ELEMENTOS

DE

MATEMÁTICAS

POR

DON ATANASIO LASALA Y MARTINEZ,

Licenciado en Ciencias exactas,
Catedrático por oposicion de dicha asignatura
en el Instituto de Orense.

TOMO II.

GEOMETRÍA Y TRIGONOMETRÍA.

Segunda edicion.

CON MAS DE 300 GRABADOS INTERCALADOS EN EL TEXTO.

ORENSE,
IMP. Y LIB. DE GREGORIO RIONEGRO LOZANO
Plaza del Hierro, 3.

1881.

PRÓLOGO.

Notables diferencias hallará el lector entre ésta y la primera edicion de nuestra Geometría y Trigonometría, ya en el órden y extension de las teorías, ya en las demostraciones, ya tambien en la parte material.

Las primeras proposiciones continúan, sin embargo, apoyadas en los axiomas: *la línea recta es el camino más corto entre dos puntos; dos puntos determinan la posicion de una recta.*

Sin negar la evidencia de la primera verdad, algunos matemáticos aconsejan se considere como teorema, siguiendo en su demostracion las huellas de Euclides, con el fin de reducir en lo posible el número de axiomas [1]; otros lo practican así en sus tratados didácticos, si bien por caminos distintos, más breves al parecer, pero seguramente ménos firmes que el trazado por el inmortal Geómetra griego.

Reconociendo la conveniencia de emplear el menor número posible de axiomas, imitamos no obstante á la generalidad de los escritores de este siglo, que á su vez se han inspirado en la obra de *Legendre*, y consideramos la mencionada proposicion como uno de los fundamentos experimentales de la Geometria.

Así, la distribucion de las primeras verdades es ordenada y sencillas las demostraciones; de otro modo, hay que tratar una série de teoremas algo difíciles, de interés momentáneo, verdaderos lemas, sin otro fin que arribar penosamente á la demostracion de que un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, verdad más evidente, á nuestro entender, que la determinacion de la línea recta por dos de sus puntos, y la igualdad de los ángulos rectos, proposiciones incluidas por el mismo Euclides entre los axiomas.

---

1 Duhamel, *Des méthodes dans les sciences de raisonnement.*
Hoüel, *Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie elementaire.*

El teorema fundamental de la teoría de las líneas proporcionales suele tratarse como propiedad del triángulo ó del trapecio cortado por una paralela á las bases.

Asi lo hicimos tambien nosotros en la primera edicion. En ésta hemos prescindido del trapecio, porque los lados de un polígono son rectas limitadas, luego la paralela tiene que ser interior, y los segmentos aditivos; y aunque se prolonguen indefinidamente los lados, siempre quedaremos sujetos á la condicion de considerar cada uno como totalidad de los segmentos causados por una paralela interior ó como diferencia de los causados por una exterior, lo que restringe el alcance del teorema.

Suponiendo dos rectas indefinidas cortadas por tres paralelas, éstas marcan en aquellas tres segmentos, y decimos: *dos segmentos cualesquiera de una recta indefinida son proporcionales á los segmentos de la otra.* Este enunciado presenta la proposicion con toda la generalidad que le es propia, y abraza cuantos casos puedan ofrecer el triángulo y el trapecio de lados indefinidos, segun puede verse haciendo que las transversales tengan su punto de concurso sucesivamente fuera de las paralelas y en cada una de éstas.

La admision del axioma de que hemos hablado, y este modo de considerar las líneas proporcionales, nos han permitido reunir en el primer capítulo todo el estudio de la línea recta, tanto en lo concerniente á las posiciones relativas de dos rectas en un plano: concurrentes (ángulos, perpendiculares, oblicuas), no concurrentes (paralelas), como en lo que se refiere á las relaciones de magnitud entre segmentos de concurrentes cortadas por paralelas (líneas directamente proporcionales), por antiparalelas (líneas recíprocamente proporcionales), ó por otras concurrentes (razones proporcionales).

Aquí hemos hecho, en la sucesion de teorías, el primer ensayo de un órden que hemos llamado *combinatorio*, al que se adapta admirablemente una ciencia, cuyos objetos nacen todos de la combinacion, bajo diferentes aspectos, de solo dos elementos: línea recta y circunferencia.

La idea de este órden fué lo que nos indujo á investigar las relaciones de magnitud entre segmentos de rectas concurrentes en un punto cortadas por otras concurrentes, como continuacion natural, cuando se marcha de lo particular á lo general, de la teoria de líneas proporcionales. El artículo consagrado á aquella materia, página 45, encierra proposiciones fundamentales, descubiertas por nosotros, muy generales y fecundas, segun demostramos en la obrita *Generalizacion de la teoría de líneas proporcionales*, publicada en 1880, y como puede verse áun en este tratado elemental, párrafos 177 á 183.

En el segundo capítulo nos ocupamos de la circunferencia, estudiándola primeramente en si misma, después en combinacion con la línea recta, y, por último, combinada con otra circunferencia. Los teoremas relativos á los segmentos recíprocamente proporcionales determinados por la circunferencia en dos rectas que se cortan, hemos podido colocarlos ántes de los casos de semejanza de triángulos, valiéndonos de la teoria de las rectas antiparalelas, que se ha incluido en esta edicion, tanto por completar el cuadro de las combinaciones á que dan lugar las rectas en un plano, bajo el punto de vista de sus posiciones mutuas, cuanto porque la proporcionalidad de cuatro segmentos se establece con frecuencia más fácilmente mediante dicha teoria que sirviéndose de la semejanza.

Estudiadas las líneas en un libro, comprendemos en otro el estudio de los polígonos, separando así por completo estas dos grandes partes de las propiedades y relaciones de la extension, lo que da al plan mayor unidad, y facilita el recuerdo de la marcha general seguida en la obra.

Los polígonos se han dividido en tres capítulos: triángulos, cuadriláteros, poligonos generales.

Siguiendo el órden combinatorio, hemos estudiado primero el triángulo en sí mismo, luego le hemos comparado con otro bajo el punto de vista de la igualdad y de la semejanza, despues le combinamos con la línea recta, *transversal*, y terminamos con las relaciones métricas entre los lados.

En la comparacion de triángulos faltamos en parte al propósito de presentar consecutivamente los casos de igualdad y semejanza de las figuras. Nuestro objeto al separar de este artículo los tres casos generales de igualdad y colocarlos al principio de la obra, por via de introduccion, ha sido evitar las repetidas superposiciones que de otro modo tendríamos que hacer siempre que necesitásemos probar la igualdad de dos rectas ó de dos ángulos: hemos sacrificado algo nuestro plan en obsequio á la brevedad.

El artículo «Líneas rectas en el triángulo» encierra los teoremas de Menelao y de Céva (177 y 182), el primero de los cuales sirve de base á la teoría de transversales, y sus respectivos recíprocos.

Ilustres matemáticos del presente siglo han proclamado la necesidad de dar cabida en los elementos á los principios de dicha teoría. Carnot [1] dice: «La teoría de las transversales es curiosa por sí misma y suministra con frecuencia demostraciones y soluciones muy elegantes, en cuestiones complicadas. La sencillez y la fecundidad de sus principios parecen darle derecho á ser admitida en los elementos ordinarios de la Geometria». Poncelet [2], además de citar esta opinion y la muy autorizada de M. Poinsot, añade: «Seria de desear que el Consejo de perfeccionamiento de la Escuela Politécnica y los SS. Profesores de los Colegios fijasen su atencion en este asunto, mucho más importante de lo que ordinariamente se cree, tanto á causa de los considerables desenvolvimientos que todavia puede recibir la teoría de las transversales, como porque tiende á llenar un vacío cada vez más sensible en los Elementos de la ciencia.» Chasles [3], finalmente, concede al teorema de Menelao la mayor importancia, hace la historia de su orígen y una detenida reseña de las muchas y variadas aplicaciones que de él han deducido los más famosos geómetras, desde el siglo IV hasta el actual.

Nosotros debíamos necesariamente incluirle en este tratado porque es uno de los diversos casos particulares de nuestro teorema del número 90, y no exige, por consiguiente, nueva demostracion.

Unido al teorema de Menelao marchará siempre su correlativo el de Céva, del que hemos expuesto las más importantes é inmediatas consecuencias.

1 *Essai sur la théorie des transversales.* París, 1806.
2 *Traité des propriétés projectives des figures.* París, 1865.
3 *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.* París, 1875.

Forma tambien parte del artículo que nos ocupa otro teorema, el del número 179, que no es en sustancia más que nuestro corolario del número 92, enunciado de otro modo, con objeto de presentarle como generalizacion de la propiedad que posee la bisectriz de un ángulo interno ó externo de un triángulo de dividir al lado opuesto en segmentos proporcionales á los lados del ángulo. La generalizacion consiste en considerar, en lugar de la bisectriz, una recta que parte del vértice en direccion arbitraria.

El estudio de los cuadriláteros comprende tres artículos: cuadrilátero en general, trapecio y paralelógramo; y el de los polígonos generales, otros tres: polígono en sí mismo, comparacion de polígonos, esto es, casos de igualdad y de semejanza, y polígonos en el círculo, que abraza los inscriptos, los circunscritos y los regulares.

La seccion segunda de la Geometría plana, medida de la extension, se divide, como la primera, en dos libros, que tratan de las líneas y de los polígonos respectivamente. El primer libro se subdivide en medida de la línea recta y medida de la circunferencia; el segundo en áreas de las figuras rectilíneas y áreas de las figuras circulares.

Las principales divisiones de la Geometría del espacio guardan entera analogía con las de la Geometría plana.

A los dos libros, líneas y polígonos, de que consta en ésta la primera seccion, corresponden en aquella otros dos: superficies y poliedros.

A los capítulos «línea recta y circunferencia» corresponden otros titulados «superficie plana y superficies curvas»; y á los epígrafes «triángulos, cuadriláteros, polígonos generales» estos otros «pirámides, prismas, poliedros generales».

La segunda seccion de la Geometría plana se divide en «medida de las líneas y áreas de las superficies planas», y la segunda seccion de la Geometría del espacio consta de «áreas de las superficies de los cuerpos y volúmenes de los mismos».

A los capitulos «medida de la línea recta y medida de la circunferencia» corresponden los titulados «áreas de los poliedros y áreas de los cuerpos de revolucion»; y finalmente, á los llamados «medida de las áreas de las figuras rectilineas, medida de las áreas de las figuras circulares y comparacion de las áreas», corresponden los que llevan por epígrafes «volúmenes de los poliedros, volúmenes de los cuerpos de revolucion y comparacion de volúmenes».

Tambien la Trigonometría rectilínea ha experimentado reformas importantes.

La principal, á que necesariamente se han subordinado otras, consiste en considerar el seno, coseno, tangente y cotangente bajo el concepto más general, esto es, como razones de líneas. De este modo aquellas funciones son independientes del radio, influyendo solamente en sus valores las variaciones del arco.

Hemos procurado exponer, de una manera clara y precisa, las reglas para determinar en cada caso los signos de las razones trigonométricas de un arco, ya sea este positivo, ya negativo, ya se cuente desde el punto considerado ordinariamente como orígen, ya desde otro punto cualquiera de la circunferencia. La confusion en esta materia es más comun de lo que generalmente se cree.

Del desenvolvimiento de seno y coseno de $a \pm b$ damos una solucion nueva, sobre la que llamamos la atencion de nuestros compañeros en el profesorado, porque nos parece muy sencilla y elegante. Se funda en los principios de la teoría de rectas concurrentes cortadas por concurrentes.

Tales son las principales modificaciones que hemos creido deber introducir en la primera edicion de este tratado: si merecen la aprobacion de las personas competentes, quedaremos recompensados del asiduo trabajo y considerables sacrificios que nos hemos impuesto, á fin de poner esta obra á la altura que de consuno exigen la importancia de los estudios matemáticos y el progreso de los mismos en nuestra pátria.

Orense, Agosto de 1881.

Atanasio Lasala.

INDICE.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

Propiedades y relaciones de la extension.

LIBRO PRIMERO.—SUPERFICIES.

LIBRO SEGUNDO.—POLIEDROS.

Páginas.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

LIBRO PRIMERO.
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.—NOCIONES PRELIMINARES.

CAPÍTULO SEGUNDO.—FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO TERCERO.—TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

LIBRO SEGUNDO.
RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

CAPÍTULO PRIMERO.—TEOREMAS RELATIVOS Á LA RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

CAPÍTULO SEGUNDO.—RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

ERRATAS.

Página.	Línea.	Dice.	Debe decir.
47	— 8	B	P
47	— 2	por las paralelas AF, CE,	por las paralelas AF,CE y por las DG, CE,
49	7	PA	PO
49	8	AC y A'C'	OC y OC'
50	— 1	$\frac{AA'}{BC}\ \frac{PA}{PB}$	$\frac{AA'}{BC} = \frac{PA}{PB}$.
79	8	Fig. 90	Fig. 89
79	21	Fig. 91	Fig. 90
345	16	$-\cot(-a)$	$\cot(-a)$
349	— 12	A'BAM″	ABA'M″
349	— 11	ABA'AM″	ABA'M″
355	7	$\operatorname{sen} a \pm =$	$\operatorname{sen} a = \pm$
361	— 7	$\operatorname{tg}(a+) = b$	$\operatorname{tg}(a+b) =$
367	13	$\frac{b}{a} - \operatorname{sen}^2\varphi$	$\frac{b}{a} = \operatorname{sen}^2\varphi$
379	— 20	$\log\cos = A$	$\log\cos A =$

GEOMETRÍA.

DEFINICIONES Y DIVISION.

1. *Una porcion cualquiera de materia, limitada en todos sentidos, se llama* CUERPO FÍSICO *ó simplemente* CUERPO.

Todo cuerpo ocupa una parte del espacio infinito que nos rodea; prescindiendo, por abstraccion, de la materia que constituye el cuerpo, y considerando solamente la *porcion limitada de espacio* que ocupa, tendremos el CUERPO GEOMÉTRICO, trasparente, penetrable y divisible, tal como hemos de estudiarle.

Los cuerpos tienen necesariamente tres *dimensiones*, que son: *longitud* ó largo, *latitud* ó ancho, y *grueso*. Esta última se llama tambien, segun los casos, *profundidad* ó *altura*.

El límite que separa á un cuerpo del espacio que le rodea carece de grueso, y se llama *superficie*.

SUPERFICIES *son los límites de los cuerpos.*

Las superficies solo tienen dos dimensiones: longitud y latitud.

Una parte cualquiera de la superficie total de un cuerpo tiene un límite, que la separa del resto de la superficie; lo mismo, si suponemos dos superficies que se encuentran ó cortan, la interseccion será límite comun de ambas: estos límites carecen de ancho y se llaman *líneas*.

LÍNEAS *son los límites de las superficies.*

Las líneas no tienen más dimension que la longitud.

Si concebimos una parte cualquiera de una línea, los límites que separan dicha parte del resto de la línea son *puntos;* lo mismo, cuando dos líneas se cortan la interseccion es un punto, límite comun de ambas.

PUNTOS *son los límites de las líneas.*

El punto geométrico no tiene ninguna dimension.

Las superficies, líneas y puntos tienen existencia real, pero no pueden separarse de los cuerpos; sin embargo, una vez adquirida la idea de superficie por la consideracion del cuerpo, la de línea por la consideracion de superficie, y la de punto por la consideracion de linea, podemos, mediante la abstraccion, prescindir del cuerpo, superficie ó línea, y concebir sus respectivos límites aislados, como si tuviesen existencia independiente y propia.

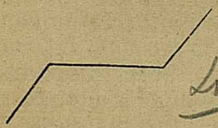
3 2. Las líneas se dividen principalmente en *rectas*, *quebradas* y *curvas*.

La línea recta no puede definirse de un modo perfecto; pero todos la conocemos desde los primeros años. El borde de una regla bien construida, un hilo tenso dan idea clara de esta línea. (*Fig.* 1.ª) Dos puntos determinan una recta y toda recta puede dividida por un punto en dos partes o se-

Fig. 1.ª

Línea quebrada ó **poligonal** *es la compuesta de varias rectas que se cortan dos á dos.* (Fig. 2).

Fig. 2.



Línea curva *es aquella de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es línea recta.* (Fig. 3).

4 3. Las superficies se dividen en *planas*, *quebradas* y *curvas*.

Superficie plana ó **plano** *es una superficie tal que apoyando en dos cualesquiera de sus puntos una línea recta, todos los puntos de ésta se colocan en la superficie.* (1)

Fig. 3.

Superficie quebrada ó **poliedral** *es la que se compone de varias superficies planas que se cortan.*

Superficie curva *es aquella de la que ninguna porcion, por pequeña que sea, es plana.*

4. Los cuerpos, superficies y líneas se comprenden bajo la denominacion comun de *figuras*.

Extension, en el concepto más general, *es la propiedad que poseen las figuras de ocupar un lugar en el espacio.*

Extension, refiriéndose á una figura determinada, *es la magnitud de esta figura.*

La extension recibe el nombre particular de *volúmen*, *área* ó *longitud*, cuando es la magnitud relativa de un cuerpo, superficie ó línea.

2 5. **Geometría** *es la ciencia que estudia las propiedades y relaciones de las figuras, y la medida de su extension.*

Se divide en *plana* y *del espacio*.

La geometría plana estudia las figuras situadas en un solo plano; y la del espacio, las situadas de otro modo cualquiera en el espacio.

Postulados del movimiento 1º Toda figura puede moverse permaneciendo fijos uno dos o ninguno de sus puntos. Si fijo uno o dos puntos (rotacion) y si ninguno (deslizamiento)
2º Un punto movil forma una linea una linea forma una superficie, esta forma un cuerpo -

dos figuras coinciden cuando todo punto de una pertenece a la otra - iguales si pueden hacerse coincidir -

GEOMETRÍA PLANA.

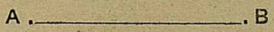
semirectas - si una recta gira alrededor de un punto una de sus partes puede pasar por cualquier punto del espacio — si dos rectas tienen dos puntos comunes coinciden — Dos rectas no pueden tener mas que un punto comun — Dos rectas cualesquiera son superponibles — Todas las rectas son iguales — Todas las semirectas tambien

INTRODUCCION.

I.—Línea recta y circunferencia.

6. En una línea recta podemos considerar su *posicion* relativamente á otra línea, superficie ó cuerpo, prescindiendo de la *magnitud;* ó bien la magnitud, prescindiendo de la posicion; ó bien la posicion y magnitud al mismo tiempo. Si estudiamos solamente la posicion, se mira la recta como prolongada indefinidamente en sus dos sentidos; si estudiamos la magnitud, se considera limitada por dos puntos, que en tal concepto se llaman *extremos* de la recta. Los puntos A y B son los extremos de la recta limitada AB. (*Fig.* 4).

Fig. 4.



Admitimos como evidentes las siguientes propiedades de la línea recta:

1.ª *La línea recta es el camino más corto entre dos cualesquiera de sus puntos.*

2.ª *Dos puntos determinan la posicion de una recta*, es decir, *por dos puntos no puede pasar más que una línea recta.*

De esta propiedad se deduce:

1.º *Dos rectas que tienen dos puntos comunes coinciden en toda su extension indefinida*; y como es evidente que siempre podremos cumplir aquella condicion, resulta que *todas las líneas rectas son superponibles.*

2.º *Dos rectas distintas no pueden tener más que un punto comun.*

Se llama DISTANCIA *entre dos puntos á la línea recta que los une.*

7. Dos rectas limitadas son *iguales* si colocando una sobre

(1) Todo plano divide al espacio en dos regiones
" " contiene a la recta que tiene en él dos puntos
" " que tiene dos puntos [illegible] puede girar alrededor de la recta que determinan pudiendo una de las partes o semiplanos pasar por un punto cualquiera

(1) consecutivos son los segmentos que tienen un extremo comun y ninguno otro punto mas

otra, de modo que un extremo de la primera coincida con un extremo de la segunda, coinciden tambien los segundos extremos.

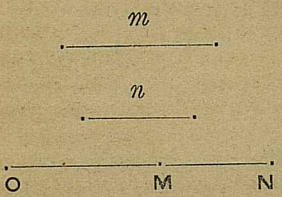
Recíprocamente, si sabemos que dos rectas son iguales, podrán superponerse de modo que coincidan los extremos de una de ellas con los de la otra. (1)

Se suman dos ó más rectas limitadas colocándolas á lo largo de una recta indefinida, que puede ser una de las dadas prolongada suficientemente, unas á continuacion de otras, de modo que el primer punto de cada una coincida con el último de la anterior.

Así, la suma de las rectas *m* y *n* (*Fig.* 5) se obtendrá tomando OM $= m$, MN $= n$, y será ON $= m + n$.

Lo mismo sumaríamos tres ó más.

Fig. 5.



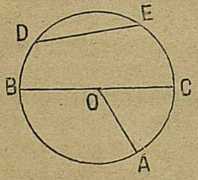
Es claro que OM es la diferencia entre ON y MN, y MN entre ON y OM.

Es evidente que toda recta limitada tiene un *punto medio* y sólo uno, es decir, que en toda recta limitada puede marcarse un punto á igual distancia de los dos extremos.

8. Circunferencia *es una línea curva cerrada, cuyos puntos están en un mismo plano á igual distancia de otro punto interior llamado* centro. (Fig. 6).

Círculo *es la porcion de plano limitada por la circunferencia.*

Fig. 6.



Arco *es una parte cualquiera de la circunferencia.*

Radio *es toda recta* OA *tirada desde el centro* O *á un punto cualquiera de la circunferencia.*

Cuerda *es toda recta limitada* DE *cuyos extremos son dos puntos de la circunferencia.*

Diámetro *es toda cuerda* BC *que pasa por el centro.*

9. De la definicion de circunferencia se deducen las siguientes propiedades:

1.ª *Todos los radios de una misma circunferencia son iguales*, porque miden las distancias del centro á los diferentes puntos de la circunferencia.

2.ª *Todos los diámetros de una circunferencia son iguales*, porque cada uno se compone de dos radios.

3.ª *La distancia de un punto dado en el plano de un círculo al centro de éste es igual, menor ó mayor que el radio, segun que el punto esté en la circunferencia, dentro del círculo ó fuera del mismo.*

Lo primero es evidente; además, imaginando una recta tirada del centro al punto interior ó al exterior, en el primer caso hay necesidad de prolongar la recta para que llegue á la circunferencia, luego es menor que el radio; en el segundo, la recta se compone del radio y una parte exterior, luego es mayor que el radio.

Recíprocamente, *si la distancia de un punto al centro es igual, menor ó mayor que el radio, el punto estará en la circunferencia, dentro del círculo ó fuera de éste.*

10. En un plano, se llama *lugar geométrico* de todos los puntos que poseen una misma propiedad, á la figura formada por dichos puntos.

Para demostrar que una figura es lugar geométrico, es necesario probar: 1.º que todos los puntos de la figura poseen cierta propiedad; 2.º que todos los puntos que la poseen pertenecen á la figura, ó en otros términos, que los puntos del plano no pertenecientes á la figura no gozan de aquella propiedad.

Segun esto,

La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano cuyas distancias á un punto dado son iguales á una recta dada.

Puesto que todos los puntos de la circunferencia están separados del centro por una distancia igual al radio, y todos los puntos que están separados del centro por una distancia igual al radio pertenecen á la circunferencia.

11. La geometría elemental estudia solamente:

La línea recta y la circunferencia.

Algunas superficies limitadas ó engendradas por estas líneas.

Algunos cuerpos limitados ó engendrados por estas superficies.

II.—Ángulos.

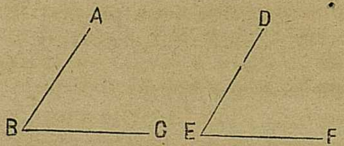
12. Dos rectas que se cortan y terminan en su punto de interseccion forman un *ángulo.*

Las rectas se llaman *lados* del ángulo y el punto en que se cortan, *vértice.*

(2) ang.os { llanos si tiene un lado en línea recta
convexo si prolongados son exteriores
concavo si prolongados son interiores

Un ángulo se designa comunmente por tres letras colocadas una en cada lado y otra en el vértice, debiendo leerse ésta en medio. Así, el primer ángulo de la fig. 7, se leerá: *ángulo* ABC ó *ángulo* CBA.

FIG. 7.



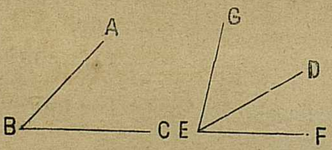
Sin embargo, cuando en el vértice hay solamente un ángulo, puede éste designarse por la letra de dicho punto; así diremos *ángulo* B.(1) (2)

13. Dos ángulos ABC y DEF (*Fig.* 7) son iguales si colocando un lado BC del primero sobre otro lado EF del segundo, de modo que los vértices B y E coincidan y que BA caiga hácia el mismo lado que ED con respecto á la recta comun EF, los otros dos lados BA y ED se confunden en uno solo.

Recíprocamente, si sabiendo que dos ángulos ABC y DEF son iguales, los superponemos de modo que coincidan los lados BC y EF, cayendo el vértice B en E, los otros dos lados BA y ED se confundirán.

14. Para sumar dos ángulos ABC y DEF (*Fig.* 8) se

FIG. 8.



coloca el ABC de modo que el lado BC coincida con ED y que el vértice B caiga en E, quedando BA y EF á diferentes lados de la recta comun ED; si BA ocupa la posicion EG, el ángulo GEF será la suma buscada.

Del mismo modo sumaríamos tres ó más ángulos.

Es claro que DEF es la diferencia entre GEF y GED, y GED la diferencia entre GEF y DEF.

Si suponemos el lado BA confundido al principio con el BC (*Fig.* 8), y concebimos que BA se separe moviéndose alrededor del punto fijo B, el ángulo de estas dos rectas crecerá de una

(1) si una semirecta pasa por el vertice esta toda dentro o fuera del ang.o; si son varias quedan ordenadas como los puntos en que cortan a un segmento AB

manera continua; por consiguiente *la magnitud de un ángulo depende de la mayor ó menor separacion de sus lados*, no de la longitud de estos.

Dicha magnitud puede determinarse en relacion á la de otro ángulo unidad, puesto que habiendo definido la igualdad y suma de ángulos, podemos averiguar *las veces* que uno mayor contiene á otro menor, operacion á que, en último análisis, queda reducida la determinacion de magnitudes.

15. Bisectriz *de un ángulo es una recta que pasa por el vértice y divide al ángulo en dos partes iguales.*

Es evidente que todo ángulo tiene una bisectriz y solo una.

III.—Triángulos.

equilatero rectángulo
isosceles acutángulo
escaleno obtusángulo

16. Triángulo *es la porcion de plano limitada por tres líneas rectas que se cortan dos á dos.*

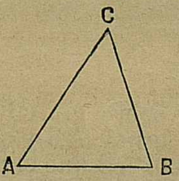
Lados del triángulo son las tres rectas que le forman. Cada lado se considera limitado por sus intersecciones con los otros dos. Estas intersecciones se llaman *vértices* del triángulo. Cada dos lados comprenden ó forman un ángulo.

De modo que un triángulo tiene seis *elementos:* tres lados y tres ángulos.

Ángulos *adyacéntes* ó *contiguos* á un lado son los que tienen sus vértices en los extremos de dicho lado. El tercer ángulo se llama *opuesto.* Base es uno cualquiera de los lados, altura es (1)

La figura ABC es un triángulo.

Fig. 9.



Los lados son AB, BC, AC.

Los ángulos BAC, ABC, ACB ó simplemente A, B, C.

Es claro que suponiendo indefinidamente prolongado un lado cualquiera AB, los otros dos AC y BC quedarán hácia una misma parte de la prolongacion, toda vez que AC y BC deben encontrarse en un punto C, lo que seria imposible si AC estuviese por encima de AB y BC por debajo ó vice-versa.

17. *Un lado cualquiera de un triángulo es:* 1.° *menor que la suma de los otros dos;* 2.° *mayor que su diferencia.*

1.° En el triángulo ABC (*Fig.* 9), tenemos

$$AB < AC + BC,$$

(1) la perpendicular a la base desde el vertice opuesto
mediana la recta que une un vertice con el punto medio del lado opuesto y mediatrices las perpendiculares a los lados en los puntos medios

porque el camino más corto entre los puntos A y B es la recta AB que los une [6].

El mismo razonamiento haríamos para los otros dos lados.

2.° Acabamos de ver que

$$AC < AB + BC;$$

restando la recta BC de los dos miembros de esta desigualdad, será

$$AC - BC < AB \quad \text{ó bien} \quad AB > AC - BC,$$

lo cual debíamos demostrar. todo segmento es menor que la línea quebrada que tenga sus extremos comunes

18. Se llaman *triángulos iguales* los que coinciden cuando se superponen convenientemente.

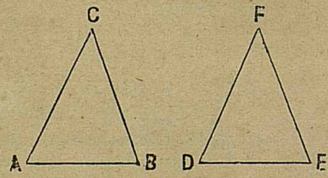
Si coinciden los tres vértices de un triángulo con los tres vértices de otro, coincidirán tambien los lados [6], y los triángulos serán iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 10).

2

19. *Dos triángulos* ABC *y* DEF *son iguales cuando tienen un lado igual* AB = DE, *y los dos ángulos adyacentes del primero* A, B *respectivamente iguales á los dos adyacentes del segundo* D, E.

FIG. 10.



Imaginemos colocado el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el lado DE se confunda con su igual AB y que el punto F caiga hácia el mismo lado de la recta AB que el punto C: el lado DF seguirá forzosamente la direccion AC, por ser iguales los ángulos A y D [13], y el lado EF seguirá la direccion BC por análoga razon; luego el punto F, comun á los lados DF y EF, deberá estar á la vez en AC y BC, para lo cual tiene que coincidir con C, único punto comun á las rectas AC y BC [6]; luego los triángulos son iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 10).

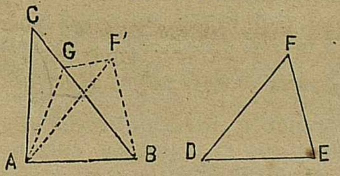
20. *Dos triángulos* ABC, DEF *son iguales cuando tienen dos lados del primero respectivamente iguales á dos lados del segundo* AC = DF, AB = DE, *é igual el ángulo comprendido* A = D.

Coloco el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el lado DE se confunda con su igual AB y que el punto F caiga hácia el mismo lado de la AB que el punto C: el lado DF seguirá forzosamente la direccion AC, por ser A = D, y el vértice F coincidirá con el vértice C, por ser AC = DF; luego los triángulos serán iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 11).

21. *Si dos triángulos* ABC, DEF *tienen dos lados respectivamente iguales* AC = DF, AB = DE, *y el ángulo* CAB *comprendido por los lados del primero es mayor que el* FDE *comprendido por los lados del segundo, el tercer lado* BC *del primer triángulo es mayor que el tercer lado* EF *del segundo.*

FIG. 11.



Coloco el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que el lado DE se confunda con su igual AB y que los triángulos resulten situados al mismo lado de la AB; siendo el ángulo CAB mayor que el D, la recta DF caerá entre las AC y AB, y el triángulo DEF tomará la posicion ABF'. Trazando la bisectriz AG del ángulo CAF' y uniendo el punto G con F' resultan los triángulos AGC y AGF', que son iguales por tener dos lados iguales AG = AG, AC = AF' é igual el ángulo comprendido, luego CG = GF'. Ahora, en el triángulo BGF' tenemos [17]

$$BG + GF' > BF',$$

poniendo CG en lugar de GF' será

$$BG + CG > BF' \quad \text{ó} \quad BC > EF,$$

puesto que BF' es el lado EF en otra posicion.

Si el punto F' cayese en el lado BC, quedaria entre B y C, y seria evidentemente BC > BF' ó BC > EF.

Puede ocurrir tambien que el punto F' caiga dentro del triángulo ABC: la demostracion en este caso es enteramente igual á la expuesta en el primero.

TEOREMA RECÍPROCO.

22. *Si dos triángulos* ABC, DEF *tienen dos lados respectivamente iguales* AC = DF, AB = DE, *y el tercer lado* BC *del primero es mayor que el tercer lado* EF *del segundo, el ángulo* CAB *opuesto al tercer lado del primer triángulo es mayor que el ángulo* D *opuesto al tercer lado del segundo.*

El ángulo CAB no puede ser igual al D, porque entonces los triángulos propuestos serian iguales [20], y tendríamos BC = EF, lo que es contrario á la hipótesis; tampoco puede ser CAB menor que D, porque en tal caso seria, segun el teorema directo, BC $<$ EF, lo que tambien es contrario á la hipótesis; luego

áng. CAB $>$ *áng.* D.

TEOREMA. *(Fig. 10).*

23. *Dos triángulos* ABC, DEF *son iguales cuando los tres lados del primero son respectivamente iguales á los tres lados del segundo* AB = DE, AC = DF, BC = EF.

El ángulo A es igual al D, porque si A fuese mayor ó menor que D, el lado BC seria mayor ó menor que EF [21], lo que es contrario al supuesto; luego los triángulos ABC y DEF tienen dos lados iguales AB = DE, AC = DF é igual el ángulo comprendido A = D; por consiguiente son iguales [20].

24. Si dos triángulos son iguales y los suponemos superpuestos, los lados y ángulos de uno se confundirán con los lados y ángulos del otro: tendrán, pues, los seis elementos respectivamente iguales, mas para asegurarnos de que dos triángulos son iguales basta ver si se hallan comprendidos en alguno de los tres casos demostrados en los números 19, 20 y 23, que exigen solamente la igualdad de tres elementos, entre los cuales debe haber un lado por lo ménos; luego de la igualdad de estos tres elementos podremos deducir inmediatamente la igualdad de los otros tres. Diremos, pues,

Si sabemos que dos triángulos tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, ó dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, ó los tres lados respectivamente iguales, podremos afirmar que los otros tres elementos son tambien respectivamente iguales.

Para evitar toda confusion, téngase presente que en dos triángulos iguales, á los lados iguales, se oponen ángulos iguales; y al contrario, á los ángulos iguales se oponen lados iguales.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES Y RELACIONES DE LA EXTENSION.

LIBRO PRIMERO.

LÍNEAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

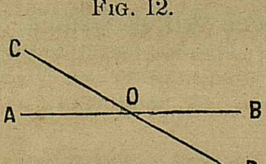
LÍNEA RECTA.

I.—Rectas que se cortan ó concurrentes.

Ángulos, perpendiculares, oblicuas.

25. Dos rectas indefinidas AB, CD (*Fig.* 12) que se cortan, forman cuatro ángulos AOC, COB, AOD, BOD.

Fig. 12.



ÁNGULOS ADYACENTES *son dos ángulos que tienen un lado comun y los otros dos lados en línea recta.*

Los ángulos AOC y COB son adyacentes.

Tambien lo son AOC y AOD, AOD y DOB etc.

ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE *son dos ángulos de los que uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.*

AOD y COB, AOC y DOB son opuestos por el vértice.

26. *Se llama* PERPENDICULAR *á una recta, toda otra recta que forme con la primera dos ángulos adyacentes iguales.*

Ángulo *recto* es cada uno de los dos ángulos adyacentes iguales que la perpendicular forma con la recta.

ang.º oblicuo es cualquiera de los adyacentes desiguales

Se llama OBLICUA *á una recta, toda otra recta que forme con la primera dos ángulos adyacentes desiguales.*

Estos ángulos se llaman oblicuos.

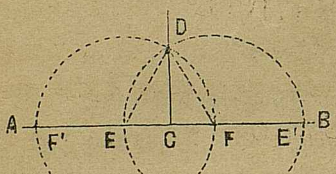
Una recta que encuentra á otra es respecto de ésta perpendicular ú oblicua.

ang° agudo es el menor que el recto, obtuso el mayor

TEOREMA. (*Fig.* 13).

27. *Por un punto* C *dado en una recta* AB *se puede siempre levantar una perpendicular á esta recta, y no se puede levantar más que una.*

FIG. 13.



1.° Tomo en la recta AB, á partir del punto C y hácia distintos lados de este punto, dos longitudes iguales CE y CF; haciendo centro sucesivamente en E y F describo con el radio EF dos circunferencias, que se cortarán, porque la de centro E tiene un punto F interior á la otra y un punto F' exterior; uno D con C, y la recta DC será perpendicular á AB.

En efecto: trazando las rectas DE, DF se formarán dos triángulos DCE y DCF, que tienen un lado CD comun, CE = CF por construccion, y ED = FD como radios iguales á EF; luego los triángulos son iguales. De esto se deduce

$$\acute{a}ng\ \mathrm{DCE} = \acute{a}ng.\ \mathrm{DCF};$$

luego CD es perpendicular á AB.

2.° (*Fig.* 14). Si CD es perpendicular á AB, otra cualquiera recta CE que pase por C, formará con AB dos ángulos adyacentes desiguales; porque ECA es mayor que el recto DCA, y ECB menor que el recto DCB; luego CE no es perpendicular á AB.

FIG. 14.

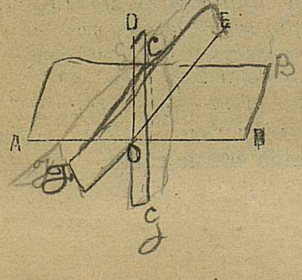
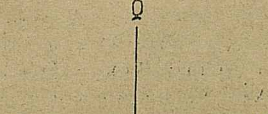


FIG. 15.



Teorema. (*Figs.* 14 *y* 15).

28. *Dos ángulos rectos son iguales, aunque no sean adyacentes.*

Sean los ángulos rectos DCB y QPN; demostremos que son iguales.

Coloco la fig. 15 sobre la 14, de modo que la recta MN coincida con AB cayendo el punto P en C; es evidente que PQ coincidirá con CD, de lo contrario habria en C dos perpendiculares á una misma recta, lo que es imposible [27]; luego los ángulos rectos DCB y QPN son iguales.

29. Todo ángulo menor que un recto se llama ángulo *agudo*, y todo ángulo mayor que un recto se llama *obtuso*.

ECB es agudo (*Fig.* 14), ACE obtuso.

Teorema. (*Fig.* 14).

30. *La suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.*

Sean los ángulos adyacentes ACE, ECB. Trazando por C la perpendicular CD á AB, será

$$ACE = ACD + DCE$$

$$ECB = DCB - DCE;$$

sumando ordenadamente estas igualdades y reduciendo, tendremos

$$ACE + ECB = ACD + DCB,$$

ó sea $$ACE + ECB = 2\,\textit{rectos}.$$

Escolio. Si uno de los ángulos es agudo su adyacente será por necesidad obtuso.

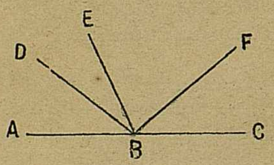
31. *Se llaman ángulos* consecutivos *dos ángulos que tienen el mismo vértice, un lado comun y los otros dos lados situados á una y otra parte del lado comun.*

Los ángulos GED, DEF de la fig. 8 son consecutivos.

Corolarios.

1.° *La suma de varios ángulos consecutivos* ABD, DBE, EBF *etc.* (Fig. 16) *formados por rectas que parten de un punto* B, *de modo que los lados extremos* BA *y* BC *estén en línea recta, es igual á dos ángulos rectos.*

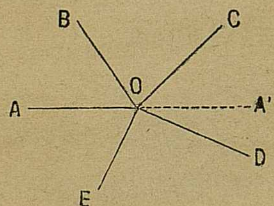
Fig. 16.



Los tres primeros ángulos, contando de izquierda á derecha, componen el ABF, pero la suma de éste y el último FBC vale dos rectos; luego la suma de todos los ángulos propuestos es igual á dos rectos.

2.° *La suma de varios ángulos* AOB, BOC, COD *etc.* (Fig. 17) *formados por rectas que parten de un punto* O, *de modo que cada una sea lado comun á dos ángulos consecutivos, es igual á cuatro rectos.* [1]

Fig. 17.



En efecto: prolongo un lado cualquiera OA en la direccion OA'; siendo OA lado comun á dos ángulos AOB, AOE situados á una y otra parte de OA, resultan ángulos AOB, BOC, COA' situados á un lado de AA', y otros AOE, EOD, DOA' situados al otro lado; los primeros valen dos rectos y los seguntos otros dos [*Cor.* 1.°]; luego la suma de todos es igual á cuatro rectos; pero esta suma es igual á la de los ángulos propuestos, toda vez que COA' y A'OD componen el COD; por consiguiente el corolario es cierto.

3.° *Si uno de los cuatro ángulos formados por dos rectas indefinidas que se cortan es recto, los demás tambien son rectos.*

Fig. 18-

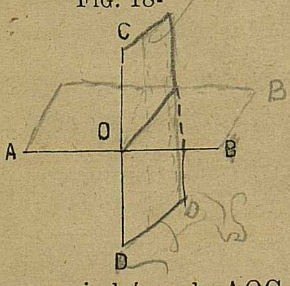
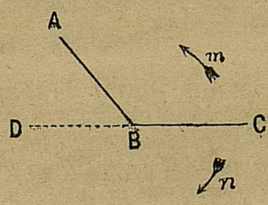


Fig. 19.



Porque si el ángulo AOC (*Fig.* 18) es recto su adyacente COB lo será tambien, y siéndolo éste lo será su adyacente BOD etc.

1. Enunciamos así este corolario, porque el enunciado comun es vago. Se dice que las rectas salen del punto O «en todas direcciones», y qué significa esta frase «en todas direcciones?» Cómo sabremos en un caso dado si esta condicion tiene lugar?

De aquí se deduce: *si una recta* CD *es perpendicular á otra* AB, *la segunda tambien es perpendicular á la primera.*

32. Escolio. Un lado BC de un ángulo ABC (*Fig.* 19) puede pasar de la posicion que ocupa á la del otro lado BA, girando alrededor del vértice B en cualquiera de los dos sentidos indicados por las flechas *m* y *n*. Si BC se mueve en el sentido de la flecha *m*, el ángulo descrito es igual á dos rectos ménos su adyacente ABD; pero si se mueve en el sentido de la flecha *n*, el ángulo descrito valdrá dos rectos más el ABD.

Podemos, pues, considerar en todo ángulo dos magnitudes: una *menor que dos ángulos rectos*, de la que se forma idea clara imaginando que uno de los lados gira alrededor del vértice hasta confundirse con el otro, siguiendo el *camino más corto*; otra *mayor que dos rectos*, imaginando un giro análogo por el *camino más largo*. Se sabe cual de estos caminos es menor prolongando uno de los lados del ángulo propuesto.

En las proposiciones anteriores nos hemos referido siempre á la menor de las magnitudes indicadas, y así lo haremos tambien en lo sucesivo. En este concepto podemos decir: *todo ángulo es menor que dos ángulos rectos.* [1]

33. *Ángulos* complementarios *son aquellos cuya suma es igual á un recto.*

Ángulos suplementarios *son aquellos cuya suma es igual á dos rectos.*

Dos ángulos adyacentes son suplementarios.

Si dos ángulos tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento son iguales; porque á los dos les falta lo mismo para valer un recto, ó para valer dos rectos.

Teorema recíproco. (*Fig.* 19).

34. *Si dos ángulos consecutivos* ABC, ABD *son suplementarios, los lados exteriores* BC, BD *estarán en línea recta.*

Prolongando el lado BC hácia la izquierda, el ángulo adyacente al ABC que se forma será suplementario del ABC [30], y por tanto igual al ABD; luego la prolongacion de BC coincidirá con BD, lo que demuestra el recíproco.

35. Una proposicion es *contraria* de otra cuando tienen hipótesis y conclusiones contrarias. El teorema contrario del 30 es como sigue:

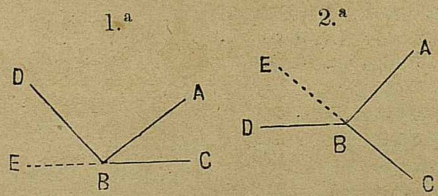
---

1 Admitida la adicion de ángulos, sin representar los sumandos por números, es necesario admitir tambien ángulos de cualquier magnitud: lo contrario nos pondria en la imposibilidad de contestar á esta sencillísima pregunta, ¿cuál es la suma de dos ángulos obtusos?

Si dos ángulos consecutivos no son adyacentes, su suma es menor ó mayor que dos rectos.

Porque si la suma de los ángulos consecutivos fuese igual á dos rectos, serian adyacentes, en virtud del recíproco.

Fig. 20.

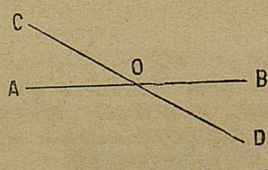


Obsérvese que la suma de dos ángulos consecutivos ABC, ABD (*Fig.* 20, 1.ª) será menor que dos rectos si prolongando un lado exterior BC los otros lados BA, BD quedan hácia una misma parte de dicha prolongacion, pues en tal caso falta el ángulo DBE para que la suma valga dos rectos. Por el contrario, la suma de los ángulos ABC y ABD (*Fig* 20. 2.ª) será mayor que dos rectos si prolongando un lado exterior BC quedan los otros dos á una y otra parte de la prolongacion, pues entonces la suma equivale á dos rectos más el ángulo DBE.

Teorema. (*Fig.* 21).

36. *Dos ángulos* AOC, BOD *opuestos por el vértice son iguales*.

Fig. 21.

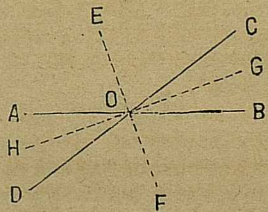


En efecto: el suplemento de AOC es COB, y el suplemento de BOD es tambien COB; luego AOC = BOD.

TEOREMA. (*Fig.* 22).

37. 1.° *Las bisectrices* OE, OG *de dos ángulos adyacentes* AOC, BOC *son perpendiculares entre sí.* 2.° *Las bisectrices* OG, OH *de dos ángulos opuestos por el vértice* COB, AOD *están en línea recta.*

FIG. 22.



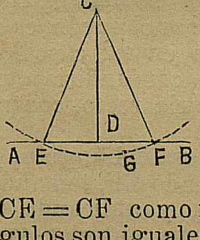
1.° La suma AOC + COB de dos ángulos adyacentes es igual á dos rectos; luego la suma EOC + COG= EOG de las mitades de dichos ángulos valdrá un recto; por consiguiente OE, OG son perpendiculares entre sí.

2.° Trazando la bisectriz OE del ángulo AOC, el ángulo EOG será recto; pero el EOH, formado por las bisectrices de los ángulos adyacentes AOC, AOD, es tambien recto; luego los ángulos consecutivos EOG, EOH son suplementarios; por consiguiente OG, OH están en línea recta [34].

TEOREMA. (*Fig.* 23).

38. *Por un punto* C *dado fuera de una recta* AB *se puede siempre trazar una perpendicular á esta recta, y no se puede trazar más que una.*

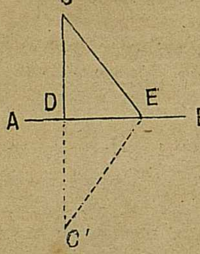
FIG. 23.



1.° Tomo un punto G á distinto lado que el dado C con respecto á AB; describiendo desde C como centro con CG por radio una circunferencia, ésta cortará á la recta dada AB en dos puntos E y F; marco el punto medio D de EF, y uno C con D: la recta CD es perpendicular á AB.

En efecto: trazando CE y CF se forman dos triángulos CDE, CDF que tienen un lado CD comun, DE = DF por construccion, y CE = CF como radios de una circunferencia; luego los triángulos son iguales, de donde se deduce *áng.* CDE = *áng.* CDF; por tanto CD es perpendicular á AB.

Fig. 24.



2.º (*Fig.* 24). Supongamos que CD sea perpendicular á AB; bajemos desde C otra recta cualquiera CE y demostremos que es oblicua á AB.

Prolonguemos CD, tomemos en la prolongacion una parte C'D igual á CD, y unamos C' con E.

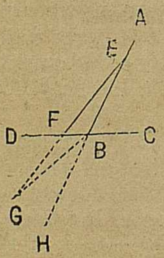
Los triángulos CDE, C'DE tienen un lado comun DE, CD = C'D por construccion, y los ángulos CDE y C'DE iguales por rectos, luego son iguales; de esto se deduce *áng.* CED = *áng.* C'ED. Ahora, si CE fuera perpendicular á AB, el ángulo CED y su igual C'ED serian rectos ó sea suplementarios, y como son consecutivos, los lados exteriores EC, EC' estarian en línea recta, y por tanto tendríamos entre los puntos C y C' dos líneas rectas CDC' y CEC', lo que es imposible; luego CE no puede ser perpendicular á AB.

39. Escolio. Segun los teoremas de los números 27 y 38, por un punto dado siempre puede trazarse una perpendicular á una recta, y no se puede trazar más que una, ó lo que es igual: *Una recta está determinada por uno de sus puntos y la condicion de ser perpendicular á otra recta dada.*

Teorema. (*Fig.* 25).

40. *Si desde un punto tomado en un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, la perpendicular caerá dentro ó fuera del ángulo, segun que éste sea agudo ú obtuso.*

Fig. 25.



1.º Sea el ángulo agudo ABC; decimos que la perpendicular bajada desde un punto E del lado AB al otro lado BC cae dentro del ángulo.

En efecto: la perpendicular no puede caer en el vértice B, porque tendria en tal caso dos puntos comunes con AB, se confundiria con este lado, y el ángulo ABC seria recto, contra lo supuesto.

Supongamos que caiga fuera del ángulo, y sea EF por ejemplo. Prolongando EF, tomando FG = EF, uniendo G con B, y aplicando el mismo razonamiento del teorema anterior veríamos que *áng*. EBF = *áng*. GBF;

el primero de estos ángulos es obtuso, como adyacente al agudo ABC, luego la suma de los ángulos consecutivos EBF, GBF, que evidentemente caen hácia un mismo lado de la recta EH, seria mayor que dos rectos, lo que es absurdo [35]; luego la perpendicular bajada desde E al lado BC caerá dentro del ángulo ABC.

2.º Sea el ángulo obtuso ABD. Su adyacente ABC será agudo; luego la perpendicular caerá dentro de ABC, y por consiguiente fuera de ABD.

Teorema recíproco.

41. *Si desde un punto tomado en un lado de un ángulo se baja una perpendicular al otro lado, el ángulo será agudo ú obtuso, segun que la perpendicular caiga dentro ó fuera del mismo.*

1.º Si la perpendicular cae dentro, el ángulo no es recto, porque, de serlo, la perpendicular se confundiria con el lado AB, ni obtuso, porque en tal caso la perpendicular caeria fuera; luego es agudo.

2.º Si la perpendicular cae fuera del ángulo, éste no es recto, por la razon dada antes, ni agudo, porque en tal caso la perpendicular caeria dentro, luego es obtuso.

Teorema. (*Fig*. 24).

42. *Si desde un punto* C *exterior á una recta* AB *se trazan á ésta una perpendicular* CD *y una oblicua* CE, *la perpendicular es menor que la oblicua.*

Haciendo la misma construccion que en el teorema [38], segundo caso, se ve que CD es la mitad de CC′, y CE la mitad de CEC′; pero

$$CC' < CEC' \text{ [6], luego } CD < CE.$$

Teorema recíproco.

43. *Si una recta* CD *es la menor de cuantas pueden trazarse desde un punto* C *á otra recta* AB, *la primera será perpendicular á la segunda.*

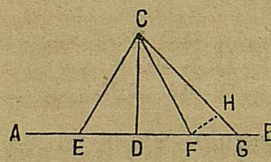
Si CD no fuese perpendicular á AB, podríamos bajar dsdee C una perpendicular, la que seria menor que CD, lo que es contrario al supuesto; luego CD es perpendicular á AB.

44. *Se llama* DISTANCIA *de un punto á una recta la perpendicular trazada desde el punto á la recta.*

TEOREMA. (*Fig.* 26).

45. *Si desde un punto* C *exterior á una recta* AB *se bajan á ésta una perpendicular* CD *y varias oblicuas*: 1.º *las oblicuas* CE, CF *que se apartan igualmente de la perpendicular son iguales;* 2.º *de dos oblicuas* CE, CG *que se apartan desigualmente de la perpendicular, la que se aparta más es mayor.* [1]

FIG. 26.



1.º Los triángulos CDE, CDF son iguales, por tener comun el lado CD, DE = DF por hipótesis y el ángulo CDE igual al CDF; luego CE = CF.

2.º Supongamos DG > DE; debemos demostrar que CG > CE.

Tomemos en AB una parte DF = DE y tracemos la oblicua CF, que será igual á CE.

El ángulo CFG es obtuso, porque la perpendicular CD cae fuera del ángulo [41]; luego si levantamos por F una perpendicular FH á CF, cortará á CG entre los puntos C y G; pero CH > CF [42]; por consiguiente con mayor razon será

$$CG > CF \text{ ó } CG > CE.$$

TEOREMA RECÍPROCO.

46. 1.º *Si dos oblicuas* CE *y* CF *son iguales, se apartan igualmente de la perpendicular.* 2.º *Si dos oblicuas* CE *y* CG *son desiguales, la mayor* CG *se aparta de la perpendicular más que la menor.*

---

1 Llamamos *pié* de una recta que cae sobre otra AB al punto de interseccion de la recta con AB. Decimos que dos oblicuas se apartan igualmente de la perpendicular cuando los piés de aquellas equidistan del pié de ésta; y que se apartan desigualmente, en el caso contrario.

1.° Si CE se apartase de la perpendicular más ó ménos que CF, seria CE mayor ó menor que CF [*Teorema directo*], lo que es contrario á la hipótesis.

2.° Si la oblicua mayor CG se apartase de la perpendicular lo mismo que la menor, seria CG $=$ CE; y si se apartase ménos seria CG $<$ CE, consecuencias contrarias al supuesto.

47. Corolario. *Desde un punto* C *no pueden trazarse á una recta* AB *más de dos rectas iguales.*

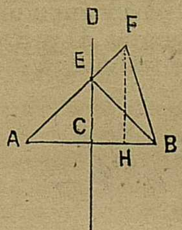
Sean dos oblicuas iguales CE y CF.

Otra recta cualquiera tirada desde C á AB, si es perpendicular á ésta, será menor que CE y CF; y si es oblicua, se apartará de la perpendicular más ó ménos que éstas; por consiguiente será mayor ó menor que las mismas.

Teorema. (*Fig.* 27).

48. 1.° *Todo punto* E *de la perpendicular* DG *levantada á una recta* AB *por su punto medio* C, *equidista de los extremos de la recta.* 2.° *Todo punto* F *exterior á dicha perpendicular no equidista de los extremos de la recta.*

Fig. 27.



1.° Las distancias EA, EB del punto E á los extremos de AB son oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular; luego EA $=$ EB [45].

2.° Para demostrar que las distancias FA, FB del punto exterior F á los extremos de AB son desiguales, bajo desde F una perpendicular FH á AB; el pié de esta perpendicular no puede ser el punto medio C [27], luego divide á AB en dos partes desiguales AH, BH; por consiguiente las distancias FA, FB son oblicuas que se apartan desigualmente de la perpendicular FH, luego son desiguales.

Teorema recíproco.

49. 1.° *Si un punto* E *equidista de los extremos de una recta* AB, *está en la perpendicular levantada á ésta por su punto me-*

dio. 2.° *Si un punto* F *no equidista de los extremos de la recta, no pertenece á la perpendicular.*

1.° El punto E está en la perpendicular, porque de lo contrario no equidistaria de A y B.

2.° El punto F no está en la perpendicular, porque si estuviese equidistaria de A y B.

50. Acabamos de ver que cada uno de los puntos de DG está á igual distancia de A y B; y que todo punto equidistante de A y B, pertenece á CD; luego [10]

El lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los extremos de una recta, es la perpendicular levantada á ésta por su punto medio.

51. Corolario. *Si una recta* EG *tiene dos puntos* E *y* G *equidistantes de los extremos de otra* AB, *es perpendicular á ésta y la divide en dos partes iguales.*

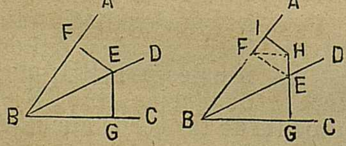
Los puntos E y G pertenecen á la perpendicular levantada á AB en su punto medio [49]; luego EG se confunde con dicha perpendicular [6], lo que demuestra el corolario.

Teorema. (*Fig.* 28).

3

52. 1.° *Todo punto* E *de la bisectriz* BD *de un ángulo* ABC *equidista de los lados del ángulo.* 2.° *Todo punto* H *interior á un ángulo y que está fuera de la bisectriz no equidista de los lados del ángulo.*

Fig. 28.



1.° Debemos demostrar que las perpendiculares EF, EG bajadas desde E á los lados del ángulo son iguales [44].

Doblando la figura por la bisectriz BD, el lado BC se confunde con BA, porque los ángulos DBC y DBA son iguales; mas como EG es perpendicular á BC y EF lo es á BA desde un mismo punto E, cuando BC y BA se confundan, sus perpendi–

culares respectivas EG y EF se confundirán tambien [38]; luego $EG = EF$.

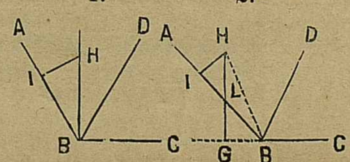
2.° Sean HG, HI las distancias del punto H á los lados del ángulo ABC; debemos demostrar que son desiguales.

Imaginando una recta HB, podrá suceder que el ángulo HBC sea agudo, recto ú obtuso. Si es agudo, la HG caerá dentro del ángulo y cortará por lo tanto á la bisectriz BD en un punto E. Trazando EF perpendicular á AB, y uniendo F con H, será $EF = EG$ [1.°], pero $HF < HE + EF$ [17]; luego $HF < HE + EG$ ó $HF < HG$; y como $HI < HF$ [42]; será con mayor razon

$$HI < HG.$$

Si el ángulo HBC fuera recto, el pié G de la perpendicular HG caeria en B (*Fig.* 29.1.ª), y tendríamos desde luego $HI < HB$.

Fig. 29.



Por último, si HBC fuera obtuso, el punto G caeria en la prolongacion de BC (*Fig.* 29, 2.ª), y seria $HI < HL$; luego con mayor razon $HI < HG$.

Teorema recíproco.

53. 1.° *Todo punto interior á un ángulo y equidistante de los lados del mismo está en la bisectriz.* 2.° *Todo punto interior á un ángulo y no equidistante de los lados del mismo está fuera de la bisectriz.*

Imítense las demostraciones de los números 41, 46 y 49.

54. Los teoremas directo y recíproco que acabamos de demostrar pueden comprenderse en el siguiente enunciado:

El lugar geométrico de los puntos interiores á un ángulo y equidistantes de sus lados, es la bisectriz de dicho ángulo.

55. *Observacion general acerca de los teoremas recíprocos.* No todos los recíprocos son ciertos, por lo que no deben admitirse sin demostracion.

Muchas veces, sin embargo, la proposicion directa revela desde luego la verdad de su recíproca. En este caso se hallan los teoremas tratados en los números 40, 45, 48 y 52, y todos aquellos en que no se pueda hacer más que un número limitado de hipótesis sobre un mismo sujeto, y á cada hipótesis A, B, C... corresponda una conclusion A′, B′, C′... distinta y que excluya todas las demás; estas conclusiones A′, B′, C′... pasan á ser hipótesis de los recíprocos, y A, B, C... deben ser las respectivas conclusiones; porque si á la hipótesis A′ no correspondiese la conclusion A sino otra cualquiera B, como de la afirmacion B se desprende la B′ en virtud del teorema directo, tendríamos que A′ y B′ serian afirmaciones idénticas ó al menos compatibles, siendo así que las suponemos distintas y excluyéndose mutuamente. Diremos, pues,

Siempre que en un teorema ó en una série de ellos se hayan hecho todas las hipótesis posibles sobre un mismo sujeto, y cada hipótesis haya conducido á una conclusion distinta y que excluya todas las demás, podremos afirmar que los recíprocos son ciertos.

II.—Rectas que no se cortan ó paralelas.

56. *Se llaman rectas* PARALELAS *dos rectas situadas en un mismo plano, que no se encuentran por más que se prolonguen.*

Se demuestra la existencia de tales rectas por medio de la siguiente proposicion.

TEOREMA.

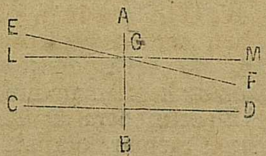
57. *Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas entre sí.*

Porque si las dos rectas llegaran á encontrarse, habria dos perpendiculares desde el punto de encuentro á una misma recta, lo que es imposible [38].

Postulado de Euclides. (*Fig.* 30).

2 58. *Dos rectas, una* CD *perpendicular y otra* EF *oblicua á una misma recta* AB, *prolongadas suficientemente se encuentran, y el encuentro se verifica hácia el lado del ángulo agudo* FGB *que forma la oblicua con la recta.*

Fig. 30.



Esta proposicion no se puede demostrar rigurosamente; pero tiene cierto grado de evidencia que permite admitirla desde luego como cierta.

Teorema. (*Fig.* 30).

4 59. *Por un punto* G *exterior á una recta* CD, *puede siempre trazarse una paralela á dicha recta, y no puede trazarse más que una.*

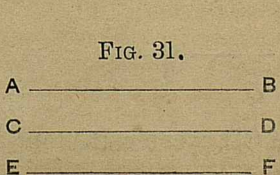
Tracemos por G una perpendicular AB á CD. De todas las rectas que pasen por G habrá una LM perpendicular á AB y las demás serán oblicuas [27]; como CD tambien es perpendicular á AB, las rectas LM y CD serán paralelas [57]; pero otra cualquiera EF siendo oblicua á AB encontrará á CD [*Postulado*]; luego por G pasa una paralela LM á CD y solo puede pasar una.

Escolio. En virtud de este teorema podemos decir: *una recta queda determinada por uno de sus puntos y la condicion de ser paralela á otra recta dada.*

Corolarios.

7

Fig. 31.



1.° *Dos rectas* AB *y* CD (Fig. 31) *paralelas á una tercera* EF *son paralelas entre sí.*

En efecto: si AB y CD llegaran á encontrarse, pasarian por el punto de encuentro dos paralelas á EF, lo que es imposible.

Puede enunciarse este corolario diciendo:

Si dos rectas CD *y* EF *son paralelas, toda paralela* AB *á una de ellas* EF *es paralela á la otra* CD.

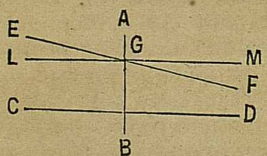
5 2.° *Si dos rectas* LM *y* CD (Fig. 30) *son paralelas, toda recta* EF *que encuentra á una de ellas* LM *encuentra á la otra* CD.

Si EF no encontrase á CD seria paralela á esta recta; y pasarian por G dos paralelas á CD, lo que es imposible.

Teorema recíproco del 57. (*Fig.* 30).

6 60. *Si dos rectas* LM, CD *son paralelas, toda perpendicular* AB *á una de ellas* CD *es tambien perpendicular á la otra* LM.

Fig. 30.



Puesto que AB encuentra á CD encontrará tambien á su paralela LM; ahora bien, si AB no es perpendicular á LM será oblicua, asi como LM será oblicua á AB; pero entonces siendo CD y LM una perpendicular y otra oblicua á AB, se encontrarán [*Postulado*], lo que es contrario al supuesto; luego AB es perpendicular á LM.

Corolarios.

8 1.° *Si dos rectas* AB, CD (Fig. 32) *son paralelas, sus perpendiculares respectivas* LM *y* PQ *son paralelas.*

Fig. 32.

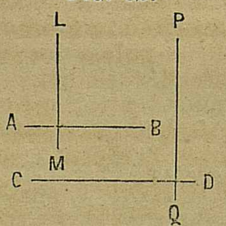
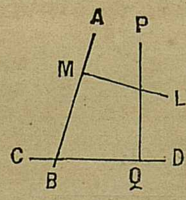


Fig. 33.



Por ser LM perpendicular á AB lo es á CD, y como PQ tambien lo es, LM y PQ son paralelas [57].

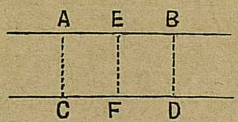
9 2.° *Si dos rectas* AB, CD *se cortan* (Fig. 33) *sus perpendiculares respectivas* LM *y* PQ *tambien se cortan.*

Porque si LM y PQ fuesen paralelas, sus perpendiculares respectivas AB y CD lo serian tambien; luego LM y PQ tienen que cortarse.

Teorema. (*Fig.* 34).

61. *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, todos los puntos de una de ellas equidistan de la otra.*

Fig. 34.



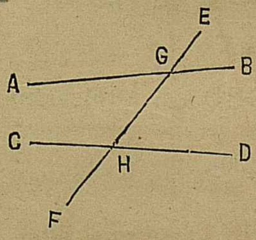
Sean A y B dos puntos de la paralela AB, AC y BD sus distancias á la otra paralela CD: se quiere demostrar que AC = BD.

Siendo AC y BD perpendiculares á CD [44] lo son á AB. Marquemos el punto medio E de la distancia AB y bajemos EF perpendicular á CD y por lo tanto á AB; doblando la figura por la recta EF, la EB seguirá la direccion EA, por ser iguales los ángulos en E, el punto B caerá en A, por ser EB = EA, y BD seguirá la direccion AC, porque los ángulos en B y en A son rectos; al mismo tiempo FD sigue la direccion FC; luego el punto D se encontrará á la vez en AC y FC, para lo cual tiene que confundirse con C; por consiguiente BD = AC.

Escolio. Se llama *distancia* entre dos rectas paralelas á cualquiera de las perpendiculares bajadas desde una paralela á la otra.

62. Si una recta EF (*Fig.* 35) corta á otras dos AB y CD, recibe el nombre de *secante* ó *transversal.*

Fig. 35.



En los puntos de interseccion G y H se forman ocho ángulos: los situados fuera de las paralelas se llaman *externos*, y los situados dentro, *internos*.

Dos ángulos externos EGB y FHC de distinto lado de la secante, no adyacentes, se llaman *alternos externos*.

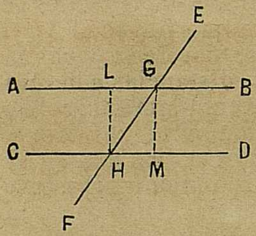
Dos ángulos internos AGH, GHD de distinto lado de la secante, no adyacentes, se llaman *alternos internos*.

Dos ángulos EGB, EHD uno externo y otro interno, del mismo lado de la secante y no adyacentes, se llaman *correspondientes*.

Teorema. (*Fig.* 36).

2 63. *Si dos paralelas* AB *y* CD *se cortan por una secante* EF: 1.° *los ángulos alternos son iguales;* 2.° *los ángulos correspondientes son iguales;* 3.° *dos ángulos internos ó dos externos del mismo lado de la secante son suplementarios.*

Fig. 36.



1.° Demostremos que los ángulos alternos internos AGH, GHD son iguales.

Desde los puntos G y H trazo las perpendiculares GM, HL comunes á las dos paralelas; GM y HL son paralelas entre sí é iguales [60 y 61]; y por ser paralelas, las distancias GL y MH también son iguales; como además GH = GH, los triángulos GHL, GHM tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales; por consiguiente

$$\textit{áng. } AGH = \textit{áng. } GHD.$$

De la igualdad de estos ángulos alternos internos se deduce la de sus suplementos respectivos BGH, GHC, y la de los alternos externos EGB, FHC opuestos por el vértice á los primeros.

2.° Decimos que los ángulos correspondientes EGB, EHD son iguales.

En efecto:

$$EGB = AGH \ [36], \qquad AGH = EHD \ [1.°];$$

luego

$$EGB = EHD.$$

3.° Vamos á demostrar que BGH y GHD son suplementarios.

Tenemos $\quad BGH + AGH = 2 \textit{ rectos } [30],$

pero $\quad AGH = GHD \quad [1.°];$

luego, sustituyendo, $BGH + GHD = 2 \textit{ rectos}.$

Análogo razonamiento haríamos si los ángulos fuesen externos.

Teorema recíproco.

64. *Dadas dos rectas* AB, CD *cortadas por una secante* EF: 1.° *si los ángulos alternos son iguales, las rectas* AB *y* CD *son paralelas*; 2.° *si los ángulos correspondientes son iguales, las rectas son paralelas;* 3.° *si dos ángulos internos ó externos de un mismo lado de la secante son suplementarios, las rectas son paralelas.*

1.° Supongamos iguales los ángulos alternos internos AGH y GHD (*Fig.* 36); decimos que AB y CD son paralelas.

En efecto: si trazásemos por G una paralela á CD, esta paralela formaria con GH hácia la izquierda un ángulo igual á GHD [63, 1.°], y por tanto igual á AGH; luego la paralela se confundiria con GA [13]; por consiguiente GA es paralela á CD.

2.° Sean EGB, GHD dos ángulos correspondientes iguales.

De $$EGB = GHD \text{ y } EGB = AGH$$

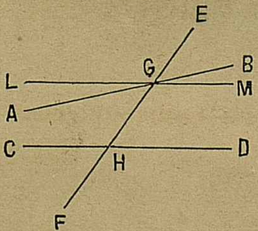
se deduce GHD = AGH, y como estos ángulos son alternos internos, las rectas AB y CD son paralelas.

3.° Supongamos BGH + GHD = 2 *rectos*; como tambien BGH + AGH = 2 *rectos*, se deduce GHD = AGH; luego AB y CD son paralelas.

Teorema. (*Fig.* 37).

65. *Si la suma* AGH + CHG *de dos ángulos internos de un mismo lado de la secante es menor que dos rectos, las rectas* AB *y* CD *se encuentran hácia dicho lado.*

Fig. 37.



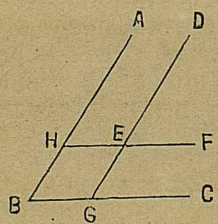
Si las rectas no se encontrásen serian paralelas, y la suma AGH + CHG valdria dos rectos. Además, los ángulos suplementarios de los propuestos BGH y DHG valen más de dos rectos; luego si por G trazamos la paralela LM, el ángulo BGH será mayor que MGH, y no pudiendo GM encontrar á HD, tampoco GB, por más que se prolongue hácia la derecha, la encontrará; luego el encuentro tendrá lugar hácia la izquierda de la secante.

Teorema. *(Fig. 38).*

66. *Dos ángulos que tienen sus lados paralelos son iguales ó suplementarios.*

Primer caso. Sean los ángulos ABC y DEF, cuyos lados son paralelos y están dirigidos en el mismo sentido[1]; vamos á demostrar que son iguales.

Fig. 38.



Prolongando DE hasta que encuentre en G al lado BC, tendremos

DEF = DGC por correspondientes,

DGC = ABC » »

luego DEF = ABC.

Segundo caso. Sean los ángulos ABC y HEG, cuyos lados paralelos BA y EG tienen direcciones opuestas, así como tambien los BC y EH; decimos que son iguales. Prolongando los lados del ángulo HEG se forma otro DEF; pero

ABC = DEF, por el primer caso,

HEG = DEF, como opuestos por el vértice;

luego ABC = HEG.

Tercer caso. Sean los ángulos ABC y FEG, cuyos lados paralelos BC y EF tienen la misma direccion, mientras que los otros dos BA y EG tienen direcciones opuestas; vamos á demostrar que son suplementarios.

Prolongando el lado EG se forma el ángulo DEF; pero

DEF + GEF = 2 *rectos.*

DEF = ABC, primer caso;

luego ABC + GEF = 2 *rectos.*

---

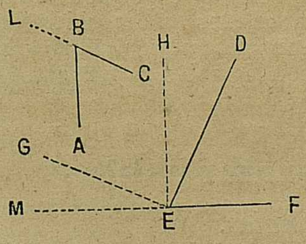
1 El sentido de la direccion de un lado se cuenta á partir del vértice: así BC y EF están dirigidos en el mismo sentido, desde el vértice hácia la derecha; BA y ED tienen la misma direccion, desde el vértice hácia arriba.

Escolio. Segun hemos visto, los ángulos cuyos lados paralelos están dirigidos en el mismo sentido ó en sentidos opuestos son iguales; y si dos lados están dirigidos en el mismo sentido y los otros dos en sentidos opuestos, los ángulos son suplementarios.

Teorema. *(Fig. 39).*

67. *Dos ángulos* ABC *y* DEF, *cuyos lados son respectivamente perpendiculares, son iguales ó suplementarios.*

Fig. 39.



Suponemos que AB y BC son respectivamente perpendiculares á EF y ED. Tracemos por el vértice E dos perpendiculares EH y EG á los lados EF y ED; el ángulo GEH formado por estas perpendiculares es igual al DEF, porque ambos tienen el mismo complemento HED; pero GEH tiene sus lados paralelos á los de ABC [57], luego es igual ó suplementario de ABC; por tanto DEF será tambien igual ó suplementario de ABC.

Escolio. Siendo agudos los dos ángulos propuestos son necesariamente iguales, porque si fueran suplementarios uno seria agudo y otro obtuso.

Si los ángulos dados fuesen los obtusos ABL y DEM, tambien serian iguales, por serlo sus respectivos suplementos ABC y DEF.

Por último, si uno DEF es agudo y el otro ABL obtuso, evidentemente serán suplementarios.

III.—Paralelas cortadas por paralelas.

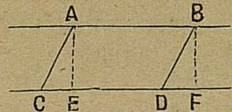
Líneas iguales.

TEOREMA. *(Fig. 40).*

68. *Las partes* AC *y* BD *de dos rectas paralelas interceptadas por otras dos paralelas* AB *y* CD *son iguales.*

Bajo las perpendiculares AE y BF, que serán iguales [61] y paralelas. Los triángulos ACE y BDF tienen un lado igual AE = BF adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, AEC = BFD por rectos, CAE = DBF por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, luego dichos triángulos son iguales; por consiguiente AC = BD.

FIG. 40.



IV.—Concurrentes cortadas por paralelas.

Líneas proporcionales.

69. Se llama *medida comun* de dos cantidades homogéneas otra cantidad de la misma especie que las primeras, contenida exactamente en cada una de éstas cierto número entero de veces.

Las cantidades que tienen medida comun, se llaman *conmensurables.*

Si dos cantidades tienen una medida comun, tendrán cuantas queramos, pues solamente las partes alícuotas de la primera serán otras tantas medidas comunes.

La division de dos cantidades homogéneas, tiene por objeto hallar el número abstracto *(cociente)* por el cual debe multiplicarse la segunda *(divisor)* para obtener la primera *(dividendo).*

Razon ó *relacion* de dos cantidades homogéneas es el cociente de dividir la primera por la segunda.

La razon de dos cantidades conmensurables es la relacion de los números enteros que expresan sus magnitudes respectivas, cuando se han determinado con una medida comun.

Sean A y B dos cantidades conmensurables, que contienen á la medida comun m veces y n veces respectivamente; decimos que

$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n},$$

es decir que el producto $B \times \frac{m}{n} = A$.

En efecto: multiplicar B por la fraccion $\frac{m}{n}$ es dividir B en n partes iguales y tomar m de éstas; dividiendo B en n partes iguales se obtiene la medida comun, y como A consta de m veces esta medida, es claro que $B \times \frac{m}{n} = A$.

Si las cantidades A y B, cuya relacion se busca, no tienen medida comun, se divide una de ellas B en n partes iguales, se lleva una parte, que llamaremos p, sobre la otra cantidad A mientras se pueda, m veces por ejemplo, y quedará necesariamente un residuo menor que p; segun esto, A es mayor que m veces y menor que $m+1$ veces esta parte; luego la relacion $\frac{A}{B}$ será mayor que $\frac{m}{n}$ y menor que $\frac{m+1}{n}$, toda vez que el producto $B \times \frac{m}{n}$, que significa m veces la parte p, es menor que A, y el $B \times \frac{m+1}{n}$, que representa $m+1$ veces la parte p, es mayor que A; pero si n aumenta indefinidamente, lo cual es posible, la diferencia $\frac{1}{n}$ entre las fracciones $\frac{m+1}{n}$ y $\frac{m}{n}$ será tan pequeña como queramos; luego, con mayor razon, estas fracciones se aproximarán á la relacion $\frac{A}{B}$ cuanto se quiera. Resulta, pues, que $\frac{A}{B}$ es límite superior de $\frac{m}{n}$ é inferior de $\frac{m+1}{n}$.

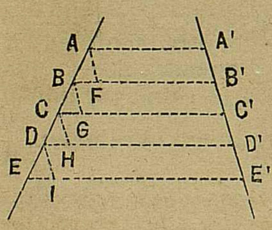
Ahora bien, entenderemos por *cociente, razon* ó *relacion* de dos cantidades inconmensurables A y B el límite á que tienden los valores sucesivos de la fraccion $\frac{m}{n}$ ó de la $\frac{m+1}{n}$ cuando n aumenta indefinidamente.

Dos cantidades homogéneas son *proporcionales* á otras dos, entre sí homogéneas, cuando la razon de las primeras es igual á la razon de las segundas.

Teorema. (*Fig.* 41).

70. *Si en una recta se toman partes iguales* AB=BC=CD..., *y por los puntos de division se trazan, en direccion arbitraria, varias paralelas* AA', BB', CC'..., *que encuentren á otra recta, quedará ésta dividida en partes iguales* A'B' = B'C' = C'D'....

Fig 41.



Por los puntos A, B, C.... trazo las rectas AF, BG, CH.... paralelas á A'E', y por lo tanto paralelas entre sí. Los triángulos ABF, BCG, CDH.... tienen un lado igual AB=BC=CD.... por hipótesis, los ángulos BAF, CBG, DCH... iguales por correspondientes, y los ABF, BCG, CDH... tambien iguales por la misma razon; luego dichos triángulos son iguales [19]. De esto se deduce

$$AF = BG = CH.... ;$$

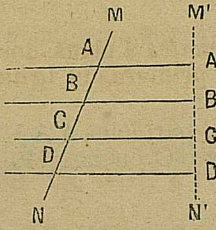
sustituyendo ahora las líneas auxiliares AF, BG, CH... por sus iguales [68] A'B', B'C', C'D'... será

$$A'B' = B'C' = C'D'....$$

Escolio. Es evidente que si AA' se mueve paralelamente á sí misma, de modo que AB disminuya, A'B' disminuirá al mismo tiempo; por consiguiente si fuese AB menor que una de las partes iguales en que está dividida la recta AE, tambien seria A'B' menor que una de las en que lo está A'E'.

71. Corolario. *Toda recta* MN (Fig. 42) *cortada por una série de paralelas equidistantes entre sí, queda dividida en partes iguales*, y recíprocamente, *si una recta está dividida en partes iguales por una série de paralelas, éstas equidistan entre sí.*

Fig. 42.



Trazando M'N' perpendicular á las paralelas, tendremos por hipótesis

$$A'B'=B'C'=C'D'...,$$

luego tambien AB=BC=CD...

De un modo análogo se demuestra el recíproco.

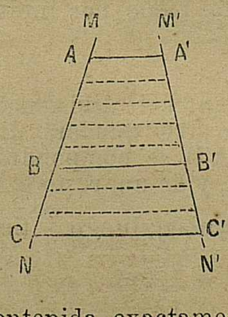
72. Cuando en una recta indefinida se marcan varios puntos, que comunmente son intersecciones con otras rectas, llamamos *segmentos* ó *partes* de la primera á las distancias entre dichos puntos.

Si en una recta indefinida tenemos un segmento AB, y se marca un tercer punto C, podrá éste caer en el segmento ó en la prolongacion del mismo: en el primer caso, C divide á AB en dos segmentos llamados *aditivos*, porque $CA + CB = AB$; en el segundo se dice, por extension, que C divide á AB en dos segmentos *sustractivos*, porque $CA — CB = AB$.

Teorema.

73. *Si tres paralelas encuentran á dos rectas, dos segmentos cualesquiera de una de éstas son proporcionales á los segmentos correspondientes de la otra.*

Fig. 43.



Sean las paralelas AA', BB', CC' (*Fig.* 43), que encuentran á las rectas MN y M' N'.

Queremos demostrar que dos segmentos cualesquiera AB y BC ó AC y AB ó AC y BC de MN son proporcionales á los correspondientes A'B' y B'C', A'C' y A'B', A'C' y B'C' de M'N'.

Fijémonos en los AB y BC. Estos segmentos pueden tener medida comun ó no tenerla, lo que nos hace considerar dos casos:

Primer caso. Si AB y BC son conmensurables, la medida comun estará contenida exactamente en ambos cierto número de veces:

sean, por ejemplo, 5 y 3 respectivamente; en tal supuesto será [69]

$$\frac{AB}{BC} = \frac{5}{3} \qquad [a].$$

Trazando por los puntos de division de AC paralelas á AA′, queda A′B′ dividido en cinco partes iguales y B′C′ en tres [70]; luego

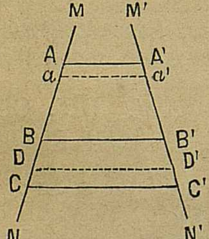
$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{5}{3} \qquad [b].$$

De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

SEGUNDO CASO. (*Fig.* 44). Sean AB y BC inconmensurables. Dividamos BC en n partes iguales, pudiendo ser n tan grande como se quiera; si llevamos una parte CD sobre BA, sucesivamente y á partir de B, las veces que se pueda, por ejemplo m veces, quedará por necesidad un resto aA menor que CD; luego la fraccion $\frac{m}{n}$, cuando n aumenta indefinidamente, tiene por límite superior $\frac{AB}{BC}$ [69].

FIG. 44.



Trazando por los puntos de division de AC paralelas á AA′, BB′ y CC′, el segmento B′C′ quedará dividido en n partes iguales á C′D′ [70], y el A′B′ se compondrá, por igual razon, de m partes iguales á C′D′, y de un resto a'A′ menor que C′D′, puesto que $a\text{A} < \text{CD}$ [70, *escolio*]; luego $\frac{m}{n}$ tiene tambien por límite superior $\frac{A'B'}{B'C'}$.

Siendo $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{A'B'}{B'C'}$ límites superiores de un mismo número variable $\frac{m}{n}$, será [*Arit.* 234]

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}.$$

Escolio. La misma demostracion es aplicable á los segmentos AC, AB y á los AC, BC, por lo tanto tendremos:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'}, \qquad \frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

Obsérvese que dos de las tres igualdades anteriores son consecuencias de la tercera.

Así de $\frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$ se deduce [*Arit.* 195]

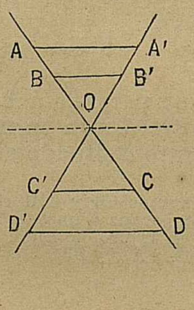
$$\frac{AB+BC}{AB}=\frac{A'B'+B'C'}{A'B'} \quad ó \quad \frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'},$$

$$\frac{AB+BC}{BC}=\frac{A'B'+B'C'}{B'C'} \quad ó \quad \frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'}.$$

Corolarios.

74. 1.° *Si dos rectas concurrentes en* O (Fig. 45) *se cortan por varias paralelas* AA', BB', CC' *etc. los segmentos de la primera son proporcionales á los de la segunda.*

Fig. 45.



Trazando por O una nueva paralela, tendremos, en virtud del teorema,

$$\frac{AB}{BO}=\frac{A'B'}{B'O}$$

ó bien $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BO}{B'O}$;

del mismo modo:

$$\frac{BO}{B'O}=\frac{OC}{OC'},$$

$$\frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} \quad \text{etc.}$$

luego $$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{OC}{OC'} = \frac{CD}{C'D'} \quad \text{etc.}$$

Escolio. Aunque en la série anterior los numeradores son segmentos consecutivos de AD, y los denominadores de A'D', pueden tambien tomarse para numeradores segmentos cualesquiera de AD, siempre que para denominadores se tomen los de A'D' correspondientes; así, por ejemplo,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BD}{B'D'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{CD}{C'D'} \dots,$$

porque sumando varios numeradores de fracciones iguales y los respectivos denominadores, resultan fracciones iguales á las dadas [*Arit.* 200].

75. 2.º *Los segmentos de toda recta cortada por una série de paralelas, son proporcionales á las distancias entre las paralelas.*

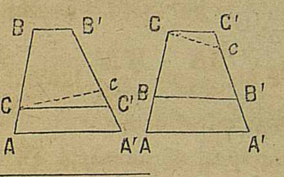
Para demostrarlo, basta trazar otra recta perpendicular á las paralelas: los segmentos de ésta miden las distancias entre las paralelas y son proporcionales á los segmentos correspondientes de la primera recta.

Teorema. (*Fig.* 46).

76. *Si dos rectas cualesquiera* AB. A'B' *están cortadas por dos paralelas* AA', BB', *toda recta* CC' *que divida las primeras en partes proporcionales, es paralela á las segundas.* [1]

Tenemos por hipótesis

Fig. 46.



$$\frac{CA}{CB} = \frac{C'A'}{C'B'} \qquad [a].$$

Tracemos por C una paralela á AA' y BB', la que encontrará á la transversal A'B' en un punto *c* situado en-

1 Se supone que los puntos C y C' pertenecen á los segmentos AB y A'B' respectivamente, ó que ambos están fuera de dichos segmentos; porque si uno de los puntos C pertenece al segmento AB y el otro C' estuviese en la prolongacion de A'B', podria verificarse la hipótesis sin que CC' fuese paralela á AA' y BB'.

tre A′ y B′ ó fuera del segmento A′B′, segun la posicion de C en la transversal AB. Siendo paralelas las tres rectas AA′, BB′ y Cc tenemos [73]

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}}=\frac{c\mathrm{A}'}{c\mathrm{B}'} \qquad [b];$$

de las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$\frac{\mathrm{C'A'}}{\mathrm{C'B'}}=\frac{c\mathrm{A}'}{c\mathrm{B}'},$$

y de ésta

$$\frac{\mathrm{C'A'}\pm\mathrm{C'B'}}{\mathrm{C'B'}}=\frac{c\mathrm{A}'\pm c\mathrm{B}'}{c\mathrm{B}'},$$

ó

$$\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{C'B'}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{c\mathrm{B}'};$$

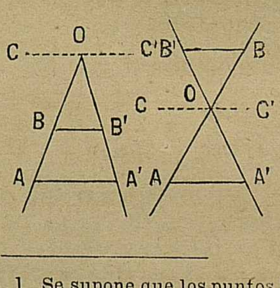
luego B′C′ = B′c, lo que exige que el punto c se confunda con C′, y por tanto la paralela Cc con CC′; luego CC′ es paralela á AA′ y BB′.

Escolio. Esta conclusion se verificaria tambien si en lugar de la hipótesis [*a*] hiciéramos una de estas dos

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{A'C'}}, \quad \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{B'C'}},$$

porque de cualquiera de ellas se deduce fácilmente la igualdad [*a*].

Fig. 47.



77. Corolario. *Si los dos lados de un ángulo* AOA′ (Fig. 47) *están cortados por una recta* AA′, *toda otra recta* BB′ *que divida dichos lados en segmentos proporcionales es paralela á la primera.* [1]

Decimos que si $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BO}}=\frac{\mathrm{B'A'}}{\mathrm{B'O}}$, las rectas AA′ y BB′ son paralelas.

Trazando por O una paralela CC′

1 Se supone que los puntos B y B′ pertenecen á los segmentos OA y OA′ respectivamente, ó que ambos están fuera de los segmentos.

á AA′, tendremos que BB′ determina en OA y OA′ segmentos proporcionales; luego [76] BB′ es paralela á AA′.

Escolio. Tambien se verifica esta conclusion si se parte de las hipótesis

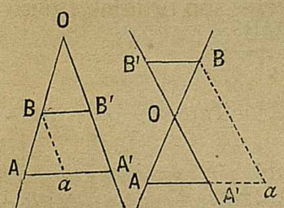
$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB'}},\quad \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{A'B'}},$$

porque son equivalentes á la $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BO}}=\frac{\mathrm{B'A'}}{\mathrm{B'O}}$.

Teorema. (*Fig.* 48).

78. *Dos paralelas* AA′, BB′ *limitadas por los lados de un ángulo* AOA′ *son proporcionales á las distancias de sus extremos de un mismo lado al vértice.*

Fig. 48.



Tirando por B la paralela Ba á OA′ tenemos [75]

$$\frac{\mathrm{AA'}}{a\mathrm{A'}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}},$$

pero $a\mathrm{A'} = \mathrm{BB'}$ [68],

luego $$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}};$$

además $$\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}}=\frac{\mathrm{A'O}}{\mathrm{B'O}};$$

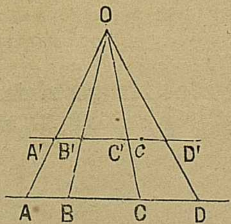
por consiguiente $$\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}=\frac{\mathrm{AO}}{\mathrm{BO}}=\frac{\mathrm{A'O}}{\mathrm{B'O}},$$

lo que demuestra el teorema.

Teorema. (*Fig.* 49).

79. *Dos paralelas cortadas por varias concurrentes en un punto O, quedan divididas en partes proporcionales.*

Fig. 49.



Tenemos, en efecto, [78]

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{OB}{OB'},$$

$$\frac{OB}{OB'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{OC}{OC'},$$

$$\frac{OC}{OC'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{OD}{OD'}.$$

Observando que las séries primera y segunda se enlazan por la razon comun $\frac{OB}{OB'}$, la segunda y tercera por $\frac{OC}{OC'}$, deduciremos que todas las razones de las tres séries son iguales; luego

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}.$$

Escolios.

1.° De las anteriores séries se deduce tambien

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}=\frac{OD}{OD'},$$

lo que manifiesta que *las concurrentes quedan tambien divididas en partes proporcionales.*

2.° Si fuese AB = BC = CD seria necesariamente A'B' = B'C' = C'D', esto es, *si las partes de una paralela son iguales tambien lo serán las de la otra.*

TEOREMA RECÍPROCO. (*Fig.* 49).

80. *Si tres ó más rectas* AA′, BB′, CC′ *dividen á dos paralelas* AD, A′D′ *en partes proporcionales, dichas rectas concurren en el mismo punto.*

Sea O el punto de encuentro de AA′ y BB′; demostremos que CC′ prolongada pasará por O.

En efecto: tenemos por hipótesis,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \quad [a];$$

supongamos ahora que uniendo el punto O con C la recta de union no pase por C′, sino por otro punto *c* de la A′D′; en virtud del teorema directo será

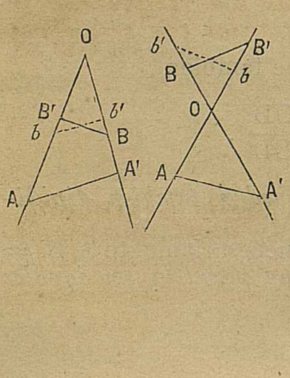
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'c} \quad [b];$$

de las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce $B'c = B'C'$, lo que demuestra que la recta OC pasa por C′, es decir, que los puntos C, C′ y O están en línea recta.

V.—Antiparalelas.

81. *Se llaman rectas* ANTIPARALELAS *dos rectas trazadas entre los lados de un ángulo, considerados como indefinidos en sus dos sentidos, de modo que la primera forme con uno de los lados un ángulo igual al que la segunda forma con el otro lado.*

FIG. 50.



Si los ángulos OAA′, OBB′ son iguales, las rectas AA′, BB′, trazadas entre los lados del ángulo AOA′ ó entre sus prolongaciones, son antiparalelas con respecto á dicho ángulo.

Dos cantidades A y D son *recíprocamente proporcionales* á otras dos B y C cuando las primeras son dos términos opuestos de una igualdad fraccionaria, y las segundas los otros dos, esto es, cuando se verifica la igualdad

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Teorema. (*Fig.* 50).

82. *Las distancias del vértice* O *de un ángulo á los puntos de interseccion de cada lado con las antiparalelas* AA′, BB′ *son recíprocamente proporcionales.*

Invirtiendo la figura OBB′, de modo que el lado OB tome la posicion Ob y OB′ la Ob', el ángulo Obb' será el OBB′ en su nueva posicion, y como, por hipótesis, OBB′ = OAA′, será ahora

$$\mathrm{O}bb' = \mathrm{OAA'}\,;$$

luego bb' y AA′ son paralelas [64]; por lo tanto

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{O}b'}\,;$$

pero Ob, Ob' son las rectas OB, OB′ en otra posicion, es decir, Ob = OB, Ob' = OB′; luego sustituyendo será

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}}\,.$$

Teorema recíproco. (*Fig.* 50).

83. *Si las distancias del vértice* O *de un ángulo á los puntos de interseccion de cada lado con dos rectas son recíprocamente proporcionales, estas rectas serán antiparalelas con respecto á dicho ángulo.*

Tenemos por hipótesis

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OB'}}\,;$$

invirtiendo la figura, como en el teorema directo, será OB=Ob, OB′ = Ob' ; luego

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OA'}} = \frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{O}b'}\,;$$

esta igualdad demuestra que bb' es paralela á AA' [77], por lo que *áng.* Obb' = *áng.* OAA', pero Obb' es el OBB' en otra posicion; luego

$$\text{áng. } OBB' = \text{áng. } OAA',$$

lo que demuestra qne AA' y BB' son antiparalelas.

84. Escolio. Los dos teoremas anteriores pueden enunciarse así:

Los productos de las distancias del vértice de un ángulo á los puntos de interseccion de cada lado con dos rectas antiparalelas, son iguales; y recíprocamente, *si los productos de las distancias del vértice de un ángulo á los puntos de interseccion de cada lado con dos rectas interiores al ángulo son iguales, dichas rectas son antiparalelas.*

En efecto: la igualdad

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'}$$

equivale á ésta $OA \times OB' = OA' \times OB.$

85. Corolario. *Si dos antiparalelas se encuentran en un lado del ángulo* O, *la distancia del vértice al punto comun* O *es media proporcional entre las otras dos distancias*; y recíprocamente, *si la distancia del vértice de un ángulo á un punto tomado en uno de sus lados es media proporcional entre las distancias del vértice á dos puntos tomados en el otro lado, las rectas que unen el primer punto con los otros dos son antiparalelas con respecto al ángulo.*

Para justificar este corolario basta suponer en los dos teoremas anteriores que dos puntos A y B' ó A' y B se confunden en uno solo.

Teorema. (*Fig.* 50).

86. *Dos rectas antiparalelas son proporcionales á las distancias de sus extremos de distinto lado al vértice del ángulo.*

Decimos que

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Considerando la figura OBB′ en la posicion inversa O bb', tenemos [78]

$$\frac{AA'}{bb'}=\frac{OA}{Ob}=\frac{OA'}{Ob'};$$

pero $bb' = BB'$, $Ob = OB$, $Ob' = OB'$; luego

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{OA}{OB}=\frac{OA'}{OB'}.$$

VI.—Concurrentes cortadas por concurrentes. [1]

es 1º capítulo moderno

Razones proporcionales.

87. Cuando se consideran en una recta indefinida uno ó más segmentos, puede tenerse en cuenta, además de la *longitud* de cada uno, su *direccion* á partir de un extremo del mismo, considerado como *orígen*. Por manera que un segmento estará enteramente determinado, es decir, conoceremos su magnitud y posicion, si se nos dá el orígen ó punto de partida, el sentido en que debe llevarse sobre la recta indefinida, y su longitud.

La oposicion en el sentido de los segmentos se expresa por los signos contrarios *más* y *ménos:* todos los segmentos dirigidos en un mismo sentido convenido se consideran *positivos*, y todos los dirigidos en el sentido contrario se consideran *negativos*. Si convenimos en considerar como positivas las longitudes contadas de izquierda á derecha, las que se cuenten de derecha á izquierda serán negativas. El segmento AB (*Fig.* 51) es positivo, el BA es negativo, y como en longitud son iguales, tenemos,

$$AB = -BA \quad \text{ó} \quad AB + BA = 0.$$

Si en una recta indefinida XY consideramos dos puntos fijos A y B, y otro punto cualquiera M, las distancias de M á

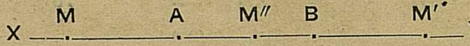
---

1 Los Sres. Profesores que deseen dar mayor amplitud á este nuevo é interesante estudio, pueden ver la obra «Generalizacion de la teoría de líneas proporcionales», que publicamos en 1880.

Los que, por el contrario, quieran omitirlo, deberán suprimir tambien, más adelante, los números 177 á 183 ambos inclusive, por apoyarse en el presente artículo; cuidando de demostrar el corolario del número 180, necesario en el teorema del número 228.

A y B tendrán el mismo signo ó signos contrarios, segun que M esté fuera del segmento AB ó entre A y B; la relacion entre

Fig. 51.

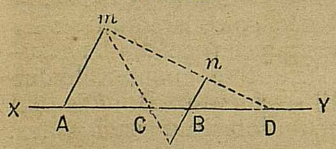


dichas distancias será, pues, positiva en el primer caso y negativa en el segundo. Así

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MB}} \text{ y } \frac{\mathrm{M'A}}{\mathrm{M'B}} \text{ positivas, } \frac{\mathrm{M''A}}{\mathrm{M''B}} \text{ negativa.}$$

88. *Si en una recta indefinida* XY (Fig. 52) *marcamos dos puntos fijos* A *y* B, *existe siempre un punto y solo uno en la recta, tal que la relacion de sus distancias á los puntos fijos es igual en valor y en signo á una relacion dada* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$. *Dicho punto se hallará fuera del segmento* AB *si* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *es positiva, y entre* A y B *si* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}$ *es negativa.*

Fig. 52.



Trazo por el punto A una recta que forme con AB un ángulo cualquiera; tomo en ella, á partir del punto A, una longitud $Am = m$; trazo por B una paralela á Am igual en longitud á n, hácia el mismo lado que Am, con respecto á XY, si la relacion dada es positiva, y hácia lado distinto si la relacion es negativa: sea Bn en el primer caso y Bn' en el segundo; uniendo m con n ó con n', la recta de union encuentra á XY en D ó en C, y será [78]

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}} = \frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{B}n} = \frac{m}{n}, \qquad \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{A}m}{\mathrm{B}n'} = -\frac{m}{n}.$$

Los puntos D y C son únicos; pues si D se mueve acercándose ó alejándose del punto B, los términos de la fraccion $\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{DB}}$

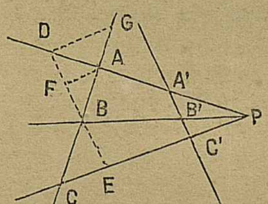
disminuyen ó aumentan en cantidades iguales, luego la fraccion varia siempre en el mismo sentido, es decir, pasando por valores todos mayores que $\frac{m}{n}$ si D se acerca á B, ó todos menores si D se aleja de B [*Arit.* 151]; y si C se mueve acercándose al punto A ó alejándose, el numerador de la fraccion $\frac{CA}{CB}$ disminuye ó aumenta y el denominador varia en sentido contrario, adquiriendo por tanto la fraccion valores sucesivos todos menores ó todos mayores que $\frac{m}{n}$.

89. Cuando tengamos tres puntos A, B, C en una recta indefinida y comparemos dos de los tres segmentos AB, AC, BC, consideraremos siempre como orígen de ellos el punto comun y los otros dos puntos serán los extremos de los segmentos.

Teorema. (*Fig.* 53).

90. *Si tres concurrentes en un punto* P *encuentran á dos rectas, dos segmentos cualesquiera de una de estas son proporcionales á los correspondientes en la otra, con tal que cada segmento se divida por la distancia de su extremo al punto de concurso* P.

Fig. 53.



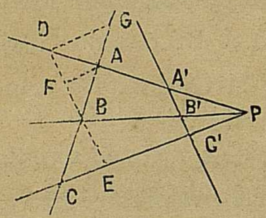
Fijémonos en los segmentos BA y BC, B'A' y B'C', de las transversales ABC y A'B'C', interceptados por las tres concurrentes en B; decimos que

$$\frac{BA}{PA} : \frac{BC}{PC} = \frac{B'A'}{PA'} : \frac{B'C'}{PC'}.$$

Por el orígen B de los segmentos tracemos una paralela DE á A'B'C', y por A y D otras dos paralelas á la concurrente PC. Las concurrentes AC y DE cortadas por las paralelas AF, CE, nos dan [78]

$$\frac{BA}{BC} = \frac{AF}{CE} \quad [a], \qquad \frac{BD}{BE} = \frac{DG}{CE} \quad [b].$$

Fig. 53.



Las concurrentes AC y AP cortadas por las paralelas GD, CP, y las concurrentes PD y DE cortadas por las paralelas FA, EP, nos dan [78]

$$\frac{\text{PA}}{\text{PC}}=\frac{\text{DA}}{\text{DG}}\ [a'],\quad \frac{\text{PD}}{\text{PE}}=\frac{\text{AD}}{\text{AF}}\ [b'].$$

Dividiendo la igualdad [*a*] por la [*a'*] y la [*b*] por la [*b'*], será

$$\frac{\text{BA}}{\text{BC}}:\frac{\text{PA}}{\text{PC}}=\frac{\text{AF.DG}}{\text{CE.DA}},\quad \frac{\text{BD}}{\text{BE}}:\frac{\text{PD}}{\text{PE}}=\frac{\text{DG.AF}}{\text{CE.AD}},$$

de donde
$$\frac{\text{BA}}{\text{BC}}:\frac{\text{PA}}{\text{PC}}=\frac{\text{BD}}{\text{BE}}:\frac{\text{PD}}{\text{PE}}.$$

Sustituyendo $\frac{\text{BD}}{\text{BE}}$ por su igual $\frac{\text{B'A'}}{\text{B'C'}}$ [79], y $\frac{\text{PD}}{\text{PE}}$ por $\frac{\text{PA'}}{\text{PC'}}$ [74], será

$$\frac{\text{BA}}{\text{BC}}:\frac{\text{PA}}{\text{PC}}=\frac{\text{B'A'}}{\text{B'C'}}:\frac{\text{PA'}}{\text{PC'}},$$

ó por último
$$\frac{\text{BA}}{\text{PA}}:\frac{\text{BC}}{\text{PC}}=\frac{\text{B'A'}}{\text{PA'}}:\frac{\text{B'C'}}{\text{PC'}},$$

que es lo que debia demostrarse.

Si los segmentos elegidos fueran otros, la demostracion seria análoga. Tenemos, pues,

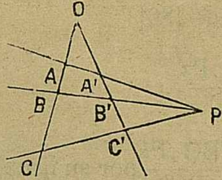
$$\frac{\text{AC}}{\text{PC}}:\frac{\text{AB}}{\text{PB}}=\frac{\text{A'C'}}{\text{PC'}}:\frac{\text{A'B'}}{\text{PB'}},\quad \frac{\text{CA}}{\text{PA}}:\frac{\text{CB}}{\text{PB}}=\frac{\text{C'A'}}{\text{PA'}}:\frac{\text{C'B'}}{\text{PB'}}.$$

Corolarios.

91. 1.° (Fig. 54.) *Si dos rectas concurrentes en* O *se cortan por varias concurrentes en un mismo punto* P, *los segmen-*

tos de las primeras, que tengan por orígen comun el punto O, *son proporcionales, con tal que cada segmento se divida por la distancia de su extremo al punto* P.

Fig. 54.



Imaginemos una recta OP, y considerando tres concurrentes PO, PA, PB cortadas por las transversales OB, OB', despues otras tres concurrentes PO, PB, PC cortadas por OC y OC', y así sucesivamente, tendremos [90]

$$\frac{OA}{PA}:\frac{OB}{PB}=\frac{OA'}{PA'}:\frac{OB'}{PB'}$$

ó bien
$$\frac{OA}{PA}:\frac{OA'}{PA'}=\frac{OB}{PB}:\frac{OB'}{PB'},$$

del mismo modo
$$\frac{OB}{PB}:\frac{OB'}{PB'}=\frac{OC}{PC}:\frac{OC'}{PC'}$$

. . . .

De estas igualdades se deduce

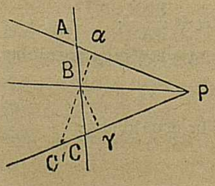
$$\frac{OA}{PA}:\frac{OA'}{PA'}=\frac{OB}{PB}:\frac{OB'}{PB'}=\frac{OC}{PC}:\frac{OC'}{PC'}\cdots\cdots$$

lo que demuestra el corolario.

Escolio. En lugar del orígen O comun á los segmentos de las dos concurrentes, pueden tomarse dos puntos cualesquiera, uno de cada concurrente, con tal que estén en línea recta con P, como A y A', B y B' etc. La demostracion seria la misma.

92. 2.° *Dos segmentos de una recta cortada por tres concurrentes, divididos por las distancias de sus extremos respectivos al punto de concurso, son proporcionales á las distancias de su orígen á las otras dos concurrentes.*

Fig. 55.



Sean los segmentos BA y BC (*Fig.* 55), y Bα, Bγ las distancias de su orígen B á las concurrentes PA y PC; queremos demostrar que

$$\frac{BA}{PA}:\frac{BC}{PC}=\frac{B\alpha}{B\gamma}.$$

Prolongando $B\alpha$ hasta C' tenemos [90]

$$\frac{BA}{PA} : \frac{BC}{PC} = \frac{B\alpha}{P\alpha} : \frac{BC'}{PC'} = B\alpha : \frac{BC'.P\alpha}{PC'} \quad [a],$$

las rectas $P\alpha$ y $B\gamma$ son antiparalelas con relacion al ángulo $PC'\alpha$, por ser rectos los ángulos en α y γ, luego [86]

$$\frac{P\alpha}{B\gamma} = \frac{PC'}{BC'}, \text{ de donde } B\gamma = \frac{BC'.P\alpha}{PC'},$$

sustituyendo en la igualdad [a] la fraccion $\frac{BC'.P\alpha}{PC'}$ por su igual $B\gamma$, resulta

$$\frac{BA}{PA} : \frac{BC}{PC} = \frac{B\alpha}{B\gamma}.$$

La demostracion anterior es aplicable á otros dos segmentos cualesquiera de ABC.

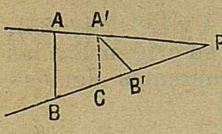
93. Si en las proposiciones de los números 90 y 91 suponemos que el punto de concurso P se aleja á una distancia infinita, las rectas concurrentes AA', BB', etc. serán paralelas; porque suponer que dos rectas se encuentran en el infinito, equivale á decir que no se encuentran.

En este supuesto, la diferencia finita AA' entre las longitudes infinitamente grandes PA y PA', es nula relativamente á la magnitud de estas cantidades, cuya razon será por consiguiente la unidad; lo mismo podemos decir de PB y PB', PA y PB, PA y PC etc. [1]

---

1 Hé aquí algunas consideraciones que confirman lo dicho arriba.

FIG. 56.



Trazando A'C paralela á AB tenemos (78)

$$\frac{AB}{A'C} = \frac{PA}{PA'};$$

por mucho que se aleje el punto P, la anterior relacion siempre será cierta; luego

$$limite\ de\ \frac{AB}{A'C} = limite\ de\ \frac{PA}{PA'};$$

pero en el límite, es decir cuando PA y PB sean paralelas, será AB = A'C (68); luego *límite de* $\frac{PA}{PA'} = 1$.

Lo mismo se demuestra que *lím. de* $\frac{PA}{PB} = 1$, partiendo de la igualdad

$$\frac{AA'}{BC} = \frac{PA}{PB}$$

Segun esto, las igualdades obtenidas en dichos números, escritas en la forma,

$$\frac{BA}{BC}:\frac{PA}{PC}=\frac{B'A'}{B'C'}:\frac{PA'}{PC'},$$

$$\frac{OA}{OA'}:\frac{PA}{PA'}=\frac{OB}{OB'}:\frac{PB}{PB'}=\frac{OC}{OC'}:\frac{PC}{PC'}\cdots$$

se convierten en

$$\frac{BA}{BC}=\frac{B'A'}{B'C'},$$

$$\frac{OA}{OA'}=\frac{OB}{OB'}=\frac{OC}{OC'}\cdots,$$

que expresan las propiedades demostradas en los números 73 y 74 para las rectas concurrentes cortadas por paralelas.

En el mismo supuesto, y por iguales razones, la proposicion del número 92 se convierte en la del 75, porque cuando el punto P se aleje al infinito, $B\alpha$ y $B\gamma$ serán las distancias entre las paralelas que pasen por A, B y B, C, y resultará que los segmentos BA, BC de una transversal interceptados por tres paralelas son proporcionales á las distancias entre éstas.

Las anteriores observaciones nos inducen á esta conclusion: *la teoría de concurrentes cortadas por concurrentes es una generalizacion de la de concurrentes cortadas por paralelas.*

Nótese que á las tres relaciones de posicion, *paralelas cortadas por paralelas* [68], *concurrentes cortadas por paralelas*, *concurrentes cortadas por concurrentes*, corresponden estas tres relaciones de magnitud, *rectas iguales*, *rectas proporcionales*, *razones proporcionales*. Si en este último caso, un haz de rectas concurrentes se convierte en série de paralelas, desaparecen los denominadores de las fracciones proporcionales, y á la proporcionalidad de razones sucede la proporcionalidad de líneas, de modo que dichos denominadores, distancias del punto de concurso á los extremos de los segmentos, son como *correcciones* debidas á la falta de paralelismo de las concurrentes en P.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CIRCUNFERENCIA.

I.—Circunferencia en sí misma.

TEOREMA.

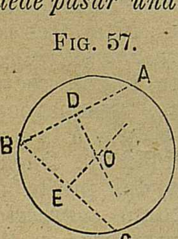
94. *El centro y el radio determinan la posicion y magnitud de una circunferencia*, esto es, *dos circunferencias descritas desde el mismo centro con igual radio se confunden en una sola.*

En efecto: si algun punto de la segunda circunferencia no coincidiese con otro punto de la primera, sino que, por el contrario, cayese dentro ó fuera de ésta, el radio de la segunda seria menor ó mayor que el de la primera [9, 3.ª], lo que es contrario al supuesto.

TEOREMA. (*Fig.* 57).

95. *Tres puntos* A, B, C, *que no están en línea recta, determinan una circunferencia*, esto es, *por tres puntos que no están en línea recta siempre puede pasar una circunferencia, y solo puede pasar una.*

FIG. 57.



Uno los tres puntos por las rectas AB y BC; en los medios D y E de estas rectas levanto dos perpendiculares, las cuales se encontrarán en un punto O [60, *cor.* 2.°]; este punto, como perteneciente á la perpendicular DO equidista de A y B [48], y como perteneciente á la perpendicular EO equidista de B y C; luego O equidista de A, B y C; por tanto, suponiendo una circunferencia cuyo centro sea O y el radio OA, pasará por A, B y C.

Demostremos ahora que por estos tres puntos solo puede pasar una circunferencia.

El centro de toda circunferencia que pase por A, B y C equidista de A y B, luego se encuentra en la perpendicular levantada á AB por su punto medio D [49]; tambien equidista de B y C, luego se encuentra en la perpendicular levantada á BC por su punto medio E; por consiguiente el centro es O, único punto comun á las dos perpendiculares.

En cuanto al radio será OA; luego todas las circunferencias que pasen por A, B y C tendrán el mismo centro O é igual radio OA, y se confundirán en una sola [94].

Escolio. Si los tres puntos estuviesen en línea recta no podria pasar por ellos ninguna circunferencia, porque las perpendiculares en D y E, serian en tal caso paralelas entre sí [57], y no existiria el centro O.

II.—Línea recta en la circunferencia.

Teorema.

96. *Una circunferencia no puede ser cortada por una línea recta en más de dos puntos.*

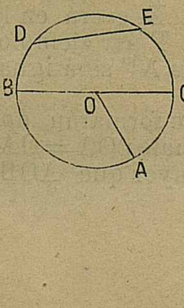
Si una recta pudiese cortar á la circunferencia en tres ó más puntos, uniendo estos con el centro por medio de radios, tendríamos más de dos rectas iguales dirigidas desde un punto á una recta, lo que es imposible [47].

Escolio. Por tener la propiedad que se acaba de demostrar, se dice que la circunferencia es curva *convexa*.

Teorema. (*Fig.* 58).

97. *Todo diámetro* BC *divide á la circunferencia* O *en dos partes iguales.*

Fig. 58



Doblando la figura por el diámetro BC, todos los puntos de la parte BEC coincidirán con otros de BAC, de lo contrario los radios serian desiguales.

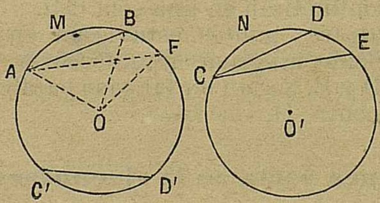
Los arcos iguales BEC y BAC se llaman *semicircunferencias*.

Es evidente que el diámetro BC divide tambien al círculo O en dos partes iguales, llamadas *semicírculos*.

Teorema. (*Fig.* 59).

98. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *si dos arcos son iguales, sus cuerdas son tambien iguales; 2.° si dos arcos menores que media circunferencia son desiguales, el mayor tiene mayor cuerda.*

Fig. 59.



1.° Supongamos que los arcos AMB, CND de las circunferencias iguales O, O′ sean iguales; decimos que sus cuerdas AB, CD tambien son iguales.

Imaginemos que la circunferencia O′ se coloca sobre la O de modo que coincidan los centros y los puntos C y A; los arcos CND y AMB coincidirán, y como son iguales, el punto D caerá en B; luego las cuerdas AB y CD tendrán los mismos extremos y serán iguales.

Si los arcos iguales AMB, C′D′ perteneciesen á la misma circunferencia O, tomando en otra circunferencia igual O′ un arco CND = AMB, tendríamos AB = CD, CD = C′D′, luego AB = C′D′.

2.° Supongamos que el arco CNE sea mayor que AMB; decimos que la cuerda CE del primero es mayor que la AB del segundo.

Colocando la circunferencia O′ sobre la O de modo que los centros coincidan y que C caiga en A, el punto E caerá en la circunferencia O, pero fuera del arco AMB, en F por ejemplo, puesto que CNE es mayor que AMB, y la cuerda AF será igual á CE.

Trazo ahora los radios OA, OB y OF, y se formarán dos triángulos AOF, AOB, que tienen dos lados iguales OA = OA, OF = OB, y el ángulo comprendido AOF mayor que AOB, porque estando B entre A y F, el lado OB está entre OA y OF; luego AF > AB [21] ó CE > AB.

Si los dos arcos desiguales perteneciesen á una circunferencia O, tomaríamos, en otra O′ del mismo radio, un arco igual á cualquiera de los propuestos y haríamos un razonamiento semejante al del caso 1.°

Teorema recíproco.

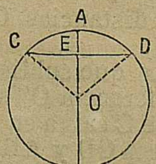
2 99. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *si dos cuerdas son iguales, los arcos tambien lo son; 2.° si dos cuerdas son desiguales, la mayor subtiende mayor arco* [1] [55].

III.—Perpendiculares, oblícuas y paralelas en la circunferencia.

Teorema. (*Fig.* 60).

3 100. *El diámetro* BA *perpendicular á una cuerda* CD *divide á ésta y á los arcos* CAD *y* CBD *que subtiende en dos partes iguales.*

Fig. 60.



Trazo los radios OC, OD, que serán oblícuas iguales respecto de CD, luego EC = ED [46].

Siendo AB perpendicular á CD en su punto medio, las cuerdas AC y AD son iguales [48], luego *arc.* AC = *arc.* AD [99].

Del mismo modo se demuestra que *arc.* DB = *arc.* CB.

Escolio. El diámetro AB satisface á las cinco condiciones siguientes:

---

1 Una cuerda subtiende dos arcos, uno menor y otro mayor que media circunferencia; cuando hablamos del arco subtendido por una cuerda, nos referimos al menor.

1.ª *Pasa por el centro.*
2.ª *Es perpendicular á la cuerda* CD.
3.ª *Divide á la cuerda* CD *en dos partes iguales.*
4.ª *y* 5.ª *Divide á los arcos* CAD *y* CBD *en dos partes iguales.*

Como dos de estas condiciones bastan para determinar una recta [6 y 39], *siempre que se verifiquen dos de ellas, tendrán lugar tambien las otras tres;* por ejemplo

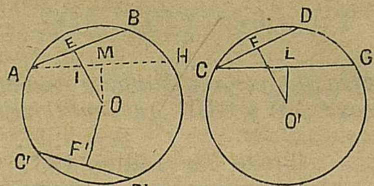
La PERPENDICULAR *levantada á una cuerda por su* PUNTO MEDIO: 1.º *pasa por el centro,* 2.º *divide al arco* CAD *en dos partes iguales,* 3.º *divide al arco* CBD *en dos partes iguales.*

TEOREMA. (*Fig.* 61).

101. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.º *si dos cuerdas son iguales equidistan del centro;* 2.º *si dos cuerdas son desiguales la mayor dista del centro ménos que la menor.*

4

FIG. 61.



1.º Vamos á demostrar que si AB = CD, las distancias OE y O'F serán iguales.

Siendo iguales las cuerdas AB y CD, los arcos que subtienden tambien son iguales. Coloquemos la circunferencia O' sobre la O de modo que coincidan los centros y que C caiga en A; hecho esto, D caerá en B, por ser iguales los arcos CD y AB, y las cuerdas coincidirán, por tener los mismos extremos; pero las perpendiculares OE, O'F á estas cuerdas pasan por sus puntos medios [100], luego F caerá en E, y será O'F = OE.

2.º Sean las cuerdas desiguales CG y AB, O'L y OE sus distancias á los centros; decimos que si CG>AB, será O'L<OE.

Hagamos coincidir las circunferencias O y O' de modo que el punto C caiga en A; como el arco CDG es mayor que el AB [99], el punto G caerá fuera del arco AB, en H por ejemplo, y la cuerda AH será igual á CG; trazando la perpendicular OM será, por consiguiente, OM = O'L.

Ahora bien, OI es oblicua á AH, luego OM < OI, y con mayor razon OM < OE, ó sea O'L < OE.

Si las cuerdas perteneciesen á la misma circunferencia, razonaríamos como en el teorema del número 98.

Teorema recíproco.

102. En circunferencias iguales ó en la misma circunferencia: 1.° *dos cuerdas equidistantes del centro son iguales;* 2.° *si dos cuerdas no equidistan del centro, la que ménos dista es mayor* [55].

Teorema. (*Fig.* 62).

103. 1.° *De todas las cuerdas que pueden trazarse en una circunferencia, la mayor es el diámetro.* 2.° *De todas las cuerdas que pasan por un punto* I *interior á la circunferencia, la menor es la perpendicular* CD *al diámetro* AB *tirado por dicho punto.*

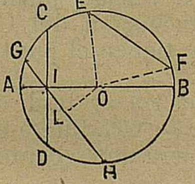
1.° Si hubiese una cuerda mayor que el diámetro, estaria más próxima al centro que éste [101], lo que es absurdo, porque la distancia del diámetro al centro es nula.

Tambien se puede decir: sea EF una cuerda que no pase por el centro; uniendo éste con los extremos de la cuerda por los radios OE y OF será [6]

$$EF < OE + OF\,;$$

pero la suma OE + OF de dos radios es igual al diámetro AB, luego EF < AB.

Fig. 62.



2.° Vamos á demostrar que CD, perpendicular al diámetro AB, es menor que cualquiera otra cuerda GH que pase por I.

Siendo OI perpendicular á CD es oblicua á GH; tracemos OL perpendicular á GH, y será OL < OI [42]; luego GH > CD [102].

Si la distancia de una recta al centro es mayor que el radio la recta es exterior, si igual tangente y si menor secante: tiene dos puntos comunes = Recíproco

104. *Se llama* SECANTE *toda recta indefinida que corta á una circunferencia en dos puntos.*

Se llama TANGENTE *á una circunferencia, toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

Cuando una recta es tangente á una circunferencia, la circunferencia es tambien tangente á la recta.

La recta MN *(Fig. 63)*, que corta á la circunferencia O en

FIG. 63.

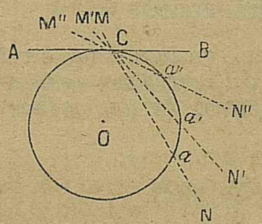
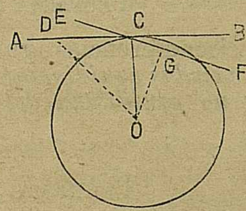


FIG. 64.



los puntos C y *a*, es una secante, y la AB, que tiene con la circunferencia tan sólo un punto comun C, es una tangente.

El punto C se llama *punto de contacto*.

La tangente AB á la circunferencia O puede considerarse como el límite de las posiciones sucesivas MN, M'N', M''N'' de una secante, que gira alrededor de un punto de interseccion C hasta que el otro *a* llega á confundirse con el primero.

TEOREMA. *(Fig. 64).*

105. 1.° *La perpendicular* AB *á un radio* OC *en su extremo* C *es tangente á la circunferencia.* 2.° *Toda oblicua al radio en su extremo es secante.*

1.° Siendo OC perpendicular á AB, es menor que cualquiera otra recta OD tirada desde el centro á la recta AB, por consiguiente el punto D estará fuera del círculo; lo mismo puede decirse de cualquier otro punto de la AB, á excepcion del C; luego la circunferencia y la recta AB sólo tienen el punto comun C.

2.° Siendo EF oblicua al radio OC, podremos trazar desde el centro O una perpendicular OG á EF, y será OG<OC, luego el punto G estará dentro del círculo, y la recta EF será una secante.

Teorema recíproco.

106. 1.° *Toda tangente á una circunferencia es perpendicular al radio tirado al punto de contacto.*

2.° *Toda secante es oblicua al radio tirado á cualquiera de los puntos de interseccion* [55].

Corolarios.

1.° *Por un punto de una circunferencia no puede tirarse á ésta más que una tangente.*

Porque la tangente debe ser perpendicular al radio en su extremo, y por este punto no puede trazarse más que una perpendicular.

2.° *El radio ó diámetro perpendicular á una tangente pasa por el punto de contacto.*

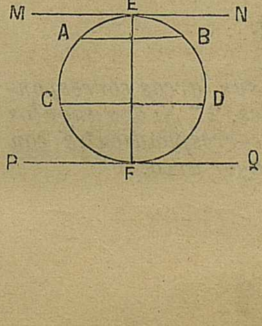
Porque si no pasase, uniendo este punto al centro por una línea recta, tendríamos dos perpendiculares á la tangente desde un mismo punto, lo que es imposible.

Teorema. (*Fig.* 65).

107. *Los arcos de una circunferencia comprendidos entre dos rectas paralelas son iguales.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.° que las paralelas sean dos cuerdas; 2.° que sean una tangente y una cuerda; 3.° que sean dos tangentes.

Fig. 65.



Primer caso. Vamos á demostrar que los arcos AC y BD, comprendidos entre las cuerdas paralelas AB y CD, son iguales.

Trazando el diámetro EF perpendicular á la cuerda AB, será tambien perpendicular á su paralela CD [60]; por consiguiente tendremos [100] *arc.* CAE = *arc.* DBE

arc. AE = *arc.* BE ;

restando ordenadamente estas igualdades será

arc. AC = *arc.* BD.

Segundo caso. Debemos demostrar que los arcos CAE, DBE, comprendidos entre la tangente MN y una cuerda paralela CD, son iguales.

Tirando un diámetro EF al punto de contacto E, será perpendicular á la tangente MN [106] y tambien á su paralela CD; en virtud de esto último tendremos

arc CAE = *arc.* DBE.

Tercer caso. Si las paralelas son dos tangentes MN y PQ, vamos á demostrar que los arcos EACF y EBDF son iguales.

Un diámetro EF que pase por el punto de contacto de la tangente MN será perpendicular á ésta, por consiguiente tambien lo será á su paralela PQ, y pasará por el punto de contacto F [106, *cor.* 2.º]; siendo los puntos de contacto extremos de un mismo diámetro es claro que

arc. EACF = *arc.* EBDF.

IV.—Ángulos en la circunferencia.

Medida de los ángulos.

central
interior
inscrito
semi inscrito

1 108. *Se llama* ARCO CORRESPONDIENTE *á un ángulo el arco comprendido entre los lados del ángulo, descrito desde el vértice como centro con un radio cualquiera.*

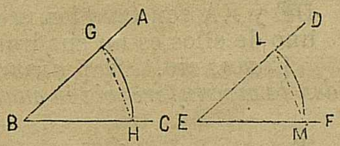
Teorema. *(Fig. 66).*

2 109. 1.º *Si dos ángulos son iguales, sus arcos correspondientes, descritos con igual radio, son iguales.* 2.º *Si dos ángulos son desiguales, y se describen sus arcos correspondientes con igual radio, á mayor ángulo corresponde mayor arco.*

1.° Sean los ángulos iguales ABC y DEF.

Trazando las cuerdas GH, LM se forman dos triángulos GBH, LEM, que tienen dos lados del uno iguales á dos lados

Fig. 66.



del otro é igual el ángulo comprendido, luego son iguales [20]; de aquí se deduce que las cuerdas GH, LM son iguales, por consiguiente tambien lo serán los arcos [99, 1.°].

2.° Sea el ángulo ABC mayor que el DEF.

Trazando las cuerdas GH, LM se forman dos triángulos GBH, LEM que tienen dos lados del uno iguales á dos lados del otro, pero el ángulo ABC mayor que el DEF; luego el tercer lado GH del primero es mayor que el tercer lado LM del segundo [21], por consiguiente el arco GH será mayor que el LM [99, 2.°].

Teorema recíproco.

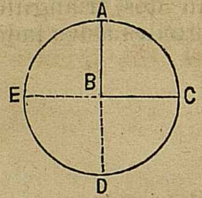
110. 1.° *Si dos arcos correspondientes á dos ángulos están descritos con igual radio y son iguales, los ángulos son tambien iguales.* 2.° *Si los arcos descritos con igual radio son desiguales, á mayor arco corresponde mayor ángulo* [55].

111. Si una circunferencia se divide en cuatro arcos iguales, cada uno de ellos se llama *cuadrante.*

Teorema. *(Fig. 67).*

El arco AC *correspondiente á un ángulo recto* ABC *es un cuadrante.*

Fig. 67.



Describiendo toda la circunferencia á que pertenece el arco AC y prolongando los lados del ángulo ABC, se forman en B cuatro ángulos rectos, que son por consiguiente iguales. Siendo los ángulos en B iguales, los arcos correspondientes AC, CD, DE y EA son tambien iguales, luego cada uno de ellos es un cuadrante.

Corolario. *Dos diámetros perpendiculares entre sí dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.*

Teorema recíproco.

112. *Si el arco* AC *correspondiente á un ángulo* ABC *es un cuadrante, el ángulo es recto.*

Haciendo la misma construccion que en el teorema directo, tendremos que siendo EAC una semicircunferencia y AC un cuadrante, AE será otro cuadrante; luego los ángulos adyacentes ABC y ABE son iguales, y cada uno de ellos es recto.

Teorema.

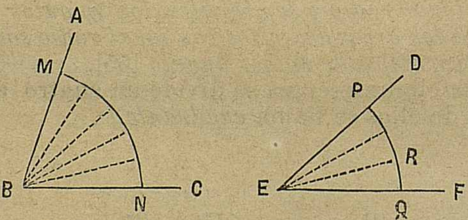
113. *La razon de dos ángulos es igual á la de sus arcos correspondientes descritos con igual radio.*

4

Distinguiremos dos casos: 1.° que los arcos sean conmensurables, 2.° que sean inconmensurables.

Primer caso. *(Fig. 68).* Suponiendo que la medida comun

Fig. 68.



RQ de los arcos MN y PQ esté contenida cinco veces en el arco MN y tres veces en el arco PQ, tendremos [69]

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{5}{3} \qquad [a].$$

Trazando radios á los puntos de division de los arcos, el ángulo ABC quedará dividido en cinco ángulos, y el DEF quedará dividido en tres; además todos estos ángulos parciales son iguales, porque sus arcos correspondientes son iguales al RQ; luego

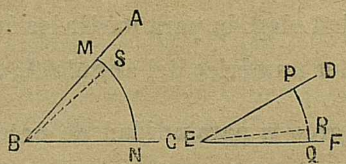
$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DEF}}=\frac{5}{3} \qquad [b].$$

De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce evidentemente

$$\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DEF}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PQ}}.$$

Segundo caso. (*Fig.* 69). Sean MN y PQ dos arcos inconmensurables. Dividamos PQ en *n* partes iguales, pudiendo *n*

Fig. 69.



suponerse tan grande como se quiera; si llevamos una parte QR sobre el arco MN, sucesivamente y á partir de N, las veces que se pueda, por ejemplo *m* veces, quedará por necesidad un resto MS menor que QR, luego la fraccion $\frac{m}{n}$, cuando *n* aumenta indefinidamente, tiene por límite superior $\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{PQ}}$ [69].

Uniendo los puntos de division de los arcos MN y PQ con los respectivos centros B y E, el ángulo DEF quedará dividido en *n* ángulos iguales á REQ, porque los arcos correspondientes son iguales á RQ, y el ángulo ABC se compondrá, por igual razon, de *m* ángulos iguales á REQ y de un resto MBS menor que REQ, puesto que arco MS $<$ arco RQ; luego $\frac{m}{n}$ tiene tambien por límite superior $\frac{\mathrm{ABC}}{\mathrm{DEF}}$.

Siendo $\frac{\text{ABC}}{\text{DEF}}$ y $\frac{\text{MN}}{\text{PQ}}$ límites superiores de un mismo número variable $\frac{m}{n}$, será [*Arit.* 234]

$$\frac{\text{ABC}}{\text{DEF}} = \frac{\text{MN}}{\text{PQ}}.$$

Teorema.

114. *Un ángulo tiene por medida su arco correspondiente.*

5

Sean A y M dos ángulos, a y m sus arcos correspondientes descritos con igual radio. Tenemos, por el teorema anterior,

$$\frac{\text{A}}{\text{M}} = \frac{a}{m}.$$

Si M es la unidad elegida para medir los ángulos, la relacion $\frac{\text{A}}{\text{M}}$ será el valor numérico del ángulo A; si á la vez convenimos en tomar el arco m para unidad de arcos, la relacion $\frac{a}{m}$ será el valor numérico del arco a; luego *el valor numérico de un ángulo es igual al valor numérico del arco correspondiente, siempre que convengamos en elegir para unidad de arcos el arco correspondiente á la unidad de ángulos*; por lo tanto, *para medir un ángulo se mide su arco correspondiente.*

En este sentido debe entenderse el enunciado del teorema.

115. Generalmente se toma para unidad de ángulos el ángulo recto, por consiguiente la unidad de arcos es un cuadrante de radio igual al del arco que se trata de medir.

La circunferencia se divide en 360 *grados* ó partes iguales, un cuadrante tiene 90 grados, cada grado 60 *minutos*, y cada minuto 60 *segundos;* las divisiones inferiores al segundo se expresan en decimales.

Un ángulo tiene tantos grados, minutos y segundos como su arco correspondiente; un ángulo recto tiene 90 grados.

Un arco de 47 *grados* 25 *minutos* 30 *segundos* se escribe abreviadamente:

$$47^\circ\ 25'\ 30''.$$

Existe otra division de la circunferencia en que se considera esta curva dividida en 400 grados, el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos.

Esta division, poco usada, se llama *centesimal*, y la anteriormente expuesta, *sexagesimal*.

La reduccion de grados sexagesimales á centesimales y vice-versa constituye un problema sencillo de Aritmética, en el que no nos detendremos.

116. Dos arcos se llaman *complementarios*, ó complemento uno de otro, cuando su suma vale un cuadrante; y *suplementarios* si la suma vale dos cuadrantes.

Es claro que si dos ángulos son complementarios ó suplementarios tambien lo serán sus arcos, y recíprocamente.

117. Por medio del teorema del número 114 puede medirse un ángulo cualquiera; sin embargo, en algunos casos particulares se halla la medida de un ángulo sin describir el arco correspondiente. Esta ventaja se logra cuando, estando el vértice del ángulo en un punto cualquiera, los lados tocan ó cortan una circunferencia.

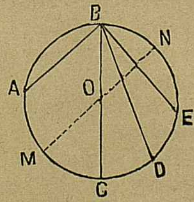
Los teoremas siguientes tienen por objeto determinar la medida de tales ángulos.

118. *Se llama* ÁNGULO INSCRIPTO *el que tiene su vértice en la circunferencia y cuyos lados son dos cuerdas.*

TEOREMA. *(Fig. 70).*

La medida de un ángulo inscripto es la mitad del arco comprendido entre sus lados.

FIG. 70.



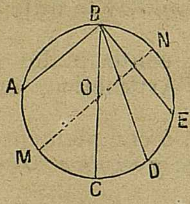
Pueden ocurrir tres casos: 1.° que el centro de la circunferencia esté en uno de los lados; 2.° que el centro se halle entre los lados; 3.° que el centro esté fuera del ángulo.

PRIMER CASO. Vamos á demostrar que el ángulo ABC tiene por medida la mitad del arco AC.

Trazo un diámetro MN paralelo al lado AB; el ángulo propuesto ABC es igual al MOC [63, 2.°], y éste tiene por medida su arco correspondiente MC, luego la medida del ángulo ABC es el arco MC.

Ahora bien: $MC = BN$,

Fig. 70.



por corresponder á los ángulos iguales MOC y BON,

$$BN = AM \quad [107]$$

luego $MC = AM$ ó $MC = \frac{AC}{2}$;

por consiguiente la medida del ángulo ABC es $\frac{AC}{2}$.

Segundo caso. Vamos á demostrar que el ángulo ABD tiene por medida la mitad del arco AD.

Tenemos: $ABD = ABC + CBD$,

pero $ABC = \frac{AC}{2}$ [*Primer caso*]

$$CBD = \frac{CD}{2},$$

luego $ABD = \frac{AC}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AD}{2}$.

Tercer caso. Sea el ángulo DBE.

Tenemos: $DBE = CBE - CBD$,

pero $CBE = \frac{CE}{2}$ [*Primer caso*]

$$CBD = \frac{CD}{2},$$

luego $DBE = \frac{CE}{2} - \frac{CD}{2} = \frac{DE}{2}$.

119. Se dice que un ángulo está inscripto en un arco cuando el vértice del ángulo está en el arco y los lados de aquel pasan por los extremos de éste.

Corolarios.

1.° *Todos los ángulos inscriptos en un mismo arco* ACDB (Fig. 71) *son iguales.*

Fig. 71.

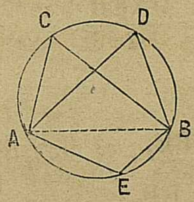
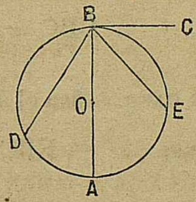


Fig. 72.



Porque todos tienen la misma medida, que es la mitad del arco restante AEB.

2.° *Dos ángulos* ACB, AEB *inscriptos en cada uno de los arcos que subtiende una cuerda* AB, *son suplementarios.*

Porque la suma de sus medidas es la mitad de la circunferencia.

3.° *El ángulo inscripto, cuyos lados pasan por los extremos de un diámetro , es recto.*

Porque su medida es un cuadrante.

Teorema. *(Fig. 72).*

120. *La medida del ángulo que forman una cuerda y la tangente trazada por uno de sus extremos* [1] , *es la mitad del arco comprendido entre los lados del ángulo.*

Pueden ocurrir tres casos: 1.° que el centro esté en la cuerda; 2.° que el centro se halle entre los lados del ángulo; 3.° que el centro esté fuera del ángulo.

Primer caso. Puesto que la cuerda AB pasa por el centro y por el punto de contacto B, es un diámetro perpendicular á la tangente [106, 1.°]; luego el ángulo ABC es recto y tiene por medida un cuadrante, ó sea la mitad del arco BEA.

---

1 Estos ángulos suelen llamarse *semi-inscriptos.*

SEGUNDO CASO. Sea el ángulo DBC.

Tenemos: $\mathrm{DBC} = \mathrm{DBA} + \mathrm{ABC}$;

pero las medidas de los ángulos parciales son $\frac{\mathrm{DA}}{2}$ y $\frac{\mathrm{AEB}}{2}$,

luego $$\mathrm{DBC} = \frac{\mathrm{DA}}{2} + \frac{\mathrm{AEB}}{2} = \frac{\mathrm{DAEB}}{2}.$$

TERCER CASO. Sea el ángulo EBC.

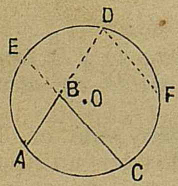
Tenemos: $\mathrm{EBC} = \mathrm{ABC} - \mathrm{ABE}$,

luego $$\mathrm{EBC} = \frac{\mathrm{AEB}}{2} - \frac{\mathrm{AE}}{2} = \frac{\mathrm{EB}}{2}.$$

TEOREMA. *(Fig. 73).*

121. *La medida de un ángulo* ABC *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia* [1], *es la semisuma de los arcos* AC, ED *comprendidos entre sus lados y las prolongaciones de éstos.*

FIG. 73.



Trazo por el punto D una cuerda DF paralela á EC; el ángulo propuesto ABC es igual al ADF, y éste tiene por medida la mitad del arco ACF, luego

$$\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{ACF}}{2}.$$

Ahora bien: $\mathrm{ACF} = \mathrm{AC} + \mathrm{CF}$,

pero $\mathrm{CF} = \mathrm{ED}$ [107], luego $\mathrm{ACF} = \mathrm{AC} + \mathrm{ED}$;

por consiguiente $$\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AC} + \mathrm{ED}}{2}.$$

---

1 Estos ángulos suelen llamarse *interiores excéntricos*, para distinguirlos de los que tienen su vértice en el centro, que se llaman *ángulos en el centro ó centrales.*

Teorema.

122. *La medida del ángulo cuyo vértice está fuera del círculo y cuyos lados son dos secantes, una secante y una tangente ó dos tangentes* [1], *es la semidiferencia de los arcos cóncavo y convexo comprendidos entre sus lados* [2].

Fig. 74.

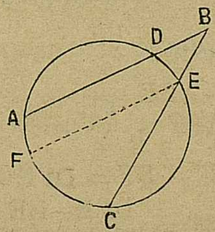
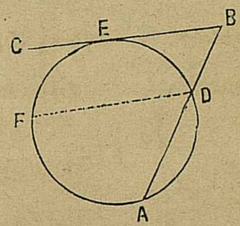


Fig. 75.



1.° Sea el ángulo ABC *(Fig. 74)* formado por dos secantes.

Trazo por E una cuerda EF paralela á la secante AB; el ángulo propuesto ABC es igual al FEC, y la medida de éste es la mitad del arco FC, luego

$$ABC = \frac{FC}{2},$$

pero

$$FC = AC - AF = AC - DE;$$

luego

$$ABC = \frac{AC - DE}{2}.$$

2.° Sea el ángulo ABC *(Fig. 75)* formado por la secante AB y la tangente BC.

Trazo por D una cuerda DF paralela á BC; el ángulo propuesto ABC es igual á ADF, y la medida de éste es $\frac{AF}{2}$, luego

$$ABC = \frac{AF}{2},$$

1 Estos ángulos suelen llamarse *exteriores*.

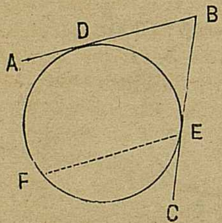
2 Un arco es *cóncavo* ó *convexo* segun el punto desde el cual se vé: es cóncavo si la cuerda que une sus extremos y el punto donde se supone colocado el ojo de un observador caen hácia un mismo lado del arco; y convexo, si la cuerda y el punto de vista caen á uno y otro lado del arco. En el teorema del texto el punto de vista es el vértice del ángulo.

pero $$AF = AFE - FE = AFE - DE;$$

luego $$ABC = \frac{AFE - DE}{2}.$$

3.° Sea el ángulo ABC (*Fig.* 76) formado por dos tangentes.

Fig. 76.



Trazo por uno de los puntos de contacto E la cuerda EF paralela á la otra tangente AB; el ángulo ABC es igual al FEC, y la medida de éste es $\frac{FE}{2}$, luego

$$ABC = \frac{FE}{2},$$

pero $FE = DFE - DF = DFE - DE;$

luego $$ABC = \frac{DFE - DE}{2}.$$

Escolios.

123. 1.° Si en una circunferencia O (*Fig.* 77) tomamos dos arcos iguales AC, DE, y unimos los extremos por medio de

Fig. 77.

rectas CD, AE que se corten, es evidente que en general el punto de interseccion B no caerá en el centro O; además el ángulo ABC tiene por medida

$$\frac{AC + DE}{2} = \frac{2AC}{2} = AC,$$

esto es, el arco comprendido entre sus lados; luego *de que un ángulo tenga por medida el arco comprendido entre sus lados, no puede deducirse que el vértice esté en el centro del arco.*

2.° *Si la medida de un ángulo es la mitad del arco cóncavo comprendido entre sus lados, el vértice estará en la circunferencia;* pues si el vértice estuviese en el centro la medida seria todo el arco; si estuviese entre el centro y la circunferencia, la medida seria mayor que la mitad del arco comprendido; y si estuviese fuera del círculo, dicha medida seria menor que la mitad del arco.

3.° Si suponemos que el ángulo ACB *(Fig. 71)* se mueve de modo que sus lados pasen siempre por los puntos A y B, y que el vértice esté por encima de la recta AB, dicho punto describirá el arco ACDB; si el vértice se mueve por debajo de AB, describirá otro arco igual al ACDB, cuyos extremos serán tambien A y B; y si el ángulo fuese recto, el vértice describiria una semicircunferencia por encima de AB y otra por debajo, luego *el lugar geométrico de los vértices de los ángulos rectos cuyos lados pasan por dos puntos fijos* A *y* B, *es una circunferencia que tiene por diámetro la recta* AB.

V.—Líneas proporcionales en la circunferencia.

TEOREMA. *(Figs. 78 y 79).*

124. *Si desde un punto interior ó exterior á una circunferencia se trazan dos rectas que la corten, las distancias de dicho punto á los de interseccion de cada recta con la circunferencia son recíprocamente proporcionales.*

Sea el punto I, interior á la circunferencia *(Fig. 78)* ó exterior *(Fig. 79)*.

Queremos demostrar que las distancias IA′, IB′ de dicho punto á los de interseccion de la recta A′B′ con la circunferencia, son recíprocamente proporcionales á las distancias IA, IB del mismo punto á los de interseccion de la recta AB, es decir que

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{IB}{IB'}.$$

Trazando las cuerdas AB′ y A′B tendremos

$$ang.\ IA'B = ang.\ IAB',$$

porque ámbos tienen por medida la mitad del arco BB′ [118]

luego las rectas AB′ y A′B son antiparalelas con respecto al

Fig. 78.

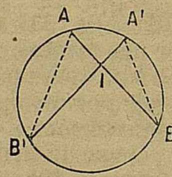
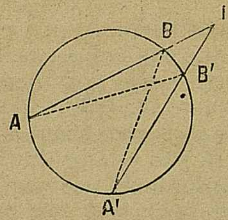


Fig. 79.



ángulo AIB′, y por tanto [82]

$$\frac{IA'}{IA} = \frac{IB}{IB'} .$$

Teorema recíproco.

125. *Si las distancias del vértice* I *de un ángulo á dos puntos* A *y* B *tomados en un lado son recíprocamente proporcionales á las distancias del mismo vértice á dos puntos* A′ *y* B′ *del otro lado, los cuatro puntos* A, B, A′, B′ *están situados en una misma circunferencia* [1].

Segun el teorema del número 83, las rectas que unan A con B′ y A′ con B son antiparalelas; luego

$$\textit{áng.}\ BAB' = \textit{áng.}\ B'A'B\ ;$$

si describimos una circunferencia que pase por A, B y B′, lo que siempre es posible [95], el ángulo BAB′ tendrá por medida la mitad del arco BB′, luego el B′A′B tendrá la misma medida; por consiguiente su vértice A′ se hallará en la circunferencia que pasa por A, B y B′ [123, 2.º].

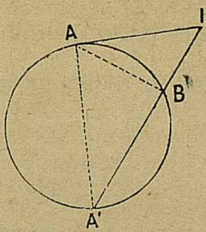
126. Corolario. *Si desde un punto exterior á un círculo se trazan una secante y una tangente, la distancia de dicho punto al de contacto es media proporcional entre las distancias del mismo á los puntos de interseccion de la secante con la circunferencia.*

---

1 Suponemos que si A y B están hácia un mismo lado de I, A′ y B′ estarán tambien hácia un mismo lado; y que si A y B están á lados distintos con respecto á I, sucederá lo mismo á A′ y B′.

Suponiendo que la secante IA *(Fig. 79)* gire alrededor de I, los puntos A y B irán aproximándose mútuamente, y cuando lleguen á confundirse en uno solo A *(Fig. 80)*, la secante se convertirá en la tangente IA, y será IB = IA; luego

Fig 80.



$$\frac{IA'}{IA} = \frac{IA}{IB'}.$$

Nota. Podria demostrarse directamente este corolario fundándose en el del número 85.

Recíproco. *Si la distancia del vértice* I *de un ángulo á un punto* A *tomado en un lado es media proporcional entre las distancias* IA', IB' *del mismo vértice á dos puntos del otro lado, la circunferencia que pasa por estos tres puntos es tangente al primer lado* IA *en* A.

En efecto: las rectas AB', AA' son antiparalelas con respecto al ángulo I [85, *recíp.*], luego los ángulos AA'B' y B'AI son iguales; pero el inscripto AA'B' tiene por medida la mitad del arco AB', por lo tanto el B'AI tiene igual medida; si suponemos ahora una tangente á la circunferencia por el punto A, formará en este punto con AB' un ángulo que tendrá tambien por medida la mitad del arco AB', y será por consiguiente igual al IAB', para lo cual es necesario que la tangente se confunda con AI, lo que demuestra el recíproco.

127. De las igualdades obtenidas en los números 124 y 126 se deduce

$$IA' \times IB' = IA \times IB, \quad IA' \times IB' = IA^2.$$

Luego *si desde un punto interior ó exterior á un círculo se trazan rectas que encuentren á la circunferencia, el producto de las distancias de dicho punto á los de interseccion de cada recta con la circunferencia es constante.*

Cuando alguna de las rectas es tangente, se considera como una secante cuyos dos puntos de interseccion se han reunido en uno solo.

VI.—Circunferencias combinadas entre sí.

128. Dos circunferencias no pueden tener más de dos puntos comunes sin confundirse, pues si tienen tres puntos comunes coinciden [95].

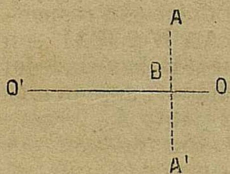
Se llaman *circunferencias secantes* las que se cortan en dos puntos.

Se llaman *circunferencias tangentes* las que se tocan en un solo punto, llamado de *contacto*.

Teorema. (*Fig.* 81).

129. *Si dos circunferencias* O *y* O′ *tienen un punto comun* A *fuera de la recta* OO′ *que une sus centros, son secantes.*

Fig. 81.



Bajo desde el punto A una perpendicular AB á la recta OO′ que une los centros, prolongo la perpendicular, y tomo en la prolongacion una parte BA′ igual á BA; segun esta construccion, la OO′ será perpendicular á AA′ en su punto medio B, luego los centros O y O′ equidistan de A y A′ [48]; de aquí se deduce que la circunferencia O, que pasa por A, pasará tambien por A′, y la O′ estará en igual caso; luego las circunferencias tienen dos puntos comunes A y A′, ó son secantes.

Teorema recíproco.

130. *Los puntos de interseccion de dos circunferencias secantes, están fuera de la recta que une los centros.*

El centro de la circunferencia O equidista de los puntos de interseccion A y A′, porque pertenecen á dicha curva, y el centro de la circunferencia O′ equidista tambien de A y A′ por análoga razon; luego la recta OO′ pasa por el punto medio de AA′, quedando por tanto fuera de la primera OO′ los extremos A y A′ de la segunda.

Corolario. *La recta que une los centros de dos circunferencias secantes, es perpendicular á la cuerda comun en su punto medio.*

Teorema.

4 131. *Si dos circunferencias tienen un punto comun en la recta que une sus centros, son tangentes.*

Puesto que si fueran secantes, los puntos comunes estarian fuera de la recta que une los centros [130].

Teorema recíproco.

5 132. *El punto de contacto de dos circunferencias tangentes, está en la recta que une sus centros.*

Porque si estuviese fuera, las circunferencias serian secantes [129].

Teorema.

6 133. 1.° *Si dos circunferencias son mútuamente exteriores, la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.*

2.° *Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la distancia de sus centros es igual á la suma de sus radios.*

3.° *Si dos circunferencias son secantes, la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia.*

4.° *Si dos circunferencias son tangentes interiormente, la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios.*

5.° *Si una circunferencia es interior á otra, la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios.*

1.° Á la simple inspeccion de la fig. 82, se comprende

Fig. 82

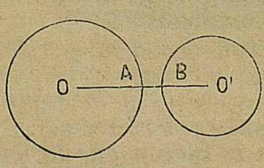
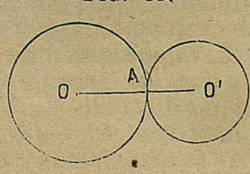


Fig. 83.



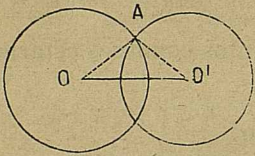
que la distancia OO′ de los centros es mayor que la suma OA + O′B de los radios.

2.° Siendo tangentes las circunferencias O y O′ *(Fig. 83)*, el punto de contacto A está en la recta OO′ que une los centros, por consiguiente

$$OO' = OA + O'A.$$

3.° Uniendo los centros de las circunferencias secantes O y O′ (*Fig.* 84) con uno de los puntos de intersección A, por medio de los radios OA y O′A, se formará un triángulo OAO′, puesto que A está fuera de la recta OO′, y será [17]

Fig. 84.



$$OO' < OA + O'A, \quad OO' > OA - O'A.$$

4.° Siendo tangentes las circunferencias O y O′ (*Fig.* 85), el punto de contacto A está en la recta OO′ que une los centros; luego

$$OO' = OA - O'A.$$

Fig. 85.

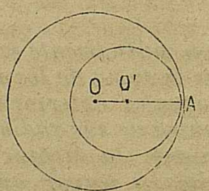
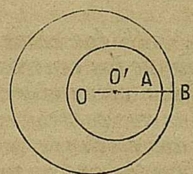


Fig. 86.



5.° Es evidente (*Fig.* 86) que

$$OO' = OB - O'A - AB\,,$$

luego

$$OO' < OB - O'A.$$

134. Dos circunferencias situadas en un mismo plano no pueden ocupar más posiciones relativas que las cinco estudiadas en este teorema, y como cada hipótesis ha conducido á una conclusion que excluye todas las demás, tendremos [55]:

1.° *Si la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios, las circunferencias son mútuamente exteriores.*

2.° *Si la distancia de los centros es igual á la suma de los radios, las circunferencias son tangentes exteriormente.*

3.° *Si la distancia de los centros es menor que la suma de los radios y mayor que su diferencia, las circunferencias son secantes.*

4.° *Si la distancia de los centros es igual á la diferencia de los radios, las circunferencias son tangentes interiormente.*

5.° *Si la distancia de los centros es menor que la diferencia de los radios, una de las circunferencias es interior á la otra.*

PROBLEMAS RELATIVOS Á LAS LÍNEAS.

I.—Nociones preliminares.

135. PROBLEMA *es una cuestion práctica en que se propone determinar cosas desconocidas, llámadas incógnitas, por medio de sus relaciones con otras conocidas, llamadas datos.*

Resolver un problema es determinar las cosas desconocidas.

Los problemas de Geometría pueden ser *gráficos* y *numéricos.*

Los primeros tienen por objeto construir una figura que satisfaga á ciertas condiciones; en los segundos se trata de hallar el valor numérico de una extension.

136. En la resolucion de los problemas gráficos pueden seguirse dos métodos: el *analítico* y el *sintético.*

Si se emplea el analítico hay que proceder del modo siguiente: 1.° se supone resuelto el problema, y, sobre los datos del mismo, se hace una construccion aproximada de la incógnita: 2.° sirviéndose de teoremas conocidos, que tengan conexion con la cuestion propuesta, se procura descubrir relaciones entre los datos y las incógnitas, trazando con este objeto las líneas ó figuras auxiliares que se crean convenientes para hacer manifiestas dichas relaciones; 3.° se efectúan con exactitud sobre los datos del problema las construcciones conocidas ó fáciles que, segun el análisis anterior, enlazan aquellos con la incógnita.

En algunos casos, sobre todo si el problema es bastante complicado, conviene además demostrar que la solucion cumple con todas las condiciones de la propuesta.

El método analítico es el de invencion y debe emplearse para resolver problemas nuevos.

Consiste el método sintético en enunciar las construcciones conocidas que deben efectuarse para determinar la incógnita ó incógnitas del problema, demostrando despues que la solucion cumple con las condiciones de la propuesta.

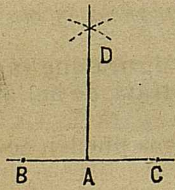
Es claro que este método no es propio para inventar: sólo se emplea en la exposicion y demostracion de los procedimientos descubiertos ya por el análisis.

Despues de resuelto un problema por cualquier método, puede hacerse la *discusion*, que consiste en examinar las circunstancias variables de los datos, las consiguientes alteraciones en la solucion, y el grado de generalidad del procedimiento.

II.—Problemas.

137. 1.° *Por un punto* A *de una recta* (Fig. 87), *levantar una perpendicular á esta recta.*

Fig. 87.

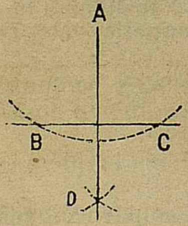


Análisis. Sea AD la perpendicular pedida. Si á los dos lados del punto A tomamos las distancias iguales AB y AC, la AD será perpendicular en el punto medio de BC; luego el punto D equidista de los puntos B y C; por consiguiente buscando un punto equidistante de B y C, dicho punto y el A determinarán la perpendicular pedida.

Síntesis. Tómense las distancias iguales AB y AC; haciendo centro sucesivamente en B y en C, trácense con el mismo radio dos arcos que se corten, para lo que es necesario que el radio sea mayor que AB; únase el punto de interseccion D con A, y la recta AD será la perpendicular pedida.

En efecto: los puntos A y D equidistan de B y C, luego AD es perpendicular á BC [51].

Fig. 88.



138. 2.° *Desde un punto* A *dado fuera de una recta* (Fig. 88), *bajar una perpendicular á esta recta.*

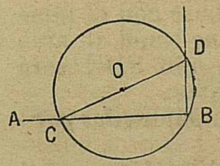
Análisis. Sea AD la perpendicular pedida. Si podemos señalar en BC dos puntos B y C de los que esté A equidistante, bastará hallar otro punto tambien equidistante de B y C para determinar la perpendicular AD.

Síntesis. Haciendo centro en A descríbase un arco que corte á la recta dada en dos puntos B y C, para lo que es necesario elegir un radio mayor que la distancia entre el punto dado y la recta; describiendo desde los puntos B y C como centros dos arcos de igual radio que se corten en un punto D, este punto y el dado A determinan la perpendicular pedida.

La demostracion es igual á la del teorema anterior.

7 139. 3.° *En el extremo* B (Fig. 90) *de una recta* AB *que no se puede prolongar en la direccion* AB, *levantar una perpendicular á dicha recta.*

FIG. 89.

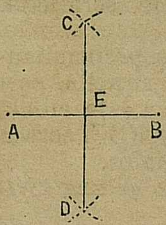


SÍNTESIS.[1] Haciendo centro en un punto O exterior á la recta dada, descríbase una circunferencia que pase por B y corte á la recta AB en otro punto C; por este punto trácese el diámetro CD; únase B con D, y la recta BD será la perpendicular pedida.

En efecto: el ángulo inscripto CBD es recto [119, 3,°] luego BD es perpendicular á AB.

8 140. 4.° *Dividir una recta* AB (Fig. 91) *en dos partes iguales, por medio de una perpendicular.*

FIG 90.



Haciendo centro en A, con un radio mayor que la mitad de AB, descríbanse dos arcos, uno por encima y otro por debajo de AB; hágase despues centro en B, y con el radio anterior, descríbanse otros dos arcos que corten á los primeros: uniendo los puntos de interseccion C y D, la recta CD será perpendicular á AB y la dividirá en dos partes iguales [51].

---

1 Omitimos en el texto el análisis de este problema, porque nos parece algo difícil para principiantes; sin embargo, para darlo á conocer á los alumnos más aventajados, lo exponemos á continuacion.

ANÁLISIS. Suponiendo trazada la perpendicular BD, describamos desde un punto O, *exterior* á la recta dada AB, una circunferencia que corte á dicha recta en dos puntos, uno de ellos el dado B. Es claro que la curva cortará á la perpendicular BD en otro punto D, de lo contrario seria BD tangente á la circunferencia y AB pasaria por el centro; segun esto, el ángulo recto ABD es un ángulo inscripto y debe abrazar entre sus lados media circunferencia; luego *la recta* CD *que une los puntos de interseccion* C *y* D *es un diámetro.*

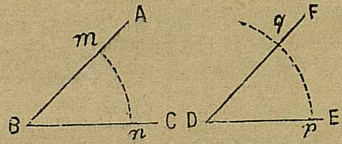
De esta conclusion nace fácilmente la síntesis.

En adelante expondremos el análisis de un problema tan sólo cuando lo reclame su importancia.

141. 5.° *En un punto* D (Fig. 91) *de una recta* DE, *formar*
2 *un ángulo igual á otro dado* ABC.

Trácese, con un radio cualquiera, el arco *mn* correspondien-

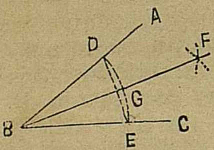
Fig. 91.



te al ángulo dado; haciendo centro en D descríbase con el mismo radio un arco indefinido; tómese una parte *pq* igual al arco *mn*; y por los puntos D y *q* tírese la DF: el ángulo FDE será igual al ABC, por serlo los arcos correspondientes.

9 142. 6.° *Dividir un ángulo dado* ABC (Fig. 92) *en dos partes iguales.*

Fig. 92.

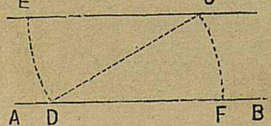


Descríbase con un radio arbitrario el arco DE correspondiente al ángulo dado; haciendo centro sucesivamente en D y E descríbanse dos arcos de igual radio, que se corten; uniendo el punto de interseccion F con el vértice B, la recta BF será la bisectriz del ángulo ABC.

En efecto: la recta BF es perpendicular á la cuerda DE, y como aquella pasa por el centro del arco, divide á éste en dos partes iguales DG y GE; luego los ángulos ABF y FBC, correspondientes á estos arcos iguales, son tambien iguales.

143. 7.° *Por un punto* C (Fig. 93) *dado fuera de una recta*
10 AB, *trazar una paralela á esta recta.*

Fig. 93.



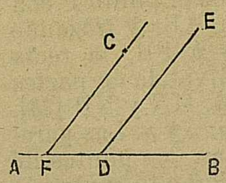
Haciendo centro en el punto dado C y con el mayor radio posible, descríbase un arco DE; con el mismo radio y haciendo centro en D descríbase otro arco CF; mídase la cuerda CF y llévese sobre el arco DE á partir del punto D, únase el punto E con el C, y resultará la paralela pedida EC.

En efecto: los arcos de igual radio CF y ED son iguales, por consiguiente si trazamos la secante

CD, los ángulos alternos internos CDF y ECD tambien serán iguales, y las rectas EC y AB serán paralelas [64].

144. 8.º *Por un punto* C (Fig. 94) *dado fuera de una recta* AB, *trazar otra que forme con la primera un ángulo igual á otro dado* M.

Fig. 94.

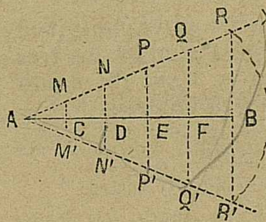


Tómese un punto cualquiera D en la recta AB, y tírese por él una recta DE que forme con la AB un ángulo EDB igual al M; trácese por el punto dado C una paralela á la DE y estará resuelto el problema.

En efecto: los ángulos CFB y EDB son iguales por correspondientes, y como el último se ha construido igual al M, resulta CFB = M.

145. 9.º *Dividir una recta dada en cualquier número de partes iguales.*

Fig. 95.



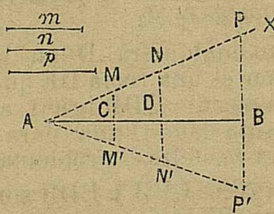
Supongamos que la recta AB (*Fig.* 95) se quiera dividir en cinco partes iguales. Por un extremo A trazo una recta indefinida AX, tomo en ella, á partir del punto A, cinco longitudes iguales AM, MN etc., uno el último punto R con el otro extremo B, y trazando por M, N, P etc. paralelas á BR, quedará la AB dividida en cinco partes iguales [70].

Escolio. Las paralelas MM' NN' etc. á BR pueden trazarse por el procedimiento del número 143; pero es más sencillo y exacto en la práctica el siguiente: prolónguese la RB; haciendo centro en A, con el radio AR descríbase un arco que corte á RB en R'; únase A con R'; tómense las longitudes AM', M'N' etc. iguales á AM, MN etc. y uniendo M con M', N con N' etc. las rectas de union son paralelas á RR'. En efecto: es evidente que $\frac{AM}{AR}=\frac{AM'}{AR'}$; luego MM' es paralela á RR' [77]. Lo mismo diríamos de las demás.

Conviene en la práctica dar á las partes AM, MN, NP etc. una longitud tal que la recta RB corte á la AB en ángulo recto próximamente.

146. 10.° *Dividir una recta dada* AB (Fig. 96) *en partes proporcionales á otras rectas* m, n, p.

Fig. 96.



Por un extremo A de la recta dada trazo una recta indefinida AX; tomo en ella las longitudes AM, MN, NP iguales respectivamente á las rectas dadas *m*, *n*, *p*; uno el punto P con el extremo B de la AB; y trazando por M y N paralelas á PB, la recta dada AB quedará dividida en partes proporcionales á AM, MN y NP [74], ó lo que es igual, á *m*, *n* y *p*. Las paralelas que determinan los puntos de division C y D, deben trazarse por el procedimiento explicado en el problema anterior.

Si la recta dada AB tuviera que dividirse en partes proporcionales á dos rectas *m* y *n*, podria emplearse el procedimiento del número 88.

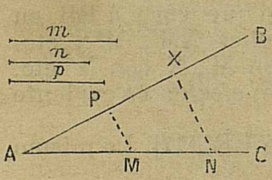
147. 11.° *Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas* m, n, p.

Se trata de hallar gráficamente una recta cuya longitud pueda ser el cuarto término de una proporcion, siendo los tres primeros las longitudes de las rectas dadas *m*, *n*, *p*; de modo que representando por *x* la recta pedida, deberá tenerse

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{x}.$$

1.ª *construccion.* (*Fig.* 97). Fórmese un ángulo cualquiera BAC; á partir del vértice, tómense á continuacion una de otra las longitudes AM y MN iguales á las dos primeras rectas dadas *m* y *n*; en el otro lado AB tómese AP $= p$; únanse los extremos M y P de las líneas primera y tercera; y por el punto N trácese NX paralela á MP: la recta PX es la cuarta proporcional pedida. En efecto: tenemos [74]

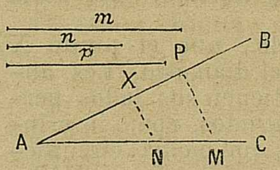
Fig. 97.



$$\frac{AM}{MN} = \frac{AP}{PX} \text{ ó } \frac{m}{n} = \frac{p}{x}.$$

2.ª *construccion.* Si tomando las longitudes m y n á continuacion una de otra resulta una figura demasiado grande, se tomarán las dos á partir del vértice A *(Fig. 98)*, y uniendo los extremos M y P de las líneas primera y tercera, bastará trazar por N una paralela á MP para hallar la cuarta proporcional AX. En efecto [74]

Fig. 98.



$$\frac{AM}{AN}=\frac{AP}{AX} \text{ ó } \frac{m}{n}=\frac{p}{x}.$$

148. 12.° *Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas* m *y* n.

Se trata de hallar una recta x, que forme con las dadas la proporcion continua

$$\frac{m}{n}=\frac{n}{x}.$$

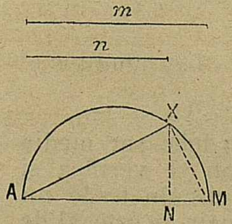
Este problema es un caso particular del anterior, y se resuelve por cualquiera de las construcciones expuestas.

149. 13.° *Hallar una media proporcional á dos rectas dadas* m *y* n.

La solucion de este problema debe ser una recta x, que forme con las dadas la proporcion continua $\frac{m}{x}=\frac{x}{n}$.

1.ª *construccion.* En una recta cualquiera tómense á partir de un punto A *(Fig. 99)* y en la misma direccion, dos longitudes AM y AN iguales á m y n; sobre la mayor AM, considerada como diámetro, descríbase una semicircunferencia; por el punto N levántese la NX perpendicular al diámetro; y únase A con X. La cuerda AX es la media proporcional.

Fig. 99.

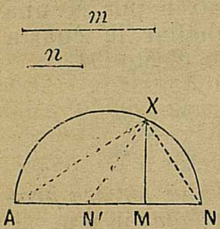


En efecto: uniendo M con X, se forma el ángulo recto AXM [119, 3.°], y como ANX tambien es recto, resulta que XM y XN son antiparalelas con respecto al ángulo A; luego [85]

$$\frac{AM}{AX}=\frac{AX}{AN} \text{ ó } \frac{m}{x}=\frac{x}{n}.$$

2.ª *construccion.* (*Fig.* 100). En una recta indefinida tómense, una á continuacion de otra, dos longitudes AM, MN iguales á m y n; sobre la suma AN como diámetro descríbase una semicircunferencia, levántese por M una perpendicular al diámetro; esta perpendicular MX es la media proporcional.

Fig. 100.



Para demostrarlo, uno el punto X con los extremos del diámetro. Los ángulos NXM, XAM tienen sus lados perpendiculares y son agudos, como inscriptos en arcos menores que media circunferencia, luego son iguales. Tomo MN′= MN y trazo XN′; esta recta forma con XM un ángulo igual á NXM, porque los triángulos NXM, N′XM son iguales [20]; luego el ángulo N′XM tambien es igual al XAM. De aquí resulta que XN′ y AX son antiparalelas respecto del ángulo XMA; luego

$$\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MX}}=\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{MN'}} \quad \text{ó} \quad \frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{MX}}=\frac{\mathrm{MX}}{\mathrm{MN}},$$

puesto que MN′ = MN.

150. Se dice que una recta está dividida en *media y extrema razon* cuando se halla dividida en dos partes tales que la mayor es media proporcional entre la recta entera y la menor.

14.º *Dividir una recta* AB *en media y extrema razon.*

Análisis. Representemos por a la longitud de la recta dada y por x la mayor de las partes en que debe dividirse: la menor será $a - x$, y en virtud de la definicion tendremos

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x},$$

de donde

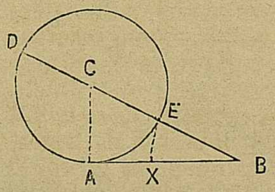
$$\frac{a+x}{a}=\frac{a}{x}.$$

Esta igualdad nos dice que la recta dada a debe ser media proporcional entre $a+x$ y x, y esta condicion se verifica si concebimos una tangente y una secante á un círculo desde un punto exterior, de tal modo que a sea la distancia de éste al de contacto, $a+x$ y x las del mismo á los de interseccion [126];

la parte de secante interceptada por la circunferencia será a, y la parte exterior será la incógnita x; ahora bien, el modo más sencillo de lograr que la parte interceptada sea igual á a consiste en tomar esta recta para diámetro de la circunferencia y hacer que la secante pase por el centro.

Síntesis. En un extremo de la recta dada AB (*Fig.* 101), levántese una perpendicular igual á la mitad de AB; descríbase desde C como centro con el radio AC una circunferencia, que será tangente á AB [105,1°]; trácese la secante BD que pasa por el centro: el segmento externo BE será la parte mayor de la recta AB dividida en media y extrema razon, y bastará llevar BE sobre BA para determinar el punto de division X.

Fig. 101.



Si queremos demostrarlo, tendremos [126]

$$\frac{BD}{AB}=\frac{AB}{BE}, \text{ de donde } \frac{BD-AB}{AB-BE}=\frac{AB}{BE};$$

pero AB = DE, por tanto BD—AB=BE=BX, y AB—BE=AB—BX=AX; luego

$$\frac{BX}{AX}=\frac{AB}{BX} \text{ ó } \frac{AB}{BX}=\frac{BX}{AX}.$$

Escolio. Si queremos hallar el valor numérico de BX, dado el valor numérico a de AB, volveremos á la igualdad

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x},$$

de donde se deduce

$$a(a-x)=x^2 \;,\; a^2-ax=x^2,$$

$$x^2+ax-a^2=0.$$

Resolviendo esta ecuacion de segundo grado, tendremos

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

La raiz positiva

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

resuelve la cuestion, y puede escribirse en la forma

$$\frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}.$$

La parte menor AX será

$$a - \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2}.$$

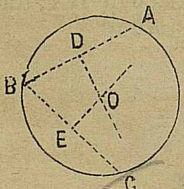
La segunda raiz

$$-\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}\right),$$

no responde directamente á la cuestion, por tener un valor absoluto mayor que la recta dada.

151. 15.° *Describir una circunferencia que pase por tres puntos dados* A, B, C (Fig. 102).

Fig. 102.



Levántese una perpendicular á AB y otra á BC en sus puntos medios: el punto O interseccion de estas perpendiculares es el centro de la circunferencia, y la distancia de O á cualquiera de los puntos A, B, C será el radio.

Ya se sabe que si los puntos dados están en línea recta el problema es imposible.

152. 16.° *Dada una circunferencia ó un arco, hallar su centro.*

Señálense tres puntos en la curva dada y procédase como en el problema anterior.

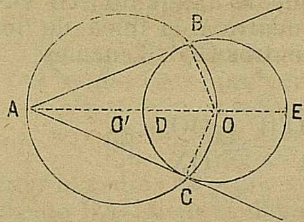
153. 17.° *Por un punto dado en una circunferencia, trazar una tangente á esta curva.*

Tírese el radio correspondiente al punto dado; trácese por este punto una perpendicular á dicho radio, y se tendrá la tangente pedida [105, 1.°]

154. 18.° *Por un punto A dado fuera de una circunferencia O, trazar tangentes á esta curva.*

Únase el punto dado A (*Fig.* 103) con el centro O; sobre OA como diámetro descríbase la circunferencia O'; uniendo los puntos de interseccion B y C de las circunferencias con el punto A, las rectas AB y AC serán las tangentes pedidas.

Fig. 103.



En efecto: si trazamos los radios OB y OC, los ángulos inscriptos ABO, ACO, que abrazan entre sus lados media circunferencia, serán rectos; luego AB y AC son perpendiculares respectivamente á los radios OB y OC, por consiguiente son tangentes á la circunferencia O.

Escolios.

1.° *La recta que une el punto exterior A con el centro de la circunferencia dada, es bisectriz del ángulo que forman las tangentes;* y recíprocamente, *la bisectriz del ángulo que forman las tangentes, pasa por el centro de la circunferencia.*

Siendo los radios OB y OC perpendiculares á las tangentes AB y AC, el punto O equidista de ellas; luego pertenece á la bisectriz del ángulo BAC [53, 1.°]; y como esta bisectriz pasa por A, será AO.

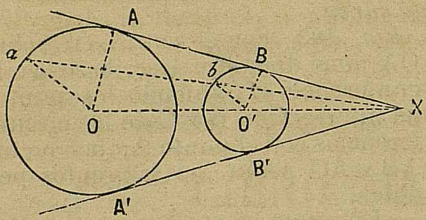
2.° *Las tangentes dirigidas á una circunferencia desde un punto exterior, son iguales.*

Doblando la figura por la bisectriz AO, las rectas AC y AB se confundirán, y como OC y OB son perpendiculares á ellas, los puntos C y B coinciden; luego AB = AC.

155. 19.° *Trazar las tangentes comunes á dos circunferencias.*

Análisis. Sea AB una tangente comun á las circunferencias dadas O y O', la que podrá ser exterior (*Fig.* 104) ó interior (*Fig.* 105).

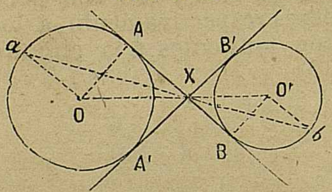
Fig. 104.



Los radios OA, O'B tirados á los puntos de contacto son perpendiculares á AB, y por tanto paralelos entre sí. Sea X el punto en que la tangente AB encuentra á la línea de los centros OO'. Tenemos

$$\frac{OA}{O'B}=\frac{OX}{O'X} \text{ de donde } \frac{OA \mp O'B}{OA}=\frac{OO'}{OX} \quad [a].$$

Fig. 105.



Trazando otros dos radios paralelos Oa, $O'b$, en la misma direccion *(Fig. 104)*, ó en direccion opuesta *(Fig. 105)*, y llamando x al punto en que ab encuentra á la recta de los centros será

$$\frac{Oa}{O'b}=\frac{Ox}{O'x}, \text{ de donde } \frac{Oa \mp O'b}{Oa}=\frac{OO'}{Ox} \quad [b].$$

De las igualdades [a] y [b] se desprende $OX = Ox$.

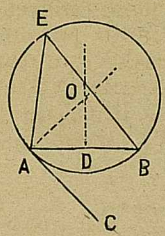
Vemos, pues, que *toda tangente comun á dos circunferencias y toda recta que una los extremos de dos radios paralelos, dirigidos en el mismo sentido si la tangente es exterior, y en sentidos contrarios si es interior, encuentran á la recta que une los centros en el mismo punto.*

Síntesis. Trácense dos radios Oa, $O'b$ paralelos y dirigidos en el mismo sentido; únanse los extremos a y b por una recta ab prolongada hasta que encuentre á la OO' en X; desde el punto X trácense dos tangentes á una de las circunferencias dadas, y se tendrán dos tangentes comunes exteriores.

Trazando los radios Oa, $O'b$ paralelos y en direccion contraria, se obtendrán del mismo modo dos tangentes comunes interiores; luego el problema tiene en general cuatro soluciones.

156. 20.° *Describir sobre una recta dada* AB (Fig. 106) *un arco capaz de un ángulo dado* M, esto es, *un arco tal que todos los ángulos inscriptos en él sean iguales al ángulo dado* M.

Fig. 106.



En un extremo A de la recta dada constrúyase un ángulo BAC igual al dado M; levántese una perpendicular DO á la AB por su punto medio y otra AO á la AC por el punto A; estas dos perpendiculares se encuentran en un punto O [60, *cor.* 2.º]. Haciendo centro en O y describiendo con el radio OA un arco AEB queda resuelto el problema.

En efecto: todo ángulo AEB inscripto en el arco AEB, tiene por medida la mitad del arco AB; además siendo AC perpendicular al radio OA y por tanto tangente á la circunferencia, el ángulo BAC tiene tambien por medida la mitad del arco AB; luego

$$\acute{a}ng.\ AEB = \acute{a}ng.\ BAC = M.$$

LIBRO SEGUNDO.

POLÍGONOS.

DEFINICIONES.

157. Polígono *es una porcion de superficie plana terminada en todos sentidos por líneas rectas que se cortan dos á dos.*

Estas rectas se consideran limitadas por los puntos de interseccion, y se llaman *lados*. Las intersecciones de los lados son los *vértices* del polígono. Cada dos lados consecutivos forman un ángulo del polígono.

Perímetro de un polígono es el conjunto de todos sus lados.

Diagonal de un polígono es toda recta que une dos vértices no adyacentes al mismo lado.

Un polígono es *convexo* cuando su perímetro no puede ser cortado por una línea recta en más de dos puntos; y *cóncavo* en el caso contrario.

Fig. 107

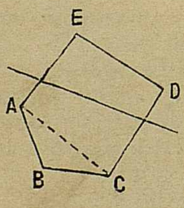
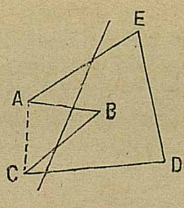


Fig. 108.



El polígono ABCDE de la figura 107 es convexo, el de la 108 es cóncavo.

158. *Si alguna diagonal de un polígono es exterior, el polígono es cóncavo.*

Sea AC una diagonal exterior. Si el polígono está enteramente situado á un solo lado de AC (*Fig.* 109) partirán de cada

Fig. 109.

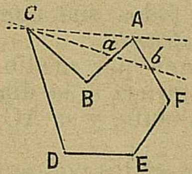
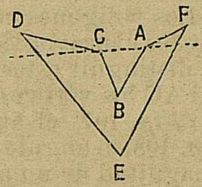


Fig. 410.



vértice A y C dos lados AB y AF, CB y CD; luego bastará mover la AC alrededor de C para que encuentre al perímetro en tres puntes *a*, *b*, C.

Si el polígono está á uno y otro lado de AC (*Fig.* 110) es evidente que prolongando esta recta encontrará al perímetro en más de dos puntos.

159. *Todo polígono cóncavo tiene alguna diagonal exterior.*

Sean *a*, *b*, *c* tres puntos de interseccion de una recta MN con el perímetro, y sea *b* el punto situado entre los otros dos. Segun esto, la línea poligonal deberá ir del punto *a* al *c* pasando por *b*: si esto se verifica por debajo de AC (*Fig.* 111) alguno

Fig. 111.

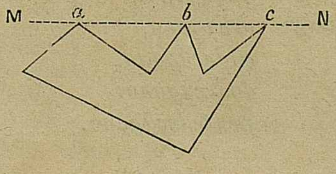
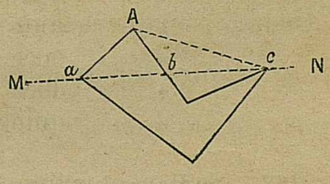
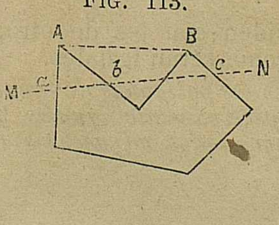


Fig. 112.



de los segmentos de MN será diagonal exterior; y si la union de *a* con *c* se verifica de cualquier otro modo, se formará por encima de *ac* un solo vértice A (*Fig.*112), que unido con *a* ó con *c* dará una diagonal exterior A*c*, ó se formarán varios A, B etc. (*Fig* 113), dos de los cuales determinarán una diagonal exterior AB.

Fig. 113.



160. *Las diagonales de todo polígono convexo son interiores*, porque

si alguna fuera exterior el polígono sería cóncavo [158]. Recíprocamente, *un polígono cuyas diagonales son todas interiores es convexo*, porque de ser cóncavo tendria alguna diagonal exterior [159].

4 161. Los polígonos convexos tienen todos sus ángulos *salientes*, y los cóncavos tienen alguno *entrante*.

Para distinguir estos ángulos se unen por medio de una diagonal AC los vértices anterior y posterior: si la diagonal es interior (*Fig.* 107) el ángulo B es saliente, y si AC es exterior (*Fig.* 108) el ángulo B es entrante.

La magnitud de un ángulo se estima en los polígonos desde lo interior de la figura; por cuya razon los ángulos entrantes como el ABC (*Fig.* 108) son mayores que dos ángulos rectos.

162. Es evidente que el número menor de rectas necesarias para formar un polígono es tres.

El polígono de	tres	lados	se llama	*triángulo*,
»	cuatro	»	»	*cuadrilátero*,
»	cinco	»	»	*pentágono*,
»	seis	»	»	*exágono*,
»	siete	»	»	*eptágono*,
»	ocho	»	»	*octógono*,
»	nueve	»	»	*eneágono*,
»	diez	»	»	*decágono*,
»	once	»	»	*endecágono*,
»	doce	»	»	*dodecágono*,
»	quince	»	»	*pentedecágono*.

5 163. Se llaman polígonos *iguales* los que coinciden cuando se superponen convenientemente.

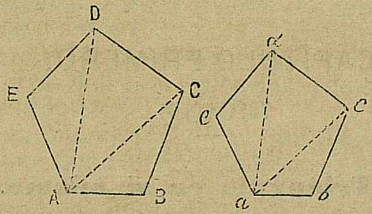
Es claro que dos polígonos iguales tendrán respectivamente iguales todos sus ángulos y lados.

Si los vértices de un polígono coinciden con los de otro, coincidirán tambien los lados y los polígonos serán iguales.

6 164. *Se llaman polígonos* SEMEJANTES *los polígonos de igual número de lados cuyos ángulos son respectivamente iguales y están dispuestos en el mismo órden, y cuyos lados adyacentes á ángulos iguales son proporcionales.*

Los polígonos ABCDE y *abcde* (*Fig.* 114) serán semejantes siempre que tengamos

FIG. 114.



$$\text{áng. A} = \text{áng. } a, \text{ áng. B} = \text{áng. } b, \text{ áng. C} = \text{áng. } c....$$

y además $$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}....$$

Segun esto, si la razon $\frac{AB}{ab}$ vale m, las demás $\frac{BC}{bc}$, $\frac{CD}{cd}$.... valdrán tambien m; esta razon constante para cada dos polígonos semejantes se llama *razon de semejanza* de los mismos.

Es evidente que dos polígonos iguales pueden considerarse como dos polígonos semejantes cuya razon de semejanza es la unidad.

Se llaman *vértices homólogos* los de dos ángulos iguales, como A y a, B y b etc.

Lados homólogos son los que terminan en dos vértices homólogos.

Diagonales homólogas son tambien las que terminan en vértices homólogos.

CAPÍTULO PRIMERO.

TRIÁNGULOS.

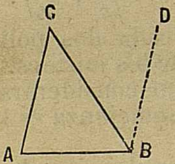
I.—Triángulo en sí mismo.

TEOREMA. *(Fig. 115).*

1

165. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos.*

FIG. 115.



Trazando por uno de los vértices B una paralela BD al lado opuesto AC, tendremos [63, 3.º]

$$A + ABD = 2 \textit{ rectos;}$$

pero el ángulo ABD se compone del ABC más el CBD; luego

$$A + ABC + CBD = 2 \textit{ rectos;}$$

poniendo en lugar del ángulo CBD su igual ACB ó C [63, 1.º], tendremos por último

$$A + ABC + C = 2 \textit{ rectos.}$$

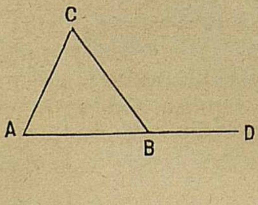
2 un ang. de un triang. es suplemento de la suma de los otros dos

COROLARIOS.

5

1.º *El ángulo externo* CBD (Fig. 116) *formado por un lado* CB *de un triángulo y la prolongacion* BD *de otro lado, es igual á la suma de los ángulos internos* A *y* C *no adyacentes.*

FIG. 116.



En efecto: CBD=2 *rectos* —CBA [30]

A+C=2 *rectos* —CBA [165];

luego CBD = A + C.

4 2.° *Si un ángulo de un triángulo es recto ú obtuso los otros dos serán agudos.*

De lo contrario la suma de los tres ángulos valdria más de dos rectos.

5 3.° *Si dos ángulos de un triángulo son iguales á dos de otro, el tercer ángulo del primer triángulo será igual al del segundo.*

Porque el tercer ángulo de cada triángulo es lo que falta á la suma de los otros dos para valer dos rectos, y las dos sumas son iguales por hipótesis.

Se llama triángulo *rectángulo* el que tiene un ángulo recto, *obtusángulo* el que tiene un ángulo obtuso, y *acutángulo* el que tiene sus tres ángulos agudos.

En el triángulo rectángulo los lados del ángulo recto se llaman *catetos*, y el tercer lado, ó sea el opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa.*

4.° *Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.*

166. Se llama triángulo *equilátero* el que tiene sus tres lados iguales, *isósceles* el que tiene dos lados iguales, y *escaleno* el que tiene sus tres lados desiguales.

Base de un triángulo es uno cualquiera de sus lados, y *vértice* el vértice del ángulo opuesto á la base. *Altura* es la perpendicular bajada desde el vértice á la base, prolongada si es preciso.

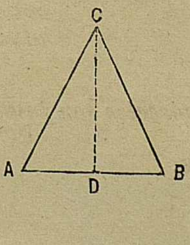
En el triángulo isósceles suele llamarse base al lado desigual, y ángulos *en la base* á los adyacentes á dicho lado.

Se llaman *medianas* de un triángulo las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos.

Teorema.

167. *Si un triángulo tiene dos lados iguales los ángulos opuestos son iguales; y si tiene dos lados desiguales, á mayor lado se opone mayor ángulo.*

Fig. 117

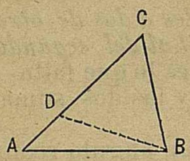


1.° (*Fig.* 117). Suponemos CA = CB; vamos á demostrar que *áng.* B = *áng.* A.

Uno el vértice C con el medio D de la base. Los triángulos CAD y CBD tienen iguales sus tres lados, luego son iguales [23]; por consiguiente *áng.* A = *áng.* B.

2.° (Fig. 118). Suponemos CA $>$ CB y vamos á demostrar que *áng.* CBA $>$ *áng.* A.

Fig. 118.



Puesto que el lado CA es mayor que CB puede tomarse en el primero una parte CD $=$ CB, y trazando DB resultará un triángulo CBD con dos lados CB y CD iguales; luego

$$CDB = CBD;$$

pero $CDB = A + DBA$ [165, *cor.* 1.°],

luego tambien $CBD = A + DBA;$

añadiendo DBA á los dos miembros será

$$CBA = A + 2DBA \qquad [a],$$

luego $CBA > A.$

Escolio. De la igualdad [*a*] se deduce

$$DBA = \frac{CBA - A}{2},$$

es decir que DBA es la semidiferencia de los ángulos B y A del triángulo.

Teorema recíproco.

168. *Si un triangulo tiene dos ángulos iguales los lados opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos desiguales, á mayor ángulo se opone mayor lado.* [55].

Corolarios.

1.° *Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales*, porque se oponen á los lados iguales.

Es evidente que dichos ángulos son agudos.

2.° *La perpendicular á la base de un triángulo isósceles en su punto medio es bisectriz del ángulo en el vértice.*

La perpendicular pasa por el vértice, porque este punto equidista de los extremos de la base; además, siendo iguales los ángulos A y B (*Fig.* 117), sus complementos ACD y BCD son tambien iguales.

Escolio. La perpendicular CD satisface á cuatro condiciones: 1.ª pasa por el punto medio de la base, 2.ª es perpendicular á ella, 3.ª pasa por el vértice, 4.ª divide al ángulo del vértice en dos partes iguales.

Como dos de estas condiciones bastan para determinar una recta, siempre que tengan lugar se verificarán tambien las otras dos.

Por ejemplo:

La bisectriz del ángulo en el vértice de un triángulo isósceles es perpendicular á la base en su punto medio.

3.° *Todo triángulo equilátero es equiángulo, y recíprocamente.*

4.° *En todo triángulo rectángulo el lado mayor es la hipotenusa; y en todo triángulo obtusángulo el lado mayor es el opuesto al ángulo obtuso.*

II.—Comparacion de triángulos.

Igualdad y semejanza.

Además de los casos generales de igualdad de triángulos demostrados en los números 19, 20 y 23, existen otros particulares de los triángulos rectángulos.

Teorema.

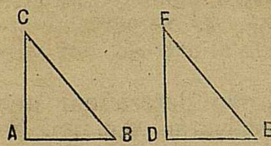
169. *Dos triángulos rectángulos son iguales:* 1.° *Cuando tienen igual la hipotenusa y un ángulo agudo, ó un cateto y el ángulo agudo adyacente ó el opuesto.* 2.° *Cuando tienen los dos catetos respectivamente iguales.* 3.° *Cuando la hipotenusa y un cateto de uno son iguales respectivamente á la hipotenusa y un cateto del otro.*

1.° Como en todo triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, si los triángulos propuestos tienen un ángulo agudo igual, tambien será igual el otro; además los ángulos rectos son iguales; luego los triángulos tendrán en todos los casos un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, por lo que serán iguales [19].

2.° El ángulo comprendido por los catetos es recto, luego los triángulos son iguales [20].

3.° Sean los triángulos ABC y DEF (*Fig.* 119), en los que suponemos AC = DF, CB = FE.

Fig. 119.



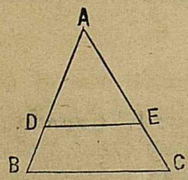
Coloco el triángulo DEF sobre el ABC, de modo que DF coincida con su igual AC y que el punto E caiga hácia el mismo lado de la AC que el punto B: el lado DE seguirá la direccion AB, por ser iguales los ángulos A y D, y el punto E caerá sobre el B, porque siendo CB y FE oblicuas iguales respecto de AB se apartan igualmente de la perpendicular AC; luego los triángulos propuestos son iguales.

170. Cuando dos triángulos ABC y *abc* (*Fig.* 121) son semejantes, dos lados homólogos AB y *ab* se oponen á ángulos iguales, porque siendo $A = a$, $B = b$, tiene que ser $C = c$. Este carácter será el que nos sirva en general para reconocer los lados homólogos de dos triángulos.

Teorema. (*Fig.* 120).

171. *Si en un triángulo* ABC *se traza una paralela* DE *á un lado, el triángulo parcial* ADE *que resulta es semejante al propuesto.*

Fig. 120.



Debemos demostrar que los triángulos ABC y ADE tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales.

Desde luego vemos que el ángulo A es comun, y que

$$ABC = ADE, \quad ACB = AED$$

por correspondientes, luego los ángulos son respectivamente iguales.

Además, considerando las concurrentes AB y AC cortadas por las paralelas DE y BC, tenemos [78]

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE},$$

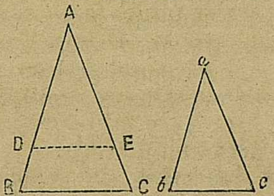
luego los lados homólogos son proporcionales.

TEOREMA. (*Fig.* 121).

172. *Dos triángulos son semejantes: 1.º Cuando tienen dos ángulos respectivamente iguales. 2.º Cuando tienen dos lados del uno proporcionales á dos del otro é igual el ángulo comprendido. 3.º Cuando tienen sus tres lados proporcionales.*

1.º Suponemos que los triángulos ABC y *abc* tienen

FIG. 121.



$$\text{áng. } A = \text{áng. } a, \text{ áng. } B = \text{áng. } b.$$

Coloco el triángulo *abc* sobre el ABC, de modo que el ángulo *a* coincida con su igual A, y que los vértices *b* y *c* caigan respectivamente en los lados AB y AC. Siendo el ángulo *abc* igual al ABC, el lado *bc* adoptará una posicion DE paralela á BC [64, 2.º]; luego el triángulo *abc* es semejante al ABC [171].

2.º Suponemos que en los triángulos ABC y *abc* se verifica

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac}, \quad \text{áng. } A = \text{áng. } a.$$

Coloco el triángulo *abc* sobre el ABC, de modo que el ángulo *a* coincida con su igual A, y que los vértices *b* y *c* caigan respectivamente en los lados AB y AC. Siendo AB y AC proporcionales á *ab* y *ac*, el lado *bc* adoptará una posicion DE paralela á BC [77]; luego el triángulo *abc* es semejante al ABC [171].

3.º Suponemos que en los triángulos ABC y *abc* se verifica

$$\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}.$$

Tomo en el triángulo ABC, á partir del vértice A, dos longitudes AD, AE respectivamente iguales á *ab* y *ac*, y uno D con E. Siendo AB y AC proporcionales á *ab* y *ac* ó sea á AD y

AE, la recta DE será paralela á BC, y el triángulo ADE semejante al ABC. Tenemos, pues,

$$\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE} \text{ y por hipótesis } \frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc},$$

los tres primeros términos de estas igualdades fraccionarias son iguales; luego DE=bc, por consiguiente el triángulo ADE es igual al abc [23], y como ADE es semejante á ABC, tambien abc lo será.

Escolio. Segun el primer caso de semejanza, siempre que dos triángulos tengan sus ángulos respectivamente iguales, los lados homólogos serán proporcionales; y segun el tercer caso, si los lados son proporcionales, los ángulos serán respectivamente iguales; luego las dos condiciones generales de la semejanza, ángulos iguales y lados proporcionales, son en los triángulos consecuencia una de otra.

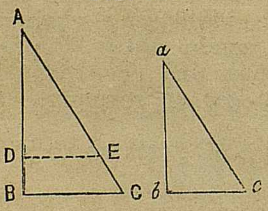
En cualquiera de los casos de semejanza demostrados el número de condiciones suficientes es 2. [1]

Teorema.

173. *Dos triángulos rectángulos son semejantes: 1.° Cuando tienen un ángulo agudo igual. 2.° Cuando los dos catetos del uno son proporcionales á los del otro. 3.° Cuando la hipotenusa y un cateto del uno son proporcionales á la hipotenusa y un cateto del otro.*

Los casos 1.° y 2.° son inmediatas consecuencias de los correspondientes casos generales.

Fig. 122.



3.° *(Fig. 122)*. Suponemos que en los triángulos rectángulos ABC y abc se verifica

$$\frac{AB}{ab}=\frac{AC}{ac}.$$

Tomo en ABC, á partir del punto A, dos longitudes AD y AE iguales á ab y ac; trazo la DE. Como por hipó-

1 Téngase presente que una série de n fracciones iguales $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ ..... encierra $n-1$ condiciones ó igualdades distintas $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$ ...

tesis AB y AC son proporcionales á *ab* y *ac* ó sea á AD y AE, la recta DE será paralela á BC, luego el triángulo ADE es semejante al ABC, y el ángulo en D es recto; siendo ADE un triángulo rectángulo en D es igual al *abc* [169, 3.º], y como ADE es semejante á ABC, su igual *abc* tambien lo será.

TEOREMA. (*Sin figura*).

174. *Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus lados respectivamente paralelos ó perpendiculares.*

Sean A, B, C los ángulos de un triángulo y *a*, *b*, *c* los del otro; suponemos paralelos ó perpendiculares los lados de A y *a*, B y *b*, C y *c*. Segun esto A y *a* serán iguales ó suplementarios y lo mismo B y *b*, C y *c*; los tres ángulos A, B, C no pueden ser suplementos de *a*, *b*, *c*, porque la suma de todos valdria seis rectos, lo que es imposible; dos ángulos A y B no pueden tampoco ser suplementos de otros dos *a* y *b*, porque los seis ángulos valdrian más de cuatro rectos; luego los triángulos tienen necesariamente dos ángulos respectivamente iguales, por tanto son semejantes.

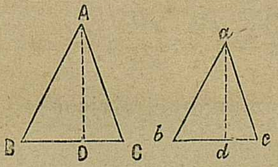
ESCOLIO. Cuando dos triángulos tienen sus lados paralelos ó perpendiculares, son lados homólogos los respectivamente paralelos ó perpendiculares.

175. Para demostrar que dos rectas son proporcionales á otras dos bastará probar que son lados homólogos de dos triángulos semejantes. La proporcion se ordenará en todos los casos de modo que los términos de la primera fraccion sean dos lados de un mismo triángulo y los de la segunda los homólogos respectivos en el otro triángulo, ó que los numeradores sean dos lados de un mismo triángulo y los denominadores sus respectivos homólogos en el otro.

Se demostrará que dos ángulos son iguales, haciendo ver que se oponen á lados proporcionales de dos triángulos semejantes.

TEOREMA. (*Fig.* 123).

FIG. 123.



176. *Las bases* BC, bc *de dos triángulos semejantes* ABC, abc, *son proporcionales á las alturas* AD, ad.

Tenemos $\frac{BC}{bc} = \frac{AB}{ab}$;

los triángulos rectángulos ABD y abd son semejantes [173, 1.º];

luego
$$\frac{AD}{ad}=\frac{AB}{ab};$$

de estas dos igualdades se deduce
$$\frac{BC}{bc}=\frac{AD}{ad}.$$

III.—Líneas rectas en el triángulo.

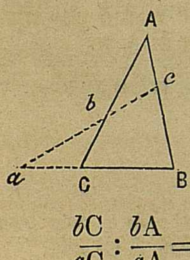
Cuando un punto divide á una recta limitada en dos segmentos aditivos ó sustractivos, llamamos *razon segmentaria* de dicha recta al cociente de los dos segmentos en que está dividida.

TEOREMA. (*Fig.* 124).

177. *Si dos lados de un triángulo* ABC *se cortan por una transversal* abc, *las razones segmentarias de dichos lados son proporcionales á los segmentos del tercero determinados por la transversal.*

Es decir que

FIG. 124.



$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=\frac{aC}{aB}\qquad[a].$$

Suponiendo unidos los puntos a y A por una recta, tendremos tres concurrentes en a cortadas por dos transversales AC y AB, luego [90]

$$\frac{bC}{aC}:\frac{bA}{aA}=\frac{cB}{aB}:\frac{cA}{aA}\quad\text{ó}\quad\frac{bC}{bA}:\frac{aC}{aA}=\frac{cB}{cA}:\frac{aB}{aA};$$

permutando los términos medios y suprimiendo el divisor comun aA resulta la igualdad [a].

La misma demostracion se aplicaria si los puntos b y c estuviesen en las prolongaciones de los lados AC y AB.

Corolario. Si la transversal abc fuese paralela al lado BC, el punto a se alejaria al infinito, y la relacion $\frac{aC}{aB}$ seria igual á la unidad; luego la relacion [a] se convertiria en

$$\frac{bC}{bA}=\frac{cB}{cA},$$

lo que nos dice: *toda paralela á un lado de un triángulo divide los otros dos en partes proporcionales*, proposicion que implícitamente está comprendida en la del número 74. [1]

Teorema recíproco.

178. *Si dos lados de un triángulo se cortan por una transversal, de modo que las razones segmentarias de dichos lados sean proporcionales á los segmentos que un punto fijo determina en el tercer lado, la transversal pasa por dicho punto.*

Sean b y c los puntos en que la transversal curta á los lados AC y AB, y a el punto fijo en el tercer lado; tenemos por hipótesis

$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=\frac{aC}{aB},$$

Si suponemos que la transversal no pasa por a sinó por otro punto a' del lado BC, será en virtud del teorema directo

$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=\frac{a'C}{a'B}.$$

---

1 El teorema anterior lo enuncian otros autores del modo siguiente: *si los tres lados de un triángulo se cortan por una transversal* abc, *ésta determina seis segmentos tales que el producto de tres segmentos sin extremidad comun es igual al producto de los otros tres*. En efecto: de la igualdad (a) se deduce

$$aB.\,bC.\,cA=aC.\,bA.\,cB.$$

Nuestro enunciado ofrece la ventaja de patentizar la conexion entre esta propiedad y la enunciada en el corolario, que es un caso particular de la primera.

De las dos expresiones anteriores se deduce $\frac{aC}{aB}=\frac{a'C}{a'B}$, luego el punto a' no puede ser distinto del a [88], lo que demuestra el recíproco.

Corolario. Si la relacion

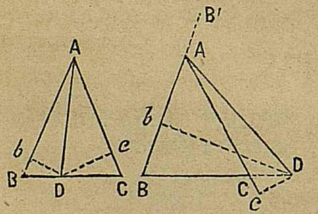
$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}$$

es igual á 1, es decir si los segmentos de AC y AB son proporcionales, será $aC = aB$, lo que exije que la transversal bc sea paralela al lado BC; luego *si una recta divide en partes proporcionales á dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado*, proposicion implícitamente comprendida en la del núm. 77. [1]

Teorema. (*Fig.* 125).

179. *Si desde el vértice* A *de un ángulo de un triángulo* ABC *se tira una recta* AD *que encuentre al lado opuesto, la razon entre los segmentos de éste y la de los lados que forman el ángulo, son proporcionales á las distancias del pié* D *de dicha recta á los mismos lados.*

Fig. 125.



Considerando las tres concurrentes en A cortadas por la transversal BDC, tenemos [92]

$$\frac{DB}{AB}:\frac{DC}{AC}=\frac{Db}{Dc},$$

ó sea $$\frac{DB}{DC}:\frac{AB}{AC}=\frac{Db}{Dc}\ [a],$$

lo que debia demostrarse.

180. Corolario. Si AD es bisectriz del ángulo BAC ó del suplemento B'AC será $Db = Dc$ [52, 1.º]; luego

$$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC},$$

1 El recíproco anterior suele enunciarse así: *Si en los tres lados de un triángulo considerados como indefinidos, se marcan tres puntos* a, b, c *tales que el producto de tres segmentos sin extremidad comun sea igual al producto de los otros tres, dichos puntos* a, b, c *están en línea recta.*

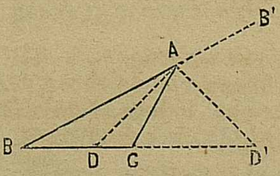
esto es: *La bisectriz de un ángulo interno ó externo de un triángulo divide al lado opuesto en dos segmentos aditivos ó sustractivos proporcionales á los lados del ángulo.*

Recíproco. *Si desde el vértice* A *de un ángulo de un triángulo se tira una recta* AD *que divida al lado opuesto en dos segmentos aditivos ó sustractivos proporcionales á los lados del ángulo, esta recta es bisectriz del ángulo interno ó del externo suplementario respectivamente.*

Si en la relacion [a] se supone $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, será $Db = Dc$, luego el punto D pertenece á la bisectriz del ángulo BAC en la primera figura y á la del externo B'AC en la segunda [53, 1.°].

181. Si en el triángulo ABC (*Fig.* 126) trazamos las bisectrices AD y AD' del ángulo BAC y del suplemento B'AC, tendremos, prescindiendo de signos,

Fig. 126.



$$\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} \quad [a],$$

pues las dos razones son iguales en valor absoluto á $\frac{AB}{AC}$.

Es evidente además que tienen signos contrarios [87].

Vemos, pues, que las distancias de los puntos D y D' á los extremos de BC son proporcionales. Siempre que esto se verifica se dice que los puntos D y D' *dividen armónicamente* el segmento BC, ó que son *conjugados armónicos* con respecto á BC.

La igualdad [a] puede escribirse en la forma

$$\frac{BD}{BD'} = \frac{CD}{CD'},$$

luego los puntos B y C tambien dividen armónicamente el segmento DD'. Los cuatro puntos B, C, D y D' se dice que están en *proporcion armónica.*

En el número 88 se ha visto el modo de hallar en un segmento AB dos puntos C y D, tales que las relaciones $\frac{CA}{CB}$ y $\frac{DA}{DB}$

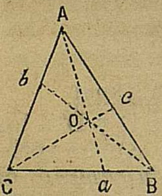
sean iguales en valor absoluto á una relacion dada $\frac{m}{n}$, quedando, por tanto, el segmento AB dividido armónicamente.

Las cuatro rectas que parten de A, AB, AC, AD y AD', se dice que forman un *haz armónico*, porque gozan la propiedad de que toda transversal que las corte queda dividida por ellas armónicamente, como se comprende con solo notar que las AB y AC formarán con la transversal un triángulo, y siempre AD y AD' serán bisectrices del ángulo BAC y del suplemento B'AC.

Teorema. (*Fig.* 127).

182. *Si desde un punto* O *tomado en el plano de un triángulo* ABC, *se tiran rectas á sus tres vértices, prolongadas hasta que encuentren á los lados opuestos, el cociente de las razones segmentarias de dos lados es igual y de signo contrario á la razon segmentaria del tercer lado.* [1]

Fig. 127.



Es decir que

$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=-\frac{aC}{aB} \qquad [a].$$

Considerando el triángulo ACa cortado por la transversal bB, y despues el ABa cortado por la transversal cC, tenemos [177]

$$\frac{bC}{bA}\cdot\frac{Oa}{OA}=\frac{BC}{Ba},\qquad \frac{cB}{cA}\cdot\frac{Oa}{OA}=\frac{CB}{Ca},$$

de donde, por division,

$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=\frac{BC.\ Ca}{Ba.\ CB};$$

pero $\frac{BC}{CB}=-1$, luego

$$\frac{bC}{bA}:\frac{cB}{cA}=-\frac{aC}{aB}.$$

1 Suele enunciarse este teorema de este modo: *Si desde un punto tomado en el plano de un triánguto se tiran rectas á sus tres vértices, éstas determinan en los lados opuestos seis segmentos tales, que el producto de tres de ellos, sin extremidad comun, es igual y de signo contrario al de los otros tres.* En efecto la igualdad (a) equivale á

$$aB.\ bC.\ cA=-aC.\ bA.\ cB.$$

Daríamos igual demostracion si O fuese exterior al triángulo.

Corolario. Si a es el punto medio de BC, la relacion

$$\frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}} \text{ vale } -1; \text{luego } \frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} : \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} = 1 \text{ ó } \frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} = \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}};$$

por consiguiente, *las rectas que partiendo de dos vértices de un triángulo se cruzan en la mediana tirada desde el tercero, dividen los lados opuestos en partes proporcionales.*

Teorema recíproco.

183. *Si desde los tres vértices de un triángulo se tiran rectas á los lados opuestos, de modo que el cociente de las razones segmentarias de dos lados sea igual y de signo contrario á la razon segmentaria del tercero, dichas rectas concurren en un mismo punto.*

Sean a, b, c los puntos en que las rectas que parten de los vértices A, B, C encuentran á los lados opuestos; tenemos por hipótesis

$$\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} : \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} = -\frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}};$$

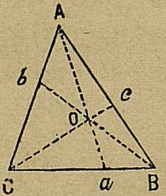
unamos el vértice A con el punto O de interseccion de las rectas Bb y Cc, y suponiendo que la recta de union encuentre al lado BC en un punto a' distinto del a, tendremos, por el teorema directo,

$$\frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}} : \frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}} = -\frac{a'\mathrm{C}}{a'\mathrm{B}};$$

de las dos igualdades anteriores se deduce $\frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}} = \frac{a'\mathrm{C}}{a'\mathrm{B}}$, luego el punto a' no puede ser distinto del a [88], y la recta Aa' que pasa por O se confunde con Aa, lo que demuestra el recíproco.

COROLARIOS. *(Fig. 127).*

Fig. 127.



1.° Si los puntos b y c dividen los lados AC y AB en partes proporcionales, ó lo que es igual, si la recta bc es paralela á BC, será $\frac{aC}{aB} = -1$, ó $aC = -aB$, de modo que a será el punto medio de BC; además, toda paralela al tercer lado BC queda dividida por la mediana Aa en partes proporcionales á aC y aB [79], es decir en partes iguales; luego

La mediana correspondiente á un lado de un triángulo es el lugar geométrico de los puntos medios de una série de paralelas á dicho lado, y de los puntos de interseccion de las rectas que unen los extremos de cada paralela con los vértices opuestos.

2.° Si a, b, c son los puntos medios de los lados del triángulo ABC, será

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{aC}{aB},$$

luego las rectas Aa, Bb, Cc concurrirán en un mismo punto, esto es,

Las tres medianas de un triángulo concurren en un mismo punto.

3.° Si a, b, c son los piés de las bisectrices de los ángulos A, B, C, tendremos

$$\frac{bC}{bA} = \frac{BC}{BA}, \qquad \frac{cB}{cA} = \frac{CB}{CA};$$

dividiendo ordenadamente, y teniendo en cuenta que $\frac{BC}{CB} = -1$ será

$$\frac{bC}{bA} : \frac{cB}{cA} = -\frac{CA}{BA} = -\frac{aC}{aB};$$

luego

Las tres bisectrices de los ángulos de un triángulo concurren en un mismo punto.

De igual modo se demuestra que

Las bisectrices de los suplementos de dos ángulos de un triángulo y la del tercero, concurren en un mismo punto.

4.° Si a, b, c son los piés de las perpendiculares á los lados bajadas desde A, B, C, considerando los triángulos BbA, CcA semejantes, por ser rectángulos y tener un ángulo comun A, tendremos

$$\frac{c\mathrm{A}}{b\mathrm{A}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BA}},$$

de igual modo se obtiene

$$\frac{a\mathrm{B}}{c\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{CB}}, \quad \frac{b\mathrm{C}}{a\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}};$$

multiplicando las tres resulta

$$\frac{c\mathrm{A}.\,a\mathrm{B}.\,b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}.\,c\mathrm{B}.\,a\mathrm{C}}=\frac{\mathrm{CA}.\,\mathrm{AB}.\,\mathrm{BC}}{\mathrm{BA}.\,\mathrm{CB}.\,\mathrm{AC}};$$

el valor absoluto del segundo miembro es 1, las razones segmentarias de los lados son todas negativas, ó dos positivas y una negativa si el triángulo es obtusángulo [40], luego

$$\frac{c\mathrm{A}.\,a\mathrm{B}.\,b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}.\,c\mathrm{B}.\,a\mathrm{C}}=-1 \quad \text{ó} \quad \frac{b\mathrm{C}}{b\mathrm{A}}:\frac{c\mathrm{B}}{c\mathrm{A}}=-\frac{a\mathrm{C}}{a\mathrm{B}},$$

por consiguiente

Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

5.° *Las tres perpendiculares á los lados de un triángulo en sus puntos medios concurren en un mismo punto.*

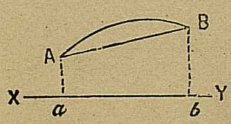
Es fácil referir este corolario al anterior observando que las perpendiculares mencionadas son alturas del triángulo que se forma uniendo por líneas rectas los tres puntos medios. Además, implícitamente se ha demostrado ya esta proposicion, toda vez que las perpendiculares tienen que pasar por el centro de la circunferencia que determinan los tres vértices A, B, C.

IV.—Relaciones métricas entre los lados del triángulo.

184. Proyeccion *de un punto sobre una recta es el pié de la perpendicular trazada desde el punto á la recta.*

Proyeccion *de una línea recta ó curva* AB (Fig. 128) *sobre una recta* XY *es la parte de ésta comprendida entre las proyecciones* a, b *de los extremos de la primera.*

Fig. 128.

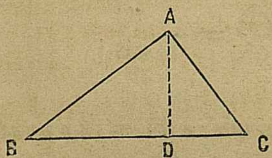


Es evidente que la proyeccion de la hipotenusa sobre uno de los catetos es este cateto.

Teorema. *(Fig. 129).*

185. *Si desde el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se baja una perpendicular á la hipotenusa:* 1.° *la perpendicular es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa;* 2.° *cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y su proyeccion sobre ésta;* 3.° *los cuadrados de los catetos son proporcionales á sus proyecciones sobre la hipotenusa.*

Fig. 129.



1.° Los triángulos ABD y ACD son semejantes, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, luego

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

2.° Los triángulos rectángulos ABD y ABC son semejantes, por tener comun el ángulo B, luego

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \qquad [a].$$

Tambien son semejantes los triángulos ACD y ABC; luego

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CD} \qquad [b].$$

3.° De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$AB^2 = BC \times BD$$

$$AC^2 = BC \times CD;$$

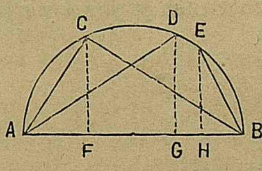
dividiendo éstas ordenadamente, y suprimiendo en la segunda de las fracciones que resulten el factor comun BC, será

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD}{CD}.$$

Corolarios. (*Fig.* 130).

1.° *La perpendicular* CF *bajada desde un punto* C *de una circunferencia á un diámetro* AB, *es media proporcional entre los segmentos del diámetro.*

Fig. 130.



Uniendo el punto C con los extremos del diámetro, el ángulo inscripto ACB será recto, y el triángulo ABC rectángulo en C; luego segun el teorema anterior, CF será media proporcional entre AF y BF.

2.° *Si desde un extremo* A *de un diámetro* AB *se traza una cuerda* AC, *esta cuerda es media proporcional entre el diámetro y su proyeccion sobre éste.*

Uniendo C con B se forma el triángulo rectángulo ACB, luego el corolario es cierto.

3.° *Los cuadrados de las cuerdas* AC, AD, BE, *trazadas desde los extremos de un diámetro, son proporcionales á sus proyecciones sobre éste.*

Tenemos, en virtud del ~~corolario~~ anterior,

$$AC^2 = AB \times AF,\ AD^2 = AB \times AG,\ BE^2 = AB \times BH,$$

de donde $\dfrac{AC^2}{AF} = AB,\ \dfrac{AD^2}{AG} = AB,\ \dfrac{BE^2}{BH} = AB;$

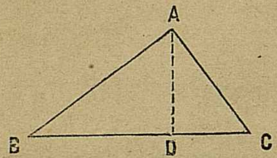
luego $\dfrac{AC^2}{AF} = \dfrac{AD^2}{AG} = \dfrac{BE^2}{BH}.$

TEOREMA DE PITÁGORAS. (*Fig.* 131).

186. *En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa* BC *es igual a la suma de los cuadrados de los catetos* AB y AC.

En el teorema anterior, 3.°, hemos hallado las igualdades

FIG. 131.



$$BC \times BD = AB^2,$$

$$BC \times CD = AC^2;$$

sumándolas ordenadamente y separando el factor comun BC, será

$$BC\,(BD + CD) = AB^2 + AC^2,$$

pero $BD + CD = BC$, luego

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

ESCOLIO. Representando por a la hipotenusa y por b y c los catetos de un triángulo rectángulo, será

$$a^2 = b^2 + c^2;$$

de esta igualdad se deducen estas otras

$$b^2 = a^2 - c^2 \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2;$$

luego *el cuadrado de un cateto es igual al cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto.*

Por medio del teorema de Pitágoras se puede calcular la longitud de un lado cualquiera de un triángulo rectángulo cuando se conocen los otros dos lados. Si, por ejemplo, se conocen los catetos b y c, será

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

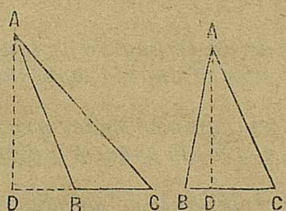
Si los lados conocidos son la hipotenusa a y el cateto c tendremos

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 132).

187. *En todo triángulo* ABC, *el cuadrado de un lado* AB *opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados* AC *y* BC, *ménos el duplo del producto de uno de éstos* BC *por la proyeccion* CD *del otro sobre él.*

FIG. 132.



La perpendicular AD, trazada con objeto de hallar la proyeccion del lado AC sobre el BC, caerá en la prolongacion de BC (*Fig.* 1.ª) si el ángulo ABC es obtuso, y en el lado BC (*Fig.* 2.ª) si dicho ángulo es agudo.

En ambas figuras tenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \quad [a].$$

Ahora, $AD^2 = AC^2 - CD^2$;

en cuanto á BD^2 es en la primera figura el cuadrado de la diferencia CD — BC, y en la segunda el cuadrado de la diferencia BC — CD de signo contrario á la anterior; luego en las dos figuras será

$$BD^2 = BC^2 - 2BC.\ CD + CD^2\ ;$$

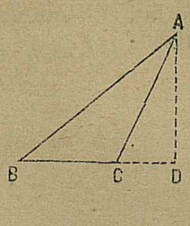
sustituyendo en la igualdad [*a*] AD^2 y BD^2 por los valores que hemos encontrado y reduciendo, tendremos

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.\ CD.$$

TEOREMA. (*Fig.* 133).

188. *En todo triángulo obtusángulo* ABC, *el cuadrado del lado* AB *opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados* AC *y* BC, *más el duplo del producto de uno de éstos* BC *por la proyeccion* CD *del otro sobre él.*

FIG. 133.



En el triángulo rectángulo ABD tenemos

$$AB^2 = AD^2 + BD^2.$$

Ahora $AD^2 = AC^2 - CD^2$

y $$BD^2 = (BC + CD)^2 = BC^2 + 2BC.CD + CD^2;$$

sustituyendo en la primera igualdad AD^2 y BD^2 por los valores que acabamos de hallar y reduciendo, será

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD.$$

Recíprocos.

189. 1.º *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es recto.*

2.º *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es agudo.*

3.º *Si el cuadrado de un lado de un triángulo es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto á dicho lado es obtuso* [55].

Ejemplos.

1.º Sean 6, 8 y 10 metros las longitudes de los lados de un triángulo; tenemos $10^2 = 6^2 + 8^2$, luego el triángulo es rectángulo.

Todos los números de la forma $3n$, $4n$, $5n$, pueden ser catetos é hipotenusa de un triángulo rectángulo, pues

$$(3n)^2 + (4n)^2 = (3^2 + 4^2)\, n^2 = 25\, n^2 = (5n)^2.$$

2.º Si los lados son 5^m, 7^m y 8^m se tiene $8^2 < 5^2 + 7^2$, luego el ángulo opuesto al lado 8^m es agudo, y como es mayor que los demás el triángulo es acutángulo.

3.º Sean 4^m, 5^m, 7^m las longitudes de los lados; tenemos $7^2 > 4^2 + 5^2$, luego el triángulo es obtusángulo.

CAPÍTULO SEGUNDO.

CUADRILÁTEROS.

190. *Se llama* TRAPEZOIDE *un cuadrilátero que no tiene dos lados paralelos.*

Se llama TRAPECIO *un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y los otros dos no paralelos.*

Los lados paralelos se llaman *bases* del trapecio, y *altura* la distancia entre las bases.

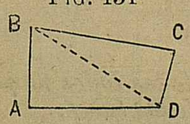
Se llama PARALELÓGRAMO *un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos paralelos dos á dos.*

I.—Cuadrilátero en general.

TEOREMA. *(Fig. 134).*

191. *La suma de los cuatro ángulos de un cuadrilátero convexo es igual á cuatro ángulos rectos.*

FIG. 134



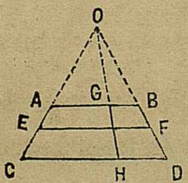
Trazando la diagonal BD resultan dos triángulos ABD y CBD, cuyos seis ángulos equivalen á los cuatro del cuadrilátero; pero los tres ángulos de ABD valen dos rectos y los de CBD otros dos; luego la suma de todos es igual á cuatro ángulos rectos.

II.—Trapecio.

TEOREMA. (*Fig.* 135).

192. 1.° *Toda recta* EF *que divide en partes proporcionales á los lados no paralelos de un trapecio* ABCD *es paralela á las bases.* 2.° *Toda recta que divide en partes proporcionales á las bases, pasa por el punto de concurso* O *de los lados no paralelos.*

FIG. 135.



1.° Este teorema está comprendido en el del número 76, toda vez que AB y CD son paralelas, y EF divide en partes proporcionales á las transversales AC y BD.

2.° Este teorema está comprendido en el del número 80, puesto que siendo, segun la hipótesis,

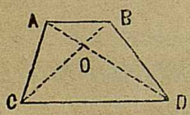
$$\frac{GA}{GB}=\frac{HC}{HD},$$

las rectas AC, GH y BD deben concurrir en un mismo punto O.

TEOREMA. (*Fig.* 136).

193. *Las diagonales de un trapecio se dividen mutuamente en partes proporcionales á las bases.*

FIG. 136.



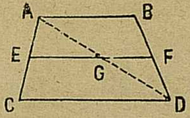
Siendo AB y CD paralelas tenemos [78]

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=\frac{AB}{CD}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 137).

194. *La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual á la semisuma de las bases.*

Fig. 137.



En efecto: EF es paralela á las bases [192, 1.°]; luego

$$\frac{EG}{CD} = \frac{AE}{AC},$$

y como AE es la mitad de AC, por hipótesis, será $EG = \frac{CD}{2}$; del mismo modo se demuestra que $GF = \frac{AB}{2}$; luego $EG + GF$ ó $EF = \frac{AB+CD}{2}$.

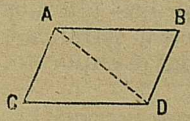
III.—Paralelógramo.

Teorema. (*Fig.* 138).

195. *En todo paralelógramo: 1.° los lados opuestos son iguales; 2.° los ángulos opuestos son iguales.*

4

Fig. 138.



1.° Los lados opuestos son rectas paralelas comprendidas entre paralelas; luego [68]

$$AB = CD\ ,\quad AC = BD.$$

2.° Los ángulos opuestos tienen sus lados paralelos y en direccion contraria; luego [66]

áng. CAB = *áng.* BDC, *áng.* B = *áng.* C.

Teorema recíproco.

5

196. *Si los lados ó los angulos opuestos de un cuadrilátero son iguales dos á dos, el cuadrilátero será paralelógramo.*

1.° Trazando una diagonal AD resultan dos triángulos ABD y ACD iguales, por tener un lado comun AD, AB = CD, BD = AC por hipótesis; de la igualdad de los triángulos se deduce la de los ángulos alternos BAD y ADC, luego AB y CD son paralelas, y la de los ángulos CAD y ADB, luego tambien AC y BD son paralelas.

2.º Llamando A, B, C, D á los ángulos del cuadrilátero, tenemos [191]

$$A + B + C + D = 4 \text{ rectos},$$

pero $A = D$, $B = C$, luego $A + D = 2A$, $B + C = 2B$, y por consiguiente

$$2A + 2B = 4 \text{ rectos}, \quad A + B = 2 \text{ rectos};$$

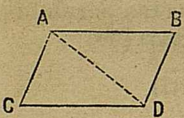
segun esto, los ángulos internos A y B del mismo lado de la secante AB son suplementarios, luego AC y BD son paralelas.

Siendo $A + B = 2$ *rectos*, será tambien $A + C = 2$ *rectos*, porque $B = C$; luego AB y CD son paralelas.

TEOREMA. (*Fig.* 138).

197. *Si dos lados opuestos* AB *y* CD *de un cuadrilátero son iguales y paralelos, el cuadrilátero será paralelógramo.*

FIG. 138.

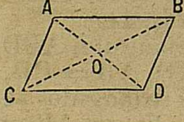


Trazo la diagonal AD; los triángulos ABD y ACD son iguales, por tener un lado comun AD, $AB = CD$ por hipótesis, y los ángulos BAD y ADC iguales, como alternos entre las paralelas AB y CD; de la igualdad de los triángulos se deduce la de los ángulos alternos CAD y ADB, luego AC y BD son paralelas, y siéndolo tambien AB y CD por el supuesto, la figura ABCD es un paralelógramo.

TEOREMA. (*Fig.* 139).

198. *Las diagonales de un paralelógramo se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

FIG. 139.



Los triángulos AOB y COD son iguales, porque tienen $AB = CD$, y los ángulos adyacentes al lado AB iguales respectivamente á los adyacentes á CD, por alternos internos; luego

$$OA = OD, \quad OB = OC. \text{ [1]}$$

1 Este teorema es un caso particular del tratado en el número 193, del que se deduce suponiendo $AB = CD$.

Teorema recíproco.

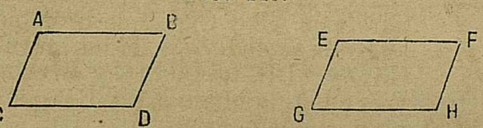
199. *Si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en dos partes iguales, el cuadrilátero será paralelógramo.*

Tenemos por hipótesis OA = OD, OB = OC; además los ángulos AOB y COD son iguales, como opuestos por el vértice; luego los triángulos AOB y COD son iguales. De aquí se deduce AB = CD y *áng.* OAB = *áng.* ODC; luego las rectas iguales AB y CD serán tambien paralelas [64, 1.°]; y el cuadrilátero será un paralelógramo [197].

Teorema. (*Fig.* 140).

200. *Dos paralelógramos son iguales cuando tienen un ángulo igual C = G formado por lados respectivamente iguales AC = EG, CD = GH.*

Fig. 140.



Coloco el segundo paralelógramo sobre el primero, de modo que GH se confunda con CD; es claro que GE seguirá la direccion CA y que el punto E caerá en A; entonces EF será paralela á CD por el punto A, luego coincidirá con AB [59], y HF será paralela á AC por D y coincidirá con DB; por consiguiente el vértice F caerá en B, y serán iguales los paralelógramos.

201. *Romboide* es un paralelógramo tal que dos lados consecutivos son desiguales, como tambien los ángulos adyacentes á un mismo lado.

Rombo es un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales.

Rectángulo es un paralelógramo cuyos cuatro ángulos son rectos.

Cuadrado es un paralelógramo cuyos cuatro lados son iguales y los cuatro ángulos rectos.

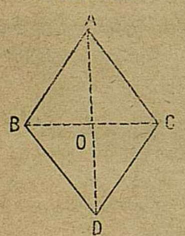
El romboide, rombo, rectángulo y cuadrado gozan de todas las propiedades anteriormente demostradas para el paralelógramo en general.

El cuadrado es rombo, por tener iguales los lados, y rectángulo por tener rectos los ángulos; no obstante esto, la denominacion de rombo se aplica más especialmente al paralelógramo de lados iguales y de *ángulos adyacentes á cada lado desiguales*, y la de rectángulo al paralelógramo de ángulos rectos y *lados consecutivos desiguales*.

Teorema. (*Fig.* 141).

202. *Las diagonales del rombo son:* 1.° *perpendiculares entre sí;* 2.° *bisectrices de los ángulos del rombo.*

Fig. 141.



1.° Como los lados del rombo son iguales, el punto A equidista de B y C, y el punto D está en igual caso, luego AD es perpendicular á BC.

2.° En el triángulo isósceles ABC, la perpendicular AO á la base BC es bisectriz del ángulo BAC en el vértice; lo mismo puede decirse de los otros ángulos.

Teorema recíproco.

203. *Si las diagonales de un paralelógramo son perpendiculares entre sí ó bisectrices de los ángulos del paralelógramo, éste será rombo.*

1.° AD es perpendicular á BC, segun la hipótesis, y pasa por el punto medio de BC [198], luego AB = AC; además AB = CD, AC = BD; por consiguiente los cuatro lados del paralelógramo ABCD son iguales.

2.° Los triángulos ABD y ACD son iguales, porque tienen un lado comun AD y los ángulos BAO, BDO respectivamente iguales á CAO, CDO en virtud de la hipótesis; luego AB=AC, y como AB = CD, AC = BD, los cuatro lados son iguales, luego el paralelógramo ABCD es rombo.

TEOREMA. (*Fig.* 142).

10 204. *Las diagonales del rectángulo son iguales.*

FIG. 142.

Los triángulos rectángulos ACD y BDC son iguales, porque tienen un cateto comun CD, y los AC y BD iguales como lados opuestos de un paralelógramo: luego AD = BC.

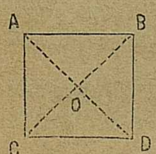
TEOREMA RECÍPROCO.

205. *Si las diagonales de un paralelógramo son iguales, el paralelógramo es rectángulo.*

Los triángulos ACD y BDC son iguales, porque tienen un lado comun CD, los AC y BD iguales como opuestos, y los AD y BC iguales por hipótesis; luego los ángulos ACD y BDC son iguales, y como la suma de ellos vale dos rectos [63, 2.º], cada uno valdrá un recto; el mismo valor tienen ABD y CAB opuestos y por tanto iguales á los anteriores; luego ABCD es un rectángulo.

11 206. Puesto que el cuadrado es paralelógramo, rectángulo y rombo, reune las propiedades de estas figuras; diremos, pues,

FIG. 143.



Las diagonales de un cuadrado (Fig. 143) *se dividen mutuamente en dos partes iguales, son iguales, perpendiculares entre sí y bisectrices de los ángulos del cuadrado.*

Recíprocamente, *si las diagonales de un cuadrilátero se dividen mutuamente en dos partes iguales, son iguales y perpendiculares entre sí, el cuadrilátero es cuadrado.*

CAPÍTULO TERCERO.

POLÍGONOS GENERALES.

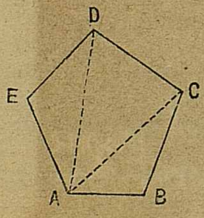
I.—Polígono en sí mismo.

TEOREMA. (*Fig.* 144).

12

207. *La suma de los ángulos de un polígono convexo es igual á tantas veces dos ángulos rectos como lados, menos dos, tiene el polígono.*

FIG. 144.



Desde uno de los vértices A del polígono trazo las diagonales posibles AC, AD etc , las que dividen el polígono en tantos triángulos como lados tiene menos dos; porque los *dos* triángulos extremos contienen *cuatro* lados del polígono, y cada uno de los demás contiene un lado,

Los ángulos de los triángulos equivalen á los del polígono, puesto que las diagonales son interiores [160], y como los de cada triángulo valen dos rectos, los del polígono valdrán tantas veces dos rectos como triángulos haya, esto es, tantas veces dos rectos como lados, menos dos, tiene el polígono.

ESCOLIO. Representando por S la suma de los ángulos del polígono, por n el número de lados y por R el ángulo recto, tendremos

$$S = 2R(n-2) \text{ ó } S = 2Rn - 4R.$$

La última igualdad nos dice:

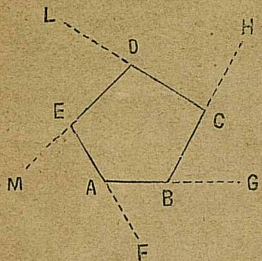
La suma de los ángulos de un polígono es igual á tantas veces dos rectos como lados tiene, ménos cuatro rectos.

TEOREMA. (*Fig.* 145).

208. *La suma de los ángulos externos* CBG, DCH, EDL etc.,

que se forman prolongando todos los lados de un polígono en el mismo sentido, es igual á cuatro ángulos rectos.

Fig. 145.



En un vértice cualquiera B del polígono tenemos dos ángulos adyacentes, uno externo CBG y otro interno ABC, que juntos valen dos rectos; por consiguiente la suma de todos los ángulos, tanto internos como externos, será $2Rn$; si restamos de ella el valor de los internos, que es $2Rn - 4R$, la diferencia

$$2Rn - (2Rn - 4R) = 4R$$

será el valor de los externos.

Corolario. *Un polígono convexo no puede tener más de tres ángulos agudos.*

Pues si tuviese cuatro ó más, los externos adyacentes, que serian obtusos, valdrian más de cuatro rectos.

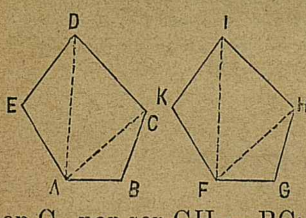
II.—Comparacion de polígonos.

Igualdad y semejanza.

Teorema. (*Fig.* 146).

209. *Dos polígonos son iguales cuando tienen sus lados y sus ángulos respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Fig. 146.



Esto es: $AB = FG$, $BC = GH$ etc., $ABC = FGH$, $BCD = GHI$ etc.

Coloco el segundo polígono sobre el primero, de modo que el lado FG coincida con su igual AB, y que los polígonos queden situados al mismo lado de la recta AB: el lado GH seguirá la direccion BC, por ser iguales los ángulos B y G, y el vértice H caerá en C, por ser $GH = BC$; tambien HI seguirá la direccion CD y el punto I caerá en D, y así sucesivamente; luego los polígonos son iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 146).

210. *Dos polígonos son iguales cuando están compuestos del mismo número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Los lados de los polígonos son respectivamente iguales, por pertenecer á triángulos iguales; los ángulos B y E son iguales á G y K por la misma razon; en cuanto á los ángulos A, C y D son tambien iguales á F, H é I, por componerse de igual número de ángulos iguales; luego los polígonos tienen lados y ángulos iguales, por consiguiente son iguales.

FIG. 146.

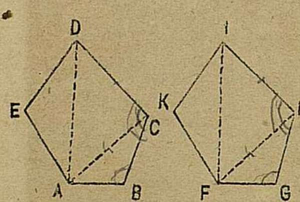
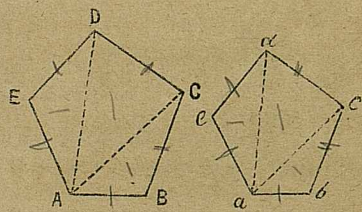


FIG 147.



TEOREMA RECÍPROCO.

211. *Dos polígonos iguales pueden descomponerse en igual número de triángulos iguales é igualmente dispuestos.*

Trazando desde los vértices A y F todas las diagonales posibles, quedan descompuestos los polígonos en igual número de triángulos; los triángulos extremos ABC y FGH son iguales por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, y por la misma razon son iguales los AED y FKI; de la igualdad de los triángulos ABC y FGH se desprende AC = FH, *áng.* ACB = *áng.* FHG; además *áng.* BCD = *áng.* GHI, luego *áng.* ACD = *áng.* FHI; por consiguiente los triángulos ACD y FHI tienen dos lados iguales DC = IH, AC = FH, é igual el ángulo comprendido, luego son iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 147).

212. *Dos polígonos* ABCDE, abcde *compuestos de igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

Suponemos semejantes los triángulos ABC y *abc*, ACD y *acd*, ADE y *ade*, y queremos demostrar la semejanza de los polígonos propuestos.

Desde luego sabemos que los ángulos B y *b* son iguales por pertenecer á los triángulos semejantes ABC y *abc*; por análoga razon son tambien iguales los ángulos E y *e*; además el ángulo BCD se compone de BCA y ACD, los que son iguales respectivamente á *bca* y *acd*, cuya suma es *bcd*: luego BCD = *bcd*. Del mismo modo se demuestra la igualdad de los ángulos restantes.

Siendo los triángulos ABC, ACD, ADE respectivamente semejantes á *abc*, *acd*, *ade*, tendremos

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{AC}{ac}, \quad \frac{AC}{ac}=\frac{CD}{cd}=\frac{AD}{ad}, \quad \frac{AD}{ad}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea};$$

observando que las séries primera y segunda tienen la razon comun $\frac{AC}{ac}$, y la segunda y tercera la $\frac{AD}{ad}$, deduciremos esta otra

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de}=\frac{EA}{ea},$$

luego los lados homólogos son proporcionales, y como se ha demostrado que los ángulos son iguales, los polígonos propuestos son semejantes.

Teorema recíproco.

Dos polígonos semejantes ABCDE *y* abcde *pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos.*

Desde los vértices homólogos A y *a* trazo las diagonales AC, AD, *ac* y *ad*, y digo que los triángulos ABC, ACD, ADE son respectivamente semejantes á *abc*, *acd*, *ade*.

Siendo los polígonos propuestos semejantes, tenemos

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}, \quad B=b,$$

luego los triángulos ABC y *abc* son semejantes [172, 2.°].

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los otros triángulos extremos AED y *aed*.

Además, por hipótesis tenemos

$$\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}, \qquad BCD = bcd,$$

y la semejanza, ya demostrada, de los triángulos ABC y *abc* nos dá

$$\frac{BC}{bc} = \frac{AC}{ac}, \qquad ACB = acb;$$

de las igualdades fraccionarias se deduce evidentemente

$$\frac{CD}{cd} = \frac{AC}{ac},$$

y restando las igualdades de los ángulos se obtiene

$$ACD = acd;$$

luego [172, 2.º] tambien son semejantes los triángulos intermedios ACD y *acd*.

213. *Dos polígonos semejantes, cuya razon de semejanza es la unidad, son iguales.*

Los polígonos semejantes tienen ángulos iguales y lados proporcionales; pero si la razon de dos lados homólogos es la unidad, estos lados son iguales; luego los polígonos tendrán respectivamente iguales todos sus ángulos y lados; por consiguiente serán iguales [209].

214. *Dos polígonos* A *y* B *semejantes á un tercero* C, *son semejantes entre sí.*

Los ángulos del A y del B son respectivamente iguales á los del C; luego los ángulos del A serán iguales á los del B. Llamemos $a, b, c....,\ a', b', c'....,\ a'', b'', c''....$ á los lados de los tres polígonos, y en virtud de la hipótesis será

$$\frac{a}{a''} = \frac{b}{b''} = \frac{c}{c''} = ..., \qquad \frac{a''}{a'} = \frac{b''}{b'} = \frac{c''}{c'} = ...;$$

de donde, multiplicando ordenadamente y simplificando,

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\ldots;$$

luego los polígonos A y B tienen sus lados proporcionales. Como antes hemos demostrado que los ángulos son respectivamente iguales, los polígonos A y B serán semejantes.

TEOREMA. (*Fig.* 147).

215. *Los perímetros de dos polígonos semejantes* ABCDE *y* abcde, *son proporcionales á sus lados homólogos.*

Tenemos por hipótesis

$$\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\ldots;$$

luego [*Arit.* 200]

$$\frac{AB+BC+CD+\ldots}{ab+bc+cd+\ldots}=\frac{AB}{ab}=\frac{BC}{bc}=\ldots,$$

y como las sumas $AB+BC+CD+\ldots$, $ab+bc+cd+\ldots$ son los perímetros de los polígonos propuestos, el teorema queda demostrado.

III.—Polígonos en el círculo.

Inscriptos, circunscritos, regulares.

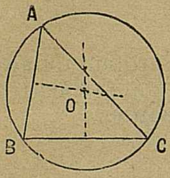
Un polígono está *inscripto* en un círculo cuando todos sus vértices están en la circunferencia; entonces el círculo está *circunscrito* al polígono.

Un polígono está *circunscrito* á un círculo cuando todos sus lados son tangentes á la circunferencia; en tal caso, el círculo está *inscripto* en el polígono.

TEOREMA.

216. *Todo triángulo puede inscribirse y circunscribirse á un círculo.*

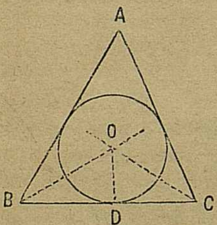
Fig. 148.



1.° Sea el triángulo ABC (*Fig.* 148). Las perpendiculares á los lados AB y BC en sus puntos medios se cortan en un punto O equidistante de A, B y C [95]; este punto O es el centro, y su distancia á un vértice el radio del círculo al cual queda inscripto el triángulo.

Otra perpendicular al tercer lado AC en su punto medio pasará por O [49, 1.°]; luego *las tres perpendiculares á los lados de un triángulo en sus puntos medios concurren en un mismo punto*, lo que ya sabíamos. [183, 5.°]

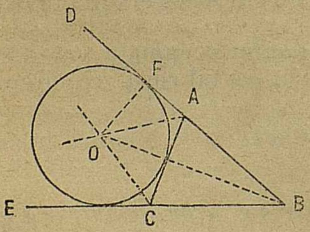
Fig 149.



2.° Las bisectrices de dos ángulos B y C del triángulo (*Fig.* 149) se cortan en un punto O, porque forman con el lado BC dos ángulos cuya suma es menor que dos rectos. El punto O equidista de los lados AB y BC, por pertenecer á la bisectriz BO, y de los BC y AC, por pertenecer á la CO: luego O equidista de los tres lados del triángulo; describiendo desde O como centro una circunferencia, con un radio igual á la distancia OD del punto O á cualquiera de los lados, quedará el triángulo circunscrito: porque cada lado, BC por ejemplo, es tangente á la circunferencia, por ser perpendicular á un radio OD en su extremo.

La bisectriz del tercer ángulo A tiene que pasar por O, porque este punto es interior al ángulo y equidista de sus lados [53, 1.°]; luego *las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un mismo punto*, lo que ya sabíamos [183, 3.°]

Fig. 150.



217. Escolio. (*Fig.* 150). Prolongando dos lados BA y BC de un triángulo ABC, las bisectrices de los ángulos externos DAC y ECA se cortan en un punto O que equidista de las tres rectas AD, AC y CE [52, 1.°]; luego si haciendo centro en O y con un radio igual á la distancia OF de este punto á cualquiera de aquellas tres rectas describimos una circunferencia, será tangente al lado AC y á las prolon-

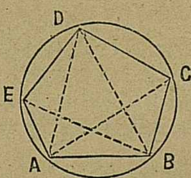
gaciones AD y CE de los otros dos. Esta clase de circunferencias se llaman *ex-inscriptas* al triángulo ABC, y es claro que pueden describirse tres.

La bisectriz del ángulo B pasa por O, porque este punto equidista de los lados del ángulo; luego *las bisectrices de los suplementos de dos ángulos de un triángulo y la del tercero concurren en un mismo punto* [183, 3.º].

TEOREMA. (*Fig.* 151).

218. *Para que un polígono convexo de cualquier número de lados pueda inscribirse en un círculo, se necesita y basta que uno de sus lados se vea bajo el mismo ángulo desde todos los vértices no adyacentes á dicho lado.*

FIG. 151.



Suponiendo que el lado AB se vea bajo un mismo ángulo desde los vértices C, D, E, es decir que ACB, ADB, AEB sean ángulos iguales, si sobre AB se describe un arco capaz del ángulo ACB, los vértices C, D, E, que caen todos hácia un mismo lado de AB, estarán en dicho arco [123, 2.º], y el polígono resultará inscripto en la circunferencia; luego la condicion enunciada es suficiente.

Tambien es necesaria, porque si suponemos el polígono inscripto en una circunferencia, los ángulos ACB, ADB y AEB estarán inscriptos en el mismo arco, por lo que serán iguales.

ESCOLIO. Si un lado de un polígono se ve bajo el mismo ángulo desde todos los vértices no adyacentes, los demás lados gozarán de igual propiedad, porque el polígono se podrá inscribir en un círculo.

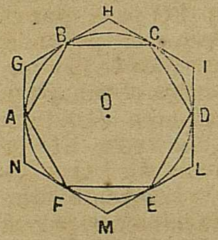
219. *Se llama polígono* REGULAR *el que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos iguales.*

El triángulo equilátero y el cuadrado son ejemplos de polígonos regulares.

TEOREMA. (*Fig.* 152).

220. *Si se divide una circunferencia en tres ó más arcos iguales* AB = BC = CD *etc.: 1.º las cuerdas de dichos arcos forman un polígono regular inscripto; 2.º las tangentes á la circunferencia trazadas por los puntos de division, forman un polígono regular circunscrito.*

FIG. 152.



1.º Siendo iguales los arcos AB, BC, CD etc. en que se supone dividida la circunferencia, tambien lo serán las cuerdas, luego el polígono inscripto ABCDEF tiene sus lados iguales. Además es fácil ver que los ángulos inscriptos ABC, BCD, CDE etc. abrazan arcos iguales entre sus lados y tienen, por consiguiente, igual medida, luego el polígono tiene tambien sus ángulos iguales, y es regular.

2.º Los triángulos ABG, BCH, CDI etc. son iguales, por tener un lado igual AB = BC = CD... adyacente á dos ángulos respectivamente iguales, luego los ángulos G, H, I etc. del polígono circunscrito GHILMN son iguales; además, dichos triángulos son isósceles: el ABG, por ejemplo, tiene *áng.* GAB = *áng.* GBA, porque estos ángulos tienen por medida la mitad del mismo arco AB, luego los lados opuestos GA y GB son iguales.

Siendo los mencionados triángulos iguales é isósceles, es claro que las líneas

BG, BH, CH, CI, DI, DL....

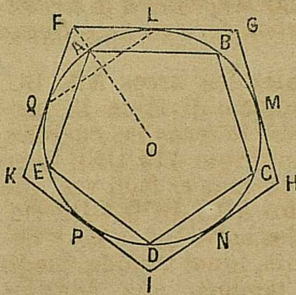
son iguales, por consiguiente tambien lo serán las GH, HI, IL... compuesta cada una de dos de las primeras; luego el polígono circunscrito GHILMN tiene sus lados iguales, y como ya se ha demostrado que los ángulos tambien son iguales, el polígono es regular.

TEOREMA. (*Fig.* 153).

221. *Dado un polígono regular inscripto* ABCDE, *si por los puntos medios* L, M, N.... *de los arcos que subtienden sus lados*

se trazan tangentes á la circunferencia: 1.° *resulta un polígono regular circunscrito de igual número de lados;* 2.° *cada dos vértices correspondientes de ambos polígonos y el centro están en línea recta.*

Fig. 153.



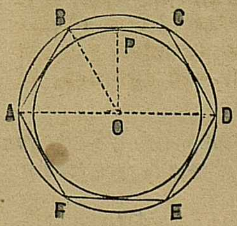
1.° Los puntos medios L, M, N... de los arcos AB, BC, CD... dividen evidentemente la circunferencia en partes iguales, luego el polígono FGHIK formado por las tangentes en dichos puntos es regular [220,2.°].

2.° Unamos F con O y demostremos que la recta FO pasa por el vértice A. En efecto, el punto F equidista de los extremos de la cuerda LQ, por ser isósceles el triángulo FLQ, y como O tambien equidista de dichos puntos, la recta FO es perpendicular á la cuerda LQ y divide á ésta y al arco LAQ que subtiende en dos partes iguales, luego pasa necesariamente por el punto medio A de dicho arco, lo que demuestra que los puntos F, A y O están en línea recta.

Teorema. *(Fig. 154).*

222. *Todo polígono regular* ABCDEF *puede inscribirse y circunscribirse á un círculo.*

Fig. 154.



Por tres vértices consecutivos A, B, C del polígono dado hago pasar una circunferencia, y digo que pasará tambien por el cuarto vértice D. Para demostrarlo trazo la OP perpendicular al lado BC, al que dividirá en dos partes iguales, é imagino doblada la figura por OP: la recta PB seguirá la direccion PC, por ser rectos los ángulos en P, y el punto B caerá en C, puesto que PB = PC; el lado BA seguirá la direccion CD, por ser iguales los ángulos B y C, y el punto A caerá en D, porque BA = CD; segun esto, las rectas OA y OD tendrán los extremos comunes y por tanto serán iguales; luego la circunferencia que pase por los puntos A, B y C pasa tambien por D. Repitiendo el mismo razonamiento probaríamos que la circunferencia pasa por E y F; por consiguiente el polígono dado puede inscribirse en un círculo.

Demostremos, ahora, que puede circunscribirse. Siendo iguales las cuerdas AB, BC, CD etc. equidistan del centro O, luego la circunferencia descrita desde O como centro y con un radio igual á la distancia comun OP será tangente á los lados del polígono dado, y por consiguiente quedará éste circunscrito al círculo.

223. El centro O, comun á los círculos inscripto y circunscrito, se llama *centro* del polígono regular, el radio OA del círculo circunscrito se llama *radio* del polígono, y el radio OP del círculo inscripto se llama *apotema*.

Ángulo *en el centro* de un polígono regular es el formado por dos radios tirados á los extremos de un mismo lado, por ejemplo AOB. Es evidente que los ángulos en el centro de un polígono regular son iguales, porque interceptan arcos iguales, y como la suma de ellos vale cuatro rectos, cada uno será igual á $\frac{4R}{n}$, llamando n al número de lados del polígono.

Siendo $2Rn - 4R$ la suma de los ángulos de un polígono, si éste es regular valdrá cada ángulo

$$\frac{2Rn-4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n},$$

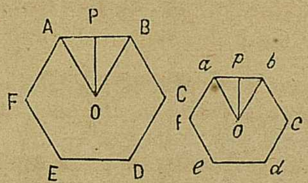
lo que indica que *el ángulo en el centro y el ángulo del polígono son suplementarios*.

Teorema. (*Fig.* 155).

224. *Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes, y sus perímetros son proporcionales á los radios y á las apotemas.*

Un ángulo de un polígono regular vale $2R - \frac{4R}{n}$, y como segun la hipótesis, n es igual para los dos polígonos, los ángulos de estos son respectivamente iguales.

Fig. 155.



Además, las relaciones entre los lados homólogos

$$\frac{AB}{ab}, \frac{BC}{bc}, \frac{CD}{cd} \cdots$$

son idénticas, luego los polígonos son semejantes.

Llamando P y p á los perímetros, tendremos

$$\frac{P}{p} = \frac{AB}{ab} \qquad [a];$$

pero los triángulos AOB y aob son semejantes, por tener un ángulo igual $O = o$ formado por lados proporcionales, luego [176]

$$\frac{AB}{ab} = \frac{OA}{oa} = \frac{OP}{op}.$$

De esta série y de la igualdad [a] se deduce

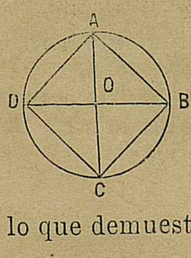
$$\frac{P}{p} = \frac{OA}{oa} = \frac{OP}{op},$$

lo que demuestra la segunda parte del teorema.

Teorema. (*Fig.* 156).

225. *El lado de un cuadrado inscripto en un círculo es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de 2.*

Fig. 156.



Trazando los diámetros DB, AC perpendiculares entre sí, y uniendo los extremos por medio de cuerdas, resultará un cuadrado inscripto, puesto que los diámetros rectangulares dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.

Ahora bien, el triángulo rectángulo AOB nos da

$$AB^2 = AO^2 + OB^2 \quad \text{ó} \quad AB^2 = 2r^2,$$

de donde $\qquad AB = r\sqrt{2},$

lo que demuestra el teorema.

Escolios.

1.° *La cuerda de la cuarta parte de la circunferencia, es decir del arco de* 90°, *vale* r$\sqrt{2}$.

2.° De la igualdad anterior se deduce

$$\frac{AB}{r} = \sqrt{2};$$

donde vemos que la relacion entre el lado AB de un cuadrado inscripto y el radio r del círculo está expresada por el número inconmensurable $\sqrt{2}$, lo que indica que AB y r no tienen medida comun, pues si la tuviesen la relacion $\frac{AB}{r}$ estaria expresada por un entero ó una fraccion; luego

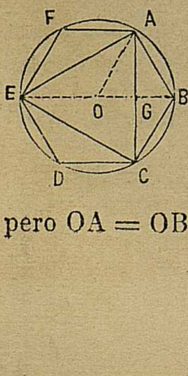
El lado de un cuadrado inscripto y el radio del círculo son dos rectas inconmensurables.

3.° El lado AB puede considerarse como la diagonal de un cuadrado, y el radio AO como uno de los lados, por consiguiente *la diagonal de un cuadrado y su lado son dos rectas inconmensurables.*

Teorema. (*Fig.* 157).

226. *El lado de un exágono regular inscripto en un círculo es igual al radio.*

Fig. 157.



Sea AB un lado del exágono regular inscripto; trazo los radios OA y OB. En el triángulo OAB, el ángulo en el centro AOB tiene por valor $\frac{4R}{6} = \frac{2}{3}$ R, por consiguiente entre los otros dos ángulos valdrán

$$2R - \frac{2}{3}R = \frac{4}{3}R,$$

pero OA = OB, luego los ángulos OBA y OAB son iguales, y cada uno valdrá $\frac{2}{3}$ R, lo mismo que el AOB. Siendo iguales los tres ángulos del triángulo AOB, tambien son iguales los lados, por tanto $AB = OA = r$.

Escolios.

1.° *La cuerda de la sexta parte de la circunferencia, ó sea del arco de 60°, es igual al radio.*

2.° *Para inscribir un exágono regular en un círculo dado se lleva el radio como cuerda seis veces sobre la circunferencia.*

Teorema. (*Fig.* 157).

227. *El lado de un triángulo equilátero inscripto en un círculo es igual al radio multiplicado por la raiz cuadrada de* 3.

Suponiendo dividida la circunferencia en seis partes iguales, bastará trazar las cuerdas AC, CE, EA de los arcos duplos, para obtener el triángulo equilátero.

Ahora, en el triángulo EAB, rectángulo en A, tenemos

$$EA^2 = EB^2 - AB^2,$$

pero $EB = 2r$, $AB = r$, luego

$$EA^2 = 4r^2 - r^2,$$

de donde $$EA = r\sqrt{3}.$$

lo que demuestra el teorema.

Escolios.

1.° *La cuerda de la tercera parte de la circunferencia, ó sea del arco de* 120°, *es* $r\sqrt{3}$.

2.° De la última igualdad se deduce

$$\frac{EA}{r} = \sqrt{3},$$

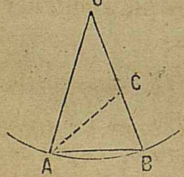
y como $\sqrt{3}$ es un número inconmensurable, podemos decir: *el lado del triángulo equilátero inscripto en un círculo y el radio son dos rectas inconmensurables.*

El lado AC es perpendicular al radio OB en su punto medio, luego *la apotema* OG *de un triángulo equilátero inscripto es igual á la mitad del radio, y la altura* EG *á los* $\frac{3}{2}$ *del mismo.*

TEOREMA. (*Fig.* 158).

228. *El lado de un decágono regular inscripto en un círculo es igual á la parte mayor del radio dividido en media y extrema razon.*

FIG. 158.



Sea AB el lado del decágono. Trazando los radios OA, OB se forma un triángulo AOB: el ángulo O en el centro vale $\frac{4R}{10}=\frac{2}{5}R$, por consiguiente los otros dos ángulos OAB y OBA valdrán juntos $\frac{8}{5}$ R, y como son iguales, por oponerse á lados iguales, cada uno valdrá $\frac{4}{5}$ R. Divido el ángulo OAB en dos partes iguales por medio de la bisectriz AC, y tendremos [180]

$$\frac{OA}{OC}=\frac{AB}{BC} \qquad [a];$$

ahora, en el triángulo OAC el ángulo O vale $\frac{2}{5}$ R, y el OAC, mitad de OAB, vale tambien $\frac{2}{5}$ R, luego AC = OC; en el triángulo ABC el ángulo en B vale $\frac{4}{5}$ R, el CAB vale $\frac{2}{5}$ R, luego ACB, suplemento de los anteriores, valdrá $\frac{4}{5}$ R, por consiguiente AB = AC.

De las igualdades AB = AC, AC = OC se deduce AB=OC; como además es OA = OB la igualdad [*a*] podrá escribirse así:

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{BC};$$

donde vemos que el radio OB está dividido por el punto C en media y extrema razon, y como la parte mayor OC es igual al lado AB, el teorema queda demostrado.

Escolios.

1.º *El lado del decágono regular, ó sea la cuerda del arco de* 36º, *vale* [150 escolio]

$$\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

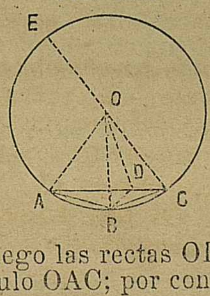
2.º Para inscribir un decágono regular en un círculo dado, se divide el radio en media y extrema razon, y se aplica la parte mayor, como cuerda, diez veces sobre la circunferencia.

Sabiendo dividir la circunferencia en diez partes iguales, bastará trazar las cuerdas de los arcos duplos para obtener el pentágono regular inscripto.

Teorema. (*Fig.* 159).

229. *El lado de un pentágono regular inscripto en un círculo es igual á la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son el radio y el lado del decágono regular inscripto.*

Fig. 159.



Sean AB y BC dos lados del decágono: AC será el lado del pentágono regular inscripto. Trazo la bisectriz OD del ángulo BOC y uno D con B.

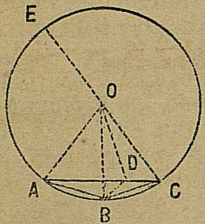
El ángulo AOD es igual al ACO, porque el primero, compuesto de AOB y BOD, tiene por medida *parte y media* de las diez en que suponemos dividida la circunferencia O, y el segundo, como inscripto, tiene por medida la mitad del arco AE, que vale *tres* de dichas partes; luego las rectas OD y CO son antiparalelas con respecto al ángulo OAC; por consiguiente [85]

$$AO^2 = AD.\ AC.$$

Los triángulos ODC y ODB son iguales [20], luego DC=DB, por tanto el ángulo DBC es igual al DCB; tambien el ángulo BAC es igual al DCB, porque el triángulo ABC es isósceles, luego DBC y BAC son ángulos iguales; segun esto, las rectas BD y AB son antiparalelas con respecto al ángulo ACB; por consiguiente

$$CB^2 = CD.\ CA.$$

Fig. 159.



Sumando ordenadamente las dos igualdades obtenidas, resulta

$$AO^2 + CB^2 = (AD + CD)\ AC$$

ó

$$AO^2 + CB^2 = AC^2,$$

lo que demuestra que el lado AC del pentágono puede considerarse como la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos sean el radio AO del círculo y el lado CB del decágono inscripto [189, 1.°].

Escolio. De la igualdad anterior se deduce

$$AC = \sqrt{AO^2 + CB^2};$$

sustituyendo AO por r y CB por $\frac{r(\sqrt{5}-1)}{2}$, se obtiene fácilmente

$$AC = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

tal es el lado del pentágono regular inscripto, ó sea la cuerda del arco de 72°, en funcion del radio.

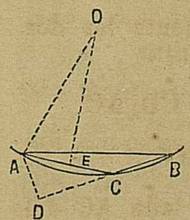
Teorema.

230. *El lado del pentedecágono regular inscripto en un círculo es la cuerda de la diferencia entre los arcos que subtienden el lado del exágono y el del decágono.*

En efecto: el lado del exágono regular subtiende $\frac{1}{6}$ de circunferencia, y el del decágono $\frac{1}{10}$ de la misma; luego la cuerda de la diferencia $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ entre estos arcos es el lado del pentedecágono.

231. Escolio. Inscribiendo la cuerda AB (*Fig.* 160) igual al radio y la AC igual al lado del decágono, BC será el lado del pentedecágono.

Fig. 160.



Para calcular su valor en funcion del radio, bajemos desde A una perpendicular á BC prolongada, tracemos el radio OA y la perpendicular OE al lado del decágono. Los triángulos rectángulos ABD y OAE tienen las hipotenusas iguales al radio, y los ángulos agudos ABD y AOE iguales, porque tienen por medida la mitad del arco AC, luego son iguales, por consiguiente $AD = AE = \frac{AC}{2}$.

Conociendo AD, AB y AC, pueden calcularse las rectas BD y CD, cuya diferencia es el lado BC buscado. Tendremos, pues,

$$BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2} = \frac{r}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$CD = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \frac{\overline{AC}^2}{4}} = \frac{AC}{2}\sqrt{3} = \frac{r}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{3},$$

de donde $$BC = \frac{r}{4}\left(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - (\sqrt{5} - 1)\sqrt{3}\right).$$

232. Si los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscripto se dividen en dos partes iguales, trazando las cuerdas de las mitades se obtiene otro polígono regular inscripto de duplo número de lados que el primero. Si tenemos, por ejemplo, un cuadrado inscripto, cada arco se dividirá en dos, resultando ocho arcos iguales cuyas cuerdas formarán un octógono regular inscripto; partiendo del octógono se puede obtener por el mismo procedimiento el polígono de 16 lados, despues el de 32 etc.

Podremos, pues, inscribir polígonos de los siguientes números de lados

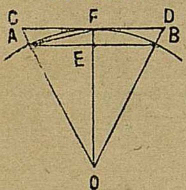
3,	6,	12,	24,	48.....	$3 \cdot 2^n$.
4,	8,	16,	32,	64.....	$4 \cdot 2^n$.
5,	10,	20,	40,	80.....	$5 \cdot 2^n$.
15,	30,	60,	120,	240.....	$15 \cdot 2^n$.

Despues de inscripto uno cualquiera de estos polígonos, trazando tangentes por los vértices se obtendrá el polígono circunscrito semejante al inscripto.

PROBLEMA. (*Fig.* 161).

233. *Conociendo el lado de un polígono regular inscripto y el radio del círculo, calcular el lado del polígono semejante circunscrito.*

Fig. 161.



Llamemos a al lado AB del polígono inscripto y r al radio del círculo: el lado del polígono circunscrito semejante será CD [221], que podemos representar por x.

Ahora bien, los triángulos semejantes AOB y COD dan [176]

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OE}{OF} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{x}=\frac{OE}{r},$$

pero $OE^2=OA^2-AE^2$ ó bien $OE^2=r^2-\frac{a^2}{4}$,

$$OE=\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}};$$

luego

$$\frac{a}{x}=\frac{\sqrt{r^2-\frac{a^2}{4}}}{r},$$

de donde

$$x=\frac{2ar}{\sqrt{4r^2-a^2}}.$$

PROBLEMA. (*Fig.* 161).

234. *Conociendo el lado de un polígono regular inscripto y el radio del círculo, calcular el lado de otro polígono regular inscripto de doble número de lados.*

Si AB $= a$ es el lado conocido de un polígono regular inscripto, AF $= x$ será el lado de otro polígono regular inscripto de doble número de lados [232].

Ahora bien, el ángulo AOF es agudo, puesto que su duplo AOB es menor que dos rectos; luego [187]

$$AF^2 = OA^2 + OF^2 - 2OF.\ OE,$$

ó

$$x^2 = r^2 + r^2 - 2r.\ OE;$$

pero en el problema anterior hemos hallado

$$OE = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}};$$

luego

$$x^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2},$$

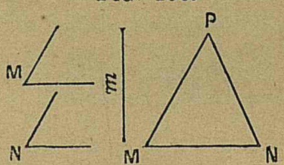
de donde

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}}.$$

PROBLEMAS RELATIVOS A LOS POLÍGONOS.

235. 1.° *Dado un lado y dos ángulos, construir un triángulo.*

Fig. 162.



Primer caso. (*Fig.* 162). Los ángulos dados M y N son adyacentes al lado *m*.

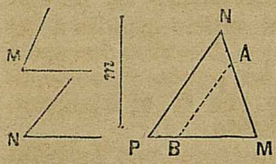
Trazo una recta MN igual al lado *m*, en uno de sus extremos construyo un ángulo PMN igual al M, y en el otro extremo construyo el ángulo PNM igual al N, y quedará resuelto el problema.

Otro triángulo construido con los mismos datos seria igual al PMN [19].

Para que el problema sea posible se necesita y basta que los ángulos dados valgan juntos ménos de dos rectos, pues si M + N fuese igual ó mayor que dos rectos seria imposible el problema [165]; y siendo M + N menor que dos rectos las rectas MP y NP se encuentran [65], y por lo tanto hay triángulo.

Segundo caso. (*Fig.* 163). El ángulo M es adyacente al lado *m*, y el ángulo N es opuesto.

Fig. 163.



Trazo una recta PM igual al lado *m*, en uno de sus extremos construyo un ángulo PMN igual al M, y en un punto cualquiera A de la recta MN construyo un ángulo BAM igual al N: es evidente que si la recta AB pasase por P estaria resuelto el problema; pero en general no pasará, y para cerrar el triángulo se traza por P una paralela á AB prolongada hasta que encuentre á MN: el triángulo MPN es el pedido, puesto que PM = *m*, PMN = M, PNM = BAM = N.

Otro triángulo construido con los mismos datos seria igual al PMN, pues tendria un lado igual á PM, un ángulo igual al NMP, y el otro ángulo adyacente al lado *m*, igual al NPM [165, *cor.* 3.°].

En virtud de esta observacion y de otra análoga expuesta en el primer caso, podemos decir:

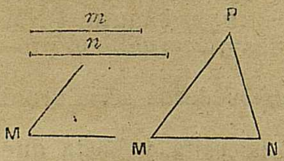
Un triángulo está determinado si se conoce un lado y dos ángulos cualesquiera.

Para que el problema sea posible en este segundo caso, se necesita y basta que la suma de los ángulos dados sea menor que dos rectos.

Esta condicion es necesaria por lo dicho en el primer caso, y suficiente porque AB encontrará á MP [65] formando un triángulo ABM, y la paralela PN á AB encontrará á MN [59, *cor.* 2.°].

236. 2.° *Dados dos lados y el ángulo comprendido, construir un triángulo.*

Fig. 164.



(*Fig.* 164). Sobre una recta MN igual á uno de los lados conocidos *m* formo un ángulo NMP igual al dado, tomo á partir del vértice M una longitud MP igual al lado *n*, y trazando la NP quedará resuelto el problema.

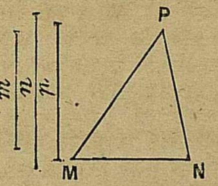
Todo triángulo construido con los mismos datos será igual al NMP, luego

Un triángulo está determinado si se conocen dos lados y el ángulo comprendido.

Este problema es siempre posible.

237. 3.° *Construir un triángulo conociendo sus tres lados.*

Fig. 165.



(Fig. 165). Trazo una recta MN igual á cualquiera de las dadas, *m* por ejemplo, haciendo centro sucesivamente en los extremos M y N, con radios iguales á las otras rectas dadas *n* y *p*, describo dos arcos que se cortarán en un punto P, uniendo este punto con M y con N, el triángulo que se forma es el pedido.

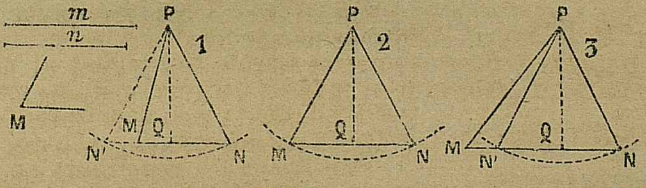
Otro triángulo construido con los mismos datos seria igual al MNP; luego *Un triángulo está determinado si se conocen sus tres lados.*

Para que el triángulo sea posible es necesario que uno cualquiera de los lados sea menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia [17]. Tambien es suficiente esta condicion, porque en virtud de ella los arcos descritos desde M y N como centros se cortarán fuera de la recta MN [134, 3.°], y habrá así triángulo.

La doble condicion enunciada puede sustituirse por la siguiente: *para que el triángulo sea posible se necesita y basta que el lado mayor sea menor que la suma de los otros dos*. Es evidente, en efecto, que verificándose esta condicion se verificará la anterior.

238. 4.° *Construir un triángulo conociendo dos lados* m *y* n (Fig. 166) *y el ángulo* M *opuesto á uno de ellos* m.

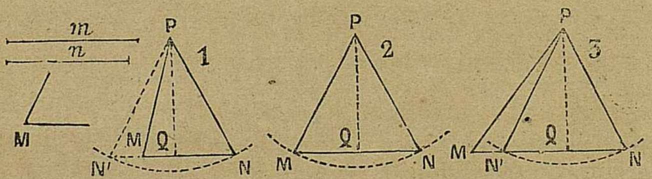
Fig. 166.



Construyo un ángulo PMN igual al dado M, tomo en uno de los lados una parte MP igual al lado *n*, y haciendo centro en P describo con un radio igual á *m* un arco NN′ que, en general, cortará al lado MN en dos puntos N y N′; trazo la PN, y el triángulo PMN resuelve el problema, puesto que PM $=n$, PN $=m$, *áng.* PMN $=$ *áng.* M.

Discusion. Al resolver este problema pueden ocurrir tres casos principales: 1.° que el lado m opuesto al ángulo dado sea mayor que n; 2.° que sea $m = n$; 3.° que sea $m < n$.

Fig. 166.



Primer caso. Fig. 1. Si $m > n$ será tambien m mayor que la perpendicular PQ, y el arco descrito desde P cortará á la recta MN en dos puntos N y N' equidistantes del pié Q de la perpendicular: ya sabemos que uniendo el primero de ellos N con P resulta la solucion del problema, pero no se obtendrá otra solucion uniendo N' con P. En efecto, siendo PM < PN' resulta QM < QN', y N' se encuentra por lo tanto á la izquierda de M, luego el ángulo PMN' opuesto al lado n no es igual al ángulo dado M, sino suplemento del mismo.

Vemos, pues, que en este caso el problema tiene una solucion.

Segundo caso. Fig. 2. Si $m = n$, el ángulo dado M debe ser agudo para que haya triángulo [168, *cor.* 1.°]. El lado m es mayor que la perpendicular PQ, por consiguiente el arco descrito desde P como centro corta á MN en dos puntos, uno de ellos el mismo vértice M; luego en este caso la solucion del problema es el triángulo isósceles PMN.

Tercer caso. Fig.3. Si $m < n$, el ángulo M será menor que N, luego el primero debe ser agudo, pues si fuese recto ú obtuso, el ángulo N seria obtuso, lo que es imposible [165, *cor.*2.°]. Si m es mayor que la perpendicular PQ, el arco descrito desde P como centro cortará á MN en dos puntos N y N'. Uniendo N con P resulta el triángulo MNP, que es solucion del problema; en cuanto al punto N' cae necesariamente á la derecha del punto M, pues siendo PN' < PM debe ser QN' < QM, por consiguiente uniendo N' con P resultará un triángulo MN'P con un lado PN' = m, otro lado PM = n y el ángulo PMN' igual al dado M; luego el problema tiene dos soluciones.

Obsérvese que el ángulo PNM, opuesto al lado n en la primera solucion, es suplemento del ángulo PN'M, opuesto al mismo lado en la segunda, puesto que

$$PN'M + PN'N = 2R$$

ó

$$PN'M + PNM = 2R.$$

Si m es igual á la perpendicular PQ, el arco descrito desde P es tangente á MN en el punto Q, y la solucion del problema es el triángulo rectángulo PMQ.

Por último, si m es menor que la perpendicular PQ, el arco no tiene con MN ningun punto comun y el triángulo es imposible.

Vemos que en este tercer caso el problema puede tener dos soluciones, una sola ó ninguna.

239. 5.° *Construir un triángulo rectángulo dado un cateto y un ángulo agudo.*

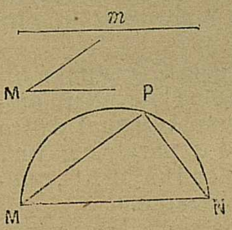
Como en el triángulo rectángulo se conoce el ángulo recto, la cuestion propuesta es un caso particular del problema 1.°

240. 6.° *Construir un triángulo rectángulo conociendo la hipotenusa* m *y un ángulo agudo* M.

Tambien este problema es un caso particular del 1.°; sin embargo, es conveniente saber la siguiente construccion especial.

(Fig. 167). Sobre una recta MN igual á la hipotenusa m, considerada como diámetro, describo una semicircunferencia; en un extremo M del diámetro formo un ángulo PMN igual al dado M: uniendo el punto P en que la recta MP corta á la semicircunferencia con el otro extremo N, queda resuelto el problema.

Fig. 167.



241. 7.° *Construir un triángulo rectángulo dada la hipotenusa y un cateto.*

Es un caso particular del problema 4.°

Otra construccion. Fig. 167. Sobre la hipotenusa MN como diámetro describo una semicircunferencia, llevo á partir de un extremo M la cuerda MP igual al cateto dado, y uniendo P con N queda resuelto el problema.

242. 8.° *Construir un triángulo semejante á otro del que se conocen tres elementos, entre ellos un lado por lo ménos.*

Los lados del triángulo que se busca deben guardar una relacion constante $\frac{m}{n}$ con los conocidos, y los ángulos deben ser respectivamente iguales [164]. La razon de semejanza $\frac{m}{n}$ podrá dársenos como condicion del problema; en caso contrario elegiremos la que creamos más conveniente, segun las circunstancias prácticas de la cuestion.

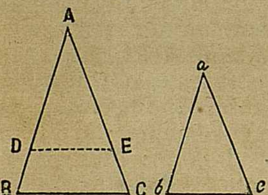
Sea a un lado conocido, a' su homólogo en el triángulo que buscamos: tenemos

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{a'},$$

luego a' es una cuarta proporcional á las rectas conocidas m, n, a, y se obtendrá por la construccion del número [147]. [1]

Una vez hallados por este procedimiento los lados del triángulo que se busca, la cuestion propuesta se habrá reducido á la siguiente: *Construir un triángulo dados tres elementos, entre ellos un lado por lo ménos*, que se resuelve por alguna de las construcciones de los problemas anteriores.

FIG. 168.

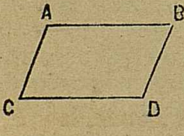


243. 9.° *Dado un triángulo* ABC (Fig. 168), *construir sobre una recta dada* bc, *considerada como lado homólogo de* BC, *otro triángulo semejante al dado.*

Construyanse en los puntos b y c ángulos respectivamente iguales á B y C, y quedará resuelto el problema.

244. 10.° *Construir un paralelógramo, conociendo dos lados y el ángulo comprendido.*

FIG. 169.



(Fig. 169). Trazo una recta CD igual á un lado conocido; en el extremo C formo un ángulo ACD igual al dado; tomo AC igual al otro lado conocido, y trazando dos paralelas, una por A á la recta CD y otra por D á la AC, quedará construido el paralelógramo.

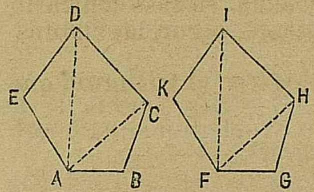
ESCOLIO. Este problema siempre es posible, y solo tiene una solucion [200].

---

1 Si m y n fuesen números, se representarian por dos rectas cuyas longitudes, medidas con una misma unidad arbitraria, fuesen m y n.

245. 11.° *Construir un polígono igual á otro dado* ABCDE. (Fig. 170).

Fig. 170.

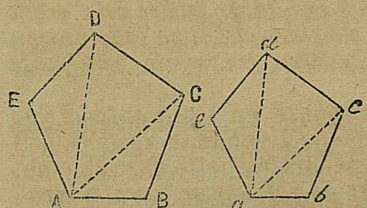


1.ª *construccion*. Trácese una recta FG igual á un lado AB del polígono dado: en el extremo G fórmese un ángulo igual al B; tómese GH = BC; fórmese en H un ángulo igual al BCD; y continuando del mismo modo se formará el polígono FGHIK igual al dado [209].

2.ª *construccion*. Descompóngase el polígono dado en triángulos, por medio de diagonales; constrúyase un triángulo FGH igual al ABC; sobre la recta FH constrúyase otro triángulo FHI igual al ACD, y así sucesivameute: el polígono FGHIK que resulta es igual al dado [210].

246. 12.° *Dado un polígono* ABCDE (Fig. 171), *construir sobre una recta dada* ab, *considerada como lado homólogo de* AB, *otro polígono semejante al dado.*

Fig. 171.



Descompóngase el polígono dado en triángulos por medio delas diagonales AC, AD; constrúyase sobre *ab* un triángulo *abc* semejante al ABC, sobre *ac* otro semejante al ACD, y así sucesivamente: el polígono *abcde* que resulta es semejante al dado.

247. 13.° *Construir un polígono semejante á otro dado, y cuyo perímetro sea igual á una recta dada* p.

Análisis. Sea P el perímetro del polígono dado, a un lado del mismo, y x el lado homólogo de a en el polígono que se busca; tenemos [215]

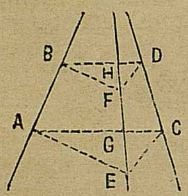
$$\frac{P}{p}=\frac{a}{x};$$

luego x es una cuarta proporcional á las rectas conocidas P, p y a.

Síntesis. Construyendo esta cuarta proporcional, y sobre ella un polígono semejante al dado, quedará resuelto el problema.

248. 14.° *Dadas dos rectas que no se pueden prolongar, trazar por un punto dado otra recta, tal que si las tres se prolongan concurran en un mismo punto.*

Fig. 172.



1.° Sean AB y CD (*Fig.* 172) las rectas dadas, y supongamos que el punto dado E esté situado entre ellas. Trácense dos paralelas AC y BD, únase el punto dado E con A y con C, tírense por B y D las rectas BF y DF respectivamente paralelas á AE y CE: el punto F de interseccion y el dado E determinan la direccion de la recta pedida EF.

En efecto: los triángulos AEG, BFH son semejantes, y tambien lo son CEG, DFH, por tanto

$$\frac{EG}{FH}=\frac{AG}{BH}, \quad \frac{EG}{FH}=\frac{CG}{DH};$$

de estas igualdades se deduce

$$\frac{AG}{BH}=\frac{CG}{DH};$$

luego las rectas AB, EF y CD dividen á las paralelas AC y BD en partes proporcionales, y concurren, por tanto, en el mismo punto [80].

2.° Si las rectas dadas son AB, EF y el punto dado C está fuera del ángulo que forman, se hace la misma construccion, esto es, se trazan AE y BF paralelas entre sí, se une C con A y con E, y trazando BD y FD, paralelas respectivamente á AC y EC, se determina el punto D.

La demostracion es idéntica á la del primer caso.

SECCION SEGUNDA.

MEDIDA DE LA EXTENSION.

LIBRO PRIMERO.

MEDIDA DE LAS LÍNEAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Medida de la línea recta.

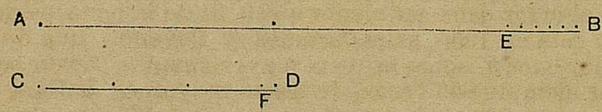
Problema.

249. *Hallar la relacion numérica de dos rectas dadas.*

Si la recta menor está contenida en la mayor cierto número de veces sin quedar resto, lo que se ve aplicando la primera á lo largo de la segunda mientras sea posible, la relacion buscada será un número entero; pero si despues de separar la recta menor de la mayor queda un resto menor que aquella, deberemos buscar una tercera recta contenida exactamente en las dadas y la mayor posible, referiremos despues á esta máxima medida comun las longitudes de las dos rectas, y formaremos una fraccion con los números enteros que expresan dichas longitudes.

Sean las rectas AB y CD (*Fig.* 173), que supondremos conmensurables. Operando como se hace en Aritmética para hallar

Fig. 173.



el máximo comun divisor de dos números, aplicaremos la recta menor sobre la mayor cuantas veces sea posible; si no quedase ningun resto, la menor seria la máxima comun medida; pero suponemos que la recta mayor contiene á la menor *dos* veces quedando un resto E B, este resto se aplica sobre la recta menor *tres* veces quedando el residuo FD; por último, aplicando este resto sobre el anterior vemos que está contenido *cinco* veces exactamente, con lo que la operacion está terminada.

Mediante razonamientos análogos á los expuestos en Aritmética, podríamos ahora demostrar que FD es medida comun de las rectas dadas, y la mayor posible.

La relacion numérica entre AB y CD se hallará ahora fácilmente. Tenemos, en efecto,

$$AB = 2CD + EB, \quad CD = 3EB + FD, \quad EB = 5FD;$$

de donde $\quad AB = 37FD, \quad CD = 16FD;$

luego $$\frac{AB}{CD} = \frac{37FD}{16FD} \quad \text{ó} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{37}{16} \quad [69].$$

La fraccion $\frac{37}{16}$ expresa la relacion que existe entre las rectas dadas; pero si CD fuese la unidad de longitud, dicha fraccion seria la expresion numérica de la recta AB referida á dicha unidad, y en tal concepto podríamos decir

$$AB = \frac{37}{16}.$$

Nótese que la relacion obtenida será fraccion *irreducible*, salvo el caso en que CD esté contenida en AB un número entero de veces, pues si 37 y 16 pudieran tener un factor comun, 3 por ejemplo, la mayor medida comun de las rectas no seria FD, sino 3FD.

Si las rectas dadas fuesen inconmensurables, la operacion de hallar su medida comun no tendria teóricamente fin, y la relacion exacta de aquellas no existiria. Sin embargo [*Arit.* 232], puede hallarse una relacion tan aproximada como se desee. Supongamos que el error deba ser menor que 0, 01 de la recta menor: dividiendo ésta en 100 partes iguales y llevando una de ellas, que llamaremos p, sobre la recta mayor cuantas veces sea posible, por ejemplo 896 veces, la recta mayor se hallará comprendida entre $896p$ y $897p$, y la menor será $100p$ exactamente; luego la relacion buscada estará comprendida entre $\frac{896p}{100p}$ y $\frac{897p}{100p}$, ó sea entre 8,96 y 8,97 que se diferencian en 0,01; luego cualquiera de estas fracciones representa la relacion buscada con un error menor que 0,01.

En la práctica se miden las líneas rectas por medio de una regla de marfil, metal ó madera, dividida en partes iguales. Las reglas que se emplean con este objeto en el dibujo son, por lo comun, *dobles decímetros* divididos en centímetros, milímetros y medios milímetros; las divisiones de los centímetros están numeradas desde 0 hasta 20.

Haciendo coincidir el borde de la regla con la recta que se quiere medir, de modo que la division *cero* corresponda á uno de los extremos de la recta, se leerá el número de centímetros contenidos en ella, y se contarán los milímetros que medien entre la última division numerada de la regla y el extremo de la recta, apreciando *á ojo* las fracciones menores que medio milímetro.

De un modo análogo se procede cuando sobre una recta indefinida se quiere marcar una longitud determinada.

CAPÍTULO SEGUNDO.

MEDIDA DE LA CIRCUNFERENCIA.

I.—Preliminares.

250. Para determinar la longitud de una circunferencia ó de un arco, es necesario hallar las veces que la circunferencia contiene á una unidad de longitud rectilínea; mas como la línea recta y la circunferencia no son superponibles, los procedimientos directos empleados en la medida de la línea recta son inaplicables al problema actual. Eligiendo un arco de circunferencia para unidad, no desapareceria la dificultad, porque los arcos solo son superponibles en el caso particular de estar descritos con igual radio; y aunque así no fuera, siempre habria que determinar la relacion entre la longitud del arco unidad y la unidad rectilínea, á fin de referir las longitudes, tanto de las rectas como de las curvas, á una unidad comun, que permitiera compararlas.

No siendo posible determinar directamente la longitud de la circunferencia, se mide, en lugar de ésta, una línea poligonal que se diferencie de la curva dada en una cantidad tan pequeña como se quiera; de este modo los resultados no serán rigurosamente exactos, pero sí tan aproximados como se deseen.

Con objeto de justificar este procedimiento, debemos demostrar algunas proposiciones.

251. Se llama *línea convexa* la que no puede ser cortada por una línea recta en más de dos puntos.

En el caso contrario suele llamarse *cóncava*.

Toda recta que une dos puntos de una línea convexa cerrada es interior á dicha línea.

Si alguna de las rectas que unen dos puntos de una curva cerrada es exterior, la curva es cóncava.

Estas dos propiedades se demuestran como sus análogas relativas á las diagonales de los polígonos.

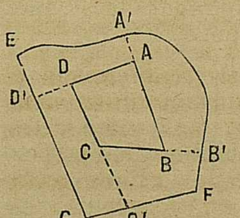
TEOREMA.

252. *Toda línea convexa cerrada envuelta por otra línea cerrada cualquiera, es menor que ésta.*

Distinguiremos dos casos: 1.° que la línea convexa envuelta sea poligonal; 2.° que sea una línea cualquiera.

PRIMER CASO. Sea la línea poligonal ABCD *(Fig.* 174*)*. Prolongando todos los lados en el mismo sentido, tendremos:

FIG. 174.



$$AB + AA' < A'B' + BB'$$

$$BC + BB' < B'F + FC' + CC'$$

$$CD + CC' < C'G + GD' + DD'$$

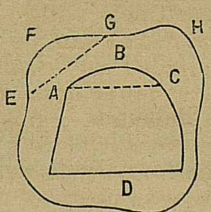
$$AD + DD' < D'E + EA' + AA'$$

Sumando estas desigualdades y suprimiendo las cantidades iguales de ambos miembros, resulta

$$AB + BC + CD + AD \quad \text{ó} \quad ABCD < A'B'FGEA'.$$

SEGUNDO CASO. Sea ABCD una línea convexa cerrada cualquiera *(Fig.* 175.)

FIG. 175



La línea ABCD puede ser envuelta por infinitas líneas, que no serán iguales; pues, áun prescindiendo de las curvas, solamente las poligonales convexas que se trazasen envolviendo unas á otras, serian cada vez mayores, sin que este aumento reconociese límite. La disminucion, en cambio, no puede ser ilimitada, porque todas las líneas que envuelven la ABCD tienen que ser mayores que una poligonal convexa que inscribiéramos en ABCD.

Resulta, pues, que la porcion de plano ABCD está encerrada dentro de la línea convexa ABCD y de otras infinitas líneas, que no son todas iguales ni pueden disminuir indefinidamente, luego existirá por necesidad una menor que las demás, ó sinó habrá varias iguales en magnitud y menores que todas las demás; pero ninguna EFGHL de las que envuelven á ABCD es la menor ni una de las menores, pues uniendo dos de sus puntos E y G por medio de una recta que no corte á ABCD, lo que siempre es posible, y sustituyendo la parte EFG por la recta EG, resultará otra línea EGHL, menor que la anterior EFGHL y que continuará envolviendo á la ABCD.

Este razonamiento, aplicable á todas las envolventes de ABCD, no puede repetirse para ésta, porque siendo convexa como suponemos, la recta AC que uniese dos de sus puntos seria interior, y la línea resultante ACD, si bien menor que ABCD, no envolveria á ésta.

Luego de todas las líneas que encierran la porcion de plano ABCD no hay ninguna envolvente menor que todas las demás; por consiguiente la menor es la convexa envuelta ABCD.

Corolarios.

253. 1.º *Los perímetros de los polígonos regulares inscriptos, cuyo número de lados se duplica, van aumentando, pero siempre son menores que la circunferencia.*

Porque cada polígono envuelve al anterior, y la circunferencia envuelve á todos.

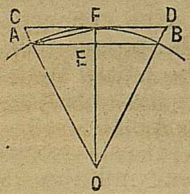
254. 2.º *Los perímetros de los polígonos regulares circunscritos, cuyo número de lados se duplica, van disminuyendo, pero siempre son mayores que la circunferencia.*

Porque cada polígono está envuelto por el anterior, y la circunferencia está envuelta por todos.

Teorema. (*Fig.* 176).

255. *La circunferencia es el límite comun de los polígonos regulares, tanto inscriptos como circunscritos, cuyo número de lados se duplica indefinidamente.*

Fig. 176.



Sean P y p los perímetros de dos polígonos regulares semejantes, el primero circunscrito y el segundo inscripto.

Tenemos [224]

$$\frac{P}{p}=\frac{OF}{OE} \quad \text{de donde} \quad \frac{P-p}{P}=\frac{OF-OE}{OF},$$

de la segunda igualdad se deduce

$$P - p = \frac{P\,(OF - OE)}{OF}.$$

Si suponemos que se duplica indefinidamente el número de lados de los polígonos propuestos, los valores sucesivos de P, que disminuye si bien permaneciendo mayor que la circunferencia, serán siempre finitos, y OF no varía, por ser el radio del círculo O. En cuanto á la diferencia OF—OE, que entra como factor en el valor de P—p, puede ser tan pequeña como se quiera; en efecto, el triángulo OAE nos dá

$$AE > OA - OE \quad \text{ó bien} \quad AE > OF - OE;$$

si consideramos la circunferencia dividida en suficiente número de partes iguales, éstas serán tan pequeñas como queramos, y con mayor razon lo serán las cuerdas correspondientes, ó sean los lados del polígono regular inscripto; luego AE, que solo es medio lado, puede llegar á ser tan pequeño como se quiera, y la diferencia OF — OE podrá ser, con mayor razon, menor que cualquiera cantidad asignable. Si además se tiene en cuenta que las otras cantidades P y OF que entran en el valor de P—p tienen valores finitos, es claro que esta diferencia entre los perímetros propuestos puede ser tan pequeña como se quiera.

Ahora bien, hallándose la circunferencia comprendida entre los mencionados perímetros [253, 254], se diferenciará de cualquiera de ellos en una cantidad todavía menor que P—p, luego el teorema enunciado es cierto.

Escolio.

256. Habiendo demostrado que la diferencia OF—OE entre el radio del círculo y la apotema del polígono inscripto puede ser menor que cualquiera cantidad asignable, podemos decir: *la apotema de un polígono regular inscripto cuyo número de lados se duplica indefinidamente, tiene por límite el radio del círculo.*

II.—Medida de la circunferencia.

Teorema.

257. *Dos circunferencias cualesquiera son proporcionales á sus radios y á sus diámetros.*

Sean c y c' las circunferencias, r y r' sus radios respectivos. Si consideramos inscriptos á las circunferencias dadas dos polígonos regulares de igual número de lados, y por tanto semejantes, sus perímetros p y p' serán proporcionales á los radios r y r', es decir,

$$\frac{p}{r} = \frac{p'}{r'};$$

duplicando indefinidamente y á la vez el número de lados de los dos polígonos, sus perímetros p y p' aumentarán, teniendo por límites superiores las respectivas circunferencias c y c'; sin embargo, la relacion variable $\frac{p}{r}$ siempre será igual á la $\frac{p'}{r'}$, por consiguiente los límites $\frac{c}{r}$ y $\frac{c'}{r'}$ tambien serán iguales. Tenemos, pues,

$$\frac{c}{r} = \frac{c'}{r'}.$$

donde vemos que las circunferencias son proporcionales á los radios.

Multiplicando por 2 los denominadores r y r' será

$$\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'},$$

luego las circunferencias son tambien proporcionales á los diámetros.

Corolario. La igualdad

$$\frac{c}{2r} = \frac{c'}{2r'}$$

manifiesta que la relacion de una circunferencia c á su diámetro $2r$ es igual á la relacion entre otra circunferencia cualquiera c' y su diámetro $2r'$, lo que se expresa diciendo:

La relacion de la circunferencia al diámetro es un número constante.

Este número constante se representa por la letra griega π.[1]

π

PROBLEMA.

258. *Hallar la relacion de la circunferencia al diámetro.*

Puesto que el valor de π es el mismo para cualquiera circunferencia, elegiremos una cuyo radio sea la unidad lineal y el diámetro, por tanto, igual á 2: si logramos hallar la longitud de dicha circunferencia, bastará dividirla por 2 para obtener el valor de π.

El perímetro de cualquier polígono regular inscripto es menor que la circunferencia, por consiguiente si consideramos como longitud de esta curva la de aquel perímetro, cometeremos un error tanto más pequeño cuanto mayor sea el número de lados del polígono, y que podrá disminuir indefinidamente, puesto que los perímetros de los polígonos regulares inscriptos cuyo número de lados aumenta, se diferencian cada vez ménos de la circunferencia y pueden acercarse á ésta cuanto se quiera.

Inscribamos, pues, en la circunferencia propuesta una série de polígonos regulares, empezando por uno cuyo lado sea conocido, por ejemplo, el cuadrado.

Sabemos que el lado del cuadrado inscripto en un círculo de radio r es $r\sqrt{2}$, luego siendo el radio 1 tendremos

$$l_4 = \sqrt{2},$$

representando por l_4 el lado.

La fórmula

$$x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - a^2}},$$

1 Léase *pi*.

del número 234, se convierte, suponiendo $r = 1$, en

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}};$$

sustituyendo en ésta la letra a por $\sqrt{2}$, lado del cuadrado inscripto, tendremos para lado del octógono regular

$$l_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}};$$

sirviéndonos de la misma fórmula obtendremos tambien

$$l_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

y así sucesivamente.

Suponiendo que nos detengamos en el polígono de 256 lados, hallaremos efectuando los cálculos

$$l_{256} = 0,\ 024543;$$

multiplicando este número por 256, tendremos para valor del perímetro

$$p_{256} = 6,\ 28301.$$

Conviene ahora hallar el límite del error que se comete tomando para longitud de la circunferencia la del perímetro del polígono de 256 lados. Con este objeto, calcularemos el perímetro del polígono semejante circunscrito, sirviéndonos de la fórmula del número 233, que en el supuesto $r=1$ se convierte en

$$x = \frac{2a}{\sqrt{4 - a^2}}.$$

Como esta fórmula nos daria solamente el lado del polígono circunscrito, la multiplicaremos ante todo por 256, y será

$$P_{256} = \frac{2.256a}{\sqrt{4 - a^2}};$$

sustituyendo ahora $256a$ por su valor hallado 6,28301, a por 0,024543, y efectuando las operaciones se obtiene

$$P_{256} = 6,28348.$$

Hallándose la circunferencia comprendida entre los perímetros de los polígonos inscripto y y circunscrito de 256 lados, podemos tomar para su longitud la expresion 6,28301 del primero, siendo el error por defecto menor que 0,00047, diferencia entre ambos perímetros.

Dividiendo la longitud de la circunferencia por 2, tendremos para valor de π el número 3,141505 con un error por defecto menor que 0,000235, de suerte que las tres primeras cifras decimales son exactas.

259. El procedimiento que hemos empleado para hallar una relacion aproximada de la circunferencia al diámetro, debe mirarse como una prueba de que la Geometría elemental posee medios para determinar el valor de π con cuanta aproximacion sea necesaria: en las Matemáticas superiores se resuelve este problema mucho más brevemente.

Lambert demostró el primero que la relacion de la circunferencia al diámetro es un número inconmensurable; por consiguiente solo pueden hallarse valores más ó ménos aproximados de la misma. La relacion más antigua es la hallada por *Arquímedes*: está expresada por la fraccion $\frac{22}{7}$ y excede á la verdadera en ménos de dos milésimas; otra relacion, empleada con frecuencia, es la de *Mecio* $\frac{355}{113}$[1], que se diferencia de la verdadera en ménos de media millonésima *por exceso;* por último el valor de π se ha calculado hasta con 154 cifras decimales: hé aquí las 20 primeras

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846.....$$

Muchas veces se emplea el logaritmo de este número, que es

$$\log.\ \pi = 0,49714\ 98726\ 94133\ 85435.....$$

1 Es fácil recordar esta relacion: escríbase cada uno de los tres primeros números impares dos veces, en la forma siguiente 113355; divídase este número en grupos de tres cifras, y se tendrán los términos del quebrado.

Problema.

260. *Dado el radio hallar la longitud de la circunferencia, y al contrario.*

Sea c la circunferencia y r el radio. La relacion de la circunferencia al diámetro será $\frac{c}{2r}$, luego

$$\frac{c}{2r} = \pi,$$

de donde $\qquad c = 2\pi r, \qquad r = \frac{c}{2\pi}.$

Ejemplos.

1.° *Hallar la longitud de una circunferencia cuyo radio es 20 metros.*

En la fórmula $c = 2\pi r$ sustituyamos r por 20 y π por 3,14159, y será

$$c = 2 \times 3{,}14159 \times 20 = 125^{\text{m}}, 6636.$$

2.° *Hallar el radio de una circunferencia cuya longitud es 40000 kilómetros.*

Empleando la fórmula $r = \frac{c}{2\pi}$ será [1]

$$r = \frac{40000}{2 \times 3{,}14159} = 6366^{\text{km}}.$$

Problema.

261. *Rectificar la circunferencia.*

El objeto de este problema es hallar una línea recta igual en longitud á una circunferencia dada, lo que no se ha podido conseguir de un modo exacto.

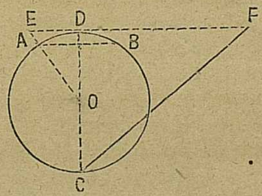
---

1 Segun la definicion de metro, la longitud de un meridiano terrestre es 40000 kilómetros, de modo que el radio de la tierra, suponiéndola esférica, es 6366 kilómetros.

He aquí dos soluciones bastante aproximadas.

1.ª Trácese por un extremo de un diámetro una recta indefinida, y tómense en ella sucesivamente, á partir de dicho extremo, 22 longitudes iguales cualesquiera; únase el sétimo punto de division con el otro extremo del diámetro; y trácese por el punto 22º de division una paralela á la recta de union anterior; esta paralela determina sobre el diámetro prolongado una recta que está con el diámetro en la relacion de Arquímedes $\frac{22}{7}$, y que por lo tanto será la longitud aproximada de la circunferencia.

Fig. 177.



2.ª Trácese una cuerda AB (*Fig.* 177) igual al radio, bájese el diámetro CD perpendicular á ella, por D tírese una tangente limitada de un lado por la prolongacion del radio OA, tómese una longitud EF igual á tres radios, y únase F con C; la recta FC es aproximadamente la mitad de la circunferencia.

En efecto: ED es la mitad del lado de un exágono regular circunscrito, por consiguiente hallaremos su valor haciendo en la fórmula del número 233 $a = r$, y tomando la mitad; será pues

$$\text{ED} = \frac{r^2}{\sqrt{3r^2}} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{r\sqrt{3}}{3};$$

luego $\text{DF} = \text{EF} - \text{ED} = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3} = \frac{r(9-\sqrt{3})}{3}.$

Ahora, en el triángulo rectángulo CDF, tenemos

$$\text{CF} = \sqrt{\text{DF}^2 + \text{CD}^2} = \frac{r\sqrt{120 - 18\sqrt{3}}}{3} = r.\ 3{,}141533...;$$

y la mitad de la circunferencia vale

$$\pi r = r.\ 3{,}141592.....;$$

luego CF se diferencia de la semicircunferencia en ménos de *seis cien milésimas* del radio, por defecto.

III.—Medida de un arco de círculo.

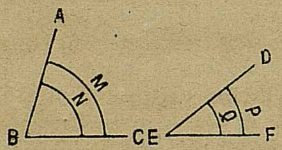
262. Se llaman *arcos semejantes* los correspondientes á un mismo ángulo, descritos con radios diferentes.

Lema.

Dos arcos semejantes son proporcionales á otros dos semejantes entre sí, descritos con radios iguales á los de los primeros.

En efecto (*Fig.* 178),

Fig. 178.



$$\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{ABC}}{\acute{a}ng.\ \mathrm{DEF}} = \frac{arc.\ \mathrm{M}}{arc.\ \mathrm{P}},$$

$$\frac{\acute{a}ng.\ \mathrm{ABC}}{\acute{a}ng.\ \mathrm{DEF}} = \frac{arc.\ \mathrm{N}}{arc.\ \mathrm{Q}};$$

luego
$$\frac{arc.\ \mathrm{M}}{arc.\ \mathrm{P}} = \frac{arc.\ \mathrm{N}}{arc.\ \mathrm{Q}}.$$

263. Corolario. *Dos arcos semejantes tienen igual medida*, es decir, *la relacion entre cada uno de ellos y el cuadrante descrito con su mismo radio, es igual para los dos arcos.*

Si los arcos P y Q fueran cuadrantes, las relaciones $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}$ y $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Q}}$ serian las medidas de los arcos M y N, y como $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{Q}}$, el corolario es cierto.

264. La relacion numérica entre dos arcos cualesquiera A y B de igual radio, puede obtenerse por el procedimiento del máximo comun divisor aplicado [249] á dos líneas rectas, sirviéndose de la cuerda del arco menor para llevarle sobre el mayor cuantas veces sea posible, y despues de las cuerdas de los residuos sucesivos, puesto que á cuerdas iguales corresponden arcos iguales. De este modo se obtendrá el mayor arco contenido exactamente en los dos propuestos, si éstos son conmensurables; y suponiendo que la máxima comun medida se halle contenida m veces en el arco mayor y n veces en el menor la relacion será $\frac{m}{n}$.

Si el segundo arco es el cuadrante, la relacion numérica $\frac{m}{n}$ será la medida del primer arco, que podrá expresarse en grados multiplicando $\frac{m}{n}$ por 90.

265. Es muy comun apreciar los arcos, no ya por su número de grados, minutos etc., sino por su longitud, es decir, por su relacion con una línea recta elegida como unidad de medida.

Resolveremos, pues, el siguiente

PROBLEMA.

Hallar la longitud de un arco de círculo, conociendo el número de grados y el radio.

Sea a el número de grados del arco [1], r el radio y l la longitud que buscamos.

El problema puede enunciarse en la forma siguiente: *Si á 180 grados corresponde la longitud πr de la semicircunferencia, qué longitud corresponderá á un arco de* a *grados?*

Es evidente que las longitudes de los arcos de una misma circunferencia son proporcionales al número de grados, por tanto la cuestion propuesta es una regla de tres simple.

GRADOS.		LONGITUDES.
180	. . . .	πr
a	. . . .	l

$$l = \pi\, r \times \frac{a}{180}.$$

EJEMPLOS.

1.° *¿Cuál es la longitud de un arco de* 84° *siendo el radio* 20 *metros?*

$$l = 3,14159 \times 20 \times \frac{84}{180} = 29^{m},3215.$$

2.° *¿Cuál es la longitud de un arco de* 30° 45′ *siendo el radio* 10 *metros?*

$$l = 3,14159 \times 10 \times \frac{1845}{10800} = 5^{m},36688.$$

1 Si tiene grados, minutos y segundos, a será el número fraccionario que se obtiene reduciendo el arco á incomplejo de grados.

Problema. (*Recíproco del anterior*).

266. *Hallar el número de grados de un arco, conociendo su longitud y el radio.*

Tenemos la siguiente regla de tres

LONGITUDES.		GRADOS.
πr	. . . .	180
l	. . . .	a

$$a = 180 \times \frac{l}{\pi r}.$$

Ejemplo.

¿Cuántos grados tiene un arco de 60 *metros perteneciente á una circunferencia de* 54 *metros de radio?*

$$a = 180 \times \frac{60}{3,14159 \times 54} = 63^\circ\, 40'.$$

267. *Las longitudes de dos arcos semejantes son proporcionales á sus respectivos radios.*

Sean l, l' las longitudes de dos arcos semejantes, r, r' los radios, a el número comun de grados [263].

Tenemos [265]

$$l = \frac{\pi r a}{180}, \quad l' = \frac{\pi r' a}{180},$$

de donde, por division,

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}.$$

Escolio. La igualdad anterior puede escribirse así:

$$\frac{l}{r} = \frac{l'}{r'};$$

luego *para un mismo ángulo, la relacion entre la longitud del arco correspondiente y el radio, es constante.*

Problema.

268. *Hallar el número de grados de un arco igual en longitud al radio.*

Haciendo en la fórmula del número 266, $l = r$ será

$$a = \frac{180r}{\pi r} = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3,14159265} = 57^\circ,29578 .$$

269. Escolio. Con objeto de pasar, sin efectuar operaciones de reduccion, del número de grados de un arco á su longitud y vice-versa, se acostumbra, en las ramas superiores de las Matemáticas, á tomar para unidad de longitud el radio, y para unidad de arcos el arco igual en longitud al radio, es decir, el arco de 57°, 29578. Mediante este convenio

Un mismo número expresa á la vez los grados y la longitud de un arco.

En efecto: la fórmula $l = \frac{\pi\, ra}{180}$ se convierte en

$$l = \frac{\pi a}{180} \qquad \text{ó} \qquad l = a : \frac{180}{\pi},$$

y como $\frac{180}{\pi}$ ó sea 57°,29578 es la unidad de arcos, resulta $l = a$.

Así, por ejemplo, el número π ó 3,14159.... expresa á la vez la longitud de la semicircunferencia, referida al radio, y el número de grados de la misma, es decir 180°.

Cuando se quiere pasar de estas unidades á las usuales, el número que expresa la longitud y á la vez los grados del arco se multiplicará por el radio, para hallar la longitud, y por 57,29578, para hallar el número de grados.

La division servirá en la reduccion inversa.

El logaritmo de 57,29578 que facilita estas reducciones es 1,7581226.

LIBRO SEGUNDO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES PLANAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

MEDIDA DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

270. Área *de una superficie es la medida de su extension.*

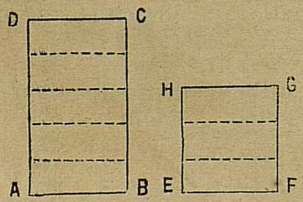
La unidad de áreas es ordinariamente un cuadrado, por consiguiente el área de una superficie será la relacion entre la extension de la misma y la del cuadrado que sirve de unidad.

Dos superficies son *equivalentes* cuando tienen la misma área y diferente forma. Las superficies equivalentes no pueden coincidir.

Teorema. (*Fig.* 179).

271. *Dos rectángulos* AC *y* EG[1] *que tienen iguales las bases, son proporcionales á las alturas* AD *y* EH.

Fig. 179.



Supongamos que las alturas sean conmensurables, y que la medida comun se halle contenida cinco veces en AD y tres veces en EH; tendremos, segun esto,

$$\frac{AD}{EH}=\frac{5}{3} \qquad [a]$$

Si por los puntos de division de las alturas trazamos paralelas á las bases, el rectángulo AC quedará di-

---

1 Designaremos con frecuencia un cuadrilátero por las letras de dos vértices opuestos.

vidido en cinco rectángulos y el EG en tres; todos estos rectángulos son iguales, porque teniendo igual base y altura es fácil hacer que coincidan, luego

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{EFGH}} = \frac{5}{3} \qquad [b].$$

De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{EFGH}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{EH}},$$

lo cual debíamos demostrar.

Si las alturas fuesen inconmensurables, haríamos un razonamiento análogo al de los números 73 y 113.

Corolario. *Dos rectángulos que tienen alturas iguales son proporcionales á las bases.*

Puesto que las alturas pueden considerarse como bases, y las bases como alturas.

Teorema.

272. *Dos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean R y R′ los rectángulos, a y b la altura y base del primero, a' y b' la altura y base del segundo.

Supongamos construido un tercer rectángulo R″ que tenga la base b del primero y la altura a' del segundo.

Los rectángulos R y R″ que tienen bases iguales son proporcionales á sus alturas, esto es,

$$\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{R}''} = \frac{a}{a'}.$$

Los rectángulos R″ y R′ que tienen alturas iguales son proporcionales á sus bases, esto es,

$$\frac{\mathrm{R}''}{\mathrm{R}'} = \frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas dos igualdades fraccionarias, y suprimiendo el factor comun R″, se obtiene

$$\frac{R}{R'}=\frac{b.\,a}{b'.a'},$$

lo cual debíamos demostrar.

TEOREMA.

4 273. *El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.*

Sea R el rectángulo que se trata de medir, *a* y *b* su altura y base; sea C el cuadrado que se toma para unidad superficial, y *l* el lado de este cuadrado. Como el cuadrado es un rectángulo, tendremos en virtud del teorema anterior,

$$\frac{R}{C}=\frac{b.\,a.}{l.\,l}.$$

Si *convenimos* en elegir para unidad superficial el cuadrado cuyo lado es la unidad lineal, *l* valdrá 1; por tanto

$$\frac{R}{C}=b.\,a;$$

pero $\frac{R}{C}$ es el área del rectángulo [270], luego el teorema es cierto.

ESCOLIOS.

1.° Téngase muy presente que en la demostracion anterior hemos convenido en elegir para unidad superficial un cuadrado cuyo lado sea la unidad lineal; por consiguiente cuando se hayan medido las líneas con una unidad determinada, el área del rectángulo estará expresada en las unidades cuadradas correspondientes; así, cuando las líneas se midan en metros, varas etc., el área estará expresada en metros cuadrados, varas cuadradas etc.

Esta observacion es tambien aplicable á los teoremas siguientes.

2.° La base y altura de un rectángulo suelen llamarse *dimensiones* del mismo, por esto se dice con frecuencia:

El área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones.

274. Corolario. *El área de un cuadrado es igual á la segunda potencia de su lado.* [1]

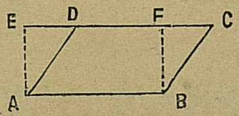
Puesto que el cuadrado es un rectángulo de igual base y altura.

En virtud de esta proposicien, la vara cuadrada, esto es, el cuadrado cuyo lado es una vara ó tres piés, equivale á $3^2 = 9$ piés cuadrados, el pié cuadrado á $12^2 = 144$ pulgadas cuadradas, el metro cuadrado á $10^2 = 100$ decímetros cuadrados etc. [2]

Teorema. (*Fig.* 180).

275. *El área de un paralelógramo* ABCD *es igual al producto de su base por su altura.*

Fig. 180.



Levantando las perpendiculares AE y BF á la base AB del paralelógramo hasta que encuentren al lado CD ó á su prolongacion, se forma un rectángulo ABFE equivalente al paralelógramo ABCD. En efecto: los triángulos rectángulos AED y BFC tienen iguales los catetos AE y BF, por ser lados opuestos del rectángulo, y las hipotenusas AD y BC, por ser lados opuestos del paralelógramo, luego son iguales; añadiendo al trapecio ABFD el

---

1 A esto debe su orígen el nombre de cuadrado que dimos en Aritmética á la segunda potencia de un número. Por análoga razon suele llamarse *rectángulo* de dos números al producto de los mismos.

2 Recomendamos á los alumnos se fijen bien en la diferencia entre la décima de metro cuadrado y el decímetro cuadrado: si tenemos un metro cuadrado, dividiendo la altura en diez partes iguales y trazando paralelas á la base por los puntos de division, resultarán diez rectángulos iguales de un metro de base y un decímetro de altura; cada uno de estos rectángulos es *una décima de metro cuadrado*. Dividiendo despues la base del cuadrado propuesto en diez partes iguales y levantando perpendiculares por los puntos de division, las décimas de metro se habrán dividido en diez cuadrados iguales, y el metro cuadrado en cien; cada uno de estos cien cuadrados es un decímetro cuadrado. En suma, un metro cuadrado tiene diez décimas de metro cuadrado ó cien decímetros cuadrados.

Tampoco deberá confundirse la centésima de metro cuadrado con el centímetro cuadrado: segun acabamos de ver, la centésima de metro cuadrado es un cuadrado que tiene de lado un decímetro, mientras que el centímetro cuadrado es un cuadrado que tiene de lado un centímetro.

triángulo AED resulta el rectángulo ABFE, y añadiendo al mismo trapecio el otro triángulo BFC resulta el paralelógramo ABCD; pero añadiendo cantidades iguales á una misma cantidad, las sumas son iguales; luego el rectángulo y el paralelógramo tienen igual extension ó son equivalentes.

Ahora bien, el área del rectángulo ABFE es AB $\times$ BF, luego la del paralelógramo propuesto será tambien AB $\times$ BF, es decir, el producto de su base por su altura.

Corolarios.

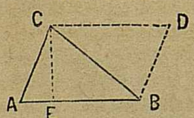
1.° *Dos paralelógramos de igual base y altura son equivalentes.*

2.° *Dos paralelógramos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales, los paralelógramos son proporcionales á las alturas; y si son iguales las alturas, los paralelógramos son entre sí como sus bases.*

Teorema. (*Fig.* 181).

276. *El área de un triángulo* ABC *es igual á la mitad del producto de su base por su altura.*

Fig. 181.



Por cada uno de los vértices B y C trazo una paralela al lado opuesto y se formará un paralelógramo ABDC, del que es mitad el triángulo propuesto. En efecto: los triángulos ABC y BCD tienen iguales los lados AC y BD, así como tambien los AB y CD, además el lado BC es comun, luego los triángulos son iguales.

Ahora bien, el área del paralelógramo ABDC es AB $\times$ CE, luego la del triángulo ABC será

$$\frac{AB \times CE}{2},$$

esto es, la mitad del producto de su base por su altura.

Corolarios.

1.° *Dos triángulos de igual base y altura son equivalentes.*

2.° *Dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si tienen bases iguales son proporcionales á las alturas; y si tienen alturas iguales son entre sí como las bases.*

Teorema.

277. *El área de un triángulo es igual á su semiperímetro multiplicado por el radio del círculo inscripto.*

Uniendo el centro del círculo inscripto con los vértices del triángulo quedará éste descompuesto en otros tres, que tendrán alturas iguales al radio del círculo y por bases los tres lados del triángulo; llamando a, b, c á los lados del triángulo y r al radio del círculo, las áreas parciales son

$$\frac{a}{2}\times r\,,\ \frac{b}{2}\times r\,,\ \frac{c}{2}\times r\,;$$

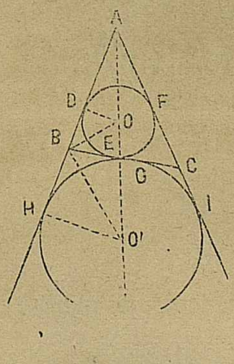
luego la del triángulo propuesto es

$$\frac{a+b+c}{2}\times r\,.$$

Teorema. (*Fig.* 182).

278. *El área de un triángulo es igual á la raiz cuadrada del producto de su semiperímetro por las tres diferencias entre éste y cada uno de los lados.*

Fig. 182.

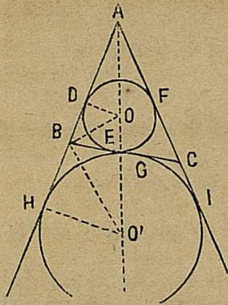


Sea el triángulo ABC.

Describo el círculo inscripto O y uno de los ex-inscriptos O'; los centros O y O' están en la bisectriz del ángulo HAI [154, *escolio* 1.°], y por consiguiente en línea recta con A; los radios OD y O'H siendo perpendiculares á AH, serán paralelos entre sí; y las bisectrices BO, BO' de los ángulos adyacentes ABC y CBH son perpendiculares.

Como las tangentes comunes á una circunferencia son iguales, tenemos

FIG. 182.



$$AH = AB + BH = AB + BG,$$

$$AI = AC + CI = AC + CG,$$

sumando, y teniendo en cuenta que AI = AH, será

$$2AH = AB + BG + AC + CG = AB + BC + AC;$$

luego AH es igual al semiperímetro.

Siendo AD = AF, BD = BE, CE = CF, tenemos

$$2AD + 2BD + 2CE = AB + BC + AC;$$

luego AD + BD + CE es tambien el semiperímetro.

Restando de los semiperímetros AH y AD + BD + CE la parte comun AD + DB, resulta BH = CE ó = CF.
AD es el semiperímetro ménos BD + BH = BE + CE = BC,
BD es el semiperímetro ménos DA + BH = AF + CF = AC,
BH es el semiperímetro ménos AB.

Llamando p al semiperímetro, a, b, c á los lados opuestos á los ángulos A, B, C, tendremos, pues,

$$AH = p, \ AD = p - a, \ BD = p - b, \ BH = p - c.$$

Ahora bien,

$$\frac{AH}{AD} = \frac{O'H}{OD}, \text{ de donde } \quad AH \times OD = AD \times O'H \ [a];$$

los triángulos O'HB, BDO son semejantes, por tener sus lados respectivamente perpendiculares; luego

$$\frac{O'H}{BD} = \frac{HB}{OD}, \text{ de donde } O'H \times OD = BD \times HB \ [b].$$

Multiplicando las igualdades [a] y [b], será

$$AH \times OD^2 = AD. \, BD. \, BH,$$

y

$$AH^2 \times OD^2 = AH. \, AD. \, BD. \, BH,$$

luego

$$AH \times OD = \sqrt{AH. \, AD. \, BD. \, BH};$$

pero AH es el semiperímetro, AH × OD el área del triángulo [277], y AD, BD, BH las tres diferencias entre el semiperímetro y cada uno de los lados; luego el teorema está demostrado. [1]

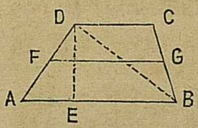
Llamando A al área del triángulo, tenemos la fórmula

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 183).

279. *El área de un trapecio* ABCD *es igual al producto de su altura por la semisuma de sus bases.*

FIG. 183.



Trazando la diagonal DB queda dividido el trapecio en dos triángulos ABD y DBC: el primero tiene por área $\frac{AB \times DE}{2}$ y el segundo $\frac{DC \times DE}{2}$; luego el área del trapecio será

$$\frac{AB \times DE}{2} + \frac{DC \times DE}{2} = DE \times \frac{AB + DC}{2},$$

esto es, la altura multiplicada por la semisuma de las bases.

ESCOLIO. Sabemos que la recta FG, que une los puntos medios de los lados AD y BC, es igual á la semisuma de las bases, luego *el área de un trapecio es igual al producto de la altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

TEOREMA.

280. *El área de un polígono regular es igual á la mitad del producto de su perímetro por su apotema.*

Trazando radios desde el centro á todos los vértices del polígono quedará éste descompuesto en tantos triángulos como lados tenga; todos los triángulos serán iguales, por tener sus

---

1 Esta demostracion está sacada, con ligeras variantes, de un folleto publicado por nuestro respetable amigo y juez el dignísimo catedrático de la Universidad é Instituto de Santiago Dr. D. Manuel Ulla Ibarzábal. Titúlase el folleto «Impugnacion de dos demostraciones de un teorema de Geometría de los matemáticos Hawney y M. Belidor, y nueva demostracion del mismo, mas elemental y geométrica que la usual» Santiago. 1880.

tres lados respectivamente iguales, y si tomamos por base de cualquiera de ellos el lado del polígono, la apotema de éste será la altura del triángulo, que tendrá por área

$$\frac{l \times a}{2},$$

llamando l al lado y a á la apotema.

Si el polígono tiene n lados su área será

$$\frac{l \times a}{2} \times n = \frac{ln \times a}{2},$$

pero ln es el perímetro, luego el área será $\frac{p \times a}{2}$, esto es, la mitad del producto del perímetro por la apotema.

Problema.

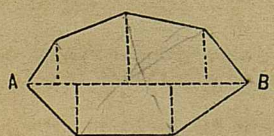
281. *Hallar el área de un polígono irregular.*

Puede resolverse este problema descomponiendo el polígono en triángulos, por medio de diagonales ó por medio de rectas trazadas desde un punto interior á todos los vértices; midiendo las áreas de los triángulos y sumándolas se obtiene el área del polígono.

Es muy frecuente, sobre todo cuando el polígono está trazado en el terreno, emplear otro método.

Sea el polígono de la figura 184.

Fig. 184.



Tomando para base de la operacion la mayor de las diagonales AB, se bajan á ella perpendiculares desde los vértices; midiendo estas perpendiculares y los segmentos de la base se tienen los datos necesarios para calcular las áreas de los triángulos y trapecios rectángulos en que se ha descompuesto el polígono; el área de éste será la suma de las áreas parciales.

CAPÍTULO SEGUNDO.

MEDIDA DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS CIRCULARES.

TEOREMA.

282. *El área de un círculo es igual á la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*

Sean C el área del círculo, c la circunferencia y r el radio.

Imaginemos un polígono regular inscripto en el círculo, y sean A su área, p su perímetro y a su apotema; tenemos

$$A = \frac{p \times a}{2}.$$

Suponiendo que el número de lados del polígono se duplique indefinidamente, el perímetro p irá aumentando, siendo su límite la circunferencia c, por consiguiente el área A del polígono, menor evidentemente que la del círculo, se acercará á ésta cuanto queramos [1]; al mismo tiempo, la apotema a tiende

---

1 Puede demostrarse con todo rigor que *el área de un polígono regular inscripto cuyo número de lados se duplica indefinidamente tiene por límite el área del círculo.*

En efecto: sean A′, p', el área y perímetro de un polígono regular circunscrito semejante al inscripto; la apotema será el radio r del círculo, y

$$A' = \frac{p' \times r}{2}, \text{ luego } A' - A = \frac{p' \times r}{2} - \frac{p \times a}{2};$$

hácia el radio r del círculo [256]; luego, en virtud del teorema de los límites, tendremos

$$C = \frac{c \times r}{2},$$

lo que debia demostrarse.

Escolio. Siendo $2\pi r$ la longitud de una circunferencia de radio r, el área del círculo será

$$C = \frac{2\pi r \times r}{2} \quad \text{ó} \quad C = \pi r^2,$$

luego *para hallar el área de un círculo se multiplica la relacion de la circunferencia al diámetro por el cuadrado del radio.*

La fórmula $C = \pi r^2$ puede servir para hallar el radio de un círculo cuya área se conoce, pues de ella se deduce

$$r^2 = \frac{C}{\pi} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}.$$

Téngase presente que la longitud del radio y el área del círculo deben expresarse en unidades correspondientes; si por ejemplo, el radio se ha medido con el metro, el área del círculo resultará expresada en metros cuadrados, y recíprocamente.

---

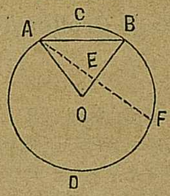
pero $\frac{p'}{p} = \frac{r}{a}$ (224), de donde $p = \frac{p'}{r} . a$; sustituyendo este valor de p en la diferencia A'—A, tendremos

$$A'-A = \frac{p' \times r}{2} - \frac{p'}{2r} a^2 = \frac{p' \times r^2 - p' \times a^2}{2r} = \frac{p'(r+a)}{2r} (r-a).$$

La diferencia A'—A puede ser tan pequeña como se quiera, porque los factores p' y $r+a$ son cantidades finitas, y el $r-a$ puede disminuir indefinidamente (256), luego el producto $\frac{p'(r+a)}{2r}(r-a)$ puede llegar á ser menor que cualquier cantidad asignable; pero es evidente que A' es mayor que el área del círculo y A menor, luego con más razon la diferencia entre el área del círculo y la del polígono inscripto podrá ser tan pequeña como se desee.

283. *Sector circular* es la parte de círculo comprendida entre un arco, llamado *base* del sector, y los radios tirados á sus extremos.

Fig. 185.



OACB (*Fig.* 185) es un sector circular cuya base es el arco ACB; tambien OADB es un sector circular que tiene por base el arco ADB.

Teorema.

284. *El área de un sector de círculo es igual á la mitad del producto de su base por el radio.*

Sea S el área del sector, b su base y r el radio del círculo.

Es evidente que la relacion entre un sector y el círculo completo á que pertenece es igual á la relacion entre el arco del sector y la circunferencia. Llamando C al círculo y c á la circunferencia, tendremos, pues

$$\frac{S}{C}=\frac{b}{c} \quad \text{ó bien} \quad \frac{S}{\pi r^2}=\frac{b}{2\pi r},$$

de donde se deduce fácilmente

$$S=\frac{b\times r}{2}.$$

Si la base del sector se nos da en grados, hay que sustituir en la fórmula anterior b por su igual $\frac{\pi r a}{180}$ [265], siendo a el número de grados; haciendo la sustitucion tendremos

$$S=\frac{\pi r^2 a}{360}.$$

Escolio. La fórmula anterior puede escribirse así:

$$S=\frac{1}{2}\,r^2 a : \frac{180}{\pi};$$

si tomamos para unidad de arcos el arco igual en longitud al radio, que es $\frac{180}{\pi}$ [268], tendremos

$$S = \frac{1}{2} r^2 a ,$$

donde a representa la relacion entre el número de grados del arco base del sector y el arco unidad 57°,29578.

Ejemplo.

Hallar el área de un sector circular cuya base es de 72° 24′ *y el radio* 12^m,75.

Empleando la fórmula $S = \frac{\pi r^2 a}{360}$, los cálculos son los siguientes:

$$a = 4344' \qquad 360° = 21600'$$

$$\begin{array}{lcl}
\log.\ \pi \ \ldots & = & 0,497150 \\
2\log.r \ \ldots & = & 2,211020 \\
\log.\ a \ \ldots & = & 3,637890 \\
\text{c.}^{\text{to}} \log.\ 21600 & = & \bar{5},665546 \\
\hline
\log.\ S & = & 2,011606 \\
S & = & 102^{m^2},7085
\end{array}$$

Por medio de la fórmula $S = \frac{1}{2} r^2 a$, tenemos:

$$a = \frac{72°24'}{57°,29578} = \frac{72,4}{57,29578}.$$

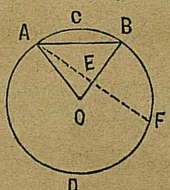
$$\begin{array}{lcl}
2\log.r \ \ldots\ldots\ldots & = & 2,211020 \\
\log.\ a \left\{ \begin{array}{l} \log.\ 72,4 \ \ldots \\ \text{c.}^{\text{to}} \log.\ 57,29578 \ . \end{array} \right. & \begin{array}{c} = \\ = \end{array} & \begin{array}{l} 1,859739 \\ \bar{2},241877 \end{array} \\
\text{c.}^{\text{to}} \log.\ 2 \ \ldots\ldots\ldots & = & \bar{1},698970 \\
\hline
\log.\ S & = & 2,011606 \\
S & = & 102^{m^2},7085.
\end{array}$$

285. Se llama *segmento de círculo* cada una de las dos partes de círculo comprendidas entre una cuerda y los dos arcos que subtiende.

TEOREMA.

El área de un segmento, mayor ó menor que el semicírculo, es igual á la mitad del producto del radio multiplicado por el arco más ó ménos una perpendicular bajada desde un extremo del mismo al radio que pasa por el otro extremo.

FIG. 185.



El segmento ADB (*Fig.* 185), mayor que el semicírculo, es la suma del sector OADB y del triángulo AOB; y el segmento ACB, menor que el semicírculo, es la diferencia entre el sector OACB y el mismo triángulo. Llamando a al arco del segmento, sea mayor ó menor que la semicircunferencia, y r al radio, el área del sector será $\frac{1}{2}\,ar$; la del triángulo es, tomando el radio OB por base, $\frac{1}{2}\,r.\,AE$; luego la del segmento será

$$\frac{1}{2}\,ar \pm \frac{1}{2}\,r\,.\,AE = \frac{1}{2}\,r\,(a \pm AE)\,.$$

ESCOLIO. Siendo OB y AE perpendiculares entre sí, la AE es mitad de la cuerda AF del arco ABF doble del ACB.

Si AF es alguno de los lados de polígono regular inscripto, cuyos valores en funcion del radio conocemos, el área del segmento se obtendrá fácilmente. Por ejemplo, si ACB $= 60°$, AE será la mitad de la cuerda del arco de $120°$, esto es $\frac{r\sqrt{3}}{2}$, y el arco ACB, sexta parte de la circunferencia, será $\frac{\pi r}{3}$; luego el área del segmento ACB tendrá por expresion

$$\frac{1}{2}\,r\left(\frac{\pi r}{3} - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{12}\,r^2(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

Fuera de los casos particulares análogos á éste, para conocer la semicuerda AE se necesitan unas *tablas trigonométricas.*

286. Dos circunferencias que tienen el mismo centro se llaman *concéntricas*, y la superficie comprendida entre ellas recibe el nombre de *corona* ó *anillo.*

Si R y r son los radios de dos circunferencias concéntricas, el área del anillo será la diferencia entre las áreas de los dos círculos, es decir

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R + r)(R - r);$$

si llamamos R′ á una media proporcional entre $R + r$ y $R - r$, será $(R + r)(R - r) = R'^2$; y el área del anillo se expresará por

$$\pi R'^2,$$

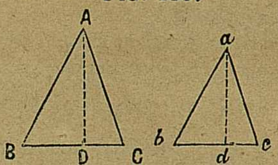
es decir *por el área de un círculo cuyo radio es medio proporcional entre la suma y la diferencia de los radios de las circunferencias que limitan al anillo.*

CAPÍTULO TERCERO.

COMPARACION DE LAS ÁREAS.

Teorema. *(Fig. 186).*

Fig. 186.



287. *Las áreas de dos triángulos semejantes* ABC *y* abc, *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos y á los de sus alturas homólogas.*

Sabemos que las áreas de dos triángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas, luego

$$\frac{\mathrm{ABC}}{abc}=\frac{\mathrm{BC}\times\mathrm{AD}}{bc\times ad} \quad \text{ó} \quad \frac{\mathrm{ABC}}{abc}=\frac{\mathrm{BC}}{bc}\times\frac{\mathrm{AD}}{ad} \qquad [a];$$

pero las bases de dos triángulos semejantes son proporcionales á sus alturas, esto es,

$$\frac{\mathrm{BC}}{bc}=\frac{\mathrm{AD}}{ad}.$$

Sustituyendo en la igualdad [*a*] la fraccion $\frac{\mathrm{AD}}{ad}$ por su igual $\frac{\mathrm{BC}}{bc}$, tendremos

$$\frac{\mathrm{ABC}}{abc}=\frac{\mathrm{BC}^2}{bc^2},$$

lo que demuestra la primera parte del teorema.

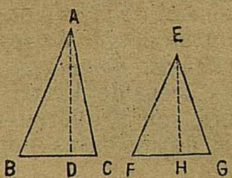
Si, por el contrario, se sustituye la fraccion $\frac{BC}{bc}$ por su igual $\frac{AD}{ad}$, será

$$\frac{ABC}{abc} = \frac{AD^2}{ad^2}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 187).

288. *Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual ó suplementario, son proporcionales á los productos de los lados que forman dicho ángulo.*

FIG. 187.



Sean ABC y EFG dos triángulos con un ángulo B = F. Tenemos

$$\frac{ABC}{EFG} = \frac{BC.AD}{FG.EH};$$

pero los triángulos rectángulos ABD, EFH son semejantes por tener un ángulo agudo igual, luego $\frac{AD}{EH} = \frac{AB}{EF}$; sustituyendo la razon $\frac{AD}{EH}$ por su igual $\frac{AB}{EF}$ será

$$\frac{ABC}{EFG} = \frac{AB.BC}{EF.FG},$$

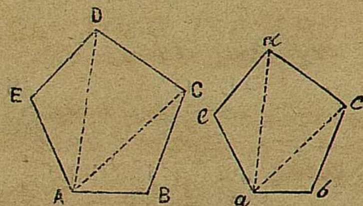
lo cual debíamos demostrar.

Haríamos idéntico razonamiento si los ángulos B y F fuesen suplementarios.

TEOREMA. (*Fig.* 188).

289. *Las áreas de dos polígonos semejantes* ABCDE *y* abcde *son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos.*

FIG 188.



Descompongo los polígonos en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, por medio de diagonales trazadas desde los vértices homólogos A y *a*.

La semejanza de estos triángulos da

$$\frac{ABC}{abc}=\frac{BC^2}{bc^2}, \quad \frac{ACD}{acd}=\frac{CD^2}{cd^2}, \quad \frac{ADE}{ade}=\frac{DE^2}{de^2};$$

pero $$\frac{BC}{bc}=\frac{CD}{cd}=\frac{DE}{de} \quad \text{y} \quad \frac{BC^2}{bc^2}=\frac{CD^2}{cd^2}=\frac{DE^2}{de^2};$$

luego $$\frac{ABC}{abc}=\frac{ACD}{acd}=\frac{ADE}{ade};$$

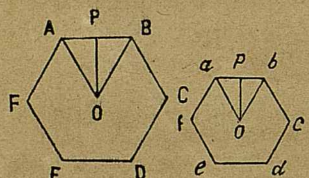
de esta série de razones iguales se deduce

$$\frac{ABC+ACD+ADE}{abc+acd+ade}=\frac{ABC}{abc}=\frac{AB^2}{ab^2},$$

ó $$\frac{ABCDE}{abcde}=\frac{AB^2}{ab^2}.$$

290. Corolario. (*Fig.* 189). *Las áreas de dos polígonos regulares semejantes* ABCDEF *y* abcdef, *son proporcionales á los cuadrados de los radios y á los cuadrados de las apotemas.*

Fig. 189.



Llamando A y a á las áreas tendremos

$$\frac{A}{a}=\frac{AB^2}{ab^2} \quad [a],$$

pero los triángulos AOB y aob son semejantes, luego

$$\frac{AB}{ab}=\frac{OA}{oa}=\frac{OP}{op} \text{ ó } \frac{AB^2}{ab^2}=\frac{OA^2}{oa^2}=\frac{OP^2}{op^2};$$

de estas igualdades y de la [a] se deduce

$$\frac{A}{a}=\frac{OA^2}{oa^2}=\frac{OP^2}{op^2}.$$

Teorema.

291. *Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Si R y r son los radios, las áreas serán πR^2 y πr^2, cuya razon es $\frac{\pi R^2}{\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}$. Como los radios son proporcionales á los diámetros D y d, la razon $\frac{R^2}{r^2}$ es igual á $\frac{D^2}{d^2}$, luego las áreas están en la relacion $\frac{D^2}{d^2}$.

292. Se llaman *sectores semejantes* aquellos cuyas bases tienen igual número de grados.

Es evidente que los ángulos formados por los radios son iguales.

TEOREMA.

Las áreas de dos sectores semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Sean R y r los radios de los sectores y a el número de grados de las bases: las áreas serán [284]

$$\frac{\pi R^2 a}{360} \text{ y } \frac{\pi r^2 a}{360} \text{ cuya razon es } \frac{R^2}{r^2}.$$

293. Se llaman *segmentos semejantes* los que corresponden á sectores semejantes.

TEOREMA.

Las áreas de dos segmentos semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Sean S y s los sectores que corresponden á los segmentos propuestos, T y t los triángulos tambien correspondientes á dichos segmentos.

Siendo semejantes los sectores S y s, tendremos

$$\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2};$$

tambien los triángulos T y t son semejantes, luego

$$\frac{T}{t} = \frac{R^2}{r^2}.$$

De estas igualdades se deduce

$$\frac{S}{s} = \frac{T}{t}, \text{ por consiguiente } \frac{S \pm T}{s \pm t} = \frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2};$$

y como $S \pm T$ y $s \pm t$ son las áreas de los segmentos, queda demostrado el teorema.

294. ESCOLIO GENERAL. En virtud de los teoremas demostrados en este capítulo, siempre que se conozca la relacion m entre dos lados homólogos de polígonos semejantes, *la elevare-*

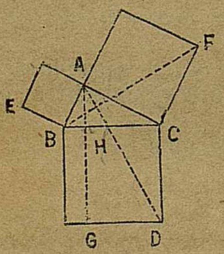
mos al cuadrado para hallar la relacion entre las áreas de los mismos. Si, por ejemplo, el lado de un polígono es *doble* de su homólogo en otro polígono semejante, el área del primero no será doble sino *cuatro veces mayor*; si la relacion de los lados es $\frac{2}{3}$, la de las áreas será $\frac{4}{9}$ etc.

Lo mismo decimos respecto de los círculos y de los sectores y segmentos semejantes.

Teorema. (*Fig.* 190).

295. *El cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es equivalente á la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos.*

Fig. 190.



Sea el triángulo ABC rectángulo en A. Vamos á demostrar que el cuadrado BD, construido sobre la hipotenusa BC, es equivalente á la suma de los cuadrados AE y AF, construidos sobre los catetos AB y AC.

Bajo desde el vértice A del ángulo recto una perpendicular AH á la hipotenusa y la prolongo hasta G; trazo las rectas AD y FB.

El triángulo ACD tiene CD por base y la altura será igual á CH; pero CD y CH son tambien la base y altura del rectángulo CG, luego el triángulo ACD es la mitad del rectángulo CG.

El triángulo FBC tiene CF por base y la altura será igual á AC, pero CF y AC son la base y altura del cuadrado AF, luego el triángulo FBC es la mitad del cuadrado AF.

Ahora bien, los triángulos ACD y FBC, que hemos considerado, son iguales, por tener AC = CF, CD = CB, y el ángulo ACD, compuesto de un recto más ACB, igual al ángulo FCB, compuesto tambien de un recto más ACB.

Siendo iguales estos triángulos, las áreas del rectángulo CG y del cuadrado AF son tambien iguales.

Del mismo modo se demostraria que el rectángulo BG equivale al cuadrado AE; y como los rectángulos CG y BG componen el cuadrado BD construido sobre la hipotenusa, el teorema queda demostrado.

Teorema.

296. *Si considerando como homólogos los lados de un triángulo rectángulo, se construyen sobre ellos tres polígonos semejantes, el construido sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los construidos sobre los catetos.*

Sean a, b, c la hipotenusa y catetos del triángulo; A, B, C las áreas de los polígonos semejantes. Tenemos [289]

$$\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}=\frac{A}{a^2},$$

de donde

$$\frac{B+C}{b^2+c^2}=\frac{A}{a^2};$$

los denominadores de estas fracciones son iguales, porque segun el teorema de Pitágoras es $a^2=b^2+c^2$, luego tambien los numeradores deben ser iguales, esto es,

$$A=B+C.$$

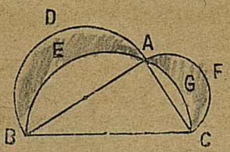
Corolario. *Si considerando como homólogos los lados de un triángulo rectángulo, se construyen tres polígonos semejantes, el construido sobre un cateto equivale á la diferencia entre el construido sobre la hipotenusa y el construido sobre el otro cateto.*

Teorema.

297. *Si considerando como radios ó como diámetros los lados de un triángulo rectángulo, se describen tres círculos, el descrito sobre la hipotenusa es equivalente á la suma de los descritos sobre los catetos; y el descrito sobre un cateto es la diferencia entre el descrito sobre la hipotenusa y el descrito sobre el otro cateto.*

La demostracion es igual á la del teorema anterior.

Fig. 191.



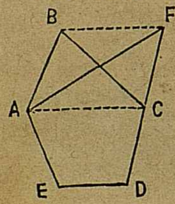
Corolario. *(Fig. 191). Si sobre los lados de un triángulo rectángulo, considerados como diámetros, se describen tres semicircunferencias, el área del triángulo es igual á la suma de las áreas de las figuras* ADBEA *y* AFCGA, llamadas *lúnulas* de Hipócrates.

Ante todo haremos notar que el semicírculo construido sobre BC pasa por el vértice A [123, 3.º]. Además, este semicírculo es equivalente, segun se deduce del teorema anterior, á la suma de los semicírculos descritos sobre AB y AC; restando del primero los segmentos AEB y AGC resulta el triángulo ABC, y restando de la suma de los semicírculos AB y AC los mismos segmentos resultan las lúnulas; luego el triángulo es equivalente á la suma de las lúnulas.

PROBLEMAS RELATIVOS Á LAS ÁREAS.

298. 1.º *Convertir un polígono* ABCDE (Fig. 192) *en otro equivalente que tenga un lado ménos.*

Fig. 192.



Trazo una diagonal AC que forme con dos lados consecutivos del polígono un triángulo ABC; por el vértice B tiro una paralela BF á la diagonal; prolongo el lado DC hasta que encuentre á la paralela BF; y trazando la recta AF, se forma un polígono AFDE equivalente al propuesto y con un lado ménos.

En efecto: los triángulos ABC y AFC son equivalentes, por tener igual base y altura; si á la figura ACDE añadimos el primero de ellos resulta el polígono propuesto ABCDE, y si á la misma figura añadimos el segundo triángulo resulta el polígono AFDE; luego estos polígonos son equivalentes.

299. 2.º *Convertir un polígono en triángulo equivalente.*

Redúzcase el polígono á otro equivalente que tenga un lado ménos, repítase la misma operacion con el polígono resultante, y continúese así hasta obtener un triángulo.

300. 3.º *Convertir un triángulo en cuadrado equivalente.*

Sean b y a la base y altura del triángulo, y x el lado del cuadrado equivalente.

El área del cuadrado es x^2 y la del triángulo $\frac{b \times a}{2}$, luego

$$x^2 = \frac{b \times a}{2} \quad \text{ó} \quad x^2 = \frac{b}{2} \times a;$$

donde se ve que el lado x del cuadrado es una media proporcional entre la mitad de la base y la altura del triángulo.

301. 4.° *Convertir un polígono cualquiera en cuadrado equivalente.*

Redúzcase el polígono á triángulo y éste á cuadrado.

Si el área del polígono es el producto de dos líneas, bastará hallar una media proporcional entre ellas, y se tendrá el lado del cuadrado.

Así, dado un paralelógramo, se hallará una media proporcional entre la base y la altura; si tenemos un trapecio, hallarémos una media proporcional entre la altura y la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos; y dado un polígono regular se construirá una media proporcional entre la mitad del perímetro y la apotema.

302. 5.° *Convertir un círculo en cuadrado equivalente.*

Este famoso problema de la *cuadratura del círculo* se resuelve aproximadamente hallando una media proporcional entre la mitad de la circunferencia rectificada [261] y el radio. Como no se conoce el medio geométrico de rectificar exactamente la circunferencia, el problema de la cuadratura del círculo está sin resolver, á pesar de los esfuerzos hechos durante muchos siglos. Con el cálculo se alcanza un grado de aproximacion más que suficiente en todos los casos prácticos, pues la longitud de la circunferencia depende del valor de π, que se ha calculado con gran número de cifras decimales.

303. 6.° *Dados dos polígonos semejantes, construir otro semejante á ellos é igual á su suma ó diferencia.*

1.° Constrúyase un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales á dos lados homólogos de los polígonos conocidos; considerando la hipotenusa de este triángulo como lado homólogo de los elegidos para catetos, constrúyase sobre ella un polígono semejante á los dados, que será equivalente á su suma [296].

2.° Tómense dos lados homólogos de los polígonos semejantes para hipotenusa y cateto de un triángulo rectángulo: el polígono semejante á los dados, construido sobre el otro cateto, será la diferencia de éstos.

304. 7.° *Describir un círculo equivalente á la suma ó diferencia de otros dos.*

Este problema se resuelve como el anterior.

305. 8.° *Dado un polígono* P *construir otro semejante* Q, *tal que las áreas de los dos guarden una relacion dada* m: n.

Análisis. Sea a un lado del polígono P, y x su homólogo en el polígono Q: si determinamos el lado x estará resuelto el problema. Tenemos [289]

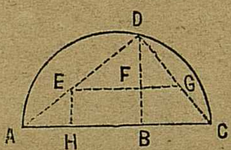
$$\frac{P}{Q}=\frac{a^2}{x^2};$$

además, es condicion del problema que

$$\frac{P}{Q}=\frac{m}{n}; \quad \text{luego} \quad \frac{a^2}{x^2}=\frac{m}{n} \qquad [a].$$

Si m y n fuesen las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, y a uno de los catetos, el otro seria x [185, 3.°].

Fig. 193.



Síntesis. *(Fig. 193)*. En una recta indefinida tomemos, una á continuacion de otra, las longitudes AB y BC iguales á m y n; sobre AC como diámetro describamos una semicircunferencia; por el punto B levantemos una perpendicular al diámetro; y unamos D con A y C.

El triángulo ADC es rectángulo, y los segmentos AB y BC de la hipotenusa son iguales á m y n, luego si el cateto AD fuese igual á a, el otro DC seria igual á x; pero se comprende que, en general, AD no será igual á a, por lo que tomaremos en AD, prolongada si es preciso, una longitud DE igual al lado a, y tirando por E una paralela á AC determinaremos en DC una longitud DG que es igual á x.

En efecto: en el triángulo rectángulo EDG tenemos

$$\frac{ED^2}{DG^2}=\frac{EF}{FG}, \quad \text{pero} \quad \frac{EF}{FG}=\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}, \quad \text{luego} \quad \frac{ED^2}{DG^2}=\frac{m}{n},$$

ó bien

$$\frac{a^2}{DG^2}=\frac{m}{n}.$$

Comparando esta igualdad con la [a], se deduce $x = DG$.

306. 9.° *Dada una recta* a *trazar otra* x *tal que las longitudes de las dos sean proporcionales á las áreas de dos polígonos dados* P *y* Q.

Análisis. Tenemos:

$$\frac{P}{Q}=\frac{a}{x};$$

sustituyendo los polígonos P y Q por los cuadrados equivalentes p^2 y q^2, tenemos

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{a}{x}.$$

Si p y q fuesen los catetos de un triángulo rectángulo, y a la proyeccion de p sobre la hipotenusa, la proyeccion de q seria la recta buscada x [185, 3.º].

Síntesis. (*Fig.* 193). Construyamos un triángulo rectángulo cuyos catetos DA, DC sean iguales á p y q, y bajemos la perpendicular DB. Si el segmento AB de la hipotenusa fuese igual á a, el otro segmento BC seria la recta buscada x; pero, en general, AB no será igual á a, por lo que tomaremos en AB, prolongada si es preciso, una longitud BH$=a$, trazaremos por H una paralela á DB hasta que encuentre á AD en un punto E, y tirando EG paralela á AC, será EF igual á a, y por tanto FG igual á x, toda vez que los cuadrados de DE y DG son proporcionales á los de DA y DC, es decir á p^2 y q^2.

307. 10.º *Dados dos polígonos* P *y* Q, *construir otro semejante á* P *y equivalente á* Q.

Análisis. Sea X el polígono que se busca, a un lado del polígono P, y x su homólogo en el polígono X.

Debiendo ser semejantes los polígonos P y X, será

$$\frac{P}{X}=\frac{a^2}{x^2},$$

y como X debe ser equivalente á Q, tendremos

$$\frac{P}{Q}=\frac{a^2}{x^2};$$

reemplazando los polígonos P y Q por los cuadrados equivalentes p^2 y q^2 será

$$\frac{p^2}{q^2}=\frac{a^2}{x^2} \quad \text{ó} \quad \frac{p}{q}=\frac{a}{x}.$$

Síntesis. Vemos por el análisis anterior que x es una cuarta proporcional á las rectas conocidas p, q y a. Construyendo sobre x un polígono semejante al P estará resuelto el problema.

Escolio. Si P es un polígono regular, el que se obtenga será tambien regular, por consiguiente podemos transformar un polígono dado en otro equivalente regular del número de lados que se pida.

EJERCICIOS DE LA GEOMETRÍA PLANA.

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR.

I. El camino más corto de un punto á una circunferencia es la parte exterior de la secante tirada por dicho punto y el centro.

II. En una circunferencia dada, el lugar geométrico de los puntos medios de varias cuerdas que tienen un punto comun, es otra circunferencia cuyo diámetro es la recta tirada desde el punto comun al centro de la circunferencia dada.

III. Si dos cuerdas se cortan perpendicularmente, la suma de dos arcos no contiguos interceptados por ellas es igual á la semicircunferencia.

IV. Todo diámetro está dividido armónicamente por su interseccion con una cuerda perpendicular al mismo y por el punto de encuentro de dos tangentes tiradas por los extremos de la cuerda.

V. Si se trazan dos tangentes fijas á una circunferencia desde un punto exterior, y otra tangente móvil comprendida en el ángulo de las fijas: 1.º el ángulo bajo el cual se ve la tangente móvil desde el centro es constante; 2.º el perímetro del triángulo que forman las tres tangentes es constante.

VI. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es: 1.º paralela al tercer lado; 2.º igual á su mitad.

VII. De todos los triángulos que tienen igual base y altura el isósceles es el que tiene menor perímetro.

VIII. Un ángulo de un triángulo es recto, agudo ú obtuso segun que la recta que une el vértice con el punto medio del lado opuesto es igual, mayor ó menor que la mitad de dicho lado. *Recíproco*.

IX. El producto de dos lados de un triángulo es igual al producto de la altura bajada sobre el tercer lado por el diámetro del círculo circunscrito.

X. Si dos cuerdas se cortan perpendicularmente, la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos es igual al cuadrado del diámetro.

XI. En todo triángulo, la suma de los cuadrados de dos lados es igual al duplo del cuadrado de la mitad del tercero más el duplo del cuadrado de la recta que une el punto medio de éste con el vértice opuesto.

XII. Uniendo los puntos medios de los lados de un cuadrilátero por rectas que no se crucen resulta un paralelógramo.

XIII. La suma de los cuadrados de los lados de un cuadrilátero es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales, más el cuádruplo de la recta que une los puntos medios de las mismas.

Corolario. La suma de los cuadrados de los lados de un paralelógramo es igual á la suma de los cuadrados de las diagonales.

XIV. Si desde un punto tomado en la prolongacion de una diagonal de un cuadrilátero se trazan dos transversales que corten á los lados del mismo, las razones segmentarias de dos lados adyacentes son proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos. *Recíproco.*

XV. Si desde cada uno de los puntos de concurso de los lados opuestos de un cuadrilátero se traza una transversal que corte á los otros dos lados, las razones segmentarias de dos lados opuestos son proporcionales á las razones segmentarias de los otros dos.

XVI. El área de un triángulo es igual al producto de sus tres lados dividido por el duplo del diámetro del círculo circunscrito (Ejercicio IX).

XVII. Si desde un punto interior á un paralelógramo se tiran rectas á todos sus vértices, la suma de los triángulos que tienen por bases dos lados opuestos, es equivalente á la suma de los otros dos.

XVIII. La suma de las perpendiculares bajadas á los lados de un triángulo equilátero desde un punto interior es constante.

XIX. Si desde un punto interior á un polígono regular de n lados se bajan perpendiculares á todos éstos, la suma de las perpendiculares es igual á n veces la apotema.

XX. Las áreas de dos triángulos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de los círculos inscriptos y circunscritos.

PROBLEMAS PARA RESOLVER.

I. Describir una circunferencia conociendo el radio y dos puntos de la misma.

II. Describir una circunferencia tangente á una recta dada en un punto dado, siendo conocido el radio.

III. Describir una circunferencia tangente á otra dada en un punto dado y que pase por otro punto dado.

IV. Describir una circunferencia tangente á otra dada en un punto dado, siendo conocido el radio.

V. Describir una circunferencia tangente á otra dada en un punto dado, y además tangente á una recta dada.

VI. Por un punto dado trazar una secante á una circunferencia dada, de tal modo que la cuerda interceptada sea igual á una recta dada.

VII. Construir un triángulo isósceles conociendo la base y el ángulo opuesto.

VIII. Construir un triángulo conociendo la base, la altura y el ángulo opuesto á la base.

IX. Construir un triángulo conociendo la altura y los ángulos adyacentes á la base.

X. Construir un triángulo conociendo un lado, uno de sus ángulos adyacentes y la suma ó diferencia de los otros dos lados.

XI. Construir un paralelógramo conociendo las diagonales y un lado.

XII. Construir un trapecio conociendo las bases y los lados no paralelos.

XIII. Construir dos rectas conociendo su suma y la media proporcional entre ellas.

XIV. Construir dos rectas conociendo su diferencia y la media proporcional entre ellas

XV. Dados tres puntos dirigir por uno de ellos una recta, tal que sus distancias á los otros dos puntos sean proporcionales á dos rectas dadas.

XVI. Dadas tres rectas que concurren en un punto, trazar por otro dado una secante, tal que las dos partes interceptadas por las rectas dadas sean proporcionales á dos rectas conocidas.

XVII. Hallar el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos equivalentes cuya base es comun.

XVIII. Determinar un punto interior á un triángulo, tal que las rectas tiradas á los tres vértices dividan el triángulo en partes proporcionales á tres rectas dadas.

XIX. Construir un rectángulo equivalente á un cuadrado dado m^2, tal que la suma ó la diferencia de dos lados contiguos sea igual á una línea dada a.

XX. Conociendo las bases y la altura de un trapecio, hallar las áreas de los triángulos total y parcial que se forman prolongando los lados no paralelos.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

SECCION PRIMERA.

PROPIEDADES Y RELACIONES DE LA EXTENSION.

LIBRO PRIMERO

SUPERFICIES.

CAPÍTULO PRIMERO.

SUPERFICIE PLANA.

I.—Preliminares.

308. En el número 3 hemos dicho:

SUPERFICIE PLANA ó PLANO *es una superficie tal que apoyando en dos cualesquiera de sus puntos una línea recta, todos los puntos de ésta se colocan en la superficie.*

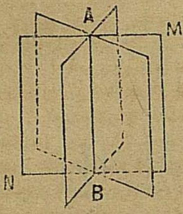
La superficie plana se considera ilimitada en todos sentidos; sin embargo se representa por una figura limitada, generalmente un paralelógramo.

Segun la definicion anterior, *si una recta tiene dos puntos en un plano estará enteramente situada en él.*

De aquí se deduce: *la interseccion de una recta y un plano es un punto.*

Imaginando en el espacio una recta y un plano, sucede una de estas tres cosas: 1.ª la recta tiene todos sus puntos en el plano, ó está situada en él; 2.ª la recta tiene un solo punto en el plano, ó corta al plano; 3.ª la recta no tiene ningun punto en el plano, ó es *paralela* al mismo.

FIG. 194.

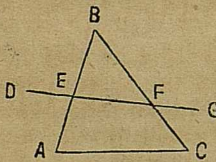


309. *Por una línea recta pueden pasar infinitos planos*, pues se concibe que el plano MN, que pasa por la recta AB, (*Fig.* 194) puede girar alrededor de ella ocupando en el espacio diversas posiciones, las que representan otros tantos planos diferentes pasando todos por AB.

TEOREMA. (*Fig.* 195).

5 310. *Tres puntos* A, B, C *que no están en línea recta determinan la posicion de un plano*, es decir, *por los tres puntos* A, B, C *puede pasar un plano y solo puede pasar uno.*

FIG. 195.



Tracemos la recta AB, hagamos pasar por ella un plano, é imaginemos que éste gire alrededor de la recta; es claro que al verificar su movimiento de rotacion, como el plano se supone ilimitado en todos sentidos, llegará á pasar por C, luego por los tres puntos A, B, C puede pasar un plano.

Designémosle por P, y supongamos otro P′ que pase tambien por A, B y C; tracemos la recta BC: teniendo AB y BC dos puntos en P y en P′ se hallarán á la vez en los dos planos. Tomemos en el primero P un punto cualquiera D y tracemos una recta DG que corte en E y F á las AB y BC: como los puntos E y F pertenecen á los dos planos, la recta DG trazada en el P estará tambien en el P′, luego D será un punto comun á los dos.

Esto nos demuestra que todo punto D del plano P pertenece tambien al P′; por consiguiente ambos planos coinciden en toda su extension.

COROLARIOS.

6 1.º *Una recta y un punto exterior determinan la posicion de un plano.*

Marcando dos puntos en la recta tendremos, con el exterior, tres puntos no en línea recta, que determinan un plano.

7 2.° *Dos rectas que se cortan determinan la posicion de un plano.*

Señalando un punto en cada recta, por éstos y el de interseccion pasará un plano que contendrá á las rectas dadas. Además, todo plano que pase por ellas se confundirá con el primero, pues contendrá aquellos tres puntos.

8 3.° *Dos rectas paralelas determinan la posicion de un plano.*

Por dos rectas paralelas pasa siempre un plano: aquel en que están situadas. Además, todo plano que pase por las rectas se confundirá con el primero, pues marcando dos puntos en una paralela y uno en la otra, estos tres puntos no en línea recta serán comunes á los dos planos, que por consiguiente coincidirán.

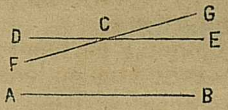
4.° *La interseccion de dos planos es una línea recta, y la de tres un punto.*

Pues si dos planos tuviesen tres puntos comunes no en línea recta, coincidirian; además si la recta interseccion de los primeros planos se corta por un tercero, resultará un punto comun á los tres.

311. Imaginando en el espacio dos planos sucede una de estas tres cosas: 1.ª los planos se confunden en uno solo, para lo cual basta que tengan tres puntos comunes no en línea recta; 2.° los planos se cortan, y tienen una recta comun; 3.° los planos no tienen ningun punto comun, ó son *paralelos*.

312. *Por un punto* C *del espacio no puede trazarse más que una paralela á una recta dada* AB.

Fig. 196.

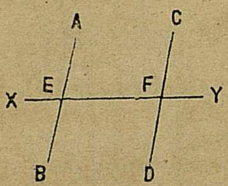


(*Fig.* 196). Supongamos que pasen por C dos paralelas DE y FG á la recta AB; las rectas FG y AB determinan un plano, y las DE y AB determinan otro; pero estos dos planos coinciden, por tener comun una recta AB y un punto C, luego tenemos en un mismo plano dos paralelas á una recta AB por un punto C, lo que es absurdo.

Teorema. (*Fig.* 197).

313. *Si una recta* AB *se mueve apoyándose en otra recta fija* XY *y conservándose paralela á su posicion primitiva, dicha recta móvil engendra un plano.*

FIG. 197.



Sea CD una de las posiciones de la recta móvil. Las rectas AB y XY, que se cortan, determinan un plano; y las AB y CD, por ser paralelas, determinan otro; pero estos planos tienen comun una recta AB y un punto F, luego coinciden. Vemos, pues, que la recta móvil, considerada en cualquier posicion CD, se halla situada en el plano que determinan AB y XY, por consiguiente es la generatriz de este plano.

314. Imaginando en el espacio dos líneas rectas, y haciendo pasar un plano por una de ellas AB y un punto C de la otra, ésta podrá estar situada enteramente en el plano ó cortarle en C.

En el primer caso, hallándose las rectas en un mismo plano, se cortarán ó serán paralelas.

En el segundo caso, las rectas dadas no pueden estar en un mismo plano, porque si existiera un plano que las contuviese se confundiria con el primero, por tener comun la recta AB y el punto C, y resultaria que el primer plano contendria la segunda recta, siendo así que suponemos la corta. Dos rectas en esta posicion ni se cortan ni son paralelas, pues en ambos casos existiria un plano que las contuviese enteramente [310, *corolarios* 2.° y 3.°].

Vemos, pues, que dos rectas distintas en el espacio pueden 1.° cortarse en un punto, 2.° ser paralelas, 3.° no estar en un mismo plano.

II.—Rectas que cortan al plano.

Perpendiculares, oblícuas, ángulo de recta y plano.

315. *Una recta es* PERPENDICULAR *á un plano cuando es perpendicular á todas las rectas que pasan por su pié en el plano.*

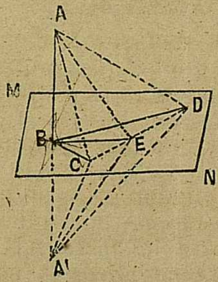
En tal caso el plano es tambien perpendicular á la recta.

Una recta es *oblícua* á un plano cuando le encuentra sin serle perpendicular.

TEOREMA. *(Fig. 198).*

316. *Si una recta* AB *es perpendicular á dos rectas* BC, BD *de las que pasan por su pié* B *en un plano* MN, *es perpendicular á todas las demás y por consiguiente al plano.*

FIG. 198.



Sea BE otra de las rectas que pasan por B en el plano MN. Trazo una recta CD que corte á BC, BE y BD, prolongo la AB hácia la parte inferior, tomo A'B = AB, y uno A y A' con C, E y D.

Las rectas BC y BD son perpendiculares á AA' en su punto medio C, luego [48]

$$AC = A'C, \quad AD = A'D, \text{ además } CD = CD;$$

por consiguiente los triángulos ACD y A'CD son iguales.

Si imaginamos el A'CD colocado sobre el ACD, es claro que la recta A'E coincidirá con AE, luego A'E = AE. Vemos, pues, que BE tiene dos puntos B y E equidistantes de A y A', luego BE es perpendicular á AA'.

TEOREMA.

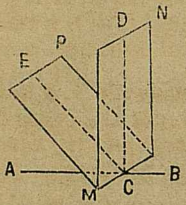
317. *Por un punto dado siempre se puede trazar un plano perpendicular á una recta dada, y no se puede trazar más que uno.*

1.° Puede suceder que el punto esté en la recta ó fuera de ella.

Sea el punto B *(Fig.* 198) dado en la recta AA'. En dos de los infinitos planos que pasan por AA' levanto las perpendiculares BC y BD á esta recta en el punto B, las que determinan un plano, por ser rectas que se cortan, perpendicular á AA' en el punto B [316].

Si el punto dado es C, exterior á la recta dada AA', bajaremos CB perpendicular á AA', en el plano que determinan la AA' y el punto C; por el pié B, y en otro de los planos que pasan por AA', levantaremos una segunda perpendicular BD á AA': las perpendiculares BC y BD determinan un plano que pasa por el punto dado C y es perpendicular á la recta AA'.

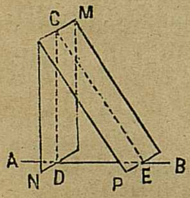
Fig. 199.



2.° Si por el punto C dado en la recta AB (*Fig.* 199) pudieran trazarse dos planos MN y MP perpendiculares á AB, imaginando un tercer plano que pasase por AB, cortaria á los MN y MP segun dos rectas CD y CE; siendo AB perpendicular á los planos MN y MP seria tambien perpendicular á las rectas CD y CE que pasan por su pié; luego en un punto C de una recta AB y en el mismo plano tendríamos dos perpendiculares CD y CE á dicha recta, lo que es imposible.

Si el punto C está fuera de la AB (*Fig.* 200) tampoco es posible que pasen por él dos planos MN y MP perpendiculares á AB; porque concibiendo el plano que determinan C y AB cortará á los anteriores segun dos rectas CD y CE, y si AB fuese perpendicular á MN y MP, lo seria igualmente á CD y CE que pasan por los piés D y E, y tendríamos en el mismo plano dos perpendiculares CD y CE desde un punto C á una recta AB, lo que es imposible.

Fig. 200.



Escolio. *Un plano está determinado por un punto y la condicion de ser perpendicular á una recta dada.*

Teorema. (*Fig.* 198).

318. *Todas las perpendiculares* BC, BD, BE *etc. levantadas á una recta* AB *en uno de sus puntos* B, *están en un mismo plano.*

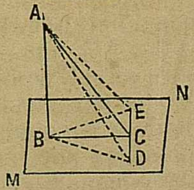
Dos cualesquiera de las perpendiculares, BC y BD por ejemplo, determinan un plano MN perpendicular á AB en el punto B; si otra perpendicular BE no estuviera en el plano MN, determinaria con BC otro plano perpendicular á AB en B, y tendríamos dos planos perpendiculares á AB en B, lo que es imposible.

Escolio. *El lugar geométrico de las perpendiculares levantadas á una recta por un mismo punto, es el plano perpendicular á la recta en dicho punto.*

TEOREMA. *(Fig. 201).*

319. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* MN, *y desde el pié* B *se baja una perpendicular* BC *á una recta* DE *situada en el plano, toda recta* AC *que una el pié de la segunda perpendicular con un punto cualquiera de la primera, es perpendicular á la* DE *trazada en el plano.* [1]

FIG. 201.



Tomo á ambos lados del punto C dos longitudes iguales CD y CE, y trazo las rectas BD, BE y las AD, AE.

Tenemos BD = BE, por ser oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular BC á DE, luego los triángulos ABD, ABE, rectángulos en B [315], que tienen además de BD = BE un cateto AB comun, son iguales, por consiguiente AD = AE; vemos que AC tiene dos puntos equidistantes de D y E, luego es perpendicular á DE.

ESCOLIO. Siendo DE perpendicular á CB y CA, será perpendicular al plano ACB que estas rectas determinan.

TEOREMA. *(Fig. 201).*

320. *Por un punto dado siempre se puede trazar una recta perpendicular á un plano dado, y no se puede trazar más que una.*

1.° Sea B un punto dado en el plano MN. Trazo en este plano una recta DE, bajo BC perpendicular á DE, por el pié C tiro otra perpendicular CA á DE en plano distinto del MN, levanto en el plano ACB la perpendicular BA á BC, y digo que BA es perpendicular al plano MN.

En efecto: DC es perpendicular al plano BCA en el punto C; desde el pié C tenemos otra perpendicular CB á la AB trazada

1 Esta proposicion suele llamarse *Teorema de las tres perpendiculares.*

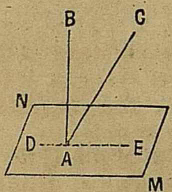
en dicho plano; luego si unimos B con un punto cualquiera D de la primera perpendicular, la recta de union BD será perpendicular á AB, ó lo que es igual, AB es perpendicular á BD, y como tambien lo es á BC, por construccion, lo será al plano de BD y BC, que es el MN.

Sea A un punto dado fuera del plano MN.

Trazo en este plano una recta DE, bajo AC perpendicular á DE, en el plano que A y DE determinan, por el pié C tiro otra perpendicular CB á DE en el plano MN, bajo en el plano ACB la perpendicular AB á BC: esta recta AB es perpendicular al plano MN, como se demuestra repitiendo el razonamiento del caso anterior.

2.° Si por un punto A del plano MN (*Fig.* 202) pudieran levantarse dos perpendiculares AB y AC, determinarian un plano que cortaria al MN segun una recta DE, y tendríamos dos perpendiculares AB y AC á la recta DE en un mismo punto y plano, lo que es imposible.

Fig. 202.

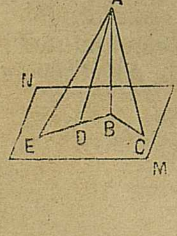


Si el punto A es exterior al plano MN (*Fig.* 203), tampoco es posible bajar desde él dos perpendiculares AB, AC al plano MN, porque AB y AC determinan otro plano que corta al MN segun una recta BC, y si AB y AC fuesen perpendiculares al plano lo serian á la recta BC, lo que es imposible.

Escolio. *Una recta está determinada por un punto y la condicion de ser perpendicular á un plano dado.*

Teorema. (*Fig.* 203).

Fig. 203.



321. *Si desde un punto* A *exterior á un plano* MN *se tiran á éste una perpendicular* AB *y una oblicua* AC, *la perpendicular es menor que la oblicua.*

Trazando BC, la AB será perpendicular á BC y la AC oblicua, luego AB < AC [42].

Teorema recíproco.

Si una recta es la menor de cuantas pueden tirarse desde un punto á un plano, dicha recta es perpendicular al plano.

Pues si fuese oblicua habria otra menor que ella.

322. *Se llama* DISTANCIA *entre un punto y un plano la perpendicular trazada desde el punto al plano.*

Teorema. (*Fig.* 203).

323. *Si desde un punto* A *exterior á un plano* MN *se bajan á éste una perpendicular y varias oblicuas*: 1.° *las oblicuas* AD *y* AC *que se apartan igualmente de la perpendicular* AB *son iguales*; 2.° *de dos oblicuas* AC *y* AE *que se apartan desigualmente de la perpendicular, es mayor la* AE *que se aparta más.*

1.° Uniendo los piés C y D de las oblicuas con el pié B de la perpendicular se forman los triángulos rectángulos iguales ABC y ABD, luego $AC = AD$.

2.° Unamos el pié de la oblicua AE con el de la perpendicular, y en BE tomemos $BD = BC$. Por la geometría plana tenemos $AE > AD$, pero $AD = AC$, luego $AE > AC$.

Corolario. *Desde un punto* A *pueden tirarse á un plano* MN *infinitas oblicuas iguales.*

Describiendo en el plano MN una circunferencia de centro B, todas las oblicuas tiradas desde A á los puntos de la circunferencia son iguales.

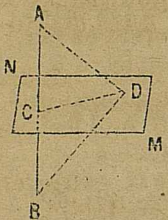
Teorema recíproco.

1.° *Si dos oblicuas á un plano son iguales, se apartan igualmente de la perpendicular*; 2.° *si dos oblicuas son desiguales, la mayor se aparta de la perpendicular más que la menor* [55].

TEOREMA. *(Fig. 204).*

324. *El lugar geométrico de todos los puntos del espacio, cada uno de los cuales equidista de los extremos de una recta* AB, *es un plano* MN *perpendicular á esta recta en su punto medio.*

FIG. 204.



Si unimos un punto D del plano MN con el punto C, la recta CD será perpendicular á AB en su punto medio, luego AD = BD.

Además, un punto cualquiera situado fuera del plano MN no se hallará en ninguna de las perpendiculares que pueden levantarse á la recta AB por su punto medio C, porque todas estas perpendiculares están en el plano MN; luego dicho punto exterior al plano MN no equidista de A y B.

TEOREMA. *(Sin figura.)*

325. *Si un plano* P *tiene tres puntos* A, B, C, *no en línea recta, equidistante cada uno de los extremos de una recta dada, es perpendicular á ésta y la divide en dos partes iguales.*

Concibiendo, en efecto, un plano perpendicular á la recta dada en su punto medio, pasará por A, B y C, luego coincidirá con el P.

III.—Planos que se cortan.

Ángulos diedros, planos perpendiculares y oblicuos.

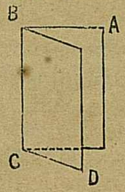
326. Dos planos que se cortan y terminan en la recta interseccion, forman un *ángulo diedro.*

Estos planos se llaman *caras* del ángulo, y la interseccion *arista.*

Un ángulo diedro se designa generalmente por cuatro letras, una de cada cara y dos de la arista, debiendo leerse estas dos en medio. Así el ángulo de la figura 205 se lée

áng. ABCD ó *áng.* DCBA.

Fig. 205.



Cuando la arista no es comun á dos ó más ángulos, basta leer sus dos letras; así *áng*. BC.

Dos ángulos diedros son iguales si colocando una cara del primero sobre otra del segundo, de modo que las aristas coincidan, las otras dos caras se confunden en una sola. En el caso contrario, los diedros son desiguales.

Recíprocamente, si sabiendo que dos diedros son iguales, los superponemos de modo que coincidan dos caras y las aristas, cayendo las otras dos caras hácia un mismo lado de la cara comun, estas dos últimas se confundirán.

Se suman dos ángulos diedros haciendo que coincidan dos de sus caras y las aristas, de modo que las otras dos caras queden á uno y otro lado de la cara comun: el diedro que forman las caras exteriores es la suma de los diedros dados.

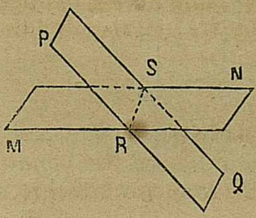
La magnitud de un ángulo diedro no depende de la extension de sus caras, sino de la mayor ó menor separacion de ellas.

Plano BISECTOR *de un diedro es un plano que pasa por la arista y divide al diedro en dos partes iguales.*

Es evidente que todo diedro tiene un plano bisector y solo uno.

Dos planos indefinidos MN, PQ que se cortan *(Fig.* 206) forman cuatro ángulos diedros MRSP, NRSP, MRSQ, NRSQ.

Fig. 206.



Ángulos diedros ADYACENTES *son dos ángulos que tienen una cara comun y las otras dos en un mismo plano.*

Los ángulos MRSP y NRSP son adyacentes.

Ángulos diedros OPUESTOS POR LA ARISTA *son dos ángulos de los que uno está formado por las prolongaciones de las caras del otro.*

MRSP y NRSQ son opuestos por la arista.

Un plano es PERPENDICULAR *á otro cuando forma con éste dos diedros adyacentes iguales.*

Ángulo *diedro recto* es cada uno de los dos ángulos adyacentes iguales que forma un plano con otro al que es perpendicular.

Un plano es OBLICUO *á otro cuando forma con éste dos diedros adyacentes desiguales.*

Estos ángulos se llaman *oblicuos*.

Todo plano que encuentra á otro es respecto de éste perpendicular ú oblicuo.

327. *Ángulo rectilíneo* CORRESPONDIENTE Á UN DIEDRO *es el ángulo que forman dos perpendiculares levantadas á la arista por el mismo punto, una en cada cara.*

Si FE y FG son perpendiculares á la arista BC del diedro ABCD, el ángulo EFG (*Fig.* 207) es el rectilíneo correspondiente al diedro.

Nótese que el plano determinado por el ángulo rectilíneo EFG es perpendicular á la arista del diedro [315].

TEOREMA. (*Figs.* 207 y 208).

328. 1.° *Si dos ángulos diedros son iguales, sus rectilíneos correspondientes tambien son iguales.* 2.° *Si dos diedros son desiguales, al mayor diedro corresponde mayor ángulo rectilíneo.*

FIG. 207.

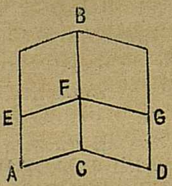
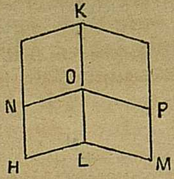


FIG. 208.



1.° Sean los diedros iguales BC y KL. Coloco el KL sobre el BC de modo que la cara HK coincida con la AB, cayendo la arista KL sobre la BC y el punto O en F; las caras KM y BD coincidirán, por tanto las perpendiculares OP y FG á la arista comun en el mismo punto F y plano BD deberán confundirse, así como tambien las ON y FE, perpendiculares á BC en el plano AB; luego los ángulos rectilíneos EFG y NOP son iguales.

2.° Sea el diedro BC mayor que el KL. Coloco éste sobre aquel de modo que coincidan las aristas, el punto O con el F y la cara HK con la AB; la recta ON coincidirá con la FE, pero la cara KM quedará entre la AB y la BD, por la hipótesis; las rectas FE, OP y FG se colocan en un mismo plano perpendicular á BC en el punto F [318], y como OP está en el plano KM queda situada entre los lados FE, FG del ángulo EFG; luego el ángulo NOP es menor que el EFG.

Escolio. Si los diedros BC y KL son iguales y trazamos otro ángulo rectilíneo ACD correspondiente al diedro BC, será EFG = NOP, ACD = NOP, luego EFG = ACD; por tanto, *los ángulos rectilíneos correspondientes á un mismo diedro son iguales.*

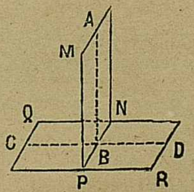
Teorema recíproco.

1.° *Si dos ángulos rectilíneos correspondientes á dos diedros son iguales, los diedros tambien son iguales.* 2.° *Si los rectilíneos son desiguales, el diedro á que corresponde mayor rectilíneo es mayor que el otro* [55].

Teorema. *(Fig. 209).*

329. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* QR, *todo plano* MN *que pase por ella será perpendicular al primero* QR.

Fig. 209.



Trazo en el plano QR la perpendicular CD á la arista PN en el punto B; como AB tambien es perpendicular á dicha arista, los ángulos ABC y ABD son los rectilíneos correspondientes á los diedros MNPQ y MNPR; pero ABC = ABD, porque la perpendicular AB al plano QR lo es á la recta CD que pasa por su pié; luego tambien los diedros adyacentes MNPQ y MNPR son iguales; por consiguiente el plano MN es perpendicular al QR.

Escolio. *Por una recta perpendicular á un plano pasan infinitos planos perpendiculares al primero.*

Teorema. *(Fig. 209).*

330. *Por una recta* PN *dada en un plano* QR *se puede siempre levantar un plano perpendicular al primero y no se puede levantar más que uno.*

1.° Por un punto B de PN levanto BA perpendicular al plano QR: el plano que determinan PN y BA es perpendicular al QR.

2.° Es evidente que cualquier otro plano que levantásemos por la recta PN formaria con el QR dos ángulos adyacentes uno mayor y otro menor que los adyacentes iguales MNPQ y MNPR, luego dicho plano no seria perpendicular al QR.

TEOREMA.

331. *Dos ángulos diedros rectos son iguales aunque no sean adyacentes.*

Se demuestra este teorema como su análogo del número 28.

Todo diedro menor que un recto se llama *agudo*, y todo diedro mayor que un recto, se llama *obtuso*.

TEOREMA.

332. *La suma de dos diedros adyacentes es igual á dos diedros rectos.*

ESCOLIO. Si uno de los diedros adyacentes es agudo el otro será obtuso, y recíprocamente.

Se llaman DIEDROS CONSECUTIVOS *dos diedros que tienen la misma arista, una cara comun y las otras dos caras situadas á uno y otro lado de la cara comun.*

COROLARIOS.

1.° *La suma de varios diedros consecutivos formados por planos que parten de una misma recta, de modo que las caras extremas estén en un mismo plano, es igual á dos diedros rectos.*

2.° *La suma de varios diedros formados por planos que parten de una misma recta, de modo que cada uno sea cara comun á dos ángulos consecutivos es igual á cuatro diedros rectos.*

3.° *Si uno de los cuatro ángulos formados por dos planos indefinidos que se cortan, es recto, los demás tambien son rectos;* por consiguiente *si un plano es perpendicular á otro, el segundo tambien será perpendicular al primero.*

El teorema y los corolarios se demuestran como sus análogos de los números 30 y 31. Tambien podríamos hacer aquí, acerca de los ángulos diedros, consideraciones análogas á las del número 32, y decir, en el mismo concepto allí desenvuelto: *todo ángulo diedro es menor que dos diedros rectos.*

333. *Ángulos diedros* COMPLEMENTARIOS *son aquellos cuya suma es igual á un diedro recto.*

Ángulos diedros SUPLEMENTARIOS *son aquellos cuya suma es igual á dos diedros rectos.*

Dos diedros adyacentes son suplementarios.

Si dos ángulos diedros tienen el mismo complemento ó el mismo suplemento son iguales.

TEOREMA RECÍPROCO.

334. *Si dos diedros consecutivos son suplementarios, las caras exteriores estarán en un mismo plano.*

Demuéstrese como el del número 34.

TEOREMA.

335. *Dos diedros opuestos por la arista son iguales* [36].

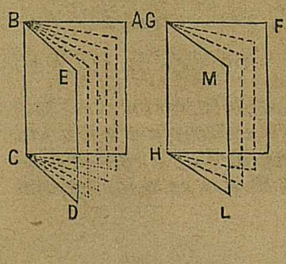
TEOREMA.

336. 1.° *Los planos bisectores de dos diedros adyacentes son perpendiculares entre sí.* 2.° *Los planos bisectores de dos diedros opuestos por la arista se confunden en un solo plano* [37].

TEOREMA. (*Fig.* 210).

337. *La razon de dos ángulos diedros es igual á la de sus ángulos rectilíneos correspondientes.*

FIG. 210.



Supongamos que los ángulos rectilíneos ABE y FGM, correspondientes á los diedros ABCD y FGHL, sean conmensurables, y que la medida comun se halle contenida cinco veces en ABE y tres en FGM; tendremos

$$\frac{\text{ABE}}{\text{FGM}} = \frac{5}{3} \qquad [a].$$

Las rectas que dividen á los ángulos rectilíneos ABE y FGM en partes iguales son perpendiculares á las aristas BC y GH, por hallarse situadas en los planos ABE y FGM: luego si por dichas rectas y las aristas hacemos pasar planos, el diedro ABCD quedará dividido en cinco diedros y el FGHL en tres, y estos ocho diedros tendrán por rectilíneos correspondientes los en que están divididos ABE y FGM; estos son iguales, luego los ocho diedros tambien lo son, y tendremos

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{FGHL}}=\frac{5}{3} \qquad [b].$$

De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$\frac{\mathrm{ABCD}}{\mathrm{FGHL}}=\frac{\mathrm{ABE}}{\mathrm{FGM}}.$$

Si los ángulos rectilíneos ABE, FGM fuesen inconmensurables, haríamos un razonamiento análogo al de los números 73 y 113.

Teorema.

338. *La medida de un ángulo diedro es su ángulo plano correspondiente.*

Sean A y M dos ángulos diedros, *a* y *m* sus ángulos planos correspondientes. Tenemos, por el teorema anterior,

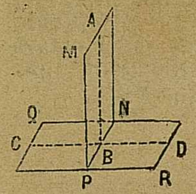
$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}=\frac{a}{m}.$$

Si M es la unidad elegida para medir los ángulos diedros, la relacion $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}}$ será el valor numérico del diedro A; si además convenimos en tomar el ángulo plano *m* para unidad de ángulos planos, la relacion $\frac{a}{m}$ será el valor numérico de *a*; luego *un ángulo diedro y su rectilíneo correspondiente tienen el mismo valor numérico, siempre que convengamos en elegir para unidad de ángulos planos el correspondiente á la unidad de ángulos diedros;* por lo tanto *para medir un ángulo diedro se mide su ángulo plano correspondiente.*

En este sentido debe entenderse el enunciado del teorema.

Al ángulo diedro recto corresponde el ángulo plano recto y recíprocamente, porque si los diedros adyacentes MNPQ y MNPR (*Fig.* 211) son rectos, y por tanto iguales, los rectilíneos ABC y ABD tambien serán iguales y por tanto rectos, y recíprocamente. Siendo la unidad de ángulos planos el ángulo recto, la unidad de diedros será el diedro recto. Este se divide como aquel en 90 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Fig. 211.



Si un ángulo plano vale, por ejemplo, 25°48′ el diedro correspondiente valdrá tambien 25°48′.

Teorema. (*Fig.* 211).

339. *Si dos planos* MN, QR *son perpendiculares entre sí, y en uno de ellos* MN *se traza una recta perpendicular á la interseccion* NP, *dicha recta* AB *será perpendicular al otro plano* QR.

Trazando por B en el plano QR una perpendicular CD á NP se formarán los ángulos rectilíneos ABC, ABD correspondientes á los diedros MNPQ y MNPR; pero estos son rectos por hipótesis, luego los ABC y ABD tambien lo son, es decir, la recta AB es perpendicular á CD, y como se supone que lo es tambien á PN, dicha recta AB será perpendicular al plano QR.

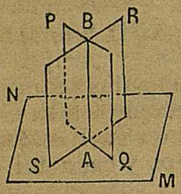
Teorema recíproco.

340. *Si dos planos* MN, QR *son perpendiculares entre sí, toda perpendicular á uno de ellos* QR *trazada por un punto* B *de la interseccion está situada en el otro plano.*

Por el punto B levanto en el plano MN una perpendicular AB á la interseccion NP. Segun el teorema directo, AB es perpendicular al plano QR, por consiguiente cualquiera otra perpendicular al mismo plano en el punto B coincidirá con AB [320, 2.°], y estará, por tanto, situada en el plano MN.

TEOREMA. (*Fig.* 212).

FIG. 212.



341. *Si dos planos* PQ, RS *son perpendiculares á un tercero* MN, *su interseccion* AB *tambien lo es.*

Si en el punto A comun á los tres planos se levanta una perpendicular al MN, estará situada en el plano PQ y en el RS [340], luego coincidirá con la interseccion AB.

TEOREMA.

342. *Por una recta oblicua ó paralela á un plano pasa siempre otro perpendicular al primero, y solo pasa uno.*

1.º Bajando una recta perpendicular al plano dado desde un punto de la recta dada, el plano que las dos determinan será perpendicular al dado [329].

2.º Si por la recta dada pasasen dos planos perpendiculares, la interseccion de éstos, que es la recta dada, seria perpendicular al plano dado, lo que es contrario á la hipótesis.

ESCOLIO. Del teorema anterior y del [330] se deduce: *un plano está determinado por una recta y la condicion de ser perpendicular á otro plano no perpendicular á la recta.*

TEOREMA.

343. *El lugar geométrico de los puntos interiores á un ángulo diedro y equidistantes de sus caras, es el plano bisector de dicho ángulo.*

Si por un punto del plano bisector trazamos un plano perpendicular á la arista del diedro, las intersecciones con las caras de éste formarán el rectilíneo correspondiente al diedro [315], y la interseccion con el plano bisector será la bisectriz del ángulo rectilíneo [328, 1.º]; las distancias del punto dado á los lados de este ángulo son á la vez distancias del mismo punto á las caras del diedro [339]; y como las primeras son iguales, tambien lo son las segundas.

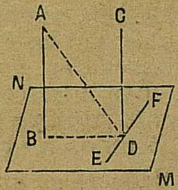
De un modo análogo se demuestra que un punto interior al diedro, tomado fuera del plano bisector, no equidista de las caras del diedro.

IV.—Rectas paralelas entre sí, y paralelas al plano.

Teorema. (*Fig.* 213).

344. *Dos rectas* AB *y* CD *perpendiculares á un plano* MN *son paralelas entre sí.*

Fig. 213.



Las rectas AB y CD no pueden encontrarse, de lo contrario pasarian dos perpendiculares al plano MN por el punto de encuentro, lo que es imposible [320, 2.°].

Demostremos ahora que AB y CD están en el mismo plano

Uno los piés B y D de las perpendiculares, trazo por D en el plano MN una perpendicular EF á la BD, y uno el punto D con un punto cualquiera A de la AB. La recta de union AD es perpendicular á EF [319], y como CD es perpendicular al plano MN, lo es á EF que pasa por su pié; luego las rectas BD, AD y CD, perpendiculares á EF en el punto D, están en un mismo plano; pero AB tiene dos puntos A y B en este plano, por consiguiente se halla contenida en él.

Segun esto, AB y CD están en el mismo plano, y como no pueden encontrarse, son paralelas.

Teorema recíproco.

345. *Si dos rectas* AB *y* CD *son paralelas, todo plano* MN *perpendicular á una de ellas* AB *es tambien perpendicular á la otra* CD.

Si CD fuese oblicua al plano MN, trazando desde un punto cualquiera de CD una perpendicular al plano, esta perpendicular seria paralela á AB, y tendríamos por un punto dos paralelas á AB, lo que es imposible.

Corolario. *Dos rectas* B *y* C *paralelas en el espacio á una tercera* A, *son paralelas entre sí.*

Trazando un plano perpendicular á la recta A, lo será tambien á B y C; siendo B y C perpendiculares á un mismo plano serán paralelas entre sí.

Escolio. La anterior proposicion puede enunciarse así: *Si dos rectas* A *y* B *son paralelas, toda recta* C *paralela á la primera es paralela á la segunda.*

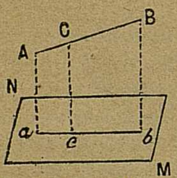
346. PROYECCION *de un punto sobre un plano es el pié de la perpendicular bajada desde el punto al plano.*

PROYECCION *de una línea recta ó curva sobre un plano, es otra línea formada por las proyecciones de los diferentes puntos de la primera.*

TEOREMA. *(Fig. 214).*

La proyeccion de una recta AB *sobre un plano* MN *es otra recta.*

FIG. 214.



Las perpendiculares A*a*, B*b*, C*c* etc. al plano MN bajadas desde los distintos puntos de AB, son paralelas entre sí, y engendran por consiguiente un plano [313], cuya interseccion con el MN es evidentemente la proyeccion de la recta AB sobre este último, luego la proyeccion es una línea recta.

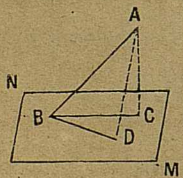
347. El plano AB*ab* que contiene las perpendiculares bajadas á MN desde los puntos de AB, se llama plano *proyectante* de esta recta, y el MN plano de *proyeccion.*

El plano proyectante de una recta está determinado por la recta y una de las perpendiculares al plano de proyeccion, y es perpendicular á este último [329].

TEOREMA. *(Fig. 215).*

348. *El ángulo que forma una oblicua* AB *á un plano* MN *con su proyeccion sobre el mismo, es el menor de cuantos puede formar dicha oblicua con las rectas que pasan por su pié en el plano dado.*

FIG. 215.



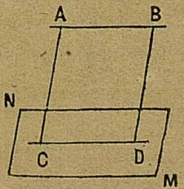
Desde un punto cualquiera A de la recta AB bajo la perpendicular AC al plano MN; y estará determinada la proyeccion BC de AB sobre el plano MN; trazo en este plano otra recta cualquiera BD que pase por B, y tomo BD = BC; uno por último A con D. Los triángulos ABC y ABD tienen dos lados respectivamente iguales, pero el tercer lado AC del primero es menor que el tercer lado AD del segundo, por ser AC perpendicular y AD oblicua, luego el ángulo ABC es menor que el ABD.

ESCOLIO. En virtud de este teorema *se llama ángulo de una recta y un plano el ángulo que forma la recta con su proyeccion sobre el plano.*

349. *Una recta y un plano son paralelos cuando no se encuentran por más que se prolonguen.*

TEOREMA. (*Fig.* 216).

FIG. 216.



350. *Si una recta* AB *exterior á un plano* MN *es paralela á otra* CD *situada en él, la primera* AB *es paralela al plano.*

Las paralelas AB y CD están situadas en un plano, que no tiene más puntos comunes con el MN que los de la interseccion CD: pero AB no puede encontrar á CD, luego tampoco podrá encontrar al plano MN.

TEOREMA. (*Fig.* 216).

351. *Si por una recta* AB *paralela á un plano* MN *se hace pasar otro que corte al primero, la interseccion* CD *de estos dos es paralela á la recta* AB.

Las rectas AB y CD están en un plano; además si AB encontrase á CD encontraria al plano MN, y siendo esto imposible, AB y CD son paralelas.

COROLARIOS.

1.° *Si una recta* AB *es paralela á un plano* MN, *toda paralela* CD *á dicha recta, trazada por un punto* C *del plano, está contenida en éste.*

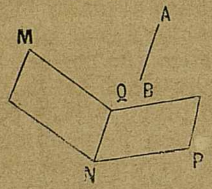
La interseccion del plano que determinan las paralelas AB y CD con el plano MN es una paralela á AB por el punto C, luego se confunde con CD.

2.° *La interseccion de dos planos que pasan por dos rectas paralelas* A *y* B, *es otra recta paralela á las primeras.*

La recta A es paralela al plano que pasa por la B [350]; luego la interseccion del plano que pasa por aquella recta con este plano es paralela á la A, y siéndolo á la A lo es tambien á la B.

TEOREMA. *(Fig. 217).*

FIG. 217.



352. *Si una recta* AB *es paralela á dos planos* MN, PQ *que se cortan, es paralela á su interseccion* QN.

Tirando por un punto Q de la interseccion una paralela á la recta AB, dicha paralela debe estar contenida en los dos planos, luego se confundirá con la interseccion QN de los mismos, por consiguiente AB es paralela á QN.

TEOREMA. *(Fig. 216).*

353. *Las partes* AC, BD *de rectas paralelas comprendidas entre un plano* MN *y una recta* AB *paralela á él, son iguales.*

El plano que determinan las paralelas AC y BD pasa por AB, luego su interseccion CD con el MN es paralela á AB; resulta, pues, que la figura ABDC es un paralelógramo, luego AC = BD.

COROLARIO. *Si una recta es paralela á un plano, todos los puntos de la recta equidistan del plano.*

V.—Planos paralelos.

354. *Se llaman* PLANOS PARALELOS *los que no se encuentran por más que se prolonguen.*

TEOREMA.

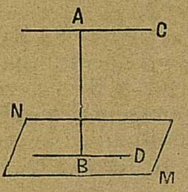
355. *Dos planos perpendiculares á una misma recta son paralelos.*

Pues si llegaran á encontrarse, tendríamos desde un punto cualquiera de la recta interseccion dos planos perpendiculares á una recta, lo que es imposible [317, 2.°].

TEOREMA. (*Fig.* 218).

356. *El lugar geométrico de todas las paralelas á un plano MN trazadas por un punto A, es un plano paralelo al MN y que pasa por A.*

FIG. 218.



Sea AC una de las paralelas al plano MN; bajo desde A una perpendicular á este plano, é imagino por BAC otro plano que cortará al MN segun una recta BD paralela á AC [351]. Siendo AB perpendicular al plano MN, y por tanto á la recta BD, es tambien perpendicular á la AC; luego todas las paralelas al plano MN trazadas por A son perpendiculares á la recta AB, por consiguiente su lugar geométrico es un plano perpendicular á la recta AB y paralelo, por tanto, al MN.

COROLARIOS.

1.° *Un plano es paralelo á otro cuando el primero contiene dos rectas que se cortan paralelas al segundo.*

Puesto que dichas rectas determinan un plano paralelo al segundo.

2.° *Si dos planos son paralelos, toda recta que corte al primero, cortará tambien al segundo.*

Porque si la recta fuese paralela al segundo plano, como tiene un punto en el primero, se hallaría contenida en éste, lo que es contrario al supuesto.

3.° *Si dos planos A y B son paralelos, todo plano C que corte al primero, cortará tambien al segundo.*

Trazando en el plano C una recta que corte al plano A, esta recta cortará al B; luego el plano C, que pasa por ella, tambien cortará al B.

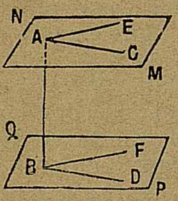
TEOREMA.

357. *Las intersecciones de dos planos paralelos con un tercer plano son paralelas.*

Puesto que están situadas en el plano secante y no pueden encontrarse, aunque se prolonguen, por hallarse tambien en dos planos paralelos.

Teorema. (*Fig.* 219).

Fig. 219.



358. *Si dos planos* MN, PQ *son paralelos, toda perpendicular* AB *á uno de ellos* MN *es tambien perpendicular al otro* PQ.

Si por AB hacemos pasar dos planos CABD y EABF las intersecciones AC y BD serán paralelas, así como tambien las AE y BF; pero AB es perpendicular á las rectas AC y AE [315], luego tambien es perpendicular á las BD y BF, y por consiguiente al plano PQ.

Corolarios.

1.° *Por un punto* A *exterior á un plano* PQ *no puede pasar más que un plano* MN *paralelo al primero.*

Bajando la perpendicular AB al plano PQ, todo plano paralelo á éste, que pase por A, es perpendicular á AB y se confunde con MN.

2.° *Dos planos paralelos á un tercero son paralelos entre sí.*

Pues si se encontraran, pasarian por cada punto de la interseccion dos planos paralelos al tercero, lo que es imposible.

Teorema. (*Fig.* 219).

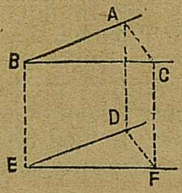
359. *Si dos planos* MN *y* PQ *son paralelos, todo plano* EABF *perpendicular á uno de ellos* MN *es perpendicular al otro* PQ.

Trazando en el plano EABF una recta AB perpendicular á AE, será perpendicular al plano MN [339]: y siendo AB perpendicular al plano MN lo es tambien al PQ; luego el plano EABF, que pasa por AB, es perpendicular al PQ [329].

TEOREMA. *(Fig. 220).*

360. *Si dos ángulos situados en diferentes planos tienen sus lados paralelos:* 1.° *son iguales ó suplementarios;* 2.° *los planos que determinan son paralelos.*

FIG. 220.



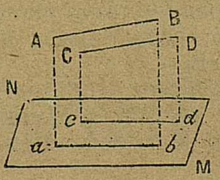
En efecto: tomo BC = EF, BA = ED, y trazo las rectas BE, AD, CF, AC y DF. Siendo BC igual y paralela á EF, la figura BCFE es un paralelógramo, luego CF será igual y paralela á BE; del mismo modo se demuestra que AD es igual y paralela á BE; siendo las rectas CF y AD iguales y paralelas á BE son iguales y paralelas entre sí, luego la figura ACFD es un paralelógramo, por consiguiente AC=DF. Vemos, pues, que los triángulos ABC y DEF tienen sus tres lados respectivamente iguales, luego son iguales, por tanto *áng.*ABC = *áng.* DEF.

Si los lados paralelos tuviesen direcciones opuestas, ó dos de ellos tuviesen direcciones opuestas y los otros la misma direccion, imitaríamos la demostracion del número 66, casos 2.° y 3.°

2.° Siendo AB y BC paralelas á ED y EF respectivamente, son paralelas al plano DEF [350], luego el plano ABC tambien es paralelo al DEF [356, *cor.* 1.°].

TEOREMA. *(Fig. 221).*

FIG. 221.



361. *Las proyecciones de dos rectas paralelas* AB *y* CD *sobre un mismo plano* MN, *son paralelas.*

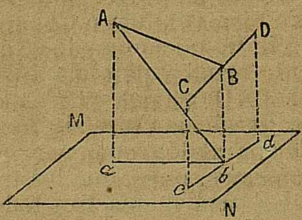
Los planos proyectantes BA*a* y DC*c* son paralelos, por ser AB paralela á CD y A*a* paralela á C*c*; luego las proyecciones *ab* y *cd*, que son las intersecciones de dichos planos paralelos con el de proyeccion, son paralelas.

ESCOLIO. El recíproco no es cierto.

TEOREMA. (*Fig. 222*).

362. *Las proyecciones de dos rectas* AB *y* CD *perpendiculares entre sí sobre un plano* MN *paralelo á una de ellas* CD, *son perpendiculares entre sí.*

FIG. 222.



La recta CD y su proyeccion *cd* son paralelas [351], la *cd* es perpendicular á B*b*, luego CD es tambien perpendicular á B*b*; como además CD es perpendicular, por hipótesis, á AB, será perpendicular al plano AB*ba*; por consiguiente *cd* tambien es perpendicular á este plano [345], y por lo tanto á la recta *ab* que pasa por su pié.

ESCOLIO. Si en lugar de la paralela CD al plano MN tuviéramos una recta *cd* trazada en el plano y una perpendicular A*b* á *cd*, el teorema se verificaria igualmente. En efecto: levantando *b*B perpendicular al plano MN, y paralela por consiguiente á *a*A, se ve que *cd* es perpendicular al plano de las paralelas, por serlo á las rectas *b*A y *b*B; luego *cd* es perpendicular tambien á *ab*.

TEOREMA RECÍPROCO.

363. *Si las proyecciones de dos rectas* AB *y* CD *sobre un plano* MN *paralelo á una de ellas* CD *son perpendiculares entre sí, las rectas* AB *y* CD *tambien son perpendiculares entre sí.*

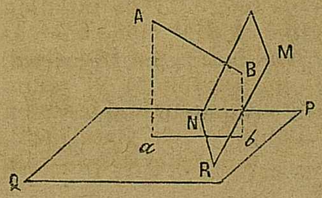
Siendo *cd* perpendicular á *ab* y B*b*, es perpendicular al plano AB*ba*; luego su paralela CD tambien será perpendicular al mismo plano, y por consiguiente á la recta AB.

ESCOLIO. El teorema de las tres perpendiculares [319] puede mirarse como un caso particular de este recíproco: el caso en que la recta CD está situada en el plano MN confundiéndose con su proyeccion *cd*.

Teorema. (*Fig.* 223).

364. *Si una recta* AB *es perpendicular á un plano* MN, *su proyeccion* ab *sobre otro plano* PQ *que corta al primero es perpendicular á la traza* NR *del plano* MN *con el de proyeccion.*

Fig. 223.

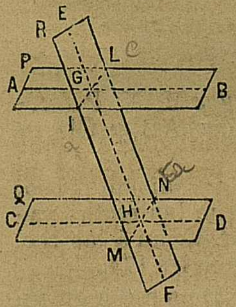


El plano proyectante AB*ab* es perpendicular al de proyeccion PQ [347], y tambien al MN, puesto que pasa por AB, luego es perpendicular á la interseccion NR de estos dos planos [341]; siendo NR perpendicular al plano AB*ab*, lo es á la recta *ab* que pasa por su pié, lo cual debíamos demostrar.

Teorema. (*Fig.* 224).

365. *Si dos planos paralelos* P *y* Q *se cortan por un tercer plano* R: 1.° *los ángulos diedros alternos son iguales;* 2.° *los ángulos diedros correspondientes son iguales;* 3.° *dos ángulos diedros internos ó dos externos del mismo lado del plano secante son suplementarios.*

Fig. 224.



Trazo un plano perpendicular á la interseccion IL por un punto G; dicho plano será tambien perpendicular á la otra interseccion MN, puesto que IL y MN deben ser paralelas [357].

Sean AB, CD y EF las intersecciones del plano perpendicular á IL con los tres planos propuestos. La recta IL es perpendicular á AB y EF [315], la MN es perpendicular á EF y CD; luego los cuatro ángulos rectilíneos que forman AB y EF alrededor del punto G son correspondientes á los cuatro diedros que forman los planos P y R alrededor de IL; y los cuatro ángulos rectilíneos que forman EF y CD alrededor de H son correspondientes á los cuatro diedros que hay alrededor de MN; por lo tanto los ocho diedros que forman los planos P y Q con el plano secante R tienen igual medida que los ocho rectilíneos formados por las rectas AB, CD y la secante EF; pero las rectas AB y CD son paralelas, luego los ángulos rectilíneos alternos son iguales, los correspondientes son iguales, los internos ó externos del mismo lado de la secante son suplementarios [63]; por consiguiente existirán iguales relaciones entre los diedros, lo cual debíamos demostrar.

TEOREMA.

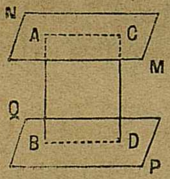
366. *Dos ángulos diedros cuyos planos son respectivamente paralelos son iguales ó suplementarios.*

Se demuestra como su análogo de la geometría plana [66].

TEOREMA. (*Fig.* 225).

367. *Las partes* AB, CD *de rectas paralelas comprendidas entre dos planos paralelos* MN, PQ *son iguales.*

FIG. 225.

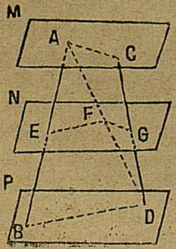


El plano que determinan AB y CD corta á los planos MN y PQ segun dos rectas paralelas AC y BD, luego la figura ACDB es un paralelógramo, por consiguiente AB = CD.

COROLARIO. *Si dos planos son paralelos, todos los puntos de uno de ellos equidistan del otro.*

TEOREMA. (*Fig.* 226).

FIG. 226.



368. *Tres planos paralelos* M, N, P *dividen á dos rectas cualesquiera* AB *y* CD *en partes proporcionales.*

Si AB y CD estuvieran en un mismo plano, éste cortaria á los dados segun las rectas paralelas AC, EG y BD que dividirian á las rectas dadas en partes proporcionales [73].

Supongamos que AB y CD no estén en un mismo plano.

Trazo la recta AD. El plano BAD corta á los N y P segun dos paralelas EF y BD;

y el plano ADC corta á los M y N segun las paralelas AC y FG; luego

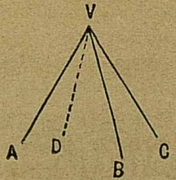
$$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FD},\quad \frac{AF}{FD}=\frac{CG}{GD};\ \text{de donde}\ \frac{AE}{EB}=\frac{CG}{GD}.$$

COROLARIO. *Dos planos paralelos dividen á varias rectas que parten de un mismo punto en partes proporcionales.*

VI.—Ángulos poliedros.

369. Tres ó más ángulos rectilíneos AVB, BVC, CVD..... *(Fig. 227)* que tienen el mismo vértice V y cada dos consecutivos un lado comun, y se hallan situados en planos diferentes, forman un *ángulo poliedro.*

FIG. 227.



El vértice comun V se llama *vértice* del ángulo poliedro, los ángulos planos AVB, BVC, CVD se llaman *caras*, y las rectas VA, VB, VC... *aristas.*

Cada dos caras consecutivas, AVB y BVC por ejemplo, forman un ángulo diedro VB ó AVBC, y el ángulo poliedro tiene tantos ángulos diedros como caras.

Un ángulo poliedro se designa por la letra de su vértice, ó por ésta seguida de una de cada arista; así, ángulo poliedro V ó ángulo poliedro VABCD.

Todas las aristas de un ángulo poliedro se pueden cortar por un plano; porque si concebimos por V un plano que no pase por ninguna arista del ángulo, otro plano paralelo al primero encontrará á todas las aristas, toda vez que éstas cortando al primer plano en V tienen que cortar á su paralelo [356, *cor.*2.º].

Un ángulo poliedro se llama *convexo* si cortándole por un plano que encuentre á todas las aristas resulta un polígono convexo.

Nosotros solo trataremos de los ángulos poliedros convexos.

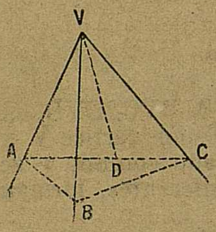
Ángulo *triedro* es el ángulo poliedro que consta de tres caras.

Un ángulo triedro tiene seis elementos: tres caras y tres ángulos diedros.

TEOREMA. (*Fig.* 228).

370. *Una cara cualquiera de un triedro es: 1.º menor que la suma de las otras dos; 2.º mayor que su diferencia.*

FIG. 228.



1.º Sea el triedro VABC, y su cara mayor AVC. Formemos en esta cara un ángulo AVD = AVB, tomemos dos longitudes iguales VD y VB, por el punto D tracemos una recta que corte á las aristas VA y VC, y unamos B con los puntos A y C.

Los triángulos AVD y AVB son iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego AD = AB. En el triángulo ABC tenemos

$$AC \quad \text{ó} \quad AD + DC < AB + BC;$$

suprimiendo AD en el primer miembro y su igual AB en el segundo, queda DC < BC; segun esto, los triángulos DVC y BVC tienen dos lados respectivamente iguales, pero el lado DC es menor que BC, luego

$$\textit{áng}\cdot DVC < \textit{áng}.\ BVC;$$

aumentando el primer miembro de esta desigualdad en el ángulo AVD, y el segundo miembro en el ángulo igual AVB, resulta por último

$$AVC < BVC + AVB.$$

Hemos demostrado esta primera parte del teorema para la cara mayor, porque para las no mayores es evidente.

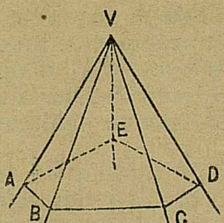
2.º De la desigualdad AVC < BVC + AVB se deduce

$$AVC - BVC < AVB \quad \text{ó} \quad AVB > AVC - BVC.$$

TEOREMA. *(Fig. 228).*

371. *La suma de todos los ángulos planos de un ángulo poliedro convexo es menor que cuatro ángulos rectos.*

FIG. 228.



Sea V un ángulo poliedro convexo, compuesto de n caras AVB, BVC etc. cuya suma representaremos por S.

Cortando todas las aristas del ángulo poliedro V por un plano, la interseccion es un polígono convexo de n lados ABCD... Los triedros formados en B, C, D etc. nos dan [370, 1.°]

$$VBA + VBC > ABC$$
$$VCB + VCD > BCD$$
$$VDC + VDE > CDE$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sumando estas desigualdades, veremos que la suma de los primeros miembros contiene los ángulos en la base de los n triángulos cuyo vértice comun es V; pero la suma de todos los ángulos de estos triángulos es $2Rn$, y los en el vértice valen S, luego los en la base, ó sea la suma de los primeros miembros de las desigualdades, será $2Rn - S$; en cuanto á los segundos miembros son los ángulos del polígono convexo ABCD..., que valen $2Rn - 4R$; luego

$$2Rn - S > 2Rn - 4R,$$

de donde
$$S < 4R.$$

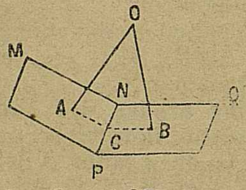
372. Dos ángulos triedros son *suplementarios* cuando los ángulos planos de cada uno son suplementos de los ángulos diedros del otro.

LEMA. *(Fig. 229).*

Si desde un punto O *interior á un ángulo diedro* MNPQ *se bajan dos perpendiculares* OA, OB *á sus caras, el ángulo de estas perpendiculares es suplemento del diedro.*

Supongamos que los piés de las perpendiculares caigan en las mismas caras del diedro, y no en sus prolongaciones. El plano que determinan las rectas OA y OB corta á la arista NP en un punto C, y á las caras segun las rectas AC y BC; además dicho plano es perpendicular al MP y al PQ, puesto que pasa por las rectas OA y OB [329], ó lo que es igual, los planos MP y PQ son perpendiculares al AOBC, luego la interseccion NP de los primeros es perpendicular al plano AOBC [341], y por consiguiente á las rectas AC y BC que pasan por el pié C de dicha perpendicular; vemos, pues, que el ángulo ACB es el rectilíneo correspondiente al diedro MNPQ.

Fig. 229.



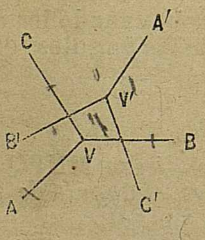
Ahora, en el cuadrilátero OACB los ángulos A y B son rectos, luego la suma de los otros dos O y ACB vale dos ángulos rectos, esto es, los ángulos O y ACB son suplementarios, que es lo que debíamos demostrar.

Si los piés de las perpendiculares OA y OB cayesen en las prolongaciones de las caras, elegiríamos un punto O′ interior al diedro, tal que las perpendiculares bajadas desde él cayesen en las mismas caras: el ángulo O′ de estas perpendiculares seria igual al O, por tener sus lados paralelos á los de éste, y en la misma direccion, y como O′ seria suplemento del diedro, su igual O estaria en el mismo caso.

Teorema. (*Fig.* 230).

373. *Á todo ángulo triedro corresponde otro ángulo triedro suplementario.*

Fig. 230.



Sea el ángulo triedro V. Es evidente que siempre podrá elegirse en lo interior de este ángulo un punto V′, tal que si desde él se bajan las perpendiculares V′A′, V′B′, V′C′ á las caras BVC, AVC, AVB, el punto V quede en lo interior del triedro V′ formado por las perpendiculares.

Ahora bien, siendo V′A′ y V′B′ perpendiculares á las caras BVC, AVC del diedro VC, el ángulo plano A′V′B′ es suplemento del diedro VC [*Lema*]; por igual razon el ángulo plano B′V′C′ es suplemento del diedro VA, y A′V′C′ del VB.

El plano A′V′B′ es perpendicular al AVC y al BVC, pues pasa por las rectas V′B′ y V′A′, luego la arista VC es perpendicular al plano A′V′B′ [341]. Del mismo modo se demuestra que las aristas VA y VB son perpendiculares á los planos B′V′C′ y

C′V′A′. Por consiguiente los ángulos planos AVC, AVB y BVC son suplementos respectivos de los diedros V′B′, V′C′ y V′A′.

Queda, pues, demostrado que los triedros V y V′ son suplementarios.

TEOREMA.

374. *La suma de los ángulos diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.*

Sean A, B, C los ángulos diedros del triedro propuesto. Supongamos formado el triedro suplementario, y sean a', b', c' sus ángulos planos, suplementos respectivos de A, B, C.

Tenemos $A = 2R - a'$, $B = 2R - b'$, $C = 2R - c'$;

sumando ordenadamente estas igualdades será

$$A + B + C = 6R - (a' + b' + c');$$

pero la suma $a' + b' + c'$ de los ángulos planos de un triedro es menor que 4R [371], luego $A + B + C > 2R$.

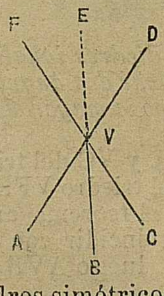
Es evidente que la suma $A + B + C$ es menor que seis rectos, puesto que cada uno de los tres ángulos es menor que dos rectos.

ESCOLIO. Un ángulo triedro puede tener uno, dos y hasta tres ángulos diedros rectos, llamándose en cada caso respectivamente *rectángulo*, *birectángulo* ó *trirectángulo*.

375. *Ángulos* TRIEDROS SIMÉTRICOS *son dos triedros de los que uno se forma prolongando las aristas del otro.*

TEOREMA. (*Fig.* 231).

FIG. 231.



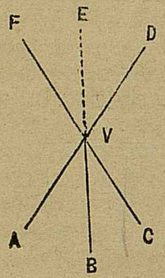
Dos ángulos triedros simétricos VABC, VDEF *tienen sus ángulos planos y diedros respectivamente iguales, pero en general no pueden coincidir.*

Los ángulos planos AVB, BVC, AVC son iguales respectivamente á sus opuestos por el vértice DVE, EVF, DVF; y los ángulos diedros VA, VB, VC son iguales á sus opuestos por la arista VD, VE, VF.

Supongamos, ahora, que los tres ángulos diedros del triedro VABC sean desiguales, y demostremos que en este caso general los triedros simétricos no pueden coincidir.

Si hacemos girar el triedro VFED alrededor del punto V, de modo que la cara FVD resbale en el mismo plano en que se encuentra hasta que VD coincida con VA y VF con VC, la arista VE permanecerá detrás del plano que determinan AD y CF, mientras que VB está delante del mismo plano, luego los triedros no coincidirán.

Fig. 231.



Si el triedro VFED gira de modo que la cara FVD se separe del plano en que se encuentra hasta que VF coincida con VA y VD con VC, la cara FVE no coincidirá con la AVB, porque siendo los ángulos diedros VC y VA desiguales y VC = VF, los diedros VF y VA son tambien desiguales.

Como no podemos intentar la superposicion de los triedros por otro medio, queda demostrado que no coinciden.

Caso particular. Si dos ángulos diedros VA, VC *de uno de los triedros simétricos son iguales, los triedros son superponibles.* En efecto: de las igualdades VA = VC, VC = VF, se deduce VA = VF: por consiguiente haciendo coincidir la cara FVD con su igual AVC, de modo que las aristas VE y VB caigan hácia el mismo lado del plano AVC, el plano FVE caerá sobre el AVB; igualmente, de VA = VC, VA = VD se deduce VC = VD, luego el plano EVD caerá sobre el BVC; por consiguiente la arista VE, comun á los planos FVE y EVD, coincidirá con la VB, comun á los planos AVB y BVC.

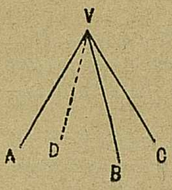
Teorema.

376. *Si un ángulo triedro tiene dos ángulos diedros iguales, los ángulos planos opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos diedros desiguales, á mayor ángulo diedro se opone mayor ángulo plano.*

1.º Supongamos que los ángulos diedros VA y VC del triedro VABC (*Fig.* 231) sean iguales. Construyo el triedro VFED simétrico del propuesto; segun hemos visto en el teorema anterior, caso particular, el triedro VFED puede coincidir con el VABC, luego FVE = AVB, pero FVE = BVC, luego AVB = BVC.

2.° Supongamos que los ángulos diedros VA y VC del triedro VABC *(Fig. 232)* sean desiguales, y que VC > VA. Por la arista VC del mayor trazo un plano DVC, que forme con la cara AVC un ángulo diedro DVCA igual al menor VA; sea VD la interseccion de este plano con la cara AVB. Segun la primera parte del teorema, en el triedro VADC será DVC = AVD. En el triedro VDBC tenemos

Fig. 232.



$$DVC + DVB > BVC,$$

luego, sustituyendo DVC por su igual AVD,

$$AVD + DVB > BVC \text{ ó bien } AVB > BVC.$$

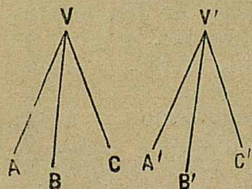
Teorema recíproco.

377. *Si un ángulo triedro tiene dos caras iguales, los ángulos diedros opuestos son iguales; y si tiene dos caras desiguales, á la cara mayor se opone mayor ángulo diedro* [55].

Teorema. *(Fig. 233)*.

378. *Dos ángulos triedros* V *y* V′ *son iguales cuando tienen una cara igual* AVC = A′V′C′ *adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos* VA = V′A′, VC = V′C′.

Fig. 233.



Coloco el triedro V′ sobre el V de modo que la cara A′V′C′ coincida con AVC, y que las aristas V′B′ y VB caigan hácia el mismo lado del plano AVC: el plano de la cara A′V′B′ caerá sobre el de la AVB, por ser iguales los ángulos diedros V′A′ y VA, y el de la cara B′V′C′ caerá sobre el de la BVC por análoga razon, luego la arista V′B′, comun á los planos A′V′B′ y B′V′C′, deberá estar á la vez en los planos AVB y BVC, para lo cual tiene que coincidir con VB; por consiguiente los triedros son iguales.

Teorema. (*Fig.* 233).

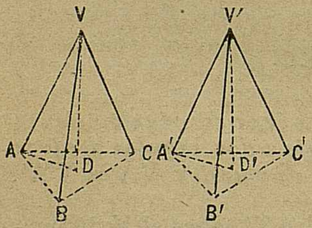
379. *Dos ángulos triedros* V *y* V′ *son iguales cuando tienen dos caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas* AVB = A′V′B′, AVC = A′V′C′, *é igual el ángulo diedro comprendido* VA = V′A′.

Coloco el triedro V′ sobre el V, de modo que la cara A′V′C′ coincida con la AVC y que las aristas V′B′ y VB caigan hácia el mismo lado del plano AVC: el plano de la cara A′V′B′ caerá sobre el de la AVB, por ser iguales los diedros V′A′ y VA, y la arista V′B′ coincidirá con la VB, por ser iguales los ángulos planos A′V′B′ y AVB; luego los triedros serán iguales.

Teorema. (*Fig.* 234).

380. *Dos ángulos triedros* V *y* V′ *son iguales cuando tienen sus tres caras respectivamente iguales é igualmente dispuestas* AVB = A′V′B′, AVC = A′V′C′, BVC = B′V′C′.

Fig. 234



En las aristas de los triedros tomo las longitudes iguales VA, VB, VC, V′A′, V′B′, V′C′, y formo los triángulos ABC y A′B′C′. Los triángulos VAB, VAC, VBC son iguales respectivamente á V′A′B′, V′A′C′, V′B′C′, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido, luego AB=A′B′, AC=A′C′, BC=B′C′, por tanto los triángulos ABC y A′B′C′ son iguales.

Desde el vértice V bajo la perpendicular VD al plano ABC: el pié D de esta perpendicular debe equidistar de los puntos A, B y C, pues VA, VB y VC son oblicuas iguales, luego D es el centro del círculo circunscrito al triángulo ABC. Además los triángulos AVD, A′V′D′ son iguales, porque son rectángulos en D y D′, y tienen VA = V′A′, por construccion, y AD= A′D′, por ser radios de círculos iguales; luego VD = V′D′.

Coloco ahora el triángulo A′B′C′ sobre el ABC: el punto D′ caerá sobre D, y la perpendicular D′V′ seguirá la direccion DV, y como V′D′= VD, el punto V′ coincidirá con V, por consiguiente los triedros serán iguales.

Teorema.

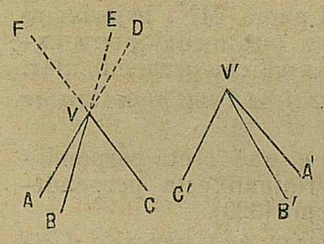
381. *Dos ángulos triedros son iguales cuando tienen sus tres ángulos diedros respectivamente iguales é igualmente dispuestos.*

Sean V y V′ los triedros propuestos, T y T′ sus triedros suplementarios.

Siendo iguales los ángulos diedros de los triedros propuestos, tambien serán iguales los ángulos planos de los triedros suplementarios; luego los triedros T y T′ son iguales [380], y tienen por tanto iguales sus ángulos diedros. Siendo iguales los ángulos diedros de T y T′, tambien serán iguales los ángulos planos de los triedros suplementarios V y V′, luego estos triedros son iguales [380].

382. Escolio. En todos los casos de igualdad de triedros hemos supuesto que los elementos respectivamente iguales estaban igualmente dispuestos. Si esta condicion no se verifica, los triedros propuestos solo son simétricos.

Fig. 235.



Para demostrarlo fijémonos en el primer caso. Sean VABC, V′A′B′C′ (*Fig.* 235) dos ángulos triedros que tienen una cara igual AVC=A′V′C′ adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales VA=V′A′, VC=V′C′, pero en disposicion contraria. Formemos el triedro VDEF simétrico del VABC: es fácil ver que los triedros VDEF y V′A′B′C′ tienen una cara igual DVF=A′V′C′ adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales VF=V′C′, VD=V′A′; además estos elementos iguales están igualmente dispuestos, lo que se vé fácilmente imaginando que el triedro VDEF adopte una posicion análoga á la del V′A′B′C′; luego los triedros VDEF y V′A′B′C′ son iguales, y como el primero es simétrico del VABC, el segundo V′A′B′C′ tambien es simétrico del VABC.

Igual razonamiento podria hacerse en los demás casos.

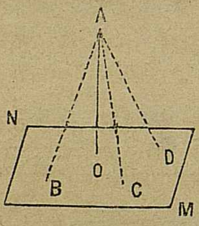
PROBLEMAS.

383. 1.° *Por un punto dado trazar un plano perpendicular á una recta dada.* [317, 1.°].

384. 2.° *Por un punto dado trazar una recta perpendicular á un plano dado.* [320, 1.°].

Puede tambien resolverse este problema del modo siguiente.

FIG. 236.



Si el punto dado A *(Fig. 236)* está fuera del plano, se bajan á éste tres oblicuas iguales AB, AC, AD, se halla el centro O de la circunferencia que pasa por los piés B, C, D de las oblicuas, y uniendo O con el punto dado A se tiene la perpendicular AO.

En efecto: los piés B, C, D de las oblicuas iguales que parten del punto A, equidistan del pié de la perpendicular bajada al plano MN desde A, y como O es el único punto del plano MN equidistante de B, C y D [95], es claro que O será el pié de la perpendicular.

Si el punto dado A estuviese en el plano MN, bajaríamos una perpendicular á este plano desde un punto cualquiera exterior, y trazaríamos por A una paralela á dicha perpendicular.

385. 3.° *Por una recta oblicua ó paralela á un plano trazar otro perpendicular al primero.*

Por un punto de la recta dada trácese una recta perpendicular al plano dado: el plano que determinan esta perpendicular y la recta dada resuelve el problema [329].

386. 4.° *Por un punto dado A trazar una paralela á un plano.*

Trácese en el plano una recta cualquiera, y por el punto dado A diríjase una paralela á dicha recta [350].

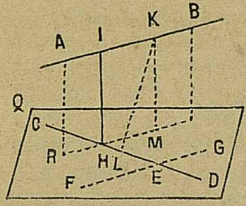
387. 5.° *Por un punto dado trazar un plano paralelo á otro dado.*

Trácense por el punto dado dos rectas paralelas al plano dado: el plano que determinan las dos rectas será paralelo al dado [356, *cor.* 1.°].

388. 6.° *Hallar la menor distancia entre dos rectas que no están situadas en el mismo plano.*

Sean las rectas AB y CD (*Fig.* 237). Por un punto E de la CD trazo una paralela FG á la otra recta AB: las rectas CD y FG determinan un plano Q paralelo á la AB [350]; por esta recta trazo otro plano RB perpendicular al Q; la interseccion RH es paralela á AB [351], luego tambien lo será á FG y cortará, por tanto, á CD en un punto H; por este punto levanto en el plano RB una perpendicular HI á RH. La HI es: 1.° perpendicular á las dos rectas dadas, 2.° la menor distancia entre ellas.

FIG. 237.



En efecto: 1.° Siendo HI perpendicular á RH, lo es tambien á AB; además HI es perpendicular al plano Q [339], luego es perpendicular á CD.

2.° Trazo otra recta KL que una un punto de AB con otro de CD. La recta KL es oblicua al plano Q, porque en general está fuera del plano RB [1], que es el lugar geométrico de las perpendiculares al plano Q bajadas desde la recta AB [347]; luego puede bajarse desde K la perpendicular KM al plano Q, y será KM < KL, pero KM = HI, luego HI < KL.

1 Si KL estuviese en el plano RB pasaria por H y seria oblicua á la AB, y por tanto mayor que HI, que es perpendicular.

CAPÍTULO SEGUNDO.

SUPERFICIES CURVAS.

I.—Nociones preliminares.

389. Si una línea cualquiera se mueve en el espacio, dejando en él la huella de sus posiciones sucesivas, engendra una superficie, puesto que el *lugar* de dichas posiciones dividirá al espacio en dos partes de las que será límite comun.

La línea móvil se llama *generatriz* de la superficie.

390. Toda superficie que puede ser engendrada por el movimiento de una recta, se llama *superficie reglada.*

Las superficies regladas pueden ser *desarrollables y alabeadas.*

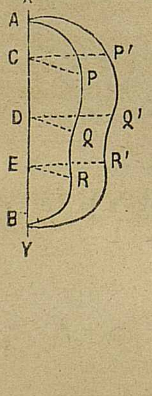
En las primeras, dos posiciones consecutivas de la generatriz se hallan en un mismo plano, y en las segundas en planos diferentes.

Las superficies desarrollables se llaman así porque pueden extenderse por completo en un plano sin pliegue ni rotura, propiedad de que no gozan las alabeadas.

391. Toda superficie engendrada por una línea cualquiera que gira alrededor de una recta fija, á la que se supone invariablemente ligada, se llama *superficie de revolucion.* La recta fija recibe el nombre de *eje.*

392. *Los planos perpendiculares al eje de revolucion cortan á la superficie segun circunferencias, que tienen su centro en el eje y se llaman* PARALELOS.

FIG. 238.



En efecto: al girar la generatriz AQB (*Fig.* 238) alrededor del eje XY, todos los puntos de ella conservan la misma posicion con respecto al eje. Bajemos una perpendicular QD á XY desde un punto cualquiera Q de la generatriz: la línea engendrada por Q tendrá todos sus puntos en los extremos de rectas DQ, DQ' etc. perpendiculares al eje en el punto D é iguales á DQ, luego será una circunferencia, cuyo centro estará en D y cuyo plano será perpendicular al eje en el mismo punto.

De aquí se deduce que el plano perpendicular al eje por el punto D, coincidirá con el QDQ′ y cortará á la superficie de revolucion segun una circunferencia.

393. *Los planos que pasan por el eje cortan á la superficie de revolucion segun líneas iguales, que se llaman* MERIDIANOS.

Sean AQB y AQ′B *(Fig.* 238*)* dos meridianos. Trazo por varios puntos C, D, E etc. planos perpendiculares al eje XY. Las intersecciones CP y CP′, DQ y DQ′, ER y ER′ de estos planos con los dos meridianos forman ángulos rectilíneos PCP′, QDQ′, RER′ iguales entre sí, porque todos corresponden á un mismo diedro QABQ′, además CP = CP′, DQ = DQ′, ER = ER′, luego si hacemos girar el plano AQ′B hasta que coincida con el AQB, todos los puntos P′, Q′, R′ etc. del meridiano AQ′B coincidirán con puntos correspondientes P, Q, R etc. del meridiano AQB; por tanto los meridianos son iguales.

II.—Superficie cónica.

394. SUPERFICIE CÓNICA *es la engendrada por una recta indefinida que gira alrededor de un punto fijo apoyándose en una curva cualquiera.*

Esta curva recibe el nombre de *directriz*. El punto fijo se llama *vértice* ó *centro* de la superficie, y la divide en dos *hojas* que se estienden indefinidamente á una y otra parte del centro.

Si la directriz tiene centro [1], la recta que une este punto con el centro de la superficie se llama *eje* de la misma.

Se llama superficie cónica *circular* aquella cuya directriz es una circunferencia.

395. *Se llama* CONO *el cuerpo limitado por una de las hojas de una superficie cónica y un plano que corte á todas las generatrices.*

VABCDE *(Fig.* 239*)* es un cono. El vértice V de la superficie cónica se llama *vértice* del cono, y la parte ABCDE de plano limitada por la superficie es la *base* del cono. *Altura* es una

1 *Centro* de una curva cualquiera es el punto que divide en dos partes iguales á todas las rectas que pasan por él y terminan en la curva.

perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base. *Lados* son las partes VA, VB, VC etc. de las generatrices limitadas por el vértice y la base. *Eje* es la recta VO que une el vértice con el centro de la base.

Fig. 239.

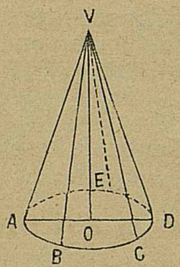
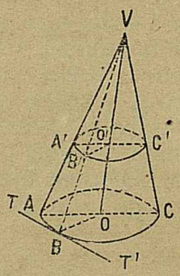


Fig. 240.



Un cono es *recto (Fig. 239)* cuando el eje VO es perpendicular á la base, y *oblicuo (Fig. 240)* cuando el eje VO es oblicuo á la base.

Se llama *cono circular* aquel cuya base es un círculo.

Cono troncado ó tronco de cono *es la parte de cono comprendida entre la base y un plano que corte á todas las generatrices.*

La parte de cono comprendida entre la seccion y el vértice se llama *cono deficiente.*

La base del cono y la seccion causada por el plano se llaman *bases* del tronco; si estas son paralelas, se llama *altura* del tronco á la distancia entre las bases.

396. *El cono circular recto puede considerarse engendrado por un triángulo rectángulo que gira alrededor de un cateto.*

Pues si elegimos el cateto VO *(Fig. 239)* del triángulo VOA para eje de revolucion, el otro cateto AO engendra un círculo perpendicular á VO, cuyo centro es O, y la hipotenusa VA, que se apoya en la circunferencia ABCDE y pasa constantemente por el punto fijo V, engendra una hoja de superficie cónica.

TEOREMA. (*Fig.* 240).

397. *En toda superficie cónica circular, la interseccion de la superficie con un plano paralelo al de la directriz* ABC, *es una circunferencia cuyo centro está en el eje.*

Siendo paralelos los planos ABC, A'B'C', sus intersecciones con los planos AVO, BVO, CVO son paralelas, luego

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{VO}{VO'},\ \frac{OB}{O'B'}=\frac{VO}{VO'},\ \frac{OC}{O'C'}=\frac{VO}{VO'},$$

de donde

$$\frac{OA}{O'A'}=\frac{OB}{O'B'}=\frac{OC}{O'C'},$$

pero $OA = OB = OC$, por ser radios de la directriz, luego $O'A' = O'B' = O'C'$.

Vemos, pues, que la línea A'B'C' tiene sus puntos equidistantes de O'; además se hallan todos en el plano secante, por consiguiente A'B'C' es una circunferencia.

TEOREMA. (*Fig.* 240).

398. *Todo plano que pasa por el vértice* V *de una superficie cónica circular y por dos puntos* A *y* B *de la directriz, corta á la superficie en dos generatrices.*

El plano que pasa por los puntos V, A y B contiene las generatrices VA y VB, porque cada una tiene dos puntos en el plano, y como dichas generatrices pertenecen tambien á la superficie cónica, es evidente que son las intersecciones de ésta con el plano.

399. *Un plano indefinido es* TANGENTE *á una superficie cónica circular cuando sólo tiene comun con ella una generatriz.*

TEOREMA. (*Fig.* 240).

En una superficie cónica circular, todo plano que pasa por una tangente TT' *á la directriz y por la generatriz* VB *del punto de contacto es tangente á la superficie.*

La tangente TT' está en el plano de la directriz, por consiguiente es la interseccion de este plano con el VBT. Si el plano VBT tuviese con la superficie cónica algun punto comun distinto de los de la generatriz VB, contendria por completo á la generatriz que pasase por dicho punto comun, y cortaria por tanto á la directriz en otro punto además del B, lo que es imposible; luego el plano VBT es tangente á la superficie.

Teorema recíproco.

Todo plano tangente á una superficie cónica circular, corta al plano de la directriz segun una tangente á esta curva.

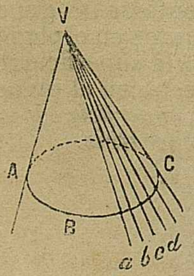
Si la interseccion del plano tangente con el de la directriz cortase á esta curva en dos puntos A y B, el primero de estos planos contendria las dos generatrices VA y VB [398], lo que es contrario á la hipótesis.

Corolario. *Por un punto dado en una superficie cónica circular no puede pasar más que un plano tangente á la superficie.*

Teorema. (*Fig.* 241).

400. *Toda superficie cónica es desarrollable.*

Fig. 241.

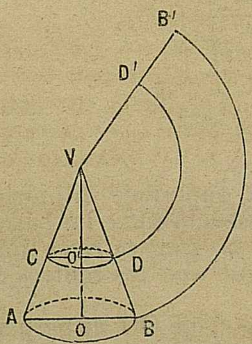


Sean V*a*, V*b*, V*c* etc. varias posiciones sucesivas de la generatriz de la superficie cónica V. Cada dos generatrices consecutivas V*a* y V*b*, V*b* y V*c*, V*c* y V*d* etc. forman una cara plana *a*V*b*, *b*V*c*, *c*V*d* etc. infinitamente pequeña, y la superficie se puede considerar como un ángulo poliedro compuesto de infinito número de estas caras. Ahora la cara *a*V*b* puede girar alrededor de la arista V*b* hasta colocarse en el plano de la cara inmediata *b*V*c*; el conjunto de estas dos caras, puede girar despues alrededor de V*c* hasta colocarse en el plano de la tercera cara *c*V*d*. Continuando de este modo se concibe qne todas las caras llegarán á colocarse en el plano de la última, esto es, de la anterior á *a*V*b*, y que por tanto la superficie cónica V se habrá desarrollado.

TEOREMA. (*Fig.* 242).

401. *El desarrollo de la superficie curva de un cono circular recto* VAB *es un sector de círculo* VBB′, *cuyo radio* VB *es el lado del cono y cuya base* BB′ *es igual en longitud á la circunferencia* O *de la base del cono.*

FIG. 242.



Todos los lados del cono VAB son iguales á la hipotenusa del triángulo generador, luego son iguales entre sí. Si hacemos rodar el cono en un plano que pase por el lado VB, sin que el vértice mude de posicion, hasta que el mismo lado coincida nuevamente con el plano en la posicion VB′, la superficie cónica habrá quedado desarrollada, y todos los puntos de la circunferencia O, se habrán colocado sucesivamente en el plano á la misma distancia del vértice V; luego BB′ es un arco de círculo igual en longitud á la circunferencia O, y VBB′ un sector circular.

ESCOLIO. Cortando el cono VAB por un plano CD paralelo á la base, el cono deficiente VCD será tambien circular recto, y el desarrollo de su superficie es evidentemente el sector VDD′; luego el trapecio circular BB′DD′ será el desarrollo de la superficie lateral del tronco de cono de bases paralelas ABCD.

III.—Superficie cilíndrica.

402. SUPERFICIE CILÍNDRICA *es la engendrada por una recta indefinida que se mueve paralelamente á sí misma apoyándose en una curva cualquiera.*

Está curva recibe el nombre de *directriz.*

Si la directriz tiene centro, la paralela á las generatrices tirada por este punto se llama *eje* de la superficie.

Superficie cilíndrica *circular* es aquella cuya directriz es una circunferencia.

403. *Se llama* CILINDRO *el espacio limitado por una superficie cilíndrica y dos planos paralelos que corten á todas las generatrices.*

ABCD (*Fig.* 243) es un cilindro. Las partes AEBG, CFDH

FIG. 243.

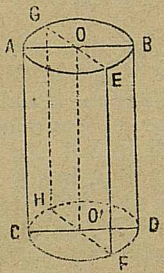
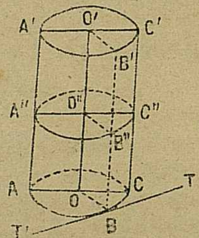


FIG. 244.



de los planos secantes limitadas por la superficie cilíndrica son las bases del cilindro. *Altura* es la distancia entre las bases. *Lados* son las partes AC, EF, BD etc. de las generatrices limitadas por las bases. *Eje* es la recta OO' que une los centros de las bases.

Un cilindro es *recto* (*Fig.* 243) cuando el eje OO' es perpendicular á las bases, y *oblicuo* (*Fig.* 244) cuando el eje OO' es oblicuo á las bases.

Se llama cilindro *circular* aquel cuyas bases son círculos.

404. *El cilindro circular recto puede considerarse engendrado por un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados.*

Si OO' (*Fig.* 243), lado del rectángulo AOO'C, es el eje de revolucion, los lados opuestos OA, O'C engendrarán las bases del cilindro, que serán dos círculos perpendiculares al eje, y el lado AC engendrará la superficie cilíndrica.

TEOREMA. (*Fig.* 244).

405. *En toda superficie cilíndrica circular, la interseccion de la superficie con un plano* A''B''C'' *paralelo al de la directriz* ABC, *es una circunferencia igual á* ABC *y cuyo centro está en el eje.*

Siendo paralelos los planos ABC, A″B″C″ sus intersecciones con los planos AOO′A′, BOO′B′, COO′C′ son paralelas; además el eje OO′ es paralelo á las generatrices, por tanto

$$O''A'' = OA, \quad O''B'' = OB, \quad O''C'' = OC,$$

y como los radios OA, OB, OC son iguales entre sí, las rectas O″A″, O″B″, O″C″ tambien son iguales; luego la curva A″B″C″ es una circunferencia cuyo centro es O″; además siendo el radio O″A″ igual al OA, las circunferencias O″ y O son iguales.

Teorema. (*Fig.* 244).

406. *Todo plano paralelo al eje de una superficie cilíndrica circular y que pasa por dos puntos* A *y* B *de la directriz, corta á la superficie en dos generatrices.*

La generatriz AA′ es paralela al eje OO′ y tiene un punto A en el plano, luego está enteramente contenida en él [351, *cor*. 1.°]; lo mismo puede decirse de la generatriz BB′, luego estas generatrices son las intersecciones del plano con la superficie cilíndrica.

407. *Un plano es* TANGENTE *á una superficie cilíndrica circular cuando sólo tiene comun con ella una generatriz.*

Teorema. (*Fig.* 244).

En una superficie cilíndrica circular, todo plano que pasa por una tangente TT′ *á la directriz y por la generatriz* BB′ *del punto de contacto, es tangente á la superficie.*

TEOREMA RECÍPROCO. *Todo plano tangente á una superficie cilíndrica circular, corta al plano de la directriz segun una tangente á esta curva.*

La demostracion es análoga á la del número 399.

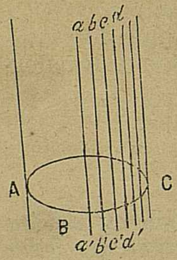
COROLARIO. *Por un punto dado en una superficie cilíndrica circular no puede pasar más que un plano tangente á la superficie.*

TEOREMA. *(Fig. 245).*

408. *Toda superficie cilíndrica es desarrollable.*

Sean aa', bb', cc' etc. varias posiciones sucesivas de la generatriz; cada dos generatrices consecutivas aa' y bb', bb' y cc', cc' y dd' etc. están en un mismo plano, puesto que son paralelas, y forman fajas infinitamente estrechas que componen la superficie cilíndrica. Ahora, la faja $aa'bb'$ puede girar alrededor de la arista bb' hasta colocarse en el plano de la faja inmediata $bb'cc'$; el sistema de estas dos fajas puede girar despues alrededor de cc' hasta colocarse en el plano de la tercera etc.; luego todas las fajas llegarán á colocarse en el plano de la última, y la superficie cilíndrica habrá quedado desarrollada.

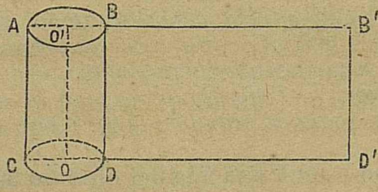
FIG. 245.



TEOREMA. *(Fig. 246).*

409. *El desarrollo de la superficie curva de un cilindro circular recto* ABCD *es un rectángulo* BDD'B', *cuya altura es el lado* BD *del cilindro y cuya base* DD' *es igual en longitud á la circunferencia* O *de la base del cilindro.*

FIG. 246.



Hagamos rodar el cilindro, sin que resbale, en un plano que pase por el lado BD, hasta que el mismo lado coincida nuevamente con el plano en la posicion B'D'. En virtud de este movimiento, la superficie cilíndrica habrá quedado desarrollada;

todos los puntos de la circunferencia O se habrán colocado sucesivamente en el plano que pasa por BD; la base CD del cilindro no habrá salido en su movimiento del plano indefinido de que forma parte, pues se supone que el cilindro no resbala, por consiguiente los puntos de la circunferencia CD habrán recorrido la interseccion del plano que pasa por BD con el de la base CD; luego DD′ es una línea recta igual en longitud á la circunferencia O. Además siendo BD perpendicular al plano CD, lo es tambien á la recta DD′ que pasa por su pié en dicho plano.

El mismo razonamiento, aplicado á la base AB, demuestra que BB′ es una línea recta igual en longitud á la circunferencia O′ y perpendicular á BD, luego DD′ y BB′ son paralelas; además como las circunferencias O y O′ son iguales, BB′ y DD′ son tambien iguales, luego la figura BDB′D′ es un paralelógramo rectángulo.

IV.—Superficie esférica.

410. Superficie esférica *es la engendrada por una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.*

Esfera *es la porcion de espacio limitada por la superficie esférica.*

Es claro que *la esfera puede considerarse engendrada por un semicírculo que gira alrededor del diámetro.*

Centro *de la esfera ó de la superficie esférica es el centro de la semicircunferencia generatriz;* radio *es toda recta tirada desde el centro á un punto cualquiera de la superficie; y* diámetro *toda recta que pasando por el centro tiene sus dos extremos en la superficie.*

Todos los radios de una esfera son iguales.

Porque son radios de la semicircunferencia generatriz en alguna de sus posiciones.

Por esto se dice tambien: *superficie esférica es una superficie curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro interior llamado centro.*

Todos los diámetros de una esfera son iguales.

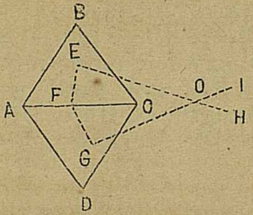
Porque cada uno vale dos radios.

Eje *de una esfera es el diámetro del semicírculo generador; y* polos, *los extremos del eje.*

Teorema. (*Fig.* 247).

411. *Cuatro puntos* A, B, C, D *que no están en un mismo plano, determinan una superficie esférica.*

Fig. 247.



Sea E el centro de la circunferencia determinada por los puntos A, B, C, y G el centro de la determinada por A, D, C. La recta AC es la interseccion de los planos ABC y ADC. Por los centros E y G levanto dos perpendiculares EH y GI á los planos ABC y ADC: estas perpendiculares se cortan. En efecto, las perpendiculares EF y GF á la recta AC, cuerda comun á las circunferencias cuyos centros son E y G, se encuentran en el punto medio F de AC [100] y no pueden estar en línea recta, por hallarse en planos distintos ADC y ABC, luego determinan un plano EFG perpendicular á AC; segun esto, los planos ABC y ADC son perpendiculares al EFG [329], por tanto la recta EH, perpendicular al plano ABC, está contenida en el EFG [340], y la recta GI, perpendicular al plano ADC, lo está en el mismo plano EFG; pero, segun hemos dicho, las rectas EF y GF se cortan, luego sus perpendiculares respectivas EH y GI se cortan tambien en un punto O.

Ahora bien, este punto O, por pertenecer á la perpendicular EH, equidista de A, B y C [323, 1.º], y, por pertenecer á la perpendicular GI, equidista de A, D y C; luego O equidista de los cuatro puntos A, B, C y D, por consiguiente la superficie esférica cuyo centro sea O y el radio OA pasará por los cuatro puntos dados.

Demostremos que por estos puntos solo puede pasar una superficie esférica.

El centro de toda superficie esférica que pase por A, B, C y D equidista de A, B y C, por consiguiente la perpendicular bajada desde dicho centro al plano ABC tendrá su pié á igual distancia de los puntos A, B y C, esto es, en E, y se confundirá con EH: luego el centro será un punto de la perpendicular EH. De un modo análogo se demuestra que el centro es tambien un punto de la perpendicular GI. Luego el centro de toda superficie esférica que pase por A, B, C y D es O, y como el radio evidentemente es OA, se confundirán todas en una sola.

TEOREMA.

412. *Una superficie esférica no puede ser cortada por una línea recta en más de dos puntos.*

Porque si la recta cortase á la superficie en tres ó más puntos, uniendo éstos con el centro tendríamos en el plano que determinan la recta y el centro más de dos rectas iguales dirigidas desde un punto á una recta, lo que es imposible [47].

TEOREMA.

413. *Si una superficie esférica se corta por un plano, la interseccion es una circunferencia.*

Si el plano secante AB pasa por el centro O de la esfera (*Fig.* 248), todos los puntos de interseccion estarán á una dis-

FIG. 248.

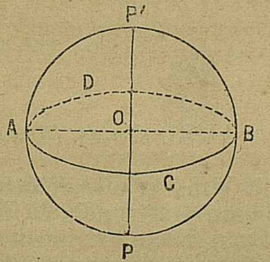
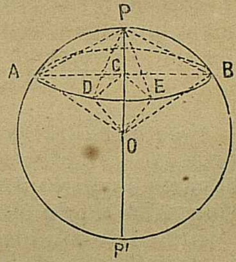


FIG. 249.



tancia del centro igual al radio de ésta y en un mismo plano, luego la interseccion es una circunferencia.

Si el plano secante ADEB (*Fig.* 249) no pasa por el centro de la esfera, tiro un radio OP perpendicular al plano, y las rectas OA, OD, OE etc., á diferentes puntos de la interseccion. Estas rectas son iguales, como radios de la esfera, por consiguiente son oblicuas al plano y sus piés equidistan del pié C de la perpendicular; luego la curva plana ADEB tiene todos sus puntos equidistantes de otro C situado en su plano, y por tanto es una circunferencia.

Observacion. El pié C de la perpendicular tirada desde el centro de la esfera al plano de la circunferencia ADEB, es centro de la misma.

414. El radio de una circunferencia cuyo plano pase por el centro de la esfera es mayor que el radio AC de cualquier circunferencia cuyo plano no pasa por dicho centro; porque el radio OA, igual al de la primera circunferencia, es la hipotenusa del triángulo rectángulo ACO y AC es un cateto; luego *la mayor circunferencia de la esfera es aquella cuyo plano pasa por el centro.* Por esto se llama circunferencia *máxima*; las demás reciben el nombre de *menores*. Los círculos respectivos tienen los mismos nombres.

Teorema.

415. *Dos puntos de la superficie esférica que no están en línea recta con el centro, determinan una circunferencia máxima.*

Porque los puntos dados y el centro determinan un plano, cuya interseccion con la superficie esférica es una circunferencia máxima que pasa por los dos puntos.

Teorema. *(Fig. 248)*.

416. *Toda circunferencia máxima* ACBD *divide la superficie esférica en dos partes iguales.*

Si la parte superior ACBDP′ de la superficie se coloca sobre la inferior ACBDP, de modo que la circunferencia ACBD sea comun y que los puntos P y P′ caigan hácia un mismo lado de ella, aquellas dos partes coincidirán por completo, de lo contrario los radios de la superficie esférica no serian todos iguales.

Escolio. Es evidente que el círculo máximo ACBD divide la esfera en dos partes iguales. Estas partes se llaman *hemisferios*.

Teorema.

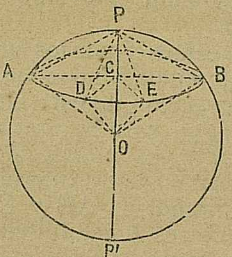
417. *Dos circunferencias máximas de una misma esfera se dividen mutuamente en dos partes iguales.*

Como los planos de las dos circunferencias pasan por el centro, la interseccion es un diámetro comun, que divide á cada una en dos partes iguales.

418. Polos *de una circunferencia trazada en la superficie esférica son los extremos del diámetro de la esfera perpendicular al plano de la circunferencia.*

Teorema. *(Fig. 249).*

Fig. 249.



419. *Cada uno de los polos* P, P' *de una circunferencia* AB *de la esfera, equidista de todos los puntos de la circunferencia.*

La perpendicular PP' al plano AB pasa por el centro C de la circunferencia, por consiguiente las distancias de un polo á los puntos de ésta son oblicuas al plano AB que se apartan igualmente del pié C de la perpendicular; luego son iguales.

Escolio. Los arcos de circunferencia máxima PA, PB etc., trazados desde el polo P á los diferentes puntos de la circunferencia AB, son iguales, por serlo sus cuerdas.

Teorema. *(Fig. 249).*

420. *Si haciendo centro en un punto* P *de la superficie esférica, con un radio cualquiera* PA, *se traza una curva* ADEB [1], *esta curva será una circunferencia de la que* P *será uno de los polos.*

Trazo el diámetro PP' y los radios OA, OD, OE etc. á diferentes puntos de la curva ADEB, y uno estos puntos con P por medio de rectas AP, DP, EP etc. Los triángulos OAP, ODP, OEP etc. son iguales, porque tienen OA = OD = OE... como radios de la esfera, PA = PD = PE... por hipótesis, y el lado OP comun á todos ellos; luego si desde los puntos A, D, E, etc. bajo perpendiculares al lado comun OP, se encontrarán evidentemente en el mismo punto C, estarán en el mismo plano [318], y serán iguales; luego la curva ADEB será una circunferencia.

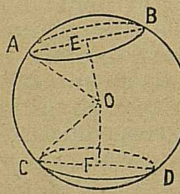
Además el plano de esta curva es perpendicular al diámetro PP', luego P es un polo de la misma.

1 Para trazar curvas en la superficie de la esfera se emplea un compás de piernas curvas, llamado *compás esférico*.

Teorema. (*Fig.* 250).

421. *Si dos circunferencias de una misma superficie esférica son iguales, sus planos equidistan del centro; y si son desiguales, el plano de la mayor está más próximo al centro que el de la menor.*

Fig. 250.



Por el centro O de la esfera y por los centros E y F de las circunferencias dadas hago pasar un plano. La interseccion de este plano con la superficie esférica será la circunferencia máxima ABDC, y la interseccion del mismo con los planos de las circunferencias menores serán los diámetros AB y CD de éstas. Las perpendiculares bajadas desde O á los planos AB y CD pasan por los centros E y F, luego están en el plano ABDC. Ahora bien, si los diámetros AB y CD son iguales, las distancias OE y OF tambien lo son; y si AB > CD, será OE<OF [101]; luego el teorema es cierto.

Teorema recíproco.

422. *Si dos circunferencias de una misma superficie esférica tienen sus planos equidistantes del centro son iguales; y si distan desigualmente del centro, es mayor aquella cuyo plano está más próximo al centro.* [55].

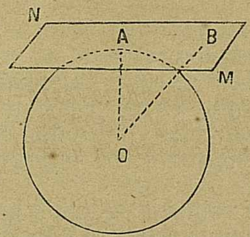
423. *Se llama* plano tangente *á una superficie esférica todo plano indefinido que toca á la superficie en un solo punto, llamado de contacto.*

Teorema.

424. 1.° *El plano perpendicular á un radio en el punto en que éste encuentra á la superficie esférica, es tangente á la superficie.*

2.° *Todo plano oblicuo al radio en su extremo, corta á la superficie esférica.*

Fig. 251.



1.° (*Fig.* 251). Sea MN el plano perpendicular al radio OA en A.

La perpendicular OA al plano MN es menor que otra cualquiera recta OB tirada desde el centro de la esfera al plano, por consiguiente el punto B está fuera de la esfera. Lo mismo puede decirse de otro cualquiera punto del plano MN, á excepcion del A, luego la superficie esférica y el plano MN solo tienen el punto comun A.

2.° (*Fig.* 250). Sea AB un plano oblicuo al radio OA en A. Siendo OA oblicua al plano AB, podremos trazar desde el centro O una perpendicular OE al mismo plano, y será $OE < OA$, luego el punto E es interior á la esfera, por consiguiente el plano AB es secante.

Teorema recíproco.

425. 1.° *Todo plano tangente á la superficie esférica es perpendicular al radio tirado al punto de contacto.*

2.° *Todo plano secante es oblicuo á los rádios tirados á los puntos de interseccion.* [55].

Corolarios.

1.° *Por un punto de una superficie esférica no puede pasar más que un plano tangente á la superficie.*

Porque el plano tangente debe ser perpendicular al radio, y por el extremo de éste no puede pasar más que un plano perpendicular.

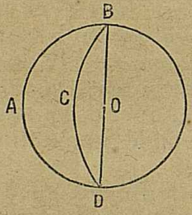
2.° *El radio ó diámetro perpendicular á un plano tangente, pasa por el punto de contacto.*

De lo contrario podrian tirarse desde O dos perpendiculares al plano tangente.

426. Dos arcos de círculo máximo que se cortan y terminan en su comun interseccion forman un *ángulo esférico.*

Estos arcos AB y BC (*Fig.* 252) se llaman *lados* del ángulo y el punto B en que se cortan, *vértice*.

Fig. 252.



Dos ángulos esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, si colocando un lado del primero sobre otro lado del segundo, de modo que los vértices coincidan, los otros dos lados se confunden en uno solo. En el caso contrario los ángulos son desiguales.

Recíprocamente, si sabiendo que dos ángulos esféricos de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales, les superponemos de modo que coincidan dos lados y los vértice, cayendo los otros dos lados hácia una misma parte del lado comun, los otros dos lados se confundirán.

Se suman los ángulos esféricos haciendo que coincidan dos de sus lados y los vértices, de modo que los otros dos lados caigan á una y otra parte del lado comun: el ángulo que forman los lados exteriores es la suma de los ángulos dados.

La magnitud de un ángulo esférico no depende de la longitud de sus lados, sino de la mayor ó menor separacion de ellos.

Arco BISECTOR *de un ángulo esférico es un arco de círculo máximo que pasa por el vértice y divide el ángulo en dos partes iguales.*

Es evidente que todo ángulo esférico tiene un arco bisector y solo uno.

427. Dos arcos de círculo máximo que se cortan forman cuatro ángulos esféricos.

Ángulos esféricos ADYACENTES *son dos ángulos que tienen un lado comun y los otros dos lados en una misma circunferencia máxima.*

Ángulos esféricos OPUESTOS POR EL VÉRTICE *son dos ángulos de los que uno está formado por las prolongaciones de los lados del otro.*

Un arco de círculo máximo es PERPENDICULAR *á otro cuando forma con éste dos ángulos esféricos adyacentes iguales.*

Ángulo esférico recto es cada uno de los dos ángulos adyacentes iguales que forma un arco con otro al que es perpendicular.

Un arco es OBLICUO *á otro cuando forma con éste dos ángulos esféricos adyacentes desiguales.*

Estos ángulos se llaman *oblicuos*.

428. *Ángulo diedro* CORRESPONDIENTE *á un ángulo esférico* ABC (Fig. 252) *es el diedro* ABDC *que forman los planos en que están situados los lados del ángulo esférico.*

La arista del diedro pasa por el centro de la esfera, porque los lados del ángulo esférico son arcos de circunferencia máxima.

Si dos ángulos esféricos de una misma esfera son iguales, sus ángulos diedros correspondientes tambien son iguales. Si los ángulos esféricos son desiguales, á mayor ángulo esférico corresponde mayor ángulo diedro.

1.° Haciendo que los ángulos esféricos coincidan, coincidirán las aristas y caras de los diedros correspondientes.

2.° Haciendo coincidir dos lados de los ángulos esféricos y los vértices, de modo que los otros dos lados caigan hácia una misma parte del lado comun, coincidirán dos caras y las aristas de los diedros, el segundo lado del menor ángulo esférico quedará dentro del ángulo mayor, luego el diedro correspondiente al ángulo menor estará contenido en el diedro correspondiente al ángulo mayor, y será, por consiguiente, menor que éste.

Recíprocamente. *Si dos ángulos diedros, correspondientes á dos ángulos esféricos de una misma esfera, son iguales, dichos ángulos esféricos son tambien iguales. Si los diedros son desiguales, el ángulo esférico á que corresponde el mayor diedro será mayor que el otro ángulo esférico.* [55].

Es evidente que á dos ángulos esféricos adyacentes corresponden dos ángulos diedros adyacentes tambien: si los primeros son iguales, los segundos tambien lo serán, y recíprocamente; luego

El ángulo diedro correspondiente á un ángulo esférico recto, es tambien recto, y recíprocamente.

Como todos los ángulos diedros rectos son iguales, *todos los ángulos esféricos rectos son iguales.*

La suma de dos ángulos esféricos adyacentes es igual á dos ángulos rectos.

Dos ángulos esféricos opuestos por el vértice son iguales.

Se demuestran estos dos teoremas como sus análogos de los números 30 y 36.

429. *La razon de dos ángulos esféricos de una misma esfera es igual á la razon de sus diedros correspondientes.*

Un ángulo esférico tiene por medida su ángulo diedro correspondiente, esto es, *el valor numérico de un ángulo esférico es igual al valor numérico de su diedro correspondiente, siempre* *que la unidad para medir ángulos diedros sea el diedro correspondiente á la unidad de ángulos esféricos.*

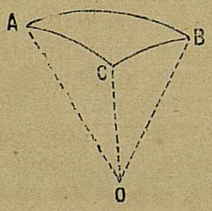
Estos teoremas se demuestran como sus análogos de los números 337 y 338.

Siendo la unidad de ángulos diedros el diedro recto, la unidad de ángulos esféricos será el ángulo esférico recto. Este se divide en 90 grados, cada grado en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.

Si un ángulo diedro vale 34° 53′ el esférico correspondiente valdrá tambien 34° 53′.

430. *Se llama* TRIÁNGULO ESFÉRICO *la porcion de superficie esférica* ABC (Fig. 253) *limitada por tres arcos de circunferencia máxima menores cada uno que media circunferencia.*

FIG. 253.



Los arcos que limitan el triángulo se llaman *lados* del mismo.

Uniendo los vértices de un triángulo esférico ABC con el centro O de la esfera, y suponiendo planos por cada dos rectas de union, se forma un ángulo triedro OABC *correspondiente* al triángulo esférico ABC.

Los lados AB, AC, BC del triángulo esférico tienen igual medida que las caras AOB, AOC, BOC del triedro correspondiente, puesto que aquellos son los arcos correspondientes á estos ángulos planos; y los ángulos esféricos A, B, C del triángulo tienen igual medida que los ángulos diedros OA, OB, OC. Luego *á toda propiedad de los ángulos triedros, relativa á los valores de sus ángulos planos y diedros, corresponderá otra análoga de los triángulos esféricos, que se enunciará y demostrará reemplazando las caras y ángulos diedros de aquellos por los lados y ángulos esféricos de éstos.*

TEOREMA. (*Fig.* 253).

431. *Un lado cualquiera de un triángulo esférico es*: 1.° *menor que la suma de los otros dos;* 2.° *mayor que su diferencia.*

Construyo el triedro O correspondiente al triángulo propuesto ABC, y será [370]

$$AOB < AOC + COB, \qquad AOC > AOB - BOC;$$

sustituyendo en estas desigualdades cada ángulo plano por el arco correspondiente, tendremos

$$AB < AC + CB, \qquad AC > AB - BC.$$

TEOREMA. (*Fig*. 253).

432. *La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que una circunferencia máxima.*

Tenemos [371] $AOB + AOC + BOC < 4R$,

luego $AB + AC + BC < 360^{\circ}$,

esto es, menor que una circunferencia.

433. *Dos triángulos esféricos son* SUPLEMENTARIOS *cuando los lados de cada uno son suplementos de los ángulos del otro.*

TEOREMA.

Los triángulos esféricos correspondientes á dos triedros suplementarios, son tambien suplementarios.

Siendo las caras de cada triedro suplementos de los ángulos diedros del otro, los lados de cada triángulo serán suplementos de los ángulos del otro [430], luego los triángulos serán suplementarios.

TEOREMA.

434. *La suma de los ángulos de un triángulo esférico, es mayor que dos rectos y menor que seis.* [374].

ESCOLIO. Un triángulo esférico puede tener uno, dos y hasta tres ángulos rectos, llamándose en cada caso respectivamente *rectángulo*, *birectángulo* ó *trirectángulo*.

435. *Triángulos esféricos* SIMÉTRICOS *son dos triángulos de una misma esfera correspondientes á triedros simétricos.*

TEOREMA.

Dos triángulos esféricos simétricos tienen sus lados y ángulos respectivamente iguales, pero en general no pueden coincidir. Sin embargo, coincidirán si uno de los triángulos tiene dos ángulos iguales. [375].

TEOREMA.

436. *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos son iguales; y si tiene dos ángulos desiguales á mayor ángulo se opone mayor lado.* [376].

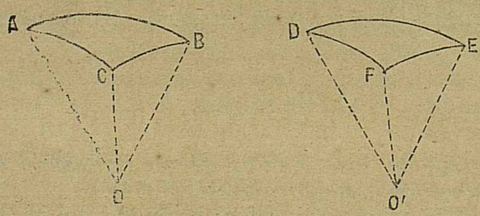
TEOREMA RECÍPROCO.

437. *Si un triángulo esférico tiene dos lados iguales, los ángulos opuestos son iguales; y si tiene dos lados desiguales, á mayor lado se opone mayor ángulo.* [55].

TEOREMA. *(Fig. 254).*

438. *Dos triángulos esféricos* ABC, DEF *de una misma esfera ó de esferas iguales son iguales: 1.° cuando tienen un lado igual adyacente á dos ángulos respectivamente iguales; 2.° cuando tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido; 3.° cuando tienen sus tres lados respectivamente iguales; 4.° cuando tienen sus tres ángulos respectivamente iguales; siempre que en todos estos casos los elementos iguales estén igualmente dispuestos.*

FIG. 254.



1.° Sea AB = DE, *áng.* A = *áng.* D, *áng.* B = *áng.* E. Los triedros O y O′, correspondientes á los triángulos propuestos tienen un ángulo plano igual AOB=DO′E, adyacente á dos ángulos diedros respectivamente iguales OA=O′D, OB=O′E é igualmente dispuestos, luego dichos triedros son iguales. Si los hacemos coincidir, los vértices D, E, F del triángulo DEF coincidirán con A, B, C, por ser iguales los radios, y como por dos puntos de la superficie esférica solo puede pasar un arco de circunferencia máxima, los lados de los triángulos coincidirán tambien; luego los triángulos son iguales.

De un modo análogo se demuestran los demás casos.

ESCOLIO. Si en alguno de estos casos los elementos iguales no están igualmente dispuestos, los triángulos esféricos serán simétricos [382].

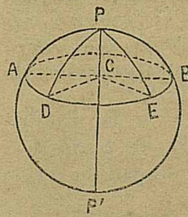
TEOREMA.

439. *La línea más corta que se puede trazar en la superficie esférica entre dos puntos de la misma, es el arco menor de la circunferencia máxima que pasa por dichos puntos.*

Demostraremos ante todo dos lemas.

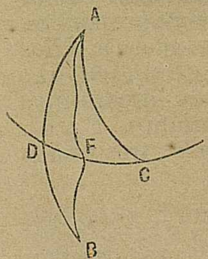
1.° *La distancia sobre la superficie esférica entre el polo* P (Fig. 255) *y cada punto de una circunferencia* AB, *es igual para todos estos puntos.*

FIG. 255.



Consideremos dos puntos D y E, y sea PD una línea cualquiera, trazada en la superficie de la esfera, que supondremos la más corta entre P y D. Si la línea PD gira alrededor del eje PP', todos sus puntos permanecerán en la superficie esférica, puesto que describen paralelos de la misma, y el punto D llegará á pasar por E, por tanto PD será una línea entre P y E; si no fuese la más corta, habria otra PE menor que ella, y haciendo girar ésta alrededor de PP' el punto E llegaria á pasar por D, y PE seria un camino entre P y D menor que PD, lo que es contrario al supuesto. Luego el camino más corto entre P y D es igual al más corto entre P y E, por consiguiente el lema es cierto.

FIG. 256.

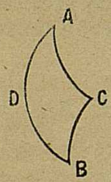


2.° *Si dos arcos* AC *y* ADB (Fig. 256) *de circunferencia máxima, menores que media circunferencia, son desiguales, siendo* AC< ADB, *el camino más corto entre* A *y* C *es menor que el camino más corto entre* A *y* B.

Desde el punto A como polo, con una abertura de compás AC, describamos una circunferencia, que cortará necesariamente al arco ADB entre A y B. Sea AFB una línea cualquiera, que supondremos el menor camino entre A y B; esta línea corta á la circunferencia DC en un punto F, por manera que puede considerarse descompuesta en dos partes AF y FB; la primera AF es el camino más corto entre A y F, de lo contrario AFB no seria el camino más corto entre A y B, luego AF será igual al camino más corto entre A y C [*Lema* 1.°]; por consiguiente este último camino es menor que AFB.

Demostremos ahora el teorema.

Fig. 257.



Sea AB (*Fig.* 257) el arco de circunferencia máxima, menor que media circunferencia, comprendido entre los puntos dados A y B. Si la línea más corta entre A y B tuviese un punto C fuera del arco AB, uniendo este punto C con A y con B y tomando AD = AC [1], seria [431, 1.°]

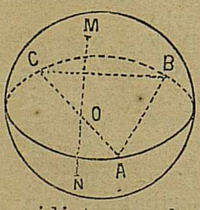
$$AD + DB < AC + BC;$$

restando AD del primer miembro y su igual AC del segundo, resulta DB<BC. Ahora bien, el camino más corto entre A y D, es igual al camino más corto entre A y C [*Lema* 1.°], luego si C es un punto del camino más corto entre A y B, deberá ser el camino entre C y B menor que el camino entre D y B, lo que es absurdo [*Lema* 2.°], porque BC > BD.

Luego ningun punto de la distancia entre A y B puede estar fuera del arco de circunferencia máxima AB, lo que demuestra que este arco es la línea más corta que se puede trazar sobre la superficie esférica entre A y B.

Problema. (*Fig.* 258).

Fig. 258.



440. *Dada una esfera, determinar su radio por medio de una construccion geométrica.*

Señalo dos puntos M y N en la superficie esférica; desde cada uno de ellos como polo, con una abertura de compás mayor que la mitad de la distancia esférica MN, describo dos arcos que se cortarán en un punto A equidistante de M y N; determino del mismo modo otros dos puntos B y C equidistantes de M y N. El plano que determinan los tres pun-

---

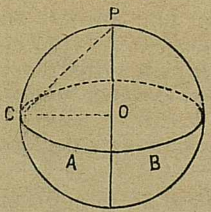
1 Los arcos AC y BC son menores que AB, pues si fuese AC > AB, el camino más corto entre A y C seria mayor que el camino más corto entre A y B (*Lema* 2.°), lo que es contrario al supuesto de que el punto C pertenezca al camino más corto entre A y B.

tos A, B y C es perpendicular á la recta MN en su punto medio [325]; luego es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de M y N [324]; de aquí se deduce que dicho plano pasa por el centro O de la esfera, cortando la superficie de ésta segun una circunferencia, que estará determinada por los tres puntos A, B y C. Mido ahora las distancias AB, BC y AC, y considerándolas como lados, construyo un triángulo; circunscribo á este triángulo una circunferencia, que será igual á la máxima ABC: el radio de esta circunferencia es el de la esfera dada.

PROBLEMA. (*Fig.* 259).

441. *Por dos puntos* A *y* B *de una superficie esférica, hacer pasar una circunferencia máxima.*

FIG. 259.



ANÁLISIS. Si P es el polo de la circunferencia máxima AB, la distancia PC entre P y un punto cualquiera C de esta circunferencia es la hipotenusa de un triángulo rectángulo POC, cuyos catetos son iguales al radio de la esfera, ó bien, la cuerda de un cuadrante de circunferencia máxima.

SÍNTESIS. Haciendo centro sucesivamente en los puntos dados A y B, describo, con un radio igual á la cuerda de un cuadrante de circunferencia máxima, dos arcos que se cortarán en un punto P; desde el punto P como polo, con el mismo radio, describo una circunferencia, y estará resuelto el problema.

LIBRO SEGUNDO.

POLIEDROS.

DEFINICIONES.

442. Poliedro *es todo cuerpo limitado por planos.*

Estos planos terminan en sus mutuas intersecciones, de modo que el poliedro está limitado por polígonos, que se llaman *caras*. Las intersecciones de las caras se llaman *aristas* del poliedro; las aristas son lados de las caras. Los puntos en que concurren tres ó más aristas se llaman *vértices* del poliedro, y son á la vez vértices de las caras. Los ángulos diedros y poliedros que forman las caras son los *ángulos diedros* y *ángulos poliedros* del cuerpo.

Diagonal es toda recta que une dos vértices del poliedro, no situados en la misma cara.

Poliedro *convexo* es todo aquel cuya superficie no puede ser cortada por una línea recta en más de dos puntos.

443. El menor número de planos necesarios para formar un poliedro es cuatro.

Un poliedro de cuatro caras se llama				*tetraedro*,
»	cinco	»	»	*pentaedro*,
»	seis	»	»	*exaedro*,
»	siete	»	»	*eptaedro*,
»	ocho	»	»	*octaedro*,
»	doce	»	»	*dodecaedro*,
»	veinte	»	»	*icosaedro*.

444. Se llaman poliedros *iguales* los que coinciden, cuando se superponen convenientemente.

Si las caras y ángulos diedros de un poliedro son respectivamente iguales á las caras y ángulos de otro, y estos elementos iguales tienen igual disposicion, es evidente que los cuerpos serán iguales.

Dos poliedros iguales tienen respectivamente iguales todas sus aristas, caras, ángulos diedros y ángulos poliedros.

Si los vértices de un poliedro coinciden con los de otro, coincidirán tambien las aristas y caras, y los poliedros serán iguales.

445. *Se llaman poliedros* SEMEJANTES, *dos poliedros cuyos ángulos diedros son respectivamente iguales y están dispuestos en el mismo órden, y cuyas caras adyacentes á diedros iguales son semejantes.*

Se llaman *aristas homólogas* las que pertenecen á dos diedros iguales é igualmente dispuestos.

Caras homólogas son las limitadas por aristas homólogas.

Vértices homólogos son los extremos de aristas homólogas.

Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes son proporcionales; porque si la razon de semejanza de dos caras homólogas cualesquiera es *m*, la razon de otras dos adyacentes á las primeras será tambien *m*, puesto que dos caras adyacentes tienen una arista comun, y así sucesivamente; luego la razon de dos aristas homólogas es constante.

Dos poliedros semejantes, cuya razon de semejanza es la unidad, son iguales.

Porque las caras homólogas son respectivamente iguales [213], y los ángulos diedros lo son tambien por hipótesis.

Dos poliedros A *y* B *semejantes á un tercero* C, *son semejantes entre sí.*

Siendo semejantes las caras de los poliedros A y B á las del C, son semejantes entre sí [214]: y siendo iguales los ángulos diedros de los poliedros A y B á los del C, son iguales entre sí; luego A y B son poliedros semejantes.

CAPÍTULO PRIMERO.

PIRÁMIDES.

I.—Pirámide en general.

446. PIRÁMIDE *es todo poliedro limitado por un polígono cualquiera, llamado* BASE, *y varios triángulos que tienen un vértice comun, llamado* VÉRTICE *ó* CÚSPIDE *de la pirámide.*

Altura de una pirámide es la perpendicular bajada desde el vértice al plano de la base.

Una pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal* etc. cuando su base es un triángulo, cuadrilátero, pentágono etc.

La pirámide triangular se llama comunmente *tetraedro*: es el poliedro de menor número de caras.

Base de un tetraedro es una cara cualquiera, y *vértice* del tetraedro, el vértice opuesto á la base.

Pirámide REGULAR *es la que tiene por base un polígono regular, y cuya altura cae en el centro de la base.*

Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales, por ser oblicuas que se apartan igualmente de la perpendicular al plano de la base.

Las caras laterales de una pirámide regular son triángulos isósceles é iguales.

Se llama *apotema* de una pirámide regular á la altura de uno de los triángulos laterales.

PIRÁMIDE TRONCADA *ó* TRONCO DE PIRÁMIDE *es la parte de pirámide comprendida entre la base y un plano que corte á todas las aristas laterales.*

La base de la pirámide y la seccion hecha por este plano, son las *bases* del tronco. Si son paralelas, la distancia entre ellas se llama *altura*.

Pirámide DEFICIENTE *es la parte de pirámide total comprendida entre el vértice y el plano secante.*

TEOREMA.

447. *Dos pirámides son iguales cuando tienen tres caras, que concurren en un vértice de la base, iguales respectivamente é igualmente dispuestas.*

Observaremos ante todo que los ángulos triedros formados por las caras iguales tienen sus ángulos planos respectivamente iguales é igualmente dispuestos, luego son iguales [380].

Ahora bien, colocando una de las pirámides sobre la otra de modo que sus bases, iguales por hipótesis, coincidan, dos aristas laterales, una de cada pirámide, coincidirán necesariamente, porque las pirámides tienen en la base un ángulo triedro igual; además estas aristas laterales son iguales, como pertenecientes á triángulos laterales iguales, por consiguiente deben coincidir las cúspides de las pirámides; luego éstas serán iguales.

TEOREMA.

448. *Dos pirámides regulares de igual base y altura son iguales.*

Superponiendo las bases, coincidirán sus centros; y como las alturas de las pirámides regulares son perpendiculares á las bases en sus centros, y en este caso se suponen iguales, coincidirán y tendrán los mismos extremos, que son los vértices de las pirámides propuestas; luego éstas son iguales.

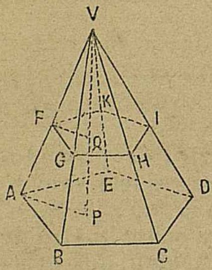
TEOREMA. *(Fig. 260).*

449. *Todo plano* FGHIK, *paralelo á la base de una pirámide, divide las aristas laterales y la altura en partes proporcionales. La seccion que resulta es un polígono semejante á la base.*

1.° Siendo paralelos el plano de la base y el de la seccion, dividen las rectas que parten del vértice V en partes proporcionales [368, *cor.*], luego

$$\frac{VF}{FA}=\frac{VG}{GB}=\frac{VH}{HC}=\dots=\frac{VQ}{QP},$$

Fig. 260.



2.° Los polígonos ABCDE y FGHIK tienen sus ángulos respectivamente iguales: los ángulos ABC y FGH, por ejemplo, tienen sus lados paralelos [357] y dirigidos en el mismo sentido, luego son iguales; lo mismo puede decirse de los demás.

Los lados homólogos son proporcionales. En efecto: los triángulos semejantes VAB, VFG, y los VBC, VGH nos dan

$$\frac{AB}{FG}=\frac{VB}{VG}, \quad \frac{VB}{VG}=\frac{BC}{GH},$$

de donde

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH};$$

Del mismo modo se demuestran las igualdades

$$\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI}, \quad \frac{CD}{HI}=\frac{DE}{IK}\ \text{etc.};$$

luego

$$\frac{AB}{FG}=\frac{BC}{GH}=\frac{CD}{HI}=\frac{DE}{IK}=\ldots.$$

Vemos, pues, que los polígonos ABCDE y FGHIK tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados homólogos proporcionales, luego son semejantes.

Teorema. (*Fig.* 260).

450. *Si una pirámide se corta por un plano paralelo á la base, la pirámide parcial que resulta es semejante á la propuesta.*

Los ángulos diedros VF, VG, VH.... de la pirámide parcial son los mismos que los VA, VB, VC... de la propuesta.

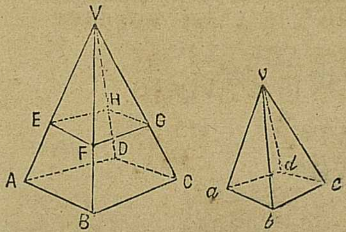
Los diedros VFGH, VABC son iguales por correspondientes [365]; por la misma razon son tambien respectivamente iguales los demás diedros en las bases; luego las dos pirámides tienen todos sus ángulos diedros respectivamente iguales.

Las caras FGHIK, ABCDE son semejantes [449, 2.°], el triángulo VFG es semejante al VAB, por ser FG paralela á AB [357], y las demás caras laterales son tambien semejantes dos á dos por análoga razon; luego todas las caras homólogas de las pirámides son semejantes, y el teorema queda demostrado.

TEOREMA. (*Fig.* 261).

451. *Dos pirámides son semejantes cuando tienen tres caras que concurren en un vértice de la base, respectivamente semejantes y semejantemente dispuestas.*

Fig. 261



Suponemos que las caras ABCD, ABV y ADV son semejantes á las *abcd*, *abv* y *adv*, y queremos demostrar la semejanza de las pirámides VABCD y *vabcd*.

Tomando en la arista VA una parte VE igual á *va*, y trazando por E un plano paralelo al ABCD, resulta una pirámide parcial VEFGH semejante á la VABCD: si demostramos que la VEFGH es igual á la *vabcd*, quedará demostrado el teorema.

Ahora bien: las caras EFGH, VEF y VEH son semejantes respectivamente á las ABCD, VAB y VAD [450]; y éstas lo son, por hipótesis, á las *abcd*, *vab* y *vad*; luego las EFGH, VEF y VEH son semejantes á las *abcd*, *vab* y *vad* [214]; pero siendo VE = *va*, por construccion, las caras VEF y VEH serán iguales á las *vab* y *vad* [213]; de aquí se deduce EF = *ab*, luego las caras EFGH y *abcd* son tambien iguales; por consiguiente la pirámide parcial VEFGH es igual á la *vabcd* [447], lo que demuestra el teorema.

TEOREMA. (*Fig.* 260).

452. *En dos pirámides semejantes:* 1.° *las aristas homólogas son proporcionales á las alturas;* 2.° *las bases son proporcionales á los cuadrados de las alturas.*

Tomemos en la arista VA de la pirámide mayor una parte VF igual á la arista homóloga de VA en la pirámide menor, y tracemos por F una seccion paralela á la base ABCDE. La pirámide deficiente es semejante á la pirámide mayor, luego será tambien semejante á la menor; pero la deficiente y la menor tienen una arista homóloga igual, luego la razon de semejanza es la unidad, y estas pirámides son iguales. Segun esto, podremos considerar la pirámide deficiente en lugar de la menor.

Ahora bien:

1.° Bajando la altura VP de la pirámide mayor, la parte VQ será la altura de la menor, y tendremos [449, 1.°]

$$\frac{VA}{VF}=\frac{VP}{VQ}.$$

2.° Siendo semejantes las bases, tenemos

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{AB^2}{FG^2},$$

pero $\frac{AB}{FG}=\frac{VA}{VF}=\frac{VP}{VQ}$, de donde $\frac{AB^2}{FG^2}=\frac{VP^2}{VQ^2}$;

luego $$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{VP^2}{VQ^2}.$$

Teorema. (*Figs.* 260 *y* 262).

453. *Si dos pirámides tienen igual altura* VP = V′P′, *las secciones* FGHIK, RSTU *paralelas á las bases y equidistantes de los vértices, son proporcionales á las bases.*

Fig. 260.

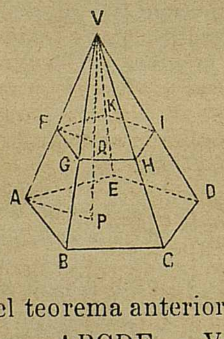
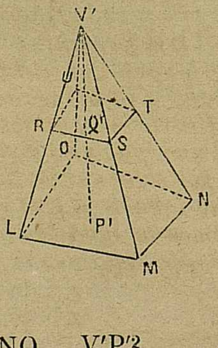


Fig. 262.



Por el teorema anterior tenemos

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{VP^2}{VQ^2},\quad \frac{LMNO}{RSTU}=\frac{V'P'^2}{V'Q'^2};$$

pero hemos supuesto VP=V′P′, VQ=V′Q′, luego

$$\frac{ABCDE}{FGHIK}=\frac{LMNO}{RSTU}.$$

ESCOLIO. *Si las bases de las dos pirámides son equivalentes, las secciones tambien lo serán.*

Pues si en la última igualdad fraccionaria se supone ABCDE = LMNO, será necesariamente FGHIK = RSTU.

PROBLEMA. *(Fig. 260).*

454. *Dado un tronco de pirámide* ADFI *de bases paralelas, hallar las alturas* VP, VQ *de la pirámide total y de la deficiente.*

Tenemos [452, 1.°]

$$\frac{AB}{FG} = \frac{VP}{VQ};$$

luego $$\frac{AB-FG}{AB} = \frac{VP-VQ}{VP}, \quad \frac{AB-FG}{FG} = \frac{VP-VQ}{VQ};$$

sustituyendo VP — VQ por la altura PQ del tronco, y despejando VP en la primera igualdad y VQ en la segunda, será

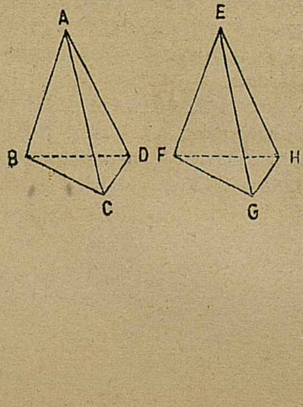
$$VP = \frac{AB \times PQ}{AB-FG}, \quad VQ = \frac{FG \times PQ}{AB-FG}.$$

II.—Tetraedros.

TEOREMA. *(Fig. 263).*

455. *Dos tetraedros son iguales: 1.° cuando tienen una cara del uno igual á una cara del otro, y los tres ángulos diedros adyacentes á la primera iguales respectivamente á los tres ángulos diedros adyacentes á la segunda; 2.° cuando tienen dos caras del uno iguales á dos del otro é iguales los ángulos comprendidos por estas caras; 3.° cuando tres caras del uno son respectivamente iguales á tres del otro; siempre que en todos estos casos los elementos iguales estén igualmente dispuestos.*

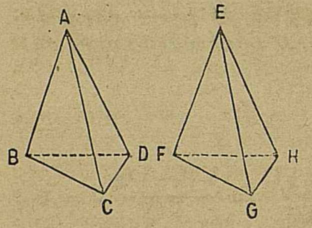
FIG. 263.



1.° Suponemos la cara BCD = FGH, y los ángulos diedros BC = FG, BD = FH, CD = GH.

Coloco el tetraedro E sobre el A, de modo que la cara FGH coincida con la BCD y que el vértice E caiga al mismo lado del plano BCD que el vértice A: el plano EFG coincidirá con el ABC, por ser iguales los diedros FG y BC, y los planos EGH, EFH coincidirán, por análoga razon, con los ACD y ABD; luego el punto E, comun á los tres planos EFG, EGH, EFH, coincidirá con el A, único punto comun á los tres planos ABC, ACD y ABD [310, 4.º], y los tetraedros serán iguales.

Fig. 263.



2.º Sean las caras ABC = EFG, ABD = EFH, y el diedro AB=EF.

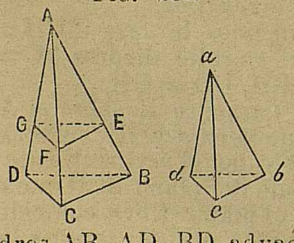
Coloco el tetraedro E sobre el A, de modo que la cara EFH coincida con ABD y que los vértices G y C caigan hácia el mismo lado del plano ABD; el plano EFG concidirá con el ABC, por ser iguales los diedros EF y AB, y el punto G caerá en C, por ser iguales las caras EFG y ABC: luego coinciden los cuatro vértices de los tetraedros, y por tanto son estos iguales.

3.º Sean las caras ABD = EFH, ABC=EFG, BCD=FGH. Considerando los tetraedros como dos pirámides, cuyas bases son BCD y FGH, vemos que, segun la hipótesis, tienen tres caras, que concurren en un vértice de la base, iguales respectivamente é igualmente dispuestas: luego los tetraedros son iguales [447].

Teorema. (*Fig.* 264).

456. *Dos tetraedros son semejantes*: 1.º *cuando tienen una cara del uno semejante á una cara del otro, y los tres ángulos diedros adyacentes á la primera iguales respectivamente á los tres ángulos diedros adyacentes á la segunda*; 2.º *cuando tienen dos caras del uno semejantes á dos del otro é iguales los ángulos diedros comprendidos por estas caras;* 3.º *cuando tres caras del uno son semejantes á tres del otro; siempre que en todos estos casos estén los elementos semejantemente dispuestos.*

Fig. 264.



1.º Sean los tetraedros ABCD y *abcd*. Suponemos que las caras ABD y *abd* son semejantes, y que los diedros AB, AD, BD adyacentes á la primera, son iguales á los *ab*, *ad*, *bd* adyacentes á la segunda.

Tomo en la arista AB una parte AE igual á *ab*, y trazo por el punto E un plano paralelo al BCD: el tetraedro parcial AEFG es semejante al ABCD [450]. Los tetraedros AEFG y *abcd* tienen iguales las caras AEG y *abd*, porque siendo ámbas semejantes á la ABD son semejantes entre sí, y como la razon de semejanza es la unidad, por ser AE = *ab*, son iguales; además dichos tetraedros tienen los diedros AE = AB = *ab*, AG= AD = *ad*, AEGF = ABDC = *abdc*; luego los tetraedros son iguales [455, 1º]; y como el AEFG es semejante al ABCD, su igual *abcd* tambien es semejante al ABCD.

2.º Supongamos que las caras ABC, ABD sean semejantes á *abc*, *abd*, y que el diedro AB = *ab*.

Haciendo la misma construccion que en el caso anterior, se ve fácilmente que los tetraedros AEFG y *abcd* son iguales, por tener dos caras iguales AEF = *abc*, AEG = *abd* é igual el ángulo diedro comprendido, y como el tetraedro AEFG es semejante al ABCD, tambien lo será su igual *abcd*.

3.º Supongamos que las caras ABD, ABC y BCD sean semejantes á las *abd*, *abc* y *bcd*.

Considerando los tetraedros como dos pirámides, cuyas bases son BCD y *bcd*, es claro que son semejantes [451].

CAPÍTULO SEGUNDO.

PRISMAS.

I.—Prisma en general.

457. PRISMA *es todo poliedro cuyas caras son dos polígonos iguales y paralelos unidos entre sí por paralelógramos.*

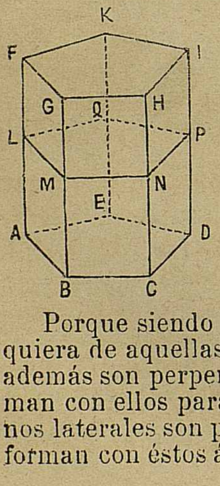
Las caras paralelas se llaman *bases* del prisma; *altura* es la perpendicular comprendida entre los planos de las bases.

Un prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal* etc. cuando sus bases son triángulos, cuadriláteros, pentágonos etc.

PARALELEPÍPEDO *es un prisma cuyas bases son paralelógramos.*

Las aristas laterales de un prisma son paralelas entre sí é iguales.

FIG. 265.



En el prisma AI (*Fig.* 265) la arista lateral AF es paralela á BG, ésta es paralela á CH, la CH lo es á DI etc.; luego todas son paralelas entre sí; además son iguales, por estar comprendidas entre planos paralelos [367].

Prisma RECTO *es todo prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares á las bases; y prisma* OBLICUO *es todo prisma cuyas aristas laterales son oblicuas á las bases.*

En el prisma recto las aristas laterales son iguales á la altura, las caras laterales son rectangulares, y los ángulos diedros en las bases son rectos.

Porque siendo las aristas perpendiculares á las bases, cualquiera de aquellas puede considerarse como altura del prisma; además son perpendiculares á los lados de las bases, luego forman con ellos paralelógramos rectángulos; por último, los planos laterales son perpendiculares á los de las bases [329], luego forman con éstos ángulos diedros rectos.

Prisma REGULAR *es todo prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.*

En el prisma regular las caras laterales son rectángulos iguales.

PRISMA TRONCADO Ó TRONCO DE PRISMA *es la parte de prisma comprendida entre una base y un plano no paralelo á ella que corte á todas las aristas laterales.*

TEOREMA. (*Fig.* 265).

458. *Toda seccion* LMNPQ *paralela á las bases de un prisma* AI *es un polígono igual á dichas bases.*

Siendo el plano LP de la seccion paralelo al de la base AD, las intersecciones de estos planos con cada cara lateral del prisma son paralelas, esto es, los lados LM, MN, NP etc. de la seccion son paralelos á los lados AB, BC, CD etc. de la base; tambien las aristas laterales son paralelas entre sí, por tanto será

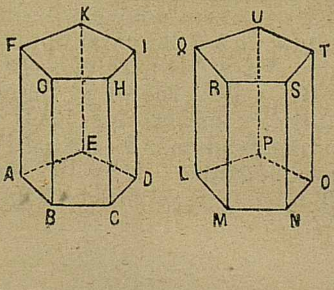
$$LM = AB, \quad MN = BC, \quad NP = CD \text{ etc.}$$

Como además los ángulos de la seccion son iguales á los de la base, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, los polígonos LMNPQ y ABCDE son iguales [209].

TEOREMA. (*Fig.* 266).

459. *Dos prismas son iguales cuando tienen tres caras, que concurren en un vértice cualquiera, iguales respectivamente é igualmente dispuestas.*

FIG. 266.



Sean los prismas AI, LT; supongamos

$$ABCDE = LMNOP, \quad AG = LR, \quad BH = MS,$$

y que las caras iguales están igualmente dispuestas.

Colocando el prisma LT sobre el AI de modo que las bases inferiores coincidan, la arista MR coincidirá con BG, porque los triedros B y M son iguales [330]; y las caras MS, MQ coincidirán con sus iguales BH, BF; luego las bases superiores tendrán tres puntos comunes F, G, H, y sus planos coincidirán; como además dichas bases son iguales, los vértices T, U coincidirán tambien con I, K; por consiguiente los prismas serán iguales.

Teorema.

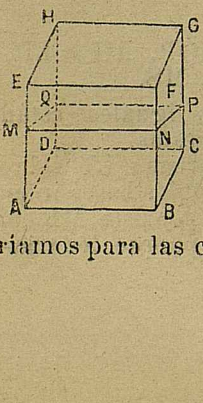
460. *Dos prismas rectos de igual base y altura son iguales.* Haciendo coincidir las bases inferiores de los prismas, todas las aristas laterales del primero coincidirán con las del segundo, porque cada dos de ellas son perpendiculares al plano comun en el mismo punto; además coincidirán los extremos superiores de las aristas, pues siendo todas iguales á las alturas de los prismas, son iguales entre sí; luego los prismas son iguales.

II.—Paralelepípedo.

Teorema. (Fig. 267).

461. *En todo paralelepípedo:* 1.° *las caras opuestas son iguales y paralelas*; 2.° *los ángulos triedros opuestos son* ~~iguales~~ simétricos.

Fig. 267.



1.° Debemos demostrar esta propiedad para las caras laterales solamente, porque las bases son iguales y paralelas por definicion [457].

Sea el paralelepípedo AG: las caras opuestas AH y BG tienen AE y AD paralelas respectivamente á BF y BC, luego el plano AH es paralelo al BG, y los ángulos EAD y FBC son iguales; como además es AE=BF, AD=BC, los paralelógramos AH y BG son iguales [200]. El mismo razonamiento haríamos para las caras AF y DG.

2.° Los ángulos triedros opuestos A y G tienen sus tres ángulos planos respectivamente iguales, esto es

$$DAB = FGH, \quad EAB = CGH, \quad EAD = CGF,$$

porque los lados de estos ángulos son paralelos dos á dos y dirigidos en sentidos contrarios; pero están desigualmente dispuestos [1], luego los triedros A y G son simétricos.

El mismo razonamiento puede hacerse para otros dos triedros opuestos.

Corolarios.

1.° *Dos caras opuestas cualesquiera de un paralelepípedo pueden considerarse como bases del mismo.*

2.° *Cortando un paralelepípedo por un plano que encuentre á cuatro aristas paralelas, la seccion* MNPQ *es un paralelógramo.*

Porque los lados opuestos de la seccion son paralelos dos á dos, como intersecciones de planos paralelos con un tercer plano.

Teorema.

462. *Dos paralelepípedos son iguales cuando tienen un ángulo triedro igual, y las tres aristas que forman el primer triedro iguales respectivamente á las homólogas del segundo.*

Llamemos A y B á los triedros iguales.

Siendo el triedro A igual al B, los tres ángulos planos del primero serán iguales á los tres ángulos planos del segundo; como además las aristas son iguales por hipótesis, los tres paralelógramos que concurren en A son respectivamente iguales á los que concurren en B [200]; por consiguiente los paralelepípedos son iguales [459].

---

1 Para comprender que los ángulos iguales están desigualmente dispuestos, su-
póngase el lector colocado á lo largo de la arista AE, los piés en el vértice A, la ca-
beza en E, y mirando hácia el interior del triedro A: el ángulo DAB estará á sus
piés, el EAB á su derecha, y el EAD á su izquierda; si invierte la figura y se supo-
ne colocado á lo largo de la arista GC, los piés en el vértice G, la cabeza en C, y mi-
rando hácia el interior del triedro G, verá á sus piés el ángulo FGH, igual al DAB,
á su derecha el ángulo CGF, igual al EAD que estaba á su izquierda, y á su iz-
quierda el CGH igual al EAB que estaba á su derecha.

463. *Paralelepípedo* RECTÁNGULO *es un paralelepípedo recto cuyas bases son rectangulares.*

Todas las caras de un paralelepípedo rectángulo son rectángulos, y todos los ángulos diedros son rectos.

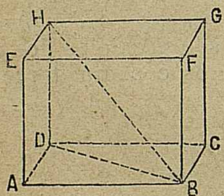
CUBO *es un paralelepípedo cuyas caras son cuadrados.*

El cubo es evidentemente un paralelepípedo rectángulo, y todas sus aristas son iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 268).

464. *En todo paralelepípedo rectángulo* AG, *el cuadrado de una diagonal* HB *es igual á la suma de los cuadrados de tres aristas* DC, DA, DH *que formen un ángulo triedro.*

FIG. 268.



Trazando la diagonal DB de la base se forma un triángulo HDB rectángulo en D, porque siendo la arista HD perpendicular á la base ABCD es perpendicular á DB; luego

$$HB^2 = DB^2 + DH^2;$$

pero DB es la hipotenusa del triángulo rectángulo DAB, por tanto

$$DB^2 = AB^2 + DA^2;$$

de estas igualdades se deduce

$$HB^2 = AB^2 + DA^2 + DH^2;$$

sustituyendo AB por su igual DC, será por último

$$HB^2 = DC^2 + DA^2 + DH^2.$$

CAPÍTULO TERCERO.

POLIEDROS EN GENERAL.

I.—Igualdad y semejanza de poliedros.

465. Si por un punto interior á un poliedro y las aristas del mismo se dirigen planos que terminen en sus intersecciones mutuas, los que pasen por los lados de una misma cara formarán con ésta una pirámide; por consiguiente quedará descompuesto el poliedro en tantas pirámides como caras tenga. Las caras del poliedro serán bases de estas pirámides, y vértice comun, el punto interior. Dividiendo la base de cada pirámide en triángulos por medio de diagonales, y haciendo pasar planos por el vértice de la pirámide y por las diagonales de la base, quedará cada pirámide dividida en tetraedros; por consiguiente el poliedro tambien se habrá descompuesto en tetraedros; luego

Todo poliedro puede descomponerse en tetraedros.

Dirigiendo planos desde un vértice A del poliedro á las aristas de las caras no adyacentes á dicho vértice, los planos que pasan por los lados de una misma cara formarán con ésta una pirámide, por consiguiente quedará descompuesto el poliedro en tantas pirámides como caras, no adyacentes al vértice A, tenga. Las bases de estas pirámides serán las mencionadas caras, y el vértice comun será el punto A. Descomponiendo cada pirámide en tetraedros, del modo indicado arriba, el poliedro quedará igualmente descompuesto en tetraedros.

TEOREMA.

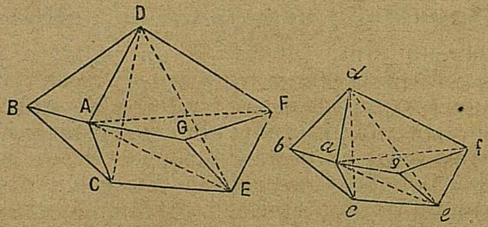
466. *Dos poliedros son iguales cuando están compuestos de igual número de tetraedros iguales é igualmente dispuestos.*

Imaginemos que uno de los poliedros se coloque sobre el otro, de modo que dos tetraedros iguales coincidan; otros dos tetraedros adyacentes á los primeros tendrán una cara comun, y como son iguales y están dispuestos igualmente, coincidirán tambien, y así todos los demás; luego los poliedros son iguales.

TEOREMA. (*Fig.* 269).

467. *Dos poliedros* ABCDEFG, abcdefg *compuestos de igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos, son semejantes.*

FIG. 269.



Suponemos semejantes los tetraedros ABCD y *abcd*, ACDE y *acde*, ADEF y *adef*, AEFG y *aefg*, y queremos demostrar la semejanza de los poliedros propuestos.

Entre los ángulos diedros de los poliedros hay algunos que son respectivamente iguales, porque pertenecen á tetraedros semejantes; así CABD = *cabd*, por pertenecer á los tetraedros semejantes ABCD y *abcd*. Otros diedros son iguales por componerse de igual número de diedros pertenecientes á tetraedros semejantes; así BACE = *bace*, porque el primero se compone de los diedros BACD y DACE iguales respectivamente á los *bacd* y *dace* que componen el segundo.

Las caras triangulares de los poliedros, por ejemplo GEF y *gef*, son semejantes por pertenecer á tetraedros semejantes.

Demostremos ahora que si dos tetraedros consecutivos del primer poliedro tienen dos caras, por ejemplo BCD y CDE, en un mismo plano, las caras *bcd* y *cde*, homólogas á éstas en el segundo poliedro, estarán tambien en un mismo plano. En efecto, los ángulos diedros adyacentes BCDA y ACDE son iguales respectivamente á los diedros consecutivos *bcda* y *acde*, y como los primeros son suplementarios, tambien lo serán los segundos, luego las caras exteriores *bcd* y *dce* estarán en un mismo plano [334].

Segun esto, si las caras BCD, CDE, EDF están en un mismo plano formando un polígono BCEFD, las caras *bcd*, *cde*, *edf*, respectivamente semejantes á las primeras, por pertenecer á tetraedros semejantes, formarán otro polígono *bcefd*, que será semejante al BCEFD [212].

Del mismo modo se demuestra la semejanza de las demás caras no triangulares.

Vemos, pues, que los poliedros dados tienen respectivamente iguales los ángulos diedros colocados en el mismo órden, y las caras adyacentes semejantes; luego los poliedros son semejantes.

TEOREMA RECÍPROCO.

468. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en igual número de tetraedros semejantes y semejantemente dispuestos.*

Si por el vértice A y la arista EF hacemos pasar un plano, quedará separado del primer poliedro un tetraedro AEFG, y las caras ACEG y AGFD se habrán dividido en triángulos; haciendo pasar otros planos por A y por las diagonales DC, DE se formarán los tetraedros ABCD, ACDE y ADEF, que con el AEFG, componen el poliedro, y la cara BCEFD estará dividida en triángulos. Haciendo la misma construccion en el segundo poliedro, quedará descompuesto en tantos tetraedros como han resultado descomponiendo el primero, y las caras de aquel quedarán divididas en triángulos; además los triángulos del primer poliedro serán semejantes á los del segundo [212, *recip.*]

Ahora bien, los tetraedros ABCD y *abcd* son semejantes, porque tienen semejantes las caras ABC y *abc*, ABD y *abd*, y el ángulo comprendido AB igual al *ab*. Los tetraedros ACDE y *acde* son semejantes, porque tienen semejantes las caras ACD y *acd*, como homólogas de los tetraedros semejantes anteriores; tambien son semejantes las caras CDE y *cde*, y los ángulos comprendidos ACDE y *acde* son iguales, como suplementos de los diedros iguales ACDB y *acdb*.

Del mismo modo se demuestra la semejanza de los demás tetraedros.

II.—Poliedros regulares.

469. *Se llama* POLIEDRO REGULAR *el poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales.*

Es claro que todas las aristas de un poliedro regular serán iguales, y tambien los ángulos poliedros.

TEOREMA.

No pueden existir más que cinco clases de poliedros regulares.

Para formar un ángulo poliedro se necesitan por lo ménos tres ángulos planos; además la suma de las caras de un ángulo poliedro debe ser menor que cuatro ángulos rectos.

Segun esto, con tres ángulos de triángulo equilátero puede formarse un ángulo poliedro, porque valiendo cada ángulo del triángulo $\frac{2}{3}$ R, la suma de los tres solo vale 2R; el poliedro correspondiente está limitado por cuatro triángulos equiláteros, tiene cuatro vértices, seis aristas, y se llama *tetraedro regular*.

Con cuatro ángulos de triángulo equilátero tambien puede formarse un ángulo poliedro, porque la suma de ellos $\frac{8}{3}$ R es menor que 4R: el poliedro correspondiente está limitado por ocho triángulos equiláteros iguales, tiene seis vértices, doce aristas, y se llama *octaedro regular*.

Reuniendo cinco ángulos de triángulo equilátero, cuya suma $\frac{10}{3}$ R es menor que 4R, se forma un ángulo poliedro, al que corresponde un cuerpo regular de veinte caras triangulares, con doce vértices y treinta aristas, y se llama *icosaedro regular*.

Seis ángulos de triángulo equilátero valen $\frac{12}{3}$ R $=$ 4R, luego con ellos no puede formarse un ángulo poliedro.

Con tres ángulos de cuadrado, que valen 3R, puede formarse ángulo poliedro: el poliedro correspondiente es el *exaedro regular* ó *cubo*; está limitado por seis cuadrados iguales, tiene ocho vértices y doce aristas.

Es evidente que cuatro ángulos de cuadrado no pueden formar ángulo poliedro, pues la suma de ellos es 4R.

Con tres ángulos de pentágono regular puede formarse un ángulo poliedro, porque valiendo cada ángulo del pentágono $\frac{6}{5}$ R, la suma de los tres vale $\frac{18}{5}$ R $<$ 4R: el poliedro regular correspondiente está limitado por doce pentágonos, tiene veinte vértices, treinta aristas, y se llama *dodecaedro regular*.

Cuatro ángulos de pentágono regular valen más que *cuatro rectos*, luego con ellos no puede formarse ángulo poliedro.

Tres ángulos de exágono regular valen *cuatro rectos* .por consiguiente no pueden formar ángulo poliedro; y tres de eptágono, octógono etc. valdrán más [223].

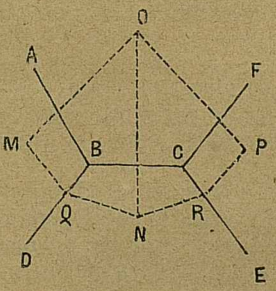
Luego no pueden existir más poliedros regulares que el tetraedro, octaedro, icosaedro, exaedro y dodecaedro.

470. Un poliedro está *inscripto* en una esfera cuando todos los vértices del poliedro están en la superficie esférica. La esfera en tal caso está *circunscrita* al poliedro.

Un poliedro está *circunscrito* á una esfera cuando todas las caras del poliedro son tangentes á la superficie esférica. La esfera entonces está *inscripta* en el poliedro.

Teorema. (*Fig.* 270).

Fig. 270.



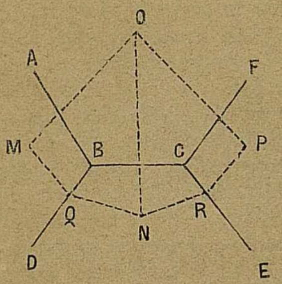
471. *Á todo poliedro regular puede inscribirse y circunscribirse una esfera.*

Representemos por ABD y DBCE dos caras adyacentes del poliedro regular dado. Levantando por los centros M y N de estas caras dos perpendiculares á los planos de las mismas, estas perpendiculares se encontrarán en un punto O, centro de la esfera que pasa por los cuatro puntos A, B, C y D [411].

Demostremos ahora que uniendo el punto O con los centros de todas las caras del poliedro, las rectas de union son perpendiculares á estas caras é iguales entre sí.

Unamos el punto O con el centro P de una cara ECF contigua á una de las primeras; bajemos desde M y N dos perpendiculares á la arista BD, á la que cortarán en un mismo punto Q; y desde N y P otras dos á la arista CE, que tambien concurren en un punto R. Las perpendiculares OM y ON son iguales, porque suponiendo trazada una recta OQ se formarian dos triángulos rectángulos OMQ y ONQ iguales, por tener comun la hipotenusa OQ é iguales los catetos MQ y NQ como apote-

Fig. 270.



mas de polígonos iguales. Si hacemos girar el cuadrilátero plano [411] OMQN alrededor de ON hasta que caiga sobre el ONRP, el punto M coincidirá con el P; porque *áng*.ONQ = *áng*. ONR por ser rectos, NQ = NR como apotemas del mismo polígono, *áng*. MQN=*áng*. NRP como rectilíneos correspondientes á los diedros iguales BD y CE, y QM= RP como apotemas de polígonos iguales; luego OM y OP tendrán los mismos extremos y coincidirán; por tanto OP = OM.

La misma superposicion demuestra además que *áng*. OPR= *áng*. OMQ, luego el ángulo OPR es recto, y como los planos ECF y ONRP son perpendiculares entre sí, puesto que el primero pasa por la perpendicular CE al segundo, la recta OP será perpendicular al plano ECF [339].

El mismo razonamiento podria ahora aplicarse á otra cara contigua á cualquiera de las tres que hemos considerado, y así á todas las demás, luego las rectas que unen el punto O con los centros de las caras son perpendiculares á éstas é iguales entre sí; por consiguiente la esfera descrita desde O como centro con un radio igual á cualquiera de las perpendiculares, será tangente á todas las caras del poliedro [424], esto es, quedará inscripta en el mismo.

Además, el punto O equidista de todos los vértices del poliedro [323]; luego la superficie esférica descrita desde O como centro con un radio igual á cualquiera de las distancias, pasará por todos los vértices del poliedro, quedando la esfera circunscrita al mismo.

Corolario. *Todo poliedro regular puede descomponerse en tantas pirámides regulares é iguales como caras tenga.*

Basta, en efecto, hacer pasar planos por el centro de las esferas inscripta y circunscrita y por cada una de las aristas.

472. *Centro* de un poliedro regular es el centro comun á las esferas inscripta y circunscrita.

Radio del poliedro es el radio de la esfera circunscrita: y *apotema* es el radio de la esfera inscripta, ó bien la perpendicular tirada desde el centro á cualquiera de las caras.

SECCION SEGUNDA.

MEDIDA DE LA EXTENSION.

LIBRO PRIMERO.

ÁREAS DE LAS SUPERFICIES DE LOS CUERPOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

ÁREAS DE LOS POLIEDROS.

473. En general el área de la superficie de un poliedro se obtiene midiendo el área de cada cara y sumando estas áreas parciales. Existen, sin embargo, algunos poliedros cuyas áreas se determinan más facilmente.

Teorema.

474. *El área de la superficie lateral de una pirámide regular es igual á la mitad del producto del perímetro de su base por la apotema de la pirámide.*

Sea b la base y a la altura de uno de los triángulos laterales, ó sea la apotema de la pirámide. El área de cada triángulo será $\frac{ba}{2}$; si la base de la pirámide tiene n lados, habrá n triángulos laterales, y como son iguales, el área de todos, esto es el área lateral de la pirámide será

$$\frac{ba}{2} \times n = \frac{bn \times a}{2};$$

pero bn es el perímetro de la base, luego el teorema es cierto.

Escolio. Llamando a' á la apotema de la base de la pirámide, el área de este polígono es $\frac{bn}{2} \times a'$; luego el área total de la pirámide será

$$\frac{bn}{2}(a + a'),$$

es decir *el semi-perímetro de la base por la suma de las dos apotemas.*

475. *El área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular de bases paralelas es igual á la semisuma de los perímetros de las bases, multiplicada por la apotema.*

Ante todo observemos que cortando una pirámide regular por un plano paralelo á la base, la pirámide deficiente será regular, como semejante á la total; luego la base menor del tronco será un polígono regular, y las aristas laterales serán iguales, por ser diferencias entre las de ambas pirámides. Segun esto, es fácil ver que las caras laterales del tronco son trapecios isósceles iguales: sean B y b las bases de uno ellos, a su altura, ó *apotema del tronco.*

El área de cada trapecio será $\frac{(B + b) \times a}{2}$; si las bases del tronco tienen n lados, habrá n trapecios laterales, y como son iguales, el área de todos, esto es, el área lateral del tronco será

$$\frac{(B + b) \times a}{2} \times n = \frac{Bn + bn}{2} \times a;$$

pero Bn y bn son los perímetros de las bases, luego el teorema es cierto.

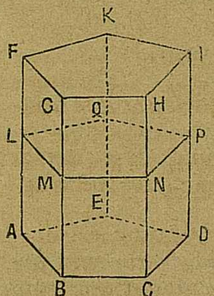
Escolio. El área total del tronco se hallará sumando al área lateral las áreas de las dos bases.

Teorema. (*Fig.* 271).

476. *El área de la superficie lateral de un prisma cualquiera* AI *es igual al producto de una de sus aristas laterales, por el perímetro de su seccion recta* LMNPQ.

Llamamos *seccion recta* á la que resulta de cortar el prisma por un plano perpendicular á las aristas laterales.

Fig. 271.



Considerando como bases de los paralelógramos laterales las aristas AF, BG etc. las alturas serán los lados LM, MN etc. de la seccion recta, porque siendo las aristas perpendiculares al plano LMNPQ son tambien perpendiculares á las rectas LM, MN etc. que pasan por su pié en dicho plano; luego llamando a á cualquiera de las aristas laterales, las áreas de los paralelógramos serán

$$a \times LM, \ a \times MN, \ a \times NP \text{ etc.};$$

por consiguiente la suma de todas, ó sea, el área lateral del prisma será

$$a\,(LM + MN + NP + \ldots.),$$

lo cual debia demostrarse.

Corolario. *El área de la superficie lateral de un prisma recto es igual al producto de su altura por el perímetro de su base.*

Acabamos de ver que el área de un prisma cualquiera es el producto de su arista lateral por el perímetro de la seccion recta, y como en un prisma recto la arista lateral es igual á la altura y la seccion recta es igual á las bases, el corolario es cierto.

Escolio. El área total de un prisma se hallará sumando su área lateral con el duplo del área de una base.

CAPÍTULO SEGUNDO.

ÁREAS DE LOS CUERPOS DE REVOLUCION.

TEOREMA.

477. *El área de la superficie lateral de un cono circular recto es igual á la mitad del producto de la circunferencia de su base por la generatriz ó lado.*

Sea c la circunferencia de la base del cono y l el lado de éste. Inscribiendo en la base del cono un polígono regular, y haciendo pasar planos por los lados de este polígono y por el vértice del cono, resultará una pirámide regular *inscripta*. Duplicando indefinidamente el número de lados de su base, se obtendrá una série de pirámides regulares inscriptas en el cono: las bases de estas pirámides tienen por límite la base del cono, por consiguiente las superficies laterales de las pirámides tendrán por límite la superficie cónica, y el límite de las apotemas será la generatriz ó lado del cono. Ahora bien, el área de la superficie lateral de una pirámide regular es $\frac{pa}{2}$, siendo p el perímetro de la base y a la apotema de la pirámide; luego sustituyendo los variables p y a por sus límites respectivos c y l, el área de la superficie lateral del cono será $\frac{cl}{2}$.

Si r es el radio de la base del cono y A el área lateral, tendremos la fórmula

$$A = \pi r l.$$

ESCOLIO. El área total del cono será

$$\pi r l + \pi r^2 = \pi r (l + r).$$

TEOREMA.

478. *El área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual á la semisuma de las circunferencias de las bases multiplicada por el lado del tronco.*

Sean C y c las circunferencias de las bases y l el lado del tronco de cono. Imaginemos que en el cono total se inscriba una pirámide regular: la base menor del tronco cortará á la pirámide, originando un tronco de pirámide regular de bases paralelas inscriptas en las del tronco de cono. Duplicando indefinidamente el número de lados de la base de la pirámide total, se obtendrá una série de troncos de pirámide inscriptos en el tronco de cono: las dos bases de estos troncos de pirámide tienen por límites las correspondientes bases del tronco de cono, por consiguiente las superficies laterales de los troncos de pirámide tendrán por límite la superficie lateral del tronco de cono. Ahora bien, el área del tronco de pirámide es $\frac{P+p}{2}\times a$, llamando P y p á los perímetros de las bases y a á la apotema; luego, sustituyendo las variables P, p y a por sus límites respectivos C. c y l, el área de la superficie lateral del tronco de cono será $\frac{C+c}{2}\times l$.

Si R y r son los radios de las bases del tronco y A el área lateral, tendremos la fórmula

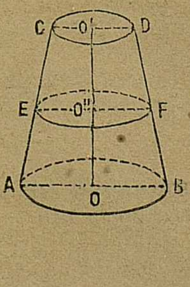
$$A=(\pi R+\pi r)\times l, \text{ ó } A=(R+r)\times \pi l.$$

ESCOLIOS.

1.° Si por el punto medio O″ de la altura OO′ del tronco ABCD (*Fig.* 272) se traza una seccion paralela á las bases, el radio O″E de esta seccion une los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio AOO′C [368], luego, llamando R′ á dicho radio, será $R'=\frac{R+r}{2}$, de donde $2R'=R+r$, por consiguiente la expresion del área obtenida anteriormente será

$$A=2\pi R'\times l.$$

FIG. 272.



Luego *el área de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto, es igual al producto de su lado por la circunferencia de una seccion paralela á las bases y equidistante de ellas.*

2.° El área total del tronco será la suma del área lateral más las áreas de las bases.

TEOREMA.

479. *El área de la superficie lateral de un cilindro circular recto es igual á la circunferencia de su base multiplicada por su lado.*

Sea c la circunferencia de una base y l el lado del cilindro. Suponiendo una série de prismas regulares cuyo número de caras laterales se duplique indefinidamente, y cuyas bases estén inscriptas en las del cilindro, es fácil ver que la superficie lateral de éste es el límite de las superficies laterales de los prismas; además la altura de éstos es igual al lado del cilindro.

Ahora, el área lateral de un prisma recto es pa, llamando p al perímetro de la base y a á la altura, luego la del cilindro será cl.

Si r es el radio de la base y A el área lateral será

$$A = 2\pi rl.$$

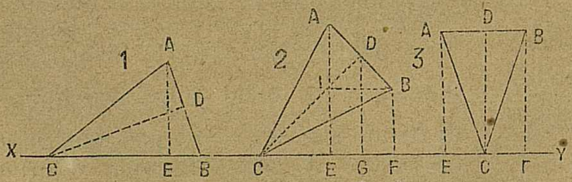
ESCOLIO. El área de la superficie total de un cilindro será

$$2\pi rl + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(l + r).$$

TEOREMA. (*Fig.* 273).

480. *El área de la superficie engendrada por la base de un triángulo isósceles que gira alrededor de una recta exterior á él trazada por su vértice en su plano, es igual á la circunferencia cuyo radio es la altura del triángulo multiplicada por la proyeccion de la base sobre el eje.*

FIG. 273.



Distinguiremos tres casos: 1.° que la base tenga uno de sus extremos en el eje de revolucion; 2.° que la base no tenga ningun punto en el eje ni sea paralela á él; 3.° que la base sea paralela al eje.

1.° La base AB (*Fig.* 1) del triángulo isósceles ABC, al girar alrededor del eje XY, engendra la superficie lateral de un cono circular recto, luego el área de esta superficie será

$$\pi AE \times AB = 2\pi AE \times BD \qquad [a];$$

siendo semejantes los triángulos AEB y CDB, tenemos

$$\frac{AE}{CD} = \frac{EB}{BD}, \text{ de donde } AE \times BD = CD \times EB;$$

sustituyendo en la expresion [*a*] del área que nos ocupa el producto $AE \times BD$ por su igual $CD \times EB$, se obtiene para expresion de dicha área $2\pi CD \times EB$, lo que está conforme con el enunciado del teorema.

2.° La base AB (*Fig.* 2) del triángulo isósceles ABC, al girar alrededor del eje XY, engendra la superficie lateral de un tronco de cono de bases paralelas, luego el área de esta superficie será [478, *escolio* 1.°]

$$2\pi DG \times AB \qquad [b];$$

siendo semejantes los triángulos CDG y ABI, por tener sus lados respectivamente perpendiculares, será

$$\frac{DG}{BI} = \frac{CD}{AB}, \text{ de donde } DG \times AB = CD \times BI;$$

sustituyendo en la expresion [*b*] el producto $DG \times AB$ por su igual $CD \times BI$, se obtiene para expresion del área engendrada por AB

$$2\pi CD \times BI, \text{ ó bien } 2\pi CD \times FE,$$

lo que está conforme con el enunciado del teorema.

3.° La base AB (*Fig.* 3) del triángulo ABC engendra la superficie lateral de un cilindro circular recto, luego el área de esta superficie será

$$2\pi AE \times AB = 2\pi CD \times EF,$$

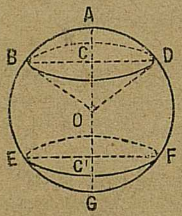
conforme al enunciado del teorema.

481. ZONA ESFÉRICA *es la parte de superficie esférica engendrada por un arco del semicírculo generador de la esfera.*

Los extremos del arco engendran circunferencias, que se llaman *bases* de la zona. *Altura* es la proyeccion del arco generador de la zona sobre el eje.

Si uno de los extremos de este arco está en el eje, la zona tiene una sola base, y en tal caso se llama tambien *casquete esférico*.

FIG. 274.

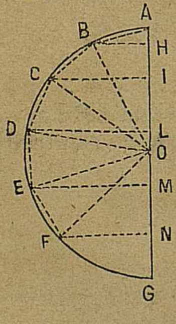


La superficie ABD (*Fig.* 274), engendrada por el arco AB, es una zona, cuya única base es la circunferencia C, y la altura AC. La superficie BEFD, engendrada por el arco BE, es una zona, cuyas bases son las circunferencias C y C', y la altura CC'.

TEOREMA. (*Fig.* 275).

482. *El área de una zona es igual á su altura multiplicada por una circunferencia de círculo máximo.*

FIG. 275.



Consideremos la zona engendrada por el arco AF que gira alrededor del diámetro AG.

Dividiendo el arco generador en varias partes iguales, las cuerdas AB, BC, CD etc. de estas partes serán bases de los triángulos isósceles ABO, BCO, CDO etc., que tienen todos igual altura [101]. Representando ésta por a, las áreas de las superficies engendradas por las cuerdas AB, BC, CD etc. serán respectivamente

$$2\pi a \times AH,\ 2\pi a \times HI,\ 2\pi a \times IL \text{ etc.}$$

luego el área de la superficie engendrada por la línea quebrada ABCDEF será

$$2\pi a \times (AH + HI + IL \ldots) = 2\pi a \times AN.$$

Ahora bien, si las partes en que se ha dividido el arco generador son cada vez menores, el límite de la línea quebrada

ABCDEF es el arco AF, luego el límite de la superficie engendrada por dicha línea quebrada será la zona engendrada por el arco AF; además el límite de la apotema $\acute{a}$ es el radio R del círculo generador, por consiguiente el área Z de la zona será

$$Z = 2\pi R \times \text{ÀN}.$$

Aplicando el mismo razonamiento á la zona de dos bases engendrada por el arco BF, obtendríamos igual resultado.

Teorema. (*Fig.* 275).

483. *El área de la superficie de una esfera es igual al producto de su diámetro por una circunferencia máxima.*

La superficie esférica engendrada por la semicircunferencia ADG, puede considerarse compuesta de dos zonas engendradas respectivamente por los arcos AD y DG, que componen la semicircunferencia. Las áreas de estas zonas son

$$2\pi R \times AL, \quad 2\pi R \times LG,$$

luego el área de la superficie esférica es

$$2\pi R\,(AL + LG) = 2\pi R \times AG.$$

Llamando A al área de la esfera, será

$$A = 2\pi R \times 2R \quad \text{ó} \quad A = 4\pi R^2.$$

Corolarios.

1.° *El área de una superficie esférica es el cuádruplo del área de su círculo máximo.*

Puesto que el área del círculo máximo es πR^2.

2.° *El área de una superficie esférica es igual al área lateral del cilindro circunscrito.*

La base del cilindro circunscrito tiene el mismo radio R de la esfera, y la altura del cilindro es el diámetro 2R; luego el área lateral será $2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$.

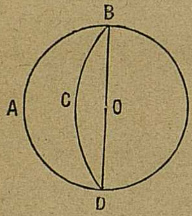
EJEMPLO. *Hallar el área de la superficie de una esfera cuyo radio es 20 metros.*

En la fórmula $A = 4\pi R^2$ sustituyamos R por 20 y π por 3.141592, y será

$$A = 4.\ 3,141592.400 = 5026^{m2},\ 5472.$$

484. HUSO ESFÉRICO *es la parte de superficie esférica* BADC (Fig. 276) *limitada por dos semicircunferencias máximas.*

FIG. 276.



Es evidente que dos circunferencias máximas perpendiculares entre sí, dividen la superficie esférica en cuatro husos iguales. Estos usos se llaman *rectos*.

Dos husos de una misma esfera son iguales cuando sus ángulos esféricos son iguales, pues haciendo coincidir los ángulos esféricos, coincidirán dos á dos las circunferencias máximas que limitan los husos, y éstos serán por tanto iguales.

TEOREMA. *(Fig. 276).*

485. *El área de un huso esférico es igual al producto del área de un círculo máximo por el ángulo del huso, siempre que la unidad para medir éste sea el ángulo recto.*

Siguiendo el método empleado en el número 337 es fácil demostrar que la relacion entre el huso ABCD y la superficie total de la esfera, es igual á la relacion entre el ángulo esférico ABC y cuatro ángulos esféricos rectos; tenemos, pues, llamando H al área del huso y E á la de la esfera.

$$\frac{H}{E} = \frac{ABC}{4\,rectos}, \quad \text{ó} \quad \frac{H}{4\pi R^2} = \frac{ABC}{4\,rectos};$$

dividiendo por 4 los denominadores, será

$$\frac{H}{\pi R^2} = \frac{ABC}{1\,recto};$$

tomando el ángulo recto como unidad de ángulos y despejando H, será

$$H = \pi R^2 \times ABC.$$

ESCOLIO. Téngase en cuenta que ABC representa la relacion entre el ángulo del huso y un ángulo recto.

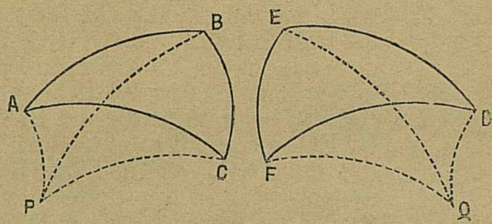
COROLARIO. *Si se elige para unidad superficial el huso esférico recto y el ángulo recto para unidad de ángulos, el área de un huso está expresada por su ángulo esférico.*

Pues siendo πR^2 la cuarta parte de la superficie esférica, ó sea el área del huso esférico recto, es la unidad de superficie, luego $$H = ABC.$$

TEOREMA. (*Fig.* 277).

486. *Dos triángulos esféricos simétricos* ABC *y* DEF *son equivalentes.*

FIG. 277.



Suponemos que los triángulos propuestos tienen los lados
$$AB = DE,\ AC = DF,\ BC = EF,$$
y los ángulos $$A = D,\ B = E,\ C = F.$$

Sea P uno de los polos de la circunferencia menor que pasa por los vértices A, B y C; uno el polo P con estos vértices por medio de arcos de círculo máximo PA, PB, PC: estos arcos serán iguales, por serlo sus cuerdas [419]. Por el vértice F del triángulo DEF hago pasar un arco de círculo máximo FQ, que forme con FD un ángulo DFQ = ACP, tomo FQ = CP, y uno el punto Q con los vértices D y E.

Los triángulos ACP y DFQ tienen AC = DF por hipótesis, CP = FQ, *áng.* ACP = *áng.* DFQ por construccion; como además el triángulo ACP es isósceles, dichos triángulos son iguales [438 *escolio*, 435]. Los triángulos BCP y EFQ tienen BC = EF por hipótesis, CP = FQ por construccion, y *áng.* BCP = *áng.* EFQ por ser sumas de ángulos iguales; como además el triángulo BCP es isósceles, dichos triángulos son iguales. Los triángulos ABP y DEQ tienen BA = ED por hipótesis, BP =

EQ como lados de los triángulos iguales BCP y EFQ, *áng*. ABP = *áng*. DEQ por ser diferencias de ángulos iguales; como además el triángulo ABP es isósceles, los triángulos ABP y DEQ son iguales.

Tendremos, pues,

$$BCP + ABP - ACP = EFQ + DEQ - DFQ$$

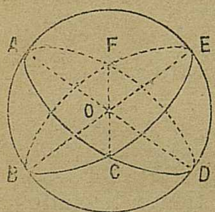
ó

$$ABC = DEF.$$

TEOREMA. (*Fig.* 278).

487. *El área de un triángulo esférico* ABC *es igual á la de un círculo máximo, multiplicada por la semisuma de los tres ángulos del triángulo disminuida en una unidad, siempre que la unidad de ángulos sea el ángulo recto.*

FIG. 278.



Llamemos A, B y C á los tres ángulos del triángulo propuesto ABC. Prolongando los lados de este triángulo se observa que el huso esférico ABDC se compone del triángulo propuesto y del BDC, el huso BAEC se compone del triángulo propuesto y del AEC, y el huso CAFB se compone del triángulo propuesto y del AFB; pero el triángulo AFB y el DCE son simétricos, por corresponder á los triedros simétricos OAFB y ODCE, luego son equivalentes, por consiguiente podemos decir que el huso CAFB equivale á la suma del triángulo propuesto y del DCE.

Tendremos, pues, [485]

$$ABC + BDC = \pi R^2 \times A$$

$$ABC + AEC = \pi R^2 \times B$$

$$ABC + DCE = \pi R^2 \times C.$$

Sumando ordenadamente estas igualdades y observando que la suma ABC + BDC + AEC + DCE equivale á la mitad de la superficie esférica, por cuya razon vale $2\pi R^2$, será

$$2ABC + 2\pi R^2 = \pi R^2 (A + B + C),$$

de donde

$$2ABC = \pi R^2 (A + B + C - 2),$$

y

$$ABC = \pi R^2 \left(\frac{A + B + C}{2} - 1 \right),$$

igualdad que demuestra el teorema.

ESCOLIO. La expresion obtenida puede escribirse en esta forma:

$$ABC = \frac{\pi R^2}{2} (A + B + C - 2).$$

Como $\frac{\pi R^2}{2}$ es el área de un triángulo esférico trirectángulo, pues es evidente que la superficie total de la esfera se compone de ocho de estos triángulos, si suponemos dicha área igual á la unidad será

$$ABC = A + B + C - 2,$$

y podremos decir: *Eligiendo para unidad superficial el triángulo esférico trirectángulo, el área de un triángulo esférico es igual al exceso de la suma de sus tres ángulos sobre dos rectos.*

EJEMPLO. *Hallar el área de un triángulo esférico cuyos ángulos son* $A = 80^\circ\ 30'$, $B = 112^\circ\ 45'$, $C = 96^\circ\ 25'$, *siendo* 20 *metros el radio de la esfera.*

La semisuma de los tres ángulos disminuida en una unidad, es decir en 90°, es 54° 50′, que reducida á fraccion de ángulo recto, es $\frac{3290}{5400}$; luego

$$ABC = 3{,}141592 \times 400 \times \frac{3290}{5400} = 765^{m2},\ 6176.$$

Si tomamos para unidad de superficie el triángulo esférico trirectángulo, es decir, la octava parte de la superficie esférica, emplearemos la fórmula $ABC = A + B + C - 2$, y tendremos que la suma de los tres ángulos disminuida en 2 unidades, es decir en 180°, es 109°40′, que reducida á la unidad de ángulos, es $\frac{6580}{5400} = \frac{329}{270}$. Tal es el área del triángulo propuesto relativamente á la del elegido para unidad; si se quiere en metros cuadrados, hay que multiplicar por $\frac{\pi R^2}{2}$, lo que daria el resultado anterior 765^{m2}, 6176.

CAPÍTULO TERCERO.

COMPARACION DE LAS ÁREAS.

TEOREMA.

488. *Las áreas de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus aristas homólogas.*

Dos caras semejantes cualesquiera, una de cada poliedro, son proporcionales á los cuadrados de sus lados homólogos, y estos lados son aristas de los poliedros; pero la razon de dos aristas homólogas, y por tanto la de sus cuadrados, es constante, luego tambien lo será la razon de dos caras semejantes cualesquiera. Esto supuesto, sean C, C′, C″.... las caras del primer poliedro, y c, c', c''.... sus homólogas en el segundo; sean A y a dos aristas homólogas cualesquiera. Tenemos

$$\frac{C}{c}=\frac{C'}{c'}=\frac{C''}{c''}=\ldots=\frac{A^2}{a^2},$$

de donde [*Arit.* 200]

$$\frac{C+C'+C''+\ldots}{c+c'+c''+\ldots}=\frac{A^2}{a^2},$$

igualdad que demuestra el teorema.

COROLARIO. *Las áreas de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cuadrados de sus alturas.*

Porque las aristas homólogas son proporcionales á las alturas.

489. Dos conos circulares rectos se llaman *semejantes* cuando sus triángulos generadores son semejantes.

Es claro que los radios de las bases, los lados y las alturas son proporcionales.

TEOREMA.

Las áreas laterales de dos conos semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases, ó á los de sus alturas.

Sean R, L, A el radio, lado y altura del primer cono, y r, l, a los del segundo. La razon de sus áreas laterales es

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R}{r} \times \frac{L}{l};$$

pero $\frac{R}{r} = \frac{L}{l}$, luego sustituyendo $\frac{L}{l}$ por su igual $\frac{R}{r}$ será

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R^2}{r^2},$$

y como $\frac{R^2}{r^2} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{A^2}{a^2}$, será por último

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{L^2}{l^2} = \frac{A^2}{a^2}.$$

ESCOLIO. Las áreas totales de los conos semejantes guardan la misma relacion que las laterales, porque siendo

$$\frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{\pi R^2}{\pi r^2} = \frac{R^2}{r^2},$$

tendremos

$$\frac{\pi RL + \pi R^2}{\pi rl + \pi r^2} = \frac{R^2}{r^2} = \text{etc.}$$

490. Dos cilindros circulares rectos se llaman *semejantes* cuando los rectángulos generadores son semejantes.

Es claro que los radios de las bases y los lados ó alturas serán proporcionales.

TEOREMA.

Las áreas laterales de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cuadrados de los radios de sus bases y á los cuadrados de sus lados ó alturas.

Sean R y L el radio y lado del primer cilindro, r y l el radio y lado del segundo. La razon de sus áreas laterales es

$$\frac{2\pi RL}{2\pi rl}=\frac{R}{r}\times\frac{L}{l};$$

pero $\frac{R}{r}=\frac{L}{l}$, luego sustituyendo $\frac{L}{l}$ por $\frac{R}{r}$ y al contrario, será

$$\frac{2\pi RL}{2\pi rl}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{L^2}{l^2}.$$

Escolio. Las áreas totales guardan la misma relacion que las laterales, porque siendo

$$\frac{2\pi RL}{2\pi rl}=\frac{2\pi R^2}{2\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2},$$

tendremos $$\frac{2\pi RL+2\pi R^2}{2\pi\, rl+2\pi r^2}=\frac{R^2}{r^2}=\text{etc.}$$

Teorema.

491. *Las áreas de dos esferas son proporcionales á los cuadrados de sus radios.*

Sean R y r los radios de las esferas. La razon de sus áreas es

$$\frac{4\pi R^2}{4\pi\, r^2}=\frac{R^2}{r^2}.$$

LIBRO SEGUNDO.

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

VOLÚMENES DE LOS POLIEDROS.

492. VOLÚMEN *de un cuerpo es la medida de su extension.*

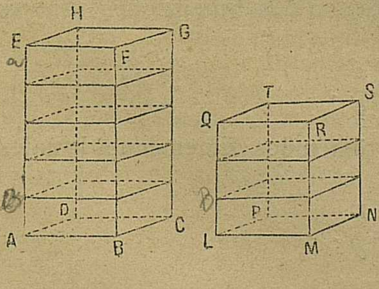
La unidad de volúmen es ordinariamente un cubo; por consiguiente el volúmen de un cuerpo será la relacion entre la extension del mismo y la del cubo que sirva de unidad.

Dos cuerpos son *equivalentes* cuando tienen igual volúmen y diferente forma. Los cuerpos equivalentes no pueden coincidir.

TEOREMA. *(Fig. 279).*

493. *Dos paralelepipedos rectángulos* AG *y* LS *que tienen iguales las bases* AC *y* LN, *son proporcionales á sus alturas* AE *y* LQ.

FIG. 279.



Supongamos que las alturas sean conmensurables y que la medida comun se halle contenida cinco veces en AE y tres veces en LQ: segun esto, tendremos [69]

$$\frac{AE}{LQ}=\frac{5}{3} \qquad [a].$$

Si por los puntos de division de las alturas trazamos planos paralelos á las bases, el paralelepípedo AG quedará dividido en cinco paralelepípedos rectángulos y el LS en tres: todos estos paralelepípedos son iguales porque tienen igual base y altura; luego

$$\frac{AG}{LS}=\frac{5}{3} \qquad [b].$$

De las igualdades [*a*] y [*b*] se deduce

$$\frac{AG}{LS}=\frac{AE}{LQ}.$$

Si las alturas fuesen inconmensurables, haríamos un razonamiento análogo al de los números 73 y 113.

494. Escolio. Las tres aristas AB, AD, AE de un ángulo triedro A son las *dimensiones* del paralelepípedo rectángulo AG; si dos paralelepípedos tienen iguales respectivamente dos de sus dimensiones, tendrán dos caras iguales; considerando estas caras como bases, las terceras dimensiones serán las alturas, luego el teorema anterior puede enunciarse diciendo:

Dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones respectivamente iguales, son proporcionales á la tercera dimension.

Teorema.

495. *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen igual altura son proporcionales á sus bases.*

Sean P y P′ los paralelepípedos propuestos, a la altura comun, b y c las dimensiones de la base del primero, b' y c' las de la base del segundo.

Imaginemos un tercer paralelepípedo P″, y sean a, b, c' sus dimensiones.

Los paralelepípedos P y P″ tienen dos dimensiones iguales a y b, luego [494]

$$\frac{P}{P''}=\frac{c}{c'}.$$

Los paralelepípedos P″ y P′ tienen dos dimensiones iguales a y c', luego

$$\frac{P''}{P'}=\frac{b}{b'}.$$

Multiplicando ordenadamente estas igualdades, y suprimiendo el factor comun P″, será

$$\frac{P}{P'}=\frac{b\times c}{b'\times c'}.$$

Escolio. Puede enunciarse este teorema diciendo: *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimension igual, son proporcionales á los productos de las otras dos dimensiones.*

Teorema.

496. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera, son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas.*

Sean P y P′ los paralelepípedos, B y a la base y altura del primero, B′ y a' la base y altura del segundo.

Imaginemos un tercer paralelepípedo rectángulo P″, cuya base sea B y a' la altura.

Los paralelepípedos P y P″ dan [493]

$$\frac{P}{P''}=\frac{a}{a'}.$$

Los paralelepípedos P″ y P′ dan [495]

$$\frac{P''}{P'}=\frac{B}{B'}.$$

Multiplicando estas igualdades y simplificando, resulta

$$\frac{P}{P'}=\frac{B\times a}{B'\times a'}.$$

Escolio. Puede enunciarse este teorema del modo siguiente: *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son proporcionales á los productos de sus tres dimensiones.*

Teorema.

497. *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto del área de su base por su altura.*

Sea P el paralelepípedo que se trata de medir, B y a su base y altura; sea C el cubo que se toma para unidad de volúmen y l el lado ó arista de este cubo: la base de éste será l^2 y la altura l.

Como el cubo es un paralelepípedo rectángulo, tendremos en virtud del teorema anterior,

$$\frac{P}{C}=\frac{B\times a}{l^2\times l}$$

Si *convenimos* en elegir para unidad de volúmen el cubo cuyo lado es la unidad lineal, l valdrá 1, por tanto

$$\frac{P}{C} = B \times a;$$

pero $\frac{P}{C}$ es el volúmen del paralelepípedo [492], luego el teorema es cierto.

Escolios.

1.° Téngase muy presente que en la demostracion anterior hemos convenido en elegir para unidad de volúmen un cubo cuyo lado sea la unidad lineal, y que la unidad de superficie debe ser un cuadrado cuyo lado sea tambien la unidad lineal; por consiguiente, cuando se hayan medido las líneas con una unidad determinada, el área de la base estará expresada en las unidades cuadradas correspondientes, y el volúmen en las cúbicas tambien correspondientes; así, cuando las líneas se midan en metros, varas etc., la base resultará expresada en metros cuadrados, varas cuadradas etc., y el volúmen en metros cúbicos, varas cúbicas etc.

Esta observacion es tambien aplicable á los teoremas siguientes.

2.° El teorema anterior se enuncia con frecuencia diciendo: *El volúmen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.*

Corolario. *El volúmen de un cubo es igual á la tercera potencia de su arista.* [1]

Puesto que el cubo es un paralelepípedo rectángulo cuyas tres dimensiones son iguales.

En virtud de esta proposicion, la vara cúbica, esto es, el cubo cuya arista es una vara ó tres piés, equivale á $3^3 = 27$ piés cúbicos, el pié cúbico á $12^3 = 1728$ pulgadas cúbicas, el metro cúbico á $10^3 = 1000$ decímetros cúbicos etc.[2]

---

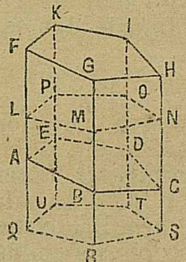
1 A esto debe su orígen el nombre de *cubo* que dimos en Aritmética á la tercera potencia de un número.

2 No se confunda la décima de metro cúbico, que es un paralelepípedo rectángulo cuya base es el metro cuadrado y la altura un decímetro; con el decímetro cúbico, que es un cubo cuya arista es un decímetro; tampoco se debe confundir la centésima de metro cúbico con el centímetro cúbico, ni la milésima de metro cúbico con el milímetro cúbico.

Teorema. (*Fig.* 280).

498. *Todo prisma oblicuo* AI *es equivalente á un prisma recto* QO, *cuya base es la seccion recta del prisma oblicuo, y cuya altura es igual á una de las aristas laterales del mismo.*

Fig. 280.



Trazo una seccion recta LMNOP del prisma oblicuo, prolongo las aristas laterales, tomo LQ = FA, y por el punto Q trazo un plano QRSTU paralelo á la seccion recta. De este modo se forma un prisma recto QO que tiene por base la seccion recta del oblicuo, y la altura LQ igual á la arista lateral FA. Decimos que los prismas AI y QO son equivalentes.

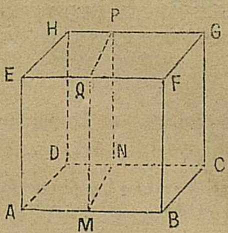
En efecto: si el cuerpo QD se coloca sobre el LI de modo que el polígono QRSTU coincida con su igual LMNOP, las aristas QA y LF coincidirán, porque serán perpendiculares á un mismo plano; además estas aristas son iguales, porque de LQ = FA se deduce LQ — AL = FA — AL ó AQ = FL, luego el vértice A caerá en F. Del mismo modo se demuestra que los vértices B, C, D, E caerán respectivamente en G, H, I, K; luego los cuerpos QD y LI son iguales.

Ahora bien, los prismas AI y QO se componen de una parte comun AO y de las partes iguales LI y QD, luego son equivalentes.

Teorema. (*Fig.* 281).

499. *El volúmen de un paralelepípedo recto es igual al producto de su base por su altura.*

Fig. 281.



Sea el paralelepípedo recto AG, cuya base AC no es rectangular.

Considerando como base de este paralelepípedo la cara lateral BG, las aristas AB, EF etc. son oblicuas á la base BG, de lo contrario los ángulos del paralelógramo ABCD serian rectos [315]. Trazo la seccion MNPQ perpendicular á dichas aristas; es claro que las rectas MQ y MN serán perpendiculares á la AB.

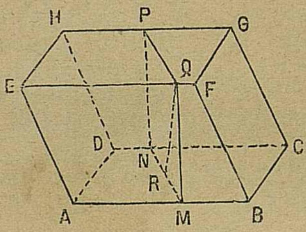
La seccion MNPQ, que en general es

un paralelógramo [461, *cor.* 2.°], es en este caso un rectángulo, porque el ángulo QMN correspondiente al diedro recto AB es tambien recto; luego el paralelepípedo propuesto es equivalente á un paralelepípedo rectángulo, cuya base es MNPQ y la altura igual á AB [498]. El volúmen de este paralelepípedo es $MQ \times MN \times AB$, luego éste será tambien el volúmen del paralelepípedo propuesto, y como $AB \times MN$ es el área de su base ABCD, y MQ su altura, pues MQ, como perpendicular á AB en el plano AF, es perpendicular al ABCD [339], queda demostrado el teorema.

Teorema. (*Fig.* 282).

500. *El volúmen de un paralelepípedo oblicuo* AG *es igual al producto de su base por su altura.*

Fig. 282.

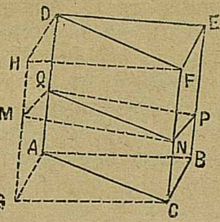


Consideremos la cara BG como base del paralelepípedo propuesto: las aristas laterales serán AB, EF etc. Tracemos la seccion recta MNPQ, que en general será un paralelógramo oblicuángulo; es claro que la seccion es perpendicular al plano ABCD, y las rectas MQ y MN lo son á la AB. El paralelepípedo oblicuo propuesto es equivalente á otro recto, cuya base será la seccion MNPQ y la altura igual á la arista AB [498]. El volúmen de este paralelepípedo es $MN \times QR \times AB$, siendo QR una perpendicular á MN, luego el volúmen del paralelepípedo propuesto es tambien $MN \times QR \times AB$: pero siendo MN perpendicular á AB, el producto $AB \times MN$ es el área de la base ABCD, y siendo QR perpendicular á la interseccion MN de los planos perpendiculares entre sí ABCD y MNPQ, es perpendicular á la base ABCD [339], luego es la altura del paralelepípedo propuesto. El volúmen $MN \times QR \times AB$ es, pues, el producto de la base por la altura de este paralelepípedo.

Teorema. (*Fig.* 283).

501. *Todo prisma triangular* ABCDEF *es equivalente á la mitad de un paralelepípedo de doble base é igual altura.*

Fig. 283.



Por las aristas DA y FC trazo los planos DG y FG paralelos á las caras EC y EA del prisma, y suponiendo prolongadas las bases de éste, se habrá formado el paralelepípedo GE de doble base que el prisma, pues el triángulo ABC es la mitad del paralelógramo BG, y de igual altura, puesto que los planos de las bases son los mismos para los dos cuerpos.

El plano ACFD divide al paralelepípedo GE en dos prismas triangulares: si demostramos que estos prismas son equivalentes, el propuesto ABCDEF será equivalente á la mitad del paralelepípedo EG.

Trazo la seccion recta MNPQ, que será un paralelógramo, y estará dividida por el plano ACFD en dos triángulos iguales MNQ y QNP. El prisma GCAHFD es equivalente á un prisma recto que tenga por base MNQ y por altura FC, y el prisma ABCDEF equivale á un prisma recto que tenga por base QNP y por altura FC; pero estos prismas rectos teniendo bases y alturas iguales, son iguales; luego los prismas GCAHFD y ABCDEF son equivalentes.

Corolario. *El volúmen de un prisma triangular* ABCDEF *es igual al producto de su base por su altura.*

Sea a la altura del prisma, y por tanto la del paralelepípedo GE. El volúmen de éste será ABCG $\times\, a$, luego el del prisma es $\frac{\text{ABCG}}{2} \times a = \text{ABC} \times a.$

Teorema.

502. *El volúmen de un prisma cualquiera es igual al producto de su base por su altura.*

Si por una arista lateral del prisma propuesto se trazan planos diagonales, quedará dividido el prisma en otros triangulares de igual altura que el dado. Llamando T, T′, T″ etc. á las bases de dichos prismas y a á la altura comun, los volúmenes parciales serán

$$T \times a,\ \ T' \times a,\ \ T'' \times a \text{ etc.};$$

luego el del prisma propuesto será

$$(T + T' + T'' + \ldots.) \times a;$$

pero $T + T' + T'' + \ldots.$ es la base de este prisma y a su altura, luego el teorema es cierto.

COROLARIOS.

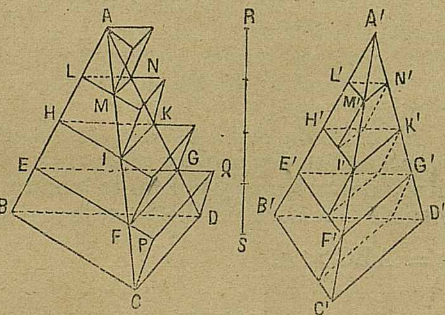
1.° *Dos prismas de bases iguales ó equivalentes é igual altura son equivalentes.*

2.° *Dos prismas cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales ó equivalentes, los prismas son proporcionales á sus alturas; y si son iguales las alturas, los prismas son entre sí como sus bases.*

TEOREMA. (*Fig.* 284).

503. *Dos tetraedros* ABCD, A'B'C'D' *de bases equivalentes é igual altura, son equivalentes.*

FIG. 284.



Supongamos colocadas las bases BCD, B'C'D' de los tetraedros propuestos en un mismo plano, y sea RS su altura comun. Dividamos RS en cierto número de partes iguales, y por los puntos de division tracemos planos paralelos al plano en que están situadas las bases. Estos planos determinan en los tetraedros propuestos secciones equivalentes dos á dos: las secciones EFG y E'F'G', por ejemplo, son paralelas á las bases y equidistan de los vértices A y A', y como las bases son equivalentes, las secciones tambien lo son [453, *escolio*].

Sobre la base BCD del tetraedro ABCD y sobre cada seccion del mismo construyamos prismas triangulares externos, y bajo cada seccion del tetraedro A'B'C'D' construyamos prismas internos. El segundo de los prismas externos es equivalente al primero de los internos, porque sus bases EFG, E'F'G' son equivalentes y sus alturas iguales: el tercero de los prismas externos es equivalente al segundo de los internos, y así sucesivamente, hasta el último prisma externo que será equivalente al último interno: luego la suma de los prismas externos excede á la de los internos en el prisma triangular BCDEPQ. Pero el tetraedro ABCD es menor que la primera suma y el A'B'C'D' es mayor que la segunda suma, luego por esta doble razon, la diferencia entre los tetraedros, si hay alguna, será menor que el prisma BCDEPQ.

Digo ahora que esta diferencia puede ser menor que cualquiera cantidad asignable, por pequeña que sea.

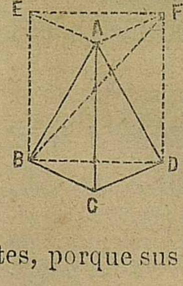
Llamando x á una de las partes en que se ha dividido la altura comun RS, el volúmen del prisma BCDEPQ será $BCD \times x$; para que este volúmen sea menor que una cantidad δ sumamente pequeña, esto es, para que se verifique la desigualdad $BCD \times x < \delta$, basta que sea $x < \frac{\delta}{BCD}$, y es claro que la altura RS podrá dividirse en un número de partes tal que cada una sea menor que $\frac{\delta}{BCD}$.

Pudiendo ser la diferencia entre los tetraedros propuestos menor que cualquier cantidad asignable, por pequeña que ésta sea, dicha diferencia es cero, y los tetraedros son equivalentes.

TEOREMA. (*Fig.* 285).

504. *Todo tetraedro* ABCD *es la tercera parte de un prisma de igual base y altura.*

FIG. 285.



Por los vértices B y D trazo dos paralelas BE, DF á la arista AC, y por el vértice A un plano paralelo á la base BCD; de este modo se forma un prisma triangular BCDEAF de igual base y altura que el tetraedro propuesto.

El prisma se compone de la pirámide cuadrangular ABEFD y del tetraedro ABCD; haciendo pasar un plano por la diagonal BF de la base de la pirámide y por el vértice A queda descompuesta la pirámide en los tetraedros ABEF y ABDF que son equivalentes, porque sus bases BEF y BDF son iguales, como mitades del paralelógramo BEFD, y su altura, que es una perpendicular al plano BEFD bajada desde A, es la misma. Considerando como base del tetraedro ABEF la cara EAF, su vértice será el punto B y su altura la del prisma BF, luego este tetraedro es equivalente al propuesto ABCD, cuya base BCD es igual á EAF y cuya altura es la del prisma, y como ya se ha demostrado que ABEF es tambien equivalente á ABDF, es claro que los tres tetraedros que componen el prisma BF son equivalentes, luego el tetraedro propuesto ABCD es la tercera parte de dicho prisma.

Corolario. *El volúmen de un tetraedro es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Sea a la altura del tetraedro y por tanto la del prisma BF; el volúmen de éste será $BCD \times a$, luego el del tetraedro es

$$\frac{BCD \times a}{3}.$$

Teorema.

505. *El volúmen de una pirámide cualquiera es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Trazando planos por una arista lateral y por las diagonales de la base que parten del extremo de dicha arista, quedará dividida la pirámide propuesta en varios tetraedros de igual altura que la pirámide. Sean T, T′, T″ etc. las bases de estos tetraedros y a la altura comun; los volúmenes parciales son

$$\frac{T \times a}{3}, \frac{T' \times a}{3}, \frac{T'' \times a}{3} \text{ etc.};$$

luego el de la pirámide propuesta será

$$\frac{(T + T' + T'' + \ldots) \times a}{3},$$

y como $T + T' + T'' + \ldots$ es la base de la pirámide, queda demostrado el teorema.

Corolarios.

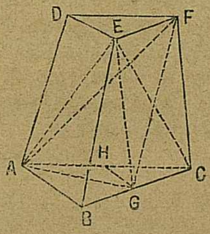
1.º *Dos pirámides de bases iguales ó equivalentes é igual altura son equivalentes.*

2.º *Dos pirámides cualesquiera son proporcionales á los productos de sus bases por sus alturas; si las bases son iguales ó equivalentes, las pirámides son proporcionales á sus alturas; y si son iguales las alturas, las pirámides son entre sí como sus bases.*

Teorema.

506. *Todo tronco de pirámide de bases paralelas es equivalente á la suma de tres pirámides, que tienen por altura comun la altura del tronco, y por bases respectivas la base mayor de éste, la menor y una media proporcional entre ambas.*

Fig. 286.



Consideremos, en primer lugar, un tronco de tetraedro ABCDEF (*Fig.* 286). Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y C se descompone el tronco en un tetraedro EABC y una pirámide cuadrangular EADFC. El tetraedro EABC tiene la misma altura que el tronco, y su base es la base mayor de éste. Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y F, la pirámide cuadrangular queda descompuesta en los tetraedros EADF y EACF; si tomamos el punto A para vértice del primero, su base será DEF, esto es, la base menor del tronco, y su altura será la del tronco.

Queda el tetraedro EACF. Por el punto E trazo una paralela EG á la arista FC: esta paralela se halla en el plano BCFE y encuentra á BC en G; uno el punto G con A y con F. Siendo EG paralela á FC lo es al plano ACFD, luego los puntos E y G equidistan de este plano, y el tetraedro EACF será equivalente al GACF, por tener ambos la misma base y alturas iguales; tomando F para vértice del último tetraedro, su base será AGC y su altura la del tronco; por tanto solo nos resta demostrar que la base AGC es una media proporcional entre ABC y DEF. Para esto, trazo la GH paralela á AB y por tanto á DE; los triángulos HGC, DEF son iguales, por tener un lado igual GC = EF y los ángulos adyacentes respectivamente iguales, como formados por rectas paralelas. Ahora bien, los triángulos GHC y GAC, que tienen el mismo vértice G y sus bases en línea recta, tienen alturas iguales, luego son proporcionales á sus bases, esto es,

$$\frac{GHC}{GAC} = \frac{CH}{CA};$$

los triángulos GAC y ABC tambien tienen el mismo vértice A y sus bases en línea recta, luego tienen igual altura, por consiguiente

$$\frac{GAC}{ABC} = \frac{CG}{CB};$$

pero siendo HG paralela á AB, tenemos

$$\frac{CH}{CA} = \frac{CG}{CB},$$

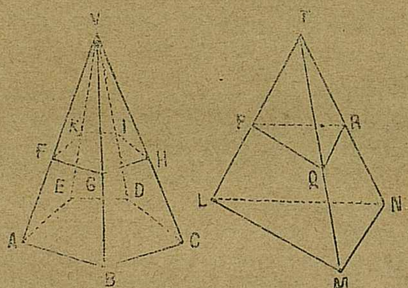
luego $$\frac{GHC}{GAC} = \frac{GAC}{ABC} \quad \text{ó} \quad \frac{DEF}{GAC} = \frac{GAC}{ABC};$$

donde vemos que GAC, base del tercer tetraedro, es media proporcional entre las bases del tronco.

Luego el teorema es cierto para un tronco de tetraedro.

Demostrémosle ahora para un tronco cualquiera AH (*Fig.* 287) de bases paralelas.

Fig. 287.



Construyamos un triángulo LMN equivalente á la base mayor ABCDE, y sobre este triángulo un tetraedro T, que tenga la misma altura que la pirámide total. Supongamos colocadas las bases de la pirámide y del tetraedro en un mismo plano, y prolonguemos la base superior FGHIK del tronco propuesto hasta que corte al tetraedro T: la seccion PQR será un triángulo equivalente á FGHIK [453, *escolio*]. Las pirámides totales VABCDE y TLMN, que tienen bases equivalentes é igual altura, son equivalentes, y las pirámides deficientes VFGHIK y TPQR son tambien equivalentes, por igual razon, luego los troncos AH y LMNPQR, que se obtienen restando de las pirámides totales las deficientes, son equivalentes: ahora bien, el tronco de tetraedro LMNPQR equivale á la suma de tres tetraedros que tienen por altura comun la del tronco y por bases respectivas la base mayor LMN de éste, la menor PQR y una media proporcional entre ambas; luego, sustituyendo el tronco de tetraedro por el AH de pirámide, y los tres tetraedros mencionados por tres pirámides equivalentes á ellos, como son las que tienen por altura comun la del tronco AH y por bases respectivas la ABCDE, la FGHIK y una media proporcional entre éstas [505, *cor*. 1.º], es claro que el tronco de pirámide será equivalente á la suma de las tres pirámides, lo cual debiamos demostrar.

Corolario. *El volúmen de un tronco de pirámide de bases paralelas es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

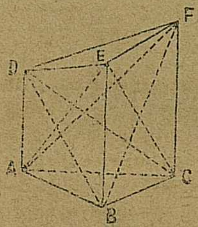
Si B y b son las bases, a la altura y V el volúmen del tronco, será

$$V = \frac{1}{3}Ba + \frac{1}{3}ba + \frac{1}{3}\sqrt{Bb}.a = \frac{1}{3}a\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

Teorema. (*Fig* 288).

507. *Todo prisma triangular troncado es equivalente á la suma de tres tetraedros que tienen por base comun la del prisma y por vértices respectivos los de la seccion del mismo.*

Fig. 288.



Sea el tronco de prisma triangular ABCDEF: debemos demostrar que es equivalente á la suma de los tetraedros EABC, DABC y FABC, que tienen por base comun la base ABC y por vértices los puntos E, D y F.

Haciendo pasar un plano por los puntos E, A y C queda descompuesto el tronco en un tetraedro EABC y una pirámide cuadrangular EADFC: el tetraedro EABC tiene por base la del tronco y por vértice el punto E. La pirámide se descompone, por el plano EDC, en los tetraedros EADC y EDFC; el primero EADC es equivalente al BADC, porque tienen la misma base ADC y sus vértices E y B están situados en una paralela á la base y equidistan, por tanto, de ella: tomando D para vértice del tetraedro BADC, su base será ABC; esto es, la del tronco. Queda el tetraedro EDFC: como los triángulos DCF y ACF tienen la misma base CF y sus vértices A y D en una paralela á dicha recta, son equivalentes, luego el tetraedro EDFC es equivalente al EAFC, pero éste equivale al BAFC que tiene igual altura, y cuyo vértice puede considerarse en F, siendo entónces su base la ABC del tronco; por consiguiente el tercer tetraedro EDFC es equivalente al FABC.

Vemos, pues, que los tres tetraedros que componen el tronco equivalen á los tres que tienen la base comun ABC y sus vértices respectivos en E, D y F.

COROLARIO. *El volúmen de un prisma triangular troncado es igual al tercio del producto de su base por la suma de las tres perpendiculares bajadas á ésta desde los vértices de la seccion.*

Si B es la base del tronco, a, a', a'' las tres perpendiculares, y V el volúmen, será

$$V = \frac{1}{3} Ba + \frac{1}{3} Ba' + \frac{1}{3} Ba'' = \frac{1}{3} B (a + a' + a'').$$

508. El volúmen de un prisma troncado cualquiera se hallará descomponiendo el prisma en otros triangulares troncados y sumando los volúmenes de estos.

El volúmen de un poliedro cualquiera se hallará descomponiendo el poliedro en pirámides y sumando los volúmenes de éstas.

CAPÍTULO SEGUNDO.

VOLÚMENES DE LOS CUERPOS DE REVOLUCION.

TEOREMA.

509. *El volúmen de un cono circular recto es igual al tercio del producto de su base por su altura.*

Sea B el área de la base, a la altura y V el volúmen.

Supongamos inscripta en el cono una pirámide regular, y sean b el área de la base, v el volúmen; la altura será a, luego

$$v = \frac{1}{3} ba.$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de la base de la pirámide y por tanto el de sus caras laterales, el límite de las bases de estas pirámides será la base B del cono, y el límite de las pirámides será el cono propuesto; por consiguiente, sustituyendo las variables b y v por sus límites B y V, será

$$V = \frac{1}{3} Ba.$$

Si r es el radio de la base del cono, tendremos

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 a.$$

TEOREMA.

510. *El volúmen de un tronco de cono circular recto de bases paralelas, es igual al tercio del producto de su altura por la suma de sus bases y de una media proporcional entre ellas.*

Sean B y b las bases, a la altura y V el volúmen.

Supongamos inscripto en el cono troncado un tronco de pirámide regular, y sean B′ y b' sus bases y V′ su volúmen; la altura será a, la misma del tronco de cono, luego

$$V' = \frac{1}{3} a \left(B' + b' + \sqrt{B'b'} \right).$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de las bases de la pirámide troncada, y por tanto el de sus caras laterales, B′ y b' tendrán por límites respectivos B y b, por consiguiente el límite del producto $B'b'$ será Bb; además el límite de V' será V, y a permanecerá constante. Sustituyendo las cantidades variables por sus límites respectivos, tendremos

$$V = \frac{1}{3} a (B + b + \sqrt{Bb}).$$

Si R y r son los radios de las bases del tronco de cono, será

$$B = \pi R^2, \; b = \pi r^2, \; \sqrt{Bb} = \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2} = \pi R r,$$

$$V = \frac{1}{3} \pi a (R^2 + r^2 + Rr).$$

TEOREMA.

511. *El volúmen de un cilindro circular recto es igual al producto de su base por su altura.*

Sean B, a y V la base, altura y volúmen del cilindro.

Supongamos inscripto un prisma regular, y sean b su base, v su volúmen; la altura será a, la misma del cilindro; luego

$$v = ba.$$

Duplicando indefinidamente el número de lados de las bases del prisma, el límite de b será B y el de v será V, luego

$$V = Ba.$$

Si r es el radio de la base del cilindro, tendremos

$$V = \pi r^2 a.$$

TEOREMA. *(Fig. 289).*

512. *El volúmen del cuerpo engendrado por un triángulo que gira alrededor de una recta exterior á él trazada por su vértice en su plano, es igual al área de la superficie engendrada por la base del triángulo multiplicada por el tercio de su altura.*

Distinguiremos tres casos: 1.° que la base tenga un extremo en el eje de revolucion; 2.° que la base no tenga ningun punto en el eje ni sea paralela á él; 3.° que sea paralela al eje.

1.° Supongamos un triángulo ABC *(Fig. 1)* cuyos ángulos C y B adyacentes al eje sean agudos; la perpendicular AE al eje caerá entre los puntos C y B dividiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos AEC y AEB, que engendran dos conos circulares rectos, cuyos volúmenes son

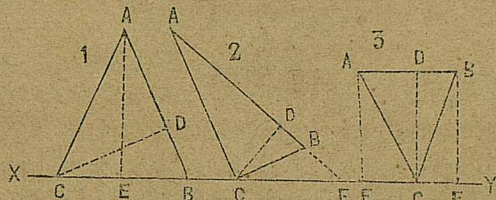
$$\frac{1}{3}\pi AE^2 \times CE, \quad \frac{1}{3}\pi AE^2 \times EB:$$

luego el cuerpo engendrado por ABC tendrá por volúmen

$$\frac{1}{3}\pi AE^2 (CE + EB) = \frac{1}{3}\pi AE^2 \times BC \qquad [a]$$

Bajemos la perpendicular DC á la base AB. Los productos $AE \times BC$ y $CD \times AB$ expresan el duplo del área del triángulo

Fig. 289.



ABC, luego son iguales: sustituyendo en [a], tendremos

$$\frac{1}{3}\pi AE \times CD \times AB = \frac{1}{3} CD \times \pi AE.\, AB,$$

resultado que está de acuerdo con el enunciado del teorema, puesto que $\pi AE.\, AB$ es el área de la superficie cónica descrita por la base del triángulo, y $\frac{1}{3}$ CD el tercio de la altura de éste.

Si algun ángulo B ó C fuese obtuso, el triángulo ABC seria la diferencia entre dos triángulos rectángulos, y la demostracion se diferenciaria de la anterior en que los volúmenes engendrados por éstos se restarian, en lugar de sumarlos. Si algun ángulo B ó C fuese recto, la demostracion seria muy fácil.

2.° Sea el triángulo ABC (*Fig.* 2). Prolongo la base AB hasta que encuentre en E al eje. El triángulo propuesto es la diferencia de otros dos ACE y BCE, que están en el primer caso; luego el volúmen del cuerpo engendrado por ABC será

$$\frac{1}{3} CD\ (\textit{superf.}\ AE - \textit{superf.}\ BE);$$

pero la superficie descrita por AE ménos la descrita por BE es la engendrada por AB, luego el volúmen en cuestion es

$$\frac{1}{3} CD \times \textit{superf.}\ AB.$$

3.° Sea el triángulo ABC (*Fig.* 3), cuya base AB es paralela al eje, y supongamos que la altura CD caiga entre A y B.

El triángulo propuesto se obtiene restando del rectángulo

ABFE los triángulos rectángulos AEC y BFC; luego el volúmen del cuerpo engendrado por el triángulo ABC será

$$\pi AE^2 \times EF - \left(\frac{1}{3}\pi AE^2 \times EC + \frac{1}{3}\pi AE^2 \times CF\right) =$$

$$\pi AE^2 \times EF - \frac{1}{3}\pi AE^2 \times EF = \frac{2}{3}\pi AE^2 \times EF;$$

sustituyendo AE por CD, EF por AB, y disponiendo los factores en el órden conveniente, esta expresion adquiere la forma

$$\frac{1}{3} CD \times 2\pi AE.\ AB,$$

conforme con el enunciado del teorema, puesto que $2\pi AE \times AB$ es el área de la superficie cilíndrica descrita por la base del triángulo, y $\frac{1}{3}$ CD el tercio de la altura de éste.

Si uno de los ángulos A y B fuese recto ú obtuso, la demostracion precedente sufriria algunas sencillas modificaciones.

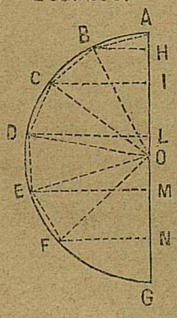
513. SECTOR ESFÉRICO *es la parte de esfera engendrada por un sector cualquiera del semicírculo generador.*

La base del sector circular engendra una zona, que se llama *base* del sector esférico.

TEOREMA. *(Fig. 290).*

El volúmen de un sector esférico es igual al área de la zona que le sirve de base multiplicada por el tercio del radio.

FIG. 290.



Consideremos el sector esférico engendrado por el sector circular OAF, que gira alrededor del diámetro AG.

Dividiendo el arco AF en varias partes iguales, las cuerdas AB, BC, CD etc. de estas partes serán bases de los triángulos isósceles ABO, BCO, CDO etc. que tienen todos igual altura. Representando ésta por a, los volúmenes de los cuerpos engendrados por los triángulos serán respectivamente

$$superf.\ AB \times \frac{1}{3} a,\ superf.\ BC \times \frac{1}{3} a,$$

$$superf.\ CD \times \frac{1}{3} a \text{ etc};$$

luego el volúmen del cuerpo engendrado por el sector poligonal OABCDEF será

$$(\textit{superf.}\ AB + \textit{superf.}\ BC + \textit{superf.}\ CD + \ldots) \times \frac{1}{3} a.$$

Ahora bien, si el número de partes del arco AF aumenta, el límite de la línea quebrada ABCDEF es el arco AF, luego el límite de la suma

$$\textit{superf.}\ AB + \textit{superf.}\ BC + \textit{superf.}\ CD + \ldots$$

será la superficie de la zona engendrada por el arco AF: además el límite de la apotema *a* es el radio R del círculo generador, luego el volúmen en cuestion es

$$\textit{superf. de la zona}\ AF \times \frac{1}{3} R.$$

TEOREMA. *(Fig. 290).*

514. *El volúmen de una esfera es igual al área de la superficie esférica multiplicada por el tercio del radio.*

La esfera engendrada por el semicírculo ADG puede considerarse compuesta de dos sectores esféricos, engendrados por los sectores circulares AOD y DOG, cuyos volúmenes son

$$\textit{superf. de la zona}\ AD \times \frac{1}{3} R,\ \textit{superf. de la zona}\ DG \times \frac{1}{3} R;$$

pero las zonas engendradas por los arcos AD y DG componen la superficie esférica, luego el volúmen de la esfera es

$$\textit{superf. de la esfera} \times \frac{1}{3} R.$$

Llamando V al volúmen de la esfera, y teniendo presente que su área es $4\pi R^2$, será

$$V = 4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

COROLARIOS.

1.° *El volúmen de una esfera es igual á su diámetro multiplicado por los dos tercios de su círculo máximo.*

En efecto, $\frac{4}{3} \pi R^3 = 2R \times \frac{2}{3} \pi R^2.$

2.° *El volúmen de una esfera es los dos tercios del volúmen del cilindro circunscrito.*

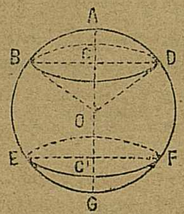
Pues el volúmen de este cilindro es $\pi R^2 \times 2R = 2\pi R^3$, cuyos dos tercios es $\frac{4}{3} \pi R^3$, volúmen de la esfera.

EJEMPLO. *Hallar el volúmen de una esfera cuyo radio es* 20^m

Tenemos: $V = \frac{4}{3} \times 3{,}141592 \times 8000 = 33510^{m^3},315.$

515. Segmento esférico *es la parte de esfera limitada por una zona y por el plano de la base ó los planos de las bases de ésta.*

Fig. 291.



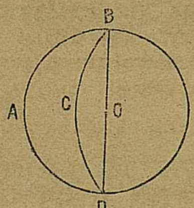
El volúmen de un segmento ABD (*Fig.* 291) de una base, menor que un hemisferio, se obtiene restando los volúmenes del sector OBAD y cono OBD correspondiente. Si el segmento es GBD, mayor que un hemisferio, se suman los volúmenes del secttor OBGD y del cono OBD; por último, si el segmento es de dos bases, como BDEF, su volúmen será la diferencia entre los volúmenes de los segmentos de una base AEF y ABD.

516. Cuña esférica *es la parte de esfera limitada por un huso y los dos semicírculos correspondientes.*

Teorema. (*Fig.* 292).

El volúmen de una cuña esférica ABDC *es igual al área de su huso multiplicada por el tercio del radio.*

Fig. 292.



Es evidente que la relacion entre la cuña propuesta y la esfera es igual á la relacion entre el huso correspondiente á aquella y la superficie esférica. Llamando V al volúmen de la cuña, H al área de su huso, A al área de la esfera, será

$$\frac{V}{A \times \frac{1}{3} R} = \frac{H}{A} \quad ó \quad \frac{V}{\frac{1}{3} R} = H,$$

de donde $V = H \times \frac{1}{3} R$.

Si H se sustituye por $\pi R^2 \times ABC$ [485], tendremos

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \times ABC,$$

siendo ABC el ángulo de la cuña.

Ejemplo. *Hallar el volúmen de una cuña cuyo ángulo tiene* 40° 35′ *siendo* 20 *metros el radio de la esfera.*

$$V = \frac{1}{3} \times 3,141592 \times 8000 \times \frac{2435}{5400} = 3777^{m^3},667.$$

CAPÍTULO TERCERO.

COMPARACION DE VOLÚMENES.

TEOREMA.

517. *Los volúmenes de dos pirámides semejantes son proporcionales á los cubos de sus alturas y de sus aristas homólogas.*

Sean V y v, B y b, A y a los volúmenes, bases y alturas de dos pirámides.

Tenemos [505, *cor*. 2.°]

$$\frac{V}{v}=\frac{B.A}{b.a}=\frac{B}{b}.\frac{A}{a};$$

pero [452, 2.°] $\frac{B}{b}=\frac{A^2}{a^2}$, luego sustituyendo será

$$\frac{V}{v}=\frac{A^3}{a^3};$$

donde vemos que los volúmenes de las pirámides propuestas son proporcionales á los cubos de sus alturas, y como las alturas son proporcionales á las aristas homólogas, los volúmenes serán tambien proporcionales á los cubos de las aristas.

TEOREMA.

518. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas.*

Supongamos descompuestos los poliedros en igual número de tetraedros semejantes. Los volúmenes de dos tetraedros semejantes, uno de cada poliedro, son proporcionales á los cubos de sus aristas homólogas; pero la razon de dos aristas homólogas, y por tanto la de sus cubos, es constante, luego tambien lo será la razon de dos tetraedros semejantes cualesquiera. Esto supuesto, sean T, T′, T″ etc. los tetraedros que componen el primer poliedro, y t, t', t'' etc. los tetraedros del segundo poliedro respectivamente semejantes á los primeros; sean A y a dos aristas homólogas cualesquiera. Tenemos

$$\frac{T}{t}=\frac{T'}{t'}=\frac{T''}{t''}=\ldots\ldots=\frac{A^3}{a^3},$$

de donde [*Arit.* 200],

$$\frac{T+T'+T''+\ldots\ldots}{t+t'+t''+\ldots\ldots}=\frac{A^3}{a^3};$$

igualdad que demuestra el teorema.

Teorema.

519. *Los volúmenes de dos conos semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases, de sus lados ó de sus alturas.*

Sean R, L, A el radio, lado y altura del primer cono, y r, l, a los del segundo. La razon de sus volúmenes es

$$\frac{\frac{1}{3}\ \pi R^2 A}{\frac{1}{3}\ \pi r^2 a}=\frac{R^2}{r^2}\times\frac{A}{a}=\frac{R^3}{r^3},$$

puesto que $$\frac{A}{a}=\frac{R}{r};$$

y como los radios son proporcionales á los lados y á las alturas, los volúmenes de los conos serán tambien proporcionales á los cubos de los lados y á los cubos de las alturas.

Teorema.

520. *Los volúmenes de dos cilindros semejantes son proporcionales á los cubos de los radios de sus bases y á los cubos de sus alturas ó lados.*

Sean R y A el radio y altura del primer cilindro, r y a el radio y altura del segundo. La razon de sus volúmenes será

$$\frac{\pi R^2 A}{\pi r^2 a}=\frac{R^2}{r^2}\times\frac{A}{a}=\frac{R^3}{r^3}\ \text{ó}\ =\frac{A^3}{a^3},$$

puesto que $$\frac{A}{a}=\frac{R}{r}.$$

TEOREMA.

521. *Los volúmenes de dos esferas son proporcionales á los cubos de sus radios.*

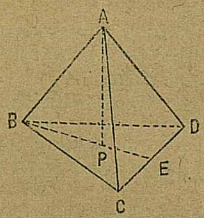
Si R y r son los radios de las esferas, la razon de sus volúmenes será

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$

PROBLEMA.

522. *Determinar el volúmen de un tetraedro regular en funcion de la arista.*

FIG. 293.



Sea a la arista del tetraedro regular ABCD (*Fig.* 293).

La cara BCD de este cuerpo es un triángulo equilátero cuya base es a, y cuya altura BE caerá en el medio E la base, luego

$$BE = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

El área del triángulo BCD es, pues,

$$BCD = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

La altura AP del tetraedro es un cateto del triángulo rectángulo APB, cuya hipotenusa AB es a; el otro cateto PB es el radio del círculo circunscrito al triángulo BCD, y como $a = r\sqrt{3}$, se deduce $r = \frac{a}{\sqrt{3}}$; luego

$$AP = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Como el volúmen V del tetraedro es $\frac{1}{3}$ BCD $\times$ AP, tendremos sustituyendo

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

EJERCICIOS DE LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO.

TEOREMAS PARA DEMOSTRAR.

I. Si una recta es perpendicular á un plano, todo plano paralelo á esta recta será perpendicular al primero.

II. Dos rectas paralelas forman ángulos iguales con un mismo plano.

III. Si dos planos perpendiculares á un tercero pasan por dos rectas oblicuas á éste y paralelas entre sí, son paralelos.

IV. Si las proyecciones de una recta sobre dos planos que se cortan son perpendiculares á las intersecciones de un tercer plano con los de proyeccion, la recta es perpendicular á dicho tercer plano.

V. Las cuatro diagonales de un paralelepípedo se dividen mutuamente en dos partes iguales.

VI. El volúmen de un prisma triangular es igual á la mitad del producto de una de sus caras laterales por la distancia de esta cara á la arista opuesta.

VII. El volúmen de un tronco de paralelepípedo es igual á la cuarta parte del producto de su base por la suma de las perpendiculares bajadas á ésta desde los vértices de la seccion.

VIII. El volúmen de un paralelepípedo troncado es igual al producto de su base por la perpendicular bajada á ésta desde el centro de la seccion

IX. Los volúmenes de dos tetraedros que tienen un ángulo triedro igual, son proporcionales á los productos de las tres aristas que forman el ángulo igual.

X. Los conos engendrados por un triángulo rectángulo, que gira sucesivamente alrededor de cada uno de sus catetos, son inversamente proporcionales á sus alturas.

PROBLEMAS PARA RESOLVER.

I. Trazar por un punto dado una recta que encuentre á otras dos no situadas en un mismo plano.

II Hallar el lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de tres puntos dados que no están en línea recta.

III. Por una recta dada trazar un plano paralelo á otra recta dada.

IV. Por un punto dado trazar un plano tangente á una superficie cilíndrica ó cónica circular.

V. Por un punto dado en la superficie esférica trazar una circunferencia máxima perpendicular á otra dada.

VI. Dividir un arco de circunferencia máxima en dos partes iguales.

VII. Por tres puntos dados en la superficie de una esfera, hacer pasar una circunferencia.—Hallar el polo de una circunferencia dada en la superficie esférica.

VIII. Determinar las aristas de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que son proporcionales á los números m, n y p, y que el volúmen del paralelepípedo es V.

IX. Dada la arista de un cubo, determinar la de otro cubo doble del primero.

X. Hallar la arista de un cubo equivalente á la suma de otros tres cuyas aristas son 3, 4 y 5 metros.

XI. El volúmen de un cono circular recto es 160 metros cúbicos y su altura 6 metros; ¿cuál será el radio de su base?

XII. La capacidad de una medida cilíndrica de altura igual al diámetro de la base es un hectólitro, ¿cuál será el diámetro de la base?

XIII. Hallar el radio de una esfera cuyo volúmen es 500 metros cúbicos.

XIV. Hallar el volúmen de una esfera cuya superficie es 500 metros cuadrados.

XV. Hallar el volúmen de un segmento esférico de una base, cuya altura es 8 metros, siendo 13 metros el radio de la esfera.

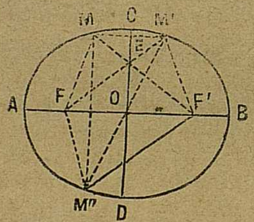
BREVES NOCIONES

SOBRE LAS CURVAS ELIPSE, PARÁBOLA É HIPÉRBOLA.

I.—Elipse.

523. *La* ELIPSE *es una curva plana cerrada, tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante.*

FIG. 294.



Esta suma constante se representa comunmente por $2a$.

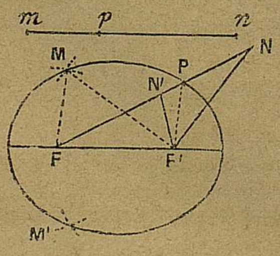
Si M, M', M'' (*Fig.* 294) son varios puntos de la elipse, F y F' los puntos fijos, se tiene

$$MF + MF' = M'F + M'F' = M''F + M''F' = \ldots\ldots = 2a.$$

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos* de la elipse, y las rectas MF, MF' tiradas desde un punto cualquiera M de la curva á los focos se llaman *radios vectores*.

TEOREMA. (*Fig.* 295).

FIG. 295.



524. *La suma de las distancias de los focos de una elipse á un punto cualquiera del plano de esta curva es igual, mayor ó menor que* 2a, *segun que dicho punto esté en la curva, fuera ó dentro de la misma.*

Lo primero es cierto por definicion.

Sea un punto exterior N. Tenemos $NP + NF' > PF'$, luego $NF + NF' > PF + PF'$ ó $> 2a$.

Sea un punto interior N'. Tenemos

$N'F' < PN' + PF'$, luego $N'F' + N'F < PF + PF'$ ó $< 2a$.

Los recíprocos son ciertos [55].

Corolario. *El lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de sus distancias á dos puntos fijos sea constante, es una elipse.*

525. Eje de simetría *de una curva es la recta que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas de la curva perpendiculares al eje.*

Teorema. (*Fig.* 294).

526. *La recta* AB *que pasa por los focos de una elipse, y la perpendicular* CD *á* FF' *en su punto medio, son ejes de la elipse.*

1.° Sea M un punto de la elipse, MF y MF' los radios vectores. Haciendo centro en los focos F y F', con los radios MF y MF' describo dos arcos, por la parte inferior, que se cortarán en un punto M'' perteneciente á la elipse, puesto que

$$M''F + M''F' = MF + MF' = 2a;$$

pero los puntos F y F' equidistan de M y M''; luego AB es perpendicular á la cuerda MM'' en su punto medio.

2.° Tambien CD es eje de la elipse.

En efecto: haciendo centro en F y F', con los radios respectivos MF' y MF, describo dos arcos por la parte superior, que se cortarán en un punto M' perteneciente á la elipse, puesto que $M'F + M'F' = MF' + MF = 2a$; los triángulos MFF' y M'FF' son iguales, por tener sus tres lados iguales: doblando la figura por CD, el punto F' caerá en F, la recta F'M' seguirá la direccion FM y el punto M' caerá en M, por consiguiente los ángulos en E son iguales, ó sea rectos, y además $M'E = ME$; luego CD es perpendicular á la cuerda MM' en su punto medio.

Observaciones.

527. 1.ª Siendo A y B puntos de la elipse, tenemos

$$AF + AF' = BF + BF';$$

restando FF' de ambos miembros resulta

$$2AF = 2BF' \text{ ó } AF = BF'.$$

2.ª Considerando un punto cualquiera M de la elipse y el punto A, tendremos:

$$MF + MF' = AF + AF' = BF' + AF' = AB.$$

3.ª En virtud de la observacion anterior, tenemos

$$CF + CF' = AB \text{ ó } 2CF = 2OA,\ CF = OA.$$

4.ª Siendo $CF > CO$, será $OA > CO$ y $2OA > 2CO$.

En virtud de este último resultado se llama eje *mayor* de la elipse al AB que pasa por los focos, y eje *menor* al CD. Los puntos A, B, C, D se llaman vértices de la elipse.

528. Las igualdades

$$AF = BF',\ MF + MF' = AB,\ CF = OA$$

nos dicen:

1.° *Los extremos del eje mayor de la elipse están á igual distancia de los focos respectivos.*

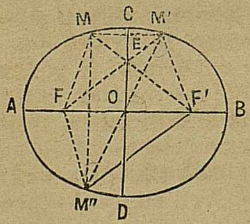
2.° *La suma de los radios vectores es igual al eje mayor.*

3.° *La distancia de un extremo del eje menor á un foco es igual al semi-eje mayor.*

Teorema. *(Fig. 294).*

529. *El punto* O *en que se cortan los ejes de una elipse es centro de esta curva.*

Fig. 294.



Sea M' un punto de la elipse. Uno O con M', prolongo la OM' y tomo $OM'' = OM'$; si pruebo que el punto M'' pertenece á la elipse, quedará demostrado que O divide en dos partes iguales á cualquiera cuerda de la elipse y que por tanto es centro de la curva.

Los triángulos OM'F' y OM''F son iguales [20], luego $M'F' = M''F$; tambien son iguales los triángulos OM'F y OM''F', luego $M'F = M''F'$; por consiguiente

$$M''F + M''F' = M'F + M'F' = 2a,$$

lo que demuestra que el punto M'' pertenece á la elipse.

530. La distancia OF del centro á cualquiera de los focos, se llama *excentricidad* de la elipse.

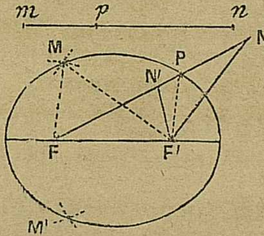
Si suponemos que los focos se reunen en el centro, la excentricidad será *cero*, y la elipse se convertirá en una circunferencia de radio *a*; por esto suele decirse: *la circunferencia es una elipse cuya excentricidad es cero.*

Es claro que cuanto menor sea la excentricidad, la forma de la elipse se aproximará más á la del círculo.

PROBLEMA. (*Fig.* 295).

531. *Describir una elipse conociendo la distancia entre los focos y el eje mayor.*

FIG. 295.



1.ª *construccion.* Sean F y F' los focos y mn el eje mayor. Divido esta recta en dos partes cualesquiera mp y np; haciendo centro en un foco F' con el radio pn describo dos arcos, uno por encima y otro por debajo de la recta FF'; haciendo centro en el otro foco F, describo con el radio mp otros dos arcos que corten á los anteriores: los puntos M y M' de interseccion pertenecen á la elipse, pues

$$MF' + MF = pn + mp = mn.$$

Del mismo modo se determinarán tantos puntos como se quieran. Trazando una línea continua que pase por todos ellos, se tendrá la elipse pedida.

2.ª *construccion.* Puede describirse tambien la elipse por un procedimiento mecánico. Fíjense en los focos los extremos de un hilo inextensible igual en longitud al eje mayor, y póngase tenso por medio de un lápiz ó de un estilo; muévase el lápiz de modo que se apoye en el hilo permaneciendo éste tenso, y quedará descrita la curva.

Este procedimiento es consecuencia inmediata de la definicion de elipse.

PROBLEMA. (*Fig.* 294).

532. *Describir una elipse conociendo sus dos ejes.*

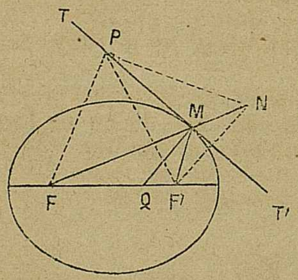
Describiendo desde el vértice C como centro, con el radio OA, un arco que corte al eje mayor, los puntos de interseccion F y F' serán los focos de la elipse [528, 3.°]. Conocidos estos puntos, puede emplearse cualquiera de las construcciones del problema anterior.

533. *Se llama* TANGENTE *á una elipse toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

TEOREMA. (*Fig.* 296).

La bisectriz del ángulo que forma un radio vector de un punto de la elipse con la prolongacion del otro radio vector, es tangente á la elipse.

FIG. 296.



Tomo en la prolongacion del radio vector FM una longitud MN = MF', trazo la NF', y uno un punto cualquiera P de la TT' con F, F' y N. La bisectriz TT' es perpendicular á la base NF' del triángulo isósceles MNF', y la divide en dos partes iguales [168, *escolio*], luego PF' = PN. Ahora bien

$$PF + NP > FN \text{ ó } PF + PF' >$$
$$FM + F'M \text{ ó } > 2a,$$

luego el punto P está fuera de la elipse.

El mismo razonamiento puede aplicarse á cualquier otro punto de TT', á excepcion del M, por consiguiente TT' es tangente á la elipse.

534. *Se llama* NORMAL *á una curva la perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

La bisectriz MQ *del ángulo* FMF' *que forman los radios vectores de un punto* M *de la elipse, es normal á esta curva.*

Trazando la bisectriz TT' del ángulo F'MN adyacente al FMF', las rectas TT' y MQ son perpendiculares entre sí [37], y como TT' es tangente, MQ será normal.

PROBLEMA. (*Fig.* 296).

535. *Por un punto* M *de la elipse, trazar una tangente á esta curva.*

Trazo los radios vectores MF y MF', prolongo el MF, y la bisectriz TT' del ángulo NMF' será la tangente pedida.

536. Se llama *elipsoide prolongado* la superficie engendrada por una elipse que gira alrededor de su eje mayor.

En Física se demuestra que los rayos luminosos y los caloríficos, al encontrar una superficie pulimentada, se reflejan, y que el rayo reflejo forma con la normal á la superficie un ángulo igual al que habia formado el rayo incidente; por lo tanto, si en uno de los focos de un elipsoide se coloca un manantial de luz ó de calor, los rayos emitidos, despues de chocar en la superficie pasarán por el otro foco.

II.—Parábola.

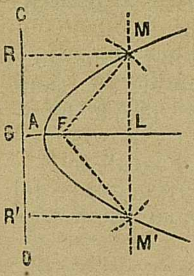


Fig. 297.

537. *La* parábola *es una curva plana, tal que cada uno de sus puntos equidista de un punto fijo y de una recta fija.*

Si F (*Fig.* 297) es el punto fijo, CD la recta fija y M un punto cualquiera de la parábola, será $MF = MR$.

El punto fijo F se llama *foco*, la recta CD *directriz*, y las rectas tiradas desde el foco á los puntos de la curva se llaman *radios vectores*.

Teorema. (*Fig.* 298).

538. *Un punto tomado en el plano de una parábola dista del foco igual, más ó ménos que de la directriz, segun que el punto esté en la curva, fuera ó dentro de la misma.*

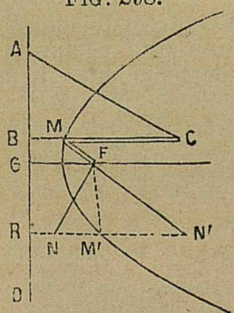


Fig. 298.

Lo primero es cierto por definicion.

Sea un punto exterior N. Prolongo la perpendicular NR hasta que encuentre en M' á la parábola, y trazo el radio vector FM'. En el triángulo FNM' tenemos

$$FN + NM' > FM', \text{ pero } FM' = RM',$$

$$\text{luego } FN + NM' > RM';$$

restando NM' de ambos miembros de esta última desigualdad, resulta

$$FN > RN.$$

Sea un punto interior N'. Tenemos

$$FN' < FM' + M'N', \text{ pero } FM' = RM', \text{ luego } FN' < RM' + M'N'$$

ó bien

$$FN' < RN'.$$

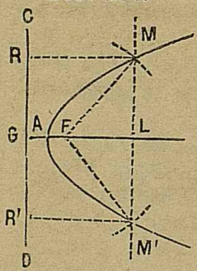
Los recíprocos son ciertos [55].

Corolario. *El lugar geométrico de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo y de una recta fija es una parábola.*

TEOREMA. *(Fig. 297).*

539. *La perpendicular* FG *tirada á la directriz de una parábola desde el foco* F, *es eje de dicha curva.*

FIG. 297.



Sea M un punto cualquiera de la parábola. Bajo la perpendicular ML á FG, y la prolongo, tomando M'L = ML.

El punto M' pertenece á la parábola, porque siendo M'F = MF y M'R' = MR, se tiene M'F = M'R'; como FG es, segun la construccion, perpendicular á MM' en su punto medio, es claro que FG es eje de la parábola.

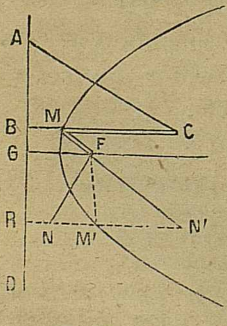
ESCOLIO. El punto de interseccion A del eje de la parábola con la curva, se llama *vértice* de la misma.

PROBLEMA.

540. *Describir una parábola, conociendo la posicion del foco y de la directriz.*

1.ª *construccion.* Tiro desde el foco F (*Fig.* 297) una recta indefinida FG perpendicular á la directriz CD: el punto medio A de la distancia FG será evidentemente un punto de la parábola. Tomo en FG un punto cualquiera L, y levanto por este punto una perpendicular indefinida MM' á FG; describo con el radio GL, haciendo centro en el foco F, un arco que cortarála la perpendicular MM' en dos puntos M y M' pertenecientes á á parábola, porque siendo MF = GL y MR = GL, se tiene MF = MR. Del mismo modo se determinarán otros puntos. Trazando una línea continua que pase por todos ellos, se tendrá la parábola pedida.

FIG. 298.



2.ª *construccion.* Fíjense en el foco F de la parábola (*Fig.* 298) y en el vértice C de una escuadra [1] los extremos de un hilo inextensible, igual en longitud al cateto mayor BC de la escuadra; aplíquese este cateto á la recta indefinida FG y el cateto menor á la directriz AD; póngase tenso el hilo por medio de un lápiz ó de un estilo que se apoye en el cateto mayor; hágase

1 La *escuadra* es una plancha de madera cortada en forma de triángulo rectángulo.

resbalar el menor AB á lo largo de una regla aplicada á la directriz AD, sin que deje de apoyarse el lápiz en el cateto mayor, y quedará descrita una rama de la parábola. Repitiendo la misma operacion por la parte inferior de la recta FG, se describirá la otra rama.

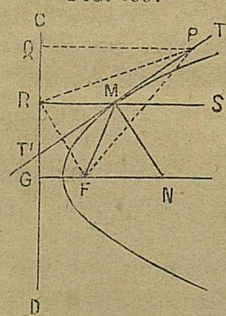
Un punto cualquiera M, determinado por este procedimiento, pertenece á la parábola: porque siendo la longitud FM+MC del hilo igual al cateto mayor BM+MC, es claro que FM=BM.

541. *Se llama* TANGENTE *á una parábola toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

Teorema. (*Fig.* 299).

La bisectriz del ángulo que forma el radio vector de un punto de la parábola con la perpendicular tirada desde dicho punto á la directriz, es tangente á la parábola.

Fig. 299.



Sea TT′ la bisectriz del ángulo FMR formado por el radio vector del punto M y la perpendicular MR á la directriz. Demostremos que todos los puntos de la TT′, á excepcion del M, están fuera de la parábola.

Trazo la recta RF. Siendo TT′ bisectriz del ángulo en el vértice del triángulo isósceles RMF, es perpendicular á RF en su punto medio; tomando un punto cualquiera P de la bisectriz, uniéndole con R y con F, y bajando la perpendicular PQ á la directriz, será PR = PF, pero PR > PQ luego PF > PQ, por consiguiente el punto P está fuera de la parábola [538, *recíproco*].

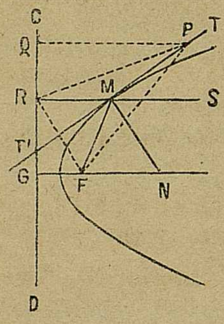
Corolario. *La bisectriz del ángulo que forma el radio vector de un punto* M *con una paralela* MS *al eje, es normal á la parábola.*

Trazando la bisectriz TT′ del ángulo FMR adyacente al FMS, las rectas TT′ y MN son perpendiculares entre sí [37], y como TT′ es tangente, MN será normal.

Problema. (*Fig.* 299).

542. *Por un punto* M *de la parábola trazar una tangente á esta curva.*

Fig. 299.



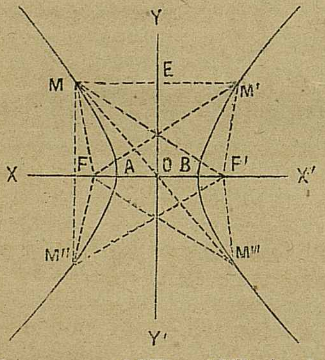
Trazo el radio vector MF y bajo la perpendicular MR á la directriz: la bisectriz TT' del ángulo FMR será la tangente pedida.

543. Se llama *paraboloide* la superficie engendrada por una parábola que gira alrededor de su eje.

Segun el principio de Física mencionado al tratar de la elipse, si en el foco de un paraboloide se coloca un manantial de luz ó de calor, los rayos emitidos, despues de reflejarse en la superficie seguirán una direccion paralela al eje.

III.—Hipérbola.

Fig. 300.



544. *La* hipérbola *es una curva plana, tal que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos fijos es constante.*

Esta diferencia constante suele representarse por $2a$.

Si M, M', M″ etc. (*Fig.* 300) son varios puntos de la hipérbola, F y F' los puntos fijos, se tiene

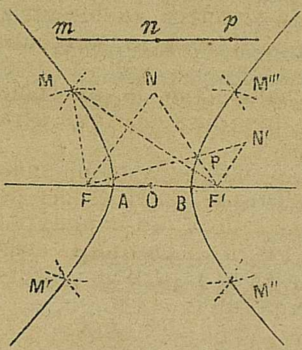
$$MF' - MF = M'F - M'F' = M''F' - M''F = \dots = 2a.$$

Los puntos fijos F y F' se llaman *focos* de la hipérbola; y las dos rectas MF' y MF tiradas desde los focos á un punto cualquiera de la curva, se llaman *radios vectores*.

Teorema. (*Fig.* 301).

545. *La diferencia entre las distancias de los focos de una hipérbola á un punto cualquiera de su plano es igual, menor ó mayor que* 2a, *segun que dicho punto esté en la hipérbola, fuera ó dentro de la misma.*

Fig. 301.



Lo primero es cierto por definicion.

Sea un punto exterior N. Tenemos

$$FN < FP + NP,$$
$$F'N = F'P + NP;$$

restando ordenadamente estas expresiones será

$$FN - F'N < FP - F'P$$

ó bien $FN - F'N < 2a$.

Sea un punto interior N'. Tenemos

$$FN' = FP + PN',$$
$$F'N' < F'P + PN';$$

restando ordenadamente será

$$FN' - F'N' > FP - F'P \quad \text{ó bien} \quad FN' - F'N' > 2a.$$

Los recíprocos son ciertos [55].

Corolario. *El lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la diferencia de sus distancias á dos puntos fijos sea constante, es una hipérbola.*

Teorema. (*Fig.* 300).

546. *La recta* XX' *que pasa por los focos de una hipérbola, y la perpendicular á ella en el punto medio* O *de la distancia* FF', *son ejes de la hipérbola.*

1.° Sea M un punto de la hipérbola. Describiendo por debajo de XX' dos arcos, cuyos centros sean F y F', y los radios FM y F'M, se determina un punto M'' que pertenece á la hipérbola, pues $M''F' - M''F = MF' - MF = 2a$; pero los puntos F y F' equidistan de M y M'', luego XX' es perpendicular á la cuerda M M' en su punto medio.

2.° Demostremos que tambien YY' es eje de la hipérbola. Haciendo centro en F y F', describo con los radios respectivos MF' y MF, por encima de XX', dos arcos que se cortan en un punto M', perteneciente á la hipérbola, porque $M'F - M'F' = MF' - MF = 2a$. Ahora, los triángulos MFF' y M'FF' son iguales; si doblamos la figura por YY', el punto F' caerá en F, la recta F'M' seguirá la direccion FM, y el punto M' caerá en M, luego los ángulos en E son iguales ó sea rectos, y además M'E = ME; por consiguiente YY' es perpendicular á MM' en su punto medio.

Observaciones.

547. 1.ª Siendo A y B puntos de la hipérbola, tenemos

$$AF' - AF = BF - BF';$$

restando AB de ambos miembros resulta

$$BF' - AF = AF - BF', \text{ de donde } 2BF' = 2AF \text{ ó } BF' = AF.$$

2.ª Considerando un punto cualquiera M de la hipérbola y el punto A, tendremos

$$MF' - MF = AF' - AF = AF' - BF' = AB.$$

548. El eje XX', ó mejor, su parte AB, se denomina *eje transverso* ó *primer eje*, y el YY', *eje no transverso* ó *segundo eje*. Los puntos A y B son los *vértices* de la hipérbola.

Las igualdades

$$BF' = AF, \quad MF' - MF = AB,$$

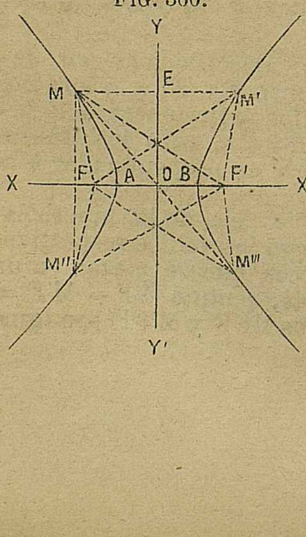
nos dicen:

1.º *Los extremos del primer eje de la hipérbola están á igual distancia de los focos respectivos.*

2.º *La diferencia constante entre los radios vectores es igual al primer eje.*

Teorema. (*Fig.* 300).

Fig. 300.



549. *El punto O en que se cortan los ejes de una hipérbola es centro de esta curva.*

Sea M un punto de la hipérbola. Uno O con M, prolongo OM, tomo OM''' = OM. Si pruebo que el punto M''' pertenece á la hipérbola, quedará demostrado el teorema.

Los triángulos OMF' y OM'''F son iguales [20], luego MF' = M'''F tambien son iguales los triángulos OMF y OM'''F', luego MF = M'''F'; por consiguiente

$$M'''F - M'''F' = MF' - MF = 2a,$$

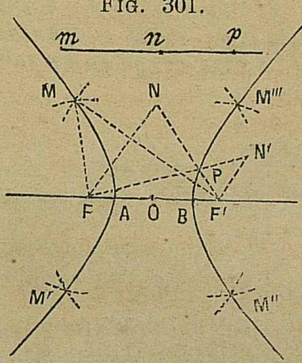
lo que demuestra que el punto M''' pertenece á la hipérbola.

550. La distancia OF del centro á cualquiera de los focos de la hipérbola, se llama *excentricidad* de esta curva.

Problema.

551. *Describir una hipérbola conociendo la diferencia* 2a *de los radios vectores y la distancia* FF' *entre los focos.*

Fig. 301.



1.ª *construccion.* Sea mn (*Fig.* 301) la diferencia $2a$ de los radios vectores. Trazo una recta indefinida FF' que pase por los focos; desde el punto medio O de la distancia FF' tomo á derecha é izquierda las longitudes $OA = OB = a$, los puntos A y B pertenecen á la hipérbola, puesto que $2a = AB$ [548, 2.º]. Para hallar otros puntos describo desde F como centro, y con un radio np mayor que FA, dos arcos, uno por encima y otro por debajo de FF'; y haciendo centro en F', con un radio $mp = 2a + np$, describo otros dos arcos que corten álos primeros: los puntos de interseccion M y M' pertenecen á la hipérbola, pues

$$MF' - MF = 2a + np - np = 2a.$$

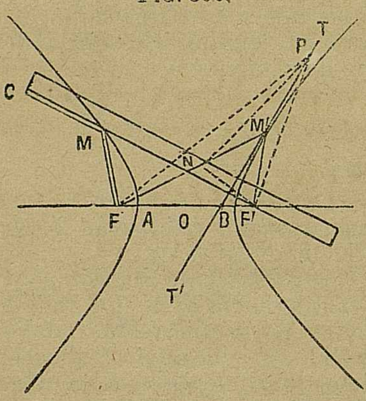
Describiendo desde F' dos arcos con el radio np, y desde F otros dos con el radio mp, se obtienen los puntos M'' y M'''.

Del mismo modo se determinarán tantos puntos como se quieran.

Escolio. La hipérbola consta de dos ramas distintas indefinidas.

2.ª *construccion.* Fíjese un extremo de un hilo inextensible y mayor que FA (*Fig.* 302) en el foco F, y el otro extremo en un punto C del borde de una regla; hágase pasar este borde por el foco F', de modo que la distancia CF' sea igual á la longitud del hilo más $2a$; póngase tenso el hilo por medio de

Fig. 302.



un lápiz ó de un estilo que se apoye en la regla, y hágase girar ésta, sin que resbale, alrededor del punto F', manteniendo siempre tenso el hilo y apoyando el lápiz en la regla: la curva así descrita será un arco de hipérbola, porque

$$MF'-MF = (CF'-CM)-(CMF-CM) = CF'-CMF = 2a.$$

552. *Se llama* TANGENTE *á una hipérbola toda recta indefinida que toca á esta curva en un solo punto.*

Teorema. (*Fig.* 302).

La bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de un punto de la hipérbola, es tangente á esta curva.

Sea TT' la bisectriz del ángulo FM'F'. Demostremos que todos los puntos de TT', á excepcion del M', están fuera de la hipérbola.

Tomo en el radio vector FM' una longitud M'N =M'F', trazo la NF', y uno un punto cualquiera P de la TT' con F, F' y N. La bisectriz TT' es perpendicular á la base NF' del triángulo isósceles M'NF' y la divide en dos partes iguales, luego PF' = PN. Ahora bien:

$$PF-PN < FN \text{ ó } PF-PF' < M'F-M'F',$$

esto es $$PF-PF' < 2a;$$

luego el punto P está fuera de la hipérbola.

Teorema. (*Fig.* 302).

553. *Por un punto* M' *de la hipérbola trazar una tangente á esta curva.*

Trazo los radios vectores del punto dado, y divido el ángulo que forman en dos partes iguales: la bisectriz TT' será la tangente pedida.

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA.

LIBRO PRIMERO.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

NOCIONES PRELIMINARES.

I.—Definiciones.

1. TRIGONOMETRÍA *es la ciencia que tiene por objeto resolver los triángulos*, esto es, *determinar numéricamente los elementos desconocidos de un triángulo, por medio de sus relaciones con otros elementos conocidos.*

Se divide la Trigonometría en *rectilínea* y *esférica*, segun que se ocupa de los triángulos rectilíneos ó de los esféricos.

2. La Geometría enseña á determinar gráficamente los elementos desconocidos de un triángulo, cuando se conocen:

1.° Un lado y dos ángulos.
2.° Dos lados y el ángulo comprendido.
3.° Los tres lados.
4.° Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

Mas las construcciones geométricas, por esmeradas que sean, dan en la práctica resultados muy poco exactos.

Las causas son: 1.ª la imposibilidad de obtener una representacion gráfica de la línea, conforme á la idea abstracta que de la misma tenemos: los trazos que con el nombre de líneas hacemos en el papel, por finos que sean, tienen siempre algun ancho y grueso, mientras que la línea no tiene más dimension que la longitud; 2.ª la imperfeccion inevitable de los instrumentos materiales que se emplean para medir las rectas y los ángulos; 3.ª el limitado alcance de nuestros sentidos.

El cálculo, como instrumento mental, no ofrece estos inconvenientes: dados los valores numéricos de tres elementos, entre ellos un lado, obtendremos los de los otros tres, mediante operaciones aritméticas, con toda exactitud, ó al menos, con cuanta aproximacion se desee, si hallamos ecuaciones que ligando entre sí los elementos de un triángulo, permitan, en todos los casos, calcular los desconocidos en funcion de los conocidos.

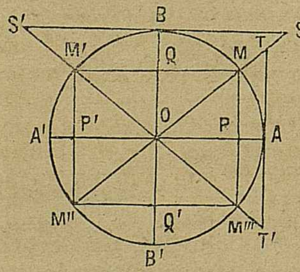
Tal es el fin especial de la Trigonometría.

Las ecuaciones que ligan directamente los lados y ángulos de un triángulo son bastante complicadas; por este motivo se emplean, para representar los ángulos facilitando su introduccion en los cálculos, ciertas razones de líneas rectas, llamadas *razones trigonométricas*, cuyas relaciones con los lados son muy sencillas, y tales que dado un ángulo, se determinan con facilidad las razones que le corresponden, y recíprocamente.

Estas razones, tienen además de la resolucion de triángulos, otras muchas aplicaciones, en las que se consideran arcos mayores que 180°, y tambien mayores que una ó varias circunferencias; por lo que consideraremos en lo sucesivo arcos de cualquiera magnitud.

Expondremos algunas nociones preliminares, antes de definir las razones trigonométricas.

Fig. 1.ª



3. Un punto que partiendo de A recorre la circunferencia O (*Fig.* 1.ª) puede moverse en dos sentidos opuestos; el ABA'B'A, que convendremos en llamar *positivo*, y el AB'A'BA que llamaremos *negativo*.[1] La primera letra de las que designen un arco representará siempre el *origen* ó punto de partida del mismo; en consecuencia, no será igual para nosotros el arco AM al MA, porque el primero está contado en el sentido positivo y el segundo en el negativo, sino que diremos

$$AM = -MA,$$

esto es: AM *igual y de direccion contraria á* MA.

1 Estos dos conceptos son relativos, no denotando otra idea que la oposicion de los sentidos en que se cuentan los arcos; podria, pues, llamarse negativo al sentido ABA'B'A, y en tal caso seria positivo el opuesto AB'A'BA.

Lo mismo: $B'M''$ es un arco negativo, $M''B'$ es positivo, luego

$$B'M'' = -M''B'.$$

Admitidos los arcos positivos y negativos, las operaciones de sumar y restar se consideran algebráicamente, es decir que *sumar* una cantidad negativa es, en realidad, restar una positiva de igual magnitud; y *restar* una cantidad negativa será lo mismo que sumar una positiva de igual magnitud.

La expresion

$$ABM' + M'B,$$

que es en la forma una suma, representa, en realidad, la diferencia

$$ABM' - BM' = AB.$$

En cambio

$$AB - M'B = AB + BM' = AM'.$$

La admision de estos convenios dará gran generalidad á las definiciones y fórmulas trigonométricas.

4. Se llaman arcos *complementarios* dos arcos cuya suma algebráica es un cuadrante positivo; y *suplementarios*, dos arcos cuya suma algebráica es media circunferencia positiva.

El complemento de AM es MB, el de ABM' es $M'B$ ó $-BM'$, el de ABM'' es $M''A'B$ ó $-BA'M''$.

El suplemento de ABM' es $M'A'$, el de ABM'' es $M''A'$ ó $-A'M''$, el de $ABA'M'''$ es $M'''B'A'$ ó $-A'B'M'''$.

5. Dadas dos rectas AA', BB' que se cortan y un punto M de su plano, las paralelas MQ, MP trazadas á dichas rectas desde M se llaman *coordenadas* de este punto con relacion á las rectas AA', BB', que son los *ejes de coordenadas*.

Una de las paralelas se llama *abscisa* y la otra *ordenada* del punto M. El eje al que son paralelas las abscisas de diferentes puntos se llama *eje de abscisas*, y el otro, al que son paralelas las ordenadas, se llama *eje de ordenadas*.

Las definiciones anteriores corresponden al caso general de formar los ejes un ángulo cualquiera.

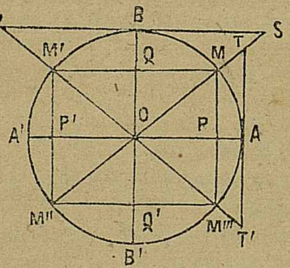
En la presente obra supondremos siempre los ejes rectangulares: en tal supuesto, *la abscisa de un punto es perpendicular al eje de ordenadas, y la ordenada es perpendicular al eje de abscisas.*

Si AA' es el eje de abscisas y BB' el de ordenadas, la abscisa MQ del punto M es perpendicular al eje BB', y la ordenada MP lo es al AA'.

La abscisa MQ es igual á OP. y la ordenada MP = OQ; de modo que pueden contarse la abscisa y ordenada en sus ejes respectivos.

Las coordenadas tienen por objeto determinar la posicion de un punto en el plano de los ejes; á fin de que esta determinacion sea completa, se considera en las coordenadas el valor absoluto y el signo, mediante los siguientes convenios:

FIG. 1.ª



1.° Las coordenadas se cuentan en sus ejes respectivos.

2.° El punto de partida ú orígen de las coordenadas es siempre el de interseccion O de los ejes.

3.° Una de las direcciones, á partir de O, del eje de abscisas y otra del de ordenadas se consideran como positivas, y las opuestas como negativas.

Así, conviniendo en que OA y OB sean los sentidos positivos, OA' y OB' serán los negativos, y tendremos, para abscisa y ordenada del punto M, + OP y + OQ; para el M', — OP', + OQ; para el M'', — OP', — OQ', y para el M''', OP, — OQ'.

Si el punto está en un eje, una coordenada es *cero*: la abscisa y ordenada del punto A son OA y 0, las del punto B son 0 y OB, las del A'. — OA' y 0, y las del B', 0 y — OB'.

Si el punto es O, sus dos coordenadas valen *cero*.

Dadas en magnitud y en signo las coordenadas de un punto, está determinada la posicion del mismo.

Tómese en el eje AA', á contar del orígen O, una longitud igual á la abscisa dada, hácia el punto A, si la abscisa es positiva, y hácia el A', si es negativa; llévese igualmente la ordenada al eje BB', desde O hácia B, si es positiva, y hácia B', si es negativa. De este modo se obtienen en los ejes dos puntos: levantando por ellos dos perpendiculares, la interseccion de éstas será el punto pedido.

Así, tomando OP y OQ iguales á la abscisa y ordenada positivas, las perpendiculares PM, QM nos dan el punto M; tomando OP' igual á la abscisa negativa y OQ igual á la ordenada positiva, las perpendiculares P'M', QM' nos dan el punto M' etc.

6. Las razones trigonométricas más importantes son cuatro: ***seno, coseno, tangente*** y ***cotangente.***

En las siguientes definiciones se toma para eje positivo de abscisas el radio que pasa por el orígen del arco, y para eje positivo de ordenadas el que pasa por el extremo del primer cuadrante positivo contado desde el orígen del arco.

SENO *de un ángulo ó de su arco correspondiente es la razon de la ordenada del extremo del arco al radio.*

COSENO *es la razon de la abscisa del extremo del arco al radio.*

TANGENTE *es la razon de la ordenada del extremo del arco á la abscisa.*

COTANGENTE *es la razon de la abscisa del extremo del arco á la ordenada.*

Llamando r al radio del círculo O (*Fig.* 1.ª), y aplicando la regla de los signos estudiada en la division algebráica, tenemos:

Para el arco AM,

$$\text{sen} = \frac{MP}{r}, \ \cos = \frac{MQ}{r}, \ \text{tg} = \frac{MP}{MQ}, \ \cot = \frac{MQ}{MP}$$

Para el arco AM',

$$\text{sen} = \frac{M'P'}{r}, \ \cos = -\frac{M'Q}{r}, \ \text{tg} = -\frac{M'P'}{M'Q}, \ \cot = -\frac{M'Q}{M'P'}.$$

Para el arco ABM'',

$$\text{sen} = -\frac{M''P'}{r}, \ \cos = -\frac{M''Q'}{r}, \ \text{tg} = \frac{M''P'}{M''Q'}, \ \cot = \frac{M''Q'}{M''P'}.$$

Para el arco ABM''',

$$\text{sen} = -\frac{M'''P}{r}, \ \cos = \frac{M'''Q'}{r}, \ \text{tg} = -\frac{M'''P}{M'''Q'}, \ \cot = -\frac{M'''Q'}{M'''P}.$$ [1]

---

1 La regla mejor, para recordar los signos de las razones trigonométricas de los arcos cuyo orígen comun es A y que terminan en uno de los cuatro cuadrantes de la circunferencia O, nos parece la siguiente:

Son positivos:
los senos, en los cuadrantes. . . . . 1.º y 2.º
las tangentes y cotangentes, en los. . 1.º y 3.º
los cosenos, en los . . . . 1.º y 4.º

Si consideramos un arco negativo BM, la direccion positiva del eje de abscisas será OB, y la direccion positiva del eje de ordenadas OA'; por consigüiente

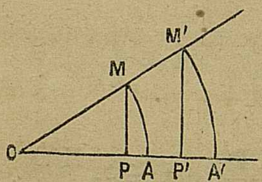
$$\text{sen} = -\frac{MQ}{r}, \ \cos = \frac{MP}{r}, \ \text{tg} = -\frac{MQ}{MP}, \ \cot = -\frac{MP}{MQ}.$$

De las definiciones anteriores se deduce que las razones trigonométricas dependen del orígen y extremo del arco; por consiguiente *dos arcos cualesquiera que tengan el mismo orígen y extremo tendrán las mismas razones trigonométricas.*

Así, las mismas razones tiene el arco positivo AM que el negativo AB'A'BM.

7. *Las razones trigonométricas de un ángulo son constantes, cualquiera que sea el radio del arco correspondiente.*

Fig. 2.



Sea O el ángulo (*Fig.* 2), AM y A'M' dos arcos correspondientes descritos con radios desiguales r y r'. Trazando las ordenadas MP y M'P' de los extremos de los arcos, se habrán formado los triángulos semejantes OMP, OM'P'; luego

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M'P'}{OM'} \text{ ó sea } \frac{MP}{r} = \frac{M'P'}{r'},$$

es decir, sen AM = sen A'M'.

Lo mismo

$$\frac{OP}{OM} = \frac{OP'}{OM'} \text{ ó sea } \frac{OP}{r} = \frac{OP'}{r'},$$

es decir, cos AM = cos A'M'.

Tambien tenemos

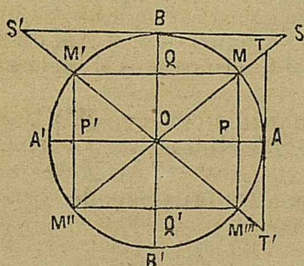
$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'}, \ \frac{OP}{MP} = \frac{OP'}{M'P'},$$

es decir tg AM = tg A'M', cot AM = cot A'M'.

Luego el teorema se verifica para los valores absolutos de las razones trigonométricas; y tambien será cierto cuando se consideren los signos, porque es claro que las direcciones de la abscisa y ordenada del extremo del arco son independientes de la magnitud del radio.

Observacion. Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado O no es necesario describir el arco correspondiente, sino que basta trazar desde un punto cualquiera M de un lado una perpendicular MP al otro lado: esta perpendicular es la ordenada del extremo de un arco correspondiente al ángulo, OP es la abscisa de dicho extremo y OM el radio; obtenidas estas tres líneas MP, OP, OM se tienen las razones del ángulo O, sin necesidad de describir el arco AM.

Fig. 1.ª



8. Si el arco AM correspondiente á un ángulo AOM (*Fig.* 1.ª) se describe con un radio igual á la unidad, ó si adoptamos para unidad lineal el radio con que está descrito el arco, será $r = 1$; luego

$$\text{sen AM} = \text{MP}, \ \cos \text{AM} = \text{MQ},$$

es decir

El seno y coseno de un arco, cuyo radio es la unidad, son iguales á la ordenada y abscisa del extremo del arco.

Tracemos por el orígen A del arco AM la tangente AT, y por el extremo B del primer cuadrante la BS: la AT es paralela á MP y BS lo es á MQ; luego los triángulos OMP, OTA son semejantes, y los OMQ, OSB tambien lo son, tendremos, pues

$$\frac{\text{PM}}{\text{OP}} = \frac{\text{AT}}{\text{OA}} = \text{AT},$$

$$\frac{\text{QM}}{\text{OQ}} = \frac{\text{BS}}{\text{OB}} = \text{BS};$$

ó sea $\qquad$ $\text{tg AM} = \text{AT}, \ \cot \text{AM} = \text{BS}.$

Segun esto,

La tangente y la cotangente de un arco, cuyo radio es la unidad, son iguales á las partes de tangentes geométricas tiradas respectivamente en el orígen del arco y en el extremo del primer cuadrante positivo, y contadas desde el punto de contacto hasta el de su encuentro con el radio prolongado que pasa por el extremo del arco.

II.—Teoremas relativos á las razones trigonométricas.

TEOREMA. *(Fig. 1.ª)*

9. *Dados dos arcos iguales y de signo contrario, los cosenos son iguales y del mismo signo, y los senos, tangentes y cotangentes son iguales y de signo contrario.*

Sea AM‴ un arco negativo, que llamaremos $-a$, y AM otro arco positivo igual en magnitud al AM‴: el arco AM deberá representarse por a.

El radio OA, que pasa por el punto medio del arco MM‴, es perpendicular á la cuerda MM‴ y la divide en dos partes iguales; luego OP es abscisa comun á los extremos M‴ y M de los arcos propuestos, y M‴P, MP son ordenadas iguales y de signo contrario; tenemos, pues

$$\cos(-a) = \frac{OP}{r}, \qquad \cos a = \frac{OP}{r},$$

luego
$$\cos(-a) = \cos a.$$

Lo mismo
$$\operatorname{sen}(-a) = -\frac{M'''P}{r}, \quad \operatorname{sen} a = \frac{MP}{r},$$

luego
$$\operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a.$$

lo que demuestra el teorema para el coseno y seno.

Además,
$$\operatorname{tg}(-a) = \frac{-M'''P}{OP}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{MP}{OP},$$

y como M‴P y MP son iguales en magnitud, resulta

$$\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a.$$

Lo mismo
$$\cot(-a) = \frac{OP}{-M'''P}, \quad \cot a = \frac{OP}{MP},$$

luego
$$\cot(-a) = -\cot a.$$

ESCOLIO. En virtud de este teorema, las razones trigonométricas de un arco negativo se pueden sustituir por las del mismo arco tomado positivamente, cambiando el signo del seno, tangente y cotangente.

Recíprocamente, las razones trigonométricas de un arco positivo pueden sustituirse por las del mismo arco tomado negativamente, cambiando los signos del seno, tangente y cotangente; es decir que

$$\cos a = \cos(-a), \quad \text{sen } a = -\text{sen}(-a),$$

$$\text{tg } a = -\text{tg}(-a), \quad \cot a = -\cot(-a);$$

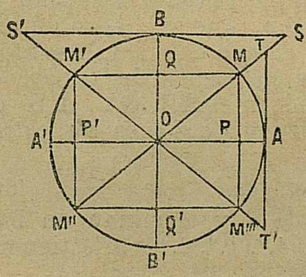
puesto que las tres últimas expresiones se obtienen cambiando los signos en las demostradas

$$\text{sen}(-a) = -\text{sen } a, \ \text{tg}(-a) = -\text{tg } a, \ \cot(-a) = -\cot a.$$

10. COROLARIO. *Si el extremo de un arco se toma por origen y el origen por extremo, los valores absolutos de las razones trigonométricas no varían, pero cambian de signo el seno, tangente y cotangente.*

Porque permutar los extremos equivale á cambiar el signo del arco, sin alterar su magnitud.

FIG. 1.ª



Tendremos, pues,

$$\text{sen MA} = -\text{sen AM} = -\frac{\text{MP}}{r},$$

$$\cos \text{MA} = \cos \text{AM} = \frac{\text{MQ}}{r},$$

$$\text{tg MA} = -\text{tg AM} = -\frac{\text{MP}}{\text{MQ}},$$

$$\cot \text{MA} = -\cot \text{AM} = -\frac{\text{MQ}}{\text{MP}}.$$

$$\text{sen MB} = -\text{sen BM} = -\left(-\frac{\text{MQ}}{r}\right) = \frac{\text{MQ}}{r},$$

$$\cos \text{MB} = \cos \text{BM} = \frac{\text{MP}}{r},$$

$$\text{tg MB} = -\text{tg BM} = -\left(-\frac{\text{MQ}}{\text{MP}}\right) = \frac{\text{MQ}}{\text{MP}}.$$

$$\cot \text{MB} = -\cot \text{BM} = -\left(-\frac{\text{MP}}{\text{MQ}}\right) = \frac{\text{MP}}{\text{MQ}}.$$

TEOREMA. (*Fig.* 1.ª)

11. *El seno y la tangente de un arco son iguales respectivamente al coseno y la cotangente del arco complementario.*

Un arco cualquiera, cuyo orígen es A y su extremo un punto X de la circunferencia O, tiene por complemento otro arco XB, que se cuenta en el mismo sentido que AX, si éste es positivo y menor que un cuadrante, y en sentido contrario en todos los demás casos.

Así ~~el complemento de AM es MB, el de ABM' es M'B, el de AM''' es M'''AB~~ etc.

Pero el coseno de XB es igual en magnitud y en signo al de BX [10]; luego siendo A y X el orígen y extremo del arco dado, podremos considerar B y X como orígen y extremo del complemento, cuando se trate de hallar el coseno del mismo.

Segun esto, los ejes positivos de abscisas y ordenadas, para el arco dado AX, serán OA y OB [6], y para el complemento serán OB y OA'; y como dichos arcos tienen el mismo extremo X, la ordenada del arco será abscisa del complemento: ~~así, la ordenada MP del extremo del arco AM es abscisa del extremo del arco BM~~; pero la ordenada partida por el radio es el seno y la abscisa partida por el radio es el coseno; luego el seno de un arco es igual en valor absoluto al coseno del complemento. Tambien son iguales en signo, porque los senos de los arcos que parten de A y terminan en los cuadrantes AB, BA', A'B' ó B'A, es decir en el 1.º, 2.º, 3.º ó 4.º, tienen los signos respectivos [6, *nota al pié*].

más, más, ménos, ménos,

y los cosenos de los arcos que parten de B y terminan en los mismos cuadrantes, que son ahora el 4.º, 1.º, 2.º y 3.º, tienen tambien los signos respectivos

más, más, ménos, ménos.

En virtud de lo que acabamos de demostrar, tenemos

$$\text{sen}\ a = \cos\ (90^\circ - a),\ \text{sen}\ (90^\circ - a) = \cos\ a;$$

escrita la última igualdad en la forma

$$\cos\ a = \text{sen}\ (90^\circ - a),$$

nos dice que *el coseno de un arco es igual al seno de su complemento.*

Llamando x é y á la abscisa y ordenada del extremo del arco a, x' é y' á la abscisa y ordenada del extremo del complemento $90 - a$, tenemos

$$\frac{y}{r} = \frac{x'}{r}, \quad \frac{x}{r} = \frac{y'}{r},$$

luego, dividiendo,

$$\frac{y}{x} = \frac{x'}{y'}, \qquad \text{es decir,} \qquad \operatorname{tg} a = \cot(90° - a);$$

Tenemos, segun esto,

$$\operatorname{tg}(90° - a) = \cot a, \text{ ó } \cot a = \operatorname{tg}(90° - a),$$

luego *la cotangente de un arco es igual á la tangente del complemento.*

TEOREMA. (*Fig.* 1.ª)

12. *Los senos de dos arcos suplementarios son iguales, y los cosenos, tangentes y cotangentes son iguales y de signo contrario.*

Un arco cualquiera, cuyo orígen es A y su extremo un punto X de la circunferencia O, tiene por suplemento otro arco XA′, que se cuenta en el mismo sentido que AX, si éste es positivo y menor que media circunferencia, y en sentido contrario en todos los demás casos.

~~Así, el suplemento de AM es MA′, el de ABM‴ es M‴A′, el de AM‴ es M‴ABA′.~~

Pero el seno de XA′ es igual y de signo contrario al de A′X, y el coseno de XA′ es igual en magnitud y en signo al de A′X [10]; luego siendo A y X el orígen y extremo del arco dado, podremos considerar A′ y X como orígen y extremo del suplemento, pero cambiando el signo al seno de éste.

Por lo tanto, para determinar las coordenadas del extremo del arco dado se deberán considerar OA y OB como direcciones positivas de los ejes de abscisas y ordenadas; y para el arco suplementario estas direcciones positivas serán OA′ y OB′; siendo AA′ el eje de abscisas y BB′ el de ordenadas para los dos arcos, y teniendo éstos el mismo extremo, es claro que la ordenada y abscisa del extremo del arco serán ordenada y abscisa del extremo del suplemento, pero las razones de estas rectas al radio son los senos y cosenos; luego el seno y coseno de un arco son iguales en valor absoluto al seno y coseno del suplemento.

En cuanto á los signos, tenemos que los senos de los arcos que parten de A y terminan en los cuadrantes AB, BA′, A′B′ ó B′A, es decir en el 1.º, 2.º, 3.º y 4.º, tienen los signos respectivos

más, más, ménos, ménos,

y los senos de los arcos que parten de A′ y terminan en los mismos cuadrantes, que son ahora el 3.º, 4.º, 1.º y 2.º, tienen los signos respectivos

ménos, ménos, más, más;

pero como estos signos deben cambiarse, por haber permutado los extremos del suplemento, resulta, por fin, que los senos de los arcos suplementarios tienen igual signo.

Los cosenos de los arcos que parten de A, terminando en

AB, BA′, A′B′ ó B′A,

tienen los signos

más, ménos, ménos, más,

y los que parten de A′ tienen los signos

ménos, más, más, ménos;

luego los cosenos de los arcos suplementarios tienen signos contrarios.

Llamemos x é y á la abscisa y ordenada del extremo de un arco a, x' é y' á la abscisa y ordenada del extremo del suplemento $180^\circ - a$; tenemos

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r}, \quad \frac{x}{r} = -\frac{x'}{r},$$

luego $$\frac{y}{x} = -\frac{y'}{x'}, \quad \frac{x}{y} = -\frac{x'}{y'},$$

es decir, $\operatorname{tg} a = -\operatorname{tg}(180^\circ - a)$, $\cot a = -\cot(180^\circ - a)$.

Teorema. (*Fig.* 1.ª).

13. 1.º *Dos arcos del mismo origen, cuyos extremos están diametralmente opuestos, tienen sus senos y cosenos iguales y de signo contrario.* 2.º *Dos arcos del mismo extremo, cuyos orígenes están diametralmente opuestos, tienen tambien sus senos y cosenos iguales y de signo contrario.*

1.º Sean dos arcos BM″ y BM.

El suplemento de BM″ es MB, luego sen BM″ = sen MB, pero sen MB = — sen BM; luego

sen BM″ = — sen BM.

Para los cosenos tenemos,

$$\cos BM'' = -\cos MB,\ \cos MB = \cos BM,$$

luego $$\cos BM'' = -\cos BM.$$

2.° Sean dos arcos M″A y MA.

El suplemento de M″A es AM, luego sen M″A = sen AM, pero sen AM = — sen MA, luego

$$\operatorname{sen} M''A = -\operatorname{sen} MA.$$

Para los cosenos:

$$\cos M''A = -\cos AM, \text{ pero } \cos AM = \cos MA;$$

luego $$\cos M''A = -\cos MA.$$

14. En virtud de los teoremas demostrados en los números 9, 11 y 12, tenemos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - a) = \cos a,\quad \cos(90^\circ - a) = \operatorname{sen} a,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - a) = \cot a,\quad \cot(90^\circ - a) = \operatorname{tg} a,$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a) = \cos(-a) = \cos a,\ \cos(90^\circ + a) = \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ + a) = -\cot(-a) = -\cot a,\ \cot(90^\circ + a) = \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a.$$

$$\operatorname{sen}(180^\circ - a) = \operatorname{sen} a,\ \cos(180^\circ - a) = -\cos a,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - a) = -\operatorname{tg} a,\ \cot(180^\circ - a) = -\cot a,$$

$$\operatorname{sen}(180^\circ + a) = \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a,$$

$$\cos(180^\circ + a) = -\cos(-a) = -\cos a,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + a) = -\operatorname{tg}(-a) = \operatorname{tg} a,$$

$$\cot(180^\circ + a) = -\cot(-a) = \cot a.$$

III.—Variaciones de las razones trigonométricas, y valores de las de algunos arcos particulares.

15. *El valor absoluto de la ordenada del extremo de un arco es mitad de la cuerda de otro arco duplo del propuesto.*

Sea el arco AM (*Fig.* 1.ª). Prolonguemos la ordenada MP hasta que encuentre á la circunferencia en M‴. Siendo el radio OA perpendicular á la cuerda MM‴, tenemos $MP = \frac{1}{2}MM'''$, y como MM‴ es la cuerda del arco MAM‴ duplo de AM, queda demostrada la proposicion.

16. Si tenemos un arco *cero*, esto es, un arco que empiece y

termine en el mismo punto A, la ordenada y abscisa del extremo serán 0 y r; luego

$$\operatorname{sen} 0 = 0,\ \cos 0 = 1,\ \operatorname{tg} 0 = 0.\ \cot 0 = \infty.$$

Si el arco aumenta desde cero, es evidente que aumenta la ordenada de su extremo y disminuye la abscisa; luego aumentarán el seno y la tangente y disminuirán el coseno y cotangente, teniendo en el primer cuadrante signo *más* las cuatro razones.

Si el arco AM vale 30°, la ordenada MP es mitad de la cuerda del arco de 60°, y como esta cuerda vale r, [*Geom.* 226] la ordenada es $\frac{r}{2}$; luego

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}.$$

La abscisa del arco de 30° es la ordenada del arco de 60°, y ésta es la mitad de la cuerda del arco duplo 120°, ó sea del lado del triángulo equilátero inscripto, que vale $r\sqrt{3}$ [*Geom.* 227], luego la abscisa de 30°, ó sea la ordenada de 60°, es $\frac{r\sqrt{3}}{2}$, por consiguiente

$$\cos 30^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dividiendo la ordenada del arco de 30° por la abscisa, tendremos

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{r\sqrt{3}}{2}},\quad \text{ó}\quad \operatorname{tg} 30^\circ = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}:$$

Dividiendo la abscisa por la ordenada, será

$$\cot 30^\circ = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}},\quad \text{ó}\quad \cot 30^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Si el arco AM vale 45°, la ordenada del extremo M es la mitad de la cuerda de 90°, ó sea del lado del cuadrado inscripto: este lado vale $r\sqrt{2}$ [*Geom.* 225], luego la ordenada de 45°, igual á la abscisa de su complemento 45°, es $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto

$$\text{sen } 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dividiendo ordenada por abscisa, será

$$\text{tg } 45^\circ = \cot 45^\circ = 1.$$

Si el arco es de 90°, la ordenada y abscisa del extremo B son r y 0; luego

$$\text{sen } 90^\circ = 1,\ \cos 90^\circ = 0,\ \text{tg } 90^\circ = \infty.\ \cot 90^\circ = 0.$$

Cuando el arco crece entre 90 y 180 grados, disminuye la ordenada y crece la abscisa; luego los valores absolutos del seno y de la tangente disminuyen, mientras que los del coseno y cotangente aumentan, pasando todas estas razones por los mismos valores que tuvieron en el primer cuadrante, pero en órden inverso.

En cuanto á los signos, el seno es positivo y las demás razones son negativas.

Conocidas ya las razones trigonométricas de los arcos de 30, 60 y 45 grados, se obtendrán fácilmente las de los arcos suplementarios; así

$$\text{sen } 150^\circ = \text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{tg } 150^\circ = -\text{tg } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \cot 150^\circ = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{tg } 120^\circ = -\text{tg } 60^\circ = -\sqrt{3},\ \cot 120^\circ = -\cot 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{tg } 135^\circ = -\text{tg } 45^\circ = -1,\ \cot 135^\circ = -\cot 45^\circ = -1.$$

Si el arco es de 180°, la ordenada y abscisa de su extremo son, en valor absoluto, 0 y r; luego

$$\text{sen } 180° = 0, \ \cos 180° = 1, \ \text{tg } 180° = 0, \ \cot 180° = \infty.$$

Cuando el arco crece entre 180 y 270 grados, aumentan los valores absolutos del seno y tangente, y disminuyen los del coseno y cotangente; el seno y coseno son negativos, la tangente y cotangente positivas. Al llegar á 270°, la ordenada y abscisa del extremo B′ son, en valor absoluto, r y 0; luego

$$\text{sen } 270 = 1, \ \cos 270 = 0, \ \text{tg } 270 = \infty, \ \cot 270 = 0.$$

Creciendo el arco entre 270 y 360 grados disminuyen los valores absolutos del seno y tangente, y aumentan los del coseno y cotangente. Al llegar al límite se tiene

$$\text{sen } 360° = 0, \ \cos 360° = 1, \ \text{tg } 360° = 0, \ \cot 360° = \infty.$$

17. Segun acabamos de ver, el mayor valor absoluto del seno ó coseno de un arco es la unidad, y el menor es cero; el mayor valor absoluto de la tangente ó cotangente es ∞ y el menor es cero.

IV.—Arcos correspondientes á una misma razon trigonométrica.

Problema. (*Fig.* 1.ª).

18. *Hallar la expresion algebráica de los arcos que tienen igual seno.*

Sea m un seno dado menor que la unidad [17].

Con un radio cualquiera r describo una circunferencia O, trazo dos diámetros rectangulares AA′ y BB′, elijo un extremo cualquiera A para orígen de los arcos, y una direccion ABA′B′ para los arcos positivos; OA y OB serán, segun esto, las direcciones positivas del eje de abcisas y del de ordenadas. Llamando y á la ordenada del extremo de un arco cuyo seno sea m, tenemos $\frac{y}{r} = m$, de donde $y = rm$.

Tomo en el eje de ordenadas, á partir de O, una longitud igual á rm [1], hácia B si el seno dado es positivo, y hácia B′ si es negativo; supongamos el primer caso, y sea OQ la longitud igual á rm, que será menor que el radio por ser m menor que la unidad: trazo por Q una paralela al eje de abcisas: es evidente que los arcos AM y ABM′, determinados de este modo, tienen por seno $\frac{y}{r} = m$.

Si á cada arco AM, ABM′ se suma ó resta un número cualquiera de circunferencias, los arcos resultantes tendrán los mismos extremos que AM y ABM′ respectivamente; por consiguiente m será el seno de todos ellos.

Llamando a al arco AM, será

$$ABM' = ABA' - M'A' = ABA' - AM = \pi r - a;$$

por consiguiente todos los arcos que tienen igual senó positivo están comprendidos en las expresiones algebráicas

$$2\pi rn + a,\ 2\pi rn + \pi r - a = (2n + 1)\pi r - a,$$

siendo n un número entero, positivo ó negativo.

Si el radio es 1, las expresiones anteriores serán

$$2\pi n + a, \quad (2n + 1)\pi - a.$$

Si el seno dado fuese negativo, tomaríamos OQ′ $= rm$, trazaríamos M″M‴ paralela á AA′, y tendríamos dos arcos ABA′M″, ABA′B′M‴ cuyos senos serian $\frac{y}{r} = m$. Llamando a al arco ABA′AM″, es decir, al menor de los arcos positivos cuyo seno es m, las expresiones generales de todos los arcos

---

1 Comunmente m, como razon de dos rectas, será un número abstracto; en tal caso rm será el producto del valor numérico del radio por el número abstracto m, y la ordenada y estará expresada en las unidades en que esté expresado el radio. Si el seno m es, por ejemplo, $\frac{3}{5}$, y elegimos un radio igual á 20 centímetros, será

$$y = 20 \times \frac{3}{5} = 12 \text{ centímetros}$$

Si la razon m no está expresada numéricamente y, por el contrario, se nos dá por medio de dos rectas a y b, es decir $m = \frac{a}{b}$, elegiremos para radio otra recta, y como de $\frac{a}{b} = \frac{y}{r}$, se deduce $\frac{b}{a} = \frac{r}{y}$, y será una cuarta proporcional á las rectas b, a y r.

que tienen un mismo seno negativo serán

$$2\pi rn + a, \quad (2n+1)\pi r - a,$$

iguales á las del caso anterior.

Escolio. Segun acabamos de ver, á un seno dado menor que la unidad corresponden infinitos arcos; luego el seno no determina el arco.

En la resolucion de triángulos, los ángulos son menores que dos rectos y los arcos correspondientes menores que 180°; pero áun en este caso un mismo seno $\frac{OQ}{r}$ corresponde á dos ángulos suplementarios AOM y AOM', por consiguiente para que el seno determine el ángulo será necesario saber de antemano si éste es agudo ú obtuso.

Problema. (*Fig.* 1.ª).

19. *Hallar la expresion algebráica de los arcos que tienen igual coseno.*

Sea m un coseno dado, menor que la unidad [17]. Llamando x á la abscisa del extremo de un arco cuyo coseno sea m, tenemos $\frac{x}{r} = m$, de donde $x = rm$.

Tomo en el eje de abscisas, á partir de O, una longitud igual á rm, hácia A si el coseno dado es positivo, y hácia A', si es negativo; supongamos el primer caso, y sea OP la longitud igual á rm, que será menor que el radio, por ser m menor que la unidad; trazo por P una paralela al eje de ordenadas: es evidente que los arcos AM y ABM''', determinados de este modo, tienen por coseno $\frac{x}{r} = m$.

Si á cada arco AM, ABM''' se suma ó resta un número cualquiera de circunferencias, los arcos resultantes tendrán los mismos extremos, por consiguiente m será el coseno de todos ellos.

Llamando a al arco AM, el ABM''' será $2\pi r - a$; por consiguiente todos los arcos que tienen igual coseno positivo estarán comprendidos en las expresiones

$$2\pi rn + a, \quad 2\pi rn + (2\pi r - a) = 2\pi r(n+1) - a,$$

que pueden refundirse en la

$$2\pi rn \pm a,$$

donde n es un número entero, positivo ó negativo.

Si el coseno dado fuese negativo procederíamos de un modo análogo, y llamando a al menor ABM′ de los arcos positivos cuyo coseno es m, obtendríamos las mismas expresiones generales del caso anterior.

Escolio. Vemos, pues, que á un coseno dado, menor que la unidad, corresponden infinitos arcos; luego el coseno no determina el arco; sin embargo en la resolucion de triángulos, como los arcos son menores que 180°, el coseno determina el ángulo, que será agudo si el coseno es positivo, y obtuso, si el coseno es negativo.

Problema. (*Fig.* 1.ª).

20. *Hallar la expresion algebráica de los arcos que tienen igual tangente.*

Sea m una tangente dada, que puede tener un valor cualquiera [17]. Si suponemos que AM sea un arco cuya tangente es m, tendremos

$$\operatorname{tg} AM = \frac{PM}{OP} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{r} = m,$$

luego $AT = rm$.

Trazo por el orígen A de los arcos una tangente indefinida, tomo en ella, á partir de A, una longitud igual á rm, hácia arriba si m es positiva, y hácia abajo, si m es negativa: supongamos el primer caso, y sea AT la longitud igual á rm; uno el extremo T con el centro O, prolongando la recta TO hasta que encuentre á la circunferencia en M″: es evidente que los arcos AM, ABM″, determinados de este modo, tienen por tangente m.

Si á cada arco AM, ABM″ se suma ó resta un número cualquiera de circunferencias, los arcos resultantes tendrán los mismos extremos, y por consiguiente la misma tangente m.

Llamemos a al arco AM, el ABM″ será $\pi r + a$; luego los arcos cuya tangente es m estarán comprendidos en las expresiones

$$2\pi rn + a,\ 2\pi rn + (\pi r + a) = (2n + 1)\pi r + a\ ;$$

el término $2\pi rn$ representa un número par de semicircunferencias, y el $(2n + 1)\pi r$ un número impar de ellas, luego las dos expresiones pueden reducirse á ésta

$$\pi rn + a,$$

siendo n entero, positivo ó negativo.

La misma expresion obtendríamos si la tangente fuese negativa.

Escolio. Á una tangente dada, cualquiera que sea su valor, corresponden, segun acaba de verse, infinitos arcos; luego la tangente no determina el arco; pero si éste es menor que 180°, estará determinado, siendo el ángulo correspondiente agudo ú obtuso, segun que la tangente sea positiva ó negativa.

Teorema. (*Fig. 1.ª*).

21. *Hallar la expresion algebráica de los arcos que tienen igual cotangente.*

Como en el problema anterior, se vé que hay que tomar en la tangente indefinida SS′, trazada por el extremo del primer cuadrante, una longitud rn, hácia la derecha ó hácia la izquierda segun que la cotangente sea positiva ó negativa; uniendo el extremo de dicha longitud con el centro se determinan dos primeros arcos AM y ABM″, que representados por a y $\pi r + a$ dan la misma expresion general, obtenida en el caso de las tangentes;

$$\pi rn + a$$

La cotangente solo determina el arco en el caso de ser éste menor que 180°.

CAPÍTULO SEGUNDO.

FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

I.—Relaciones entre las razones trigonométricas de un arco.

22. Dado un arco cualquiera a positivo ó negativo, que no sea múltiplo del cuadrante, es decir, que no termine en ninguno de los puntos A, B, A′, B′, la ordenada y la abscisa del extremo del arco formarán con el radio tirado á dicho extremo un triángulo rectángulo. Llamando y á la ordenada, x á la abscisa y r al radio, tendremos, en virtud del teorema de Pitágoras, cualesquiera que sean los signos de x é y,

$$y^2 + x^2 = r^2, \quad \text{de donde} \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = 1,$$

ó bien

$$\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad [1].$$

Si el arco es múltiplo del cuadrante, una de las razones trigonométricas seno ó coseno vale 0 y la otra 1, luego la suma de sus cuadrados será 1. La fórmula [1] es, por lo tanto, enteramente general.

De las igualdades

$$\frac{y}{r} = \operatorname{sen} a, \quad \frac{x}{r} = \cos a,$$

se deduce, por division,

$$\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad \frac{x}{y} = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a},$$

ó bien

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \quad [2], \quad \cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} \quad [3].$$

Multiplicando las relaciones [2] y [3] se obtiene

$$\operatorname{tg} a . \cot a = 1. \qquad [4].$$

23. Las relaciones

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad [1]$$

$$\text{tg}\ a = \frac{\text{sen}\ a}{\cos a} \qquad [2]$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\text{sen}\ a} \qquad [3]$$

contienen las cuatro razones trigonométricas del arco a; por consiguiente, si conocemos una de ellas, podremos hallar los valores de las otras tres, pues dispondremos de un sistema de tres ecuaciones con igual número de incógnitas.

Ejemplos.

1.° *Dado el seno de un arco, hallar las demás razones trigonométricas.*

De la ecuacion [1] se deduce

$$\cos a = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 a} \qquad [5];$$

sustituyendo este valor en las ecuaciones [2] y [3], resulta

$$\text{tg}\ a = \frac{\text{sen}\ a}{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}, \quad \cot a = \frac{\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}}{\text{sen}\ a}.$$

2.° *Dado el coseno de un arco, hallar las demás razones trigonométricas.*

Despejando sen a en la ecuacion [1], y siguiendo una marcha análoga á la del ejemplo anterior, será

$$\text{sen}\ a = \pm\sqrt{1-\cos^2 a}$$

$$\text{tg}\ a = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}.$$

3.° *Dada la tangente de un arco, hallar las demás razones trigonométricas.*

Despejando sen a en la ecuacion [2], y sustituyendo su valor en la [1], hallaríamos fácilmente el coseno de a en funcion de la tangente, y despues el seno. Tambien podria seguirse cualquiera otro de los métodos generales enseñados en Álgebra; pero es más sencillo el siguiente procedimiento particular.

Elevando al cuadrado la ecuacion [2] se tiene

$$\operatorname{tg}^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a} \quad \text{ó} \quad \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1} = \frac{\operatorname{sen}^2 a}{\cos^2 a};$$

de esta igualdad se deducen otras dos [*Arit.* 195]

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}, \quad 1+\operatorname{tg}^2 a = \frac{\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a}{\cos^2 a};$$

sustituyendo $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a$ por 1, y despejando será

$$\operatorname{sen}^2 a = \frac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}, \quad \cos^2 a = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a},$$

de donde $\operatorname{sen} a = \pm \dfrac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$ [6], $\cos a = \pm \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$ [7].

De la ecuacion [4] $\operatorname{tg} a \cot a = 1$, se deduce

$$\cot a = \frac{1}{\operatorname{tg} a}.$$

Las fórmulas [6] y [7] dan para el seno y para el coseno del arco *a* dos valores iguales y de signo contrario, y así debia suceder; porque si conocemos la tangente de un arco AM, ésta pertenece tambien al ABM″, cuyo extremo M″ está diametralmente opuesto al M; luego la fórmula [6] deberá dar á la vez los senos, iguales y de signo contrario, de dichos arcos, y la fórmula [7], los cosenos, tambien iguales y de signo contrario.

Si además de la tangente dada se conoce el cuadrante en que termina el arco *a*, la razon tendrá un solo valor, y de los dobles signos se tomarán los convenientes, segun el cuadrante en que termine el arco.

Si termina en el primer cuadrante positivo, todas sus razones trigonométricas son positivas, y deberemos tomar en ambas fórmulas el signo *más;* si el arco termina en el segundo cuadrante positivo, el seno es positivo, pero el coseno y la tangente son negativas, luego tomaremos en ambas fórmulas el signo *ménos*, y de este modo el seno de *a* será positivo y el coseno negativo.

Cualquiera que sea el cuadrante, los signos de las dos fórmulas deben corresponderse, es decir, que tomaremos en las dos el signo *más* ó en las dos el signo *ménos*.

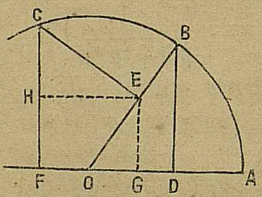
El problema: dada la cotangente de un arco, hallar las demás razones trigonométricas, se resuelve del mismo modo que el anterior, partiendo de la ecuacion [3].

II.—Relaciones entre las razones trigonométricas de varios arcos.

Problema.

24. *Dados los senos y cosenos de dos arcos, hallar los senos y cosenos de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Fig. 3.



Primera solucion. (*Fig.* 3). Sean dos arcos AB $= a$, BC $= b$ positivos y menores que un cuadrante: la suma de ellos es el arco AC $= a + b$. Sea r el radio.

Conocemos

$$\operatorname{sen} a = \frac{BD}{r}, \quad \cos a = \frac{OD}{r},$$
$$\operatorname{sen} b = \frac{CE}{r}, \quad \cos b = \frac{OE}{r},$$

y vamos á hallar primeramente

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{CF}{r} \quad \text{y} \quad \cos(a+b) = -\frac{OF}{r},$$

en funcion de las cuatro razones trigonométricas conocidas. Despues determinaremos sen $(a - b)$ y cos $(a - b)$.

Tiro desde el punto E una perpendicular EG y una paralela EH al radio OA: segun esta construccion será HF $=$ EG, FG $=$ HE.

Ahora bien,

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \frac{HF+CH}{r} = \frac{EG+CH}{r} \\ \cos(a+b) &= \frac{OG-FG}{r} = \frac{OG-HE}{r} \end{aligned}\right\} \quad [a].$$

Si hallamos los valores de EG, OG, CH y HE en funcion de los senos y cosenos de a y b, quedará resuelto el problema.

Los triángulos OEG y OBD son semejantes, luego

$$\frac{EG}{OE} = \frac{BD}{OB}, \quad \frac{OG}{OE} = \frac{OD}{OB},$$

ó bien $\dfrac{\text{EG}}{r\cos b} = \operatorname{sen} a$, $\dfrac{\text{OG}}{r\cos b} = \cos a$;

de estas igualdades se deduce

$$\text{EG} = r \operatorname{sen} a \cos b, \quad \text{OG} = r \cos a \cos b.$$

Tambien los triángulos CHE y OBD son semejantes [*Geom.* 174], luego

$$\frac{\text{CH}}{\text{CE}} = \frac{\text{OD}}{\text{OB}}, \quad \frac{\text{HE}}{\text{CE}} = \frac{\text{BD}}{\text{OB}},$$

ó bien $\dfrac{\text{CH}}{r\operatorname{sen} b} = \cos a$, $\dfrac{\text{HE}}{r\operatorname{sen} b} = \operatorname{sen} a$;

de estas igualdades se deduce

$$\text{CH} = r \cos a \operatorname{sen} b, \quad \text{HE} = r \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo en las ecuaciones [*a*] las líneas por sus valores, resulta

$$\operatorname{sen}(a+b) = \frac{r \operatorname{sen} a \cos b + r \cos a \operatorname{sen} b}{r},$$

$$\cos(a+b) = \frac{r \cos a \cos b - r \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b;}{r};$$

ó bien

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \qquad [8],$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [9].$$

La suma AC de los arcos dados es en nuestra figura mayor que un cuadrante, y el coseno $\dfrac{\text{OF}}{r}$ lleva, por tanto, signo *ménos*; si la suma $a + b$ fuese menor que un cuadrante, su coseno seria positivo, pero igual tambien á $\dfrac{\text{OG}-\text{FG}}{r}$, por lo que en nada se alteraria la marcha del razonamiento ni las fórmulas finales, como es fácil comprobar.

Estas fórmulas se han hallado en el supuesto de ser los arcos a y b positivos, y menor cada uno que un cuadrante. Demostremos, ahora, que son generales.

Supongamos que las fórmulas [8] y [9] sean ciertas para dos arcos positivos de una magnitud cualquiera, y demostremos que seguirán siendo ciertas si uno de los arcos, por ejemplo el a, aumenta en 90 grados.

Tenemos [11 y 9]

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a) = \cos(-a) = \cos a$$

$$\cos(90^\circ + a) = \operatorname{sen}(-a) = -\operatorname{sen} a;$$

luego

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a + b) = \cos(a + b),$$

$$\cos(90^\circ + a + b) = -\operatorname{sen}(a + b).$$

Además hemos supuesto que siendo a y b positivos y de una magnitud cualquiera, se verifica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b,$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Sustituyendo en estas fórmulas sen $(a + b)$, cos $(a + b)$ sen a y cos a por los valores hallados anteriormente, se tiene

$$\cos(90^\circ + a + b) = \cos(90^\circ + a) \cos b - \operatorname{sen}(90^\circ + a) \operatorname{sen} b,$$

$$\operatorname{sen}(90^\circ + a + b) = \operatorname{sen}(90^\circ + a) \cos b + \cos(90^\circ + a) \operatorname{sen} b,$$

donde vemos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas cuando en lugar de un arco a se pone $90^\circ + a$.

Como se han hallado suponiendo que a y b son menores que un cuadrante, podremos decir ahora que son ciertas para un valor de a mayor que 90° y menor que 180° y uno de b menor que 90°; por consiguiente tambien serán ciertas cuando a esté comprendido entre 180° y 270° siendo b menor que 90°, y así sucesivamente. Luego las fórmulas son ciertas para cualquier valor positivo de a y para los valores de b menores que 90°.

Aplicando al arco b lo dicho respecto del a, deduciríamos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas para cualesquiera valores positivos de a y b.

Supongamos, ahora, que las fórmulas sean ciertas para dos arcos cualesquiera, y demostremos que tambien lo serán si uno de ellos, por ejemplo el b, disminuye en 90°.

Tenemos [9 y 11]

$$\operatorname{sen}(b - 90^\circ) = -\operatorname{sen}(90^\circ - b) = -\cos b,$$

$$\cos(b - 90^\circ) = \cos(90^\circ - b) = \operatorname{sen} b;$$

luego

$$\operatorname{sen}(a + b - 90^\circ) = -\cos(a + b),$$

$$\cos(a + b - 90^\circ) = \operatorname{sen}(a + b).$$

Además hemos supuesto que siendo a y b arcos cualesquiera, se verifica

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b.$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b,$$

Sustituyendo en estas fórmulas sen $(a+b)$, cos $(a+b)$, sen b y cos b por los valores hallados anteriormente, será

$$\cos(a+b-90^\circ) = -\operatorname{sen} a \operatorname{sen}(b-90^\circ) + \cos a \cos(b-90^\circ)$$
$$\operatorname{sen}(a+b-90^\circ) = \cos a \operatorname{sen}(b-90^\circ) + \operatorname{sen} a \cos(b-90^\circ),$$

donde vemos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas cuando se resta 90° de uno de los arcos.

Como las fórmulas son ciertas para todo arco positivo a y para otro b positivo y menor que un cuadrante, podemos decir ahora que son ciertas para un valor positivo cualquiera de a y un valor negativo de b menor que 90°; por consiguiente tambien serán ciertas para un arco positivo cualquiera a y un arco negativo comprendido entre $-90°$ y $-180°$, y así sucesivamente. Luego las fórmulas son ciertas para todo valor positivo de a y para todo valor negativo de b.

Aplicando al arco a lo dicho respecto del b, deduciríamos que las fórmulas [8] y [9] son ciertas para todo valor negativo de a y b.

Cambiando el signo de b en las ecuaciones [8] y [9], se tiene

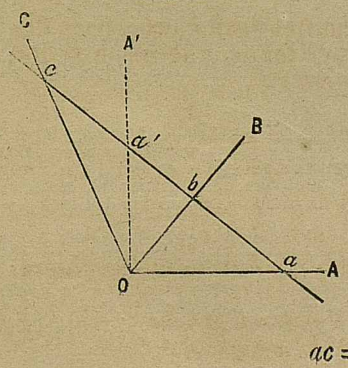
$$\operatorname{sen}\big(a+(-b)\big) = \operatorname{sen} a \cos(-b) + \cos a \operatorname{sen}(-b),$$

$$\cos\big(a+(-b)\big) = \cos a \cos(-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen}(-b),$$

ó
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b \qquad [10]$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad [11].$$

Estas fórmulas son tan generales como las [8] y [9], porque se derivan de ellas.

Fig. 4.



25. Segunda solucion. Sean AOB, BOC (*Fig.* 4) dos ángulos y AOC la suma de ellos. Convengamos en representar los ángulos en O por las dos letras de sus lados, poniendo primero la correspondiente al orígen del ángulo; y admitamos, con respecto á los signos de los ángulos, los mismos convenios hechos para los signos de los arcos [3].

Cortando las tres concurrentes en O, OA, OB, OC por una transversal abc, tenemos

$$ac = ab + bc,$$

de donde $$1 = \frac{ab}{ac} + \frac{bc}{ac} \qquad [a].$$

Segun el corolario del número 92 [*Geometría*] será [1]

$$\frac{ab}{ac} : \frac{Ob}{Oc} = \frac{\text{sen AB}}{\text{sen AC}}, \qquad \frac{cb}{ca} : \frac{Ob}{Oa} = \frac{\text{sen CB}}{\text{sen CA}};$$

si suponemos que la transversal abc es perpendicular á OB, tendremos

$$\frac{Ob}{Oc} = \cos \text{BC}, \qquad \frac{Ob}{Oa} = \cos \text{BA},$$

luego $$\frac{ab}{ac} = \frac{\cos \text{BC sen AB}}{\text{sen AC}}, \qquad \frac{cb}{ca} = \frac{\cos \text{BA sen CB}}{\text{sen CA}};$$

sustituyendo en [a], se halla

$$1 = \frac{\cos \text{BC sen AB}}{\text{sen AC}} + \frac{\cos \text{BA sen BC}}{\text{sen AC}},$$

de donde $$\text{sen AC} = \text{sen AB} \cos \text{BC} + \cos \text{BA sen BC} \qquad [b].$$

La ecuacion [b] es enteramente general, porque la igualdad

$$ac = ab + bc,$$

de que hemos partido para obtenerla, se verifica cualquiera que sea la posicion relativa de los puntos a, b, c, teniendo en cuenta los convenios del número 87 de la Geometría [2].

Tambien es general la expresion, relativa á los ángulos,

$$\text{AC} = \text{AB} + \text{BC},$$

segun los convenios del número 3, luego si hacemos AB $= a$, BC $= b$, será AC $= a + b$, y la fórmula [b] se convierte en

$$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a \;\text{sen}\, b.$$

Si alguno de los ángulos a y b ó los dos son negativos, y queremos poner el signo de manifiesto, tendremos presente el

---

1 Segun el corolario citado en el texto, el segundo miembro de la primera igualdad debiera ser la razon de las distancias del orígen a de los segmentos á las otras dos concurrentes; pero es claro que la razon de estas distancias es igual á la razon de los senos de los ángulos AB y AC, porque dividiendo aquellas por Oa, á fin de convertirlas en senos (7, *observacion*), su razon no se altera. Lo mismo decimos respecto de la segunda igualdad.

2 En la demostracion del texto los puntos a b, c son las intersecciones de la transversal con las rectas OA, OB, OC. Puede suceder que alguna de éstas tenga que prolongarse en sentido contrario al suyo para que encuentre á la transversal; entonces resultará tambien la ecuacion (b), si bien para los ángulos que forme dicha prolongacion con las otras rectas; pero se vé fácilmente, considerando un caso cualquiera, que cambiando tales ángulos por los propuestos, con arreglo al teorema del número 13, la fórmula no se altera.

teorema del número 9. Sea, por ejemplo, negativo el ángulo b; teniendo en cuenta que $\cos(-b) = \cos b$, $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$, será

$$\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b.$$

Considerando las tres concurrentes OA′, OB y OC, la primera de las cuales es perpendicular á OA, tendremos

$$\operatorname{sen} A'C = \operatorname{sen} A'B \cos BC + \cos BA' \operatorname{sen} BC,$$

pero $\operatorname{sen} A'C = -\operatorname{sen} CA' = -\cos AC$, $\operatorname{sen} A'B = -\operatorname{sen} BA' = -\cos AB$, $\cos BA' = \operatorname{sen} AB$; luego

$$-\cos AC = -\cos AB \cos BC + \operatorname{sen} AB \operatorname{sen} BC$$

ó

$$\cos AC = \cos AB \cos BC - \operatorname{sen} AB \operatorname{sen} BC,$$

que puede escribirse así

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$

Si b es negativo, como $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$, será

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b.$$ [1]

Problema.

25. *Dadas las tangentes de dos arcos, hallar las tangentes de la suma y diferencia de dichos arcos.*

Si los arcos son a y b, tenemos

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Dividiendo los dos términos de la segunda fraccion por $\cos a \cos b$, será

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \cos b} + \dfrac{\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}{\dfrac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} - \dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}},$$

ó

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

---

[1] Esta nueva demostracion es una prueba más de lo muy fecundas que son las proposiciones de nuestra teoría de concurrentes cortadas por concurrentes (*Geom. pág.* 45). Es más sencilla que la dada por el sabio matemático francés M. Chasles en el número 28 de su clásico «*Traité de Géométrie superieure*» (Paris, 1852), á pesar de tener el mismo punto de partida, que es en ambas la igualdad evidente

$$ac = ab + bc.$$

Cambiando en esta fórmula el signo de b, resulta

$$\operatorname{tg}\left(a+(-b)\right)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(-b)},$$

ó
$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

Si suponemos $a=45^{\circ}$, será $\operatorname{tg} a=1$ [16], y las fórmulas halladas se convierten en

$$\operatorname{tg}(45^{\circ}+b)=\frac{1+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b},\quad \operatorname{tg}(45^{\circ}-b)=\frac{1-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b}.$$

Teorema.

27. *Dado el seno, el coseno y la tangente de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente del arco duplo.*

Si en las fórmulas que dan sen $(a+b)$, cos $(a+b)$ y tg $(a+b)$, suponemos $b=a$, tendremos

$$\operatorname{sen}(a+a)=\operatorname{sen} a \cos a+\cos a \operatorname{sen} a,$$

$$\cos(a+a)=\cos a \cos a-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} a$$

$$\operatorname{tg}(a+a)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} a},$$

ó bien
$$\operatorname{sen} 2a=2 \operatorname{sen} a \cos a,$$

$$\cos 2a=\cos^{2} a-\operatorname{sen}^{2} a,$$

$$\operatorname{tg} 2a=\frac{2 \operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^{2} a}.$$

Representando $2a$ por A, será $a=\frac{1}{2}$ A y estas tres fórmulas se convierten en:

$$\operatorname{sen} A=2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A,$$

$$\cos A = \cos^2 \frac{1}{2} A - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} A}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A}.$$

PROBLEMA.

28. *Dado el coseno de un arco, hallar el seno, el coseno y la tangente de su mitad.*

En el problema anterior hemos hallado

$$\cos A = \cos^2 \frac{1}{2} A - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A,$$

además [22] $$1 = \cos^2 \frac{1}{2} A + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A.$$

Sumando estas ecuaciones resulta

$$1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{1}{2} A,$$

y restándolas se obtiene

$$1 - \cos A = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A.$$

Despejando $\cos \frac{1}{2} A$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A$, tendremos

$$\cos \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}, \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}.$$

Dividiendo la segunda fórmula por la primera será

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$$

De estos dobles signos se tomarán los convenientes, segun el cuadrante en que termine el arco $\frac{1}{2}$ A. Si, por ejemplo, el arco A es positivo y menor que 180°, su mitad es menor que 90°, y las razones trigonométricas de $\frac{1}{2}$ A llevarán el signo *más*. Si se halla comprendido entre 180° y 360°, $\frac{1}{2}$ A estará entre 90° y 180°, luego el seno deberá llevar signo *más*, pero el coseno y la tangente llevarán signo *ménos*.

Escolio. Puede hallarse la tangente de la mitad de un arco en funcion del seno y coseno del arco entero, por medio de una fórmula muy sencilla.

Tenemos, en efecto,

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \pm\sqrt{\frac{(1-\cos A)(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1+\cos A)}} =$$

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2 A}{(1+\cos A)^2}} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2 A}{(1+\cos A)^2}} = \pm\frac{\operatorname{sen} A}{1+\cos A}.$$

Problema.

29. *Dado el seno de un arco, hallar el seno y coseno de su mitad.*

Tenemos [27]

$$\operatorname{sen} A = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A,$$

además

$$1 = \cos^2\frac{1}{2}A + \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}A.$$

Sumando estas ecuaciones resulta

$$1 + \operatorname{sen} A = \left(\cos\frac{1}{2}A + \operatorname{sen}\frac{1}{2}A\right)^2;$$

y restando de la segunda la primera, se obtiene

$$1 - \operatorname{sen} A = \left(\cos\frac{1}{2}A - \operatorname{sen}\frac{1}{2}A\right)^2.$$

Extrayendo la raiz cuadrada será

$$\cos\frac{1}{2}A + \operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1+\operatorname{sen} A}$$

$$\cos\frac{1}{2}A - \operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen} A};$$

de estas fórmulas se deduce [*Alg.* 4, 2.º]

$$\cos\frac{1}{2}A = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A}$$

$$\operatorname{sen}\frac{1}{2}A = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{sen} A} \mp \frac{1}{2}\sqrt{1-\operatorname{sen} A}.$$

Segun estas fórmulas, $\operatorname{sen}\frac{1}{2}A$ y $\cos\frac{1}{2}A$ tienen cuatro valores; pero si conocemos el cuadrante en que termina el arco A, el seno y el coseno de $\frac{1}{2}A$ tendrán un solo valor.

Si, por ejemplo, el arco A es positivo y menor que un cuadrante, será $\frac{1}{2}$ A $< 45^\circ$, luego sen A, sen $\frac{1}{2}$ A y cos $\frac{1}{2}$ A son positivos, y como cos $\frac{1}{2}$ A $>$ sen $\frac{1}{2}$ A deberán tomarse en ambas fórmulas los signos superiores. Si A es mayor que un cuadrante y menor que dos, $\frac{1}{2}$ A será mayor que 45° y menor que 90°, luego sen A, sen $\frac{1}{2}$ A y cos $\frac{1}{2}$ A son positivos, y como sen $\frac{1}{2}$ A $>$ cos $\frac{1}{2}$ A, deberá tomarse el signo superior en el primer radical de cada fórmula y el inferior en el segundo radical.

III.—Trasformacion de ciertas expresiones en otras calculables por logaritmos.

Problema.

30. *Convertir en productos la suma y la diferencia de dos senos ó de dos cosenos.*

Tenemos las fórmulas

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a \cos b + \cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a \cos b - \cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

Sumando y restando la primera y segunda, y despues la tercera y cuarta, resulta

$$\text{sen}\,(a+b) + \text{sen}\,(a-b) = 2\,\text{sen}\,a \cos b$$
$$\text{sen}\,(a+b) - \text{sen}\,(a-b) = 2 \cos a\,\text{sen}\,b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\,\text{sen}\,a\,\text{sen}\,b.$$

Representando la suma $a+b$ por A y la diferencia $a-b$ por B, será $a = \frac{A+B}{2}$, $b = \frac{A-B}{2}$, y las cuatro últimas fórmulas se convierten en las siguientes:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad [12]$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \quad [13]$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B) \quad [14]$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B) \quad [15].$$

Por medio de estas fórmulas se calcula fácilmente el logaritmo de la suma y el de la diferencia de dos senos ó de dos cosenos, lo que sin ellas saria bastante trabajoso, porque generalmente no se conocen las razones trigonométricas de los arcos, sino los logaritmos de las mismas.

Si tuviéramos la suma ó diferencia de un seno y un coseno, por ejemplo $\operatorname{sen} A + \cos B$, sustituiríamos $\cos B$ por $\operatorname{sen}(90^\circ - B)$, y podria aplicarse ya la fórmula 12.

Es fácil hacer calculable por logaritmos la suma ó diferencia de dos tangentes. Tenemos, en efecto,

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b} = \frac{\operatorname{sen}(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

31. Vamos á trasformar la expresion $x = a \pm b$ en otra calculable fácilmente por logaritmos, suponiendo que a y b son números absolutos, y que $a > b$ en el caso $x = a - b$.

1°. La expresion $x = a + b$

se trasforma en $x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$;

cualquiera que sea el valor de $\frac{b}{a}$, existen infinitos arcos cuya tangente comun es $\sqrt{\frac{b}{a}}$ [20,*escolio*]: llamemos φ á uno de ellos, es decir, supongamos

$$\sqrt{\frac{b}{a}} = \operatorname{tg} \varphi \quad \text{ó} \quad \frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

y será

$$x = a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a : \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

de la fórmula [7] número 23 se deduce

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}=\cos^2\varphi,$$

luego
$$x=\frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

2.° La expresion $\varphi=a-b$

se trasforma en
$$x=a\left(1-\frac{b}{a}\right);$$

siendo $\frac{b}{a}<1$, y por tanto $\sqrt{\frac{b}{a}}<1$, existen infinitos arco cuyo seno comun es $\sqrt{\frac{b}{a}}$ [18, *escolio*]: llamemos φ á uno de ellos, esto es,

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\operatorname{sen}\varphi \quad \text{ó} \quad \frac{b}{a}=\operatorname{sen}^2\varphi$$

y será
$$x=a\,(1-\operatorname{sen}^2\varphi)=a\cos^2\varphi.$$

Las dos expresiones obtenidas contienen un arco auxiliar φ, que se calcula de antemano por medio de la ecuacion $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}^2\varphi$ en el primer caso, y en el segundo por medio de $\frac{b}{a}=\operatorname{sen}^2\varphi$. Se emplean en este cálculo las tablas de logaritmos, cuyo uso estudiaremos luégo, las que dan el menor de los infinitos valores de φ.

32 Propongámonos hacer calculable por logaritmos la expresion

$$x=m\operatorname{sen}a+n\cos a.$$

Podríamos seguir el método general expuesto en el número anterior, pero es preferible el siguiente:.

Tenemos
$$x=m\left(\operatorname{sen}a+\frac{n}{m}\cos a\right),$$

hagamos
$$\frac{n}{m}=\operatorname{tg}\varphi,$$

y será
$$x=m\,(\operatorname{sen}a+\operatorname{tg}\varphi\cos a)$$

ó
$$x=\frac{m}{\cos\varphi}(\operatorname{sen}a\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\cos a)=\frac{m}{\cos\varphi}\operatorname{sen}(a+\varphi).$$

33. Dividiendo cada una de las fórmulas [12], [13], [14] y [15] por cada una de las siguientes, resulta

$$\frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\text{sen A} - \text{sen B}} = \text{tg}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \cot\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})$$

ó $$\frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\text{sen A} - \text{sen B}} = \frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{tg}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}$$

$$\frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\cos\text{A} + \cos\text{B}} = \text{tg}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})$$

$$\frac{\text{sen A} + \text{sen B}}{\cos\text{A} - \cos\text{B}} = -\cot\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})$$

$$\frac{\text{sen A} - \text{sen B}}{\cos\text{A} + \cos\text{B}} = \text{tg}\,\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})$$

$$\frac{\text{sen A} - \text{sen B}}{\cos\text{A} - \cos\text{B}} = -\cot\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})$$

$$\frac{\cos\text{A} + \cos\text{B}}{\cos\text{A} - \cos\text{B}} = -\cot\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \cot\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B}).$$

La primera de estas fórmulas es muy importante; traducida al lenguaje vulgar dice:

La suma de los senos de dos arcos partida por su diferencia, es igual á la tangente de la semisuma de dichos arcos partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos.

CAPÍTULO TERCERO.

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

I.—Construccion de las tablas trigonométricas.

34. Llamamos tablas trigonométricas á la reunion de todos los arcos comprendidos entre 0 y 90°, que crecen de minuto en minuto, de diez en diez segundos ó de segundo en segundo, y de los valores numéricos de sus correspondientes razones trigonométricas.

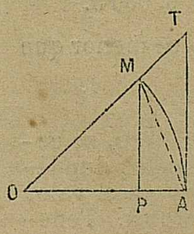
Propongámonos exponer un procedimiento elemental por el que podrian calcularse las razones trigonométricas de los arcos que crecen de minuto en minuto.

A este fin demostraremos dos proposiciones.

TEOREMA. (*Fig.* 5).

35. *Todo arco positivo y menor que un cuadrante, descrito con un radio igual á la unidad lineal, es mayor que su seno y menor que su tangente.*

FIG. 5.



Sea el arco AM $= a$. Su seno es MP y su tangente AT [8]. El arco AM es mayor que su cuerda, y ésta, como oblicua á OA, es mayor que el seno MP, luego con mayor razon será

$$a > \text{sen}\, a.$$

El área del sector OAM es menor que la del triángulo OAT, esto es,

$$arc.\ \text{AM} \times \frac{\text{OA}}{2} < \text{AT} \times \frac{\text{OA}}{2},$$

dividiendo los miembros de esta desigualdad por $\frac{\text{OA}}{2}$, resulta

$$a < \text{tg}\, a.$$

TEOREMA.

36. *La diferencia entre un arco menor que un cuadrante, descrito con un radio igual á la unidad lineal, y su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

Acabamos de ver que

$$\frac{1}{2}a < \text{tg}\,\frac{1}{2}a, \quad \text{ó} \quad \frac{1}{2}a < \frac{\text{sen}\,\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a};$$

multiplicando ambos miembros de la segunda desigualdad por $2\cos^2\frac{1}{2}a$, y recordando que $2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a = \text{sen}\,a$, resulta

$$a\cos^2\frac{1}{2}a < \text{sen}\,a, \quad \text{ó} \quad a\left(1-\text{sen}^2\frac{1}{2}a\right) < \text{sen}\,a,$$

de donde $$a - \text{sen}\,a < a\,\text{sen}^2\frac{1}{2}a.$$

Si $\text{sen}\,\frac{1}{2}a$ se sustituye por una cantidad mayor $\frac{1}{2}a$, la anterior desigualdad subsistirá, pues se habrá aumentado el segundo miembro, luego

$$a - \text{sen}\,a < \frac{a^3}{4}.$$

37. Calculemos ahora el seno del arco 1′, esto es, el seno del arco menor de las tablas.

Siendo $r = 1$, la longitud de la semicircunferencia, ó sea del arco de 180°, es π, luego

$$arc.\ 180^\circ = 3,141\,592\,653\,589\ldots$$

de donde

$$arc.\ 1' = \frac{\pi}{180.\,60} = 0,000\,290\,888\,208\ldots < 0,000\,3.$$

Pero la diferencia entre el arco de 1′ y su seno es menor que

$$\frac{1}{4}(0,000\,3)^3 < 0,000\,000\,000\,007,$$

luego, si tomamos para seno de 1′ la longitud del arco, se cometerá un error por exceso menor que 7 unidades del duodécimo órden decimal, y como la cifra de este órden en el valor del arco es un 8, las once primeras cifras serán exactas. Tenemos, pues,

$$\text{sen}\,1' = 0,000\,290\,888\,20\ldots$$

El coseno de 1′ se halla por la fórmula

$$\cos 1' = \sqrt{1-\text{sen}^2\,1'}.$$

Para hallar el seno y el coseno de 2′, emplearemos las fórmulas del número 27, que aplicadas á este caso dan

$$\text{sen}\,2' = 2\,\text{sen}\,1'\cos 1'$$
$$\cos 2' = \cos^2 1' - \text{sen}^2\,1'.$$

Haciendo $a = 2'$, $b = 1'$, las fórmulas [8] y [9] del número 24 dan

$$\operatorname{sen} 3' = \operatorname{sen} 2' \cos 1' + \cos 2' \operatorname{sen} 1'$$
$$\cos 3' = \cos 2' \cos 1' - \operatorname{sen} 2' \operatorname{sen} 1'.$$

Haciendo $a = 3'$, $b = 1'$, las mismas fórmulas dan el seno y el coseno de $4'$, y así sucesivamente.

Pueden hallarse los senos y cosenos por un método bastante más breve que el anterior. Tenemos las fórmulas [30]

$$\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \operatorname{sen} a \cos b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b;$$

despejando $\operatorname{sen}(a+b)$ y $\cos(a+b)$, y haciendo $b = 1' =$ será

$$\operatorname{sen}(a+1') = 2 \operatorname{sen} a \cos 1' - \operatorname{sen}(a-1')$$
$$\cos(a+1') = 2 \cos a \cos 1' - \cos(a-1').$$

Haciendo en estas fórmulas sucesivamente $a = 1'$, $= 2$, $= 3'$. . . . , se obtendrá

$$\operatorname{sen} 2' = 2 \operatorname{sen} 1' \cos 1'$$
$$\cos 2' = 2 \cos^2 1' - 1$$
$$\operatorname{sen} 3' = 2 \operatorname{sen} 2' \cos 1' - \operatorname{sen} 1'$$
$$\cos 3' = 2 \cos 2' \cos 1' - \cos 1'$$

. . . .

Una vez calculados los senos y cosenos, se determinan las tangentes y cotangentes por las fórmulas

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}.$$

Debemos advertir que solo se calculan las razones trigonométricas de los arcos comprendidos entre 0 y 45°, porque las razones de un arco mayor que 45° grados y menor que 90° son iguales á otras razones del arco complementario, que están ya calculadas; y las de arcos mayores que un cuadrante son iguales en valor absoluto á las de otro arco menor que 90°.

Disponiendo en columnas verticales los arcos desde 0 hasta 90°, y á la derecha en otras columnas el seno, tangente, coseno y cotangente de cada uno de ellos, se tienen unas tablas trigonométricas *naturales*, llamadas así porque dan directamente las razones trigonométricas de los arcos. En la práctica se usan otras tablas que, en lugar de las razones trigonométricas, contienen los logaritmos ordinarios de las mismas. Estas tablas, llamadas *artificiales*, son las que hemos de emplear en la resolucion de triángulos.

Escolio. El método que hemos expuesto solo sirve para demostrar la posibilidad de construir unas tablas trigonométricas: en las Matemáticas superiores se estudian otros muchos más breves.

II.-Disposicion y uso de las tablas trigonométricas.

38. Las tablas trigonométricas de Vazquez Queipo contienen los logaritmos, con seis cifras decimales, de los senos, tangentes, cosenos y cotangentes de todos los arcos del primer cuadrante compuestos de grados y minutos.

Si el arco es menor que 45° los grados se leen en la parte superior de cada plana, y los minutos en las columnas verticales, señaladas arriba y abajo con el signo ′, que hay á la izquierda de cada llana: la llana izquierda contiene, en órden descendente, los minutos desde 0 hasta 30, y la derecha continúa hasta 60. Si el arco es mayor que 45, los grados se leen en la parte inferior de cada plana, los minutos en las columnas verticales, señaladas con el signo ′, que se encuentran á la derecha de cada llana: la llana derecha contiene, en órden ascendente, los minutos desde 0 hasta 30, y la izquierda continúa hasta 60.

Los logaritmos de las razones trigonométricas se encuentran en las cuatro columnas encabezadas con las palabras Seno, Tangt., Cotangt., Coseno., frente al número de minutos del arco dado. Se observará, sin duda, que los nombres puestos al pié de estas columnas son diferentes de los puestos á la cabeza, correspondiendo al seno ó tangente leido arriba, el coseno ó cotangente, y al contrario; y que dos arcos, cuyos minutos estén en la misma línea horizontal y los grados á la cabeza y pié de la misma llana, valen juntos 90°. Esto consiste en que siendo el seno y tangente de un arco iguales al coseno y cotangente de su complemento, una misma columna, la primera, por ejemplo, sirve para hallar el logaritmo seno de un arco menor que 45° grados y á la vez el logaritmo coseno del arco complementario.

Hay además otras columnas, 1″, y unas tablitas al márgen, de cuyo uso nos ocuparemos oportunamente.

Problema.

39. *Dado un ángulo, hallar el logaritmo de su seno, tangente, coseno ó cotangente.*

Comprendida la disposicion de las tablas, es fácil encontrar en ellas el logaritmo de una razon trigonométrica cuando el arco solo contiene grados y minutos.

Así $\log \operatorname{sen} 26^\circ\ 17' = \overline{1},\ 646218$ [1]

$\log \operatorname{tg}\ 57^\circ\ 39' = 0,\ 198325.$

Debemos advertir que los logaritmos de los senos y cosenos tienen característica negativa, porque estas razones son menores que la unidad, por consiguiente sus logaritmos tienen que ser menores que cero; los logaritmos de las tangentes son positivos si el arco es mayor que 45°, y negativos si es menor, pues $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, y los de las cotangentes son negativos en el primer caso y positivos en el segundo.

40. Supongamos, ahora, que el ángulo dado tenga segundos, y distingamos dos casos: 1.° que el ángulo esté comprendido entre 4° y 86°, ámbos inclusive; 2.° que el ángulo sea menor que 4° ó mayor que 86°.

PRIMER CASO. *El ángulo dado está comprendido entre* 4° y 86°, *ámbos inclusive.*

Propongámonos hallar el logaritmo seno de 35° 43′ 28″.

Prescindamos, por el momento, de los segundos, y tendremos

$$\log \operatorname{sen}\ 35^\circ\ 43' = \overline{1},766247.$$

Si el arco aumenta, su seno aumenta tambien, y lo mismo su logaritmo seno; necesitamos, pues, averiguar qué aumento experimentará el logaritmo seno de 35° 43′ cuando el arco aumente en 28″. Para esto se admite que *las diferencias entre los logaritmos de las razones trigonométricas son proporcionales á las diferencias entre sus arcos*, de suerte que siendo

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{sen}\ 35^\circ 44' = \overline{1},\ 766423 \\ \log \operatorname{sen}\ 35^\circ 43' = \overline{1},\ 766247 \\ \hline 176 \end{array}$$

hay entre los logaritmos una diferencia de 176 unidades del último órden, correspondiente á 1′ de diferencia entre los arcos; ahora bien, si á 1′ ó 60″ corresponde la diferencia 176, ¿qué diferencia corresponderá á 28″? Segun el principio enunciado será

$$\frac{60}{28} = \frac{176}{x}, \text{ de donde } x = \frac{176 \times 28}{60} = 82,$$

1 La característica $\overline{1}$ no está escrita, pero se supone repetida la del logaritmo anterior más inmediato que la tenga.

luego

$$\log \operatorname{sen} 35^\circ 43' 28'' = \bar{1}, 766247 + 0, 0000\,82 = \bar{1}, 766329.$$

Este es el método más generalmente seguido: para facilitarle, los constructores colocan las diferencias al lado de los logaritmos; pero en las tablas que nosotros empleamos se encuentra en columnas, señaladas 1″, la *parte proporcional* que debe añadirse al logaritmo de los grados y minutos por cada segundo que tenga el arco [1], de modo que multiplicando la parte proporcional por el número de segundos, queda resuelta la cuestion. Así tendremos

$$\begin{array}{rr} \log \operatorname{sen} 35^\circ 43' = & \bar{1}, 766247 \\ \text{Parte proporcional } 2,\ 93 \times 28 = & 82 \\ \hline \log \operatorname{sen} 35^\circ 43' 28'' = & \bar{1}, 766329 \end{array}$$

Determinemos el logaritmo cotangente de 48° 12′ 25″.

$$\begin{array}{rr} \text{Log} \cot 48^\circ 12' = & \bar{1}, 951388 \\ 4, 24 \times 25 = & 106 \\ \hline \log \cot 48^\circ 12' 25'' = & \bar{1}, 951282 \end{array}$$

Hemos restado 106, porque aumentando el arco disminuye la cotangente.

Segun acabamos de ver, *para hallar el logaritmo de cualquiera de las razones trigonométricas de un arco que tiene segundos, se halla en las tablas el logaritmo de los grados y minutos, se multiplica la parte proporcional correspondiente por el número de segundos, y el producto se añade al logaritmo hallado si se trata de un seno ó tangente, y se resta si se trata de un coseno ó cotangente.*

41. El producto de la parte proporcional por el número de segundos se hallará con más rapidez usando unas tablitas auxiliares, colocadas al márgen en la última edicion, que contienen los productos de las partes proporcionales por los números 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40 y 50. En cuanto á los productos por 1, 2, 3, 4 y 5 se obtienen separando de los productos por 10, 20, 30, 40 y 50 una cifra de la derecha.

---

[1] La parte proporcional correspondiente á las tangentes y cotangentes es comun. Se comprende que así debe suceder, porque siendo $\operatorname{tg} a \cot a = 1$, $\operatorname{tg} b \cot b = 1$, será $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\cot b}{\cot a}$, de donde

$$\log \operatorname{tg} a - \log \operatorname{tg} b = \log \cot b - \log \cot a,$$

lo que demuestra que la diferencia entre los logaritmos tangentes de dos arcos es igual á la diferencia entre los logaritmos cotangentes.

Vamos á determinar, usando estas tablitas, el logaritmo tangente de 68° 34′ 45″.

$$\begin{array}{lr} \log\ tg\ 68^\circ\ 34' = & 0{,}406086 \\ \text{Parte proporc. } 6,\ 20 \times 40 = & 248 \\ \text{Id. } \quad 6,\ 20 \times \ 5 = & 31 \\ \hline \log\ tg\ 68^\circ\ 34'\ 45'' = & 0{,}406365 \end{array}$$

42. SEGUNDO CASO: *El ángulo dado es menor que 4° ó mayor que 86°.*

Vamos á hallar el log sen de 2° 15′ 28″.

Redúzcase este arco á segundos [1], y dará 8128″; búsquese en las tablas de los números el logaritmo de 8128, que es 3,909984; súmese este logaritmo con el $\bar{6}$, 685463 cuyas tres últimas cifras se encuentran enfrente de 2° 15′ en una columnita situada á la derecha de los senos, y las cuatro primeras en la cabeza de dicha columnita: la suma $\bar{2}$, 595447 es el logaritmo seno del arco dado. [2]

El logaritmo tangente se halla de igual manera, solo que se usa la columnita situada á la izquierda de las tangentes [3], en lugar de la situada á la derecha de los senos.

Para hallar el logaritmo coseno, obsérvese que en los tres primeros grados la mayor diferencia entre dos logaritmos cosenos consecutivos es 9 unidades del último órden, de modo que la disminucion correspondiente á los segundos del arco puede calcularse mentalmente, recordando el principio de proporcionalidad enunciado en el número 40. Así, para hallar el logaritmo coseno de 3° 20′ 15″ tomaremos el de 3° 20′, que es

---

1 Esta reduccion se hará con gran rapidez empleando las tablas XX y XXI, que contienen los múltiplos de 6 y los de 36. La segunda sirve para reducir grados á segundos, añadiendo dos ceros al producto de los grados por 36, lo que equivale á multiplicar por 3600: y la primera reduce los minutos á segundos, añadiendo un cero al producto de los minutos por 6.

2 Se funda este método en que los senos de arcos menores que 4° pueden considerarse, sin error sensible, proporcionales á los mismos arcos; así

$$\frac{\text{sen } 2^\circ\ 15'\ 28''}{\text{sen } 2^\circ\ 15'} = \frac{2^\circ\ 15'\ 28''}{2^\circ\ 15'} = \frac{8128}{8100};$$

de donde $\quad \log \text{sen } 2^\circ\ 15'\ 28'' = \log 8128 + (\log \text{sen } 2^\circ\ 15' + \text{comp. } \log 8100)$;

donde vemos que para hallar el log sen del arco dado hay que sumar el logaritmo de los 8128″ que tiene el arco con la cantidad encerrada en el paréntesis, la que ha sido calculada por el autor de las tablas para cada arco compuesto de grados y minutos, menor que 4°. Puede verse efectivamente que

$$\log \text{sen } 2^\circ\ 15' + \text{comp. } \log 8100 = \bar{6}{,}685463.$$

3 Cuando las tres cifras de esta columnita van seguidas de un asterisco *, se tomará $\bar{6}$, 686 en lugar del $\bar{6}$, 685 que encabeza la columna.

$\bar{1}$. 999265, observaremos que la diferencia entre este logaritmo y el siguiente es 8 unidades, que corresponden á una diferencia de 60″ en los arcos, luego á los 15″ del arco propuesto corresponderán 2 unidades del último órden, por tanto el logaritmo pedido será $\bar{1}$, 999263.

Los demás casos que pueden ocurrir se reducen fácilmente á uno de los anteriores; puesto que el seno, coseno ó cotangente de un arco mayor que 86° es igual respectivamente al coseno, seno ó tangente de su complemento, que será menor que 4.° Además siendo tg a cot $a = 1$ será log tg a + log cot $a = 0$, donde vemos que el logaritmo cotangente de un arco es el complemento del logaritmo tangente; por tanto para hallar el logaritmo cotangente de un arco menor que 4° se hallará el logaritmo tangente del mismo arco, y se tomará el complemento de este logaritmo. Por último, para hallar el logaritmo tangente de un arco mayor que 86° se hallará el logaritmo tangente de su arco complementario, y se tomará el complemento de dicho logaritmo.

Estas reglas, tan fáciles de olvidar, serán casi innecesarias si se tiene muy presente que el *logaritmo de cualquiera razon trigonométrica de un arco es igual al logaritmo de la razon contraria del arco complementario, y que el logaritmo tangente de un arco y el logaritmo cotangente del mismo son números complementarios.*

Ejemplos.

1.° Log sen 86° 20′ 15″. Hallando el log cos del complemento se obtiene $\bar{1}$, 999112.

2.° Log cos 88° 40′24″, 8. Hallando el log sen del complemento se obtiene $\bar{2}$.364528.

3.° Log cot 2° 52′ 59″, 3. El logaritmo tangente de este arco es $\bar{2}$, 702105. Tomando su complemento resulta 1, 297895.

4.° Log tg 86° 36′ 38″, 8. El log tg del complemento es $\bar{2}$, 772482; tomando el complemento de este logaritmo resulta 1, 227518.

Problema.

43. *Dado el logaritmo de un seno, tangente, coseno ó cotangente, hallar el ángulo á que corresponde.*

Si el logaritmo dado está contenido en las tablas, es fácil encontrarle, teniendo presente que cuando se recorren las columnas encabezadas con las palabras seno ó tangente desde el principio hácia el fin de las tablas, los logaritmos de dichas razones van aumentando, y que este aumento continúa si se retrocede hácia el principio de las tablas, pero leyendo las palabras seno y tangente no ya en la cabeza, sinó al pié de cada columna. Por el contrario, los cosenos y cotangentes disminuyen cuando se leen estas palabras en la parte superior de las columnas y se avanza hácia el fin de la tabla, y siguen disminuyendo si se retrocede leyendo dichas palabras en la parte inferior.

Una vez hallado el logaritmo, si el nombre de la razon trigonométrica está á la cabeza de la columna, los grados del arco se leerán en la parte superior de la plana y los minutos en la primera columna de la izquierda, enfrente del logaritmo; pero si el nombre de la razon está al pié de la columna, los grados se leerán en la parte inferior y los minutos en la última columna de la derecha.

Sea, por ejemplo, log sen A $= \overline{1}, 924328$.

Recorridas las columnas descendentes de los senos, el mayor logaritmo que se encuentra $\overline{1}, 849485$, correspondiente á 45°, es menor que el dado, por consiguiente debemos recorrer las ascendentes, leyendo seno al pié. De este modo se encuentra el logaritmo dado, que corresponde á 57° 9′.

Sea log tg A $= 0, 394683$.

Siendo el logaritmo positivo, el arco será mayor que 45°, luego deberemos empezar por las columnas ascendentes que tienen al pié la palabra tangente. Así se halla A $=$ 68° 3′.

44. Supongamos ahora que el logaritmo dado no esté contenido exactamente en las tablas, sino entre dos consecutivos, y distingamos dos casos: 1.° que el logaritmo dado corresponda á una de las cuatro primeras planas; 2.° que corresponda á una de las siguientes.

PRIMER CASO. *El logaritmo dado corresponde á una de las cuatro primeras planas.*

Sea log sen A $= \overline{2}, 756423$.

Búsquese el logaritmo seno menor que más se aproxime al dado, que es $\overline{2}, 755747$; como se halla contenido en una de las cuatro primeras planas, tómese el logaritmo $\overline{6}, 685340$ que le corresponde en la columnita auxiliar de los senos, y réstese del logaritmo dado; considerando la diferencia 4, 071083 como un logaritmo, búsquese el número correspondiente: este número, que es 11778, 3, expresa los segundos del arco A. Reducido á complejo de grados, minutos y segundos [1], resulta $A = 3^{\circ}$ $16' \, 18'', 3$.

De igual manera se procederia si se nos diera el logaritmo de una tangente, pero entonces emplearíamos la columnita auxiliar situada á la izquierda de estas razones.

Si tenemos el logaritmo coseno de un ángulo menor que 4°, buscaremos en las tablas un logaritmo coseno *mayor* que el dado y el más próximo posible, anotando los grados y minutos á que corresponda. Los segundos se hallarán fácilmente recordando el principio de proporcionalidad del número 40, y deberán añadirse á los grados y minutos, porque habiendo tomado un logaritmo coseno mayor que el dado, el arco correspondiente es menor que el pedido.

Sea, por ejemplo, $\log \cos A = \overline{1}, 999422$.

El inmediato mayor es $\overline{1}, 999424$ y corresponde á $2^{\circ} \, 57'$; los logaritmos consecutivos que comprenden al dado presentan una diferencia de 6 unidades del último órden, correspondiente á $60''$, por tanto á 2 unidades corresponden $20''$. Será, pues, $A = 2^{\circ} \, 57' \, 20''$.

Si el arco dado por su logaritmo seno, coseno ó cotangente es mayor que 86°, el problema se reducirá á uno de los anteriores operando sobre la razon trigonométrica contraria á la dada, que corresponderá á un arco menor que 4°, y tomando despues el complemento del arco que se haya obtenido.

Si el arco menor que 4° está dado por su logaritmo cotangente, se tomará el complemento de este logaritmo y se operará como si se tratase de un logaritmo tangente. Por último, cuando el arco sea mayor que 86° y esté dado por su logaritmo tangente, se operará sobre el complemento de este logaritmo y se tomará el complemento del arco obtenido.

Ejemplos.

1.° $\log \operatorname{sen} A = \overline{1}, 999112$. Pertenece á un arco mayor que 86°, por tanto opero como si fuera logaritmo coseno, y hallo $3^{\circ} \, 39, 45''$; luego $A = 86^{\circ} \, 20' \, 15''$.

---

1 Para hacer esta reduccion se emplean las tablas XX y XXI del modo siguiente: sepárense dos cifras enteras de la derecha, y quedará 117; búsquese en los múltiplos de 36 el número menor más próximo á 117, que es 108, correspondiente á 3°; hállese la diferencia 9 entre los 108 y 117 y colóquese á su derecha la primera cifra separada así se forma el número 97; búsquese en los múltiplos de 6 el número menor mas próximo á 97, que es 96, correspondiente á 16′; hállese la diferencia 1 entre 96 y 97, y colocando á su derecha las demás cifras separadas resultan los 18, 3 segundos.

2.° Log cos A $= \bar{2}, 364528$. El arco es mayor que 86°, por tanto opero como si fuera logaritmo seno, y hallo 1° 19′ 35″, 2; luego A $= 88° 40' 24''$, 8.

3.° Log cot A $= \bar{1}, 297895$, Aquí es A $< 4°$; tomo el complemento $\bar{2}, 702105$ de este logaritmo, que pertenece á log tg A; luego A $= 2° 52' 59''$, 3.

4.° Log tg A $= \underline{1}, 227518$. Siendo A $> 86°$ opero sobre el complemento $\bar{2}, 772482$ como si éste fuese un logaritmo tangente, y hallo 3° 23′ 21″, 2; luego A $= 86° 36' 38''$, 8.

45. Segundo caso. *El logaritmo dado cae fuera de las cuatro primeras planas.*

Sea log sen A $= \bar{1}, 638049$.

Buscaremos en las tablas el logaritmo seno menor más próximo al dado, que es $\bar{1}, 637935$ correspondiente á 25° 45′; para hallar los segundos dividiremas la diferencia 114 entre dichos logaritmos por la parte proporcional 4. 37 que corresponde al hallado en las tablas, y tendremos 26″; luego A $= 25° 45' 26''$.

De igual manera procederiamos si se nos diese un logaritmo tangente.

Sea log cos $=$ A $\bar{1}, 777842$.

Buscaremos en las tablas el logaritmo coseno *mayor* más próximo al dado, que es $\bar{1}, 777950$ correspondiente á 53° 9′; para hallar los segundos dividiremos la diferencia 108 entre dichos logaritmos por la parte proporcional 2, 81 que corresponde al hallado en las tablas, y tendremos 38″, 4; luego A $= 53° 9' 38''$, 4.

De igual manera procederíamos si se nos diese un logaritmo cotangente.

Luego *para hallar el arco á que pertenece el logaritmo de una razon trigonométrica no contenido en las tablas, se busca en éstas el logaritmo inmediato menor, si se trata de un seno ó tangente, y el inmediato mayor, si se trata de un coseno ó cotangente, y se anotan los grados y minutos del arco correspondiente: la diferencia entre el logaritmo hallado en las tablas y el dado se divide por la parte proporcional del primero, y el cociente expresará los segundos del arco pedido.*

46. El cociente de dividir la diferencia entre el logaritmo tabular y el dado por la parte proporcional, puede obtenerse empleando las tablitas marginales.

En nuestro primer ejemplo, despues de anotar los 25° 45′, se busca al márgen de la misma plana la parte proporcional 4.37 ó la más próxima, que es 4,34, y se recorre la columna de sus múltiplos hasta hallar la diferencia 114 ó el número menor que más se le aproxime, que es 87 y corresponde á 20″; como sobran 27 unidades se busca este número ó el más próximo, que es 26 y corresponde á 6″; de suerte que el arco tiene 26″.

En el segundo ejemplo, buscaremos al márgen la parte proporcional 2,81 y recorreremos la columna hasta hallar la diferencia 108 ó el número menor más próximo, que es 84 y corresponde á 30″: como sobran 24 unidades volveremos á buscar este número ó el más próximo, y hallaremos 22 que corresponde á 8″; sobran 2 unidades y como á 1″ corresponden 2, 8 se infiere que el arco no tiene más segundos, sino una fraccion de segundo: para hallarla añadimos un cero al 2, buscamos el número 20 y encontramos que corresponde á 7″, mas como habíamos multiplicado por 10, tomaremos 0″, 7; de modo que el arco tiene 38″, 7, que se diferencia del resultado obtenido directamente en 0″, 3.

47. Observacion. En la práctica, el logaritmo tangente determina el arco con más exactitud que el logaritmo seno, porque creciendo el primero más rápidamente que el segundo, un pequeño error del logaritmo tangente influye, al determinar el arco, ménos que otro error igual del logaritmo seno.

En las tablas de Vazquez Queipo puede verse, prescindiendo de las cuatro primeras planas, que á 1″ de diferencia en los arcos corresponde una diferencia mínima de 4,21 unidades del sexto órden decimal en los logaritmos tangentes, y de 0,15 unidades del mismo órden en los logaritmos senos.

Segun esto, fácil es calcular, por una simple proporcion, que á un error de una unidad de sexto órden decimal en el logaritmo corresponde otro error máximo en el arco de 0″, 24, si es logaritmo tangente, y de 6″, 66, si es logaritmo seno. Como el logaritmo de una razon trigonométrica desconocida viene, al resolver triángulos rectilíneos, en funcion de dos, tres y áun de cuatro logaritmos de cantidades conocidas, segun veremos muy pronto, y cada uno de éstos es aproximado en media unidad del sexto órden decimal, aquellos errores máximos no llegarán nunca, empleando la tangente, á 0″, 48, ménos de medio segundo, mientras que, empleando el seno, el límite del error se eleva á 13″,32.

LIBRO SEGUNDO.

RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

TEOREMAS RELATIVOS Á LA RESOLUCION DE TRIÁNGULOS.

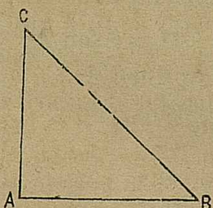
I.—Triángulos rectángulos.

48. En adelante representaremos los ángulos de un triángulo cualquiera por las letras mayúsculas de los vértices, y los lados por las letras de los ángulos opuestos, pero empleando las minúsculas. Así, los lados BC, AC y AB del triángulo ABC *(Fig. 6)* se expresarán respectivamente por a, b y c. [1]

Teorema. *(Fig. 6).*

49. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual á la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto al cateto ó por el coseno del ángulo agudo adyacente.*

Fig. 6.



Imaginando el arco correspondiente al ángulo B del triángulo ABC, descrito con un radio BC, CA será la ordenada y BA la abscisa del extremo C del arco, luego [7, *observ.*]

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}} = \operatorname{sen} \mathrm{B}, \quad \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} = \cos \mathrm{B},$$

$$\frac{b}{a} = \operatorname{sen} \mathrm{B}, \quad \frac{c}{a} = \cos \mathrm{B},$$

de donde

$$b = a \operatorname{sen} \mathrm{B}, \qquad c = a \cos \mathrm{B},$$

igualdades que demuestran el teorema.

1 La letra que segun esto debe representar á un lado es la que no entra en la expresion usual del mismo.

Teorema. (*Fig.* 6)

50. *En todo triángulo rectángulo, un cateto cualquiera es igual al otro cateto multiplicado por la tangente del ángulo opuesto al primero ó por la cotangente del ángulo agudo adyacente.*

Siendo CA la ordenada y BA la abscisa del punto C tenemos

$$\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BA}} = \mathrm{tg\,B}, \quad \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{CA}} = \mathrm{cot\,B},$$

ó sea

$$\frac{b}{c} = \mathrm{tg\,B}, \quad \frac{c}{b} = \mathrm{cot\,B},$$

de donde

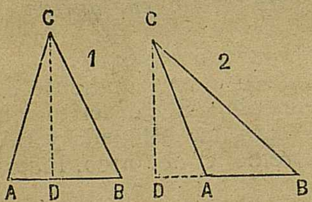
$$b = c\ \mathrm{tg\,B}, \quad c = b\ \mathrm{cot\,B}.$$

II.—Triángulos oblicuángulos.

Teorema. (*Fig.* 7.)

51. *En todo triángulo, los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Fig. 7.



Sea el triángulo ABC. Bajo desde el vértice C una perpendicular CD al lado opuesto. Si los ángulos A y B son agudos (*Fig.* 1) la perpendicular CD caerá en el lado AB, y los rectángulos BCD y ACD darán [49]

$$\mathrm{CD} = a \ \mathrm{sen\,B}, \quad \mathrm{CD} = b \ \mathrm{sen\,A},$$

luego a sen B $= b$ sen A,

de donde

$$\frac{a}{\mathrm{sen\,A}} = \frac{b}{\mathrm{sen\,B}}.$$

Si uno de los ángulos A y B es obtuso (*Fig.* 2) la perpendicular CD caerá en la prolongacion de AB, y será

$$\mathrm{CD} = a \ \mathrm{sen\,B}, \quad \mathrm{CD} = b \ \mathrm{sen\,CAD};$$

pero

$$\mathrm{sen\,CAD} = \mathrm{sen\,CAB} = \mathrm{sen\,A},$$

porque los ángulos CAD y CAB son suplementarios, luego

$$\mathrm{CD} = a \ \mathrm{sen\,B}, \quad \mathrm{CD} = b \ \mathrm{sen\,A},$$

de donde se deduce como antes

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}}.$$

Bajando una perpendicular desde A al lado BC, obtendríamos del mismo modo

$$\frac{b}{\text{sen B}}=\frac{c}{\text{sen C}};$$

luego

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}}=\frac{c}{\text{sen C}}.$$

Teorema.

52. *En todo triángulo, la suma de dos lados partida por su diferencia es igual á la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos.*

Acabamos de ver que

$$\frac{a}{\text{sen A}}=\frac{b}{\text{sen B}},$$

de donde

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen A}-\text{sen B}};$$

en el número 33 hemos visto que

$$\frac{\text{sen A}+\text{sen B}}{\text{sen A}-\text{sen B}}=\frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})}{\text{tg}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})},$$

luego

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{tg}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})}{\text{tg}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})},$$

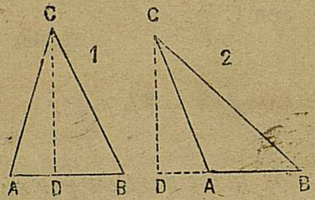
conforme al enunciado del teorema.

TEOREMA. (*Fig.* 7).

En todo triángulo, el cuadrado de un lado cualquiera es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, ménos el duplo del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido.

Distinguiremos dos casos.

FIG. 7.



1.° Si el ángulo A es agudo (*Fig.* 1.ª), tenemos [*Geom.* 187]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD;$$

en el triángulo rectángulo ADC, se verifica AD = b cos A, luego haciendo la sustitucion será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

2.° Si el ángulo A es obtuso (*Fig.* 2), tenemos [*Geom.* 188]

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD;$$

el triángulo rectángulo ADC nos da AD = b cos CAD; y como los ángulos CAD y CAB ó A son suplementarios, es

$$\cos CAD = -\cos A, \text{ luego } AD = -b \cos A;$$

sustituyendo en la primera ecuacion AD por este valor será

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

54. La misma demostracion podria aplicarse á los lados b y c. Tendremos, pues,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Estas tres ecuaciones pueden servir para la resolucion de triángulos rectilíneos en los diferentes casos que ocurran; porque conteniendo las seis partes de un triángulo, si conocemos tres de ellas dispondremos, para hallar las otras tres, de un sistema de tantas ecuaciones como incógnitas, que en general es determinado.

60. Tercer caso. *Dados los dos catetos* b *y* c, *hallar la hipotenusa* a *y los ángulos agudos* B *y* C.

Podríamos hallar la hipotenusa a en funcion de los catetos b y c, sirviéndonos del teorema de Pitágoras [57, 2.ª] que nos dá la ecuacion $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, pero los cálculos son algo pesados; á fin de evitar este inconveniente hallamos primero los ángulos B y C, y una vez conocidos calcularemos la hipotenusa en funcion de uno de ellos.

Para hallar el ángulo B tenemos [57, 4.ª]

$$b = c \operatorname{tg} B, \qquad \text{de donde} \qquad \operatorname{tg} B = \frac{b}{c},$$

y por logaritmos $\quad \log \operatorname{tg} B = \log b - \log c.$

Conocido el ángulo B, se tiene $\quad C = 90^\circ - B.$

Podria tambien hallarse C directamente por medio de la ecuacion

$$c = b \operatorname{tg} C, \qquad \text{de donde} \qquad \operatorname{tg} C = \frac{c}{b},$$

y

$$\log \operatorname{tg} C = \log c - \log b.$$

Para hallar la hipotenusa a tenemos ahora

$$b = a \operatorname{sen} B, \qquad \text{de donde} \qquad a = \frac{b}{\operatorname{sen} B},$$

y

$$\log a = \log b - \log \operatorname{sen} B.$$

61. Cuarto caso. *Dada la hipotenusa* a *y un cateto* b, *hallar el otro cateto* c *y los ángulos agudos* B *y* C.

Del teorema de Pitágoras [57, 2.ª] se deduce

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

de donde $\quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a+b)(a-b)},$

y

$$\log c = \frac{\log (a+b) + \log (a-b)}{2}.$$

La fórmula

$$b = a \operatorname{sen} B \qquad \text{dá} \qquad \operatorname{sen} B = \frac{b}{a},$$

de donde $\quad \log \operatorname{sen} B = \log b - \log a.$

Por último $\quad C = 90^\circ - b.$

62. Hé aquí los elementos de un triángulo rectángulo, y

los logarítmos necesarios para resolver los cuatro casos. El alumno puede tratarlos sucesivamente tomando dos de los valores que siguen para datos, y comparando los resultados que obtenga con los valores de los otros elementos.

$a = 7829,\qquad b = 6108{,}27,\qquad c = 4897,18$

$A = 90^\circ,\qquad B = 51^\circ\,16'47'',2,\qquad C = 38^\circ\,43'12'',8$

$\log a = 3,\,893706,\quad \log b = 3,\,785918,\quad \log c = 3,\,689946$

$\log(a+b) = 4,\,144177,\qquad \log(a-b) = 3,\,235712$

$\log\operatorname{sen} B = \bar{1},\,892212,\qquad \log\operatorname{sen} C = \bar{1},\,796240$

$\log\cos B = \bar{1},\,796240,\qquad \log\cos C = \bar{1},\,892212$

$\log\operatorname{tg} B = 0,\,095972,\qquad \log\operatorname{tg} C = \bar{1},\,904028.$

II.—Triángulos oblicuángulos ó generales.

63. La resolucion de triángulos oblicuángulos presenta cuatro casos, á saber:

Resolver un triángulo conociendo

1.° Un lado y dos ángulos.

2.° Dos lados y el ángulo comprendido.

3.° Los tres lados.

4.° Dos lados y el ángulo opuesto á uno de ellos.

64. Las proposiciones de que podemos servirnos para resolver estos cuatro problemas son las siguientes:

1.ª *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual á dos ángulos rectos* [*Geom.* 165].

2.ª *Los lados de un triángulo son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos* [51].

3.ª *La suma de dos lados de un triángulo partida por su diferencia es igual á la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á dichos lados partida por la tangente de la semidiferencia de los mismos ángulos* [52].

4.ª *El cuadrado de un lado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos ménos el duplo del producto de éstos por el coseno del ángulo comprendido* [53].

65. Primer caso. *Dado un lado* a *y los ángulos* B *y* C, *hallar los lados* b *y* c *y el ángulo* A.

De la relacion $A + B + C = 180^\circ$, se deduce

$$A = 180^\circ - (B + C).$$

Conocido ya el ángulo A, para hallar el lado b tenemos [64, 2.ª]

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}, \quad \text{de donde} \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A},$$

y $$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B + \text{c.}^{\text{to}} \log \operatorname{sen} A.$$

Igualmente $$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}, \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},$$

$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \text{c.}^{\text{to}} \log \operatorname{sen} A.$$

66. SEGUNDO CASO. *Dados dos lados* a *y* b *y el ángulo comprendido* C, *hallar el tercer lado* c *y los ángulos* A *y* B.

Sabemos que la suma $A + B = 180^\circ - C$: si calculamos la diferencia $A - B$, se deducirán fácilmente los valores de A y B.

Tenemos, suponiendo $a > b$, [64, 3.ª]

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)},$$

de donde $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{a+b},$$

y $$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) + \text{c.}^{\text{to}} \log(a+b).$$

Si, hechas las operaciones, hallamos para $\frac{1}{2}(A-B)$ un número de grados n, tendremos

$$\frac{A}{2} - \frac{B}{2} = n^\circ, \qquad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2};$$

sumando y restando estas ecuaciones resulta

$$A = 90^\circ + n^\circ - \frac{C}{2}, \qquad B = 90^\circ - n^\circ - \frac{C}{2}.$$

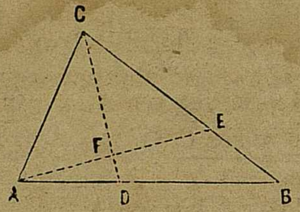
El lado c se deduce de la igualdad

$$\frac{a}{c} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C}, \quad \text{que dá} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A};$$

y $$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \text{c.}^{\text{to}} \log \operatorname{sen} A.$$

Esta fórmula obliga á tomar tres logaritmos nuevos. Vamos á hallar otra que solo exige dos.

Fig. 8.



Trazo la bisectriz CD del ángulo C (*Fig.* 8), y tomo CE = CA: la bisectriz CD es perpendicular á la base AE del triángulo isósceles ACE; además [*Geom.* 167, *escolio*]

$$\text{áng. FAD} = \tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B}).$$

Ahora bien [*Geom.* 180]

$$\frac{a}{\text{BD}} = \frac{b}{\text{AD}}, \quad \text{de donde} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{b}{\text{AD}},$$

$$\text{pero} \quad \frac{b}{\text{AD}} = \frac{\text{sen ADC}}{\text{sen } \frac{1}{2}\text{ C}} = \frac{\cos \text{FAD}}{\text{sen } \frac{1}{2}\text{ C}} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}{\text{sen } \frac{1}{2}\text{ C}},$$

$$\text{luego} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}{\text{sen } \frac{1}{2}\text{ C}},$$

de donde

$$\log c = \log(a+b) + \log \text{sen } \tfrac{1}{2}\text{ C} + \text{c.}^{\text{to}} \log \cos \tfrac{1}{2}(\text{A} - \text{B});$$

de estos tres logaritmos solamente dos son nuevos, pues el de $a + b$ se ha obtenido ya al calcular $\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})$.

67. Tercer caso. *Dados los tres lados* a, b, c, *hallar los tres ángulos* A, B, C.

Para hallar el ángulo A tenemos [64, 4.°]

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \text{A},$$

$$\text{de donde} \quad \cos \text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad [a].$$

Vamos ahora á deducir de esta fórmula otra mejor dispuesta para el cálculo logarítmico.

Restando de la unidad los dos miembros de la ecuacion [a], tendremos

$$1 - \cos \text{A} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc};$$

observando que el numerador de la última fraccion es la dife-