos de un plano cualquiera $P\,Q\,P'$ y del R' paralelo al H. Desde luego la intersección será una recta paralela al H, y como ha de estar contenida en el $P\,Q\,P'$ será una de sus horizontales, con lo que conocemos su dirección, que ha de ser paralela á la traza $P\,Q$; por otra parte, el punto $(v\text{-}v')$ es de la intersección, y, en su consecuencia, ésta tendrá por proyecciones las $(v\,m\text{-}v'm')$.

Las figuras 52 presentan otros ejemplos de este caso, así como la 53, la intersección de un plano cualquiera con otro R, paralelo al vertical.

47 Si el segundo plano fuese paralelo á la línea $X\,Y$, podría aplicarse el método general, como hemos visto en la figura 49.

Lám. 5.ª 48 Sea (fig. 54) el plano $P\,Q\,P'$ y el que pasa por la $X\,Y$, y por el punto $(a\text{-}a')$; desde luego la intersección del primer plano con aquella línea, ó sea Q, será un punto de la intersección de los dos planos; para encontrar otro, trazaremos por $(a\text{-}a')$ un plano auxiliar paralelo á uno de los de proyección, al V por ejemplo: las intersecciones de éste con los dados serán $(a\,b\text{-}a'\,b')$ y $(h\,c\text{-}h'\,c')$, las cuales dan el punto $(n\,n')$; luego la intersección pedida será $(Q\,n\text{-}Q\,n')$. Observaremos que siempre que se tome como plano auxiliar uno que pase por la línea $X\,Y$, intervendrán en el problema dos planos auxiliares.

49 56. Para lo que ~~nos pueda~~ convenir luego, vamos á estudiar las circunstancias que presenta la intersección de los dos planos $P\,Q\,P'$ y $(R\text{-}R', a\text{-}a')$ de la figura 55. El que pasa por la línea de tierra formará con los dos planos de proyección ángulos siempre complementarios y variando cada uno de ellos desde 0º á 90º ó viceversa. Con sólo suponer que la altura del punto $(a\text{-}a')$ sobre el H varía desde 0º

al infinito, tendremos dichos ángulos. Si el plano formase un ángulo 0° con el horizontal, ó lo que es lo mismo, si estuviese confundido con él, la intersección de los dos planos sería ($m\,p$-$m'\,p'$); cuando el plano pase por los puntos sucesivos (a-a'), (a-b')..... las intersecciones serán ($m\,q$-$m'\,q'$), ($m\,s$-$m'\,s'$)..... (55) y cuando llegue á confundirse con el V, su intersección con el otro será ($m\,t$-$m'\,t'$). Analizando ahora las proyecciones de estas diversas rectas, vemos que á medida que el plano que pasa por $X\,Y$ forma ángulos mayores con el H, la proyección del mismo nombre de la recta intersección forma ángulos cada vez menores con la $X\,Y$, y por el contrario la otra proyección los forma cada vez mayores, siendo los límites de los primeros el que forma la traza $P\,Q$ con la $X\,Y$ y cero, y los de los segundos cero y los que forma $P'\,Q$ con la misma línea.

Dicho lo que antecede, apliquémoslo á distintos casos de intersección de planos.

§ 57. La figura 56 presenta el caso de dos planos en que las trazas horizontales no se encuentran en los límites del dibujo; desde luego conocemos el punto (v-v') de la intersección, y para obtener otro emplearemos el plano auxiliar Z', que nos dará el punto ($m\,m'$). En su lugar podrá buscarse la dirección de la recta por medio del plano $T\,V\,T'$, paralelo á uno de los dados, y aun por una simple construcción geométrica se resolvería este problema trazando por el punto v una recta que fuese á concurrir al punto de encuentro de las rectas $P\,Q$ y $R\,S$ que no pueden prolongarse.

Si las trazas que no se encuentran fuesen paralelas (fig. 57), queda desde luego resuelto el problema sin más construcción, pues pasando los dos planos por las rectas $P'\,Q$ y $R'\,S$, que son paralelas, la intersección de aquéllos será paralela á éstas, y conociendo el punto (h-h') las proyecciones de la intersección serán ($h\,m$-$h'\,m'$).

En el caso en que ni las trazas horizontales ni las verticales de los planos se corten en los límites del dibujo (figura 58), habrá que buscar dos puntos de la intersección repitiendo las construcciones de la figura 56; así por medio de los planos auxiliares Z y X' se han obtenido los puntos $(m\text{-}m')$ y $(n\text{-}n')$ de la intersección $(m\,n\text{-}m'\,n')$, ó bien puede buscarse un solo punto $(m\text{-}m')$ por ejemplo, y la dirección, valiéndose del plano $T\,V\,T'$ paralelo al $P\,Q\,P'$, ó también, después de obtenido aquél, trazar por m y m' dos rectas que vayan á concurrir á los puntos de encuentro desconocidos de $P\,Q$, $R\,S$ y $P'\,Q$, $R'\,S$.

Si dos trazas del mismo nombre son paralelas, bastará encontrar un solo punto, pues conocemos ya la dirección (57) (figura 59). Si las otras dos son también paralelas, hemos dicho (50) que los planos también lo son, y, por lo tanto, la intersección estará en el infinito; hay, sin embargo, que exceptuar el caso en que sean paralelas á la $X\,Y$, pues entonces los planos pueden cortarse, y bastará hallar un solo punto de la intersección, sabiendo que ésta ha de ser paralela á la $X\,Y$; para obtener el punto cortaremos los planos dados (fig. 60) por otro $R\,S\,R'$, hallaremos la intersección con cada uno de los dados y el punto $(a\text{-}a')$ en que éstas se cortan será el pedido.

Como caso particular puede presentarse aquel en que las trazas de los dos planos formen ángulos casi rectos con la $X\,Y$ (fig. 61); si aplicáramos el procedimiento empleado en la figura 58, como las intersecciones de los planos dados con los auxiliares paralelos á los de proyección, son rectas paralelas á las trazas de los planos, podría ocurrir que se encontraran muy lejos, y siempre lo harían bajo ángulos muy agudos. Por lo tanto, no son convenientes dichos planos auxiliares. En este caso podremos emplear planos que pasen por la línea $X\,Y$ y un punto cualquiera. Supongamos el que pasa por dicha línea y el punto $(a\text{-}a')$: sus intersecciones con los dados son (55) $(Q\,n\text{-}Q\,n')$ y $(S\,r\text{-}S\,r')$, las cuales darán en su encuentro un punto de la intersección. Pero recordando (56) que las proyecciones de aquellas intersecciones auxiliares forman ángulos variables con la $X\,Y$, dependientes del que forma el plano auxiliar elegido con el H, y que dichos ángulos están comprendidos entre ciertos límites, deduciremos que para que las proyecciones Qn y Sr se encuentren, han de formar cada una de ellas ángulos pequeños con la XY, y, por lo tanto, el plano auxiliar un ángulo grande con el H, lo que equivale á decir que el punto $(a\text{-}a')$ debe estar cerca del plano V y muy elevado con relación al H, como está tomado. Pero en estas circunstancias, las proyecciones Qn' y Sr' formarán ángulos grandes con la XY, y lo probable es que no se encuentren, ó de hacerlo será bajo ángulos poco convenientes, viendo por consiguiente que debe hacerse una operación especial para cada proyección y buscar dos puntos de la proyección horizontal y dos de la vertical.

Así para obtener un punto de la proyección vertical debe hacerse uso de un plano que pase por la XY y un punto $(b\text{-}b')$ que esté cerca del plano H y separado del V, obteniendo las intersecciones auxiliares St' y Qu'. De la misma manera se puede obtener otro punto de cada proyección, ó buscar la dirección de la recta, ó valerse de la construcción gráfica indicada en los casos anteriores.

53. Cuando uno ó los dos planos propuestos no vienen dados por sus trazas, es preciso buscar dos puntos de su intersección por medio de planos auxiliares paralelos á los de proyección, ó un solo punto cuando por circunstancias especiales se conozca la dirección que haya de tener aquella recta. Como para encontrar la intersección del plano auxiliar con otro determinado por dos rectas, por ejemplo, hay que buscar la intersección de cada una de éstas con aquél, acaso pudiera creerse que no sabiendo aún encontrar la intersección de una recta con un plano, no estamos en condiciones de resolver este problema; pero la posición especial de los planos auxiliares elude esta dificultad. Supongamos que se trata de hallar la intersección del plano Z' con el dado por las rectas $(ab\text{-}a'b')$ y $(cd\text{-}c'd')$ (fig. 62).

Sobre la traza Z' está proyectado verticalmente todo lo que contiene aquel plano, y, por lo tanto, los puntos de encuentro con $(ab\text{-}a'b')$ y $(cd\text{-}c'd')$, cuyos puntos han de tener á la vez su proyección vertical sobre $a'b'$ y $c'd'$; luego m' y n' son estas proyecciones, y las horizontales serán las m y n.

Sentado esto, presentaremos varios problemas de intersección de planos cuando no están dados por sus trazas, indicando las operaciones efectuadas y que el alumno está ya en condiciones de comprender.

(Fig. 63.) Un plano dado por sus trazas y el otro por dos rectas $(ab\text{-}a'b')$ y $(cd\text{-}c'd')$ que se cortan.

(Figs. 64 y 65.) Un plano PQP' y el otro por su línea de máxima pendiente $(ab\text{-}a'b')$ con relación al plano H.

(Fig. 66.) Un plano por dos rectas que se cortan $(ab\text{-}a'b')$, $(cd\text{-}c'd')$, y el otro por dos rectas $(eg\text{-}e'g')$ y $(fh\text{-}f'h')$ paralelas.

(Figs. 67 y 68.) Los planos dados por una traza y un punto; $[P, (a\text{-}a')]$ y $[Q, (b\text{-}b')]$. Se ha empleado un solo plano auxiliar que pasa por la recta $(ab\text{-}a'b')$.

Lám. 6.ª (Fig. 69.) Un plano por la traza P y el punto $(a\text{-}a')$, el otro por su línea de máxima pendiente $(bc\text{-}b'c')$ con relación al plano H.

(Fig. 70.) Los dos planos por sus líneas de máxima pendiente $(ab\text{-}a'b')$ y $(cd\text{-}c'd')$ con relación al plano H.

52 **Posiciones relativas de una recta y un plano.**—59. Una recta respecto á un plano, puede serle paralela, oblicua ó perpendicular.

Se dice que una recta es paralela á un plano cuando en éste puede trazarse una paralela á aquélla, de modo que un plano puede tener una infinidad de rectas paralelas sin que éstas lo sean entre sí, y cuyas proyecciones tendrán distintas inclinaciones respecto á las trazas del plano, de lo cual se deduce que el paralelismo de una recta y un plano no implica condición ni dependencia alguna entre las proyecciones de aquélla y las trazas de éste.

53 60. Desde luego sucede lo mismo cuando una recta es oblicua á un plano, mas no así si la recta y el plano son perpendiculares, pues en este caso las proyecciones de la recta son perpendiculares á las trazas de aquél. Bastará observar que los planos proyectantes de la recta son perpendiculares al plano dado, además de serlo á los respectivos de proyección; luego las intersecciones de éstos con el dado, ó sean sus trazas, lo serán también al proyectante correspondiente, y en consecuencia á las proyecciones de la recta que determinan, por ser rectas trazadas en dichos planos por el pie de cada una de dichas trazas. Sabemos también que la recíproca sólo es cierta cuando la perpendicularidad se verifique á la vez entre las proyecciones de una recta y trazas de un plano sobre dos que no sean paralelos, como sucede en los empleados en la Geometría Descriptiva; de consiguiente podemos sentar *que si las proyecciones de una recta son perpendiculares á las trazas de un plano, aquélla y éste lo son también.*

Sin embargo, hay que hacer notar una sola excepción de esta regla, y es cuando el plano sea paralelo á la línea de tierra, sus trazas también serán paralelas á dicha línea, y entonces todas las rectas situadas en un plano perpendicular á la XY tendrán sus proyecciones perpendiculares á las trazas de aquél, y sin embargo sólo puede haber entre aquellas rectas una que le sea verdaderamente perpendicular.

54 61. Cuando una recta no es paralela á un plano atraviesa á éste, y el punto en que lo verifica es el que vamos á determinar.

El método general que se emplea para resolver este problema consiste en hacer pasar por la recta un plano auxiliar cualquiera, hallar la intersección de éste con el dado y el punto en que esta última recta encuentra á la propuesta será el que se pide. Así, si PQP' (fig. 71) es el plano y $(ab\text{-}a'b')$ la recta, haremos pasar por ésta un plano cualquiera RSR' (41), hallaremos su intersección $(cd\text{-}c'd')$ con el PQP' (52), y el punto (m-m') de encuentro de esta recta con la dada es el punto buscado.

Pero en lugar de escoger para plano auxiliar un plano cualquiera, se pueden tomar planos en condiciones especiales que simplifiquen las operaciones; perpendiculares, por ejemplo, á los de proyección, que tengan una de sus trazas paralela á una de las del dado, ó que sean paralelos á la recta XY. Las figuras 72, 73 y 74 son ejemplos de lo que acabamos de decir.

Desde luego se observa que los planos auxiliares más ventajosos son los proyectantes de la recta dada, pues simplifican notablemente las operaciones.

Cuando el plano no viene dado por sus trazas (figs. 75 y 76), basta seguir el trazado de éstas para comprender las operaciones efectuadas, advirtiendo que en el segundo caso en que el plano está definido por una *L. M. P.* con relación al *H*, se ha trazado por el punto (m-m') una horizontal del plano, con lo que ha quedado reducido al caso de la figura 75.

62. Cuando los planos que intervienen en un problema de aplicación proceden únicamente de los medios empleados para resolver aquél, sólo se consideran de ellos los elementos que los determinan, pues de lo contrario cubrirían gran parte de las líneas ó cuerpos objetos de la cuestión, confundiendo notablemente el dibujo y perjudicando á la claridad de los resultados, aparte de que en estos casos dichos planos sólo existen en la mente del que resuelve el problema; mas cuando aquéllos existan realmente y son datos ó resultados del asunto de que se trata, en cuyo caso son limitados, como caras de poliedros, etc., no se puede prescindir de ellos y es preciso y conveniente distinguir lo que queda oculto ó no por dichos planos.

63. En su consecuencia, cuando una recta corta á un plano, parte de ella quedará oculta por éste y hay que tra-

zarla marcando esta circunstancia. Desde luego la traza de la recta sobre el plano será el punto de separación de la parte vista y la oculta, y ya sabemos el modo de determinar dicho punto; para distinguir qué parte de la recta es vista y cuál no, sentaremos primeramente los convenios establecidos sobre este particular. Hemos dicho (3) que el observador se considera siempre colocado en el primer cuadrante, pero además se admite que está á una distancia infinita delante del plano *V*, cuando se considere la proyección de este nombre, y á una altura infinita también sobre el *H*, cuando se observen las proyecciones sobre este plano.

De este convenio resulta que los rayos visuales que del punto de vista van á parar á los puntos de la proyección horizontal, son perpendiculares al plano de este nombre, así como lo son al *V* los rayos visuales dirigidos á la proyección sobre este plano, y, por lo tanto, estos rayos visuales se confunden con las líneas proyectantes de los puntos del espacio. Así, pues, si la proyección horizontal puede considerarse producida por los rayos visuales que del punto de vista van á pasar por los del cuerpo ó conjunto de líneas que se consideran en el espacio, aquella proyección no será más que una vista del cuerpo desde una distancia infinita sobre él, y por análogas consideraciones la proyección vertical puede suponerse que es una vista del cuerpo desde una distancia infinita delante de él.

Considerada la Geometría Descriptiva bajo este nuevo concepto, se comprende con qué facilidad y exactitud las proyecciones pueden indicarnos la verdadera forma, dimensiones y posiciones de los cuerpos en el espacio, y cómo es posible también, dados éstos, representarlos fielmente en un papel, pues así como nos formamos idea de un pueblo, edificio, máquina ú objeto cualquiera por medio de un dibujo de los llamados vulgarmente *vistas*, mucho más exacto y fácil debe ser formarse tal idea cuando se tienen dos vistas, desde puntos distintos y conocidos, relacionadas de tal manera que de ellas puede deducir, todo el que conozca los recursos de esta ciencia, las distancias verdaderas, las posiciones relativas y las demás circunstancias referentes á formas, posiciones y dimensiones.

Se comprende también que puede haber puntos, rectas y porciones de planos que en proyección horizontal sean vistos, y ocultos en la vertical, puesto que para cada proyección se considera distinto punto de vista.

64. Volviendo á la cuestión que nos ocupaba y sentado lo dicho, deduciremos que si un rayo visual pasa por distintos puntos, sólo uno será visto por el observador, el que esté más cerca de él, ó sea el más separado del plano de proyección que se considere. De modo que si en la figura 77, en la que el punto (m-m') es el punto de encuentro de la recta (ab-$a'b'$) con el plano $P\,Q\,P'$, queremos saber qué parte de la proyección $a\ b$ hay que considerar como vista ú oculta, no hay más que tomar un punto cualquiera de ella, tal como el n, trazar por él la línea proyectante (n-n'), buscar la intersección de esta recta con el plano (61) y con la línea (ab-$a'b'$), cuyos puntos son respectivamente (n-s') y (n-n'), y comparar después sus alturas sobre el plano horizontal; de esta comparación resulta, que estando el (n-n') más elevado que el (n-s'), el punto de la recta está más cerca del observador, y, por lo tanto, que la parte $a\,m$ de la recta es vista en proyección horizontal, mientras que la $b\ m$ es oculta. Para la proyección vertical seguiremos el mismo procedimiento, aplicándolo, por ejemplo, al punto (t-t'), cuya proyectante (t-t') corta al plano y á la recta en los puntos (t'-r) y (t'-t), y estando el r más cerca del observador, se deduce que el punto del plano oculta al de la recta; luego la parte $m'\ b'$ es oculta, y la $m'\ a'$ vista.

Este método es general y puede aplicarse siempre, como veremos en nuevos ejemplos más adelante; debiendo recurrir á él en los casos que haya duda; pero generalmente es innecesario, pues observando con alguna detención el problema se vendrá en conocimiento de las posiciones relativas de las líneas, planos ó cuerpos, y podrá deducirse inmediatamente qué partes son vistas y cuáles no. En el ejemplo presente se comprende en seguida que la parte de recta ($a\ m$-$a'\ m'$) queda por encima del plano, y en proyección horizontal debe ser vista, mientras que la ($m\ b$-$m'\ b'$) debe ser oculta, pues esta porción de recta queda por debajo del plano $P\ Q\ P'$ y comprendida entre éste y los de proyección. Análogo razonamiento se haría para la proyección vertical.

58

Problemas.—65. Para fijar más las ideas adquiridas hasta el presente y acostumbrarse á combinar debidamente las propiedades que se han expuesto, vamos á resolver una serie de problemas que son aplicaciones de aquéllas, y con los cuales el alumno adquirirá práctica en la resolución gráfica de las cuestiones de Geometría en el espacio.

59 66.—PROBLEMA 1.° *Hallar las trazas de una recta situada en un plano perpendicular á la línea de tierra y cruzándose con ésta.*

Si por la recta hacemos pasar un plano cualquiera y hallamos sus trazas, en ellas estarán las de la recta propuesta (41), y como han de estar además en sus proyecciones, serán forzosamente los puntos de intersección de las trazas del plano auxiliar con las proyecciones del mismo nombre de la recta.

Siendo, pues, ($a\ b$-$a'\ b'$) (fig. 78) la recta propuesta, si por un punto (a-a') de ella trazamos una recta, aquélla y ésta determinarán un plano cuyas trazas resolverán el problema; pero para mayor sencillez podemos trazar dicha recta paralela á la $X\ Y$, y será la ($a\ m$-$a'\ m'$), con lo cual el plano determinado será también paralelo á $X\ Y$, y por consiguiente sus trazas, de las cuales bastará encontrar un punto de cada una. Las trazas de la ($a\ b$-$a'\ b'$) son el objeto del problema, las de la ($a\ m$-$a'\ m'$) no existen, pero podemos tomar una nueva recta situada en el plano de aquellas dos que pase por el otro punto ($b\ b'$), tal como la ($b\ m$-$b'\ m'$) (44), cuyas trazas ($h\ h'$), (v-v') fijarán las $P\ P'$ del plano en cuestión, y éstas nos darán en (k-k') y (u-u') las de la recta propuesta.

60.—Problema 2.º *Dada una de las proyecciones de una recta situada en un plano, hallar la otra proyección.*

Si por la proyección dada se imagina el plano proyectante correspondiente, y hallamos su intersección con el que contiene la recta, es claro que las proyecciones de aquella intersección serán una la misma dada y otra la que se pide. Estas consideraciones nos indican que el problema es determinado y el modo de resolverle.

A continuación reseñaremos algunos casos en los cuales el plano está dado por distintos elementos.

En la figura 79 el plano está dado por dos rectas que se cortan, y se ha buscado su intersección con el plano proyectante de $m\ n$, proyección dada, y se ha obtenido la $m'\ n'$.

Si la proyección dada fuese paralela á una de las rectas que determinan el plano, parece que no se podrían aplicar las operaciones indicadas; pero si observamos que la recta cuya segunda proyección se pide ha de ser paralela á la ($a\ b$-$a'\ b'$) (fig. 80) puesto que son las intersecciones del plano dado con los proyectantes de $a\ b$ y $m\ n$, supuestas paralelas, deduciremos que debe serlo también á $a'\ b'$ la segunda proyección buscada (**23**), que será, por lo tanto, $m'\ n'$.

Si $m\ n$ (fig. 81) es paralela á $X\ Y$, se encontrará $m'\ n'$ por el mismo método y ($m\ n$-$m'\ n'$) será una de las rectas del plano dado paralela al V.

En la figura 82 el plano está dado por una de sus líneas de máxima pendiente con relación al H, y basta seguir las operaciones indicadas para deducir cómo se ha resuelto el problema.

Lám. 7.ª En las figuras 83, 84, 85 y 86 se presentan varios casos en que el plano está dado por sus trazas; en todos ellos se ha encontrado la intersección de dicho plano con el proyectante que pasa por la proyección dada. En la 84, la recta

Capítulo II.

Cambio de planos, giros y abatimientos.

CAMBIO DE PLANOS DE PROYECCIÓN

P. 1ª 72

72. Aun cuando al resolver un problema de Geometría Descriptiva deben haberse escogido los planos de proyección de la manera más apropiada á sus datos é índole, puede, sin embargo, suceder que en el transcurso de su resolución se presenten circunstancias en las que no sea ya ventajosa aquella elección ó se llegue á un resultado final en que las incógnitas no estén expresadas con toda la claridad apetecible.

Por otra parte, hay casos en que la posición de las rectas y planos, respecto á los de proyección, complica notablemente ciertas cuestiones que hubieran podido resolverse con suma sencillez en otras circunstancias de aquellos elementos. Así, por ejemplo, al hallar las trazas de una recta perpendicular en dirección á la línea de tierra, ó la intersección de dos planos cuyas trazas son casi perpendiculares á la misma, nos han demostrado cuánto más complicadas eran las operaciones necesarias en aquellos casos particulares que las empleadas en otros para resolver los mismos problemas.

Estas dos circunstancias, unidas á la imposibilidad de representar debidamente á veces un edificio, una máquina algo complicada, etc., etc., nos indican la necesidad de cambiar uno ó los dos planos de proyección elegidos en un principio por otro ú otros que eludan dichos inconvenientes, pudiendo hacerse estos cambios cuantas veces se consideren necesarios y en cualquier estado en que se encuentre el dibujo.

El objeto, pues, de la teoría de los cambios de planos de proyección es, dadas las proyecciones de un sistema cualquiera de elementos geométricos sobre dos planos, hallar las nuevas proyecciones sobre otros distintos.

73 **80.** Admitido que los planos de proyección han de ser siempre perpendiculares entre sí (3), es evidente que cuando se quiera cambiar un solo plano, el nuevo ha de ser perpendicular al del antiguo sistema que se conserve, y cuando se cambien los dos, éstos deben serlo entre sí. Pero además de esta condición, puede convenir también, según las exigencias del problema que se resuelva, que los nuevos planos que vayan á emplearse tengan posiciones determinadas respecto á rectas ó planos conocidos, lo cual será asequible, mientras no se oponga á la condición anterior, por medios distintos y dependientes de las circunstancias que se quieran reunir.

Lo dicho indica desde luego que los casos de cambios de planos que pueden presentarse son tan variados como las condiciones diversas que pueden imponerse. Sólo nos ocuparemos de los que con más frecuencia ocurren, reuniendo con ellos, sin embargo, un caudal de conocimientos que puede bastar para resolver otros distintos.

74 **81.** Suponiendo ante todo que se tenga dado un plano *H* para plano horizontal de proyección, cualquier otro *V*, *V'*, *V''*..... que le sea perpendicular puede formar con él un sistema de planos de proyección. Si tenemos también las proyecciones de un punto *M* sobre los planos *H* y *V*, veremos pronto que es muy fácil obtener sus proyecciones sobre

otro plano V' que forme sistema con el mismo H, y esta facilidad con que se pasa del plano V al V', no teniendo los dos más dependencia que la de ser perpendiculares al H que no ha cambiado, nos induce á proceder siempre por cambios sucesivos de un plano, pudiendo cambiar primero el plano V, como hemos dicho, por el V', después conservar éste y cambiar el H por otro H' que sea perpendicular á aquél, con el cual constituirá un sistema completamente distinto del primitivo, y á partir de éste y por una marcha igual, hacer nuevos cambios y llegar, por último, á los planos de proyección más á propósito para el asunto de que se trate, en los cuales se harán las operaciones que el caso requiera, y nada impedirá luego traer los resultados obtenidos al sistema primitivo, deshaciendo, por decirlo así, en un orden inverso, los cambios que se hubiesen efectuado.

75 **82.** Por consiguiente, antes de entrar en materia y refiriéndonos al cambio de un solo plano, podemos hacer aquellas consideraciones generales á todos los cambios é independientes por lo tanto de las condiciones particulares con que se elijan los nuevos planos.

Sabido es que la línea de tierra es la que fija y determina los planos de proyección; desde el momento en que se trace en un papel dicha línea, queda establecida la posición de aquéllos, señalados los distintos cuadrantes é indicado, por la colocación de las letras $X\ Y$, el sentido en que se ha efectuado el giro del plano V (**14**). Pero cuando se cambie uno de los planos del sistema, la línea de tierra debe variar y se ha de trazar la nueva en el papel ó plano del dibujo según la dirección en que se haya elegido. Para indicarla emplearemos las mismas letras $X\ Y$, pero á fin de que no se confunda con la primitiva se le añade un acento á cada letra, en esta forma $X'\ Y'$, haciendo otro tanto para cada línea de tierra que se establezca, de modo que el número de acentos nos indicará el orden según el cual se han establecido estas líneas. Además, dichas letras deben escribirse de manera que al poner el papel en disposición de leerlas aparezca que el abatimiento del plano *V* se ha hecho de delante hacia atrás (6).

83. Estando los dos planos del sistema primitivo abatidos de modo que el papel en que se dibuja representa los dos planos, sobre este mismo papel deben irse abatiendo los nuevos de proyección que se elijan; así si cambiamos primero de plano vertical, el nuevo debe abatirse sobre el horizontal antiguo ó sea sobre el plano del dibujo; si ahora cambiamos el plano *H*, el nuevo debe abatirse sobre el vertical con que forma sistema, que lo había sido ya sobre el del dibujo, y de esta manera todos los planos vienen á confundirse con el único que realmente existe, que es aquel en que se opera.

Respecto al sentido en que se haga el abatimiento de cualquiera de estos planos, siendo indiferente efectuarlo hacia un lado ó á otro de la línea de tierra establecida, lo haremos, sin embargo, de modo que las proyecciones que se obtengan sobre el nuevo plano resulten en la parte del dibujo en que haya menos confusión de líneas, y entonces se escriben las letras *X Y* del modo indicado anteriormente (82).

84. Las nuevas proyecciones y trazas de puntos, rectas y planos se marcarán con las mismas letras que tenían en el sistema primitivo, añadiendo un acento más por cada nueva proyección de los mismos que se encuentren. Así, si de un punto *A*, cuyas proyecciones sobre el primer sistema son (a-a'), se encuentran otras nuevas, se señalarán por a'', a''', etcétera....., según el orden en que se vayan estableciendo, y la misma regla se seguirá para las de las rectas y trazas de los planos.

Pudiera objetarse quizá á este medio de notación que habiendo admitido en un principio que las proyecciones horizontales se indicaban con letras sin acento y las verticales con un acento, debiera procurarse por lo menos que al aumentarlos resultasen tenerlos en número par las nuevas proyecciones horizontales y en impar las verticales; pero aparte de que todas estas reglas obedecen tan sólo á convenios que en nada se obligan unos á otros, debe considerarse que si nunca ha habido razón para llamar plano horizontal y plano vertical á los dos que constituyen el sistema elegido en un principio, menos la hay todavía cuando se adoptan otros planos que tienen inclinaciones cualesquiera sobre cada uno de aquéllos, y, por lo tanto, desaparece por completo toda idea de horizontalidad y verticalidad, no existiendo ya proyección horizontal ni vertical, sino proyecciones sobre dos planos perpendiculares entre sí.

85. Además de todo lo expuesto, siempre que se tenga á la vista un dibujo en que intervenga algún cambio de plano, es muy fácil averiguar á cuál de los antiguos substituye el nuevo que se haya tomado, pues será siempre al de nombre contrario á las proyecciones que se conserven. Así, si después de un cambio, las proyecciones de un punto A resultasen ser las $(a'\text{-}a'')$, el plano que se ha cambiado es el horizontal, pues aquél resulta referido á un sistema de planos de proyección, constituído por el vertical del antiguo y otro nuevo.

86. Útil será, indudablemente, resumir todo lo dicho sobre un dibujo. Sea éste la figura 98, la que analizada detenidamente nos da á conocer todas las operaciones en ella efectuadas. Desde luego se ven tres líneas de tierra distintas XY, $X'\,Y'$, $X''\,Y''$, indicándonos los acentos el orden en que se han trazado. La perteneciente al sistema de planos de proyección primitivo es, por lo tanto, la XY, y en este sistema se tienen las proyecciones y trazas de un punto $(a\text{-}a')$, de una recta $(b\,c\text{-}b'\,c')$ y de un plano $P\,Q\,P'$. La segunda línea de tierra es la $X'\,Y'$, indicando la colocación de las letras el sentido en que se ha hecho el abatimiento. Prescindiendo por ahora de la manera cómo deben obte- Lám. 8.ª

nerse sobre el nuevo plano las proyecciones del punto y recta dados, así como la traza del plano, admitiremos que dichas proyecciones y traza son respectivamente a'', $b''c''$ y P'', por lo cual estos elementos vendrán representados por $(a\text{-}a'')$, $(bc\text{-}b''c'')$ y $PQ'P''$, y como las proyecciones horizontales antiguas se conservan, todas las operaciones ejecutadas hasta ahora obedecen á un cambio de plano vertical, siendo las nuevas proyecciones de este nombre las a'', $b''c''$ y P''. El abatimiento del nuevo plano se ha hecho sobre el horizontal antiguo, es decir, sobre el papel del dibujo; pero téngase presente que si las letras $X'Y'$ se hubieran puesto como están las X Y, hubieran indicado un abatimiento en sentido inverso al efectuado, y las nuevas proyecciones hubieran quedado con las a y bc á un mismo lado de la recta $X'Y'$.

La última línea de tierra es la $X''Y''$; las proyecciones y traza sobre el nuevo plano del punto, recta y plano dados serán las a''', $b'''c'''$ y P''', y como éstas substituyen á las a, bc y P, indican que se ha hecho un cambio de plano horizontal, mejor dicho, que el plano H antiguo se ha substituído por otro perpendicular al que se conserva, y cuya traza sobre él es $X''Y''$.

Sentados estos precedentes, pasemos al modo de realizar los cambios de planos, ó sea hallar las proyecciones de puntos y rectas y las trazas de planos sobre los que se vayan eligiendo sucesivamente.

Cambio de plano con relación á un punto.—87. Sean $(a\text{-}a')$ (fig. 99) las proyecciones de un punto dado sobre el sistema de planos de proyección cuya línea de tierra es XY. Si queremos cambiar el plano H de este sistema por otro que también sea perpendicular al V, trazaremos la nueva línea $X'Y'$ y observaremos que, no cambiando el plano V ni la posición del punto en el espacio, su proyección de este nombre debe ser la misma y la nueva deberá encontrarse sobre la perpendicular $a'a''$ á la línea de tierra $X'Y'$ (7).

Para averiguar en qué punto de esta perpendicular está la proyección buscada, recordaremos que la distancia que hay de la proyección horizontal de un punto á la línea XY mide la que existe entre el punto y el plano V, y como no han cambiado las posiciones de uno y otro, esta distancia es la misma que antes. Tómese, pues, $a''\,o'$ igual á $o\,a$ y $(a'\text{-}a'')$ serán las proyecciones del punto referido al nuevo sistema de planos. Si quisiéramos cambiar por completo el sistema de planos tendríamos que substituir el V antiguo por otro perpendicular al que produjo sobre él la línea de tierra $X'\,Y'$, siendo, por ejemplo, la nueva la $X''\,Y''$. Aplicando el mismo razonamiento que antes trazaríamos la perpendicular $a''\,o''$ y tomaríamos $o''\,a'''$ igual á $o'\,a'$, resultando para proyecciones del punto las $(a''\text{-}a''')$.

Cambio de planos con relación á una recta.—88. Supongamos (fig. 100) que $(a\,b\text{-}a'\,b')$ es la recta dada y que se quiere cambiar el plano V, siendo $X'\,Y'$ la nueva línea de tierra. Es evidente que buscando las nuevas proyecciones de dos puntos de la recta y uniéndolas entre sí tendremos la proyección sobre el nuevo plano. Los puntos elegidos son los $(a\text{-}a')$ y $(b\text{-}b')$, cuyas proyecciones sobre el plano que va á substituir al V son a'' y b'' (87), y $(a''\,b''\text{-}a\,b)$ son las proyecciones actuales de la recta. No habiendo variado la recta ni el plano H primitivo, la traza de este nombre de aquélla debe ser la misma, y, por lo tanto, $a''\,b''$ debe cortar á $X'\,Y'$ en un punto h'' tal que $h\,h''$ sea perpendicular á ella, sirviéndonos esto de comprobación, si bien es conveniente elegir el punto $(h\text{-}h')$ con preferencia á otro cualquiera de la recta.

El punto $(v\text{-}v')$, traza vertical antigua, dejará de serlo en el nuevo plano, y si queremos obtener la nueva buscaremos el punto $(k\text{-}k'')$ como sabemos (17).

Si queremos cambiar ahora el plano que se había conservado, trazaremos la nueva línea de tierra $X''\,Y''$, y aplicando las mismas reglas encontraremos la nueva proyección $a'''\,b'''$ de la recta dada.

Al cambiar uno de los planos de proyección con relación á una recta pueden presentarse algunos casos especiales que conviene analizar por la simplificación que muchas veces reportan.

Supongamos que se trata de cambiar el plano vertical, y que la recta dada sea la $(a\,v\text{-}a'\,v')$ (fig. 101), que por ser paralela al plano que no cambia, es claro que tendrá la nueva proyección paralela á $X'\,Y'$; $(a\,v\text{-}a''\,v'')$ son; pues, las nuevas proyecciones de la recta dada. Si ésta fuese la $(b\,u\text{-}b'\,u')$, cuya proyección horizontal es paralela á $X'\,Y'$, indicará que el nuevo plano de proyección que se ha tomado es paralelo á ella. La nueva proyección $b''\,u''$ se obtiene aplicando el método explicado.

Si la nueva línea de tierra fuese la proyección horizontal $c\,d$ de una recta $(c\,d\text{-}c'\,d')$, el plano proyectante vertical de ésta sería el nuevo plano de proyección, y se obtendría la $c''\,d''$ de la manera dicha; pero esta proyección sería la misma recta del espacio que quedaría abatida con el plano que la contiene sobre el horizontal antiguo.

Si la recta dada fuese la $(e\,f\text{-}e'\,f')$, y la nueva línea de tierra resultase perpendicular á la proyección horizontal de dicha recta, desde luego conoceríamos la nueva, que debe ser prolongación de aquélla. Pero en este caso la recta queda indeterminada y es preciso señalar las proyecciones de dos de sus puntos, lo cual puede obtenerse fácilmente con sólo tomar las distancias $o'\,e''$ y $o'\,f''$, respectivamente iguales á $o\,e'$ y $o\,f'$.

Cambio de planos con relación á un plano.—89. $P\,Q\,P'$ (figura 102), es el plano dado, y se quiere cambiar el vertical, siendo $X'\,Y'$ la nueva línea de tierra. La traza P subsistirá la misma, por no cambiar ni el plano horizontal ni el dado, luego si buscamos sobre el nuevo la proyección de un punto cualquiera de aquél, podrá considerársele determinado por su traza horizontal y un punto, y podemos hallar de la manera dicha (48) la otra traza.

El punto $(a\text{-}a')$ es el elegido, su nueva proyección es a'', y el plano queda determinado por P y $(a\text{-}a'')$; como Q' es un punto de la nueva traza bastará hallar otro de la manera que indica la figura, y P'' será la traza buscada.

Siempre que sea posible deberá elegirse con preferencia á otro el punto $(b\text{-}b')$, que por hallarse á la vez en los tres planos es de la traza vertical P' y de la P'' que se pide; tomando por consiguiente la distancia $b\,b''$ igual á $b\,b'$, b'' será un punto de la nueva traza.

Para cambiar el otro plano, siendo $X''\,Y''$ la línea de tierra, seguiremos la misma marcha.

En el caso de no cortar á la nueva línea $X'\,Y'$ la traza que se conserva, hay que buscar dos puntos ó un punto y la dirección.

84 **Cambio de uno de los planos de proyección, satisfaciendo el nuevo á ciertas condiciones con respecto á una recta ó á un plano.—90.** En este caso, la primera operación consiste en trazar la nueva línea de tierra; una vez establecida ésta, fácil es determinar por los métodos explicados anteriormente las nuevas proyecciones ó trazas de cualquier punto, recta ó plano que se dé en el sistema primitivo.

85 **91.** Supongamos dada la recta $(ab\text{-}a'b')$ (fig. 103) y que se quiera cambiar el plano V de modo que el nuevo sea paralelo á aquélla; es claro que la línea $X'\,Y'$ ha de serlo á la $a\,b$, es decir, á la proyección de nombre contrario al del plano que se cambia, por ser ambas líneas las intersecciones del plano que se conserva con dos planos paralelos, el que proyecta la recta según $a\,b$ y el nuevo de proyección. Así, pues, $X'\,Y'$ es la línea de tierra buscada, pudiéndose hacer en seguida el cambio con relación á los elementos geométricos que se hayan dado; la nueva proyección de la recta $(ab\text{-}a'b')$ será $a''\,b''$ (88).

86 **92.** Si el nuevo plano ha de ser perpendicular á una

recta conocida, como también ha de serlo al plano que no se cambia, sólo se podrá satisfacer á estas condiciones cuando la recta dada sea paralela á dicho plano y entonces la nueva línea de tierra será perpendicular á la proyección de la recta que tenga nombre contrario al plano que se trata de substituir; pero fuera de este caso no puede efectuarse el cambio directamente y sí sólo por medio de un cambio preliminar que ponga los datos en aquellas condiciones.

Así, siendo (ab-$a'b'$) (fig. 104) la recta dada, y suponiendo que vamos á cambiar el plano H, haremos de modo que aquélla sea paralela al otro plano de proyección, cambiándole por otro que reuna dicha cualidad de paralelismo, para lo que trazaremos la $X' Y'$ del modo indicado (91). La nueva proyección de la recta (ab-$a'b'$) será la $a'' b''$, y ahora tendremos que cambiar el plano horizontal de modo que el nuevo sea perpendicular á la recta dada y lo será también al último plano vertical. La $X'' Y''$, perpendicular á $a'' b''$, es la línea de tierra buscada, y haciendo los cambios indicados con relación á los puntos, rectas ó planos que se hayan dado, obtendremos sus proyecciones sobre un plano de las circunstancias pedidas; en cuanto á la recta que ha fijado la posición del plano tendrá por proyección sobre él el punto $a''' b'''$.

Más sencillez se obtendría tomando el plano proyectante de la recta AB como plano vertical paralelo á la misma, como se ha efectuado en la figura 105.

Lám. 8.ª

93. Si es un plano el que ha de fijar la posición del nuevo y éste ha de ser perpendicular á aquél, como ha de serlo al mismo tiempo al de proyección que se conserva, lo será á la intersección de ambos, ó sea á la traza del plano dado sobre dicho de proyección. La figura 106 pone de manifiesto esta sencilla construcción: PQP' es el plano dado y se trata de cambiar el horizontal por otro que sea perpendicular á aquél. La $X' Y'$, que lo es á la P' resuelve el problema. El plano dado tiene por nueva traza la P'' (89).

88 **94.** Cuando el plano tuviera que ser paralelo á uno conocido, sólo se podría llegar á este resultado por un solo cambio, siendo dicho plano perpendicular al del antiguo sistema que se conserva, pues sólo así podría ser perpendicular á éste el nuevo de proyección paralelo al dado. Pero si el plano dado no ocupa esta posición, deberá hacerse un cambio preliminar del modo explicado en el caso anterior y conseguiremos aquella circunstancia, bastando entonces que la nueva línea de tierra sea paralela á la traza obtenida del plano propuesto, pues dos planos perpendiculares á un tercero sólo son paralelos cuando lo son sus trazas sobre él.

Así, en la figura 107, en que PQP' es el plano dado, para cambiar el plano horizontal por otro que le sea paralelo se ha cambiado primero el V por otro que le sea perpendicular y tenga por línea de tierra la $X'Y'$; P'' es la nueva traza y ahora se puede cambiar el plano horizontal por otro paralelo al PQP'' trazando la $X''Y''$ paralela á P'', y aquel plano vendrá representado en el nuevo sistema por su única traza P''. Se hubiera podido tomar esta misma traza por última línea de tierra, lo cual indicaría que el nuevo plano horizontal en vez de ser paralelo al dado, se confundía con él.

89 **Substituir uno de los planos de proyección por otro cualquiera.—95.** Se quiere, por ejemplo, substituir el plano V por el dado PQP' (fig. 108). Este caso queda reducido al anterior considerando que el nuevo V no sólo ha de ser paralelo al dado, sino confundirse con él; por lo tanto, cambiaremos primero el horizontal por otro $X'Y'$ perpendicular á aquél, buscaremos la nueva traza P'' de este último y éste será la línea de tierra definitiva (94).

P. 4ª

P. 6ª **Cambio de un sistema de planos de proyección por otro cualquiera.—96.** Para que el nuevo sistema sea definido debe conocerse uno de los planos y su intersección con el otro que le es perpendicular, ó sea la línea de tierra. Supon-

P. 4ª / P. 5ª P. 4ª / P. 5ª

gamos (fig. 109) que PQP' deba ser el plano vertical del nuevo sistema y la recta $(ab\text{-}a'b')$ contenida en él la línea de tierra. Cambiaremos primero el plano H por otro perpendicular á aquél, siendo $X'Y'$ la línea que fija este cambio. La nueva traza del plano será P'' y la nueva proyección de la recta la $a''b''$, que debe resultar sobre aquella traza, por ser proyección sobre un plano perpendicular al que la contiene. Ahora ya podemos tomar el plano PQP'' como plano vertical; P'' será la nueva línea de tierra $X''Y''$, resultando para la recta la otra proyección $a'''b'''$, y como el plano horizontal del sistema que se busca ha de ser perpendicular al dado, que actualmente es vertical de proyección de un sistema, y además ha de pasar por la recta que contiene dicho plano, es claro que en $a'''b'''$ se tendrá la última y definitiva línea de tierra $X'''Y'''$.

GIROS

97. La aplicación en la práctica de los procedimientos explicados para los cambios de planos de proyección, tiene por objeto principal representar los puntos, rectas y planos, refiriéndolos á un sistema respecto al cual tengan aquellos elementos una posición más ventajosa para obtener el resultado apetecido en el problema que se trata de resolver; mas también puede conseguirse análogo objeto por un procedimiento inverso, cual es suponer invariable el sistema de planos de proyección adoptado en un principio y cambiar en el espacio la situación de los elementos que estaban representados en dichos planos, de modo que resulte esta representación como se desea.

Ningún inconveniente habrá en este cambio si podemos hacerlo de una manera tal que los puntos, rectas y planos que intervengan en el problema guarden siempre su posición relativa, pues entonces no se habrán modificado las propiedades geométricas inherentes á aquel conjunto de elementos, debiendo, por lo tanto, ser el mismo el resultado del problema.

Pocos son los casos en que estos resultados deban conservar, respecto á los planos primitivos, la posición relativa que les asignen los datos y condiciones del problema; pero, si ocurriera así, fácil nos sería, después de resuelto aquél, y por un movimiento inverso al efectuado, volver el todo á la posición primitiva de los datos.

98. El movimiento de que hablamos debe ser sencillo y fácil de seguir, y se obtienen estas circunstancias haciendo girar todos los puntos del sistema geométrico, objeto del problema, alrededor de determinadas rectas, que permanezcan fijas durante el movimiento, y que reciben el nombre de *ejes*. Los procedimientos por medio de los cuales se verifican estos movimientos de rotación constituyen la teoría de los giros.

99. Cuando muchos puntos están íntimamente ligados entre sí y hacemos girar á uno de ellos alrededor de una recta, de manera que este punto se conserve siempre á igual distancia del eje, y los demás puntos sigan el movimiento, conservándose también las mismas sus distancias al eje y las que medien entre sí, es claro que en cada momento del giro será siempre la misma la posición relativa de todos los elementos, la cantidad angular que gire uno girarán todos los demás, y cuando el primero vuelva á su primitiva posición, los segundos ocuparán también las suyas.

En cuanto á las circunstancias que concurren en el giro de un punto alrededor de una recta, sabido es que aquél describe una circunferencia de círculo, cuyo plano es perpendicular al eje, su centro es la intersección de este plano con este eje, y el radio la distancia que hay del centro al punto considerado. Comprendido cómo se efectúa éste movimiento, veamos el modo de representarlo, conseguido lo cual, fácil nos será fijar en un momento cualquiera la posición del punto.

100. Siendo la proyección de una línea sobre un plano la intersección de éste con la superficie cilíndrica proyectante de aquélla (10), cuando la línea sea una circunferencia y su plano paralelo al de proyección, el cilindro será circular recto, y su intersección con dicho plano será otra circunferencia, mientras que la proyección de la línea dada sobre el otro plano del sistema será una recta paralela á la línea de tierra.

Una circunferencia y una recta paralela á la línea XY, son, pues, las proyecciones del movimiento descripto por un punto al girar alrededor de un eje perpendicular á uno de los planos de proyección, y en ninguna otra posición del eje pueden obtenerse proyecciones más fáciles de trazar; pues si fuese oblicua á cualquiera de los planos de proyección serían aquellas elipses ó una elipse y una recta, y aun en el caso más favorable de ser el eje paralelo á la línea de tierra, en el que las proyecciones de un círculo perpendicular á él serían una sola recta perpendicular á XY, no obtendríamos ventajas, pues sabido es cuán estéril resulta una proyección en esta forma.

Vemos, pues, que un eje perpendicular á uno de los planos de proyección es el más ventajoso, por cuanto se representa muy fácilmente el movimiento de rotación de un punto alrededor de él, facilidad que origina igual circunstancia y sencillez en los procedimientos que vamos á explicar.

Por lo demás, indiferente es que el eje sea perpendicular á uno ú otro de los planos de proyección.

101. Para la notación en los giros y con el objeto de que las letras nos indiquen que se ha efectuado una operación de este género, siempre que se obtengan las proyecciones de un punto después de sufrir un movimiento de rotación le señalaremos con las mismas letras que tenían antes,

pero con un índice cuyo número nos indique el de giros que ha sufrido el mismo punto. Así, $(a_1\text{-}a'_1)$ indica que el punto $(a\text{-}a')$ ha girado alrededor de un eje; $(b_3\text{-}b'_3)$ que el punto $(b\text{-}b')$ ha sufrido tres movimientos de rotación; $(a''_1\, b''_1\text{-}a'''_1\, b'''_1)$ que la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$ que tuvo primero dos cambios de planos de proyección ha tenido después una rotación.

96 **Giro de un punto alrededor de un eje perpendicular á uno de los planos de proyección.—102.** Sea (fig. 110) $(a\text{-}a')$ un punto dado y $(x\,y\text{-}x'\,y')$ un eje alrededor del cual ha de girar una cierta cantidad angular. El punto en el espacio al girar describirá una circunferencia cuyo plano será perpendicular al eje y tendrá por traza vertical la recta $a'\,a'_1$, estando proyectada en la misma dicha circunferencia. Su centro tendrá por proyección $(o\text{-}o')$, el radio será $(o\,a\text{-}o'\,a')$, y como es horizontal se proyectará en su verdadera magnitud en $o\,a$; luego $a\,b\,a_1$ será la proyección horizontal de dicha circunferencia, y tomando sobre ella, á partir de a, la cantidad angular que tenga que girar el punto dado, tendremos en a_1, por ejemplo, la nueva proyección horizontal de aquél, siendo evidentemente a'_1 la otra proyección.

Siempre debe indicarse, y se hace generalmente por una flecha, el sentido del movimiento, y cualquiera que sea la posición del punto respecto á los planos de proyección y al eje se encuentran las nuevas proyecciones siguiendo la misma marcha.

97 **Giro de una recta alrededor de un eje perpendicular á uno de los planos de proyección.—103.** Si la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$ (figura 111) ha de girar una cierta cantidad angular alrededor del eje $(x\,y\text{-}x'\,y')$, bastará hacer girar á dos de sus puntos (**99**) la cantidad expresada, y unir por una recta la nueva posición de aquéllos. Los puntos elegidos son los $(a\text{-}a')$ y $(b\text{-}b')$ que después del giro (**102**) se han colocado en la $(a_1\text{-}a'_1)$, $(b_1\text{-}b'_1)$ y $(a_1\,b_1\text{-}a'_1\,b'_1)$ serán las nuevas proyecciones de la recta.

Cuando la recta tenga su traza sobre el plano perpendicular al eje, en los límites del dibujo, se tomará con ventaja este punto en vez de otro cualquiera, pues evita el trazar una recta paralela á la línea de tierra, por estar una de sus proyecciones sobre esta línea. Así el punto $(h\text{-}h')$ se ha colocado en $(h_1\text{-}h'_1)$, y más simplificación podía obtenerse, si en lugar de un segundo punto cualquiera se toma el que, como $(c\text{-}c')$, se halla proyectado en la intersección de la proyección horizontal de la recta dada con la circunferencia descripta por el punto h, pues se evita así el trazar otro arco de distinto radio.

También debe observarse, que siendo iguales las cuerdas $h\,c$, $h_1\,c_1$, deben equidistar del centro $x\,y$, luego $x\,y\,m = x\,y\,m_1$ y en todas las posiciones de la recta dada, al verificar el giro, será su proyección horizontal tangente al ~~círculo~~ circunferencia cuyo radio es igual á la perpendicular bajada desde el pie del eje á dicha proyección; además, como el ángulo $m\,x\,y\,m_1$ es igual al correspondiente á la cantidad angular que gira la recta, se deduce otra regla para hacer este giro. Esta regla se ve explícitamente aplicada en la figura 112.

El caso que acabamos de considerar es el más general, pero entre las posiciones particulares que puede ocupar la recta debe contarse la de que dicha recta corte al eje. Entonces el punto en que lo verifique permanece inmóvil, y bastará hacer girar otro punto cualquiera (fig. 113).

La figura 114 se refiere al caso en que la recta sea paralela al eje; cuando éste se halle en uno de los planos de proyección, fácilmente se alcanza la simplificación que reportará.

104. Observemos, finalmente, que si la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$ (figura 111) continuase su rotación alrededor del eje $(x\,y\text{-}x'\,y')$ llegaría un momento en que la proyección $a\,b$ sería paralela á la $X\,Y$, en cuyo caso la recta en el espacio lo sería al plano vertical. Si el eje fuese perpendicular á este plano, obtendríamos análogas consecuencias respecto al horizontal. De

aquí se deduce que siempre es posible colocar una recta parela á uno de los planos de proyección, haciéndola girar alrededor de un eje perpendicular al otro plano.

Giro de un plano alrededor de un eje perpendicular á uno de los planos de proyección.—105. Supongamos que PQP' (figura 115) sea el plano y $(x'y'-xy)$ el eje alrededor del cual ha de girar aquél una cierta cantidad angular. Tomando del plano tres puntos, dos rectas, una recta y un punto, etc., y haciendo girar á estos elementos, éstos mismos nos determinarán en su nueva posición la del plano, método que deberá seguirse forzosamente cuando el plano esté definido por cualquiera de aquellos medios; mas en el caso presente, que lo está por sus trazas, será más ventajoso valerse de la horizontal y del punto de intersección del plano con el eje. Este punto permanece fijo, y la traza al girar, no saldrá del plano horizontal y seguirá siendo traza del plano. Por lo tanto, después de encontrar el punto de intersección $(o\text{-}o')$ del eje con el plano (61) trazaremos la perpendicular om á la traza PQ; con el radio om describiremos el arco mm_1 tomando desde m, en el sentido en que debe verificarse el giro, el valor angular mm_1 dado; trazaremos en m_1 la tangente P_1Q_1 y ésta será la nueva traza, la cual junto con el punto $(o\text{-}o')$ determinan el plano; la otra traza puede hallarse como sabemos (48).

Si el eje fuese perpendicular al plano V se harían análogas consideraciones.

Cuando el punto $(o\text{-}o')$ no exista en el plano, éste será paralelo al eje, es decir, penpendicular á uno de los de proyección, y bastará entonces hacer girar la traza sobre este plano como hemos indicado, pues la otra será siempre perpendicular á la línea XY (fig. 116).

Puede suceder que sin ser paralelos el plano y el eje, su intersección no esté en los límites del dibujo: entonces (figura 117) lo más sencillo es valerse de la traza horizontal y de una paralela á ella, debiendo emplear dos para obtener la vertical, si la nueva posición de la otra no cortara á la $X\ Y$ en los límites del papel.

Cuando no se necesiten las trazas será muy ventajoso valerse de una línea de máxima pendiente, con relación al plano á que sea perpendicular el eje, pues el giro de una sola recta efectuará el del plano.

Si el eje está situado en uno de los planos de proyección (figura 118) muy fácilmente puede verificarse el giro que se desea.

106. Observando la figura 115 se ve que si el plano $P\ Q\ P'$ continuase girando, llegaría un momento en que la traza horizontal sería perpendicular á la línea $X\ Y$, y, por lo tanto, el plano lo sería al vertical. De aquí se deduce que se puede conseguir que un plano sea perpendicular á uno de los de proyección, haciéndole girar alrededor de un eje perpendicular al otro.

107. Los procedimientos explicados no sólo sirven para hacer girar una cantidad angular determinada á los puntos, rectas y planos, sino que por su medio, y combinándolos de una manera conveniente, se puede hacer ocupar á aquellos elementos posiciones prefijadas con relación á otros elementos.

Pasemos á estudiar como ejercicios algunos casos de estos movimientos, tan importantes y fecundos en sus aplicaciones.

Colocar una recta paralela á uno de los planos de proyección.—108. Si se quiere (fig. 119) que la recta ($a\ v$-$a'\ v'$) resulte paralela al plano horizontal, bastará, según hemos dicho (**104**), hacerla girar alrededor de un eje perpendicular al plano vertical. Sea, pues, ($x\ y$-$x'\ y'$) el eje adoptado, y aun cuando no sabemos en este caso cuánto ha de girar la recta, sabemos, sí, que debe hacerlo hasta que la proyección vertical quede paralela á la línea $X\ Y$; por consiguiente, con el radio $x'\ m'$ describiremos una circunferencia á la cual trazaremos la tangente $m'_1\ v'_1$ paralela á $X\ Y$, que será la nueva proyección vertical. El punto m se trasladará á m_1 y el v al v_1 sienda $v_1\ m_1$ la otra proyección de la recta.

Como generalmente es arbitraria la elección del eje de giro lo tomaremos cortando á la recta dada, con lo que el giro será mucho más fácil (fig. 120).

104 **Colocar una recta perpendicular á uno de los planos de proyección.**—109. Si la recta fuese paralela al plano de nombre contrario al que se la quiere hacer penpendicular, bastaría hacerla girar alrededor de un eje perpendicular al que es paralelo á la recta. Así, para colocar perpendicularmente al plano V la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$ (fig. 121) que es paralela Lám. 10. al otro plano, tomaremos un eje $(x\,y\text{-}x'\,y')$ perpendicular á éste y á su alrededor haremos girar la recta hasta que su proyección $a\ b$ se coloque en $a_1\ b_1$ perpendicularmente á $X\ Y$, y entonces la vertical se reducirá á un punto $(a'_1\ b'_1)$, obteniendo la recta en la posición pedida.

Eligiendo un eje que corte á la recta (fig. 122) es mucho más sencillo este movimiento.

105 110. Cuando la recta dada no sea paralela al plano de nombre contrario al que se quiere que sea perpendicular, tendremos que colocarla en dicha situación por el medio explicado anteriormente (108), exigiendo, por lo tanto, dos giros distintos la operación de que tratamos.

Colocar un plano perpendicular ó paralelo á uno de los de proyección.—111. Si es un plano el que se quiere colocar perpendicular á uno de los de proyección lo conseguiremos, según lo que hemos dicho (106), haciéndole girar alrededor de un eje perpendicular al otro plano, hasta que la traza del dado sobre éste sea perpendicular á la línea $X\,Y$, y buscando luego la otra traza, según los procedimientos explicados, pero teniendo en cuenta, sin embargo, las simplificaciones que origina la situación especial en que queda el plano propuesto. La figura 123 pone de manifiesto lo que acabamos de decir.

Tomando el eje sobre uno de los planos de proyección (figura 124) todavía serán más sencillas las construcciones.

112. Para obtener un plano paralelo á uno de los de proyección se necesita que sea perpendicular al otro y que su traza sobre éste sea paralela á la línea XY. Esto último puede obtenerse por un giro alrededor de un eje convenientemente elegido (**104**), mas la otra circunstancia debe darse ya cumplida.

Si así sucede, la figura 125 demuestra claramente lo que debe hacerse, y si el plano no está dado en dichas condiciones, puede siempre colocarse en ellas aplicando el método anterior (**111**).

113. Cuando las exigencias de un problema obliguen á hacer girar un sistema cualquiera de puntos alrededor de un eje no perpendicular á ninguno de los planos de proyección, deberá hacerse preliminarmente un cambio de planos, de modo que el eje ocupe dicha posición con respecto al nuevo sistema y se pueden aplicar luego los procedimientos enseñados.

ABATIMIENTOS

114. Cuando un problema ó alguna cuestión secundaria de él sea del dominio de la Geometría plana, es decir, cuando las operaciones necesarias para llegar al objeto que dicho problema ó cuestión se proponga sean susceptibles de hacerse en un mismo plano en que se encuentren también los datos, puede emplearse un procedimiento tan sencillo como expedito y de un uso muy frecuente en las aplicaciones de la Geometría Descriptiva.

Este procedimiento, que no es más que un caso especial de los giros, consiste en hacer girar el plano en que debe operarse, llevando consigo todo lo que contiene, alrededor de una de sus trazas hasta confundirle con el plano de proyección que produjo aquélla; resolver el problema por los procedimientos de Geometría plana, y una vez halladas las incógnitas, volver el plano á su primitiva posición. A esta clase de giros se les da el nombre de *abatimientos*.

Los medios explicados para efectuar los giros se pueden aplicar á este caso introduciendo las modificaciones que exige el no ser, en general, el eje de giro perpendicular á ninguno de los planos de proyección, si bien está situado en uno de ellos. El eje toma en este caso el nombre de *charnela* del abatimiento. Pudieran evitarse aquellas modificaciones haciendo que el plano de proyección que no contenga la charnela le fuese perpendicular; pero por sencilla que sea esta operación, es más ventajoso y corto admitir las ligeras variaciones que la posición de la charnela requiere.

110 115. En cuanto á los puntos que contenga el plano abatido, como una vez hecha esta operación son los mismos puntos que existían en el espacio, pueden señalarse con las letras mayúsculas correspondientes á las que lleven las proyecciones, añadiéndolas un índice, indicando así que son los mismos puntos del espacio después de verificar un cierto giro.

111 116. Supongamos (fig. 126) que $P Q P'$ sea un plano que contiene el punto $(a\text{-}a')$ (generalmente sólo se dará, y esto basta, una de sus proyecciones). Si este plano se abate sobre el horizontal de proyección, haciéndole girar alrededor de la traza de este nombre, llevando consigo al punto $(a\text{-}a')$, es claro que éste describirá un arco de círculo situado en un plano perpendicular á la charnela y por consiguiente vertical, cuya traza será $a\,A_1$, y sobre esta recta deberá encontrarse el punto una vez efectuado el abatimiento; el centro dela circunferencia que describe el punto estará proyectado

evidentemente en (o-o'), de modo que su radio será ($o\,a$-$o'\,a'$) y si pudiésemos conocer su longitud, llevándola de o hasta A_1, este último sería el abatimiento de A. Pero observando que la recta $O\,A$ es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $o\,a$ y la altura del punto A sobre el plano horizontal, es decir, $a\,a'$, podremos construir en $o\,a\,a_1$ este triángulo y llevar su hipotenusa sobre $o\,A_1$ y estará resuelto el problema.

Pudiera obtenerse también la longitud del radio haciéndole girar alrededor de la vertical que pasa por (a-a'), por ejemplo, hasta que se coloque paralelo al plano vertical, pues entonces se proyectará sobre este plano en su verdadera magnitud. Este giro, indicado en la figura, nos da para longitud del radio la recta $a'\,o'_1$.

También puede obtenerse el punto A_1 de otro modo, teniendo en cuenta que si por el punto dado se traza en el plano la ($a\,b$-$a'\,b'$) paralela á su traza vertical, el punto (b-b') en que esta recta corta á la charnela, permanecerá fijo durante el giro; $a'\,b'$ es la verdadera magnitud de esta recta, por ser parálela al plano V; y como esta magnitud no varía al describir su movimiento el punto A, el cual no sale del plano que tiene por traza $a\,A_1$, bastará hacer centro en b, y con un radio igual á $b'\,a'$ describir un arco de círculo que cortará á dicha traza en A_1, y éste será el abatimiento pedido.

117. Cuando se trate de resolver un problema de Geometría plana, como en él han de intervenir varios puntos y rectas, es más ventajoso abatir desde luego los elementos que determinan el plano, y por medio de ellos encontrar después los abatimientos de los puntos y líneas que aquél contenga, lo cual será más fácil que aplicar á cada punto las construcciones que hemos indicado.

Sea (fig. 127) $P\,Q\,P'$ el plano que se trate de abatir sobre el horizontal. Dicho plano viene determinado por sus trazas, pero como éstas dejan de serlo una vez hecho el giro, y aun una de ellas desde el momento en que éste se inicia, sólo debemos mirarlas como dos rectas que se cortan. La P permanece fija, y en cuanto á la P', tomemos un punto de ella $(a\text{-}a')$ el cual después del abatimiento vendrá á colocarse en A_1 (116), y como el punto Q no varía, $Q\,A_1$ ó P'_1 será la nueva posición de lo que era traza vertical.

Puesto que el punto A_1 es el a' después de hecho el giro $Q\,A_1$ debe ser igual á $Q\,a'$ y por lo tanto puede también trazarse un arco de círculo cuyo centro y radio sean Q y $Q\,a'$ hasta que corte en A_1 á la recta $a\,b$ y dicho punto será el abatimiento de $(a\text{-}a')$.

Esto sólo es aplicable cuando pueda hacerse uso del punto Q; en caso contrario, debe recurrirse al método anterior aplicándolo á dos puntos distintos.

Obtenido el abatimiento del plano, supongamos que $(m\text{-}m')$ sea un punto de él. Sabemos que la nueva posición de este punto ha de estar en la perpendicular $m\,n$ á la traza P y si hacemos pasar por él una recta cualquiera y hallamos su abatimiento, éste deberá contener el del punto, siendo, por consiguiente, la intersección de ambas rectas.

Si la recta que hacemos pasar por $(m\text{-}m')$ es la $(m\,b\text{-}m'\,b')$, paralela á la traza vertical, después del giro también serán paralelas dichas dos rectas, y como el punto b está sobre la charnela, $b\,M_1$, paralela á P'_1, será el abatimiento de aquélla, cuya intersección con $m\,n$ nos da el punto M_1, buscado.

Cuando la recta que se haga pasar por el punto sea la $(m\,c\text{-}m'\,c')$ paralela á la traza horizontal, después del abatimiento también lo será; buscaremos, pues, el abatimiento de $(c\,c')$ en C_1, y $C_1\,M_1$, paralela á P, será el de aquella recta, que deberá pasar también por M_1.

Si hacemos pasar por $(m\text{-}m')$ una recta cualquiera $(d\,e\text{-}d'\,e')$, buscaremos el abatimiento de $(e\,e')$ y como el punto d está sobre la charnela, $E_1\,d$ será aquella recta abatida, proporcionando, como las anteriores, el punto M_1.

En las aplicaciones abatiremos, como acabamos de indicar, las rectas y puntos que contenga el problema, escogiendo siempre aquellos medios que ofrezcan más ventaja, pues casos habrá en que líneas que hayan servido para una operación puedan aprovecharse para otras.

118. Si el plano que se ha de abatir no viene dado por sus trazas, pudieran buscarse, pero sin recurrir á ellas se puede hacer el abatimiento con igual facilidad; mas no lo obtendremos sobre ninguno de los planos de proyección sino sobre un plano paralelo á uno de ellos, haciéndole girar alrededor de una charnela que goce de igual propiedad; de modo que lo que realmente obtendremos serán las proyecciones del abatimiento sobre un plano paralelo al abatido, después de hecho este giro, por cuya circunstancia es indiferente hacer las operaciones en el mismo plano ó en el de proyección que le es paralelo.

Supongamos el plano dado por dos rectas que se cortan, á lo cual puede reducirse siempre cualesquiera que sean los elementos que le determinen. Sean, pues, $(a\,b\text{-}a'\,b')$ y $(b\,c\text{-}b'\,c')$ las dos rectas dadas (fig. 128); tomemos por charnela la horizontal $(a\,c\text{-}a'\,c')$, con lo cual los puntos $(a\text{-}a')$ y $(c\text{-}c')$ permanecerán fijos; el $(b\text{-}b')$ describirá una ~~círculo~~ circunferencia; su plano, perpendicular á la charnela, tendrá por traza $b\,o$ y en ella ha de estar proyectado el abatimiento de $(b\text{-}b')$; el centro de dicha ~~círculo~~ circunferencia será $(o\text{-}o')$, su radio $(o\,b\text{-}o'\,b')$ y la verdadera magnitud $o\,b_1$ de éste se obtendrá haciéndolo girar alrededor de la proyectante horizontal de $(o\text{-}o)$ hasta que se coloque paralelo al plano horizontal (108); llevando esta verdadera magnitud de o á B_1 éste será el abatimiento de $(b\text{-}b')$ y $B_1\,a$ y $B_1\,c$ los de las rectas dadas.

Obtenidas éstas y aplicando análogos procedimientos á los indicados (117) podrán obtenerse los de todas las rectas y puntos que contenga el plano. Así, el punto $(m\text{-}m')$ se puede abatir por medio de la recta cualquiera $(m\,d\text{-}m'\,d')$, por la horizontal $(m\,e\text{-}m'\,e')$, por la paralela al plano vertical $(m\,f\text{-}m'\,f')$ ó por la $(m\,g\text{-}m'\,g')$ paralela á una de las que determinan el plano, tal como la $(a\,b\text{-}a'\,b')$, obteniendo siempre el mismo punto M_1.

115. Para el problema recíproco de deshacer el abatimiento de un plano, se comprende que deben seguirse procedimientos enteramente inversos. Supongamos (fig. 128) que del plano determinado por las dos rectas cuyas proyecciones son ($a\,b$-$a'\,b'$) y ($b\,c$-$b'\,c'$) se conoce el abatimiento de éstas $a\,B_1$ y $c\,B_1$ alrededor de la charnela ($a\,c$-$a'\,c'$). Para deshacer el abatimiento del plano deben girar las rectas $a\,B_1$ y $c\,B_1$ alrededor de la charnela hasta que ocupen la posición definida por aquellas proyecciones, lo cual nos indica que siempre deben darse éstas y el abatimiento, pues con sólo el conocimiento del último, nada fijaría cuándo debe detenerse el movimiento de las rectas.

Si en dicho plano abatido se tiene M_1 y se quiere hallar directamente sus proyecciones cuando el plano vuelva á su primitiva posición, observaremos que dicho punto al girar describe un arco de círculo, cuyo plano perpendicular á la charnela tendrá por traza horizontal $M_1 p$ y además será vertical. El punto M_1 no puede salir de este plano y como ha de estar también en el de las dos rectas, terminado el giro deberá encontrarse en la intersección ($p\,q$-$p'\,q'$) de ambos planos. Por otra parte, la distancia de M_1 á p, ó sea el radio, es constante y queda reducido el problema á tomar sobre la recta ($p\,q$-$p'\,q'$) y á partir de (p-p') una distancia igual á $p\,M_1$, para lo que haremos girar aquella recta de modo que se coloque paralela al plano vertical (108); tomaremos entonces la magnitud $p'\,m'_1$ igual á $p\,M_1$, y deshaciendo el giro (m_1-m'_1) se trasladará á (m-m'), que son las proyecciones buscadas.

Mas debiendo estar en general el punto M_1 enlazado con otras rectas y puntos del mismo plano, por lo que hemos dicho (117), podrán obtenerse sus proyecciones valiéndose de cualquiera de las rectas que indica la figura, análogamente á lo hecho en el problema directo.

116. Cuando el plano venga dado por sus trazas basta para que sea definido conocer la horizontal y el abatimiento de la vertical ó inversamente, según el plano de proyección so-

bre que esté hecho el abatimiento, pues es evidente que deberá girar alrededor de la traza que sirvió de charnela hasta que la otra se adapte sobre el plano de proyección correspondiente.

La figura 129 nos presenta un plano $P\ Q\ P'_1$ abatido, en que P es la charnela; para encontrar la posición P' de la otra traza, tomaremos en su abatimiento un punto cualquiera A_1, el cual al girar describirá una circunferencia cuyo plano vertical y perpendicular á la charnela tendrá por trazas $A_1\ a$, $a\ a'$. Dicho punto terminará su movimiento de giro cuando encuentre el plano vertical, por consiguiente deberá estar sobre $a\ a'$; el centro del expresado círculo será $(o\text{-}o')$ y la verdadera magnitud del radio $o\ A_1$, siendo $o\ a$ la proyección horizontal cuando el punto A_1 ocupe su lugar en el plano vertical. Para encontrar la proyección $o'\ a'$ bastará hacer girar dicha recta alrededor de la vertical que pasa por a hasta que quede situada en el plano de este nombre; o se trasladará á o'_1 y tomando $o'_1\ a' = o\ A_1$, a' será la proyección buscada, y al mismo tiempo la nueva posición de A_1, por lo cual $a'\ Q$ ó P' será la traza vertical del plano dado, una vez deshecho el abatimiento. También se podría encontrar la altura $a\ a'$ construyendo el triángulo rectángulo $o\ a\ A_2$ del que se conoce la hipotenusa $o\ A_2 = o\ A_1$ y el cateto $o\ a$.

Si el punto Q no se hallase en los límites del dibujo, repetiríamos la operación anterior para otro punto cualquiera B, y determinaríamos á P' por dos puntos a' y b'.

P. 142
P. 153

Cuando el plano abatido contenga un cierto punto M_1 y se deban hallar las proyecciones de su posición después de deshecho el giro, podremos hacerlo directamente observando que M_1 girará en un plano vertical $M_1\ q\ q'$ perpendicular á la charnela y como ha de encontrarse en éste y en el dado irá á parar á un cierto punto de su intersección $(p\ q\text{-}p'\ q')$. El centro de la circunferencia descripta por M_1 es $(p\text{-}p')$ y la verdadera magnitud del radio es $p\ M_1$; bastará, pues, para resolver el problema tomar en la recta

$(p\ q\text{-}p'\ q')$ y á partir de $(p\text{-}p')$ una magnitud igual á $p\ M_1$. Para ello hagámosla girar alrededor de un eje perpendicular al plano vertical y que pase por $(p\text{-}p')$ hasta que quede situada en el otro plano de proyección; el punto $(r\text{-}r')$ se trasladará á $(r'_1\text{-}r_1)$ y $(p\ r\text{-}p'_1\ r'_1)$ será la recta después del giro. Tomemos ahora $p\ m_1 = p\ M_1$ y al deshacer aquel giro obtendremos para proyecciones de este punto $(m\text{-}m')$ que serán también las del M_1.

Pero es más conveniente valerse de algunas de las rectas que pasan por M_1 y están situadas en el plano dado, como hemos hecho anteriormente. La figura indica las construcciones valiéndose de una recta cualquiera $M_1\ S_1$, una horizontal $M_1\ T_1$ del plano ó una paralela $M_1\ n$ á la traza vertical.

PLANO DE PERFIL

120. Hemos llamado así al que es perpendicular á la línea de tierra y, por lo tanto, á los dos planos de proyección. Su empleo es tan frecuente como útil en las aplicaciones de la Geometría Descriptiva y con su eficaz auxilio pueden representarse con mayor claridad los objetos por medio de nuevas proyecciones que facilitan su estudio.

121. Circunscribiéndonos á la recta $A\ B$ de la figura 130, situada en un plano perpendicular á la $X\ Y$, sabemos que sus proyecciones la dejan indeterminada; pero si se concibe también su proyección $a''b''$ sobre un plano de perfil $X\ Y\ X'$ desaparecerá aquella indeterminación.

Fácil es encontrar la proyección $a''\ b''$ sobre dicho plano de perfil $X\ Y\ X'$, pues se reduce la operación á un simple cambio de plano vertical, y como tal se ha abatido sobre el horizontal antiguo; pero muchas veces conviene obtener dicho abatimiento sobre el primitivo plano del mismo nombre. Para hacer este abatimiento, observaremos que la recta $(a\ b\text{-}a'\ b')$ está representada sobre el plano de perfil por $(\alpha\ \beta\text{-}\alpha'\ \beta')$ y al girar este plano alrededor de su traza vertical, los puntos $(\alpha\text{-}\alpha')$, $(\beta\text{-}\beta')$ describirán arcos de círculos señalando á la recta la posición $a'_1\, b'_1$.

Considerada la cuestión desde este punto de vista, entra en la teoría de los abatimientos, por cuya razón la tratamos aquí.

Aun cuando hemos indicado que este abatimiento especial se emplea cuando el plano de perfil tiene por objeto proporcionar una nueva proyección, puede aplicarse también cuando dicho plano sirva como medio auxiliar de resolución de los problemas.

Para esclarecer lo dicho y hacer patente la utilidad de estos planos, presentaremos algunos ejemplos.

122.—Problema. *Hallar las trazas de una recta perpendicular á la línea X Y.*—Sea $(a\, b\text{-}a'\, b')$ (fig. 131) la recta; su proyección sobre un plano de perfil auxiliar $X\, Y\, X'$, abatido sobre el vertical, es $a'_1\, b'_1$; las trazas en esta posición son $h'_1\, v'_1$, que deshecho el movimiento, proporcionan las verdaderas $(h\text{-}h')$ y $(v\text{-}v')$. Comparando este procedimiento con el empleado en el número (66), se nota la simplificación que ha proporcionado el plano de perfil. En lugar del plano $X\, Y\, X'$ se podía haber empleado el que contiene la recta dada, como indica la misma figura; uno y otro pueden abatirse también sobre el plano horizontal.

123.—Problema. *Hallar la intersección de un plano* PQP' ~~$X\, Y\, X'$~~ *con el que pasa por la línea X Y y el punto* $(a\text{-}a')$ (fig. 132).—Tomemos el plano de perfil $X\, Y\, X'$, el cual corta al $P\, Q\, P'$ según una recta abatida en $v'\, h'_1$, y al $[(a\text{-}a'), (R\text{-}R')]$ según la recta $Y\, a'_1$, puesto que Y es un punto de la intersección de ambos planos, y por ser el de perfil perpendicular al que pasa por la $X\, Y$, la traza de éste sobre aquél deberá contener las proyecciones sobre el de perfil de todos los puntos del otro plano, y, por consiguiente, las del $(a\text{-}a')$ que ha ido á parar á a'_1.

Las dos intersecciones auxiliares se cortan en m'_1, punto cuyas proyecciones son (*m-m'*) y la intersección de los planos dados es la (*Q m-Q' m'*). En la misma figura están las construcciones para abatir el plano de perfil sobre el horizontal, obteniendo forzosamente el mismo punto (*m-m'*). Si el punto *Q* no estuviese en los límites del dibujo, emplearíamos otro plano de perfil para obtener otro punto en substitución de aquél.

Será conveniente que uno de los planos de perfil pase por (*a-a'*) por las simplificaciones que produce, como puede comprobarse haciendo las construcciones en esta hipótesis.

124.—Problema. *Hallar la intersección de dos planos P P' y Q Q' paralelos á la línea de tierra* (fig. 133).—Nos valdremos de un plano de perfil que se puede abatir sobre el horizontal ó vertical de proyección.

125.—Problema. *Averiguar si la recta (a b-a' b') es perpendicular al plano P P'* (fig. 134).—Basta cerciorarse de si la proyección $a'_1 b'_1$ sobre un plano de perfil es perpendicular á la traza P'_1 sobre el mismo, del plano dado.

Consideraciones generales sobre los cambios de planos, giros y comparación entre uno y otro método.—126. Por lo que llevamos expuesto hasta el presente, puede comprenderse ya que la resolución práctica de los problemas que requieren los conocimientos de la Geometría Descriptiva, será más ó menos fácil, más ó menos breve, según la posición que ocupen los datos relativamente á los planos de proyección que se elijan.

Tanto es así, que en muchos casos el resultado de dichos problemas puede leerse casi sobre aquéllos, cuando los datos ocupen posiciones determinadas, ó por lo menos bastará ejecutar ligeras construcciones.

Si se trata, por ejemplo, de buscar la distancia entre dos puntos dados, podrá medirse inmediatamente si la recta que los une es paralela á uno de los planos de proyección.

Para trazar una perpendicular á una recta desde un punto, podrá hacerse directamente si uno de los planos de proyección es paralelo al que determinan la recta y el punto, ó se confunde con él, conociéndose al mismo tiempo y sin más construcciones el pie de la perpendicular.

Con igual facilidad podrá trazarse una perpendicular á un plano, si éste es paralelo ó se confunde con uno de los de proyección.

Y finalmente, el ángulo de dos rectas está representado en su verdadera magnitud sobre un plano paralelo al determinado por ellas.

Estos y otros muchos ejemplos que pudieran citarse, ponen de manifiesto la influencia en la resolución de los problemas de la posición relativa de los datos.

125 Difícil es desde un principio elegir el sistema de planos de proyección más conveniente en todas las fases del problema, tanto por no poderse prever las posiciones de los elementos que se vayan determinando, como por requerir aquél que dicho sistema cumpla quizás condiciones contradictorias; así, pues, será necesario, ó por lo menos conveniente, recurrir en el transcurso de la resolución á la teoría de los cambios de planos ó á la de los giros, pues ambas, aunque por distintos medios, tienen por objeto poner los elementos con que debe operarse en las condiciones más propias para la pronta y mejor resolución de los problemas.

Para ello y cualquiera que sea la cuestión principal ó secundaria que tenga que resolverse, debe analizarse primero cuáles son las posiciones de los datos, con respecto á los planos de proyección, que den á conocer las incógnitas con más exactitud y menos trabajo, y estudiar en seguida por medio de qué cambios de planos, por qué giros ó por cuál combinación de unos y otros, se puede conseguir aquel fin recordando que por el cambio de uno de los planos ó haciendo un giro alrededor de un eje perpendicular á uno de ellos se puede conseguir siempre que una recta cualquiera resulte paralela á uno de dichos planos ó que un plano resulte perpendicular á uno de los mismos; que en esta disposición y mediante un nuevo cambio ó un nuevo giro se puede obtener la misma recta ó el mismo plano perpendicular ó parelelo respectivamente al otro plano del sistema, y que obtenido ya un plano en esta última disposición nada impide emplear un tercer cambio de planos substituyendo al que no es paralelo á aquél por otro que cumpla con otras condiciones, ó un tercer giro alrededor de un eje perpendicular al plano dado para conseguir que otro elemento ocupe una posición determinada.

Cuando por medio de dos cambios ó de dos giros se ha llegado á poner una recta perpendicular á uno de los planos de proyección, podemos disponer del segundo substituyéndolo por otra que llene nuevas condiciones, pero en este caso no puede emplearse un tercer giro, pues cualquiera que fuese, haría perder á la recta la posición adquirida, excepto cuando fuera ella misma el eje de rotación que se empleara.

Debemos observar también que á veces será más conveniente quizás recurrir á cambios de planos ó á giros parciales. Por ejemplo, si dadas las proyecciones de los tres vértices de un triángulo se desea obtener éste en su verdadera magnitud, en lugar de buscar su proyección sobre un plano paralelo al suyo, por medio de cambios, de planos ó giros, puede ser más ventajoso por cualquiera de estos medios llevar separadamente cada lado á ser paralelo á uno de dichos planos, con lo cual podría construirse aquél en seguida.

Sin embargo de la gran analogía que existe entre una y otra teoría, es innegable la mayor ventaja de los primeros considerando que siempre que se cambia un plano sólo varían las proyecciones del mismo nombre, mientras que al hacer un giro varían unas y otras, llevando consigo más trabajo y sobre todo más confusión de líneas en el dibujo. Así es que en los problemas de aplicación rara vez se emplean los giros.

Todo este capítulo está suprimido

Capítulo III.

Problemas de aplicación.

127. Terminado el estudio de cuanto antecede debe encontrarse el alumno en disposición de resolver todos los problemas de aplicación que puedan presentarse y en que sólo intervengan rectas y planos. Efectivamente, conocida la representación de un punto, de una recta y de un plano por el sistema de las proyecciones y determinada la dependencia que existe entre éstas, según las condiciones geométricas que reunan aquellos elementos, ó la posición relativa que ocupen en el espacio, fácil será ejecutar gráficamente en todos los casos las construcciones prescriptas en la Geometría general, á cuyas teorías hay que acudir siempre para inquirir, en virtud del rigor de sus demostraciones, los medios de obtener las cantidades incógnitas en cada problema.

Sin embargo, atendiendo á que los procedimientos de la Geometría Descriptiva son en muchos casos medios analíticos que conducen también al conocimiento de las verdades que se persiguen, y atendiendo además á que estos mismos procedimientos originan á veces simplificaciones y medios más expeditos para un fin determinado, conveniente será, sin duda, presentar una serie de ejemplos, reunidos en cuerpo de doctrina, que, al par que corroboren lo manifestado, den idea de la marcha que debe seguirse en las innumerables cuestiones que pueden ocurrir en la práctica y afirmen á su vez á los alumnos en los conocimientos adquiridos, acostumbrándoles al manejo de la regla y el compás, único medio de que sea fructífera la enseñanza de la ciencia de que nos ocupamos.

Mas antes daremos una sucinta idea del modo de llevar á la práctica estos conocimientos.

128. Los dibujos de Geometría Descriptiva pueden ser de dos clases: los correspondientes á cuestiones de estudio ó á problemas de aplicación. Estos últimos, cuyo solo objeto es dar á conocer los resultados del problema para construir los cuerpos materialmente ó valerse de las que fueron sus incógnitas para un objeto dado, no deben contener más que estos resultados y los datos de que dependen; todas las líneas y construcciones que se hayan empleado para resolverlo no tienen objeto ninguno, antes bien holgarían en el dibujo y pudieran ocasionar errores.

Debe procurarse en ellos la mayor exactitud y extremada claridad, para cuyo efecto, si á pesar de contener tan sólo las líneas estrictamente necesarias, resultasen confusos, como podría ocurrir en el caso de haber empleado varios abatimientos, puede evitarse en parte usando para cada uno tinta de distinto color.

129. En los problemas de estudio, por el contrario, deben conservarse todas las líneas empleadas para su resolución, pues su objeto es principalmente estudiar y analizar ésta, deduciendo todas las reflexiones y consecuencias que ofrezca y recordar los principios en que se funda, cuidando, sin embargo, de no repetir unas mismas operaciones.

Debe procurarse también en esta clase de problemas, comprobar cada resultado parcial de todas las maneras posibles, pues si bien en la práctica puede bastar una sola comprobación, debe tenerse en cuenta que cada una de ellas es un nuevo método de obtener el punto de que se trate, consiguiendo así distinguir en cada caso particular cuál de dichos medios es más ventajoso.

Por complicado que sea un problema no debe temerse que el conjunto de las líneas que lo compongan haga confuso el dibujo, pues si se ha empleado en él un buen sistema de notación, y el trazado de las líneas se ha hecho como es debido, basta examinarlo detenidamente para poder seguir todas sus operaciones, y desde luego será más fácil conocer éstas, conservando todas las líneas de construcción, que habiéndolas suprimido.

Los problemas de aplicación que vamos á resolver ahora serán de estudio; bien entendido que si alguno de ellos ú otro cualquiera tuviera que resolverse verdaderamente, en cuyo caso lo que interesa es conocer el resultado, se deberán suprimir todas las líneas auxiliares después de resuelto, á excepción de las de correspondencia entre las proyecciones de cada punto, las cuales deben conservarse siempre.

130. Cualquiera que sea el problema que se trate de resolver podremos clasificarlo siempre de dos maneras distintas: problema simple ó problema compuesto. Los primeros son aquellos que se fundan directamente en un teorema demostrado y cuya aplicación basta para resolverlo, y los segundos son los que se componen de varias cuestiones simples. Por un punto dado trazar una perpendicular á un plano conocido, es un problema simple y su resolución se funda en que cuando una recta es perpendicular á un plano, las proyecciones de aquélla lo son á las trazas de éste; pero medir el volumen de una pirámide dada por sus proyecciones es un problema compuesto, para cuya resolución hay que trazar una perpendicular desde el vértice de aquélla al plano de su base, buscar el pie de esta perpendicular y hallar su verdadera magnitud, así como la de aquel polígono.

Para la resolución de los primeros basta descubrir el teorema de la Geometría en el espacio, que expresa las relaciones geométricas que ligan las incógnitas á los datos y traducir gráficamente en el dibujo estas mismas relaciones, y para los segundos es preciso, ante todo, averiguar las cuestiones simples de que se compone y el orden sucesivo en que se han de efectuar. Para ello no hay que tener en cuenta para nada los datos especiales que fijan el problema, sino considerarlo en su acepción más general; así en el ejemplo anterior de la pirámide, cualquiera que ésta sea, siempre deberán verificarse las mismas operaciones y en el orden allí establecido, terminando por hacer el producto del área de la base por el tercio de la longitud de la altura. Hecho este estudio previo del asunto propuesto, se empezará á resolver cada una de sus partes simples, y entonces deberá atenderse á la posición de los datos respectivos y formarse idea de la que ocupan en el espacio los puntos, rectas y planos, para determinar el procedimiento que debe seguirse en su resolución, pues sabido es que métodos aplicables en unos casos no lo son en otros y que puede ser tal la situación relativa de aquellos elementos que proporcione simplificaciones dignas de tenerse en cuenta. Así hemos visto en la intersección de planos que no podían seguirse en todos los casos iguales procedimientos, así como la regla para hallar las trazas de una recta no era aplicable cuando se encontraba ésta en un plano perpendicular á la línea XY, comprendiéndose también que para hallar la verdadera magnitud de una recta paralela á uno de los planos de proyección no es necesario trazar ninguna línea.

131. En cuanto á la manera de resolver cada una de las partes de un problema principal, puede hacerse directamente, por cambio de planos, por giros ó por abatimientos si la índole del problema lo permite. En este último caso será en general más ventajoso valerse del abatimiento, pero cuando el problema no sea de Geometría plana, deberá recurrirse á cualquiera de los otros tres, teniendo en cuenta lo manifestado al comparar los cambios de planos y los giros. En cualquiera de estos medios que se emplee, debe estudiarse ante todo cuál sería la posición de los datos, relativamente á los planos de proyección, que conduciría al resultado apetecido de la manera más fácil posible, y determinada esta posición, habrá que ver los cambios de planos ó los giros y en qué condiciones unos y otros deberán emplearse para obtenerla, procediendo entonces á su ejecución.

132. Sobre la preferencia que debe darse á la solución directa ó la obtenida por medio de los cambios de planos ó los giros nada fijo puede establecerse. Generalmente será más expedito valerse de uno de los segundos procedimientos, pero depende siempre de la índole del problema, de la posición de los datos y de la dependencia ó relación que exista entre las cuestiones simples de que se componga aquél.

Sólo la práctica puede proporcionar el criterio necesario para esta distinción.

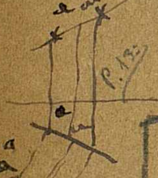
DISTANCIAS ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

133.—Problema 1.º *Hallar la menor distancia entre dos puntos.*

Las proyectantes del mismo nombre de estos dos puntos y la recta que los une, determinan un trapecio rectángulo cuya base es la proyección que producen aquéllas, el lado opuesto la recta considerada y los otros dos dichas proyectantes. Construyendo en cualquier parte uno de dichos trapecios (fig. 135) obtendremos la magnitud pedida. Lám. 11.

También puede considerarse la recta dada como la hipotenusa de un triángulo rectángulo en que los catetos son la diferencia entre las distancias de dichos puntos á uno de los planos de proyección y la proyección sobre este mismo plano de dicha recta, en virtud de lo cual bastará construir este triángulo para resolver el problema (fig. 136).

Otro método que puede emplearse es el de cambios de planos ó el de giros. La distancia entre los dos puntos sería conocida desde luego si la recta que los une fuese paralela á uno de los planos de proyección, y esto puede conseguirse (91) por el cambio de un solo plano (fig. 137) ó por un giro (108) (fig. 138). Si en la figura 137 se tomara como nuevo plano de proyección uno de los proyectantes de la recta, la operación equivaldría á un abatimiento de ésta (figura 139).



134.—Problema 2.º *Sobre una recta dada y á partir de un punto conocido, tomar una cierta magnitud.*

Tómese el punto dado y otro cualquiera de la recta, háganse las construcciones necesarias para hallar la verdadera distancia entre estos puntos y en ella se podrá determinar la magnitud pedida buscando luego sus proyecciones correspondientes, por medios inversos á los del problema anterior (1).

135.—Problema 3.º *Dividir una recta, dada por sus proyecciones, en partes proporcionales.*

Considerando que si una recta en el espacio está dividida en un cierto número de partes y se hallan las proyecciones de los puntos de división, la proyección de la recta quedará dividida por la de éstos en partes proporcionales á las de dicha recta, por formarse en su plano proyectante un sistema de paralelas cortadas por dos que no lo son, deduciremos que para resolver este problema bastará dividir las dos proyecciones dadas de la recta en las partes proporcionales que se pidan.

Si las partes tuviesen que ser iguales se dividirá cada una de dichas proyecciones en el mismo número de partes iguales. Tanto en este caso como en el anterior, será más

(1) Los alumnos se encargarán de hacer las figuras necesarias, haciendo extensiva esta advertencia á todos los casos en que no se acompañen á la explicación.

conveniente dividir una sola de las dos proyecciones en la forma debida y por los puntos obtenidos trazar perpendiculares á la XY, que determinarán en la otra las segundas de estos puntos.

136.—Problema 4.º *Dividir en media y extrema razón una recta dada por sus proyecciones.*

También basta dividir una de las dos proyecciones en la forma dicha y buscar la segunda proyección del punto que lo realice, pues fácilmente se verá que la otra de la recta y la recta misma lo quedarán igualmente.

137.—Problema 5.º *Hallar la distancia entre un punto y una recta.*

Por el punto trácese una perpendicular á la recta (76), determínese el de intersección de ambas y luego la verdadera magnitud de la distancia entre este punto y el dado.

Si la recta fuese perpendicular á uno de los planos de proyección, sería paralela al mismo la que se trazase desde el punto á la recta, proyectándose en su verdadera magnitud sobre dicho plano. Esta circunstancia puede obtenerse por dos cambios de planos (92) ó por dos giros (109).

También podría emplearse un abatimiento del plano determinado por la recta y el punto dado.

Empleando los giros será conveniente elegir los ejes que pasen por el punto dado, así como si se hace uso del abatimiento la charnela debe pasar por él.

138.—Problema 6.º *Hallar la menor distancia de un punto á un plano.*

Desde el punto debe trazarse una perpendicular al plano, hallar su intersección con él y medir la recta que une este punto y el dado.

Si el plano fuese perpendicular á uno de los de proyección, la recta que mide la distancia pedida sería paralela á dicho plano, y sobre él se proyectaría en su verdadera magnitud. Por cambio de planos (93), ó por giros (111), se puede llegar á este caso.

Observando que la perpendicular trazada desde el punto al plano ha de estar situada en cualquiera de los que por dicho punto se pueden trazar perpendicularmente al dado, y que la intersección de ambos y aquella recta lo serán también, deducimos la siguiente solución de este problema, por medio de abatimientos. Por el punto $(a\text{-}a')$ (fig. 140) se trazará al plano dado otro que le sea perpendicular y que para mayor sencillez supondremos ser el vertical $X Y X'$. Las trazas de la intersección de dichos planos serán los puntos h y v', y abatiendo el plano $X Y X'$ con la intersección y el punto A, obtendremos en $V_1\ h$ la posición de aquélla, en A_1 la de éste y en $A_1\ M_1$ la distancia pedida.

139.—Problema 7.º *Hallar la menor distancia entre dos rectas.*

Si éstas son paralelas, trácese un plano perpendicular á ambas, y únanse los puntos de intersección de éste con aquéllas por una recta, cuya verdadera magnitud será la distancia pedida (fig. 141).

Cuando uno de los planos de proyección sea perpendicular á las dos rectas dadas, la que mide su distancia resultará paralela á dicho plano, proyectándose sobre él en su verdadera magnitud. En la figura 142 se ha conseguido este resultado por medio de dos cambios de planos y en la 143 por medio de dos giros sucesivos, alrededor respectivamente de los ejes $(xy\text{-}x'y')$, $(zu\text{-}z'u')$.

Y como dos rectas paralelas siempre determinan un plano, también se puede resolver este problema abatiendo aquél, como se ve en la figura 144.

Cuando las rectas dadas se crucen, veamos primero las operaciones que deben ejecutarse.

Sean $A\ B$ y $C\ D$ (fig. 145) dichas rectas y supongamos que $M\ N$ sea la perpendicular común que mide su mínima distancia. Si por N se trazara un plano perpendicular á CD este plano debería contener á $M\ N$, como la contendría también el que lo fuese á $A\ B$ en M, luego $M\ N$ sería la intersección de estos dos planos. Trazando, pues, dos cualesquiera, P y Q, respectivamente perpendiculares á las rectas dadas, su intersección $R\ S$ ha de ser paralela á $M\ N$; por lo tanto, conocida la primera queda reducido el problema á trazarle una paralela que corte á la vez á aquellas rectas. Para conseguirlo, hágase pasar por $A\ B$ un plano paralelo á $R\ S$, por la $C\ D$ otro que reuna igual circunstancia y la intersección de estos dos planos paralelos á $R\ S$ lo será también á la misma, cortando además á las rectas dadas por hallarse en cada uno de los planos que pasan por ellas.

Realicemos estas construcciones suponiendo que $(ab\text{-}a'b')$ $(c\,d\text{-}c'\,d')$ (fig. 146) sean las dos rectas dadas. Tracemos los planos PSP' y $Q\,T\,Q'$ perpendiculares á cada una de ellas y hallemos su intersección $(rs\text{-}r'\,s')$. Por un punto cualquiera $(g\text{-}g')$ de AB tracemos la paralela $(g\,h\text{-}g'\,h')$ á $(r\,s\text{-}r'\,s')$ y aquella recta y la paralela trazada determinarán el plano cuya traza horizontal es X. Análogamente determinaremos el que tiene por traza horizontal Z pasando por $C\,D$ y paralelo á $(r\,s\text{-}r'\,s')$, mediante la paralela $(l\,k\text{-}l'\,k')$ á esta última y la intersección de estos dos planos nos dará, en la parte $m\,n\text{-}m'\,n'$ que interceptan las rectas propuestas, la distancia pedida, de la cual sólo falta hallar su verdadera magnitud. Lám. 12.

Para que esta menor distancia se proyecte en su verdadera magnitud sobre alguno de los planos de proyección es preciso que una de las rectas dadas sea perpendicular al mismo, lo cual puede conseguirse, cuando no se verifique, por medio de cambios de planos ó de giros.

En la figura 147, en que $(a\,b\text{-}a'\,b')$, $(c\,d\text{-}c'\,d')$ son las rectas dadas, se ha empleado el primer método, substituyendo el sistema primitivo de planos de proyección por otro $X''\ Y''$ en que el horizontal es perpendicular á la primera de aquellas rectas y resultando para proyecciones de una y otra las

$(a''' b'''-a'' b'')$, $(c''' d'''-c'' d'')$. Obtenidas las rectas en esta disposición, la que mide su menor distancia ha de ser paralela al plano horizontal, y, por lo tanto, su proyección vertical paralela á $X''' Y'''$. La otra ha de pasar por $a''' b'''$ y por un punto de $c''' d'''$, pero como buscamos precisamente la menor de todas las rectas que se hallen en este caso, será la $m''' n'''$ que pasa por aquel punto y es perpendicular á $c''' d'''$, deduciéndose en seguida la $m'' n''$ en la dirección que hemos dicho. Esta recta en los primitivos planos es la $(m n-m' n')$.

En la figura 148 se han empleado dos giros por medio de los cuales se ha colocado la recta $(a b-a' b')$ perpendicular al plano horizontal, como se ve en $(a_2 b_2-a'_2 b'_2)$, resultando la otra recta en la posición $(c_2 d_2-c'_2 d'_2)$. Los ejes que han servido para estos giros son los $(x y-x' y')$, $(z u-z' u')$ eligiéndolos de modo que tengan siempre un punto común con cada una de las rectas.

La menor distancia $(m_2 n_2-m'_2 n'_2)$ se ha trazado, teniendo en cuenta las observaciones del caso anterior y deshechos los giros, está representada por $(m n-m' n')$.

Este problema no puede resolverse por abatimiento.

140.—Problema 8.° *Hallar la distancia entre una recta y un plano paralelos.*

Basta buscar la distancia entre un punto de la recta y el plano (**138**).

Por cambio de planos ó por giros también puede resolverse, haciendo que la recta dada sea perpendicular á uno de los planos de proyección, y se podrán emplear los abatimientos trazando por la recta un plano perpendicular al dado; hallando su intersección con él y abatiéndole con las dos paralelas, cuya distancia será la pedida.

141.—Problema 9.° *Hallar la distancia entre dos planos paralelos.*

Tómese un punto en uno de los planos y hállese su distancia al otro (138) (fig. 149); el punto elegido es el (m-m') para mayor sencillez.

Las figuras 150 y 151 resuelven el mismo problema por cambio de planos y por giros.

También puede resolverse por abatimientos hallando la intersección de los dados con un plano que les sea perpendicular y abatiendo éste con las dos paralelas que resulten. En el caso particular de la figura 152 se ha empleado un plano de perfil.

OPERACIONES SOBRE UN PLANO

Estos problemas entran de lleno en los que deben resolverse por medio de abatimientos. Como ejemplo presentaremos el

142.—Problema 10. *Dados tres puntos, construir un exágono regular inscripto en la circunferencia que determinan aquéllos.*

(Fig. 153.) Se ha abatido el plano de los tres puntos, se han hecho las operaciones que exige el enunciado del problema y deshaciendo el abatimiento resultan para proyecciones del exágono las ($c\ d\ e\ f\ g\ h$-$c'\ d'\ e'\ f'\ g'\ h'$); (o-o') son las del centro del círculo y ($o\ e$-$o'\ e'$) las del radio. Lám. 13.

ÁNGULO DE DOS RECTAS

143.—Problema 11. *Hallar el ángulo formado por dos rectas.*

Que éstas se crucen ó se corten siempre hay que medir el ángulo que forman por otras dos de la misma dirección que ellas y que pasen por un punto; por consiguiente sólo consideraremos el caso de dos rectas que se corten.

Para resolver el problema directamente habría que trazar el arco correspondiente al ángulo propuesto y medirlo. Para ejecutar lo primero no tenemos aún conocimientos bastantes, y sólo podríamos conseguir lo segundo haciendo que dicho arco fuese paralelo á uno de los planos de proyección. Podemos, pues, desde un principio hacer que el plano de las rectas dadas ocupe esta posición y entonces será fácil trazar y medir el arco correspondiente, consiguiéndose lo dicho, bien por cambio de planos, bien por giros.

El primer método se ha empleado en la figura 154, en la que (a b-a' b') (a c-a' c') son las rectas dadas, P la traza horizontal de su plano y X' Y' un nuevo plano vertical de proyección perpendicular á aquél (94). Las proyecciones de las rectas sobre el nuevo sistema son (a b-a'' b''), (a c-a'' c'') resultando confundidas las verticales como debe ser y siendo esta misma común proyección la traza vertical P'' del plano de aquéllas. Cambiemos ahora el plano H por otro paralelo á P P'', ó mejor por este mismo, en cuyo caso X'' Y'' es la línea de tierra, a''' $b,'''$ a''' c''' las nuevas proyecciones y α el ángulo buscado.

Más expedito hubiera sido en lugar del segundo cambio, abatir el plano P P'' sobre el H de proyección y en c A_1 b estaría representado el ángulo de las dos rectas.

Si la traza P no se hallara en los límites del dibujo y sí la vertical, cambiaríamos primero el plano H y luego el V; pero como lo que interesa es únicamente la dirección de una ú otra, podremos obtenerla siempre por medio de una horizontal ó una paralela al V. Por ejemplo la (d e-d' e').

En la figura 155 se han empleado dos giros imprimiendo sucesivamente al plano de las dos rectas A B, A C, los movimientos de rotación necesarios alrededor de los ejes (x y-x' y'), (z u-z' u') hasta colocarlo paralelo al H obteniéndose en α el ángulo pedido.

Si la traza P no se encontrase en los límites del dibujo, la substituiríamos por la horizontal (f e-$f'$$e'$), haciendo girar primero á las dos rectas dadas hasta que se colocase en (f_1 e_1-f'_1 e'_1), perpendicular á X Y y luego hasta que tomara la posición (f_2 e_2-f'_2 e'_2).

En lugar del segundo giro también podría haberse abatido el plano $P_1\ P'_1$ sobre el H, como está indicado en la figura.

Mas como quiera que los problemas referentes á ángulos de rectas que se cortan, requieren siempre operaciones que se han de verificar en un plano, el procedimiento más adecuado es el de abatimientos, limitándonos á él en los problemas subsiguientes y sirviendo tan sólo las dos figuras anteriores como un ejercicio más de cambio de planos y de giros.

En el caso actual basta abatir el plano de las dos rectas, sirviendo de charnela cualquiera de sus trazas ó una paralela á ellas (fig. 156).

144.—Problema 12. *Dividir un ángulo en dos partes iguales.*

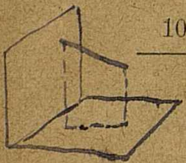
Abátase el plano del ángulo, trácese la bisectriz y hállense sus proyecciones, que será muy fácil, valiéndose de las del vértice, ya conocidas, y si es posible del punto en que aquélla corta á la charnela (fig. 156).

La figura 157 presenta un nuevo ejemplo de este problema. Una de las rectas dadas ($a\,b$-$a'\,b'$) es horizontal y se ha utilizado como charnela del abatimiento buscando el $a\,C_1$ de la otra recta por medio de un punto cualquiera (c-c'). Verificado dicho abatimiento se ha trazado la bisectriz $a\,D_1$, cuyas proyecciones se han hallado del modo siguiente: Por uno de sus puntos D_1 se ha trazado la $D_1\,E_1$ paralela á la charnela; las proyecciones de esta paralela son ($e\,d$-$e'\,d'$) sobre las cuales ha de estar el punto (d-d') que acaba de determinar la bisectriz ($a\,d$-$a'\,d'$).

145.—Problema 13. *Dada una recta y un punto trazar por él otra recta que forme con aquélla un ángulo* α.

Abatiendo el plano de los datos será fácil resolver este problema y volver luego á las proyecciones. Las figuras 158 y 159 presentan dos ejemplos de este problema.

Si el punto dado lo fuese sobre la recta, el problema sería indeterminado.



ÁNGULO DE RECTAS Y PLANOS

146.—PROBLEMA 14. *Hallar el ángulo que una recta forma con un plano.*

Este ángulo se mide por el que forma la recta con su proyección sobre el plano, es decir, con la que une los pies de dos perpendiculares trazadas al mismo desde dos puntos de la recta; pero es más sencillo determinar el ángulo formado por la recta dada y una de dichas perpendiculares, pues es complementario del que se busca, quedando siempre reducido el problema á buscar el ángulo de dos rectas.

147.—PROBLEMA 15. *Por un punto dado, trazar una recta que forme un ángulo* α *con un plano conocido.*

Basta trazar por el punto una recta que forme un ángulo igual á 90°-α con la perpendicular trazada desde el punto al plano. Este problema es indeterminado (**145**).

148.—PROBLEMA 16. *Hallar los ángulos que una recta forma con los planos de proyección.*

Colocando la recta paralela á cada uno de los planos de proyección, se proyectará sobre éste, en su verdadera magnitud, el ángulo que la recta forma con el otro plano. Así
Lám. 14 (figura 160) haciendo girar la recta ($a\,b$-$a'\,b'$) alrededor del eje ($x\,y$-$x'\,y'$) primero y del ($z\,u$-$z'\,u'$) después, hasta colocarla paralela á los planos á que lo son aquéllos, obtendremos en α y 6 los ángulos que se trata de determinar.

Si de la recta se conocen sus dos trazas, pueden hacerse los giros como manifiesta la fig. 161.

También se resuelve este problema con suma sencillez por medio de cambio de planos, tomando sucesivamente los proyectantes de la recta, ó lo que es lo mismo, abatiendo cada uno de éstos sobre el respectivo de proyección (figura 162).

Observemos que la suma de los ángulos que forma una recta con los dos planos de proyección, no puede exceder de 90°. Efectivamente, trazando por un punto de la línea de tierra una paralela á la recta considerada, formará con aquellos planos los mismos ángulos que ésta. Sea, pues, $a\,B$ (figura 163) esta paralela, sus proyecciones serán $B\,a$, $B\,a'$ y tendremos formado en el punto A el triedro $A\,B\,a\,a'$, el cual nos manifiesta que

$$a'A\,B + B\,A\,a > a'A\,a$$

ó sea

$$90^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha > 90^\circ \text{ ó } 180^\circ - (\alpha + \beta) > 90^\circ \text{ ó } 90^\circ > \alpha + \beta$$

Si el triedro A no existiese, es decir, si las tres rectas $A\,a'$ $A\,B$ y $A\,a$ estuviesen en un mismo plano, se verificaría $90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = a'\,A\,a$ ó $180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$ y $\alpha + \beta = 90^\circ$; pero esto sólo puede ocurrir cuando $A\,B$ esté situado en un plano perpendicular á la línea de tierra y entonces efectivamente son complementarios los ángulos que forma con ambos planos de proyección.

149.—Problema 17. *Trazar por un punto dado una recta que forme los ángulos α y β respectivamente con cada uno de los planos de proyección.*

Quedará resuelto este problema trazando por el punto dado una paralela á una recta que corte á la línea de tierra y forme con los planos de proyección los ángulos propuestos.

Para trazar una recta en estas condiciones, supongamos que $(a\text{-}a')$ (fig. 164) sea el punto elegido en la línea de tierra y si imaginamos trazada ya por este punto la recta $(a\,b\text{-}a'\,b')$ que forme el ángulo α con el plano H y el β con el V es claro que haciéndola girar sucesivamente alrededor de los ejes $(x\,y\text{-}x'\,y')$, $(z\,u\text{-}z'\,u')$ hasta dejarla abatida sobre cada uno de los planos de proyección, tomará las posiciones $(a\,b_1\text{-}a'\,b'_1)$ y $(a\,b'\text{-}a'\,b'_2)$, marcándose entonces en su verdadera magnitud los referidos ángulos α y β.

Tomemos las distancias iguales $a' b'_1$ y $a b_2$, con lo cual b'_1 y b_2 serán los abatimientos sobre cada plano de proyección de un mismo punto B de la recta en el espacio. Para conocer las proyecciones de ésta, basta hacer girar la recta ($a b_1$-$a' b'_1$), que forma ya el ángulo α con el plano H, alrededor de ($x y$-$x' y'$) hasta que forme con el otro el ángulo β. En este movimiento el punto (b_1-b'_1) describirá una circunferencia de plano horizontal cuyas proyecciones son ($c c c c$-c') y es evidente que en ellas han de encontrarse las del punto B del espacio.

Conseguiríamos también hallar las de la recta buscada haciendo que la ($a b_2$-$a'_1 b'_2$), que forma el ángulo β con el plano V, gire alrededor de ($z u$-$z' u'$) hasta que forme el α con el plano H, y como en este movimiento (b_2-b'_2) describirá una circunferencia cuyo plano será paralelo al V representada por (d-$d' d' d' d'$), resulta también que las proyecciones del punto B han de estar sobre $d' d' d' d'$ y sobre d. Luego este punto ha de proyectarse horizontalmente sobre $c c c c$ y sobre d y verticalmente en $d' d' d' d'$ y c'; por consiguiente, sólo 1 y 2 podrán ser proyecciones horizontales de dicho punto B y $1'$ y $2'$ las verticales y debiendo la recta buscada pasar también por (a-a') podrá tener cuatro posiciones distintas, asignadas por la combinación de proyecciones siguientes: ($1 a II$-$1' a' II'$), ($1 a II$-$I' a' 2'$), ($2 a I$-$2' a' I'$) y ($2 a I$-$II' a' 1'$).

Si (m-m') fuese el punto dado en el enunciado del problema, trazaríamos por él una paralela á cada una de las rectas anteriores, resultando las ($1 m II$-$1' m' II'$), ($1 m II$-$I' m' 2'$) ($2 m I$-$2' m' I'$) y ($2 m I$-$II' m' 1'$) que dan cuatro soluciones definitivas del problema y son las cuatro aristas de la pirámide cuadrangular $M, 1, 2, II, I$.

ÁNGULOS DE PLANOS

150.—Problema 18. *Determinar el ángulo que forman dos planos.*

La medida de un diedro es la del rectilíneo correspondiente, y trazando éste queda reducido el problema á buscar el ángulo de dos rectas.

Para obtener dicho rectilíneo no hay más que trazar por un punto de la intersección de los planos dados, otro que sea perpendicular á la misma y hallar su intersección con aquéllos.

También puede resolverse este problema trazando desde un punto cualquiera una perpendicular á cada plano y tomando el suplemento del ángulo que forman estas dos perpendiculares.

Pero pueden simplificarse mucho las operaciones y obtener el plano del ángulo rectilíneo correspondiente del modo más ventajoso para que el dibujo no salga de los límites del papel, considerando que si $M N$ y $P N$ (fig. 165) son los planos propuestos y $Q R$ uno de los de proyección, $A B$ será la intersección de aquéllos, que se proyectará sobre éste según $A b$. El plano del ángulo rectílineo puede ser el $c S T$, en el cual se forma el triángulo $c d e$ cuyo ángulo en c es el pedido.

Si abatimos dicho triángulo sobre el plano de proyección, sirviendo de charnela $S T$, el vértice c se colocará en C_1 sobre la proyección $A b$ de $A B$ y el radio del círculo $c C_1$ será la altura $f c$ del mencionado triángulo, altura que á su vez mide la menor distancia entre f y $A B$ puesto que $f c$ es perpendicular á esta recta. No se pierda de vista que f es la intersección de la proyección $A b$ y de la traza $S T$.

Además el triángulo $C_1 d e$ que nos ha de proporcionar el ángulo C_1 buscado, puede construirse por medio de su base $d e$ y su altura $f C_1 = f c$ ó bien por medio de aquélla y los otros dos lados $d C_1 = d c$ y $e C_1 = e c$.

En su consecuencia, sea (fig. 166) $M N M'$ y $P Q P'$ los planos dados y $a b$ la proyección horizontal de su intersección. La recta $S T$, perpendicular á $a b$, representa lo mismo que en la figura anterior, así como los puntos d y e, siendo, por lo tanto, $d\,e$ la base del triángulo que nos ha de facilitar el ángulo que se busca.

La altura de este triángulo es la menor distancia entre el punto f y la intersección de los planos dados, que puede obtenerse en $a\,B_1$ abatida alrededor de $a\,b$, siendo aquella menor distancia la $f\,C_1$ y el triángulo en cuestión el $d\,C_2\,e$, señalando estas mismas letras el ángulo de los dos planos.

El mismo triángulo puede construirse también, como hemos dicho, por medio de sus tres lados. Abatamos la intersección de los planos dados, con cada uno de ellos, alrededor de sus respectivas trazas, obteniendo $a\,B_2$ y $a\,B_3$; las perpendiculares $d\,C_2$ y $e\,C_3$ serán los otros dos lados del triángulo, y éste, como antes, el $d\,C_2\,e$.

El ángulo de dos planos se presentaría en su verdadera magnitud si la intersección de aquéllos fuese perpendicular á uno de los planos de proyección, pues las trazas sobre éste constituirían el rectílineo correspondiente. Cuando no se verifique esta circunstancia puede obtenerse por cambios de planos ó por giros. El primer método se ha aplicado en la
Lám. 15. figura 167, en la que $h\,v$ es la proyección horizontal de la intersección de los planos. $X'\,Y'$ representa el cambio de plano vertical por el proyectante de aquélla y $R\,h\,R''$, $P\,h\,P''$ y $(h\,v\text{-}h\,v'')$ son los planos y su intersección en el nuevo sistema. El plano H se ha substituído por otro $X''\,Y''$, perpendicular á dicha recta y sobre este plano se han obtenido las nuevas trazas R''' y P''' mediante los puntos $(a\text{-}a')$ y $(b\text{-}b'')$, siendo por consiguiente $P'''\,h\,R'''$ el ángulo pedido.

Las figuras 168, 169 y 170 presentan casos particulares de este problema. En la última los planos están determinados por la línea de tierra y los puntos $(a\text{-}a')$ y $(b\text{-}b')$ respectivamente.

151.—PROBLEMA 19. *Por una recta situada en un plano dado trazar otro que forme con él un ángulo α.*

Se resuelve este problema de un modo análogo al anterior. La recta dada ha de ser la intersección de los dos planos ó la arista del diedro que se trata de formar y siguiendo los procedimientos indicados en la fig. 166 suponiendo en ella que $M N M'$ y (a b-a' b') sean los datos, podremos trazar el triángulo d C_2 e, puesto que en vez de la base d e conocemos ahora el ángulo α. C_2 e determinará el punto e y éste y el a la traza P del plano que se busca, cuya otra traza será la P'.

Por cambio de planos ó por giros también puede resolverse este problema.

152.—PROBLEMA 20. *Trazar el plano bisector de un diedro dado.*

Por cualquiera de los procedimientos indicados en el problema 18 se hallará la verdadera magnitud del rectilíneo correspondiente al diedro dado, se trazará su bisectriz, y esta recta y la arista de aquél determinarán el plano bisector.

153.—PROBLEMA 21. *Hallar los ángulos que un plano forma con los de proyección.*

Es un caso particular del problema 18, y se resuelve también trazando los rectilíneos correspondientes y hallando sus verdaderas magnitudes (fig. 171). Sí

154.—PROBLEMA 22. *Por una recta dada, trazar un plano que forme un ángulo α con uno de los de proyección.*

Sea éste el horizontal, y supongamos que $P Q P'$ (figura 172) es el plano que resuelve el problema, conteniendo, por lo tanto, la recta dada (h v-h' v').

Si quisiéramos ahora encontrar el ángulo que forma este plano con el horizontal, aplicaríamos la construcción del problema anterior, tomando el plano $X v X'$ de modo que pase por v v', con lo que obtendremos el ángulo v' m_1 $v = \alpha$. Por consiguiente, efectuando estas operaciones en un orden inverso llegaremos al plano $P Q P'$. Así, pues, por la traza vertical de la recta dada trazaremos la v' m_1, que forme con la línea de tierra el ángulo α, haciendo centro en v describiremos la circunferencia $m_1 m n$, á la cual se tirará la tangente PQ desde la traza horizontal de la recta dada y esta tangente será la del plano pedido. La otra será la P'. Como desde h pueden trazarse, en general, dos tangentes, el problema tendrá dos soluciones, que se reducirán á una ó ninguna, según las circunstancias de los datos.

155.—PROBLEMA 23. *Por una recta dada, trazar un plano que forme un ángulo α con otro plano conocido.*

Cámbiense los planos de proyección de manera que el dado sea uno de los del nuevo sistema, y nos hallaremos en el problema anterior.

156.—PROBLEMA 24. *Por un punto dado, trazar un plano que forme los ángulos α y β con otros dos conocidos.*

Ante todo, cambiaremos el sistema de planos de proyección, de modo que uno de los dados sea el H ó V del nuevo sistema y el otro sea perpendicular al V ú H. En su consecuencia, para no complicar el dibujo y no distraer la atención del objeto del problema, tomaremos ya los planos dados en estas condiciones y sean, por ejemplo, el H de proyección, de la figura 173, uno de ellos y el PQP', perpendicular al V, el otro.

Supongamos resuelto el problema, y que RSR' es el plano pedido. Hagamos las construcciones necesarias para hallar los ángulos que forma este plano con los dos propuestos, y es claro que siguiéndolas después en un orden inverso, llegaremos al mismo plano RSR'.

Mediante el plano XQX' elegido de modo que pase por el punto Q del plano dado PQP, encontraremos el ángulo $v'h_1Q=\alpha$ que RSR' forma con el horizontal de proyección. Haciendo un cambio de planos de modo que el horizontal quede substituido por el PQP' la nueva línea de tierra será $X'Y'$ ó P' y R'' la nueva traza del plano RSR', y es claro que para hallar el ángulo que éste forma con el PQP', basta hallar el que forma en el nuevo sistema con el horizontal de proyección, lo que conseguiremos con el auxilio del $Y Q Y'$, que pasa también por Q, dando por resultado el ángulo $u' k_1 Q = \beta$.

Observemos ahora que los planos $X Q X'$ é $Y Q Y'$ pasan los dos por el punto Q y son á la vez perpendiculares al $R S R'$, luego se cortarán según una cierta recta $Q M$ que pasará también por Q y será igualmente perpendicular á dicho plano, así como á sus intersecciones con aquellos dos.

Esta recta, abatida con el plano $X Q X'$ sobre el vertical del primer sistema de planos de proyección, es la $Q M_1$ perpendicular á $v' h_1$ y abatida con el $Y Q Y'$ sobre el vertical del segundo sistema, que es el mismo del primitivo, será la $Q M_2$ perpendicular á $u' k_1$, por consiguiente será $QM_1 = QM_2$, y si haciendo centro en Q se describe una circunferencia con este radio, pasará por M_1 y M_2 tangentemente á las rectas $v' h_1$ y $v' k_1$.

En virtud de lo dicho, la construcción inversa que se deduce para resolver el problema es la siguiente: Hágase centro en Q y descríbase la circunferencia $M_1 M_2 N$ á la cual se trazarán las tangentes $v' h_1$ con la inclinación α sobre la línea de tierra y $u' k_1$ con la β sobre la traza P' del plano dado. Ambas tangentes cortarán respectivamente á las perpendiculares trazadas por Q á las líneas con que forman los ángulos α y β, en los puntos v' y u' que unidos darán la recta $u' v'$ que es la traza vertical R' del plano que se busca. La otra traza R será la tangente $S R$ al círculo $h_1 h$.

La dificultad estriba en conocer el radio $Q M_1$ para empezar las construcciones indicadas; pero se puede elegir uno cualquiera, y entonces el plano que se obtenga no pasará por el punto propuesto, debiendo trazar por éste otro plano paralelo á aquél.

Este problema puede tener hasta ocho soluciones, que se reducirán á menor número según las circunstancias de los datos. Efectivamente, se pueden trazar cuatro tangentes á $M_1 M_2 N$ que formen ángulos α con la línea de tierra, y son $v' h_1$, $v' h'$, $v h_1$ y $v h'$; otras cuatro que formen ángulos β con la traza P', esto es, $u'\,k_1$, $u\,k_2$, $u\,k_1$, $u'\,k_2$, por lo tanto, para traza vertical del plano pedido resultan las cuatro rectas $v'\,u$, $v'\,u'$, $v\,u'$ y $v\,u$; pero además con cada una de estas trazas verticales hay que combinar dos horizontales distintas, por ejemplo, desde el punto S se pueden trazar dos tangentes al círculo $h_1\,h$, luego en total son ocho soluciones.

157.—PROBLEMA 25. *Por un punto dado, trazar un plano que forme los ángulos α y β con los planos de proyección.*

Es un caso particular del problema anterior y lo resolveremos análogamente.

Lám. 16. Supongamos (fig. 174) que está ya trazado el plano $P\,Q\,P'$ que forma los ángulos α y β con los de proyección. Para determinar estos ángulos nos valdremos de los $X\,O\,X'$ é $Y\,O\,Y'$, que pasan por un mismo punto cualquiera O de la línea de tierra y que abatidos respectivamente sobre los planos V y H producen los ángulos $v'\,h_1\,O=\alpha$ y $u\,k'_1\,O=\beta$.

Pero la intersección de los dos planos auxiliares es una recta $O\,M$, perpendicular al plano $Q\,P\,Q'$, que se encuentra abatida en $O\,M_1$ y $O\,M_2$, luego $O\,M_1=O\,M_2$ y tanto $v'\,h_1$ como $u\,k'_1$ son tangentes á la circunferencia $M_1\,M_2\,N$; por consiguiente, para resolver el problema trácese una circunferencia cualquiera, cuyo centro esté sobre la línea de tierra y á uno y á otro lado de esta línea, formando los ángulos α y β con ella, trácense dos tangentes á dicha curva, que determinarán en su intersección con la recta $X'\,Y$ dos puntos v' y u. Desde el primero trácese una tangente al círculo $k'\,k'_1$ y desde el segundo otra al $h_1\,h$, y estas tangentes, que deben cortar á la línea de tierra en un mismo punto, serán las trazas del plano. El paralelo á éste por el punto dado será el pedido.

Este problema puede tener varias soluciones.

Observando que cuando una recta y un plano son perpendiculares, los ángulos que forman una y otro con un segundo plano son complementarios, deduciremos que puede resolverse también el problema actual trazando una recta que forme con los planos de proyección los ángulos $90''—\alpha$ y $90^0—\beta$, y luego por el punto propuesto un plano perpendicular á dicha recta.

Se ha visto (148) que la suma de los ángulos que una recta forma con los planos de proyección no puede exceder de 90^0, luego para que el problema de que tratamos sea posible, es preciso que $90^0-\alpha+90^0-\beta=180^0-(\alpha+\beta)<90$ ó $\alpha+\beta>90^0$, es decir, que la suma de los ángulos que forma un plano con los de proyección, ha de ser mayor que un recto.

Si $90^0-\alpha+90^0-\beta=90^0$ resulta también $\alpha+\beta=90^0$; pero entonces aquella recta es perpendicular en dirección á la línea de tierra, y el plano por lo tanto paralelo á la misma, en cuyo caso fácil es comprobar que efectivamente son complementarios los ángulos que forma con el H y V de proyección.

ÁNGULO TRIEDRO

158. En la Trigonometría esférica se aprende á resolver los problemas anejos al ángulo triedro por medio del cálculo, pero por los procedimientos de la Geometría Descriptiva se pueden resolver también gráficamente.

Ante todo ocupémonos de la representación de un ángulo triedro. No siendo éste más que la reunión de tres planos que pasan por un mismo punto, su representación debe ser la de estos tres planos con dicha circunstancia; mas á fin de simplificar las operaciones que deben hacerse luego con el triedro, se toman desde un principio los planos de proyección en condiciones determinadas, á las cuales se puede llegar en todo caso, por medio de cambios de planos ó de giros.

159. Para plano horizontal se toma el de una de las caras del triedro y para vertical otro que sea perpendicular á una de las aristas que limitan dicha cara. Así si $a\ s\ b$ es esta cara (fig. 175), su plano se tomará como plano horizontal de proyección y el vertical se elegirá perpendicular á la arista $a\ s$, por ejemplo. Los otros dos planos que constituyen el triedro serán el $P\ a\ P'$ y el $Q\ b\ Q'$. En su consecuencia, el vértice de dicho triedro tendrá por proyecciones (s-s'); las aristas ($s\ a$-$s'\ a'$), ($s\ b$-$s'\ b'$) y ($s\ c$-$s'\ c'$); las tres caras ($a\ s\ b$-$a'\ s'\ b'$), ($a\ s\ c$-$a'\ s'\ c'$) y ($b\ s\ c$-$b'\ s'\ c'$) y los tres diedros serán los que los planos $P\ a\ P'$ y $Q\ b\ Q'$ forman entre sí y con el horizontal.

Por este sistema de representación se conocen desde luego en su verdadera magnitud una cara, la $a\ s\ b$, y el diedro que forma $P\ a\ P'$ con el plano horizontal, cuya medida es el ángulo $c'\ s'\ b'$. Los otros cuatro elementos hay que determinarlos como corresponde á cada uno de ellos, es decir, como ángulos de rectas las caras y como ángulos de planos los diedros. Aplicando, pues, los métodos aprendidos (143) y (150) resultará que $a\ s\ C_1$ y $b\ s\ C_2$ son las otras dos caras y $c'\ n_4\ c$ y $d\ M_3\ e$ los otros diedros.

160. De las construcciones ejecutadas se desprende que dado un ángulo triedro por sus proyecciones, se pueden deducir de ellas las magnitudes de sus seis elementos, y como es sabido que conociendo tres de ellos se pueden determinar los otros, en Geometría Descriptiva se considerará resuelto un ángulo triedro siempre que por medio de tres de sus elementos hayamos obtenido las proyecciones de dicho ángulo, pues entonces estaremos en el caso de la figura 175 y podremos deducir los otros tres.

Sabido es también que los problemas á que da lugar el ángulo triedro son seis distintos, que pueden reducirse á tres, mediante la consideración del triedro suplementario, cuyas propiedades es inútil recordar aquí. Sin embargo daremos la solución directa de dichos seis problemas, llamados vulgarmente casos del ángulo triedro.

161.—PROBLEMA 26. *Resolver un ángulo triedro conocidas sus tres caras* (fig. 176).

Sean α, α', α'' los ángulos dados. Tomaremos el plano de uno de ellos, por ejemplo el del α', para plano horizontal de proyección y el vertical que sea perpendicular á la arista $s\,a$. Tomemos también las distancias $s\,C_2 = s\,C_1$ y como para construir el triedro basta hacer girar las caras α y α'' alrededor de $s\,b$ y $s\,a$ respectivamente, hasta que las otras aristas $s\,C_1$ y $s\,C_2$ se reunan en una sola en el espacio, que será la tercera del triedro, es claro que los puntos C_1 y C_2 se confundirán también después de este movimiento, en uno solo C; pero C_1, al girar alrededor de $s\,a$, describirá un arco de círculo $C_1\,c'$ en el plano vertical de proyección, C_2 otro arco de círculo cuyo plano, perpendicular á la charnela, será el $C_2\,c\,c'$; por lo tanto, sólo en la intersección $c\,c'$ de estos dos planos podrá hallarse el punto C del espacio y como ha de estar también en el arco $C_1\,c'$ será precisamente aquél en que este arco corte aquella recta, punto cuyas proyecciones son (c-c'), resultando para las del triedro ($s\,a\,b\,c$-$s'\,a'\,b'\,c'$).

162.—PROBLEMA 27. *Construir un triedro, conocidas dos caras y el diedro comprendido* (fig. 177).

Sean α, α' y δ los datos. Tomemos el plano del ángulo α para horizontal de proyección y el vertical perpendicular á la arista $s\,a$ del diedro conocido, por lo que se representará éste en su verdadera magnitud, según $c'\,a'\,b'$, cuando la cara α' haya girado alrededor de $s\,a$ hasta obtener su verdadera posición. Al verificarse este movimiento el punto C_1 irá á parar á c' y este punto y el b determinarán la traza vertical de la tercera cara del triedro, cuya otra traza es $s\,b$, siendo ($s\,a\,b\,c$-$s'\,a'\,b'\,c'$) las proyecciones del triedro.

163.—PROBLEMA 28. *Construir un triedro, dada una cara y los dos diedros adyacentes* δ *y* δ' (fig. 178).

Sea α la cara conocida cuyo plano será el horizontal de proyección, tomando el vertical como en los casos anteriores. Por $s\ a$ debe pasar un plano que forme el ángulo δ con el plano horizontal y que puede trazarse inmediatamente, puesto que se representa en su verdadera magnitud, según $c'\ a'\ b'$. Por $s\ b$ ha de pasar otro que forme el ángulo δ' también con el horizontal, lo que conseguiremos siguiendo las construcciones indicadas en el párrafo (**151**). La intersección de estos dos planos será la tercera arista del triedro.

164.—Problema 29. *Dadas dos caras y el diedro opuesto á una de ellas, construir el triedro* (fig. 179).

Elíjanse los planos de proyección como en los casos anteriores, pero el vertical perpendicular á la arista común á las dos caras dadas, que supondremos sean las α, α' así como δ el diedro conocido. Debiendo formarse éste en la arista $s\ b$ trazaremos por ella un plano $m\ b\ n'$ que forme dicho ángulo con el horizontal y bastará luego hacer girar la cara α' alrededor de $s\ a$, hasta que $s\ C_1$ quede adaptada en aquel plano. En este movimiento C_1 describirá el arco de círculo C, $c'\ c''$, deteniéndose cuando encuentre á la traza $n'\ b$, lo cual puede suceder en los dos puntos c' y c'', pudiendo tener por lo tanto el problema dos soluciones, que son ($s\ a\ b\ c$-$s'\ a'\ b'\ c'$) y ($s\ a\ b\ c_1$-$s'\ a'\ b'\ c''$).

Dichas dos soluciones pueden reducirse á una ó á ninguna según sean los datos, no entrando en la discusión de éste y los demás casos del ángulo triedro por estar íntimamente ligada con las de los triángulos esféricos, cuya resolución se estudia extensamente en su lugar.

165.—Problema 30. *Resolver un triedro, conocidos los diedros δ y δ' y la cara α opuesta á uno de ellos, al segundo por ejemplo* (fig. 180).

La cara α será una de las que forman el diedro δ, y si se toma la otra para plano horizontal de proyección y el vertical perpendicular á la arista del mismo diedro, éste estará representado en su verdadera magnitud en $c'\ a'\ b'$, cuando la cara α, abatida en un principio, haya tomado la posición debida en el espacio, en cuyo caso C_1 se habrá colocado en c' y las proyecciones de $S\ C$ serán ($s\ c$-$s'\ c'$). La tercera cara debe pasar por esta recta y formar con el plano horizontal el ángulo δ'; por consiguiente para concluir el trazado del triedro hágase pasar por ($s\ c$-$s'\ c'$) un plano $c'\ b'\ s$, en las condiciones dichas (**154**), según manifiesta la figura.

166.—Problema 31. *Construir un triedro conocidos sus tres diedros* δ, δ' *y* δ'' (fig. 181).

Tómense los planos de proyección análogamente á los anteriores y el triedro quedará construído trazando dos planos que formen los ángulos δ y δ' con el horizontal y el δ'' entre sí. El que forme dicho ángulo δ será el $c'\ s'\ s$ y sólo falta trazar ahora por un punto cualquiera otro plano que forme los ángulos δ' con el horizontal y δ'' con $c'\ s'\ s$. Este plano es el $c'\ b\ s$ (156) y las proyecciones del triedro ($s\ a\ b\ c$-$s'\ a'\ b'\ c'$).

167.—Triedro trirectángulo. Este triedro no da lugar á ningún problema, pues todos sus elementos son conocidos, y respecto á su representación podría hacerse como la de otro cualquiera; pero en virtud de las circunstancias especiales que reune, es susceptible de una más sencilla y que indica desde luego la clase de triedros á que se refiere.

Tomaremos para plano horizontal de proyección uno que corte á las tres aristas del triedro y las trazas horizontales de sus caras constituirán un triángulo, tal como el $a\ b\ c$ (figura 182). Elíjase el plano vertical perpendicular á uno de sus lados, al $a\ c$, por ejemplo, y $a'\ b'\ c'$ será la proyección sobre dicho plano de este triángulo.

Las aristas de un triedro trirectángulo son perpendiculares á las caras opuestas; luego las proyecciones de aquéllas lo serán á las trazas de éstas y como dichas proyecciones han de partir de los vértices a, b, c, las rectas $a\,s$, $b\,s$ y $c\,s$ trazadas perpendicularmente á los lados opuestos, serán las proyecciones horizontales de las referidas aristas, las cuales, según una propiedad de los triángulos, concurrirán á un mismo punto s, que será la proyección de igual nombre del vértice del triedro.

La proyección vertical de $s\,b$ ha de ser perpendicular á la traza vertical de la cara $s\,a\,c$, y s' se ha de corresponder con s por una perpendicular á la línea de tierra, lo que conduce á la construcción hecha en la figura 182.

168.—Problema 32. *Reducir un ángulo al horizonte.*

Supongamos que desde un punto P (fig. 183) y con un instrumento de medir ángulos se haya observado el A que forman las dos visuales que pasan por otros dos puntos B y C, situados en un plano horizontal $R\,Q$, en el que P está proyectado en p. En medir el ángulo a ó $B\,p\,C$ consiste la operación de reducir el ángulo A al horizonte (1).

Si además del ángulo A se observan los β y γ que las visuales $P\,B$ y $P\,C$ forman con la vertical $P\,p$, conoceremos las tres caras del triedro P, cuya resolución nos daría la medida del diedro $P\,p$ ó a, que es el ángulo buscado; pero puede seguirse un procedimiento más expedito valiéndose también del sistema de proyecciones.

Tomemos para planos de proyección el $R\,Q$ y el del triángulo $p\,P\,B$, que podrá trazarse desde luego en $p\,p'\,b'$
Lám. 17. (figura 184) midiendo la altura $p'\,p = P\,p$ de la figura anterior. Consideremos abatido sobre el mismo plano vertical en $p\,p'\,c_1$ el triángulo $p\,P\,C$ y es claro que deshaciendo este abatimiento hasta que $p'\,c_1$ forme con $p'\,b'$ el ángulo A, obtendremos en $b'\,p\,c$ el ángulo buscado.

(1) Esta cuestión se presenta en Topografía y se resuelve más ventajosamente por el cálculo.

Al girar dicho triángulo $p\ p'\ c_1$, c_1 describirá el arco de círculo $c_1\ c$ y para conocer cuando debe detenerse el movimiento, formemos sobre $p'\ b'$ el triángulo $p'\ b'\ c'_2 = P\ B\ C$, es decir, formemos el ángulo $b'\ p'\ c'_2 = A$ y tomemos $p'\ c'_2 = p'\ c_1$, y es claro que deberá detenerse el movimiento de $p'\ c_1$ cuando resulte $b'\ c = b'\ c'_2$; por consiguiente descríbase el arco $c'_2\ n\ c$, con el centro en b', y el punto c en que corte al $c_1\ c$ resuelve el problema.

Capítulo IV.

Poliedros.

PROYECCIONES

Poliedros en general.—169. Sabido el modo de representar en proyecciones un punto, una recta y un plano, no puede haber dificultad en representar de igual manera un conjunto de dichos elementos, y si se trata de un cuerpo cualquiera bastará representar las superficies que lo limitan por medio de sus proyecciones. Así, pues, cuando deba representarse un poliedro señalaremos las proyecciones de cada uno de sus vértices, que unidas de dos en dos convenientemente, proporcionarán las de las aristas de aquél y éstas á su vez determinarán sus distintas caras, como se ve en la figura 185.

Si el poliedro es una pirámide se dará generalmente el polígono de su base y el vértice, debiendo unirse éste con cada uno de los de aquél (fig. 186).

Cuando sea un prisma del que se conozca la base y la dirección de sus aristas, se trazarán por los vértices de aquélla paralelas á la dirección dada, terminándolas en un plano paralelo al de la base y á la distancia que se fije (fig. 187).

Siempre que se pueda se tomará el plano de la base de la pirámide ó del prisma como plano horizontal de proyección y en este caso estarán representados como en las figuras 188 y 189.

170. Cualquiera que sea el poliedro representado, cada una de sus proyecciones afectará siempre una figura de contorno poligonal en cuyo interior y perímetro estarán las de todos sus vértices y aristas. Estos polígonos se denominan contornos aparentes de la proyección horizontal ó vertical, pero uno y otro no son iguales ni son proyecciones de un mismo polígono. Podemos formarnos idea de estos contornos aparentes imaginando una recta perpendicular á cada uno de los planos de proyección y que se mueve, conservando esta perpendicularidad, apoyándose constantemente sobre el poliedro. Sus trazas marcarán entonces sobre cada uno de aquellos planos el contorno aparente respectivo. Habiendo supuesto al observador á una distancia infinita delante del vertical ó por encima del horizontal, según la proyección que se considere, las distintas posiciones de cada una de aquellas rectas constituyen un haz de rayos visuales que determinan la silueta ó contorno bajo el cual se nos presenta el cuerpo observado desde dichos lejanos puntos; por esta razón se les da el nombre de contornos aparentes. En la figura 185, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, es el contorno aparente horizontal y 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 9′, 8′, 1′, el vertical.

171. Téngase presente que cualquiera que sea la posición de un poliedro en el espacio, nunca pueden ser vistas todas sus aristas, y para distinguir en cada proyección cuáles lo son y cuáles no, aplicaremos las reglas establecidas (64) para este fin, aparte de que, por muy poca costumbre que se tenga de ver en el espacio, salta en seguida á la vista qué aristas reunen ó no aquellas circunstancias.

172. Cuando un poliedro deba representarse por medio de sus proyecciones con el objeto de poderlo construir después, es conveniente considerarlo en posición tal que resulte el mayor número posible de caras y aristas paralelas á cualquiera de los planos de proyección, á fin de conocer desde luego sus verdaderas formas y magnitudes, deducien-

do las de aquéllas que no estén en igual caso por medio de las operaciones necesarias. Cuando, por el contrario, se trate de representar un poliedro ya construído, se le tomará en una cierta posición y se medirán las líneas que resulten horizontales y verticales, trazándolas sobre los planos de proyección del mismo nombre, de modo que guarden las posiciones relativas que tienen en el cuerpo. Para fijar las proyecciones horizontales de los demás puntos bastará, por medio de plomadas, determinar los pies de las perpendiculares trazadas al plano *H* desde dichos puntos, y para las verticales, medir las alturas de los mismos sobre aquel plano, ó sea la longitud de las perpendiculares representadas por las plomadas. Después deberán unirse convenientemente los puntos obtenidos sobre cada plano de proyección.

173. Como este procedimiento puede dar lugar á errores debe evitarse en lo posible, aprovechando para ello las relaciones de simetría ó regularidad que ofrezca la forma especial del cuerpo. Por ejemplo, si se trata de un prisma tomaremos para plano *H* de proyección el de una de sus bases y para *V* otro que sea paralelo á las aristas. Aquella base se trazará inmediatamente en proyección horizontal en su verdadera magnitud, ó reducida á escala, y suponiendo sea la $a\ b\ c\ d\ e$ (fig. 190), deduciremos de ella la $a'\ b'\ c'\ d'\ e'$. Por uno cualquiera de estos últimos puntos, tal como a', trazaremos una recta $a'\ g'$ que forme con la $X\ Y$ un ángulo igual al que las aristas del prisma forman con el plano de su base y la verdadera longitud de dichas aristas, que se medirá sobre el cuerpo, se llevará desde a' hasta g', con lo que $a\ g$, paralela á $X\ Y$, y $a'\ g'$ serán las proyecciones de una de ellas. Establecida la base y una arista terminaremos la representación del prisma como se sabe (169).

Ejemplos de lo mismo nos ofrecen también lo poliedros regulares, de cuya representación nos vamos á ocupar, suponiéndolos en la posición más ventajosa para ella.

1º) **Poliedros regulares.**—**174.**—Pirámide regular. Se trazará en el plano horizontal el polígono que ha de servirle de base; por el centro del círculo circunscripto á dicho polígono, se trazará una perpendicular á su plano, tomando en ella la altura de la pirámide y el vértice resultante se unirá con los de la base.

2º) **175.**—Prisma regular. Se trazará igualmente en el plano *H* una de sus bases, por cuyos vértices se levantarán perpendiculares, terminándolas en otro plano horizontal que diste del de la base la longitud ó altura señalada para el prisma.

Lám. 18. **176.**—Tetraedro (fig. 191). Este cuerpo es una pirá-
1º) mide triangular, regular, cuya altura es tal que las aristas laterales resultan iguales á los lados de la base. Por consiguiente se trazarán sus proyecciones del modo indicado (174), calculando antes su altura por medio del triángulo rectángulo $a\ d\ D_1$.

2º) **177.**—Octaedro (fig. 192). Se puede considerar formado este cuerpo por dos pirámides cuadrangulares, regulares, iguales, que tienen la base común, sus vértices á distinto lado de ella y una altura tal que las aristas laterales y los lados de la base resultan de igual longitud. Tomaremos el plano *H* paralelo al de la base común, quedando ésta proyectada por ejemplo, en ($b\ c\ d\ e$-$b'\ c'\ d'\ e'$) y no resta más que trazar sobre esta base dos pirámides en las condiciones dichas, cuya altura calcularemos como en el tetraedro por medio del triángulo rectángulo $e\ a\ F_1$, que en este caso ya está construído.

178.—Exaedro ó cubo (fig. 193). Basta observarla para
2º) comprender su trazado.

5º **179.**—Dodecaedro (fig. 194). Si nos fijamos en una cara cualquiera de este poliedro y en su opuesta, que le es paralela, observaremos que son dos pentágonos regulares iguales cuyos lados sirven de bases á otros diez, que de dos en dos tienen comunes los lados que concurren á los vértices de aquéllas.

Cada una de dichas caras con las cinco que le son adyacentes, constituyen, pues, una especie de corona, cuyo borde es una línea en zig-zag, formada por los lados no comunes de los cinco pentágonos laterales y enlazadas ambas coronas de modo que los salientes del borde de una de ellas encajan en los entrantes del de la otra.

Para obtener las proyecciones de este poliedro tracemos sobre un plano paralelo al H el pentágono (1 2 3 4 5-1′ 2′ 3′ 4′ 5′) que será la base de la corona inferior y además los 5, 4, 20_1, 11_1, 12_1, y 1, 5, 12_2, 13_1, 14_1 que representarán los abatimientos sobre el plano de aquélla de dos caras adyacentes. Si deshacemos estos abatimientos, girando ambos polígonos alrededor respectivamente de las charnelas 4, 5 y 1, 5, hasta que los lados 5, 12_1, 5, 12_2 se confundan en uno solo, como están en el espacio, podremos determinar sus proyecciones. En estos movimientos 12_1 no saldrá del plano vertical 12_1 *a* perpendicular á la charnela 5, 4, ni 12_2 del 12_2 *b* perpendicular á la 5, 1; luego el vértice 12 del espacio deberá estar en la intersección de ambos planos ó sea en la vertical proyectada en 12, cuyo pie es la proyección de aquél. La arista 5, 12 en el espacio, su proyección 5, 12 y la vertical que pasa por 12 constituyen un triángulo rectángulo, que abatido es el 5, 12, 12_3 y tomando *d* $12' = 12\ 12_3$ obtendremos la proyección vertical de 12.

La recta 5, 12 ha de concurrir al centro *o* del polígono de la base y como las aristas que parten de sus demás vértices 1, 2, 3 y 4 tienen la misma inclinación que aquélla, podremos trazar en seguida las 1, 14; 2, 16; 3, 18 y 4, 20; concurriendo también á *o* y de igual longitud que 5, 12, así como los puntos 14′, 16′, 18′, y 20′, situados todos en la paralela 12′, 16′ á 5′, 2′.

El vértice 11_1 al levantarse el polígono de que forma parte, no saldrá del plano vertical 11_1 *e* perpendicalar á la charnela; la diagonal 12_1 20_1 habrá tomado la posición 12, 20, así como el punto F_1 en que aquélla es cortada por la 5, 11_1, se habrá trasladado á *f* por consiguiente la intersección de las rectas 11_1 *e* y 5 *f* nos dará la proyección horizontal 11 de dicho vértice. Su proyección vertical se obtendrá tomando *d* 11′ igual al cateto de un triángulo rectángulo que tenga por base *e* 11 y por hipotenusa *e* 11_1, obteniéndose fácilmente después los puntos 13, 15, 17, y 19 y los 13′, 15′, 17′, y 19′, situados en la 11′ 17′, paralela á 5′ 2′.

Uniendo convenientemente los puntos encontrados nos formarán las dos proyecciones de la corona inferior.

Para la superior debe observarse que para que las partes salientes de su borde encajen en los entrantes del de la otra, es preciso que el pentágono central de la primera se proyecte horizontalmente de modo que sus vértices 6, 7, 8, 9, y 10 ocupen los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados del pentágono que le es paralelo, y una vez trazado así no hay más que unir dichos vértices respectivamente con los 13, 15, 17, 19 y 11, para dejar terminada la proyección horizontal de todo el poliedro.

La vertical lo quedará también trazando la recta 10′ 8′, que diste de la 11′ 17′ tanto como la 12′ 16′ de la 5′ 2′, en virtud de la simetría que guarda la corona superior respecto á la inferior, y proyectando los vértices 6, 7, 8, 9 y 10 sobre aquella recta en 6′, 7′, 8′, 9′ y 10′, cuyos puntos deben unirse con los 13′, 15′, 17′, 19′ y 11′.

180.—Icosaedro (fig. 195). Coloquemos este poliedro de manera que la diagonal que une dos vértices opuestos cualesquiera sea vertical y en esta disposición observaremos que el icosaedro se compone de dos pirámides pentagonales, regulares, iguales é invertidas, una superior y otra inferior, teniendo ambas por vértices los dos del poliedro que determinan aquella diagonal y la altura precisa para que las

No

aristas laterales resulten iguales á los lados de las bases. Estas tienen sus planos paralelos y están dispuestas de modo que al hallar sus proyecciones sobre un plano paralelo á ellas, los vértices de la superior quedan proyectados en los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de la inferior, en la circunferencia circunscripta á la misma.

Dichas dos pirámides están enlazadas por una faja compuesta de diez triángulos equiláteros, á los cuales sirven de base y vértice los lados y vértices de las bases de aquéllas y teniendo además cada dos un lado común.

Sentado esto, procedamos á determinar las proyecciones. Tomemos para plano horizontal uno paralelo al de las bases de las referidas pirámides, cuyos polígonos se proyectarán sobre aquél en su verdadera magnitud, así que no habrá más que trazarlos en la disposición que antes hemos indicado. Estos pentágonos son los 2, 3, 4, 5, 6 y 7, 8, 9, 10, 11, cuyas proyecciones verticales serán dos rectas paralelas á XY tales como 2′, 3′, 4′, 5′, 6′ y 7′, 8′, 9′, 10′, 11′, cuya separación fijaremos luego. En el punto 1, 12, centro común de los dos pentágonos, estarán proyectados los vértices 1 y 12 de las dos pirámides; unido dicho punto con los vértices de ambos polígonos, formarán las proyecciones de aquéllas; así como uniendo también cada vértice de la base de la superior con los dos de la inferior, que determinan la cuerda que subtiende el arco cuyo punto medio ocupa aquél, resultarán proyectados los diez triángulos que enlazan una pirámide con otra y con ello concluída la proyección horizontal del poliedro.

De su proyección vertical conocemos ya los puntos 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′, 9′, 10′ y 11′. Las de los vértices de las dos pirámides deberán estar en la 1′ 12′ perpendicular á XY, equidistantes de las rectas 6′ 3′ y 11′ 9′, aunque á distinto lado de ellas. Supongamos por un momento conocidas estas distancias y que 1′ y 12′ sean las proyecciones verticales de los vértices inferior y superior respectivamente. Estos puntos unidos con las proyecciones de igual nombre de los vértices de las bases correspondientes, nos proporcionarán las de las pirámides y uniendo á su vez estos mismos vértices, en el orden que se unieron en la proyección horizontal, se completará el trazado de esta última proyección del poliedro. Sólo falta determinar las distancias $3' \, 9'$, $12' \, 10'$ y $1' \, 2'$. Las dos últimas son iguales y precisamente las alturas de las dos pirámides, siendo, por lo tanto, el cateto 12_1 12 de un triángulo rectángulo, cuya base sea la recta 12, 9, por ejemplo, y la hipotenusa la arista 8, 9 del poliedro. En cuanto á la distancia $3' \, 9'$ pronto se echa de ver que es también el cateto 9_1 9 de otro triángulo rectángulo que tenga por base é hipotenusa la recta 9 3 y la arista del icosaedro.

Casos particulares.—**181.** Cuanto acabamos de exponer es en la hipótesis de ser arbitraria la posición de los poliedros en el espacio, ó por lo menos la que ocupan relativamente á los planos sobre que se proyectan y así los hemos podido considerar en la situación más ventajosa para hallar sus proyecciones; mas sucede algunas veces que es preciso representar un poliedro que ocupe una determinada respecto aquéllos. En este caso se puede colocar el poliedro de la manera deseada y buscar sus proyecciones como hemos dicho (**172**), pero será en general más conveniente trazarlas suponiendo al poliedro colocado como nos sea más ventajoso para ello y después deducir de las mismas, por movimientos adecuados, las correspondientes á la verdadera posición apetecida. Estos movimientos pueden ser cambios de planos de proyección, giros ó unos y otros combinados.

Si se tratara de construir, por ejemplo, una pirámide cuadrangular, regular, dada la altura, la base y el plano $P \, Q \, P'$ de ésta (fig. 196), se podrá hacer un cambio de planos de modo que aquel plano sea el horizontal del nuevo sistema, trazar en éste las proyecciones de la pirámide propuesta (**174**) y volver al primitivo sistema de planos de proyección, quedando así resuelto el problema. Hagamos, pues, dicho cambio de planos, obteniendo para línea de tierra definitiva (**95**) la $X'' Y''$; tracemos las proyecciones $(s''' a''' b''' c''' d'''-s'' a'' b'' c'' d'')$ de la pirámide, según los datos que la determinan, y deshaciendo los cambios efectuados, quedará la pirámide en cuestión representada por $(s\ a\ b\ c\ d\text{-}s'\ a'\ b'\ c'\ d')$.

Como nuevo ejemplo, supongamos que se quiere representar un cubo de arista conocida, de modo que una de sus diagonales sea vertical.

Representemos primero este cubo (fig. 197) del modo que sea más fácil, tal como lo está en $(a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h\text{-}a'\,b'\,c'\,d'\,e'\,f'\,g'\,h')$, y supongamos que $(b\,e\text{-}b'\,e')$ sea la diagonal que ha de resultar en la posición pedida. Hallemos su traza horizontal $(k\text{-}k')$, y hagamos girar el cubo alrededor del eje $(x\,y\text{-}x'\,y')$ hasta que aquella recta sea paralela al plano vertical. Después de este giro, las proyecciones del poliedro resultarán ser las $(a_1 b_1 c_1 d_1 e_1 f_1 g_1 h_1\text{-}a'_1 b'_1 c'_1 d'_1 e'_1 f'_1 g'_1 h'_1)$. Hagámosle girar ahora alrededor de $(z\,u\text{-}z'\,u')$ hasta que la
Nº6 misma diagonal sea perpendicular al otro plano de proyección y obtendremos por fin el cuerpo en la posición deseada representado por las proyecciones $(a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2\text{-}a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2 f'_2 g'_2 h'_2)$.

182. También puede presentarse el problema inverso, esto es, que deba construirse un poliedro cuyas proyecciones se hayan obtenido ocupando aquél una posición cualquiera, y como para dicha construcción hay que deducir las verdaderas magnitudes de todos sus elementos, y esto es más fácil en una posición determinada que en otra cualquiera del poliedro, respecto á los planos sobre que está proyectado, podrá llevarse dicho cuerpo á esta posición más ventajosa, por medio de cambios ó de giros, y deducir de ella los datos necesarios para construirlo.

Los dos ejemplos anteriores sirven también para aclarar lo expuesto considerando que los datos sean la pirámide $(s\ a\ b\ c\ d\text{-}s'\ a'\ b'\ c'\ d')$ (fig. 196) ó el cubo $(a_2 b_2 c_2 d_2 e_2 f_2 g_2 h_2\text{-}a'_2 b'_2 c'_2 d'_2 e'_2 f'_2 g'_2 h'_2)$ (fig 197), que por medio de cambios de planos en la primera y de giros en la segunda, se pueden obtener en las posiciones respectivas ($s''' a''' b''' c''' d'''$-$s'' a'' b'' c'' d''$) y ($a\,b\,c\,d\,e\,f\,g\,h$-$a' b' c' d' e' f' g' h'$), de las cuales es más fácil deducir las dimensiones necesarias para construirle.

No se pierda de vista que los ejemplos que acabamos de citar sirven sólo para dar una idea de lo que debe hacerse en casos análogos, pues realmente en los presentes bastaría averiguar las longitudes del lado de la base de la pirámide, de su altura y de la arista del cubo, para sin más operaciones poder construir estos cuerpos.

Problemas.

DESARROLLO DE LAS SUPERFICIES DE LOS POLIEDROS

183. La operación material de construir sobre un plano el desarrollo de la superficie de un poliedro, consiste en trazar los distintos polígonos que constituyen sus caras de modo que de dos en dos tengan un lado común.

Por consiguiente, en un poliedro irregular cualquiera dado por sus proyecciones, deberá hallarse la verdadera forma y magnitud de cada una de sus caras y construir estos polígonos del modo dicho y conforme la disposición en que se suponga se le haya abierto.

Sólo nos ocuparemos, por lo tanto, de algunos cuerpos especiales.

184.—Problema 33. *Hallar el desarrollo de la superficie*
Lám. 19. *de una pirámide* (fig. 198).

Búsquese la verdadera magnitud de las aristas y la de los lados de la base y constrúyanse los triángulos que forman sus caras, unos á continuación de otros, á partir de la arista según la cual se considera abierta la pirámide. Complétese el desarrollo con el polígono de la base.

185.—Problema 34. *Trazar el desarrollo de la superficie de un prisma* (fig. 199).

Siendo sus caras laterales paralelogramos, se necesita para construirlos conocer dos lados de cada uno y una diagonal; por consiguiente, debe buscarse la verdadera magnitud de las aristas laterales del prisma, la de una diagonal de cada una de sus caras y la de los lados de la base. Estos últimos se conocen desde luego en el caso de la figura actual. Después se trazará el desarrollo análogamente al problema anterior.

186.—Problema 35. *Hallar los desarrollos de las superficies de los poliedros regulares.*

Como en cada uno de ellos son conocidos los polígonos que constituyen sus caras y basta la magnitud de un lado para construirlos, no se necesita operación ninguna preliminar, pues representados los proliedros regulares del modo dicho (**176** y siguientes), siempre se encontrará una arista proyectada en su verdadera magnitud. Así, pues, nos limitaremos á indicar la forma que afectan estos desarrollos en cada poliedro.

Tetraedro (fig. 200). Un triángulo central, que es la base, y otros tres sobre los lados de aquél, que representan los abatimientos de las tres caras.

Octaedro (fig. 201). Pudiéndose considerar este cuerpo como la reunión de dos pirámides cuadrangulares que tienen una base común (**177**), no hay más que desarrollar las cuatro caras laterales de cada una de modo que ambos desarrollos queden enlazados por una arista; 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4', son dichos desarrollos parciales.

Icosaedro (fig. 202). Se compone de una faja central compuesta de diez triángulos equiláteros y de dos pirámides pentagonales que lo cierran superior é inferiormente. Desarrollando estas tres partes de modo que no resulte solución de continuidad, tendremos que 1, 2, 3..... 10 representa el desarrollo de dicha faja, y 1', 2', 3', 4', 5', y 1'', 2'', 3'', 4'', 5'', los de aquellas pirámides.

Exaedro y dodecaedro. Basta ver las figuras 203 y 204. Lám. 20.

SECCIONES PLANAS EN LOS POLIEDROS

187. Se llama así el polígono que resulta de la intersección de un poliedro con un plano.

Los lados de este polígono son las intersecciones del plano con las caras que corta del poliedro y los vértices del mismo las traza sobre dicho plano de las aristas del poliedro que sean cortadas por él, haciendo esta salvedad, tanto para los vértices como para los lados, pues se comprende que el poliedro puede tener caras ó aristas que no encuentren al plano dado.

De lo dicho resulta que para hallar la intersección de un poliedro cualquiera con un plano, pueden emplearse dos métodos: buscar las intersecciones de éste con las caras, ó con las aristas, resultando determinada la sección, bien por sus lados, bien por sus vértices. Queda, pues, reducido el problema al de intersección de planos ó de planos y rectas; mas téngase en cuenta que si bien para hallar unas ú otras de estas intersecciones hay que considerar como indefinidas las caras ó aristas del poliedro, una vez halladas aquéllas debemos cerciorarnos de si las rectas ó puntos de intersección obtenidos están dentro de los límites de las expresadas caras ó aristas, pues de lo contrario no pueden formar parte de la sección plana.

Se comprende también que debe procederse con sumo cuidado para no incurrir en confusiones, causa siempre de errores, puesto que después de halladas las intersecciones del plano dado con las caras ó aristas del poliedro, ha de ser difícil averiguar el orden en que deben sucederse estas rectas ó puntos para constituir el polígono que se busca.

188. Para evitar esta confusión es preciso ante todo estudiar los datos, elegir una cara, por ejemplo, que se comprenda deba ser cortada por el plano y hallar su intersección, recta, que quedará limitada por dos aristas de las que constituyen dicha cara. Se tomará luego otra cara adyacente á la anterior por una de aquellas dos aristas, buscando también la intersección con el plano, para lo cual bastará encontrar un solo punto de ella, puesto que se conoce ya el extremo del primer lado. La nueva recta obtenida terminará en otra arista común á la cara con que se operó y á una tercera, de la cual se buscará de una manera análoga su intersección con el plano, y así sucesivamente hasta encontrarse de nuevo con la cara de partida; es decir, que elegida ésta según la que arrojen de sí los datos, se busca siempre la intersección del plano con la cara que tenga de común con la anterior la arista en que termina el último lado trazado de la sección plana.

Si nos valemos de los puntos de encuentro del plano con las aristas, se elegirá la primera análogamente á lo hecho con la primera cara en el procedimiento anterior, y después se emplearán sucesivamente las inmediatas á la última considerada, cuidando de unir siempre cada nuevo vértice con el determinado antes que él.

189. Es claro que los lados de la sección plana que estén situados en caras ocultas lo serán también, mientras que deberán señalarse como vistos los que estén en caras que gocen de esta propiedad. El plano dado ocultará también parte del poliedro, la que deberá tenerse en cuenta para su mejor representación y claridad del dibujo (64).

190. Muchas veces ocurre necesitar la verdadera magnitud del polígono sección, la cual se obtiene abatiendo el plano que lo ha producido. También suele necesitarse el trazado de este polígono en el desarrollo de la superficie del poliedro, línea que recibe el nombre de *transformada* de la sección, y para determinarla bastará buscar en cada arista que contenga un vértice, la verdadera magnitud de la parte de ella comprendida entre aquel vértice y uno de los del poliedro, llevando luego convenientemente esta longitud sobre la arista correspondiente del desarrollo.

Si la sección plana tuviese que trazarse sobre un poliedro construído, se llevarían aquellas distancias sobre las aristas del poliedro y se unirían los puntos resultantes de dos en dos.

Algunos ejemplos aclararán todo lo expuesto.

191.—PROBLEMA 36. *Hallar la intersección de una pirámide con un plano, la verdadera forma y magnitud de la sección y su transformada en el desarrollo de aquélla.*

Valiéndonos de las intersecciones del plano con las caras (figura 205), se ha elegido para empezar la ($a\,v\,b$-$a'\,v'\,b'$), de la que se ha buscado su traza vertical por medio de una horizontal ($v\,g$-$v'\,g'$) que pase por el vértice de la pirámide, y hallando luego la intersección ($f\,2$-$f'\,2'$) de los planos $P\,Q\,P'$ y $a\,h\,g'$, de cuya recta sólo la parte (1 2-1′ 2′) pertenece á la sección plana. De la misma manera se ha encontrado la intersección del plano con la cara inmediata ($b\,v\,c$-$b'\,v'\,c'$) obteniendo la recta ($l\,3$-$l'\,3'$) que debe pasar por (2-2′) y proporciona el lado (2 3-2′ 3′). De la cara adyacente $C\,V\,D$ se ha buscado la traza vertical por medio de las trazas de este nombre de las aristas que determina dicha cara y en seguida se ha buscado la intersección del plano ($c\,d$-$p'\,q'$) con el dado, que es la recta ($o\,4$-$o'\,4'$), que debe pasar por (3 3′) y determina el nuevo lado (3 4-3′ 4′). La traza vertical de la cara siguiente se ha obtenido de un modo análogo al anterior, y como su traza horizontal no corta á la del plano dado se ha empleado además de las trazas verticales un plano auxiliar $t\,u$, paralelo al vertical de proyección, resultando la intersección ($4\,x$-$4'\,x'$) que debe pasar por (4-4′) y que produce el lado (4 5-4′ 5′). Finalmente, uniendo el punto (5-5′) con el (1-1′) se completa la sección buscada.

Hubiera podido obtenerse ésta más fácilmente, buscando un solo punto para cada lado y uniéndolo con el extremo del anterior; pero de intento nos hemos separado algo de la marcha general indicada (**188**) para obtener comprobaciones é indicar varios de los distintos medios por los que pueden obtenerse las intersecciones del plano con cada cara.

En la figura están claramente indicadas las operaciones necesarias para obtener el abatimiento de la sección plana y su transformada en el desarrollo de la pirámide.

Si se prefiere hallar las intersecciones de $P\,Q\,P'$ con las aristas, sabido es (61) que debe hacerse pasar por cada una de éstas un plano auxiliar (generalmente uno de los proyectantes) y buscar la intersección de éste con el dado, intersección que dará un vértice del polígono que se busca en su encuentro con la arista de que se trata.

Si nos valemos, pues, de los planos proyectantes verticales de todas las aristas, estos planos se cortarán según una vertical que pasará por el vértice de la pirámide, y la traza de esta recta sobre el plano dado será un punto común á éste y á cada uno de los auxiliares, bastando en consecuencia un nuevo punto para cada intersección auxiliar.

En la figura 206 en la que se ha empleado este método, se ha empezado por determinar el punto $(f\text{-}f')$, traza de la vertical que pasa por $(v\text{-}v')$ sobre $P\,Q\,P'$. Las intersecciones de éste con los proyectantes verticales de las aristas se han obtenido uniendo el punto $(f\text{-}f')$ con los respectivos $(g\text{-}g')$, $(h\text{-}h')$, $(l\text{-}l')$ y $(m\text{-}m')$, y las rectas resultantes han determinado los vértices (1-1'), (2-2'), (3-3') y (4-4') de la sección buscada.

Tiene la ventaja este procedimiento sobre el anterior de resultar el dibujo menos extendido; pero si se necesita luego el abatimiento de la sección plana, es preferible todavía emplear planos auxiliares que pasen por las aristas y tengan su traza horizontal paralela á la del dado.

En la figura 207 se ha hecho así, y desde luego observaremos que dichos planos auxiliares, por pasar por el vértice de la pirámide y tener sus trazas horizontales paralelas, se cortarán según la horizontal $(v\,f\text{-}v'\,f')$. Trazaremos, pues, ante todo esta recta, y su traza vertical f' deberá ser un punto de las del mismo nombre de aquellos planos, cuyas Lám. 21.

otras trazas pasarán por las horizontales de cada arista paralelamente á la P. Halladas luego las intersecciones de los referidos planos auxiliares con el $P\ Q\ P'$, estas rectas determinarán los vértices (1-1′), (2-2′), (3-3′), (4-4′) y (5-5′) de la sección plana.

La ventaja que indicamos antes consiste en que las rectas que han proporcionado dichos vértices sirven para hallar el abatimiento, obteniendo éste en las mejores condiciones, puesto que cada vértice viene dado por el encuentro de dos rectas perpendiculares, como puede observarse en la figura.

Si el plano dado fuese perpendicular á uno de los de proyección, la traza de aquél sobre éste contendría las proyecciones de cuanto esté situado en el mismo, siendo entonces muy fácil hallar la otra proyección del polígono pedido. Pero aunque los datos no estén en las condiciones mencionadas, puede llegarse siempre á ellas por medio de cambio de planos ó de giros.

Como ejemplo presentamos la figura 208, en la que se ha aplicado el primer medio.

192.—Problema 37. *Hallar la intersección de un prisma con un plano, la verdadera magnitud de la sección y el desarrollo del primero con la transformada de ésta* (fig. 209).

Con las ligeras variaciones que requiere la naturaleza del poliedro, son aplicables á este problema los procedimientos empleados en el anterior. El prisma tiene por base inferior el pentágono ($a\ b\ c\ d\ e$-$a'\ b'\ c'\ d'\ e'$) y el plano es $P\ Q\ P'$. Se ha empezado por hallar la intersección de éste con la cara $A\ B$ (nombraremos las caras por las letras de sus trazas) valiéndonos de las trazas de ambos planos y obteniendo el lado (1 2-1′ 2′); (2-2′) es un punto del lado siguiente; hallando otro, mediante el plano auxiliar Z, ha resultado el lado (2 3-2′ 3′); el mismo plano Z ha servido para hallar el (3 4-3′ 4′); la intersección de $P\ Q\ P'$ con la cara $D\ E$ es paralela al lado (1 2-1′ 2′), por consiguiente se ha podido trazar el (4 5-4′ 5′) y uniendo su extremo con el punto (1-1′) se ha determinado la sección plana.

También están indicadas en la misma figura las construcciones para hallar la intersección de $P\ Q\ P'$ con cada arista valiéndose de sus planos proyectantes verticales. El de la arista cuya traza es $(a$-$a')$ corta al plano dado según la recta (1 2-1 2′), fácil de encontrar, y (1-1′) es la intersección de aquél con dicha arista. Las intersecciones del mismo plano con los demás proyectantes son paralelas á la anterior, siendo un punto de cada una de ellas los M, N, O, P.

Tomando un nuevo plano vertical de proyección $X'\ Y'$ perpendicular al dado, se ha encontrado asimismo la sección plana del prisma, bastando seguir las construcciones hechas en la figura, en la que están indicadas también las que conducen al abatimiento $1_1\ 2_1\ 3_1\ 4_1\ 5_1$ de dicha sección.

Para obtener el desarrollo del prisma con la transformada de aquélla, pudiera seguirse el método general (**190**); pero es más conveniente valerse de la sección recta, producida por $R\ S'\ R''$, para cuya más facil obtención se ha cambiado nuevamente de plano vertical por otro $X''\ Y''$, paralelo á las aristas del poliedro. La mencionada sección recta es la $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$-$\alpha''\beta''\gamma''\delta''\varepsilon'')$ y su verdadera magnitud la $\alpha_1\beta_1\gamma_1\Delta_1\varepsilon_1$. Esta en el desarrollo es una línea recta, fácil de trazar; las aristas del prisma han de serle perpendiculares y las distancias desde los vértices de la sección recta á los de la otra sección plana y á los de cada una de las bases pueden medirse directamente sobre la proyección $X''\ Y''$, no presentando, por consiguiente, ninguna dificultad el trazado del desarrollo del prisma con las dos transformadas.

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA CON UN POLIEDRO

No

193. Haciendo pasar por la recta un plano cualquiera, hallando la sección causada por éste en el poliedro y viendo los puntos en que este polígono corta á la recta dada, se obtendrán los que se buscan.

El plano que se haga pasar por la recta deberá ser en general una de sus proyectantes, para mayor sencillez, pero esta elección depende del poliedro de que se trate.

Si éste fuese una pirámide, sería más conveniente hacer pasar el plano por el vértice de la pirámide, pues su intersección con ésta sería un triángulo, fácil de obtener; y si fuese un prisma, el plano que pase por la recta debe ser además paralelo á sus aristas y la intersección será un paralelogramo.

194. Como caso particular de este problema puede presentarse el de hallar la segunda proyección de un punto situado sobre un poliedro, conocida la otra proyección, pues basta hacer pasar por ésta su proyectante y hallar la intersección de esta recta con dicho poliedro.

INTERSECCIÓN DE DOS POLIEDROS

195. Si hallamos la intersección de uno de los poliedros con cada una de las caras del otro, obtendremos un conjunto de líneas que deberán constituir la mutua sección de ambos cuerpos, puesto que dichas líneas serán comunes á las superficies de uno y otro.

Podríamos aplicar, por lo tanto, los métodos indicados al tratar de las secciones planas de los poliedros; pero desde luego se comprende que ha de haber alguna diferencia, pues allí era un plano indefinido el que cortaba al poliedro y aquí es un plano limitado. En aquel caso, cada lado de la sección se limitaba en dos aristas de una misma cara, y en éste la recta común á dos caras, una de cada cuerpo, puede quedarlo por dos aristas pertenecientes á distinta cara.

196. Por consiguiente, dejaremos ya sentado que una vez obtenida la intersección de una cara del primer poliedro con otra del segundo, consideradas ambas indefinidas para las operaciones gráficas de hallar dicha intersección, sólo se debe tomar de esta recta la parte común á los dos polígonos ó caras, es decir, la parte comprendida entre dos aristas pertenecientes á ellas, bien lo sean á una sola, bien una á la de un poliedro y otra á la del otro.

197. Además se concibe también que no es preciso encontrar las intersecciones de uno de los cuerpos con todas las caras del otro, pues por lo general, no todas lo cortarán, siendo por otra parte complicadas estas operaciones indicadas con tanta vaguedad, por la confusión que puede surgir al enlazar dichos resultados parciales para definir y fijar el conjunto poligonal que se busca.

Este no será generalmente una figura plana, puesto que cada uno de sus lados es común á dos planos distintos. Los vértices estarán siempre sobre alguna arista, pero pudiendo pertenecer ésta á uno ú otro de los dos poliedros, dichos vértices estarán también en el interior de las caras que no contengan aquella arista.

Así es que aun estudiando detenidamente los datos, no es posible formarse idea exacta de la forma y posición de la intersección buscada, y tanto por este motivo como por las razones expuestas anteriormente, es de precisa necesidad seguir una marcha metódica y ordenada, que evite las confusiones y eluda las dificultades.

Consideremos, por lo tanto, un ejemplo, que al par que nos guíe en los razonamientos, nos permita hacer las demás consideraciones pertinentes al asunto, facilitando reglas generales aplicables á los demás casos.

198. Sea, pues, hallar la intersección de un cubo y un tetraedro, que representamos en perspectiva en la figura 210. Lám. 22.
Ante todo hay que elegir en cada poliedro una cara, de modo que las dos se corten, y para ello debe consultarse la forma y posición relativa de los datos, procediendo por tanteos en caso de duda. Su común sección se buscará considerando ambas caras como indefinidas y siguiendo las

reglas de la intersección de plano (51 y siguientes), pero no tomando luego de la recta que resulte más que la parte comprendida entre aristas de una y otra, como dijimos anteriormente.

En el ejemplo actual se han elegido las caras ABC y $HJNG$, cuya intersección se supone ser la recta 1-2 ilimitada, y tomando de ella la parte 1-2, que es únicamente la común á los dos polígonos, se obtendrá el primer lado de la intersección buscada.

Siguiendo por uno de sus extremos, se observará que el 2, por ejemplo, por estar sobre la HJ, además de pertenecer á las dos caras elegidas, corresponde también á la $HELJ$, siendo, por consiguiente, un punto de la intersección de esta última con la ABC, y hallando otro punto de la misma recta, obtendremos la 2-3, de la que se tomará tan sólo la parte nombrada por la misma razón de antes. El punto 3 pertenece también á la cara ACD y forma parte de la intersección de ésta con la misma $HELJ$ anterior; luego hallando un nuevo punto, se determinará la 3-4, que limitaremos en 4 por la arista JH. Análogamente el punto 4 pertenece á las caras ACD y $HJNG$, y con facilidad podrá encontrarse la 4-5 que les es común, terminándola en 5 sobre la arista AD. Este punto es ya de la intersección de $HJNG$ y la nueva cara ADB, por lo que determinaremos otro punto de ella, que unido con el anterior, nos proporcionará la 5-6, terminada en 6. Consideraciones análogas nos inducen á encontrar la 6-7, intersección de ABD y $FGNM$, y luego sucesivamente las 7-8, 8-9, 9-10 y 10-1, que lo son por su orden de ABD y $MLEF$; de ésta y ADC; de la misma $MLEF$ y ABC, y de ésta con la $FGNM$; y como la última 10-1 tiene que terminar sobre la arista GN que pertenece también á la cara $GNJH$, que junto con la ABC, son las caras por donde empezamos, es claro que, si las construcciones están bien hechas, al extremo 1 de dicho 10-1 ha de coincidir con el 1 del lado 1-2, quedando así cerrado y completo el contorno poligonal que buscábamos.

199. Fijándose ahora detenidamente en las operaciones realizadas, veremos que, encontrado un lado de la intersección, para hallar el que sigue hay que observar la arista en que termina, tomar del poliedro á que pertenezca, la cara adyacente, por dicha arista, á la empleada anteriormente y buscar su intersección con la misma del otro poliedro que produjo el último lado obtenido; es decir, que para cada lado nuevo, hay que valerse de una de las dos caras que proporcionaron el anterior, siendo la que se abandona aquélla á que pertenezca la arista sobre la cual quede situado el último vértice, tomando en su lugar la que sea adyacente según dicha arista. Ya hemos indicado (**198**) el modo de obtener el primer lado, y procediendo de esta manera, no puede haber confusión, y mucho menos si se cuida de señalar cada vértice que se obtenga por un número correlativo.

200. Las proyecciones de la intersección de dos poliedros no tendrán todos sus lados vistos, y bien se comprende que para reunir un lado esta circunstancia, es preciso que sea común á dos caras vistas; por consiguiente, en cada proyección se trazarán así los lados que provengan de dos caras que lo sean sobre la misma proyección y como ocultos los demás. Una regla análoga se ha seguido en la figura en perspectiva que consideramos, en la que sólo son vistos los lados 1-2 y 10-1.

201. Cuando dos poliedros se cortan, forzosamente ha de suceder que cada uno de ellos oculte una parte del otro, circunstancia que debe hacerse constar en el dibujo para la más clara representación de ambos cuerpos; así es que además de trazar debidamente como vistas y ocultas en las dos proyecciones las aristas que lo sean de cada poliedro como si estuviera solo, hay que representar también como ocultas las partes de aristas que no lo sean de por sí, pero que queden tapadas por el otro poliedro.

Fácilmente puede averiguarse las partes de aristas que se hallan en este caso, inspeccionando detenidamente la posición relativa de los datos, mas en caso de duda puede seguirse este procedimiento. Hágase pasar por la arista que se considere el plano proyectante perpendicular al de proyección de que se trate y hallando la intersección de este plano con el otro poliedro, se reconocerá si dicha arista está debajo ó encima, delante ó detrás de aquél, según se trate de la proyección horizontal ó vertical.

202. En el caso de la figura 210 en que la intersección de los dos cuerpos propuestos en un sólo polígono 1, 2, 3..... 10, se dice que hay *arranque;* pero puede suceder que la intersección de los dos poliedros sean dos polígonos distintos, planos ó no, y entonces se dice que hay *penetración.* Este caso ocurrirá cuando un ángulo poliedro de uno de los dos cuerpos éntre en el interior del otro, causando una intersección ó polígono de entrada, y atravesando dicho cuerpo salga por la parte opuesta, ocasionando otro polígono de salida. También puede haber penetración, y sin embargo, un solo polígono, si el vértice del ángulo poliedro mencionado queda en el interior del otro cuerpo.

203. Ocurre generalmente buscar el desarrollo de ambos poliedros con la transformada en cada uno de su común intersección. Aquéllos se hallarán siguiendo las reglas establecidas (183 y siguientes), y en cuanto á las transformadas podrían encontrarse sin dificultad, como hemos visto en las secciones planas (190), si todos los vértices estuvieren á la vez sobre aristas de uno y otro cuerpo; mas no siendo así hay que introducir alguna modificación en el método que allí se empleó. Desde luego dichos vértices están situados sobre aristas, pero que pertenecen á uno ú otro de los poliedros dados, y en el que no contenga la arista en donde está situado un cierto vértice, queda éste en el interior de una de sus caras. El vértice 3, por ejemplo, está sobre una cara del cubo.

Por consiguiente, para hallar las transformadas podrán señalarse desde luego en cada desarrollo los vértices que se hallen en aristas del poliedro correspondiente, y para determinar los demás se trazará por cada uno y en la cara que lo contenga, rectas de posición conocida que hagan las veces de aristas. Refiriéndonos al mismo vértice 3 antes citado, se deberá trazar por él una paralela r 3 á las aristas del cubo; esta recta cortará al perímetro de la cara que la contiene en un punto z, que fácilmente se referirá al desarrollo, y trazando una nueva paralela á las aristas se marcará sobre ella la magnitud z 3, que dará el vértice buscado.

Presentemos en proyecciones algunos ejemplos de intersección de poliedros.

204.—PROBLEMA. *Hallar la intersección de un cubo y un tetraedro* (1) (fig. 211).

Las caras elegidas para principiar son las $HJNG$ y ABC, cuya intersección es (1 2-1′ 2′). La proyección vertical se ha obtenido abatiendo el plano de perfil que contiene dicha intersección (**121**).

Hallándose el vértice (2-2′) en una arista del cubo, tomaremos la cara adyacente y la misma anterior del tetraedro. La intersección es (2 3-2′ 3′).

(3-3′) está en arista del tetraedro; por lo tanto, tomaremos la adyacente en este cuerpo y la del cubo que produjo el lado anterior, siendo el nuevo lado el (3 4-3′ 4′) obtenido por medio de los puntos (3-3′) y (q-q').

Siguiendo la misma marcha buscaremos la intersección de ACD y $HJNG$, que es (4 5-4′ 5′)

Luego (5 6-5′ 6′) de la misma cara del cubo con la ABD, obteniendo la proyección vertical mediante la recta (ax-$a'x'$).

---

(1) Se han elegido los datos en análoga disposición relativa que los de la figura 210 para que se puedan comparar las operaciones en ella prescriptas y realizadas en la actual.

Después las (6 7-6′ 7′) y (7 8-7′ 8′) de esta cara con las $NGFM$ y $MLEF$ del cubo.

En seguida la (8 9-8′ 9′) de esta última con la ADC, y la (9 10-9′ 10′) de la misma del cubo con la ABC del tetraedro, valiéndose de la recta ($a\,t$-$a'\,t'$).

Y finalmente, uniendo (10-10′) con (1-1′) se obtendrá el lado común á ABC y $MNGF$.

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 10-1′, 2′, 3′, 4′, 5′, 6′, 7′, 8′, 9′ 10′) es por consiguiente la intersección de los cuerpos, habiéndose representado en cada proyección como vistos los lados que provienen de dos caras que lo son y como ocultos los demás.

Con sólo inspeccionar los datos se echa de ver que parte de cada poliedro queda oculta por el otro.

Los desarrollos de ambos se han determinado por los medios sabidos (**184**, **185**). El del cubo no requiere ninguna operación previa y para el del tetraedro se han obtenido las aristas en su verdadera magnitud colocándolas paralelamente al plano vertical como indica la figura. Se consideran abiertos los cuerpos por las aristas AB y EL respectivamente.

De la transformada sobre el desarrollo del cubo se han trazado desde luego los vértices 1, 2, 4, 6, 7 y 10 que están colocados sobre aristas del mismo, midiendo en la proyección vertical sus distancias á la base inferior ó á la superior. Para los vértices restantes 3, 5, 8, 9 se han empleado las rectas ($3z$-$3'z'$), (5α-$5'\alpha'$), (8β-$8'\beta'$) y (9γ-$9'\gamma'$) tomando $Ez = ez$ y $z3 = z'3'$, $H\alpha = h\alpha$ y $\alpha 5 = \alpha' 5'$, $E\beta = e\beta$ y $8\beta = 8'\beta'$, $E\gamma = e\gamma$ y $9\gamma = 9'\gamma'$.

De la otra transformada se han señalado también inmediatamente los vértices 3, 5, 8 y 9 con sólo determinar las longitudes de las partes de aristas comprendidas entre ellos y el vértice del tetraedro. Para determinar los 1, 2, 4, 6, 7 y 10 se ha hecho uso de las rectas AR, AU, AV, AX, AY y AT como si fuesen aristas. Todos los detalles de construcción están indicados en la figura.

205.—Problema. *Hallar la intersección de un prisma y una pirámide* (fig. 212). Lám. 23.

A B C D E es la pirámide y *F G H I J K L M N O* el prisma, que suponemos terminado por el plano horizontal *a′ n′*, que pasa por el vértice de aquélla, hipótesis que siempre puede realizarse.

Las caras elegidas para empezar son las *A D E* é *I J O N*. Su intersección *p q* se ha obtenido valiéndonos de las trazas horizontales de dichas caras y del plano auxiliar *a′ n′*, resultando para primer lado de la intersección buscado el (1 2-1′ 2′). Podríamos buscar la proyección vertical de *p q* para deducir la 1′ 2′ y así debe hacerse para mayor exactitud en las operaciones; mas para no complicar la figura haremos sólo las construcciones en el plano horizontal, deduciendo de esta proyección la vertical con sólo referir cada vértice sobre la proyección de la arista correspondiente.

Siguiendo las reglas establecidas (199) buscaremos la intersección de la misma cara del prisma con la *A C D* de la pirámide, mediante el punto *r* de encuentro de sus trazas, que nos da la recta *r* 3 ó el lado 2 3, deduciendo de él el 2′ 3′.

Análogamente y por medio del punto *s*, se ha encontrado la intersección (3 4-3′ 4′) de las caras *A C D* y *H I N M*.

En seguida debe buscarse la intersección de las caras *H I N M* y *A B C*, pero como sus trazas horizontales no se encuentran en los límites del dibujo, hay que recurrir á otro medio, valiéndonos del plano proyectante vertical de la arista *H M*, el cual corta á la cara del prisma según esta misma arista y á la de la pirámide según la recta (*t u*-*t′ u′*), obteniendo así el punto (5-5′) común á las dos caras, y por lo tanto el nuevo lado (4 5-4′ 5′).

El lado (5 6-5′ 6′) común á las caras *A B C* y *G H M L* se ha encontrado por medio del punto *v*.

Para el lado siguiente hay que considerar las caras *G H M L* y *A C D* cuyas trazas no se encuentran, recurriendo, por lo tanto, al plano proyectante vertical de *G L* para obtener un punto (7-7′) de la intersección de dichas caras y el lado (6 7-6′ 7′) de que se trata.

Mediante el punto *y* se ha obtenido el (7 8-7′ 8′) intersección de *F G L K* y *A C D*.

El (8 9-8′ 9′), común á la misma cara del prisma y á la *A D E* de la pirámide, se ha encontrado usando otra vez el plano proyectante de *G L*, que ha proporcionado el punto (9-9′).

Las caras *A D E* y *G H M L* se cortan según (9 10-9′ 10′) obtenido por medio del punto α.

La última y la *A E B* se cortan, según (10 11-10′ 11′), para obtener el cual hemos vuelto á emplear el plano *G L*.

El lado (11 12-11′ 12′), situado sobre las caras *H I M N* y *A E B*, se ha encontrado por medio del punto δ. Y como ahora deberíamos hallar la intersección de *H I M N* y *A E D* cuya recta pasaría por el punto (1-1′), por donde empezamos, hasta unir (12-12′), con dicho punto, para completar la intersección de los cuerpos propuestos.

Para hallar sus desarrollos con las transformadas de la común intersección se ha preparado convenientemente el dibujo, haciendo pasar por los vértices de aquélla y en las caras en que están situados, rectas, ó mejor dicho, generatrices de uno y otro poliedro. Así por el vértice 1, que está sobre una arista del prisma, se ha hecho pasar la generatriz 1 Σ de la cara de la pirámide en que está colocado; por el vértice 2 se ha trazado la generatriz 2 φ del prisma y análogamente las 3 ψ, 4 λ, 5 ω, 6 ρ, 7 φ, 8 η, 9ρ, 10 φ, 11 θ y 12 η.

Después se ha buscado la nueva proyección vertical sobre *X′ Y′* del prisma para conocer la verdadera magnitud de sus aristas y demás generatrices. También se ha hallado la sección recta y su abatimiento 13_1, 14_1, 15_1, 16_1, 17_1, con cuyos conocimientos ha sido fácil trazar el desarrollo del prisma y la transformada correspondiente.

Igualmente se ha podido trazar el de la pirámide colocando antes sus aristas y generatrices paralelamente al plano vertical, como indica la figura, en la que están todos los detalles de las construcciones reseñadas.

En la proyección horizontal únicamente son vistos los lados 5 6, 6 7, 7 8, y en la vertical los $4' 5'$, $5' 6'$, $10'' 11'$ y $11' 12'$.

En cuanto á las aristas vistas de cada poliedro que queden ocultas por el otro, es fácil distinguirlo, haciendo un ligero estudio de los resultados obtenidos.

Desde luego la parte de la base de la pirámide que queda debajo de la proyección horizontal del prisma ha de ser oculta, así como la parte del lado fg que cubre la pirámide. Para las aristas observaremos que la $A\,B$ que no ha cortado al prisma no debe tener modificación en ninguna de las proyecciones.

La $A\,C$ corta á una de las caras inferiores del prisma en el punto 4 y en el 6 á una de las superiores; luego la parte a 6 ha de ser vista, la 4 6 oculta por estar dentro del prisma, y la 4 c oculta hasta que salga de los límites del contorno aparente. Para la proyección vertical de la misma arista observaremos que por $4'$ entra en el prisma, y como este punto está en una cara vista, $c'\,4'$ debe serlo también, $4'\,6'$ queda en el interior de dicho cuerpo, luego es oculto y desde el punto de salida $6'$ hasta a' vuelve á ser vista.

Análogamente la arista $a\,d$ debe ser vista desde a hasta el punto de salida 8 y oculto el resto. Su proyección vertical es toda oculta. Lo mismo sucede á la horizontal de $A\,C$, pero de la otra proyección veremos fácilmente que sólo lo es la parte $10'\,12'$ que queda dentro del prisma.

Un examen semejante de las aristas del prisma nos enseñaría la manera de representarlas.

206. La intersección de los cuerpos propuestos nos ofrece un ejemplo de arranque y se comprende que si la arista $A\,B$ de la pirámide, única que no encuentra al prisma, lo verificase, habría penetración, puesto que todas las aristas de aquélla serían cortadas por éste y entonces la intersección afectaría la forma de dos polígonos independientes, que se hallarían siguiendo una marcha análoga.

207. Por los dos ejemplos que hemos estudiado de intersección de poliedros (figs. 211 y 212), se comprenderá que la marcha general es siempre la misma (199) variando únicamente los detalles de construcción, dependientes de la naturaleza de los datos, advertencia que debe hacerse extensiva a todo lo expuesto en el presente tratado, por cuanto cada aplicación que se haga de la Geometría Descriptiva es un caso particular de las teorías aprendidas. En su buena aplicación, modificándolas convenientemente según las circunstancias de los datos, consiste el saber esta ciencia, resultado que sólo se alcanza con la práctica.

Gabriel López

FIN

Segovia
19-7-22