ELEMENTOS

DE LA

TEORÍA DE LAS FORMAS.

ELEMENTOS

DE LA

TEORÍA DE LAS FORMAS

Julián Lopez Vidal

POR

Luis Octavio de Toledo y Zulueta,
CATEDRÁTICO DE MATEMÁTICAS
DEL INSTITUTO DE LEÓN

= LEON: =
Imp. de Herederos de Miñón,
1889.

PRÓLOGO.

GRANDE osadía y nó pequeña presunción ha de parecer en mí el publicar un libro sobre la Teoría de Formas, cuando acerca de esta importante y trascendental materia han visto yá la pública luz, con gran éxito y general estimación, obras tan interesantes y aun podemos decir magistrales, como las *Lecciones de Álgebra superior* de G. Salmon; la *Teoría de Formas binarias* de Francisco Faá de Bruno; la de *Formas algébricas binarias* y las *Lecciones de Geometría* de Alfredo Clebsch; la *Teoría de Formas en general y principalmente de las binarias* de Rafael Rubini, traducida y publicada en castellano esta última por el distinguido catedrático de la Universidad de Sevilla D. Emilio Márquez Villarroel; y tantas otras no menos preciadas, en las que sus autores han dado á conocer al par que un profundo talento matemático, galanura de ingenio y brillantes dotes de exposición.

Pero como nó existe á juicio nuestro una Teoría verdaderamente elemental de las Formas, en la que se hallen expuestas con sencillez y brevedad los principios fundamentales de tan bellísima rama del Análisis moderno; considerando por otra parte la dificultad que presenta el estudio de las obras anteriormente citadas á los que carecen de las primeras nociones de esta parte del Álgebra, y la nó menor con que luchan los alumnos de la Facultad de Ciencias y los de las Carreras especiales, no teniendo un texto elemental que poder consultar, en el que se hallen sinó todas, parte al menos de las explicaciones de sus Profesores; nos han parecido razones estas más que suficientes para decidirnos á redactar y publicar unos *Elementos*, cuyo principal objeto es por lo tanto, que sirvan de preparación al estudio de la referida Teoría, y facilitar la inteligencia de todas las obras y memorias que sobre la misma publican los más ilustres analistas y geómetras contemporáneos.

Desprovisto nuestro modestísimo trabajo de todo género de pretensiones, y limitado así su campo á servir de introducción al estudio de las obras que tratan la *Teoría de Formas* con mayor extensión y profundidad, claro es que no deben en él buscarse proposiciones nuevas ni trascendentales investigaciones, en absoluto vedadas á nuestro pobre ingenio; sinó una exposición elementalísima de las teorías de sustituciones lineales, invariantes, covariantes y formas canónicas, precedidas de unas nociones sobre los discriminantes, Jacobiano y Hessiano, que creemos indispensables para el conocimiento de esas teorías.

Si nuestros *Elementos* pudieran servir de alguna utilidad á los que se dedican á este género de estudios, nos creeríamos suficientemente recompensados del trabajo que nos han proporcionado y del tiempo dedicado á su publicación. Si por el contrario, á causa de nuestras débiles aptitudes, no lograran el fin que nos hemos propuesto, concédasenos benévola indulgencia, en gracia del vehementísimo deseo que nos anima de que se generalicen los conocimientos matemáticos en nuestra nación mucho más de lo que lo están en la actualidad.

ADVERTENCIA

Las citas que se hacen de tratados de Álgebra, se refieren á las obras que á continuación se expresan y se indican abreviadamente por los signos comprendidos entre paréntesis.

Salinas (I.) y Benitez (M.)—Álgebra.— 1.ª y 2.ª parte. Madrid, 1885 y 1888.—2 vol. 8.º—(S. B.—1.º ó 2.º—n.º).

Briot (Ch.)—Lecciones de Álgebra elemental y superior.—Traducidas, ampliadas y completadas con numerosas notas y extensos apéndices por C. Sebastián y B. Portuondo.—Madrid, 1880.—1 vol. 8.º—(B.— 1.ª ó 2.ª parte.—n.º).

Rubini (R.)—Tratado de Álgebra.—Traducido por D. Emilio Márquez Villarroel.— 1.ª y 2.ª parte.—Sevilla, 1882. —2 vol. 8.º—(R.—1.º ó 2.º—n.º).

Laurent (H.)—Traité d'Algèbre.—4.ª ed.—París, 1887.—3 vol. 8.º—(L.—1.º, 2.º ó 3.º).

ELEMENTOS DE LA TEORIA DE LAS FORMAS.

CAPÍTULO PRIMERO.

PRELIMINARES.

1.—**Formas: definición.**—Se dá el nombre de *forma algébrica* á toda función algébrica, homogénea, racional y entera de dos ó más variables. Por ejemplo, son *formas* las expresiones siguientes

$$ax^2 + bxy + cy^2, \quad ax^3 + bxy^2 + cy^3,$$
$$ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \ldots\ldots + txy^{n-1} + sy^n.$$

Nota.—La palabra *forma* corresponde á la voz inglesa *quantic*, con la cual el matemático inglés contemporáneo Arturo Cayley designaba las funciones homogéneas en general.

2.—**Clasificación de las formas.**—Las formas algébricas se clasifican ó por el número de variables que encierran, ó teniendo en cuenta su grado. Se denominan *binarias, ternarias, cuaternarias*, etc., las formas que tienen dos, tres, cuatro, etc., variables respectivamente; y se denominan *cuadráticas, cúbicas, bicuadráticas*, y en general, *del grado n*, las funciones de segundo, tercero, cuarto, y en general, del n^o grado Por ejemplo

$ax^2+bxy+cy^2$	es una forma binaria cuadrática.
$ax^3+bxyz+cxy^2+dy^3+ez^3$	es una forma ternaria cúbica.
$ax^n+bx^{n-1}y+\ldots+txy^{n-1}+sy^n$	es una forma binaria del grado n^o.

3.— **Notaciones y símbolos.**—Una forma binaria del grado n tiene, en general, la forma siguiente

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n \quad (1)$$

en la cuál se puede observar que los términos que la componen son iguales á los de la potencia n del binomio $x + y$ (a),

$$\left(x+y\right)^n = x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1} y + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} x^{n-2} y^2$$
$$+ \ldots + \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} x^{n-p} y^p + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} x y^{n-1} + y^n,$$

abstracción hecha de los coeficientes. Se ha convenido, y apreciaremos más adelante las ventajas de este convenio, en asignar á cada uno de los coeficientes literales a_0 a_1, a_2, ... a_n, de la forma, el correspondiente coeficiente numérico del binomio 1, $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}$, 1; y escribir la forma binaria anterior del modo siguiente:

$$a_0 x^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_1 x^{n-1} y + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_2 x^{n-2} y^2$$
$$+ \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n. \quad (2)$$

En el caso de que á los coeficientes de la forma se les afecte de los numéricos del binómio, según acabamos de decir, se representa la fórmula simbólicamente, siguiendo la notación propuesta por Cayley, del modo siguiente

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}, a_n)\,(x, y)^n;$$

y cuando la forma se considera sin los coeficientes numéricos

(a). — Siguiendo la notación propuesta por el notable matemático suizo Leonardo Euler, representamos por el signo $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}$ (léase n, *sobre* p) el número de combinaciones de la clase p que pueden formarse con n objetos, es decir, que $\begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix} = \dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots.p}$.

del binomio, como la (1), se cruzan los paréntesis, ó se cruzan y agrega al primero una flecha, de la manera que expresan los símbolos siguientes·

$$\left(a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{n-1},\ a_n \;\rangle\!\langle\; x,\ y\right)^n,$$

$$\left(a_0,\ a_1, a_2, \dots a_{n-1},\ a_n \;\overset{\nwarrow}{\rangle\!\langle}\; x, y\right)^n,$$

propuestos también por el ya citado matemático (a).

Del mismo modo, la forma ternaria del grado n se representará con los símbolos

$$(a_0,\ a_1, \dots .\, a_{n-1},\ a_n)\,(x, y, z)^n$$

$$\text{ó}\ (a_0,\ a_1, \dots .\, a_{n-1},\ a_n \;\overset{\nwarrow}{\rangle\!\langle}\; x,\ y,\ z)^n$$

según que los coeficientes literales a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n, estén ó nó afectados de los coeficientes numéricos de la potencia $(x+y+z)^n$. Esta notación puede generalizarse á una forma de cualquier grado y de un número cualquiera de variables.

Además de la anterior se suele emplear por algunos autores, especialmente alemanes, otra notación que es también muy ventajosa. En ella se designan todas las variables con una misma letra afectada de los índices 1, 2, 3, etc. de manera, por ejemplo, que x_1, x_2, x_3, x_4, designan cuatro variables diferentes; los coeficientes algébricos de los diversos términos de una forma se indican también con una sola letra, á la que se afecta de todos los índices de las diversas variables que entran en aquel término, repitiendo cada índice tantas veces cuantas unidades tenga el exponente de la variable á que corresponde, con tál que se entienda que una potencia x_n^m debe escribirse bajo la forma de un producto $x_n \,.\, x_n \,.\, x_n$ ...., compuesto

(a).—Cayley propuso primero los signos $(\rangle\!\langle)$ y $(\overset{\nwarrow}{\rangle\!\langle})$, y posteriormente empleó los $(\ )(\ )$ y $(\rangle\!\langle)$, que son los que se emplean con preferencia.

de m factores simples. Con arreglo á esta notación una forma binaria cúbica se escribirá del modo siguiente

$$a_{111}\, x_1\, x_1\, x_1 + a_{112}\, x_1\, x_1\, x_2 + a_{122}\, x_1\, x_2\, x_2 + a_{222}\, x_2\, x_2\, x_2;$$

una forma ternaria cuadrada se escribirá;

$$a_{11}\, x_1\, x_1 + a_{22}\, x_2\, x_2$$
$$+ a_{33}\, x_3\, x_3 + 2a_{12}\, x_1\, x_2 + 2a_{13}\, x_1\, x_3 + 2a_{23}\, x_2\, x_3,$$

ó también

$$a_{11}\, x_1\, x_1 + a_{22}\, x_2\, x_2 + a_{33}\, x_3\, x_3 + a_{12}\, x_1\, x_2 + a_{13}\, x_1\, x_3$$
$$+ a_{21}\, x_2\, x_1 + a_{23}\, x_2\, x_3 + a_{31}\, x_3\, x_1 + a_{32}\, x_3 x_2,$$

y en este caso se entiende que $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, y en general, $a_{sr} = a_{rs}$.

De una manera general, y empleando el signo sumatorio Σ, una forma cuadrática, de n variables puede representarse por el símbolo

$$\Sigma a_{hi}\; x_h\; x_i$$

en el que cada uno de los índices h, i puede tomar todos los valores $1, 2, 3, \ldots. n$, teniéndose además de una manera general que $a_{rs} = a_{sr}$.

Análogamente, una cúbica de n variables se puede representar con el símbolo

$$\Sigma a_{hik}\; x_h\; x_i\; x_k$$

en el cuál los índices h, i, k, pueden tomar todos los valores $1, 2, 3, \ldots. n$, teniéndose además que; $a_{rst} = a_{rts} = a_{str} = \ldots.$ Esta misma notación puede aplicarse á una forma de cualquier grado y de un número cualquiera de variables.

Por último, observaremos que, según Aronhold, Clebsch y algunos otros autores, una forma cualquiera puede representarse *simbólicamente* por la potencia de una forma lineal de tantas variables como tenga la forma dada, y cuyo exponente sea igual al grado de la forma primitiva. Así la forma binaria del grado n

$$a_0 x_1^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots\ldots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} a_{n-1} x_1 x_2^{n-1} + a_n x_2^n \qquad (3)$$

puede representarse por el símbolo

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^n.$$

Desarrollada, como sigue, la potencia indicada

$$\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right)^n = \alpha_1^n x_1^n + \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_1^{n-1} \alpha_2 x_1^{n-1} x_2 + \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \alpha_1^{n-2} \alpha_2^2 x_1^{n-2} x_2^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} \alpha_1 \alpha_2^{n-1} x_1 x_2^{n-1} + \alpha_2^n x_2^n$$

y comparando el resultado con la forma (3) se vé que los coeficientes numéricos y las potencias de las variables son los mismos en el desarrollo que en la forma propuesta, y obtendremos ésta por completo estableciendo las siguientes igualdades condicionales

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1^n = a_0 \\ \alpha_1^{n-1} \alpha_2 = a_1 \\ \alpha_1^{n-2} \alpha_2^2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1^n = a_n \end{array}\right\}. \qquad (4)$$

Todavía se simplifica más esta notación representando por α_x, ó simplemente por α, el binomio $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, en cuyo caso la forma (3) se representa por uno de los símbolos α^n_x ó α_n.

Del mismo modo, una forma ternaria del grado n, con los coeficientes numéricos del binomio, ó mejor dicho del trinomio en este caso, se representará por el símbolo

$$\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3\right)^n$$

ó más sencillamente por α^n_x ó α_n; pudiéndose generalizar esta notación á las formas de cualquier número de variables.

De las notaciones anteriormente expuestas adoptaremos la primera por parecernos la más clara y sencilla, y por ser además la que se emplea con más frecuencia.

4.—**Descomposición factorial de una forma.**—Entre las múltiples cuestiones que el Álgebra se propone y resuelve de ordinario, es tál vez la más importante la siguiente: *Dado un polinomio algébrico, racional y entero de una variable, con coeficientes reales ó imaginarios, hallar los valores de la variable que sustituidos en dicho polinomio le reducen á cero.* Según yá sabemos (a), el número de estos valores de la variable es igual al grado de la ecuación: si suponemos además que el polinomio es

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (5)$$

y representamos sus raices por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots \alpha_n$ sabemos también que este polinomio puede descomponerse del siguiente modo:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$$
$$= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots\ldots (x - \alpha_n); \quad (6)$$

(a).—(S. B.—2.°—n.° 305.).—(R.—2.°—n.° 394.).—(B.—2.ª parte.—n.° 188.).—(L.—3.°—Pág. 6).

debiendo recordar además que en esta ecuación se verifican las igualdades que siguen;

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma\alpha_1 = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2 = +\dfrac{a_2}{a_0} \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{a_{n-1}}{a_0} \\ \Sigma\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{array}\right\} . \qquad (7)$$

Propongámonos ahora verificar una resolución y descomposición análoga en las formas binarias, pues como más adelante tendremos ocasión de apreciar, en muchas cuestiones de la TEORÍA DE LAS FORMAS, cuyos principios fundamentales nos proponemos exponer, hemos de emplear dichas formas descompuestas factorialmente. Sea, en general, la forma binaria

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y + \dots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n \qquad (8)$$

y supongamos que se quieren hallar los sistemas de valores de x é y que la anulan, ó en otros términos, que se quiere resolver la ecuación

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_{n-1} xy^{n-1} + a_n y^n = o \qquad (9)$$

ecuación que por contener dos incógnitas es indeterminada.

Haciendo $x = ty$ en la ecuación anterior y dividiendo por y^n, se tiene la ecuación determinada

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} t + a_n = o \qquad (10)$$

que se sabe resolver, y cuyas raices se pueden designar por α_1, α_2, α_3, ... α_n. Pero como $x = ty$, si se sustituyen en lugar de t sus n valores, obtendremos el sistema de n ecuaciones lineales que sigue:

$$x = \alpha_1 y,\ x = \alpha_2 y,\ x = \alpha_3 y, \ldots\ldots x = \alpha_n y. \qquad (11)$$

Ahora bien, cada sistema de valores (x_1, y_1) que verifique á una cualquiera de estas ecuaciones, á la primera por ejemplo, digo que será un sistema que verificará á la forma (8); en efecto si en la forma (8) hacemos $x = x_1$ é $y = y_1$ se obtiene

$$a_0 x^n_1 + a_1 x_1{}^{n-1} y_1$$
$$+ a_2 x_1^{n-2} y_1^2 + \ldots\ldots\ldots a_{n-1} x_1 y_1{}^{n-1} + a_n y_1{}^n,$$

pero como $x_1 = \alpha_1 y_1$, sustituyendo este valor en la expresión anterior y sacando $y_1{}^n$ por factor se tiene

$$(a_0 \alpha_1^n + a_1 \alpha_1^{n-1} + a_2 \alpha_1^{n-2} + \ldots + a_n) y_1{}^n;$$

y como en este producto, el factor comprendido entre paréntesis es nulo, porque α_1 es raiz de la ecuación (10), el sistema (x_1, y_1) anula la forma (8) como queríamos demostrar. De aquí se deduce además, que la resolución de la ecuación indeterminada (9) del grado n, queda reducida á la de la ecuación determinada (10), que también es del grado n, y á la de las n ecuaciones lineales indeterminadas (11); diciéndose por esta causa que la ecuación (9) es equivalente al sistema de las ecuaciones (10) y (11).

Además, considerando á la ecuación (9) como de una sola incógnita x, como efectivamente lo es cuando se asigna á y un valor particular, las raices de aquella ecuación son; $x = \alpha_1 y$, $x = \alpha_2 y$, ... $x = \alpha_n y$, y por lo tanto, según la descomposición factorial antes citada, tendremos

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$
$$= a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y); \quad (12)$$

y de este modo el polinomio (8) se halla descompuesto en tantos factores lineales como unidades tiene su grado, además del coeficiente de su primer término.

Por todo esto se vé, que la ecuación (9) considerada respecto á las dos variables, admite en general infinitas soluciones, que son las que se deducen de las ecuaciones (11); pero si aquella ecuación se considera con respecto á la razón de dichas variables, y suponemos la de x á y, entonces la ecuación se convierte en

$$a_0 \frac{x^n}{y^n} + a_1 \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} + a_2 \frac{x^{n-2}}{y^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{x}{y} + a_n = o \quad (13)$$

que no admite más de n valores, que son los anteriormente obtenidos para la ecuación (10) y que yá hemos designado por α_1, α_2, α_3, ... α_n; de consiguiente, si representamos por (x_1, y_1) uno cualquiera de los sistemas que satisfacen á la primera de las ecuaciones (11), por (x_2, y_2) uno de los que satisfacen á la segunda, y así sucesivamente, tendremos

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{y_1}, \alpha_2 = \frac{x_2}{y_2}, \alpha_3 = \frac{x_3}{y_3}, \ldots\ldots \alpha_n = \frac{x_n}{y_n},$$

y estas serán las raices de la ecuación (13) en la cual la incógnita es $\frac{x}{y}$. Ahora bien, según sabemos por el Álgebra, se tendrá:

$$a_0 \left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right) \ldots \left(\frac{x}{y} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_n}{y_n}\right) = o$$

ó también

$$a_0 \frac{x^n}{y^n} + a_1 \frac{x^{n-1}}{y^{n-1}} + a_2 \frac{x^{n-2}}{y^{n-2}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{x}{y} + a_n$$

$$= a_0 \left(\frac{x}{y} - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_2}{y_2}\right) \ldots \left(\frac{x}{y} - \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}\right)\left(\frac{x}{y} - \frac{x_n}{y_n}\right). \quad (14)$$

El primer miembro de esta expresión multiplicado por y^n reproduce la forma propuesta (8), luego el segundo debe también reproducirla al multiplicar por el mismo factor, mas si efectuamos esta multiplicación se obtiene,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n$$
$$= \frac{a_0}{y_1 y_2 y_3 \ldots y_n} (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \ldots (xy_n - yx_n); \quad (15)$$

expresión en la que ya tenemos la forma descompuesta factorialmente. Para reducirla á otra forma más sencilla, haciendo que desaparezca el factor $\frac{a_0}{y_1 y_2 y_3 \cdots y_n}$, podemos dividir los dos miembros de la (15) por el coeficiente a_0, verificar las operaciones indicadas en el segundo miembro, y aplicando las fórmulas (7) se obtienen las siguientes expresiones:

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{\Sigma x_1 y_2 y_3 \cdots y_n}{y_1 y_2 y_3 \cdots y_n},$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{\Sigma x_1 x_2 y_3 \cdots y_n}{y_1 y_2 y_3 \cdots y_n},$$

. . . .

. . . .

$$\frac{a_{n-1}}{a_0} = (-1)^{n-1} \frac{\Sigma x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y_n}{y_1 y_2 y_3 \cdots y_n},$$

$$\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{\Sigma x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n}{y_1 y_2 y_3 \cdots y_n};$$

de las cuales se deduce fácilmente

$$a_0 = y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n,$$
$$a_1 = -\Sigma x_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n,$$
$$a_2 = \Sigma x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}\, \Sigma x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, y_n,$$
$$a_n = (-1)^n\, \Sigma x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n = (-1)^n\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, x_n;$$

en cuyas fórmulas haciendo $y_1 = y_2 = y_3 = \ldots = y_n = 1$, se obtienen las conocidas relaciones que ligan á las raices de una ecuación con los coeficientes de la misma.

Sustituyendo el valor del producto $y_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n$ que se deduce de la primera de las relaciones anteriores, en la expresión (15) se obtiene finalmente

$$a_0\, x^n + a_1\, x^{n-1}\, y + a_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots + a_{n-1}\, x y^{n-1} + a_n\, y^n$$
$$= (xy_1 - yx_1)\,(xy_2 - yx_2) \ldots (xy_{n-1} - yx_{n-1})\,(xy_n - yx_n) \quad (16)$$

que es una expresión factorial de la forma binaria del grado n de que haremos frecuente uso en los capítulos siguientes.

Nota.—Debe observarse que la ecuación no homogénea

$$a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + a_2\, z^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, z + a_n = o$$

puede siempre reducirse á la forma homogénea, haciendo $z = \dfrac{x}{y}$ y multiplicando después por y^n.

CAPÍTULO II.

DISCRIMINANTES.

5.—**Discriminantes: definición, notación y ejemplos.**—Si de una forma de grado n y con k variables, se hallan las k derivadas parciales de primer orden y se igualan á cero, la resultante de estas k ecuaciones ha recibido el nombre de *discriminante* de la forma dada (a). Por ejemplo, sea la forma binaria cuadrática

$$U=a_0\,x^2+2a_1\,xy+a_2\,y^2;$$

hallando sus dos derivadas parciales de primer orden, que designaremos por U_x' y U_y', tendremos:

$$\tfrac{1}{2}\,U_x'=a_0\,x+a_1\,y=o,$$
$$\tfrac{1}{2}\,U_y'=a_1\,x+a_2\,y=o,$$

cuya resultante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_0\,a_2-a_1^2$$

será el *discriminante* de la forma dada.

Anotaremos los discriminantes de una manera abreviada ó simbólica con la letra griega Δ, afectada de un sub-índice que exprese el número de variables que contiene la forma, y de un índice que nos haga conocer su grado: así en el ejemplo anterior el discriminante se designará por

$$\Delta_2^2=a_0\,a_2-a_1^2.$$

(a).—La palabra *discriminante*, empleada primero por el eminente analista inglés contemporáneo Juan Jerónimo Sylvester y aceptada después universalmente, proviene del verbo inglés *to discriminate* que significa *distinguir* ó *señalar*.

Ejemplos de discriminantes.—1.º—Tomemos como primer ejemplo la forma ternaria cuadrática

$$U = a_0\, x^2 + a_1\, y^2 + a_2\, z^2 + 2a_3\, xy + 2a_4\, xz + 2a_5\, yz$$

cuyas tres derivadas parciales de primer orden son

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\, U_x' &= a_0\, x + a_3\, y + a_4\, z = o, \\ \tfrac{1}{2}\, U_y' &= a_3\, x + a_1\, y + a_5\, z = o, \\ \tfrac{1}{2}\, U_z' &= a_4\, x + a_5\, y + a_2\, z = o; \end{aligned}$$

y la resultante de estas ecuaciones, ó sea el discriminante de la forma será

$$\Delta_3^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_1 & a_5 \\ a_4 & a_5 & a_2 \end{vmatrix} = a_0\, a_1\, a_2 + 2a_3\, a_4\, a_5 - a_0\, a_5^2 - a_1\, a_4^2 - a_2\, a_3^2.$$

2.º—Formemos el discriminante de la forma binaria cúbica

$$U = a_0\, x^3 + 3a_1\, x^2\, y + 3a_2\, xy^2 + a_3\, y^3;$$

igualando á cero sus dos derivadas parciales, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}\, U_x' &= a_0\, x^2 + 2a_1\, xy + a_2\, y^2, \\ \tfrac{1}{3}\, U_y' &= a_1\, x^2 + 2a_2\, xy + a_3\, y^2; \end{aligned}$$

y aplicándolas el método de eliminación de Sylvester (a) darán:

$$\begin{aligned} a_0\, x^3 + 2a_1\, x^2\, y + a_2\, xy^2 \qquad &= o, \\ a_0\, x^2\, y + 2a_1\, xy^2 + a_2\, y^3 &= o, \\ a_1\, x^3 + 2a_2\, x^2\, y + a_3\, xy^2 \qquad &= o, \\ a_1\, x^2\, y + 2a_2\, xy^2 + a_3\, y^3 &= o; \end{aligned}$$

(a)—(S. B.—2.º—n.º 337.)—(R.—2.º—n.º 595).—(B.—2.ª parte—n.º 278).

y el discriminante de la forma será

$$\Delta_2^3 = \begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 & o \\ o & a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_1 & 2a_2 & a_3 & o \\ o & a_1 & 2a_2 & a_3 \end{vmatrix};$$

determinante que desarrollado nos dará:

$$\Delta_2^3 = a_0^2\, a_3^2 + 4a_0\, a_2^3 - 6a_0\, a_1\, a_2\, a_3 + 4a_1^3\, a_3 - 3\, a_1^2\, a_2^2$$
$$= (a_0\, a_3 - a_1\, a_2)^2 - 4\,(a_0\, a_2 - a_1^2)\,(a_1\, a_3 - a_2^2).$$

3.º—Sea, por último, la forma binaria bicuadrática

$$U = a_0\, x^4 + 4a_1\, x^3\, y + 6\, a_2\, x^2\, y^2 + 4a_3\, xy^3 + a_4\, y^4;$$

formemos sus derivadas parciales é igualémoslas á cero y se tendrá:

$$\tfrac{1}{4}\, U_x' = a_0\, x^3 + 3a_1\, x^2\, y + 3a_2\, xy^2 + a_3\, y^3 = o,$$
$$\tfrac{1}{4}\, U_y' = a_1\, x^3 + 3a_2\, x^2\, y + 3a_3\, xy^2 + a_4\, y^3 = o;$$

aplicando á estas ecuaciones el método de eliminación de Sylvester, se obtiene el discriminante:

$$\Delta_2^4 = \begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & o & o \\ o & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 & o \\ o & o & a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & o & o \\ o & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 & o \\ o & o & a_1 & 3a_2 & 3a_3 & a_4 \end{vmatrix}$$

cuyo desarrollo es el siguiente polinomio:

$$\Delta_2^4 = \begin{cases} a_0^3 a_4^3 - 12a_0^2\, a_1 a_3 a_4^2 + 54a_0^2 a_2 a_3^2 a_4 - 18a_0^2\, a_2^2\, a_4^2 \\ -27a_0^2\, a_3^4 + 54a_0 a_1^2 a_2 a_4^2 + 108a_0 a_1 a_2 a_3^3 - 180a_0 a_1 a_2^2 a_3 a_4 \\ -\ 6a_0 a_1^2 a_3^2 a_4 + 81a_0 a_2^4 a_4 - 54a_0 a_2^3 a_3^2 - 27a_1^4 a_4^2 \\ -108a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 64a_1^3 a_3^3 - 54a_1^2 a_2^3 a_4 + 36a_1^2 a_2^2 a_3^2 \end{cases}$$

6.—Propiedades de los discriminantes.—Teorema I.—*El discriminante de una forma cuadrática de cualquier número de variables, es un determinante simétrico.*

Este teorema puede deducirse de la simple inspección de los discriminantes obtenidos en los dos primeros ejemplos del párrafo anterior, pero puede demostrarse también directamente del modo que vamos á decir; más antes advertiremos qué, para las formas cuadráticas, la notación más cómoda y sencilla es la de doble índice explicada en el n.º 3, en la cual se designan por a_{11}, a_{22}, a_{33},....., los coeficientes de los cuadrados x_1^2, x_2^2, x_3^2.... ; y por a_{12}, a_{13}, a_{23},...., los de los productos $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_2 x_3$.....; debiendo recordar también que en ella se estableció de un modo general que $a_{rs}=a_{sr}$. Ahora bien, empleando esta notación, el discriminante de una cuadrática cualquiera $(a_{11}, a_{12}, a_{22},\ldots)(x_1, x_2, x_3,\ldots.)^2$ tiene evidentemente la forma

$$\Delta_n^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots\cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots\cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

que es un determinante simétrico en virtud de la relación $a_{rs}=a_{sr}$.

7.—Teorema II.—*Si el discriminante de una forma cuadrática es nulo, la forma correspondiente puede descomponerse en un producto de dos factores lineales.*

Elijamos, por ejemplo, la forma cuadrática ternaria

$$U=a_0\, x^2+a_1\, y^2+a_2\, z^2+2a_3\, xy+2a_4\, xz+2a_5\, yz$$

cuyo discriminante

$$\Delta_3^2=a_0\, a_1\, a_2+2a_3\, a_4\, a_5-a_0\, a_5^2-a_1\, a_3^2-a_2\, a_3^2$$

hemos formado en el ejemplo 1.º del número 5; y vamos á demostrar qué, si $\Delta_3^2=o$, la forma U puede descomponerse en el producto de dos factores lineales.

En efecto, igualando á cero la forma propuesta y resolviendo la ecuación resultante con relación á x, se obtiene

$$x = \frac{-(a_3 y + a_4 z) \pm \sqrt{(a_3 y + a_4 z)^2 - a_0 (a_1 y^2 + 2a_5 yz + a_2 z^2)}}{a_0}$$

$$= \frac{-(a_3 y + a_4 z) \pm \sqrt{(a_3^2 - a_0 a_1) y^2 + 2(a_3 a_4 - a_0 a_5) yz + (a_4^2 - a_0 a_2) z^2}}{a_0};$$

la cantidad sub-radical será el cuadrado exacto de un binomio $hy+kz$, si se tiene

$$(a_3 a_4 - a_0 a_5)^2 - (a_3^2 - a_0 a_1)(a_4^2 - a_0 a_2) = o;$$

y como desarrollando esta expresión se obtiene

$$a_0 (a_0 a_5^2 + a_1 a_4^2 + a_2 a_3^2 - a_0 a_1 a_2 - 2a_3 a_4 a_5) = -a_0 \Delta_3^2,$$

que es cero por serlo Δ_3^2, los valores de x tendrán la forma

$$x = \frac{-(a_3 y + a_4 z) \pm (hy + kz)}{a_0};$$

mas como á su vez la forma propuesta, considerada como función de x solamente, tiene la forma

$$U = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),$$

designando por α_1 y α_2 los valores de x, esta expresión se reduce á

$$U = a_0 \left(x - \frac{-(a_3 y + a_4 z) + (hy + kz)}{a_0}\right)$$
$$\left(x - \frac{-(a_3 y + a_4 z) - (hy + kz)}{a_0}\right);$$

ó sea

$$U = (M_1 x + N_1 y + P_1 z)(M_2 x + N_2 y + P_2 z),$$

como se quería demostrar.

8.—**Teorema III.**—*El discriminante de una forma de* k *variables y del grado* n, *es una función homogénea de los coeficientes de la forma dada y del grado* $k\,(n-1)^{k-1}$.

En efecto, el discriminante es la resultante de k ecuaciones del grado $n-1$, y debe contener los coeficientes de cada una de estas ecuaciones con un grado igual al producto de los grados de las ecuaciones restantes (a); es decir, con el grado $(n-1)^{k-1}$. Además estas ecuaciones derivadas contienen todos los coeficientes de la forma primitiva con el exponente uno, por lo tanto el discriminante los contendrá con el grado $k\,(n-1)^{k-1}$.

Aplicaciones.—Como aplicaciones vemos que los discriminantes obtenidos en los ejemplos del n.° 5, son funciones homogéneas de los grados $3.\ (2-1)^{3-1}=3$; $2\ (3-1)^{2-1}=4$ y $2.\ (4-1)^{2-1}=6$ respectivamente.

9.—**Teorema IV.**—*Si en una forma* U *de grado* n *y* k *variables, se dá á los coeficientes que multiplican á la primera potencia de una variable* x *el índice* 1, *á los que multiplican la segunda potencia el índice* 2, *y así sucesivamente; la suma de índices en cada término del discriminante será constante é igual á* $n\,(n-1)^{k-1}$, *ó sea, el discriminante será una función isobárica de los coeficientes y de peso igual á* $n\,(n-1)^{k-1}$ (b).

La teoría de la eliminación (véase la nota del teorema anterior) nos enseña qué, si en un sistema de ecuaciones, se afecta cada coeficiente de un índice igual al exponente de la potencia de x á que multiplica, la suma de los índices en cada término de la resultante es igual al producto $m\,n\,p....$, de los grados de

(a)—(R.—2.°—n.° 605).—(L.—3.°—Pág. 134).—Sobre éste teorema, el siguiente y cuantos puntos se relacionen con la teoría de la eliminación, deben consultarse las obras siguientes:

Faá de Bruno (F.).—*Théorie génerale de l'Elimination.*

Salmon (G.).—*Lessons introductory to the modern higuer Algebra.*

(b).—En toda función se llama *peso* de un término á la suma de los productos del exponente por el índice de cada factor; así en el término $a_1{}^m a_2{}^n a_3{}^p$ .... ., se denominará *peso* á la suma $m+2n+3p+....$ Una función se llama *isobárica* cuando todos sus términos tienen el mismo peso.

las ecuaciones. Supongamos ahora, que en la primera de las ecuaciones, el índice del coeficiente de x_0 sea h en vez de o; el del coeficiente de x^1 sea $h+1$, y en general, el de la potencia x^i sea $h+i$ en lugar de i; el resultado de esta modificación es evidente que será el aumentar la suma de los índices en tantas veces h como coeficientes de la primera ecuación se encuentran en cada término de la resultante; y como cada término contiene $n\,p.....$, de estos coeficientes la suma total de índices se convertirá en

$$m\,n\,p..... + h\,n\,p..... = (m+h)\,n\,p..... .$$

Ahora bien, en la cuestión que nos ocupa, del discriminante de una forma U del grado n con k variables, podemos observar qué, en las derivadas U'_y, U'_z,...., cada coeficiente multiplica la misma potencia de x que en la forma primitiva U, pero que en la derivada U'_x cada coeficiente multiplica una potencia de x menor en una unidad que en U; y por tanto el coeficiente de un término que contenga la potencia x^i estará afectado del índice $i+1$, por ser originado por uno que contiene la x^{i+1} en la forma primitiva; de donde se deduce que la suma de los índices en cada término del discriminante será

$$(n-1)^k + (n-1)^{k-1} = n\,(n-1)^{k-1}$$

como se deseaba demostrar.

Ejemplo.—Sea la forma binaria

$$a_2\,x^2 + a_1\,xy + a_0\,y^2$$

su discriminante que según ya sabemos es

$$\Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 2a_2 & a_1 \\ a_1 & 2a_0 \end{vmatrix} = 4a_0\,a_2 - a_1^2,$$

resulta función isobárica y de peso igual á 2 (2—1)=2.

Escolio.—Los resultados obtenidos en los dos teoremas anteriores se expresan de una manera abreviada diciendo, que el número $k\,(n-1)^{k-1}$ es el *orden* del discriminante, y $n\,(n-1)^{k-1}$ es su *peso*.

10.—**Teorema V.**—*La resultante de una forma binaria* $U=(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\,(x, y)^n$, *y de su derivada parcial* U_x' *es igual al producto del discriminante de la forma dada por el coeficiente* a_0; *y la resultante de la misma forma y de su derivada parcial* U_y' *es igual al producto del mismo discriminante por el coeficiente* a_n.

En efecto, por definición, el discriminante de la forma U es la resultante de las dos ecuaciones

$$U_x'=o \quad , \quad U_y'=o;$$

así es que si en una de las dos funciones U_x', U_y' se sustituyen las raices de la otra y se efectúa el producto de los resultados obtendremos su resultante, y por consiguiente, el discriminante de la forma U. Ahora bien, según el teorema de Euler (a) sobre las funciones homogéneas tenemos:

$$n\,U=xU_x'+yU_y'$$

y por consecuencia, si en esta identidad sustituimos por x é y las raices (x_1', y_1'), $(x_2', y_2'), \ldots$; de la $U_x'=o$, y designamos por U_1, $U_2, \ldots$, y por $U'_{y'_1}$, $U'_{y'_2}, \ldots$ en lo que se convierten U y U_y' respectivamente por esta sustitución, obtendremos las siguientes igualdades:

$$n\,U_1=y'_1\,U'_{y'_1}\,,\; n\,U_2=U'_{y'_2}, \ldots\ldots \quad n\,U_n=y'_n\,U'_{y'_n};$$

que multiplicadas término á término nos darán

$$n^n\,U_1\,U_2\,U_3\ldots U_n=y'_1\cdot y'_2\ldots\ldots y'_n\cdot U'_{y'_1}\cdot U'_{y'_2}\ldots\ldots U'_{y'_n}.$$

(a)—(S. B.—2.°—n.° 289).—(B.—2.ª parte—n.° 146).—(L.—2.°—Pág. 174).

El primer miembro de esta última ecuación es la resultante de $U=o$ y $U_x'=o$, según sabemos; el producto $y_1' \cdot y_2' \cdots y_n'$ es igual al coeficiente a_0 (n.º 4), y el producto $U'_{y'_1} \cdot U'_{y'_2} \cdots U'_{y'_n}$, es la resultante de las dos ecuaciones $U_x'=o$ y $U_y'=o$, ó sea el discriminante de U; por consiguiente es cierto que la resultante de U y U_x' es el producto del discriminante de U por a_0.

Si en la igualdad $nU=x\,U_x'+y\,U_y'$, sustituyéramos en vez de x é y las raices de la ecuación $U_y'=o$, demostraríamos en virtud de un razonamiento igual al anterior, que la resultante de U y U_y' es igual al discriminante de U multiplicado por a_n.

Corolario.—*Para obtener el discriminante de una forma binaria dada* $U=(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$, *es suficiente dividir por* a_0 *la resultante de las dos funciones* U *y* U'_x.

Ejemplo.—Aplicando la proposición anterior á la formación del discriminante de la forma $U=a_0\,x^2+2a_1\,xy+a_2\,y^2$, se obtendrá:

$$U=a_0\,x^2+2a_1\,xy+a_2\,y^2,$$
$$\tfrac{1}{2}\,U_x'=a_0\,x+a_1\,y;$$

y la resultante será

$$R=\begin{vmatrix} a_0 & 2a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & o \\ o & a_0 & a_1 \end{vmatrix}=a_0\,a^2_1-2a_0\,a_1^2+a_0^2\,a_2=a_0\,\Delta_2^2$$

y por lo tanto el discriminante

$$\Delta_2^2=\frac{R}{a_0}.$$

Observaciones.—**I.**—En la demostración del teorema anterior hemos supuesto que la forma estaba escrita con los coeficientes numéricos del binomio para mayor sencillez, pero el teorema es igualmente cierto cuando la forma no tiene estos coeficientes binómicos, porque sus coeficientes extremos a_0 y a_n no cambian de valor.

II.—Siendo la forma del grado n

$$U = a_0 x^n + \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right] a_1 x^{n-1} y + \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right] a_{n-1} x y^{n-1} + a_n y^n,$$

su derivada parcial U_x' será

$$U_x' = n a_0 x^{n-1} + \left[\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right] (n-1) a_1 x^{n-2} y + \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] (n-2) a_2 x^{n-3} y^2 + \dots + \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right] a_{n-1} y^{n-1};$$

y por tanto los coeficientes de esta segunda función tienen el factor común n; pero como la resultante $R(U, U_x')$ contiene los coeficientes de U_x' elevados á una potencia de grado n, esta resultante admitirá el factor n^n. Por consiguiente, haciendo abstracción de este factor, púramente numérico, tendremos

$$\Delta_2^n = \frac{R(U, U'_x)}{n^n . a_0} \quad \text{ó sea} \quad n^n \Delta_2^n = \frac{R(U, U'_x)}{a_0}.$$

11.—**Teorema VI.**—*El discriminante de una forma binaria* $U = (a_0, a_1, \dots a_n)(x, y)^n$ *expresado en función de las raices de la forma, se obtiene por la fórmula*

$$\Delta_2^n = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 \dots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2.$$

En efecto, para obtener el discriminante Δ_2^n de la forma U, es necesario formar la resultante $R(U, U_x')$ y dividirla por a_0; pero para obtener esta resultante, será preciso sustituir en una de las dos ecuaciones $U = o$, $U_x' = o$, en la segunda por ejemplo, las raices de la otra y formar después el producto de los resultados obtenidos. De manera que si representamos por (x_1, y_1),

$(x_2, y_2), \ldots\ldots (x_n, y_n)$ las raices de la ecuación $U = o$, y por U_{x_1}', $U_{x_2}', \ldots U_{x_n}'$, los resultados de sustituir en U_x' estas raices tendremos:

$$R(U, U_x') = U_{x_1}' \cdot U_{x_2}' \cdot U_{x_3}' \ldots\ldots U_{x_n}'.$$

Ahora bien, hemos visto anteriormente (n.º 4), que la forma propuesta puede representarse en función de sus raices del modo siguiente

$$U = (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \ldots\ldots (xy_n - yx_n);$$

de modo que su derivada U_x' será

$$U_x' = \left\{ \begin{array}{l} y_1 (xy_2 - yx_2)(xy_3 - yx_3) \ldots\ldots (xy_n - yx_n) \\ + y_2 (xy_1 - yx_1)(xy_3 - yx_3) \ldots\ldots (xy_n - yx_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + y_n (xy_1 - yx_1)(xy_2 - yx_2) \ldots\ldots (xy_{n-1} - yx_{n-1}). \end{array} \right.$$

Sustituyendo en esta expresión de U_x', en vez de x é y las raices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots. (x_n, y_n)$ de la forma U, veremos que al sustituir (x_h, y_h), por ejemplo, solo nos quedaría la horizontal h, pués todas las restantes contendrían el factor $(x_h\, y_h - y_h\, x_h)$ que es nulo; por consiguiente los resultados de las sustituciones serían los siguientes;

$$\begin{array}{l} U'_{x_1} = y_1 (x_1 y_2 - y_1 x_2)(x_1 y_3 - y_1 x_3) \ldots (x_1 y_n - y_1 x_n), \\ U'_{x_2} = y_2 (x_2 y_1 - y_2 x_1)(x_2 y_3 - y_2 x_3) \ldots (x_2 y_n - y_2 x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U'_{x_n} = y_n (x_n y_1 - y_n x_1)(x_n y_2 - y_n x_2) \ldots (x_n y_{n-1} - y_n x_{n-1}). \end{array}$$

Al formar el producto de estas expresiones debemos tener presente qué, si el producto contiene un factor de la forma $(x_h\, y_k - y_h\, x_k)$, contendrá también el factor $(x_k\, y_h - y_k\, x_h)$ igual y de signo contrario al anterior; y por tanto en vez de estos dos factores podrá ponerse su producto $-(x_k\, y_h - y_k\, x_h)^2$; mas siendo el número de estos factores igual al de las diferencias dos á dos de las n raices de la ecuación $U = o$, que son $\frac{1}{2} n\, (n-1)$, deberá afectarse al producto final del signo $(-1)^{\frac{1}{2} n (n-1)}$; luego la resultante buscada será

$$R\,(U,\, U'_x) = U'_{x_1} \cdot U'_{x_2} \cdot U'_{x_3} \cdot \ldots\ldots U'_{x_n} = (-1)^{\frac{1}{2} n (n-1)} \times$$
$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \ldots\, y_n \cdot (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 \ldots\ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2.$$

Dividiendo ahora por $a_0 = y_1\, y_2 \ldots y_n$, para obtener el discriminante, obtendremos finalmente

$$\Delta_2^n = (-1)^{\frac{1}{2} n\, (n-1)} (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 \ldots (x_{n-1} y_n - y_{n-1} x_n)^2, \quad (1)$$

como queríamos demostrar.

Observación.—Si en la expresión (1) que acabamos de obtener hacemos $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, obtendremos la proposición siguiente que es de frecuente aplicación. *El discriminante de una ecuación es igual al producto de los cuadrados de las diferencias de las raices de esta ecuación.*

12.—**Teorema VII.**—*Si una forma binaria admite raices iguales, su discriminante es nulo, y recíprocamente.*

En efecto, sea la forma $U = (a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, a_n)\, (x,\, y)^n$, y supongamos que admita solamente dos raices iguales $(x_1,\, y_1)$, $(x_2,\, y_2)$: si tál sucede tendremos

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} \qquad \text{ó sea} \qquad x_1\, y_2 - y_1\, x_2 = o$$

y por lo tanto según la expresión (1) del discriminante, $\Delta_2^n = o$. Recíprocamente, si $\Delta_2^n = o$, el segundo miembro de la expresión (1) no puede anularse de otra manera sinó anulándose uno, al menos, de sus factores; de donde si

$$x_1\, y_2 - y_1\, x_2 = o \qquad \text{se deducirá} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$

y por consiguiente la ecuación $U=o$ tendrá al menos dos raices iguales.

Observación.—De este teorema puede darse también la siguiente sencillísima demostración. El discriminante de la forma U es, según hemos visto (n.º 10), el cociente de la resultante de las ecuaciones $U=o$ y $U_x'=o$ dividida por a_0; mas si esta resultante es nula, estas dos ecuaciones tienen una raiz común que será una raiz doble de la ecuación $U=o$ (a).

Aplicaciones.—La proposición anterior puede fácilmente aplicarse á las ecuaciones de 2.º, 3.º y 4.º grado. Así, de la ecuación general de segundo grado

$$a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = o$$

se obtiene, haciendo $z = \frac{x}{y}$ y multiplicando por y^2, la forma

$$a_0 x^2 + a_1 xy + a_2 y^2 = o;$$

cuyo discriminante

$$\Delta_2^2 = \begin{vmatrix} 2a_0 & a_1 \\ a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 4a_0 a_2 - a_1^2$$

debe ser cero para que la ecuación tenga sus dos raices iguales.

Del mismo modo, sea la ecuación de tercer grado presentada bajo su forma más sencilla

$$z^3 + pz + q = o;$$

haciendo $z = \frac{x}{y}$ y multiplicando por y^3, se obtiene la forma

$$x^3 + pxy^2 + qy^3 = o:$$

(a)—(S. B.—2.º—n.º 310).—(R.—2.º—n.º 463).—(B.—2.ª parte.—n.º 200 y sig.).—(L.—3.º—Pág. 13 y sig.).

formando su discriminante obtendremos,

$$\Delta_2{}^3 = \begin{vmatrix} 3 & o & p & o \\ o & 3 & o & p \\ o & 2p & 3q & o \\ o & o & 2p & 3q \end{vmatrix} = 3\,(4p^3 + 27q^2)$$

que igualado á cero dá la condición que se obtiene por los procedimientos vulgares del Álgebra (a).

13.—**Teorema VIII.**—*Si una forma binaria contiene un factor elevado al cuadrado, su discriminante es nulo.*

En efecto, si la forma U, contiene un cierto factor elevado al cuadrado, cada una de sus derivadas U_x' y U_y' contendrá este mismo factor elevado á la primera potencia, y por consiguiente, su resultante será nula; pero esta resultante es por definición el discriminante de la forma U, luego queda demostrado el teorema.

Observación.—De un modo análogo, ha hecho notar Salmon, que si una forma ternaria puede ponerse bajo la forma

$$U = X^2\varphi + XY\psi + Y^2\omega$$

siendo X é Y polinomios de la forma

$$X = ax + by + cz, \qquad Y = a'x + b'y + c'z,$$

y φ, ψ, ω formas del orden $n-2$, el discriminante de la U se anulará por las soluciones comunes de las ecuaciones $X = o$, $Y = o$: porque, en efecto, este discriminante es la resultante de las tres ecuaciones

$$U'_x = o, \quad U'_y = o, \quad U'_z = o$$

y cada una de estas derivadas contendrá sea el factor X sea el Y; al propio tiempo que cada solución común se hallará dos veces en la forma propuesta U.

(a).—(S. B.—2.º—n.º 317).—(B.—2.ª parte.—n.º 203).—(L.—3.º—Pág. 55).

En general, el anulamiento del discriminante es indicio de que la forma correspondiente admite raices iguales. Y estas raices que anulan á un mismo tiempo á todas las primeras derivadas de una forma se las llama *raices singulares*.

14.—Teorema IX.—*El discriminante del producto de dos formas binarias es igual al producto de los discriminantes de estas formas multiplicado por el cuadrado de su resultante.*

Sean, en efecto, las dos formas binarias

$$U=(a_0, a_1, \ldots a_m)(x, y)^m, \quad \text{y} \quad V=(b_0, b_1, \ldots b_n)(x, y)^n;$$

designemos con (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_m, y_m) las raices de la primera, y con (x', y'), (x'', y''), ... $(x^{(n)}, y^{(n)})$ las de la segunda: sus respectivos discriminantes tendrán según sabemos la forma (n.° 11),

$$\Delta_2^m=(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}(x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 (x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 \ldots (x_{m-1} y_m - y_{m-1} x_m)^2,$$

$$\Delta_2^n=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}(x' y'' - y' x'')^2 (x' y''' - y' x''')^2 \ldots (x^{(n-1)} y^{(n)} - y^{(n-1)} x^{(n)})^2;$$

ahora bien el producto de las dos formas U y V, igualado á cero, tendrá necesariamente las m raices de $U=o$, y las n de $V=o$; por consiguiente su discriminante será igual al producto de los cuadrados de las diferencias de todas sus $m+n$ raices tomadas dos á dos. Por lo tanto, este discriminante contendrá, no sólo todos los factores de Δ_2^m y Δ_2^n, sinó también los cuadrados de las diferencias entre las raices de $U=o$ y $V=o$; pero el producto de estas diferencias es la resultante R de U y V, luego el discriminante del producto será

$$\Delta_2^{m+n} = \Delta_2^m \,.\, \Delta_2^n \,.\, R^2$$

como se quería demostrar.

Corolario.—*Si una función racional y entera de* x *es de la forma* (x—a) . φ (x), *su discriminante será el mismo de* φ (x) *multiplicado por el cuadrado de* φ (a).

En efecto, considerando á $(x-a) \cdot \varphi(x)$ como el producto de dos factores $x-a$ y $\varphi(x)$, tenemos que el discriminante del primero es la unidad, la resultante de estos dos factores es $\varphi(a)$; luego según el teorema anterior, el discriminante de $(x-a)$. $\varphi(x)$ es igual al discriminante de $\varphi(x)$ multiplicado por $[\varphi(a)]^2$.

15.—**Teorema X.**—*El discriminante de una forma binaria* $U=(a_0, a_1, \ldots. a_n)(x, y)^n$ *es de la forma* $a_n\ \varphi + a^2_{n-1}\ \Delta_2^{n-1}$; *siendo* φ *una función de los coeficientes de* U, y Δ_2^{n-1} *el discriminante de la función*

$$f(x, y)=(a_0, a_1, \ldots a_{n-1})(x, y)^{n-1}.$$

Es evidente, en efecto, que si formamos el discriminante de la forma dada y hacemos en él $a_n=o$, deberemos obtener el mismo resultado que haciendo $a_n=o$ en la forma propuesta U y formando después el discriminante de la forma resultante. Pero si hacemos $a_n=o$ en la forma U, se obtiene

$$x\,(a_0, a_1, \ldots. a_{n-1})(x, y)^{n-1} \quad \text{ó sea} \quad (x-o)\,f(x, y),$$

y por consiguiente el discriminante sería, según el corolario anterior,

$$\Delta_2^{n-1}\left[f(o, y)\right]^2;$$

y como $f(o, y)=a_{n-1}$, este discriminante será

$$a^2{}_{n-1} \cdot \Delta_2{}^{n-1}.$$

Ahora bien, es evidente, según lo antes observado, que á este mismo resultado se debe llegar si hacemos $a_n=o$ en el discriminante de la forma dada, lo que exije que este discriminante tenga la forma

$$\Delta_2^n = a_n \varphi + a^2_{n-1} \Delta_2^{n-1},$$

siendo φ una función de los coeficientes de U.

Por un razonamiento análogo al anterior se probaría qué, el discriminante de la forma U es de la forma $a_0 \psi + a_1^2 \Delta'^{n-1}_2$; siendo $\Delta_2'^{\,n-1}$ el discriminante de la forma $(a_1, a_2, \dots a_n)(x, y)^{n-1}$.

CAPÍTULO III.

JACOBIANO Y HESSIANO.

16.—**Jacobiano: definición.**—*Si se tiene un sistema de* n *funciones con* n *variables independientes, y se forma un determinante que tenga por elementos de cada fila las primeras derivadas de una misma función con relación á cada una de las variables; el determinante así formado recibe el nombre de* **determinante de Jacobi** *ó* **Jacobiano** (a) *del sistema propuesto.*

Sean U_1, U_2,.... U_n, n funciones con otras tantas variables independientes x_1, x_2, ... x_n; designemos, de una manera general, por U'_{rs} la primera derivada de la función U_r con relación á la variable x_s; y formemos el determinante

$$J = \begin{vmatrix} U'_{11} & U'_{12} & U'_{13} \cdots\cdots & U'_{1n} \\ U'_{21} & U'_{22} & U'_{23} \cdots\cdots & U'_{2n} \\ U'_{31} & U'_{32} & U'_{33} \cdots\cdots & U'_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ U'_{n1} & U'_{n2} & U'_{n3} \cdots\cdots & U'_{nn} \end{vmatrix};$$

este determinante será el *Jacobiano* del sistema U_1, U_2,... U_n.

Ejemplos.—1.°—Supongamos que deseamos calcular el Jacobiano de las dos formas binarias cuadráticas;

$$U = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2, \qquad V = b_0 x^2 + 2b_1 xy + b_2 y^2.$$

Designando por U_x' y U_y' las derivadas primeras de U con relación á x é y; y por V_x' y V'_y, las de V; la fórmula (1) del Jacobiano nos dará en este caso:

$$J = \begin{vmatrix} U_x' & U_y' \\ V_x' & V_y' \end{vmatrix};$$

(a)—Se le dá este nombre en memoria del matemático alemán, del primer tercio de este siglo, Cárlos Gustavo Jacobi que fué quien primero lo empleó.

y sustituyendo en lugar de U_x', U_y', V_x', V_y', sus valores, se tendrá el determinante

$$J = \begin{vmatrix} 2\,(a_0\,x + a_1\,y) & 2\,(a_1\,x + a_2\,y) \\ 2\,(b_0\,x + b_1\,y) & 2\,(b_1\,x + b_2\,y) \end{vmatrix}$$

que desarrollado nos producirá para valor del Jacobiano

$$J = 4\ \left\{ (a_0\,x + a_1\,y)\,(b_1\,x + b_2\,y) - (a_1\,x + a_2\,y)\,(b_0\,x + b_1\,y) \right\},$$

ó bien efectuando operaciones y ordenando,

$$J = 4\ \left\{ (a_0\,b_1 - a_1\,b_0)\,x^2 + (a_0\,b_2 - a_2\,b_0)\,xy + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,y^2 \right\}.$$

2.º—Imaginemos ahora que se desea hallar el Jacobiano de las dos cúbicas binarias

$$U = a_0\,x^3 + 3a_1x^2y + 3a_2xy^2 + a_3y^3,$$

$$V = b_0x^3 + 3b_1x^2y + 3b_2xy^2 + b_3y^3:$$

hallando sus derivadas y sustituyéndolas en la fórmula del Jacobiano obtenida para el ejemplo anterior, se tiene

$$J = \begin{vmatrix} 3\,(a_0x^2 + 2a_1\,xy + a_2\,y^2) & 3\,(a_1\,x^2 + 2a_2\,xy + a_3\,y^2) \\ 3\,(b_0\,x^2 + 2b_1\,xy + b_2\,y^2) & 3\,(b_1\,x^2 + 2b_2\,xy + b_3\,y^2) \end{vmatrix}$$

que desarrollado nos dará para el Jacobiano el valor

$$J = 3^2 \left\{ \begin{array}{l} (a_0\,x^2 + 2a_1\,xy + a_2\,y^2)\,(b_1\,x^2 + 2b_2\,xy + b_3\,y^2) \\ -(a_1\,x^2 + 2a_2\,xy + a_3\,y^2)\,(b_0\,x^2 + 2b_1\,xy + b_2\,y^2) \end{array} \right\},$$

ó sea, verificando operaciones,

$$J = 3^2 \left\{ \begin{array}{l} (a_0\,b_1 - a_1\,b_0)\,x^4 + 2\,(a_0\,b_2 - a_2\,b_0)\,x^3\,y + \\ (a_0b_3 - a_3b_0)x^2y^2 + 2(a_1b_3 - a_3b_1)xy^3 + (a_2b_3 - a_3b_2)y^4 \end{array} \right\}.$$

17.—Propiedades del Jacobiano.—Teorema I.—*Si* n *funciones* $U_1, U_2, \dots U_n$, *de otras tantas variables* $x_1, x_2, \dots x_n$, *se hallan ligadas entre sí en virtud de una relación* $\varphi(U_1, U_2, \dots U_n) = o$, *el Jacobiano de estas funciones es idénticamente nulo.*

En efecto, si entre las funciones propuestas tiene lugar la ecuación

$$\varphi(U_1, U_2, \dots U_n) = o$$

también se verificarán las n siguientes que de ella se derivan (a):

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \varphi}{\partial U_1} \cdot \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_2} \cdot \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} + \dots\dots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_n} \cdot \dfrac{\partial U_n}{\partial x_1} = o \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial U_1} \cdot \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_2} \cdot \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} + \dots\dots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_n} \cdot \dfrac{\partial U_n}{\partial x_2} = o \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dfrac{\partial \varphi}{\partial U_1} \cdot \dfrac{\partial U_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_2} \cdot \dfrac{\partial U_2}{\partial x_n} + \dots\dots + \dfrac{\partial \varphi}{\partial U_n} \cdot \dfrac{\partial U_n}{\partial x_n} = o
\end{array}\right\}$$

Ahora bien, el determinante de este sistema de ecuaciones, eligiendo los valores $\dfrac{\partial \varphi}{\partial U}$ como incógnitas, es el Jacobiano de las n funciones propuestas, con la única diferencia de que las filas se hallan cambiadas en columnas. Y como por otra parte para que exista un sistema de valores que satisfaga á las ecuaciones precedentes es preciso que su determinante sea idénticamente nulo, el Jacobiano de las n funciones propuestas es nulo, como queríamos demostrar.

18.—Supongamos que tenemos n funciones $U_1, U_2, \dots U_n$, de las n variables independientes $x_1, x_2, \dots\dots x_n$; y supongamos además que en la función U_1 no falta la variable x_1; resolvamos la ecuación $U_1 = o$ con relación á x_1, y obtendremos un valor que

(a)—(S. B.—2.º—n.º 286).—(B.—2.ª parte.—n.º 147).—(L.—2.º—Pág. 172.).

Se designa, de un modo general, por $\dfrac{\partial \varphi}{\partial U}$ la derivada de la función φ con relación á la variable U.

tendrá la forma $x_1 = f(U_1, x_2, \ldots x_n)$. Sustituyamos este valor de x_1 en la función U_2, en la cual supondremos no falta la variable x_2 después de verificar la sustitución indicada: despejemos en la función U_2 así trasformada la variable x_2, y designemos por $x_2 = F(U_1, U_2, x_3, \ldots x_n)$ su valor. Sustituyamos ahora en la función U_3 los valores de x_1 y x_2; supongamos que después de verificadas estas sustituciones no falte en esta función U_3 la variable x_3, y despejemos su valor que tendrá la forma $x_3 = \varphi(U_1, U_2, U_3, \ldots x_n)$. Continuemos de esta manera hasta que hayamos sustituido en la función U_n el valor de x_{n-1} en función de $U_1, U_2, \ldots U_{n-1}, x_n$. De este modo podemos considerar implícitamente, y de una manera general,

á U_1	como	función	de $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n$;
á U_2	»	»	» $U_1, x_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n$;
á U_3	»	»	» $U_1, U_2, x_3, \ldots x_{n-1}, x_n$;
.....			
.....			
á U_n	»	»	» $U_1, U_2, U_3, \ldots U_{n-1}, x_n$;

y convengamos además en designar por $\left(U'_{1x_1}\right)$, $\left(U'_{2x_2}\right)$, ... $\left(U'_{nx_n}\right)$ las derivadas de las funciones U así trasformadas. Esto sentado vamos á demostrar qué:

Teorema II.—*El Jacobiano de las funciones* $U_1, U_2, \ldots U_n$ *tiene la forma*

$$J = \left(U'_{1x_1}\right) \cdot \left(U'_{2x_2}\right) \cdots\cdots \left(U'_{nx_n}\right). \qquad (2)$$

Consideremos, en efecto, tres funciones

$$U_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3),\ U_2 = \psi(x_1, x_2, x_3),\ U_3 = \theta(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

de las tres variables independientes x_1, x_2, x_3; en las qué supondremos no falta la variable x_1 en U_1, la x_2 en U_2, y la x_3 en U_3. Despejemos en la expresión $U_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ el valor de x_1, que tendrá la forma

$$x_1 = f(U_1, x_2, x_3):$$

sustituyendo este valor de x_1 en los de U_2 y U_3, obtendremos:

$$U_2 = \psi_1(U_1, x_2, x_3), \qquad U_3 = \theta_1(U_1, x_2, x_3).$$

Deduzcamos de la primera de estas expresiones $U_2 = \psi_1(U_1, x_2, x_3)$ el valor de x_2, que tendrá la forma

$$x_2 = F(U_1, U_2, x_3),$$

y sustituyendo por último, este valor en la expresión $U_3 = \theta_1(U_1, x_2, x_3)$ se obtendrá finalmente

$$U_3 = \theta_2(U_1, U_2, x_3):$$

de manera que las tres expresiones (3) se podrán sustituir, sin inconveniente alguno, por las

$$U_1 = \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad U_2 = \psi_1(U_1, x_2, x_3), \quad U_3 = \theta_2(U_1, U_2, x_3).$$

Tratemos ahora de formar el Jacobiano de estas funciones y convengamos, según antes hemos indicado, en designar por $\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right), \ldots.. \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)$ las derivadas de las funciones U_1, U_2, U_3 así trasformadas; tendremos, según ya sabemos (a)

$$U'_{1x_1} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right), \quad U'_{1x_2} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right), \quad U'_{1x_3} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right);$$

$$U'_{2x_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right), \quad U'_{2x_2} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right),$$

$$U'_{2x_3} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right);$$

$$U'_{3x_1} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right), \quad U'_{3x_2} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right),$$

$$U'_{3x_3} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_2}\right) \cdot \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right);$$

(a).—(S. B.—2.º—n.º 286).—(B.—2.ª parte.—n.º 147).—(L.—2.º—Pág 172).

de manera que el Jacobiano será el determinante

$$J=\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) \\ \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right)+\left(\frac{\partial U_3}{\partial U_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial U_3}{\partial U_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right)+\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix};$$

pero este determinante es el producto de los dos siguientes (a):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial U_2}{\partial U_1}\right) & 1 & 0 \\ \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_1}\right) & \left(\frac{\partial U_3}{\partial U_2}\right) & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right) & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) & \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) & \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{vmatrix}$$

y de este producto se deduce fácilmente

$$J=\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\cdot\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right);$$

ó sea aplicando la notación indicada en el enunciado del teorema

$$J=\left(U'_{1x_1}\right)\cdot\left(U'_{2x_2}\right)\cdot\left(U'_{3x_3}\right)$$

como queríamos demostrar.

Nota.—Aunque la demostración de esta proposición está explicada en el caso particular de tres ecuaciones el razonamiento es completamente general, y el teorema puede aplicarse por consiguiente á un número cualquiera de funciones.

(a)—(S. B.—2.°—n.° 258).—(R.—2.°—n.° 117).—(B.— Apéndice n.° XIII). —(L.—1.°—Pág. 142).

19.—Teorema III.—*Si el Jacobiano de un sistema de* n *funciones* $U_1, U_2, \ldots U_n$ *se anula idénticamente, estas funciones no pueden ser independientes.*

Efectivamente, según la proposición precedente, el Jacobiano de dichas funciones estará expresado por la fórmula (2), y por consiguiente si $J = o$, debe necesariamente anularse uno, al menos, de los factores del segundo miembro. Ahora bien, las derivadas $\left(U'_{1x_1}\right)$, $\left(U'_{2x_2}\right)$, ... $\left(U'_{n-1x_{n-1}}\right)$ no pueden ser nulas, porque U_1 contiene, según las trasformaciones ejecutadas, á la variable x_1, U_2 contiene á x_2, y así sucesivamente: por consiguiente el último factor $\left(U'_{nx_n}\right)$ deberá ser nulo; lo cual significa que la función U_n expresada en función de U_1, U_2, ... U_{n-1} y en general de x_n, derivada con relación á esta variable, dá por resultado cero, ó lo que es lo mismo, es independiente de esta variable y por tanto debe verificarse que

$$U_n = f\left(U_1, U_2, \ldots U_{n-1}\right), \text{ ó sea, } \varphi\left(U_1, U_2, \ldots U_{n-1}, U_n\right) = o;$$

lo que demuestra el teorema enunciado.

Podría suceder que las funciones U_{n-1}, U_n, después de verificadas las trasformaciones indicadas en el teorema anterior, resultasen ambas independientes de x_{n-1}, x_n; y entonces se tendría

$$\left(U'_{n-1x_{n-1}}\right) = o \quad , \quad \left(U'_{nx_n}\right) = o,$$

lo cual daría lugar á dos ecuaciones de relación entre las funciones propuestas U_1, U_2, ... U_n. Como este razonamiento se puede generalizar, se deduce que si el Jacobiano de estas funciones es nulo, las funciones no pueden ser independientes

Nota.—Esta proposición es la recíproca del teorema 1.º (n.º 17).

Escolio.—Demostrados los teoremas 1.º y 3.º, ó sean, directo y recíproco, pueden admitirse como demostrados los dos siguientes que son sus contrarios respectivos;—*Si* n *fun-*

ciones de otras tantas variables son independientes entre sí, su Jacobiano no puede ser nulo; y recíprocamente, *si el Jacobiano de varias funciones no es nulo las funciones dadas son independientes entre sí.*

20.—Teorema IV.—*Si un número cualquiera de ecuaciones se verifica por un sistema de valores de las variables, este sistema satisfará también á su Jacobiano: y si las ecuaciones son del mismo grado, este sistema verificará igualmente á las ecuaciones obtenidas tomando las derivadas del Jacobiano con relación á cada una de las variables.*

1.°—Sean, por ejemplo, tres funciones U_1, U_2, U_3, de tres variables x_1, x_2, x_3, y de los grados n_1, n_2, n_3 respectivamente; el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas nos dá

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial U_1}{\partial x_3} = n_1 \; U_1 \\ x_1 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial U_2}{\partial x_3} = n_2 \; U_2 \\ x_1 \dfrac{\partial U_3}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial U_3}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial U_3}{\partial x_3} = n_3 \; U_3 \end{array}\right\} . \qquad (4)$$

Si representamos por M_1, N_1, P_1 los menores del Jacobiano de estas funciones correspondientes á los elementos $\dfrac{\partial U_1}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial U_2}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial U_3}{\partial x_1}$, ó sean los menores obtenidos suprimiendo la fila y columna en que estos elementos se hallan colocados, y resolvemos las ecuaciones precedentes con relación á x_1, obtendremos:

$$Jx_1 = M_1 \, n_1 \, U_1 + N_1 \, n_2 \, U_2 + P_1 \, n_3 \, U_3; \qquad (5)$$

ecuación de la cual fácilmente se deduce que todo sistema de valores que satisfaga á las ecuaciones

$$U_1 = o, \quad U_2 = o, \quad U_3 = o,,$$

satisfface también á la

$$J=0.$$

2.°—Además, si en la hipótesis de ser $n_1=n_2=n_3$, se hallan las derivadas de la ecuación (5) con relación á cada una de las variables x_1, x_2, x_3, se obtendrán las expresiones

$$\left.\begin{aligned}
J+x_1\frac{\partial J}{\partial x_1}&=n_1U_1\frac{\partial M_1}{\partial x_1}+n_1U_2\frac{\partial N_1}{\partial x_1}+n_1U_3\frac{\partial P_1}{\partial x_1}+\\
&\quad n_1\left(M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right)\\
x_1\frac{\partial J}{\partial x_2}&=n_1U_1\frac{\partial M_1}{\partial x_2}+n_1U_2\frac{\partial N_1}{\partial x_2}+n_1U_3\frac{\partial P_1}{\partial x_2}+\\
&\quad n_1\left(M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_2}\right)\\
x_1\frac{\partial J}{\partial x_3}&=n_1U_1\frac{\partial M_1}{\partial x_3}+n_1U_2\frac{\partial N_1}{\partial x_3}+n_1U_3\frac{\partial P_1}{\partial x_3}+\\
&\quad n_1\left(M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)
\end{aligned}\right\}, \quad (6)$$

pero según una propiedad bien conocida de los determinantes (a) se tiene:

$$M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_1}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_1}=J,$$

$$M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_2}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_2}=o,$$

$$M_1\frac{\partial U_1}{\partial x_3}+N_1\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+P_1\frac{\partial U_3}{\partial x_3}=o.$$

Ahora bien, todo sistema de valores de las variables que satisfaga á las ecuaciones

$$U_1=o,\quad U_2=o,\quad U_3=o,$$

(a).—(S. B.—2.°—n.° 261).—(R.—2.°—n.° 102).—(B.—2.ª parte.—n.° 60)—(L.—1.°—Pág. 133).

reduce también á cero su Jacobiano J, según lo demostrado antes, y convertirá por lo tanto á las ecuaciones (6) en

$$\frac{\partial J}{\partial x_1}=o,\ \frac{\partial J}{\partial x_2}=o,\ \frac{\partial J}{\partial x_3}=o;$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

Nota.—Aunque la demostración de esta proposición está explicada en el caso particular de tres ecuaciones el razonamiento es completamente general, y el teorema puede aplicarse por consiguiente á un número cualquiera de funciones.

21.—Hessiano: definición.—*Si se hallan las* n *primeras derivadas parciales de una función cualquiera de* n *variables, y se forma después el Jacobiano de las* n *funciones resultantes, el determinante así obtenido recibe el nombre de* **Hessiano** (a) *de la función propuesta.*

La definición misma de este determinante nos hace conocer que sus elementos no son otros que las segundas derivadas de la función propuesta. Así que si designamos por

$$U=\varphi\,(x_1,\ x_2,\ \ldots x_n)$$

una función; por $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}$, ... $\frac{\partial U}{\partial x_n}$ sus primeras derivadas, y por $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1\,\partial x_2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$, ... $\frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}$ sus derivadas segundas, el Hessiano de la función U tendrá la forma

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} . \quad (7)$$

(a).—Se le dá este nombre en memoria del matemático alemán contemporáneo Otto Hesse, que fué quien primeramente lo empleó.

Ejemplos.—1.º—Supongamos primero que se desea calcular el Hessiano de la forma binaria cuadrática

$$U = a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2.$$

Las primeras derivadas parciales de esta función son

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2a_0 x + 2a_1 y,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2a_1 x + 2a_2 y;$$

y las segundas serán

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2a_0,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y . \partial x} = 2a_1,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2a_2;$$

y como la fórmula general del Hessiano (7) se reduce en el caso de las formas binarias á

$$H = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x . \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y . \partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

verificando las sustituciones convenientes se obtendrá

$$H = \begin{vmatrix} 2a_0 & 2a_1 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix} = 4 \, (a_0 a_2 - a_1^2).$$

2.º—Tratemos de calcular ahora el Hessiano de la forma cúbica binaria

$$U = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3.$$

Las primeras derivadas parciales de esta forma son

$$\frac{\partial U}{\partial x}=3a_0 x^2+3\,.\,2a_1\,xy+3a_2\,y^2,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=3a_1\,x^2+3\,.\,2a_2\,xy+3a_3\,y^2;$$

y las segundas serán

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=3\,.\,2a_0\,x+3\,.\,2a_1\,y,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\,.\,\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\,.\,\partial x}=3\,.\,2\,.\,a_1\,x+3\,.\,2\,.\,a_2\,y,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=3\,.\,2\,.\,a_2\,x+3\,.\,2\,.\,a_3\,y:$$

sustituyendo estos valores en la forma del Hessiano obtenida para el ejemplo anterior, tendremos

$$H=\begin{vmatrix} 3\,.\,2\,(a_0\,x+a_1\,y) & 3\,.\,2\,(a_1\,x+a_2\,y) \\ 3\,.\,2\,(a_1\,x+a_2\,y) & 3\,.\,2\,(a_2\,x+a_3\,y) \end{vmatrix}$$

$$=36\begin{vmatrix} a_0\,x+a_1\,y & a_1\,x+a_2\,y \\ a_1\,x+a_2\,y & a_2\,x+a_3\,y \end{vmatrix};$$

determinante que desarrollado dará para valor del Hessiano:

$$H=36\,\left\{(a_0\,x+a_1\,y)\,(a_2\,x+a_3\,y)-(a_1\,x+a_2\,y)^2\right\}$$

$$=36\,\left\{(a_0\,a_2-a_1^2)\,x^2+(a_0\,a_3-a_1\,a_2)\,xy+(a_1\,a_3-a_2^2)\,y^2\right\}.$$

22.—Propiedades del Hessiano.—Teorema I.—*El Hessiano de una forma es un determinante simétrico.*

Efectivamente, el Hessiano de una forma U de n variables independientes $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ está dado, según ya sabemos (n.º 21), por la fórmula

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 . \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n . \partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

y como en general para la función homogénea U se tiene,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_r . \partial x_s} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_s . \partial x_r},$$

los elementos conjugados de este determinante son iguales y del mismo signo, por lo tanto, es un determinante simétrico (a).

23.—**Teorema II.**—*El Hessiano de toda forma cuadrática de* n *variables, es igual á su discriminante multiplicado por* 2^n.

En efecto, sea la forma cuadrática de n variables $(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y, \ldots w)^2$, ó sea adoptando la notación de doble índice que en este caso es más ventajosa:

$$U = a_{11}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2 + \ldots\ldots + a_{nn}\,x_n^2 + 2a_{12}\,x_1\,x_2 + 2a_{13}\,x_1\,x_3 + \ldots\ldots + 2a_{n-1,n}\,x_{n-1}\,x_n.$$

(a).—(R.—2.º—n.º 54).—Recomendamos eficazmente que no se comience la lectura de los teoremas que siguen sin haber hecho antes un estudio muy detenido de los determinantes recíprocos, simétricos, hemisimétricos y pseudosimétricos. Pueden estudiarse estas cuestiones en el *Álgebra* de Rubini (2.º—números 123 á 142) ó en las siguientes obras recomendables bajo todos conceptos:

Echegaray (J.)—*Memoria sobre la teoría de las determinantes.*

Suárez. (A.) y Gascó (L. G.).—*Lecciones de Coordinatoria con las Determinantes y sus principales aplicaciones.*

Las n primeras derivadas parciales de esta forma son

$$U'_{x_1}=2\,(a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3+\ldots\ldots+a_{1n}\,x_n)\,,$$
$$U'_{x_2}=2\,(a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3+\ldots\ldots+a_{2n}\,x_n)\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$U'_{x_n}=2\,(a_{n1}\,x_1+a_{n2}\,x_2+a_{n3}\,x_3+\ldots\ldots+a_{nn}\,x_n)\,;$$

y su discriminante será por lo tanto

$$\Delta_n^{\,2}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Hallando ahora las segundas derivadas de la forma propuesta, y formando su Hessiano, obtendremos

$$H=\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13}\ldots & 2a_{1n} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23}\ldots & 2a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2a_{n1} & 2a_{n2} & 2a_{n3}\ldots & 2a_{nn} \end{vmatrix} =2.^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =2^n.\,\Delta_n^{\,2}$$

como queríamos demostrar.

24.—**Teorema III.**—*El discriminante de una forma cúbica binaria, y el de su Hessiano, son iguales y de signo contrario.*

Sea, por ejemplo, la forma cúbica binaria

$$U=a_0\,x^3+3a_1\,x^2\,y+3a_2\,xy^2+a_3\,y^3$$

cuyo Hessiano

$$H=36\,\left\{(a_0\,a_2-a_1^{\,2})\,x^2+(a_0\,a_3-a_1\,a_2)\,xy+(a_1\,a_3-a_2^{\,2})\,y^2\right\}$$

hemos calculado anteriormente (n.° 21, ejemplo 2.°). Siendo este Hessiano una forma binaria cuadrática, podemos calcular su discriminante, que representándolo por Δ_H, será

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} 2(a_0a_2-a_1^2) & (a_0a_3-a_1a_2) \\ (a_0a_3-a_1a_2) & 2(a_1a_3-a_2^2) \end{vmatrix}$$
$$=4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)-(a_0a_3-a_1a_2)^2;$$

y como el discriminante de la cúbica U es según ya sabemos (n.° 5, ejemplo 2.°),

$$\Delta_2^3=(a_0a_3-a_1a_2)^2-4(a_0a_2-a_1^2)(a_1a_3-a_2^2)$$

tendremos, según queríamos demostrar

$$\Delta_2^3 = -\Delta_H.$$

25.—**Teorema IV**.—*Si las primeras derivadas de una forma están ligadas por una cierta relación, el Hessiano de esta forma será idénticamente nulo.*

Efectivamente, por definición, el Hessiano de la forma propuesta es el Jacobiano de sus primeras derivadas, y este Jacobiano es nulo (n.° 17) cuando entre las funciones existe alguna relación.

26.—Designemos por U una función homogénea del grado m y de las n variables $x_1, x_2, \ldots . x_n$: aplicando á esta función el teorema de Euler sobre las funciones homogéneas, obtendremos la ecuación.

$$x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial U}{\partial x_3}+\ldots..+x_n\frac{\partial U}{\partial x_n}=mU. \quad (8)$$

Podemos ahora observar qué cada una de las derivadas de la función propuesta, $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots . \frac{\partial U}{\partial x_n}$, es á su vez otra función homogénea, del grado $m-1$, de las mismas n variables; y por consiguiente que si les aplicamos el teorema de Euler, obtendremos el siguiente sistema de n ecuaciones lineales con relación á las variables x_1, x_2, ... x_n:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+x_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_3}+\ldots+x_n\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_n}=(m-1)\dfrac{\partial U}{\partial x_1} \\
x_1\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2.\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}+x_3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2.\partial x_3}+\ldots+x_n\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2.\partial x_n}=(m-1)\dfrac{\partial U}{\partial x_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n.\partial x_1}+x_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n.\partial x_2}+x_3\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n.\partial x_3}+\ldots+x_n\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_n^2}=(m-1)\dfrac{\partial U}{\partial x_n}
\end{array}\right\};\ (9)$$

sistema de ecuaciones cuyo determinante es precisamente el Hessiano de la forma dada. Si al sistema de ecuaciones (9), unimos la (8) formaremos un sistema de $n+1$ ecuaciones con n incógnitas, sistema que para ser compatible exige que el determinante de todos sus coeficientes sea nulo (a). Para escribir con más comodidad este determinante representemos de un modo general por U'_r la primera derivada de la función propuesta con relación á x_r, y por U'_{rs} la derivada segunda de la misma función tomada primero con relación á x_r y después con relación á x_s, y hagamos además en la ecuación (8)

$$mU=(m-1)\ U_0,\quad \text{ó sea}\quad U_0=\frac{mU}{m-1};$$

y con estas convenciones el sistema formado por las ecuaciones (8) y (9) será el siguiente,

$$\left.\begin{array}{l}
x_1\ U'_1+x_2\ U'_2+x_3\ U'_3+\ldots\ldots+x_n\ U'_n=(m-1)\ U_0 \\
x_1\ U''_{11}+x_2\ U''_{12}+x_3\ U''_{13}+\ldots\ldots+x_n\ U''_{1n}=(m-1)\ U'_1 \\
x_1\ U''_{21}+x_2\ U''_{22}+x_3\ U''_{23}+\ldots\ldots+x_n\ U''_{2n}=(m-1)\ U'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_1\ U''_{n1}+x_2\ U''_{n2}+x_3\ U''_{n3}+\ldots\ldots+x_n\ U''_{nn}=(m-1)\ U'_n
\end{array}\right\}\ (10)$$

(a).—(S. B.—2.º—n.º 337).—(R.—2.º—n.º 147).—(B.—2.ª parte,—n.º 277).—(L.—1.º—Pág. 138).

cuyo determinante, después de suprimido el factor $(m-1)$ que afecta á los elementos de una misma columna, será

$$R = \begin{vmatrix} U_0 & U'_1 & U'_2 & \cdots\cdots & U'_n \\ U'_1 & U''_{11} & U''_{12} & \cdots\cdots & U''_{1n} \\ U'_2 & U''_{21} & U''_{22} & \cdots\cdots & U''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ U'_n & U''_{n1} & U''_{n2} & \cdots\cdots & U''_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

En este determinante, el complemento algébrico del primer elemento U_0 es el Hessiano

$$H = \begin{vmatrix} U''_{11} & U''_{12} & U''_{13} & \cdots\cdots & U''_{1n} \\ U''_{21} & U''_{22} & U''_{23} & \cdots\cdots & U''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ U''_{n1} & U''_{n2} & U''_{n3} & \cdots\cdots & U''_{nn} \end{vmatrix} \quad (12)$$

de la función propuesta U: por consiguiente si hacemos

$$R_0 = \begin{vmatrix} 0 & U'_1 & U'_2 & \cdots\cdots & U'_n \\ U'_1 & U''_{11} & U''_{12} & \cdots\cdots & U''_{1n} \\ U'_2 & U''_{21} & U''_{22} & \cdots\cdots & U''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ U'_n & U''_{n1} & U''_{n2} & \cdots\cdots & U''_{nn} \end{vmatrix} \quad (13)$$

la expresión (11) se trasforma en la ecuación

$$H.\, U_0 + R_0 = 0;$$

obteniéndose así una relación muy sencilla entre el Hessiano de una forma y la trasformada R_0 de la resultante R de las $n+1$ ecuaciones (10).

Teniendo en cuenta las observaciones y notaciones que acabamos de explicar, podemos pasar á establecer el siguiente teorema, que es de la mayor importancia.

Teorema V.—*Dada una forma* U *de* n *variables y del grado* m; *siendo* $R=0$ *la resultante del sistema de las* $n+1$ *ecuaciones con* n *incógnitas obtenidas aplicando el teorema de Euler á la función propuesta y á sus* n *primeras derivadas parciales; y representando además por* M_r *y* M_{rs} *los complementos algébricos de* U'_r *y* U''_{rs}, *tomados en el determinante* R; *vamos á probar qué*

$$M_r : M_{r1} : M_{r2} : \dots\dots : M_{rn} : : \sqrt{H} : \sqrt{M_{11}} : \sqrt{M_{22}} : \dots\dots : \sqrt{M_{nn}} \quad (14)$$

siendo H *el Hessiano de la forma* U.

Efectivamente, siendo el determinante R nulo y simétrico, su recíproco, que designaremos por R', será también nulo y simétrico (a). Ahora bien, según las notaciones sentadas en el enunciado, se tendrá

$$R' = \begin{vmatrix} H & M_1 & M_2 & \dots\dots & M_n \\ M_1 & M_{11} & M_{12} & \dots\dots & M_{1n} \\ M_2 & M_{21} & M_{22} & \dots\dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_n & M_{n1} & M_{n2} & \dots\dots & M_{nn} \end{vmatrix}$$

y en este determinante se verificará la propiedad de los determinantes simétricos (b) expresada por la relación que queríamos demostrar:

$$M_r : M_{r1} : M_{r2} : \dots\dots : M_{rn} : : \sqrt{H} : \sqrt{M_{11}} : \sqrt{M_{22}} : \dots\dots : \sqrt{M_{nn}} .$$

(a).—(R.—2.º—n.os 127 y 129).
(b).—(R.—2.º—n.º 30).

27.—**Teorema VI.**—*Si en el determinante* R (véase fórmula (11) del n.º anterior), *es nulo el complemento de un elemento dado, nulo será también el complemento de cualquier otro elemento.*

Efectivamente, hagamos $x_0 = -(m-1)$ en las ecuaciones (10) del número anterior y este sistema se convertirá en el siguiente,

$$\left.\begin{array}{l} U'_0\, x_0 + U'_1\, x_1 + U'_2\, x_2 + \ldots\ldots + U'_n\, x_n = 0 \\ U'_1\, x_0 + U''_{11}\, x_1 + U''_{12}\, x_2 + \ldots\ldots + U''_{1n}\, x_n = 0 \\ U'_2\, x_0 + U''_{21}\, x_1 + U''_{22}\, x_2 + \ldots\ldots + U''_{2n}\, x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U'_n\, x_0 + U''_{n1}\, x_1 + U''_{n2}\, x_2 + \ldots\ldots + U''_{nn}\, x_n = 0 \end{array}\right\}, \quad (15)$$

que tiene $n+1$ ecuaciones homogéneas con $n+1$ incógnitas. Desarrollemos el determinante R según los elementos de su primera fila y tendremos, recordando las notaciones del párrafo anterior,

$$R = U_0\, H + U'_1\, M_1 + U'_2\, M_2 + \ldots\ldots + U'_n\, M_n = 0; \quad (16)$$

además, según las propiedades de los determinantes citadas anteriormente (n.º 20, nota), se tendrá también

$$\left.\begin{array}{l} U'_1\, H + U''_{11}\, M_1 + U''_{12}\, M_2 + \ldots\ldots + U''_{1n}\, M_n = 0 \\ U'_2\, H + U''_{21}\, M_1 + U''_{22}\, M_2 + \ldots\ldots + U''_{2n}\, M_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U'_n\, H + U''_{n1}\, M_1 + U''_{n2}\, M_2 + \ldots\ldots + U''_{nn}\, M_n = 0 \end{array}\right\}. \quad (17)$$

Si comparamos ahora el sistema formado por las ecuaciones homogéneas (16) y (17) con el sistema (15), fácilmente veremos que las razones de los complementos algébricos

$$\frac{H}{M_n},\ \frac{M_1}{M_n},\ \frac{M_2}{M_n},\ \ldots\ldots\ \frac{M_{n-1}}{M_n},$$

pueden mirarse como uno de los valores de las razones

$$\frac{x_0}{x_n}, \frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots\ldots \frac{x_{n-1}}{x_n},$$

que satisfacen al sistema de ecuaciones homogéneas (15); de manera que tendremos

$$\frac{x_0}{x_n} = \frac{H}{M_n}, \frac{x_1}{x_n} = \frac{M_1}{M_n}, \ldots\ldots\ldots \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{M_{n-1}}{M_n},$$

ó lo que es lo mismo

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots\ldots : x_{n-1} : x_n \therefore H : M_1 : M_2 : \ldots\ldots : M_{n-1} : M_n. \quad (18)$$

Pero siendo $R=0$, se tiene (a)

$$H : M_1 : M_2 : \ldots. : M_{n-1} : M_n \therefore M_r : M_{r1} : M_{r2} : \ldots. : M_{rn-1} : M_{rn}, (19)$$

y recordando la fórmula (14) del teorema anterior, ó sea,

$$M_r : M_{r1} : M_{r2} : \ldots\ldots : M_{rn} \therefore \sqrt{H} : \sqrt{M_{11}} : \sqrt{M_{22}} : \ldots. : \sqrt{M_{nn}};$$

tendremos finalmente

$$x_0 : x_1 : x_2 \ldots\ldots : x_n \therefore \sqrt{H} : \sqrt{M_{11}} : \sqrt{M_{22}} : \ldots\ldots : \sqrt{M_{nn}}; \quad (20)$$

y de las igualdades (18), (19) y (20) se deduce qué, si uno de los complementos M es nulo, los restantes tienen también que serlo, conforme al enunciado del teorema.

Corolario.—*Si el Hessiano de una forma es nulo, el complemento algébrico de cualquier otro elemento del determinante* R$=0$, *será nulo; y recíprocamente.*

Porque el Hessiano H es el complemento del elemento U_0 en el determinante R.

(a).—(R.—2.º—n.º 127).

28.—**Teorema VII.**—*Si el Hessiano de una forma es nulo, y el complemento de uno cualquiera de sus elementos es igual á cero, nulo será también el complemento de cualquier otro elemento.*

En efecto, si el determinante H es nulo, representando por H el Hessiano de la forma, su recíproco será nulo también, y además los elementos de una línea cualquiera de este recíproco, serán proporcionales á los elementos homónimos de cualquiera otra línea (n.º 27, nota). Por consiguiente, siendo nulo uno cualquiera de los elementos de dicho recíproco, ó sea el complemento de un elemento del Hessiano H, nulos serán también todos los demás elementos del recíproco, ó sean, los complementos de todos los elementos restantes del Hessiano; que es lo que tratábamos de demostrar.

CAPÍTULO IV.

SUSTITUCIONES LINEALES.

29.—**Sustituciones lineales: definiciones.**—*Se dá el nombre de trasformación ó* **sustitución lineal**, *á la operación en virtud de la qué se sustituyen en una función homogénea las variables que contiene por otras nuevas, ligadas á las primitivas por medio de tantas ecuaciones lineales como variables tiene la función.* Sea, por ejemplo, la función homogénea $f(x_1, x_2, \dots x_n)$; diremos que verificamos en ella una *trasformación* ó *sustitución lineal,* cuando sustituyamos en lugar de $x_1, x_2, \dots x_n$, las nuevas variables $X_1, X_2, \dots X_n$, ligadas á las primitivas por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \dots + \omega_1 X_n \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \dots + \omega_2 X_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \lambda_n X_1 + \mu_n X_2 + \dots + \omega_n X_n \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

siendo los coeficientes $\lambda, \mu, \dots \omega$, cantidades constantes.

Las cantidades constantes $\lambda, \mu, \dots \omega$, reciben el nombre de *coeficientes de la sustitución,* y el determinante

$$M = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \dots\dots & \omega_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \dots\dots & \omega_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \mu_n & \dots\dots & \omega_n \end{vmatrix} \qquad (2)$$

formado por estas constantes escritas en el mismo orden en que se hallan en las ecuaciones (1), se llama *módulo de la sustitu-*

ción. Si el módulo de una sustitución es igual á la unidad la sustitución recibe el nombre de *unimodular*, según la denominación dada por Sylvester.

En el caso de que una sustitución tenga por condición el satisfacer á la ecuación

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots\ldots + X_n^2$$

se la denomina *sustitución ortogonal.*

El módulo de una sustitución lineal es el determinante de las ecuaciones (1) cuando se miran en ellas como incógnitas á las variables $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$; y ya sabemos (a) qué para que los valores de estas variables no sean indeterminados, es preciso que este determinante no sea idénticamente nulo, mientras las variables primitivas $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ se supongan independientes.

Ejemplo.—Vamos á estudiar, como ejemplo, el efecto producido en el discriminante de una forma binaria cuadrática por una sustitución lineal. Sea la forma

$$U = a_0\, x_1^2 + 2a_1\, x_1\, x_2 + a_2\, x_2^2;$$

sustituyamos en esta forma en lugar de x_1, x_2, los valores

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1\, X_1 + \mu_1\, X_2 \\ x_2 = \lambda_2\, X_1 + \mu_2\, X_2 \end{array}\right\}; \qquad (3)$$

y tendremos, representando por U_1 la trasformada

$$U_1 = a_0\, (\lambda_1\, X_1 + \mu_1\, X_2)^2 + 2a_1\, (\lambda_1\, X_1 + \mu_1\, X_2)\, (\lambda_2\, X_1 + \mu_2\, X_2)$$
$$+ a_2\, (\lambda_2\, X_1 + \mu_2\, X_2)^2;$$

ó sea, efectuando operaciones y ordenando con relación á X_1,

$$U_1 = (a_0\, \lambda_1^2 + 2a_1\, \lambda_1\, \lambda_2 + a_2\, \lambda_2^2)\, X_1^2 + 2\, (a_0\, \lambda_1\, \mu_1 + a_1\, \lambda_1\, \mu_2$$
$$+ a_1\, \lambda_2\, \mu_1 + a_2\, \lambda_2\, \mu_2)\, X_1\, X_2 + (a_0\, \mu_1^2 + 2a_1\, \mu_1\, \mu_2 + a_2\, \mu_2^2)\, X_2^2:$$

(a).—(S. B.—2.º—n.º 262).—(R.—2.º—n.º 142 y sig.).—(B.—2.ª parte. —n.ºs 60 y sig.).—(L.—1.º—Pág. 135).

y haciendo para abreviar

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = a_0\,\lambda_1^2 + 2a_1\,\lambda_1\,\lambda_2 + a_2\,\lambda_2^2 \\ A_1 = a_0\,\lambda_1\mu_1 + a_1\,\lambda_1\,\mu_2 + a_1\,\lambda_2\,\mu_1 + a_2\,\lambda_2\,\mu_2 \\ A_2 = a_0\,\mu_1^2 + 2a_1\,\mu_1\,\mu_2 + a_2\,\mu_2^2 \end{array}\right\} ; \qquad (4)$$

la expresión U_1 se reducirá á

$$U_1 = A_0\,X_1^2 + 2A_1\,X_1\,X_2 + A_2\,X_2^2$$

que es de la misma forma que la primitiva U.

El discriminante de la función U_1 será (n.º 5),

$$A_0\,A_2 - A_1^2$$

y en virtud de las fórmulas (4) podremos calcular este discriminante en función de los coeficientes de la forma dada U y de los de la sustitución lineal (3); en efecto haciendo las sustituciones convenientes se tiene

$$\begin{aligned} A_0\,A_2 - A_1^2 &= (a_0\,\lambda_1^2 + 2a_1\,\lambda_1\,\lambda_2 + a_2\lambda_2^2)\,(a_0\,\mu_1^2 + 2a_1\,\mu_1\,\mu_2 + a_2\mu_2^2) \\ &\quad - (a_0\,\lambda_1\,\mu_1 + a_1\,\lambda_1\,\mu_2 + a_1\,\lambda_2\,\mu_1 + a_2\,\lambda_2\,\mu_2)^2 \\ &= a_0\,a_2\,\lambda_2^2\,\mu_1^2 - 2a_0 a_2 \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 + a_0 a_2 \lambda_1^2 \mu_2^2 - a_1^2 \lambda_1^2 \mu_2^2 \\ &\quad + 2a_1^2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\mu_1\,\mu_2 - a_1^2\,\lambda_2^2\,\mu_1^2 \\ &= a_0\,a_2\,(\lambda_1\,\mu_2 - \mu_1\,\lambda_2)^2 - a_1^2\,(\lambda_1\,\mu_2 - \mu_1\,\lambda_2)^2 \\ &= (a_0\,a_2 - a_1^2)\,.\,(\lambda_1\,\mu_2 - \mu_1\,\lambda_2)^2. \end{aligned}$$

Observando ahora que $(a_0\,a_2 - a_1^2)$ es el discriminante de la función U, y $(\lambda_1\,\mu_2 - \mu_1\,\lambda_2)$ es el módulo de la sustitución (3) llegamos á la siguiente conclusión, que es del mayor interés; *El discriminante de la trasformada de una forma cuadrática binaria, por una sustitución lineal, es igual al discriminante* *de la forma primitiva multiplicado por el cuadrado del módulo de la sustitución.*

30.—**Sustituciones directas é inversas.**—Cuando se tienen dos sistemas de variables

$$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \qquad (\alpha)$$

$$y_1, y_2, \ldots\ldots y_n, \qquad (\beta)$$

y se quieren sustituir por otros dos sistemas de nuevas variables;

$$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n; \qquad (\alpha')$$

$$Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n; \qquad (\beta')$$

se deben distinguir los dos casos siguientes:

1.°—Si el sistema (α) se sustituye por el (α') en virtud de la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \ldots\ldots + \omega_1 X_n \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots\ldots + \omega_2 X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_n X_1 + \mu_n X_2 + \ldots\ldots + \omega_n X_n \end{array}\right\} ; \qquad (5)$$

y el sistema (β) se sustituye por el (β'), por las relaciones de trasformacion

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Y_2 + \ldots\ldots + \omega_1 Y_n \\ y_2 = \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \ldots\ldots + \omega_2 Y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \lambda_n Y_1 + \mu_n Y_2 + \ldots\ldots + \omega_n Y_n \end{array}\right\} ; \qquad (6)$$

de manera que el módulo de la sustitución (6) sea idéntico al de la sustitución (5); las dos sustituciones propuestas se llaman *directas*, y los sistemas de variables $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ se denominan *cogredientes*.

2.°—Si permaneciendo la misma la sustitución (5), el sistema (β) se sustituye por el (β') en virtud de la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \lambda_1\ y_1 + \lambda_2\ y_2 + \ldots\ldots + \lambda_n\ y_n \\ Y_2 = \mu_1\ y_1 + \mu_2\ y_2 + \ldots\ldots + \mu_n\ y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = \omega_1\ y_1 + \omega_2\ y_2 + \ldots\ldots + \omega_n\ y_n \end{array}\right\}, \qquad (7)$$

en la cual las nuevas variables se determinan en función de las primitivas, y cuyo módulo es el resultado de cambiar las filas por las columnas, y recíprocamente, en el módulo de la (5); entonces las dos sustituciones (5) y (7) se dice que son *inversas*, ó también *recíprocas*, y los sistemas de variables (x_1, x_2, .. . x_n) y (y_1, y_2, . .. y_n) se llaman *contragredientes*.

Representando por M el módulo de la sustitución (5), y por L_1, M_1, ... T_1, etc., los complementos algébricos de los elementos λ_1, μ_1, ... ω_1, etc., tomados en el mismo determinante M; y resolviendo las ecuaciones (7) con relación á las variables y_1, y_2, ... y_n obtendremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} My_1 = L_1\,Y_1 + M_1\,Y_2 + \ldots\ldots + T_1\,Y_n \\ My_2 = L_2\,Y_1 + M_2\,Y_2 + \ldots\ldots + T_2\,Y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ My_n = L_n\,Y_1 + M_n\,Y_2 + \ldots\ldots + T_n\,Y_n \end{array}\right\} \qquad (8)$$

que puede sustituir sin ningún inconveniente al sistema de ecuaciones (7) El módulo de este nuevo sistema de ecuaciones es

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \ldots\ldots & T_1 \\ L_2 & M_2 & \ldots\ldots & T_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ L_n & M_n & \ldots\ldots & T_n \end{vmatrix}$$

que es el determinante recíproco (a) del modulo M del sistema (5).

Examen de un caso particular.—En el caso particular de que sean dos únicamente las variables de los sistemas (α) y (β), las ecuaciones (5) y (8) se reducen á

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\lambda_1 X_1+\mu_1 X_2 \\ x_2=\lambda_2 X_1+\mu_2 X_2 \end{array}\right\}, \qquad (9)$$

y

$$\left.\begin{array}{l} My_1=L_1 Y_1+M_1 Y_2 \\ My_2=L_2 Y_1+M_2 Y_2 \end{array}\right\}; \qquad (10)$$

pero siendo el módulo de la sustitución (9) el determinante

$$M=\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix}$$

los valores de L_1, L_2, M_1, M_2, serán

$$L_1=\mu_2,\ L_2=-\mu_1,\ M_1=-\lambda_2,\ M_2=\lambda_1;$$

de manera que las ecuaciones (10) se convertirán en

$$\left.\begin{array}{l} My_1=\mu_2 Y_1-\lambda_2 Y_2 \\ My_2=-\mu_1 Y_1+\lambda_1 Y_2 \end{array}\right\}$$

(a).—(R.—2.°—n.° 123).

que pueden escribirse bajo la forma

$$\left.\begin{aligned} My_2 &= \lambda_1 Y_2 + \mu_1(-Y_1) \\ M(-y_1) &= \lambda_2 Y_2 + \mu_2(-Y_1) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

y estas ecuaciones nos hacen ver, teniendo en cuenta lo dicho en el caso primero, que á parte del factor constante M, las variables $y_2, -y_1$ son *cogredientes* con las x_1, x_2.

Nota.—Si se multiplica cada una de las ecuaciones (8) por la correspondiente del sistema (5) y se suman los resultados se obtendrá

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n, \qquad (12)$$

ecuación importantísima y de la que haremos frecuente uso más adelante.

31.—Propiedades de las sustituciones lineales.— Teorema I.—*Si un sistema de* n *funciones lineales con igual número de incógnitas se trasforma por medio de una sustitución lineal en un nuevo sistema, el determinante del sistema trasformado es igual al producto del determinante del sistema primitivo por el módulo de la sustitución.*

Sean, en efecto, las tres funciones lineales

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ U_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ U_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned}\right\}; \qquad (13)$$

verifiquemos en estas ecuaciones la sustitución lineal siguiente

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \nu_1 X_3 \\ x_2 &= \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \nu_2 X_3 \\ x_3 &= \lambda_3 X_1 + \mu_3 X_2 + \nu_3 X_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (14)$$

y se obtendrán las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} U_1=(a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+a_{13}\lambda_3)\,X_1+(a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+a_{13}\mu_3)\,X_2 \\ \qquad +(a_{11}\nu_1+a_{12}\nu_2+a_{13}\nu_3)\,X_3 \\ U_2=(a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+a_{23}\lambda_3)X_1+(a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+a_{23}\mu_3)\,X_2 \\ \qquad +(a_{21}\nu_1+a_{22}\nu_2+a_{23}\nu_3)\,X_3 \\ U_3=(a_{31}\lambda_1+a_{32}\lambda_2+a_{33}\lambda_3)\,X_1+(a_{31}\mu_1+a_{32}\mu_2+a_{33}\mu_3)\,X_2 \\ \qquad +(a_{31}\nu_1+a_{32}\nu_2+a_{33}\nu_3)\,X_3 \end{array}\right\} ; \quad (15)$$

pero el determinante de estas tres ecuaciones es

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2+a_{13}\lambda_3 & a_{11}\mu_1+a_{12}\mu_2+a_{13}\mu_3 & a_{11}\nu_1+a_{12}\nu_2+a_{13}\nu_3 \\ a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2+a_{23}\lambda_3 & a_{21}\mu_1+a_{22}\mu_2+a_{23}\mu_3 & a_{21}\nu_1+a_{22}\nu_2+a_{23}\nu_3 \\ a_{31}\lambda_1+a_{32}\lambda_2+a_{33}\lambda_3 & a_{31}\mu_1+a_{32}\mu_2+a_{33}\mu_3 & a_{31}\nu_1+a_{32}\nu_2+a_{33}\nu_3 \end{vmatrix}$$

que, según sabemos (a), es el producto de los dos determinantes

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix}$$

y estos son respectivamente el determinante del sistema primitivo, y el módulo de la sustitución lineal (**12**); luego queda demostrado el teorema

El mismo razonamiento podría aplicarse á un número cualquiera de funciones.

32.—**Teorema II.**—*Si una forma del grado* n *y con* k *variables se trasforma en otra mediante una sustitución lineal, los coeficientes de la trasformada son funciones homogéneas de grado* n *respecto á los coeficientes de la sustitución y de primer grado con relación á los de la forma primitiva.*

En efecto, siendo la forma propuesta homogénea y del grado n respecto á las variables que contiene $x_1, x_2, \ldots x_n$, su

(a).—(S. B.—2.°—n.° 258).—(R.—2.°—n.° 117).—(B.—Apéndice n.° XIII). (L.—1.°—Pág. 142).

trasformada será también homogénea y del grado n con relación á las nuevas variables X_1, X_2, ... X_n. Pero en la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \ldots\ldots + \omega_1 X_n \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots\ldots + \omega_2 X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_n X_1 + \mu_n X_2 + \ldots\ldots + \omega_n X_n \end{array}\right\}$$

los coeficientes λ, μ, ... ω, están unidos á las variables X_1, X_2, ... X_n, de tál manera que entran en cada término con los mismos exponentes que afectan á estas nuevas variables; luego los coeficientes de la trasformación serán funciones homogéneas y del grado n de los coeficientes de la sustitución.

Además, como la sustitución efectuada no afecta á los coeficientes de la forma propuesta, estos coeficientes entrarán en los de la trasformada con el mismo exponente que tenían en la dada, ó sea, con el exponente uno.

Nota.—Como comprobación, ó ejemplo, de esta propiedad pueden verse los coeficientes A_0, A_1, A_2, del ejemplo del n.° 29, que son de segundo grado con relación á λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 y del primero respecto á a_0, a_1, a_2.

33.—**Teorema III.**—*Si una función de varias variables* x_1, x_2, ...x_n, *se trasforma por medio de una sustitución lineal en función de otras variables* X_1, X_2, ... X_n; *las derivadas de la función con relación á las nuevas variables se expresan linealmente en función de las derivadas con relación á las primitivas, mediante la sustitución inversa de la empleada en la trasformación.*

Efectivamente, sea la función $U = \varphi\,(x_1, x_2, \ldots\, x_n)$; suponiendo que se verifica en ella la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \ldots\ldots + \omega_1 X_n \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots\ldots + \omega_2 X_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_n X_1 + \mu_n X_2 + \ldots\ldots + \omega_n X_n \end{array}\right\} \quad (16)$$

la función U tomará la forma $U = \Phi\,(X_1, X_2, \ldots\, X_n)$.

Al tratar ahora de hallar las derivadas de la función U con relación á $X_1, X_2, \ldots X_n$, deberemos tener presente que U es función de $x_1, x_2, \ldots x_n$, y estas variables son á su vez, según las ecuaciones (16), funciones de $X_1, X_2, \ldots X_n$; y por lo tanto las derivadas buscadas tendrán la forma (a);

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial U}{\partial X_1} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} + \dfrac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} + \ldots + \dfrac{\partial U}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial x_n}{\partial X_1} \\
\dfrac{\partial U}{\partial X_2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} + \dfrac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} + \ldots + \dfrac{\partial U}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial x_n}{\partial X_2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial U}{\partial X_n} = \dfrac{\partial U}{\partial x_1}\cdot\dfrac{\partial x_1}{\partial X_n} + \dfrac{\partial U}{\partial x_2}\cdot\dfrac{\partial x_2}{\partial X_n} + \ldots + \dfrac{\partial U}{\partial x_n}\cdot\dfrac{\partial x_n}{\partial X_n}
\end{array}\right\}; \quad (17)$$

y como en virtud de las mismas ecuaciones (16) se tiene

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\partial x_1}{\partial X_1} = \lambda_1,\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_1} = \lambda_2, \ldots \dfrac{\partial x_n}{\partial X_1} = \lambda_n; \\
\dfrac{\partial x_1}{\partial X_2} = \mu_1,\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_2} = \mu_2, \ldots \dfrac{\partial x_n}{\partial X_2} = \mu_n; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial x_1}{\partial X_n} = \omega_1,\ \dfrac{\partial x_2}{\partial X_n} = \omega_2, \ldots \dfrac{\partial x_n}{\partial X_n} = \omega_n;
\end{array}$$

las ecuaciones (17) se convierten en

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial U}{\partial X_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_n \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial U}{\partial X_2} = \mu_1 \dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \mu_2 \dfrac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + \mu_n \dfrac{\partial U}{\partial x_n} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial U}{\partial X_n} = \omega_1 \dfrac{\partial U}{\partial x_1} + \omega_2 \dfrac{\partial U}{\partial x_2} + \ldots + \omega_n \dfrac{\partial U}{\partial x_n}
\end{array}\right\} \quad (18)$$

(a).—(S. B.—2.º—n.º 286).—(B.—2.ª parte.—n.º 147).—(L.—2.º—Pág. 172).

expresiones de las que se deduce qué las variables $\frac{\partial U}{\partial x_1}$, $\frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_n}$, se trasforman en las $\frac{\partial U}{\partial X_1}, \frac{\partial U}{\partial X_2}, \ldots \frac{\partial U}{\partial X_n}$, por medio de una sustitución lineal inversa de la (16), según queríamos demostrar. Estas mismas ecuaciones nos muestran, teniendo presente la definición del n.° 30, que las variables $x_1, x_2, \ldots x_n$, son *contragredientes* con las $\frac{\partial U}{\partial x_1}, \frac{\partial U}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial U}{\partial x_n}$.

Examen de un caso particular.—Cuando las variables son dos únicamente, las ecuaciones (18) se reducen á

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_1} &= \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \\ \frac{\partial U}{\partial X_2} &= \mu_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + \mu_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \end{aligned}\right\} ;$$

de las que se deducen las siguientes, representando por M el módulo $(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)$ de la sustitución,

$$\left.\begin{aligned} M \frac{\partial U}{\partial x_1} &= \mu_2 \frac{\partial U}{\partial X_1} - \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial X_2} \\ M \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial X_2} - \mu_1 \frac{\partial U}{\partial X_1} \end{aligned}\right\}$$

ecuaciones que pueden reducirse á la forma

$$\left.\begin{aligned} M \frac{\partial U}{\partial x_2} &= \lambda_1 \frac{\partial U}{\partial X_2} + \mu_1 \left(-\frac{\partial U}{\partial X_1}\right) \\ M.\left(-\frac{\partial U}{\partial x_1}\right) &= \lambda_2 \frac{\partial U}{\partial X_2} + \mu_2 \left(-\frac{\partial U}{\partial X_1}\right) \end{aligned}\right\}$$

que nos prueban qué, aparte del factor constante M, las variables $\frac{\partial U}{\partial x_2}$ y $-\frac{\partial U}{\partial x_1}$ son *cogredientes* con las x_1 y x_2.

34.—Propiedades de las sustituciones ortogonales. —Teorema I.—*En toda sustitución ortogonal la suma de los cuadrados de los elementos de una columna del módulo es igual á la unidad; y la suma de los productos binarios de los elementos de dos columnas es igual á cero.*

Efectivamente, la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\lambda_1\,X_1+\mu_1\,X_2+\nu_1\,X_3 \\ x_2=\lambda_2\,X_1+\mu_2\,X_2+\nu_2\,X_3 \\ x_3=\lambda_3\,X_1+\mu_3\,X_2+\nu_3\,X_3 \end{array}\right\} \qquad (19)$$

será ortogonal si se verifica la relación

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2;$$

ecuación que debe reducirse á una identidad cuando se ponga en ella en lugar de x_1, x_2, x_3, sus valores dados por las fórmulas (19). Pero haciendo esta sustitución, obtendremos

$$(\lambda_1\,X_1+\mu_1\,X_2+\nu_1\,X_3)^2+(\lambda_2\,X_1+\mu_2\,X_2+\nu_2\,X_3)^2+(\lambda_3\,X_1 \\ +\mu_3\,X_2+\nu_3\,X_3)^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2;$$

ó sea, verificando operaciones;

$$\left.\begin{array}{l} \begin{array}{r|c|c|c|l} \lambda_1^2 & X_1^2+\mu_1^2 & X_2^2+\nu_1^2 & X_3^2+\lambda_1\mu_1 & 2X_1\,X_2 \\ +\lambda_2^2 & +\mu_2^2 & +\nu_2^2 & +\lambda_2\mu_2 & \\ +\lambda_3^2 & +\mu_3^2 & +\nu_3^2 & +\lambda_3\mu_3 & \end{array} \\ \\ \qquad \begin{array}{r|c|l} +\lambda_1\,\nu_1 & 2X_1\,X_3+\mu_1\,\nu_1 & 2X_2\,X_3 \\ +\lambda_2\,\nu_2 & +\mu_2\,\nu_2 & \\ +\lambda_3\,\nu_3 & +\mu_3\,\nu_3 & \end{array} \end{array}\right\} =X_1^2+X_2^2+X_3^2;$$

mas para que esta expresión sea una identidad es necesario que tengan lugar las ecuaciones siguientes;

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \\ \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2=1 \\ \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2=1 \end{array}\right\} \quad \text{y} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3=0 \\ \lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3=0 \\ \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3=0 \end{array}\right\}; \qquad (20)$$

que demuestran la proposición enunciada.

Recíprocamente, *siempre que en el módulo de una sustitución se verifiquen las ecuaciones* (20), *la sustitución será ortogonal.*

Porque sustituyendo en la relación

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=X_1^2+X_2^2+X_3^2$$

los valores de x_1, x_2, x_3, la convertirán en una identidad.

Nota.—Las demostraciones anteriores son completamente generales y se aplican á funciones de un número cualquiera de variables.

Corolario I.—*El cuadrado del módulo de una sustitución ortogonal es igual á la unidad.*

En efecto, formando el cuadrado del módulo de la sustitución (19) obtendremos (a),

$$M^2= \begin{vmatrix} \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 & \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3 & \lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3 \\ \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\lambda_3\mu_3 & \mu_1^2+\mu_2^2+\mu_3^2 & \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3 \\ \lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\lambda_3\nu_3 & \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\mu_3\nu_3 & \nu_1^2+\nu_2^2+\nu_3^2 \end{vmatrix}$$

pero observando que por ser la sustitución ortogonal se verifican las ecuaciones (20), la igualdad anterior se reduce á la siguiente

$$M^2= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =1$$

que demuestra la proposición enunciada.

Corolario II.—*El módulo de una sustitución ortogonal es igual á* $+1$ *ó á* -1.

Corolario III.—*Si en el módulo de una sustitución ortogonal se cambian los signos á todos los elementos de una línea, ó más generalmente, á los de un número impar de paralelas, la sustitución sigue siendo ortogonal, pero el módulo cambiará de signo.*

(a).—(S. B.—2.°—n.° 260).—(R.—2.°—n.° 119).

En efecto, si se cambian los signos de los elementos de una ó de un número impar de líneas paralelas del módulo, las ecuaciones (20) seguirán verificándose; luego la nueva sustitución será también ortogonal. Además, ya sabemos que un determinante cambia de signo, pero nó de valor, cuando se cambian de signo los elementos de una ó un número impar de líneas paralelas, de manera que el módulo de la nueva sustitución será igual al de la primitiva pero tendrá signo contrario.

35.—**Teorema II.**—*En toda sustitución ortogonal el producto del módulo por uno cualquiera de sus elementos es igual al complemento algébrico de este elemento.*

En efecto, designemos por λ_{hi}, empleando la notación de doble índice que aquí es más ventajosa, el elemento del módulo que se halla en la fila h y en la columna i, y representemos por Δ_{hi} al complemento algébrico de este elemento. En virtud de las propiedades (a) de los determinantes tendremos, representando por M el módulo de la sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{1i}\,\Delta_{1i}+\lambda_{2i}\,\Delta_{2i}+\lambda_{3i}\,\Delta_{3i}+\,\ldots\ldots+\lambda_{ni}\,\Delta_{ni}=M \\ \lambda_{1h}\Delta_{1i}+\lambda_{2h}\,\Delta_{2i}+\lambda_{3h}\,\Delta_{3i}+\,\ldots\ldots+\lambda_{nh}\,\Delta_{ni}=0 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

y puesto que la sustitución es ortogonal tendremos además, según el teorema precedente,

$$\lambda_{1h}\,\lambda_{1i}+\lambda_{2h}\,\lambda_{2i}+\,\ldots\ldots+\lambda_{nh}\,\lambda_{ni}=0. \qquad (22)$$

Si se compara esta última ecuación, que se verifica al mismo tiempo que las anteriores, con la segunda de las (21), deduciremos fácilmente de esta comparación que los complementos algébricos Δ_{1i}, Δ_{2i}, ... Δ_{ni}, son proporcionales á los elementos λ_{1i}, λ_{2i}, ... λ_{ni}; de manera que designando por ζ una constante se tiene

$$\frac{\Delta_{1i}}{\lambda_{1i}}=\zeta,\ \frac{\Delta_{2i}}{\lambda_{2i}}=\zeta,\ \ldots\ldots\ \frac{\Delta_{ni}}{\lambda_{ni}}=\zeta;$$

(a).—(S. B.—2.º—n.º 261).—(R.—2.º—n.º 102).—(B.— 2.ª parte.— n.º 60). —(L.—1.º—Pág. 133).

ó sea,

$$\Delta_{1i}=\zeta\lambda_{1i},\ \Delta_{2i}=\zeta\lambda_{2i},\ \ldots\ldots\ \Delta_{ni}=\zeta\lambda_{ni}. \qquad (23)$$

Sustituyendo estos valores en la primera de las ecuaciones (21) se obtiene

$$\zeta(\lambda_{1i}^2+\lambda_{2i}^2+\ldots\ldots+\lambda_{ni}^2)=M$$

y teniendo en cuenta lo demostrado en el teorema anterior, ó sea,

$$\lambda_{1i}^2+\lambda_{2i}^2+\ldots\ldots+\lambda_{ni}^2=1,$$

resultará

$$\zeta=M$$

y finalmente según las ecuaciones (23)

$$\Delta_{1i}=M\lambda_{1i},\ \Delta_{2i}=M\lambda_{2i},\ \ldots\ldots\ \Delta_{ni}=M\lambda_{ni},$$

conforme al enunciado del teorema.

36.—**Teorema III.**—*La suma de los cuadrados de los elementos de una fila cualquiera del módulo de una sustitución ortogonal es igual á la unidad; y la suma de los productos binarios de los elementos de dos filas cualquiera es igual á cero.*

En efecto, si ordenamos el módulo según los elementos de su fila h, tendremos,

$$\lambda_{h1}\Delta_{h1}+\lambda_{h2}\Delta_{h2}+\ldots\ldots+\lambda_{hn}\Delta_{hn}=M;$$
$$\lambda_{i1}\Delta_{h1}+\lambda_{i2}\Delta_{h2}+\ldots\ldots+\lambda_{in}\Delta_{hn}=0.$$

Ahora bien, según el teorema que precede se tiene

$$\Delta_{h1}=M\lambda_{h1},\ \Delta_{h2}=M\lambda_{h2},\ \ldots\ldots\ \Delta_{hn}=M\lambda_{hn},$$

luego sustituyendo estos valores en las expresiones anteriores, se tendrá,

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{h1}^2 + \lambda_{h2}^2 + \ldots\ldots + \lambda_{hn}^2 = 1 \\ \lambda_{i1}\lambda_{h1} + \lambda_{i2}\lambda_{h2} + \ldots\ldots + \lambda_{in}\lambda_{hn} = 0 \end{array}\right\} \quad (24)$$

conforme se quería demostrar.

37.—**Escolio general.**—Suponiendo que sean n las variables $x_1, x_2, \ldots. x_n$, que se tratan de sustituir por otras n X_1, $X_2, \ldots. X_n$, mediante una sustitución ortogonal, hemos visto anteriormente (n.º 34), que representando por

$$M = \left|\begin{array}{cccc} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \ldots\ldots & \omega_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \ldots\ldots & \omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_n & \mu_n & \nu_n \ldots\ldots & \omega_n \end{array}\right|$$

el módulo de la sustitución, las ecuaciones que caracterizan el que la sustitución sea ortogonal, son las siguientes;

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2=1 \\ \mu_1^2+\mu_2^2+\ldots+\mu_n^2=1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2=1 \end{array}\right\} (\alpha) \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\ldots+\lambda_n\mu_n=0 \\ \lambda_1\nu_1+\lambda_2\nu_2+\ldots+\lambda_n\nu_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2+\ldots+\lambda_n\omega_n=0 \\ \mu_1\nu_1+\mu_2\nu_2+\ldots+\mu_n\nu_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (\alpha')$$

pués todas las demás expresiones obtenidas en los teoremas 2.º y 3.º (n.os 35 y 36) se han deducido yá en el supuesto de ser ortogonal la sustitución y verificarse por lo tanto las ecuaciones (α) y (α').

Ahora bien, el número de ecuaciones del sistema (α) es n, y las que tiene el sistema (α') son $\frac{1}{2}\, n\,(n-1)$, número de combinaciones binarias de n elementos, luego el número total de relaciones esencialmente distintas que ligan á los n^2 coeficientes de una sustitución ortogonal es

$$n+\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)=\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)$$

y por lo tanto, si suponemos que los n^2 coeficientes $\lambda, \mu, \nu, \ldots\omega$, son arbitrarios, podrán determinarse $\frac{1}{2}\, n\,(n+1)$ de ellos en función de los

$$n^2-\tfrac{1}{2}\, n\,(n+1)=\tfrac{1}{2}\, n\,(n-1)$$

restantes que quedarían completamente indeterminados, y que podrían emplearse para satisfacer otras condiciones dadas.

Ejemplo. — Tratemos de trasformar una cierta función $\varphi\,(x_1, x_2)$ mediante la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\lambda_1 X_1+\mu_1 X_2 \\ x_2&=\lambda_2 X_1+\mu_2 X_2 \end{aligned}\right\},$$

y hallemos las condiciones á que deberán satisfacer los coeficientes de esta sustitución para que sea ortogonal. Las ecuaciones (α) y (α') se convierten en este caso en

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2+\lambda_2^2 &=1 \\ \mu_1^2+\mu_2^2 &=1 \\ \lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2&=0 \end{aligned}\right\}; \qquad (\beta)$$

aplicando además á los coeficientes de la sustitución propuesta las igualdades obtenidas en el Corolario 1.° del teorema 1.° (n.° 34) y en el teorema 3.° (n.° 36), se tienen las expresiones

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1^2+\mu_1^2 &=1 \\ \lambda_2^2+\mu_2^2 &=1 \\ \lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2&=0 \\ M^2=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^2 &=1 \end{aligned}\right\}. \qquad (\gamma)$$

Pero, según lo que antes hemos dicho, de estas siete relaciones solo serán distintas $\frac{1}{2}\, n\, (n+1)=3$, en este caso por ser $n=2$; de manera que satisfechas tres cualesquiera de ellas las demás lo estarán también. Supongamos en efecto, que las tres primeras (β) se verifiquen por unos valores de los coeficientes de la sustitución y vamos á ver que las ecuaciones restantes (γ) son consecuencia de las primeras. Multipliquemos las dos primeras (β), restemos del producto el cuadrado de la tercera y se tendrá

$$(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,(\mu_1^2+\mu_2^2)-(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)^2=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^2=1$$

ó sea la cuarta de las (γ). Multiplicando las dos primeras de las (β) se tiene

$$\lambda_1^2\mu_1^2+\lambda_1^2\mu_2^2+\lambda_2^2\mu_1^2+\lambda_2^2\mu_2^2=1$$

y observando que según la tercera de las ecuaciones (β), $\lambda_1^2\,\mu_1^2 =\lambda_2^2\mu_2^2$, la expresión anterior puede tomar las dos formas:

$$\lambda_1^2\,(\mu_1^2+\mu_2^2)+\mu_1^2\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=1,$$
$$\lambda_2^2\,(\mu_1^2+\mu_2^2)+\mu_2^2\,(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=1;$$

ecuaciones qué teniendo en cuenta las dos primeras de las (β) nos dán las expresiones

$$\lambda_1^2+\mu_1^2=1,$$
$$\lambda_2^2+\mu_2^2=1;$$

que son las dos primeras de las (γ). La tercera de estas ecuaciones (γ) se obtendría multiplicando entre sí las dos obtenidas últimamente y restando del producto la cuarta de las expresiones (γ) después de desarrollada.

Debiendo por lo tanto los coeficientes λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, satisfacer á las tres ecuaciones (β) podrán determinarse los valores de tres de ellos en función del cuarto que quedará completamente arbitrario.

CAPÍTULO V.

INVARIANTES.

38.—**Objeto de la teoría.**—Al dar principio á la exposición de la parte verdaderamente fundamental de la *Teoría de las Formas* definiremos en breves palabras el objeto principal y la idea que predomina en esta importantísima rama del Análisis algébrico moderno. Este objeto puede expresarse del siguiente modo: *si una forma de cualquier grado y de* k *variables se trasforma en otra por medio de una sustitución lineal, la nueva forma y la primitiva poseen algunas propiedades comunes; y el estudio é investigación de las propiedades de esta especie, que no se alteran por la sustitución lineal verificada, constituye el problema principal de la Teoría de las Formas.*

39.—**Invariantes: definiciones.**—*Se llama invariante* (a) *toda función de los coeficientes de una forma que tenga la propiedad de qué, si se efectúa en esta forma una sustitución lineal, la función semejante de los coeficientes de la trasformada sea igual á la función primitiva multiplicada por una potencia del módulo de la sustitución.* Al exponente de esta potencia del módulo se le llama *índice* del invariante.

Sea, por ejemplo, la forma

$$U = (a_0, a_1, a_2, \dots) (x, y, z, \dots)^n \qquad (1)$$

y supongamos que

$$\varphi (a_0, a_1, a_2 \dots)$$

(a).—Cayley, que fué el matemático que descubrió los invariantes, les dió el nombre de *hiperdeterminantes*.

es una función de los coeficientes de U. Verificando en la forma (1) la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\ldots \\ y=\lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\ldots \\ z=\lambda_3 X+\mu_3 Y+\nu_3 Z+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (2)$$

se obtendrá la forma

$$U_1=(A_0, A_1, A_2, \ldots)(X, Y, Z, \ldots)^n.$$

Formemos ahora con los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ la función

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots),$$

semejante á la $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots)$; si llamando Δ al módulo de la sustitución propuesta, y siendo μ un número entero, se verifica qué

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots) = \Delta^{\mu}.\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots); \qquad (3)$$

la función φ se dice que es un *invariante* de la forma propuesta U, cuyo *índice* será μ.

Si el índice μ es igual á cero, en cuyo caso la función φ no altera por la sustitución lineal verificada, la función recibe el nombre de *invariante absoluto*.

Del mismo modo que una sola forma, puede un sistema de formas tener también invariantes. Sean las formas

$$\left.\begin{array}{l} U=(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n \\ V=(b_0, b_1, b_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\};$$

supongamos que en todas ellas se verifica la sustitución lineal (2) y que se trasforman en las

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = (A_0, A_1, A_2, \ldots) (X, Y, Z, \ldots)^n \\ V_1 = (B_0, B_1, B_2, \ldots) (X, Y, Z, \ldots)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} ;$$

si al propio tiempo se tiene una cierta función

$$\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots\, b_0, b_1, b_2, \ldots, \ldots)$$

de los coeficientes del primer sistema de formas tál, que satisfaga á la condición

$$\begin{array}{l} \varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots B_0, B_1, B_2, \ldots) \\ = \Delta^{\mu} \,.\, \varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots\, b_0, b_1, b_2, \ldots), \end{array}$$

esta función φ recibe el nombre de invariante del sistema dado, ó mejor, el de *invariante simultáneo* de las formas propuestas (a).

Ejemplos de invariantes.—**I.**—Si tomamos la forma binaria cuadrática

$$U = a_0\, x_1^2 + 2a_1\, x_1\, x_2 + a_2\, x_2^2$$

(a).—La importancia grandísima de la teoría que vamos á exponer puede fácilmente comprenderse con recordar qué, en Geometría analítica, todas las trasformaciones de coordenadas se verifican por sustituciones lineales. En el estudio de las curvas y de las superficies un invariante, de una forma ternaria ó cuaternaria, es una función de los coeficientes cuya reducción á cero expresa una cierta propiedad de la curva, ó de la superficie, independiente de la elección de ejes coordenados. Véase para más detalles la obra:

Clebsch (A.).—*Leçons sur la Géométrie; recueillies et complétées par F. Lindemann.—Tomo 1.º* y formamos su discriminante

$$\Delta_2^2 = a_0 a_2 - a_1^2;$$

vamos á ver que este discriminante es un invariante: porque ya hemos visto (n.º 29, ejemplo), que si se verifica en la forma U la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 \end{array}\right\}$$

el discriminante $A_0 A_2 - A_1^2$ de la resultante $U_1 = A_0 X_1^2 + 2A_1 X_1 X_2 + A_2 X_2^2$ es

$$A_0 A_2 - A_1^2 = (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^2 \cdot (a_0 a_2 - a_1^2)$$

que cumple las condiciones exijidas en la definición.

II.—Sean ahora las tres formas lineales ternarias,

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ U_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ U_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{array}\right\}$$

decimos que su determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

es un *invariante simultáneo* de las tres formas dadas. En efecto, hemos visto anteriormente (n.º 31), que si trasformamos el sistema propuesto por medio de una sustitución lineal, el determinante del nuevo sistema es igual al del primitivo por el módulo de la trasformación, es decir, que representando por A_{11}, A_{12}, A_{13}, ..., los coeficientes de las trasformadas, y por λ, μ, ν, los de la sustitución se tiene

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

40.—Propiedades de los invariantes con relación á los coeficientes de la forma.—Teorema I.—*Todo invariante de una forma es función homogénea de los coeficientes de esta forma.*

En efecto, sea la forma de grado n y k variables,

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots.) (x_1, x_2, \ldots. x_k)^n,$$

y designemos por

$$\varphi (a_0, a_1, a_2, \ldots.)$$

uno de sus invariantes de grado r. Si en la forma U verificamos la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda X_1 \\ x_2 = \lambda X_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_k = \lambda X_k \end{array}\right\},$$

cuyo módulo es

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^k,$$

cada coeficiente a_h se convertirá en $a_h \lambda^n$. Por otra parte, designando por μ el índice del invariante φ, tendremos, por definición,

$$\varphi(\lambda^n a_0, \lambda^n a_1, \lambda^n a_2, \dots) = (\lambda^k)^\mu \,.\, \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots). \qquad (4)$$

Cada uno de los términos del primer miembro de esta igualdad contiene el factor λ con un exponente igual á n veces el grado del término, que será por lo tanto nr en el de mayor grado, por ser φ del grado r; y como en el segundo miembro, el factor $\varphi(a_0, a_1, a_2, \dots)$ es independiente de λ, para que la igualdad tenga lugar, es necesario que todos los términos del primer miembro sean de igual grado, es decir, que φ sea homogéneo respecto á los coeficientes $a_0, a_1, a_2 \dots$; que era lo que se deseaba demostrar.

41.—**Teorema II.**—*El índice de un invariante es igual al producto de su grado por el de la forma, dividido por el número de variables.*

Efectivamente, según lo demostrado en el teorema anterior, para que la ecuación (4) se verifique es preciso que todos los términos de su primer miembro sean divisibles por λ^{nr}, siendo r el grado del invariante; luego dicha ecuación podrá reducirse á la forma

$$\varphi(\lambda^n a_0, \lambda^n a_1, \lambda^n a_2, \dots) = \lambda^{nr} \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots)$$
$$= \lambda^{k\mu} \,.\, \varphi(a_0, a_1, a_2, \dots);$$

expresión que exige se tenga $nr = k\mu$, ó sea,

$$\mu = \frac{nr}{k}; \qquad (5)$$

que es la fórmula enunciada en la proposición que queríamos demostrar.

Corolario.—*Todos los invariantes de una forma binaria de grado impar, son funciones de grado par.*

En efecto, haciendo en la fórmula (5) $k=2$, se obtiene

$$\mu=\frac{nr}{2},$$

y como μ debe ser un número entero, si n es impar es preciso que r, grado del invariante, sea par.

42.—Teorema III.—*Todo invariante de una forma binaria es isobárico, y su peso es igual á su índice.*

En efecto, sea la forma $U=(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n$; verifiquemos en ella la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x=X+0\,.\,Y \\ y=0\,.\,X+\lambda Y \end{array}\right\}$$

cuyo módulo es λ. Designando por φ un invariante de la forma propuesta, por Φ el de su trasformada y por μ el índice de este invariante, tendremos según la definición de invariante

$$\Phi=\lambda^{\mu}.\,\varphi.$$

Ahora bien, por la sustitución verificada, los coeficientes de U se trasforman en

$$A_0=a_0\,\lambda^0,\ A_1=a_1\,\lambda^1,\ A_2=a_2\,\lambda^2, \ldots\ldots A_n=a_n\,\lambda^n;$$

por consiguiente si un término de φ es $a_0^{\ e_0}\,a_1^{\ e_1}\,a_2^{\ e_2}\ldots a_n^{\ e_n}$, el término correspondiente de Φ será

$$A_0^{\ e_0}A_1^{\ e_1}A_2^{\ e_2}\ldots A_n^{\ e_n}$$

$$=\lambda^{0e_0+1.e_1+2e_2+\ldots+ne^n}.\,a_0^{\ e_0}a_1^{\ e_1}a_2^{\ e_2}\ldots a_n^{\ e_n},$$

y como después de la trasformación el invariante debe convertirse en $\lambda^{\mu} . \varphi$, es necesario que todos sus términos adquieran el factor $\lambda^{o.e_0+1.e_1+2e_2+....+ne_n}$, y que se tenga por lo tanto

$$o.e_0+1.e_1+2.e_2+....+ne_n=\mu=\frac{nr}{2};$$

pero el primer miembro de esta igualdad es el peso del término $a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} .... a_n^{e_n}$; luego se verifica la proposición enunciada.

43.—**Teorema IV.**—*Un invariante de una forma binaria ó no altera, ó varía solo de signo, cuando se permutan entre sí los coeficientes equidistantes de los extremos.*

En efecto, si en la forma binaria $(a_0, a_1, a_2 .... a_n)(x, y)^n$ se verifica la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=0.X+Y \\ y=X+0.Y \end{array}\right\}$$

cuyo módulo es -1, sustitución que equivale en resumen á permutar entre sí las letras x é y; dos términos de la forma equidistantes de los extremos, $a_h x^{n-h} y^h$ y $a_{n-h} x^h y^{n-h}$, por ejemplo, se trasforman en $a_h x^h y^{n-h}$ y $a_{n-h} x^{n-h} y^h$, es decir, no hacen más que cambiar entre sí sus coeficientes. Al propio tiempo, si φ designa un invariante de la forma propuesta de índice μ, y Φ el de su trasformada, se tendrá

$$\Phi=(-1)^{\mu} . \varphi,$$

y esta igualdad nos demuestra que el invariante φ no cambia de valor en ningún caso, y varía ó nó de signo según que su índice μ sea impar ó par.

Los invariantes que por la permutación de coeficientes equidistantes de los extremos en la forma, no varían de signo se denominan *simétricos*, y los que cambian de signo se llaman *hemisimétricos*.

Nota.—Debe observarse que la permutación de los coeficientes equidistantes de los extremos no altera el peso del invariante; porque un término del invariante primitivo. $a_0^{\,e_0} a_1^{\,e_1} a_2^{\,e_2} \dots a_n^{\,e_n}$, por ejemplo, se convierte en el trasformado en $a_{n-0}^{\,e_0}\, a_{n-1}^{\,e_1}\, a_{n-2}^{\,e_2} \dots a_{n-n}^{\,e_n}$, cuyo peso es

$$(n-0)\, e_0 + (n-1) e_1 + (n-2)\, e_2 + \dots + (n-n)\, e_n$$
$$= n\, (e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n) - (0 .\, e_0 + 1 e_1 + 2 e_2 + \dots + n e_n);$$

pero como $e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n = r$, designando por r el grado del invariante, y siendo además (n.º 42),

$$0 .\, e_0 + 1 .\, e_1 + 2 .\, e_2 + \dots + n .\, e_n = \mu = \frac{nr}{2},$$

se tendrá que el peso del invariante trasformado es

$$nr - \frac{nr}{2} = \frac{nr}{2}.$$

44.—Teorema V.—*Todo invariante* φ *de una forma binaria* $(a_0, a_1, a_2, \dots a_n)\,(x, y)^n$ *satisface á las ecuaciones de derivadas parciales* (a),

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2 a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3 a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \dots + n a_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = 0, \quad (6)$$

$$n a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1)\, a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (n-2)\, a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \dots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}} = 0. \quad (7)$$

(a).—Véase antes de comenzar el estudio de este teorema la *Nota sobre los símbolos* $\Delta\varphi$ y $\nabla\,\varphi$ que vá al fin de la obra.

En efecto, si en la forma binaria propuesta $(a_0, a_1. a_2, \ldots a_n)$ $(x, y)^n$ se verifica la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x &= X + \lambda Y \\ y &= 0X + Y \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

cuyo módulo es la unidad, entre el invariante Φ de la trasformada, y el φ de la propuesta se verificará la relación

$$\Phi = \varphi. \tag{9}$$

Ahora bien, la sustitución lineal (8) equivale á poner en la forma propuesta en vez de x, $x+\lambda y$, y conservar sin alteración la variable y; más en este caso es fácil demostrar (a) que si designamos por $\Delta\varphi$ la operación

$$\Delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots\ldots + na_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n},$$

el invariante Φ puede ponerse bajo la forma

$$\Phi = \varphi + \lambda . \Delta\varphi + \frac{1}{\underline{|2}} \lambda^2 . \Delta^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}} \lambda^3 . \Delta^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} \lambda.^n \Delta^n \varphi,$$

expresión que se reduce, teniendo en cuenta la ecuación (9) á

$$0 = \Delta\varphi + \frac{1}{\underline{|2}} \lambda . \Delta^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}} \lambda^2 \Delta^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} \lambda.^{n-1} \Delta^n \varphi;$$

y como esta ecuación debe verificarse independientemente del valor de λ, es preciso que se tenga

$$\Delta\varphi = 0,$$

(a).—Podría repetirse aquí la demostración dada en la *Nota final* para obtener la fórmula (γ).

ó sea,

$$a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} = 0, \qquad (6)$$

que es la primera de las ecuaciones cuya existencia nos proponíamos demostrar.

De una manera análoga se demostraría que haciendo en la forma propuesta la sustitución lineal

$$\left. \begin{array}{l} x = X + 0 \,.\, Y \\ y = \lambda X + Y \end{array} \right\} \qquad (10)$$

cuyo módulo es también la unidad, el invariante φ tiene que satisfacer á la ecuación (a),

$$\nabla\varphi = 0,$$

ó sea

$$na_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (n-1)a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1}$$

$$+ (n-2)\, a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + 2a_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-2}} + a_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} = 0. \qquad (7)$$

Observaciones.—**I.**—Esta última ecuación (7) no es más, en realidad, que una consecuencia de la (6), cuando la forma está escrita simétricamente; pués podría deducirse de ella por la permutación en la forma de los coeficientes equidistantes de los extremos, en cuyo caso el invariante no altera ó cambia únicamente de signo (n.º 43).

II.—Si la forma propuesta estuviese escrita sin los coeficientes numéricos de la fórmula del binomio de Newton, habría

(a).—Véase la ecuación (γ') de la *Nota final.*

que sustituir á las ecuaciones (6) y (7) las dos siguientes, que son las correspondientes á este caso (a);

$$na_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(n-1)\,a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(n-2)\,a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+,\ldots+a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}=0,\quad(11)$$

$$a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+2a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+3a_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}=0.\quad(12)$$

45.—**Teorema VI.**—*En todo invariante la suma algébrica de los coeficientes es nula.*

En efecto, siendo el invariante φ una función homogénea é isobárica (n.os 40 y 42) de los coeficientes de la forma, se podrá representar por

$$\varphi=\Sigma a_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2}\ldots a_n^{e_n};$$

hallando sus derivadas con relación á $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$, tendremos,

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1}=e_1\,\Sigma a_0^{e_0}a_1^{e_1-1}a_2^{e_2}\ldots a_n^{e_n}\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2}=e_2\,\Sigma a_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2-1}\ldots a_n^{e_n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\dfrac{\partial\varphi}{\partial a_n}=e_n\,\Sigma a_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2}\ldots a_n^{e_n-1}
\end{array}\right\}.$$

y de estas expresiones pueden fácilmente deducirse las que siguen

(a).—Véanse en la *Nota final* las ecuaciones (δ) y (δ').

$$\left.\begin{aligned}
a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} &= e_1 \ \Sigma a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n} = e_1 \varphi \\
2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} &= 2e_2 \ \Sigma a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e^n} = 2e_2 \varphi \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
na_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} &= ne_n \ \Sigma a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n} = ne_n \varphi
\end{aligned}\right\}.$$

Multiplicando los dos miembros de las expresiones anteriores por a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, respectivamente, se obtiene

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} = \frac{e_1 a_0}{a_1} \varphi, \ 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} = 2 \frac{e_2 a_1}{a_2} \varphi, \ 3a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3}$$
$$= 3 \frac{e_3 a_2}{a_3} \varphi, \ldots . na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} = n \frac{e_n a_{n-1}}{a_n} \varphi,$$

ecuaciones que sumadas nos dan

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} + \ldots . + na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$$
$$= \left(\frac{e_1 a_0}{a_1} + 2 \frac{e_2 a_1}{a_2} + 3 \frac{e_3 a_2}{a_3} + \ldots + n \frac{e_n a_{n-1}}{a_n} \right) \varphi.$$

Ahora bien, como la función φ es un invariante el primer miembro de la ecuación precedente será cero, según la igualdad (6) del teorema anterior; luego tendremos,

$$\left(\frac{e_1 a_0}{a_1} + 2 \frac{e_2 a_1}{a_2} + 3 \frac{e_3 a_2}{a_3} + \ldots + n \frac{e_n a_{n-1}}{a_n} \right) \varphi = 0;$$

y esta ecuación debe tener lugar cualquiera que sean los valores de a_0, a_1, a_2, ... a_n; de manera que si todos se hacen iguales entre sí é idénticos á un cierto valor, a por ejemplo, la ecuación también tendrá lugar; pero en este caso el invariante se reduce á una suma de términos que tienen por parte literal a^r, si por r se representa el grado del invariante; y por lo tanto si se designa por s la suma algébrica de todos los coeficientes numéricos del invariante φ, este se reduce á $s \,.\, a^r$, y la igualdad anterior se convertirá en

$$(e_1+2e_2+3e_3+\ldots\ldots+ne_n)\; sa^r=0;$$

pero la cantidad comprendida entre paréntesis no puede ser cero porque representa el peso del invariante φ; a^r tampoco puede serlo, luego deberemos tener

$$s=0,$$

como queríamos demostrar.

46.—**Teorema VII.**—*Si una función φ de los coeficientes de una forma $U=(a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n)(x, y)^n$ es isobárica, simétrica y satisface á la ecuación de derivadas parciales,*

$$a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+3a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3}+\ldots\ldots+na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}=0, \qquad (6)$$

será un invariante.

Para demostrar esta proposición será suficiente probar que verificando en la forma propuesta la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_1 X+\mu_1 Y \\ y&=\lambda_2 X+\mu_2 Y \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

la función φ se trasforma, designando por Δ el módulo de la sustitución, en

$$(\lambda_1 \mu_2-\mu_1 \lambda_2)^\mu \,.\, \varphi=\Delta^\mu \,.\, \varphi \,.$$

Para ello observemos primero que φ debe ser una función homogénea de los coeficientes de la forma, porque si $T = k_m$ $a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} \ldots a_n^{e_n}$ es uno cualquiera de sus términos, y se le aplica la operación $\Delta \varphi = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3}$ $+ \ldots + na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}$, se obtendrá,

$$T\left(\frac{a_0}{a_1} e_1 + 2\frac{a_1}{a_2} e_2 + 3\frac{a_2}{a_3} e_3 + \ldots + n\frac{a_{n-1}}{a_n} e_n\right);$$

y si suponemos que $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a$, el término T se convertirá, designando por p su peso en

$$T(e_1 + 2e_2 + 3e_3 + \ldots + ne_n) = pT.$$

Ahora bien, siendo φ una suma de términos análogos á T, y todos de igual peso por ser φ isobárico, se deduce que la ecuación (6) aplicada á la función φ nos dará, en el supuesto anterior,

$$p.\Sigma T = 0;$$

mas como p no puede ser cero, es preciso que se tenga

$$\Sigma T = 0:$$

y en esta expresión, ΣT representa una función de a que debe ser cero cualquiera que sea a; pero como no puede admitirse que cada uno de los coeficientes de los términos T sean nulos, pues entonces no existiría φ, se sigue de aquí que todos los términos de esta función φ deben contener una misma potencia de a como factor, es decir, que φ es función homogénea de los coeficientes a; y solo será cero la suma algébrica de sus coeficientes (a).

Esto sentado, si verificamos en la forma propuesta U la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x = x' + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\, y' \\ y = y' \end{array}\right\}, \qquad (\alpha)$$

la función φ permanecerá invariable, pués por hipótesis esta función satisface á la ecuación (6). Si en la primera trasformada de U, se hace una segunda sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x' = y'' \\ y' = -x'' \end{array}\right\}, \qquad (\alpha_1)$$

la función φ tampoco variará, á excepción del signo; porque, por hipótesis también, es isobárica y simétrica. Si en esta segunda trasformada de U se verifica una tercera sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x'' = x''' + \dfrac{\lambda_1 \mu_2}{\Delta}\, y''' \\ y'' = y''' \end{array}\right\}, \qquad (\alpha_2)$$

(a).—En lugar de suponer en el enunciado de esta proposición que la función φ es isobárica y simétrica, podría expresarse la condición de que sea homogénea y de peso $\frac{nr}{2}$; porque entonces se tendría por hipótesis

$$0 . e_0 + 1 . e_1 + 2 . e_2 + \ldots + n e_n = \frac{nr}{2}, \text{ y } e_0 + e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r;$$

de cuyas expresiones se deduce,

$$(n-0)\, e_0 + (n-1)\, e_1 + (n-2)\, e_2$$

$$+ \ldots + (n-n)\, e_n = nr - \frac{nr}{2} = \frac{nr}{2}, \text{ ó sea } (n-0)\, e_0 + (n-1)\, e_1$$

$$+ (n-2)\, e_2 + \ldots + (n-n)\, e_n = 0 . e_0 + 1 . e_1 + 2 e_2 + \ldots + n e_n$$

lo que demuestra que la función φ es simétrica.

también φ permanece invariable por satisfacer á la ecuación (6) antes citada. Finalmente, si en la última trasformada de U se hace la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x''' &= -\lambda_2 X \\ y''' &= -\frac{\Delta}{\lambda_2} Y \end{aligned}\right\}; \qquad (\alpha_3)$$

siendo φ una función homogénea, todos sus términos adquirirán el factor Δ^{μ} (n.^{os} 40 y 42), y la función se trasformará por lo tanto en $\Delta^{\mu}.\varphi$.

Mas las cuatro sustituciones (α), (α_1), (α_2) y (α_3) equivalen en resumen á la sustitución (13), según puede comprobarse fácilmente eliminando entre ellas las variables x', x'', x''', y', y'', y'''; luego esta sustitución (13) trasforma á φ en $\Delta^{\mu}.\varphi$, y φ es por consiguiente un invariante de la forma dada, como se quería demostrar.

Observaciones.—**I.**—La proposición que acabamos de demostrar puede considerarse como la *recíproca* de las demostradas en los teoremas I, III, IV y V (n.^{os} 40, 42, 43 y 44); pués mientras en estos teoremas se exponen las condiciones á que debe satisfacer todo invariante de una forma, en el últimamente demostrado se establecen las condiciones necesarias y suficientes para que una función de los coeficientes de una forma sea un invariante. Como veremos más adelante, el teorema VII que acabamos de demostrar nos proporciona un método muy cómodo y sencillo para la formación de invariantes.

II.—Según lo demostrado en los teoremas V y VII, todo invariante de una forma tiene que satisfacer á las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} &= 0 \\ na_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (n-1)\, a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (n-2)\, a_3 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + a_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} &= 0 \end{aligned}\right\},$$

si la forma tiene los coeficientes del binomio de Newton; y á las

$$\left.\begin{array}{l} na_0 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (n-1)\, a_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2} + (n-2)\, a_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + a_{n-1} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_n} = 0 \\ a_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_0} + 2a_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 3a_3 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_n \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} = 0 \end{array}\right\}$$

si no los tiene; y al propio tiempo toda función homogénea é isobárica de los coeficientes de la forma será un invariante si satisface á las citadas ecuaciones: así es que estas ecuaciones son las que caracterizan la propiedad de la *invariación* y por esta causa se las llama *ecuaciones características de los invariantes.*

III.—Observemos por último, que existen funciones que satisfaciendo á las ecuaciones características del invariante no cumplen con alguna de las condiciones de ser homogéneas é isobáricas, y á estas funciones se las denominan *seminvariantes* ó *heminvariantes*, según propuso Cayley.

47.—Teorema VIII.—*Si tenemos dos formas de un mismo grado* n

$$U = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\,(x, y)^n \quad y \quad V = (b_0, b_1, b_2, \ldots b_n)\,(x, y)^n,$$

y la función $\varphi\,(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ *es un invariante de la forma* U; *la función*

$$\psi = b_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + b_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + b_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_n} \qquad (14)$$

es un invariante simultáneo de las formas U y V.

En efecto, el invariante φ debe satisfacer, por definición, á la ecuación

$$\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots A_n) = \Delta^{\mu} \,.\, \varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

en la cual Δ representa el módulo de una sustitución verificada en las formas U y V, cualesquiera que sean los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ de la forma U. Ahora bien, si esta forma U se convirtiera en $U+kV$ sus coeficientes se trasformarían en

$$A_0 = a_0 + kb_0,\ A_1 = a_1 + kb_1, \ldots\ldots A_n = a_n + kb_n;$$

y por consiguiente la función $\Phi = \varphi\ (a_0+kb_0,\ a_1+kb_1, \ldots\ldots a_n+kb_n)$ será un invariante, cualquiera que sea el valor de k. Por lo tanto si se desarrolla la función Φ según las potencias de k, todos sus coeficientes en este desarrollo deberán ser invariantes por ser k indeterminada. Pero aplicando la fórmula de Taylor generalizada (a) á la función Φ, los coeficientes de las potencias de k serán

$$b_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n};$$

$$\frac{1}{2}\left(b_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + b_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right)^2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y como el primero de ellos es la expresión (14), queda demostrado, que ψ es un invariante simultáneo de las formas U y V.

Nota.—Este teorema proporciona un medio sencillísimo de calcular un invariante simultáneo de dos formas de un mismo grado, cuando se conoce uno correspondiente á una de ellas; pués es suficiente aplicar á este invariante la ecuación (14).

Ejemplo.—Tratemos de hallar un invariante simultáneo de las dos binarias cuadráticas

(a)—Recordemos que la fórmula de Taylor generalizada es: $f\,(x+h,\ y+k,\ z+l, \ldots) = f\,(x, y, z, \ldots) + \sum_{n=1}^{n=n} \frac{1}{\underline{|n}} \left(f'_x h + f'_y k + f'_z l + \ldots\ldots\right)^n$. — (S. B. — 2.º —n.º 296).—(L.—2.º—Pág. 197).

$$U=a_0x^2+2a_1xy+a_2y^2, \qquad V=b_0x^2+2b_1xy+b_2y^2.$$

Recordando que la función $\varphi=a_0\,a_2-a_1^2$ es un invariante de U (n.° 39, ejem. 1.°), tendremos aplicándole la ecuación (14),

$$b_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+b_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+b_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}$$

$$=b_0.a_2+b_1(-2a_1)+b_2.a_0=a_0b_2-2a_1b_1+a_2b_0,$$

que será el invariante simultáneo pedido.

48.—**Propiedades de los invariantes con relación á las raices de la forma.—Teorema IX.**—*Una función simétrica de las diferencias de las raices de una forma binaria será un invariante, siempre que cada raiz entre en la función con el mismo exponente.*

Sea por ejemplo, la forma $U=a_0\,x^n+a_1\,x^{n-1}\,y+a_2\,x^{n-2}\,y^2+\ldots+a_n\,y^n=0$; según ya sabemos (n.° 14), llamando $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, á las raices de esta ecuación, la forma anterior puede presentarse descompuesta factorialmente de la manera que sigue:

$$U=a_0\,(x-\alpha_1\,y)\,(x-\alpha_2\,y)\,(x-\alpha_3\,y)\ldots(x-\alpha_n\,y): \qquad (15)$$

sea además

$$\varphi=a_0^{\delta}\,\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^k\,(\alpha_2-\alpha_3)^{i}\,(\alpha_3-\alpha_4)^l\ldots, \qquad (16)$$

una función dada de las diferencias de las raices que sea simétrica y tál que todas las raices de la forma entren con el mismo exponente, δ por ejemplo; y vamos á demostrar que φ es un invariante de la forma U.

En efecto, si en la forma U se verifica la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1\,X+\mu_1\,Y \\ y=\lambda_2\,X+\mu_2\,Y \end{array}\right\},$$

cada factor $(x-\alpha_h\, y)$ de U se reducirá á

$$x-\alpha_h\, y=(\lambda_1 X+\mu_1 Y)-\alpha_h(\lambda_2 X+\mu_2 Y)=(\lambda_1-\lambda_2\alpha_h) X+$$
$$(\mu_1-\mu_2\,\alpha_h)\, Y=(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h)\left\{X-\frac{\mu_2\,\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h}\, Y\right\};$$

y por consiguiente la trasformada de U tendrá la forma

$$U_1=A_0\left(X-\frac{\mu_2\,\alpha_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_1}\, Y\right)$$
$$\left(X-\frac{\mu_2\,\alpha_2-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_2}\, Y\right)\ldots\left(X-\frac{\mu_2\,\alpha_n-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_n}\, Y\right),$$

si hacemos para abreviar

$$A_0=a_0(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_1)(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_2)\ldots(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_n). \qquad (17)$$

Las raices de U_1 tendrán la forma

$$X-\frac{\mu_2\,\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h}\, Y=0, \quad \text{ó sea,} \quad \theta_h=\frac{X}{Y}=\frac{\mu_2\,\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_h},$$

y por consiguiente la diferencia de dos de ellas θ_h y θ_i, tendrá por expresión

$$\theta_h-\theta_i=\frac{\mu_2\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_h}-\frac{\mu_2\alpha_i-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_i}=\frac{(\alpha_h-\alpha_i)(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)}{(\lambda_1-\lambda_2\alpha_h)(\lambda_1-\lambda_2\alpha_i)};$$

al formar ahora la función φ (16) de las diferencias de estas raices tendremos:

$$\Phi=A_0{}^{\delta}\cdot\sum\frac{(\alpha_1-\alpha_2)^k\cdot(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^k}{(\lambda_1-\lambda_2\alpha_1)^k\cdot(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^k}$$
$$\cdot\frac{(\alpha_2-\alpha_3)^i\cdot(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^i}{(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^i\cdot(\lambda_1-\lambda_2\alpha_3)^i}\cdot\frac{(\alpha_3-\alpha_4)^l(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^l}{(\lambda_1-\lambda_2\alpha_3)^l\cdot(\lambda_1-\lambda_2\alpha_4)^l}\cdot\ldots;$$

ó bien designando por μ el número de diferencias de las raices, ó sea la suma $k+i+l+\ldots$ de los exponentes,

$$\Phi=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\mu}\cdot\frac{A_0^{\delta}}{(\lambda_1-\lambda_2\alpha_1)^k.(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^k.(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^i(\lambda_1-\lambda_2\alpha_3)^i\ldots}$$
$$\cdot\sum(\alpha_1-\alpha_2)^k(\alpha_2-\alpha_3)^i(\alpha_3-\alpha_4)^l\ldots\ldots: \qquad (18)$$

mas como cada raiz se repite el mismo número δ de veces, cada factor $(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h)$ del denominador entrará con el exponente δ, y la fracción de la expresión (18) se reducirá á a_0^{δ} si se tiene en cuenta la fórmula (17), y por tanto Φ se reducirá á

$$\Phi=(\lambda_1\,\mu_2-\mu_1\,\lambda_2)^{\mu}\cdot a_0^{\delta}\sum(\alpha_1-\alpha_2)^k(\alpha_2-\alpha_3)^i(\alpha_3-\alpha_4)^l\ldots,$$

ó sea

$$\Phi=(\lambda_1\,\mu_2-\mu_1\,\lambda_2)^{\mu}\cdot\varphi;$$

cuya igualdad nos prueba que φ es un invariante, como queríamos demostrar.

49.—**Teorema X.**—*Si representamos por* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ *las raices de una forma binaria* $a_0\,x^n+a_1\,x^{n-1}\,y+a_2\,x^{n-2}\,y^2+\ldots+a_n\,y^n$, *y por* s_1 *su suma; todo invariante* φ *de la forma propuesta expresada en función de las raices satisface á las ecuaciones de derivadas parciales*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=0, \qquad (19)$$

$$\alpha_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\alpha_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\alpha_n^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}-s_1r\varphi=\sum_{h=1}^{h=n}\alpha_h^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}-s_1r\varphi=0; \qquad (20)$$

siendo r *el grado del invariante* φ (a).

(a).—La demostración siguiente de este teorema es, con ligeras variantes de forma, la expuesta por el ilustre matemático contemporáneo F. Brioschi.

En efecto, como el invariante φ es una función de los coeficientes de la forma, y estos coeficientes son á su vez funciones de las raices (véanse las ecuaciones (7) del n.º 4), tendremos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}\cdot\frac{\partial a_1}{\partial\alpha_h}+\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\cdot\frac{\partial a_2}{\partial\alpha_h}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\cdot\frac{\partial a_n}{\partial\alpha_h}\,. \qquad (21)$$

Sabemos además (a) que un cierto coeficiente a_k puede expresarse en función de una raiz α_h, por la ecuación

$$a_k=M_k\,\alpha_h+N_k,$$

siendo M_k y N_k funciones simétricas de las raices restantes; y por lo tanto $\frac{\partial a_k}{\partial\alpha_h}$ se reducirá á M_k, que no es otra cosa más que la suma de las combinaciones de las $n-1$ raices α_1, $\alpha_2, \ldots$ α_{h-1}, $\alpha_{h+1}, \ldots \alpha_n$, tomadas $k-1$ á $k-1$.

Para hallar el valor de M_k en función de los coeficientes de la forma dada y de la raiz α_h, observemos qué, siendo α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$ las raices de la ecuación

$$a_0\frac{x^n}{y^n}+a_1\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{x}{y}+a_n=0,$$

ó sea,

$$Z=a_0 z^n+a_1 z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0$$

si se hace $\frac{x}{y}=z$; la ecuación $\frac{Z}{z-\alpha_h}=0$ tendrá por raices las mismas de Z menos la $z=\alpha_h$; y por consiguiente la suma buscada de las combinaciones $k-1$ á $k-1$ de las raices α_1, $\alpha_2, \ldots$

(a).—(R.—2.º—n.ºs 407, 408 y 439).—(L.—3.º—Pág. 9 y 10).—(S. B.—2.º—n.º 306).—(B.—2.ª parte—n.º 193).—La fórmula $a_k=M_k\,\alpha_h+N_k$ se deduce fácilmente con solo recordar que las ecuaciones (7) del n.º 4, nos hacen ver que los coeficientes de una ecuación son funciones simétricas de las raices, y lineales con relación á cada una de ellas.

$\alpha_{h-1}, \alpha_{h+1}, \ldots \alpha_n$, será el coeficiente de $z^{n-1-(k-1)} = z^{n-k}$ en el polinomio $\frac{Z}{z-\alpha_h}$; pero siendo $(-1)^k$ y $(-1)^{k-1}$ los signos de los coeficientes a_k y a_{k-1} de la ecuación primitiva, expresados en funcion de las raices, el coeficiente de x^{n-k} en el cociente antes indicado estará multiplicado por $\frac{(-1)^k}{(-1)^{k-1}} = -1$, y por tanto este coeficiente será

$$M_k = \frac{\partial a_k}{\partial \alpha_h} = -(a_{k-1} + a_{k-2}\,\alpha_h + a_{k-3}\,\alpha_h^2 + \ldots + a_0\,\alpha_h^{k-1}):$$

si en la fórmula anterior se hace $k=1, 2, 3, \ldots n$, sucesivamente, y se sustituyen los resultados en la fórmula (21) se tendrá

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h} = -\left\{ a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + (a_1 + a_0\,\alpha_h) \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + (a_2 + a_1\alpha_h + a_0\,\alpha_h^2) \frac{\partial \varphi}{\partial a_3} \right.$$
$$\left. + \ldots + (a_n + a_{n-1}\,\alpha_h + a_{n-2}\,\alpha_h^{\,2} + \ldots + a_0\,\alpha_h^{n-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial a_n} \right\}. \quad (22)$$

Haciendo ahora en la fórmula (22), $h=1, 2, 3, \ldots n$; sumando los resultados obtenidos, y sustituyendo en lugar de las sumas $\alpha_1^i + \alpha_2^i + \ldots + \alpha_n^i = s_i$, sus valores en función de los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots a_n$ (a), se tendrá

(a).—La suma de las potencias i de las raices de una ecuación está dada por la fórmula;

$$s_i = (-1)^i . \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ ia_i & a_{i-1} & a_{i-2} & \ldots\ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

pero en esta fórmula hay que sustituir $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots\ldots \frac{a_i}{a_0}$ en lugar de $a_1, a_2, \ldots\ldots a_i$ para poder aplicarla á la fórmula que resulta sumando las deducidas de la (22), porque el valor s_i se ha hallado suponiendo $a_0=1$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=-\left(na_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(n-1)\,a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}\right.$$
$$\left.+\ldots+a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\right); \qquad (23)$$

y como φ es un invariante, el segundo miembro de esta fórmula es cero (n.º 44, fór. (11)), y se tiene por último,

$$\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=0,$$

que es la primera de las fórmulas que tratábamos de demostrar.

Para obtener la segunda, multipliquemos por α_h^2 la fórmula (22), hagamos después $h=1, 2, 3, \ldots n$, en el resultado, y sumando todas las igualdades que se obtengan se tendrá,

$$\sum_{h=1}^{h=n}\alpha_h^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=-\left\{a_0s_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(a_1s_2+a_0s_3)\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(a_2s_2+a_1s_3+a_0s_4)\right.$$
$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots+(a_ns_2+a_{n-1}s_3+\ldots+a_0s_{n+1})\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\right\} \quad ;$$

sustituyendo en esta ecuación en lugar de $s_2, s_3, s_4, \ldots s_n$, sus valores en funcion de $s_1, a_0, a_1, \ldots a_n$ (a), se tendrá

$$\sum_{h=1}^{h=n}\alpha_h^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}=(a_1s_1+2a_2)\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(a_2s_1+3a_3)\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(a_3s_1+4a_4)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots+(a_ns_1+(n+1)\,a_{n+1})\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}$$

(a).—(R.—2.º—n.º 423).—(B.—2.ª parte.—n.º 271).—(L.—3.º—Pág. 118).

$$=\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_3}+\ldots+a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right) s_1$$

$$+\left(2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+3a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}}\right),$$

observando que $a_{n+1}=0$. Sumando y restando $s_1 a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}$ á la igualdad anterior, se convierte en

$$\sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h}=\sum_{h=0}^{h=n} s_1 . a_h \frac{\partial \varphi}{\partial a_h}-a_0 s_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}+2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+3a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}$$

$$+\ldots\ldots+na_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}}.$$

El primer término del segundo miembro de esta fórmula es igual, según el teorema de Euler (n.° 10, nota) al invariante φ por su grado r y por s_1; y como además se tiene que $s_1=-\frac{a_1}{a_0}$, ó sea, $-a_0 s_1=a_1$, la fórmula anterior se reduce á

$$\sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h}=s_1 r\varphi+\left(a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0}+2a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1}+3a_3 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2}\right.$$

$$\left.+\ldots\ldots+na_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}}\right). \qquad (24)$$

mas como φ es un invariante, la cantidad comprendida entre paréntesis es cero (n.° 44, fór. (12)), de manera que se tendrá por último,

$$\sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h}-s_1 r\varphi=0$$

que es la segunda de las fórmulas que nos proponíamos establecer.

Observación.—Si la forma propuesta estuviera escrita con los coeficientes numéricos del binomio, la demostración sería la misma, pero las ecuaciones (22) y (24) se convertirían en las dos siguientes:

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h} = -\left(a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n}\right),$$

$$\sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_h} - s_1 r \varphi = na_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1)\, a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}}.$$

CAPÍTULO VI.

COVARIANTES.

50.—**Covariantes: definiciones.**—*Se llama* **covariante** *á toda función homogénea de los coeficientes y variables de una forma que tenga la propiedad de qué, si se efectúa en ésta forma una sustitución lineal, la función semejante de los coeficientes y variables de la trasformada sea igual á la función primitiva, multiplicada por una potencia del módulo de la sustitución.* Al exponente de esta potencia del módulo se le llama *índice* del covariante.

Sea, por ejemplo, la forma

$$U=(a_0, a_1, a_2, \ldots .)(x, y, z, \ldots .)^n \quad (1)$$

y supongamos que

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots . x, y, z, \ldots .) \quad (2)$$

es una función homogénea de los coeficientes y variables de U. Verificando en la forma U la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\ldots\ldots \\ y=\lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\ldots\ldots \\ z=\lambda_3 X+\mu_3 Y+\nu_3 Z+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (3)$$

se obtendrá la forma

$$U_1=(A_0, A_1, A_2, \ldots . X, Y, Z, \ldots .)^n:$$

formemos ahora con los coeficientes y variables A_0, A_1, $A_2, \ldots .$ X, Y, $Z, \ldots .$ la función

$$\Phi = \varphi (A_0, A_1, A_2, \ldots X, Y, Z, \ldots)$$

semejante á la $\varphi (a_0, a_1, a_2, \ldots x, y, z, \ldots)$; si llamando Δ al módulo de la sustitución propuesta, y siendo μ un número entero se verifica qué,

$$\varphi (A_0, A_1, A_2, \ldots X, Y, Z, \ldots) = \Delta^{\mu} \varphi (a_0, a_1, a_2, \ldots x, y, z, \ldots) \quad (4)$$

la función φ se dice que es un *covariante* de la forma propuesta cuyo *índice* es μ.

Si el índice μ es igual á cero, en cuyo caso la función φ no altera por la sustitución lineal verificada, la función recibe el nombre de *covariante absoluto*. Por ejemplo, toda forma es *covariante absoluto* de sí misma.

Del mismo modo que una sola forma, puede un sistema de formas tener también covariantes. Sean las formas

$$\left.\begin{array}{l} U = (a_0, a_1, a_2, \ldots) (x, y, z, \ldots)^n \\ V = (b_0, b_1, b_2, \ldots) (x, y, z, \ldots)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

supongamos que verificando en ellas la sustitución lineal (3) se trasforman en las

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = (A_0, A_1, A_2, \ldots) (X, Y, Z, \ldots)^n \\ V_1 = (B_0, B_1, B_2, \ldots) (X, Y, Z, \ldots)^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\},$$

si al mismo tiempo se tiene una función homogénea de los coeficientes y variables de las primeras formas, tal como la

$$\varphi (a_0, a_1, a_2, \ldots b_0, b_1, b_2, \ldots x, y, z, \ldots)$$

que satisfaga á la condición

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots B_0, B_1, B_2, \ldots X, Y, Z, \ldots)$$
$$= \Delta^{\mu}.\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots b_0, b_1, b_2 \ldots x, y\, z, \ldots);$$

esta función φ recibe el nombre de covariante del sistema dado, ó mejor, el de *covariante simultáneo* de las formas propuestas.

Los grados con que entran en un covariante las variables y los coeficientes de la forma correspondiente pueden ser diferentes, y para distinguirlos, se ha convenido en llamar *orden* de un covariante al grado con que entran en él las variables de la forma, y en designar simplemente por la palabra *grado,* el grado con que entran los coeficientes. Así, por ejemplo, un covariante que contenga á las variables con el exponente 4, y á los coeficientes con el 5, se dirá que es de *4.º orden y 5.º grado* (a).

Del covariante de una forma se puede dar también la definición siguiente: *Se llama covariante de una forma* U, *á una función* φ *de sus variables y de sus coeficientes deducida de la* U *de tal manera qué, á excepción de una potencia del módulo de una sustitución lineal, la trasformada por esta sustitución de la deducida* φ, *sea la función* φ *de la trasformada de la forma propuesta,* ó sea en otros términos, *que la función* φ *de la trasformada de* U *sea la trasformada de la misma función* φ. Esta definición se reduce á la primera con solo observar, que si la forma es la (1), y el covariante es $\varphi(a_0, a_1, a_2 \ldots x, y, z, \ldots)$, trasformando este covariante por la sustitución lineal (3), se tendrá

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z + \ldots, \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z$$
$$+ \ldots, \lambda_3 X + \mu_3 Y + \nu_3 Z + \ldots, \ldots);$$

y haciendo el desarrollo de φ, se hallarán para coeficientes de las diversas potencias de las variables las mismas combinaciones de los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots,$ de la trasformada U

(a).—Puede observarse que los invariantes no son más que covariantes de orden cero.

que obtendríamos en la función (4), á excepción de una potencia del módulo de la sustitución; de manera que obtendríamos como ecuación fundamental del covariante la que sigue

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots X, Y, Z, \ldots) = \Delta^{\mu} . \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, \lambda_1 X$$
$$+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\ldots, \lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\ldots, \ldots). \qquad (5)$$

Debemos observar, por último, que según la definición del covariante, cada coeficiente de un término $X^h\ Y^k\ Z^l \ldots\ldots$, del primer miembro de la ecuación (5) debe reproducir, á excepción del factor Δ^{μ}, el coeficiente del mismo término del segundo miembro (a).

Ejemplo de covariante.—Tomemos la forma binaria cúbica

$$U = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3;$$

sea además la función

$$\varphi = (a_0 a_2 - a_1^2)\, x^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, xy + (a_1 a_3 - a_2^2)\, y^2,$$

y vamos á ver que esta función es un *covariante*. Verifiquemos en efecto en la forma U la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 X + \mu_1 Y \\ y = \lambda_2 X + \mu_2 Y \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

y obtendremos la trasformada

$$U_1 = A_0 X^3 + 3A_1 X^2 Y + 3A_2 X Y^2 + A_3 Y^3,$$

(a).—(S. B.—1.º—n.º 53).—(R.—2.º—n.º 398).—(B.—Apéndice n.º IX)—(L.—1.º—Pág. 44).

representando por A_0, A_1, A_2, A_3 los polinomios

$$\left.\begin{array}{l} A_0=a_0\lambda_1^3+3a_1\lambda_1^2\lambda_2+3a_2\lambda_1\lambda_2^2+a_3\lambda_2^3 \\ A_1=\mu_1(a_0\lambda_1^2+a_2\lambda_2^2)+2\lambda_1\lambda_2(a_1\mu_1+a_2\mu_2)+\mu_2(a_1\lambda_1^2+a_3\lambda_2^2) \\ A_2=\lambda_1(a_0\mu_1^2+a_2\mu_2^2)+2\mu_1\mu_2(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)+\lambda_2(a_1\mu_1^2+a_3\mu_2^2) \\ A_3=a_0\mu_1^3+3a_1\mu_1^2\mu_2+3a_2\mu_1\mu_2^2+a_3\mu_2^3 \end{array}\right\} . \quad (\alpha_1)$$

Formando ahora la función Φ análoga á la φ tendríamos

$$\Phi=(A_0 A_2-A_1^2)X^2+(A_0 A_3-A_1 A_2)XY+(A_1 A_3-A_2^2)Y^2;$$

sustituyendo en esta función en vez de A_0, A_1, A_2, A_3 sus valores, y en lugar de X é Y los suyos deducidos de las ecuaciones (α), que son

$$X=\frac{\mu_2 x-\mu_1 y}{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}, \qquad Y=\frac{\lambda_1 y-\lambda_2 x}{\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2}; \qquad (\alpha_2)$$

se obtendría finalmente

$$(A_0A_2-A_1^2)X^2+(A_0A_3-A_1A_2)XY+(A_1A_3-A_2^2)Y^2=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^2$$
$$\{(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2\}, \qquad (\beta)$$

ó sea

$$\Phi=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^2 . \varphi .$$

La misma expresión (β) se hubiera obtenido muy fácilmente sustituyendo en φ los valores de x é y dados por las ecuaciones (α), y teniendo en cuenta los valores (α_1) y (α_2).

51.—**Propiedades de los covariantes con relación á los coeficientes y variables de la forma.** —**Teorema I.**—*El índice del covariante de una forma es igual á la diferencia entre el producto de su grado por el de la forma y el orden de dicho covariante, dividida por el número de variables de la forma.*

Sea, en efecto, la forma de k variables y de grado n

$$U=(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n;$$

y supongamos que

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots x, y, z, \ldots)$$

sea uno de sus covariantes de orden m y grado r. Verificando en esta forma la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\ldots \\ y=\lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

se trasformará en

$$U_1=(A_0, A_1, A_2, \ldots)(X, Y, Z, \ldots)^n$$

y el covariante se convertirá, según hemos visto (5), en

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots X, Y, Z, \ldots)=\Delta^{\mu}.\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots \lambda_1 X$$
$$+\mu_1 Y+\nu_1 Z+\ldots, \lambda_2 X+\mu_2 Y+\nu_2 Z+\ldots, \ldots).$$

Ahora bien, según ya sabemos (n.º 32) los coeficientes $A_0, A_1, A_2, \ldots$ del primer miembro de la igualdad anterior son de grado n respecto á los coeficientes de la sustitución, y como φ es del grado r respecto á $A_0, A_1, A_2, \ldots$, será de grado nr con relación á $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Por otra parte, el primer factor del segundo miembro Δ^{μ} contiene á los coeficientes de la sustitución con el grado $k\mu$, por ser Δ de grado k, y como el segundo factor los contiene con el exponente m, por ser m el orden del covariante φ, dicho segundo miembro los contendrá con el grado $k\mu+m$; luego tendremos

$$nr=k\mu+m$$

de donde se deduce

$$\mu = \frac{nr - m}{k}, \quad (6)$$

fórmula que demuestra el teorema enunciado.

Corolario I.—En el caso de las formas binarias, la fórmula (6) se reduce á

$$\mu = \frac{nr - m}{2}. \quad (7)$$

Corolario II.—*Los covariantes de una forma binaria de grado par son necesariamente de orden par.*

Porque debiendo ser μ número entero, si suponemos en la fórmula (7) que n es par, m deberá serlo también para que la diferencia $nr - m$ sea divisible por 2.

Corolario III.—*Los covariantes de una forma binaria de grado impar, serán de orden par ó impar según que su grado sea par ó impar.*

En efecto, siendo n impar para que $nr - m$ sea divisible por 2 es preciso que m y r sean ambos pares ó ambos impares.

52.—**Teorema II.**—*Los pesos de los coeficientes sucesivos del covariante de una forma binaria, forman una progresión aritmética cuyo primer término es el índice y cuya razón es la unidad.*

En efecto, verificando en la forma $U = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n$ la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x = X \\ y = \lambda Y \end{array}\right\},$$

los coeficientes de la trasformada son

$$A_0 = a_0,\ A_1 = \lambda a_1,\ A_2 = \lambda^2 a_2, \ldots A_h = \lambda^h . a_h, \ldots;$$

y por lo tanto el coeficiente del término $X^{n-h}\ Y^h$ del primer miembro de la fórmula (5) adquirirá el factor λ^{θ_h}, si por θ_h representamos su peso. Mas como el módulo de la sustitución verificada es λ, el mismo término del segundo miembro adquiere el factor $\lambda^{\mu+h}$, siendo μ el índice del covariante φ, luego deberemos tener para todos los valores de h

$$\theta_h = \mu + h;$$

y dando en esta fórmula á h los valores $0, 1, 2, \ldots n$, quedará demostrado el teorema.

53.—**Teorema III.**—*Si en una forma binaria se permutan los coeficientes equidistantes de los extremos, en sus covariantes también se cambiarán entre sí los coeficientes de los términos que disten igualmente de los extremos.*

En efecto, verificar en la forma propuesta $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n$ la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x &= Y \\ y &= X \end{aligned}\right\},$$

cuyo módulo es -1, es lo mismo, según ya sabemos (n.° 43), que permutar los coeficientes equidistantes de los extremos; y en esta hipótesis la ecuación fundamental del covariante será,

$$\varphi(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0, X, Y) = (-1)^\mu . \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, Y, X),$$

expresión que exige que el coeficiente de un término $X^{n-h}\ Y^h$ sea igual al del $X^h\ Y^{n-h}$ por el cambio mútuo de los coeficientes a_h y a_{n-h}, que se ha verificado ya en la forma por la sustitución propuesta.

Observemos además, que en el covariante los términos cambiados de lugar conservarán su signo ó le variarán según que $(-1)^\mu$ sea positivo ó negativo, es decir, según que μ sea par ó impar.

54.—**Teorema IV**.—*Todo covariante φ de una forma binaria satisface á las ecuaciones de derivadas parciales*

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}, \quad (8)$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(n-2)\,a_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}. \quad (9)$$

En efecto, si en la forma $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\,(x, y)^n$, se verifica la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=X+\lambda Y \\ y=Y \end{array}\right\},$$

cuyo módulo es la unidad, el covariante φ satisfará, por definición, á la ecuación

$$\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, X, Y)=\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, X+\lambda Y, Y),$$

ó bien, sustituyendo en lugar de X é Y sus valores $x-\lambda y$ é y, á la

$$\varphi\,(A_0, A_1, A_2, \ldots A_n, x-\lambda y, y)=\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, x, y). \quad (10)$$

Pero según ya sabemos (véase la *Nota final* y el teorema 5.° del n.° 44) los valores de $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$, son en este caso,

$$\begin{array}{l} A_0=a_0, \\ A_1=a_1+a_0\lambda, \\ A_2=a_2+2a_1\lambda+a_0\lambda^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_n=a_n+\left[\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array}\right]a_{n-1}\lambda+\left[\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array}\right]a_{n-2}\lambda^2+\ldots+a_0\lambda^n; \end{array}$$

de manera que sustituyendo estos valores en la expresión (10), desarrollando su primer miembro por la fórmula de Taylor y ordenando el desarrollo con relación á λ_1, tendremos;

$$\varphi+\left(-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\right)\lambda$$
$$+P\lambda^2+Q\lambda^3+\ldots=\varphi;$$

y como esta ecuación debe verificarse para cualquier valor de λ, es preciso que los coeficientes de las diversas potencias de λ se reduzcan á cero, y por lo tanto que se tenga

$$-y\frac{\partial\varphi}{\partial x}+a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}=0,$$

que es la fórmula primera de las que queríamos demostrar.

De una manera análoga se demostraría que verificando en la forma la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x=X \\ y=\lambda X+Y \end{array}\right\},$$

cuyo módulo es también la unidad, el covariante φ satisface á la ecuación

$$-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}+na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots+a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}=0.$$

Observación.—La ecuación (9) no es más que una consecuencia de la (8) cuando la forma está escrita simétricamente, pués podría deducirse de ella por la permutación de x por y, é y por x, y por la de los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos.

55.—**Teorema V.**—*Si una función homogénea* φ $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n, x, y)$, *y de los grados* m y r *con relación á las variables y coeficientes de una forma* $U=(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)\,(x, y)^n$, *satisface á las ecuaciones*

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a_0 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial a_n},$$

$$x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = na_1 \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} + (n-1)\, a_2 \frac{\partial \varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial a_{n-1}};$$

la función φ será un covariante de la forma U.

La demostración de este teorema, que es el recíproco del precedente, exige la integración de varias ecuaciones, entre otras de dos de la forma $\lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2} = \mu . \Phi$, y excede por lo tanto el límite de los conocimientos que racionalmente pueden suponerse en la generalidad de los lectores de esta obra, por cuya razón la suprimimos (a).

Observación.—En virtud de los teoremas IV y V quedan establecidas las condiciones necesarias y suficientes para que una función homogénea φ de los coeficientes y variables de una forma sea un covariante de esta forma, y como esas condiciones se reducen á que la función φ satisfaga á las ecuaciones (8) y (9), estas ecuaciones reciben el nombre de *características del covariante.*

56.—**Propiedades de los covariantes con relación á las raices de la forma.**—**Teorema VI.**— *Toda función simétrica de las diferencias de las raices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ de una forma binaria, y de las diferencias $x - \alpha_1 y$, $x - \alpha_2 y, \ldots x - \alpha_n y$ será un covariante de la forma, siempre que cada raiz entre en la función con el mismo exponente.*

Sea por ejemplo, la forma

$$U = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_n y);$$

(a).—Puede verse la demostración que suprimimos en la obra siguiente:
Faá de Bruno (F).—*Théorie des Formes binaires.*—Turin, 1876.— Pág. 190.

y sea además

$$\varphi = a_0^{\delta}\,\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^h\,(\alpha_2-\alpha_3)^i \ldots (x-\alpha_1\, y)^p\,(x-\alpha_2\, y)^q \ldots (x-\alpha_n\, y)^t,$$

una función simétrica de las diferencias $(\alpha_h-\alpha_i)$ y $(x-\alpha_h\, y)$, que sea del grado m respecto á las variables y en la cual supondremos que todas las raices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ entran con el mismo exponente, δ por ejemplo, y vamos á demostrar que φ es un covariante de la forma U.

En efecto, si en la forma U se verifica la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1\, Y \\ y=\lambda_2 X+\mu_2\, Y \end{array}\right\},$$

cuyo módulo es $\lambda_1\,\mu_2-\mu_1\,\lambda_2=\Delta$, y se designan por $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ las raices de la trasformada y por A_0 el coeficiente de su primer término, para que φ sea un covariante deberá tenerse;

$$\begin{array}{l} A_0^{\delta}\,\Sigma\,(\theta_1-\theta_2)^h\,(\theta_2-\theta_3)^i \ldots (X-\theta_1\, Y)^p\,(X-\theta_2\, Y)^q \ldots (X-\theta_n\, Y)^t \\ =\Delta^{\mu}.\, a_0^{\delta}\,\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^h\,(\alpha_2-\alpha_3)^i \ldots (x-\alpha_1 y)^p\,(x-\alpha_2 y)^q \ldots (x-\alpha_n y)^t. \quad (11) \end{array}$$

Pero anteriormente (n.º 48) hemos visto que

$$A_0=a_0\,(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_1)\,(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_2)\ldots(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_n)$$

$$\theta_h=\frac{\mu_2\,\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h}, \qquad \theta_h-\theta_i=\Delta.\,\frac{\alpha_h-\alpha_i}{(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h)\,(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_i)};$$

y como además se tiene

$$X-\theta_h Y=\frac{\mu_2 x-\mu_1 y}{\Delta}-\frac{\mu_2\alpha_h-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_h}.\frac{\lambda_1 y-\lambda_2 x}{\Delta}=\frac{x-\alpha_h\, y}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_h};$$

el primer miembro de la fórmula (11) se convertirá en

$$\begin{array}{c} \Delta^{h+i+\ldots}.\, A_0^{\delta}.\,\Sigma\,(\alpha_1-\alpha_2)^h\,(\alpha_2-\alpha_3)^i \ldots (x-\alpha_1\, y)^p \\ (x-\alpha_2\, y)^q \ldots (x-\alpha_n\, y)^t \end{array}$$

dividido por el producto

$$(\lambda_1-\lambda_2\alpha_1)^h(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^h(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^i(\lambda_1-\lambda_2\alpha_3)^i\ldots(\lambda_1-\lambda_2\alpha_1)^p$$
$$(\lambda_1-\lambda_2\alpha_2)^q\ldots(\lambda_1-\lambda_2\alpha_n)^t\,;$$

y como cada una de las raices entra el mismo número δ de veces, cada factor $(\lambda_1-\lambda_2\alpha_h)$ entrará con este mismo exponente y su producto se reducirá, teniendo en cuenta el valor de A_0 antes citado, con el factor A_0^δ; por lo tanto la expresión (11) se convierte en una identidad y la función φ es un covariante de la forma U, como queríamos demostrar.

57.—**Teorema VII.**—*Si representamos por* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, *las raices de una forma binaria* $(a_0, a_1, a_2 \ldots)(x, y)^n$ *y por* s_1 *su suma, todo covariante* φ *de la forma propuesta expresada en función de las raices satisface á las ecuaciones de derivadas parciales*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}+y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\sum_{h=1}^{h=n}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}+y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0, \quad (12)$$

$$\alpha_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_1}+\alpha_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2}+\ldots+\alpha_n^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_n}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-rs_1\varphi$$
$$=\sum_{h=1}^{h=n}\alpha_h^2\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_h}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}-rs_1\varphi=0. \quad (13)$$

En efecto, según hemos visto anteriormente (n.° 54) todo covariante de una forma binaria satisface á las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} y\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\\ x\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(n-1)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots+a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}\end{aligned}\right\}.$$

Pero según hemos demostrado en los invariantes (n.° 49, observación), se tiene

$$\left.\begin{array}{l} a_0 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_{n-1} \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_n} = -\sum\limits_{h=1}^{h=n} \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_h} \\ na_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_0} + (n-1)\, a_2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_1} + \ldots + a_n \dfrac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} = \sum\limits_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_h} - rs_1\varphi \end{array}\right\},$$

y estas ecuaciones comparadas con las precedentes nos dan

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{h=1}^{h=n} \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_h} + y \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \\ \sum\limits_{h=1}^{h=n} \alpha_h^2 . \dfrac{\partial\varphi}{\partial \alpha_h} - x \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - rs_1\varphi = 0 \end{array}\right\}$$

que son las que tratábamos de obtener.

CAPÍTULO VII.

TEOREMAS SOBRE LOS INVARIANTES Y COVARIANTES

58.—**Teorema I.**—*El determinante de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas es un invariante.*

Efectivamente, sea el sistema de n ecuaciones lineales homogéneas

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x+b_1 y+\ldots+k_1 u=0 \\ a_2 x+b_2 y+\ldots+k_2 u=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x+b_n y+\ldots+k_n u=0 \end{array}\right\}, \qquad (1)$$

cuyo determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots\ldots & k_1 \\ a_2 & b_2 \ldots\ldots & k_2 \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_n & b_n \ldots\ldots & k_n \end{vmatrix}$$

vamos á probar que es un invariante. Verificando en las formas lineales (1) la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1 Y+\ldots+\omega_1 U \\ y=\lambda_2 X+\mu_2 Y+\ldots+\omega_2 U \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u=\lambda_n X+\mu_n Y+\ldots+\omega_n U \end{array}\right\},$$

se obtiene el sistema

$$\left.\begin{array}{l}
(a_1\lambda_1+b_1\lambda_2+\ldots+k_1\lambda_n)\,X+(a_1\mu_1+b_1\mu_2+\ldots+k_1\mu_n)\,Y \\
\quad+\ldots+(a_1\omega_1+b_1\omega_2+\ldots+k_1\omega_n)\,U=0 \\
(a_2\lambda_1+b_2\lambda_2+\ldots+k_2\lambda_n)\,X+(a_2\mu_1+b_2\mu_2+\ldots+k_2\mu_n)\,Y \\
\quad+\ldots+(a_2\omega_1+b_2\omega_2+\ldots+k_2\omega_n)\,U=0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_n\lambda_1+b_n\lambda_2+\ldots+k_n\lambda_n)\,X+(a_n\mu_1+b_n\mu_2+\ldots+k_n\mu_n)\,Y \\
\quad+\ldots+(a_n\omega_1+b_n\omega_2+\ldots+k_n\omega_n)\,U=0
\end{array}\right\}$$

cuyo determinante, que representaremos por Δ_1,

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{lll}
a_1\lambda_1+\ldots+k_1\lambda_n & a_1\mu_1+\ldots+k_1\mu_n & a_1\omega_1+\ldots+k_1\omega_n \\
a_2\lambda_1+\ldots+k_2\lambda_n & a_2\mu_1+\ldots+k_2\mu_n & a_2\omega_1+\ldots+k_2\omega_n \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_n\lambda_1+\ldots+k_n\lambda_n & a_n\mu_1+\ldots+k_n\mu_n & a_n\omega_1+\ldots+k_n\omega_n
\end{array}\right|$$

es el producto de los dos determinantes (a),

$$\left|\begin{array}{lll}
a_1 & b_1\ldots & k_1 \\
a_2 & b_2\ldots & k_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_n & b_n\ldots & k_n
\end{array}\right| =\Delta, \quad \text{y} \quad
\left|\begin{array}{lll}
\lambda_1 & \mu_1\ldots & \omega_1 \\
\lambda_2 & \mu_2\ldots & \omega_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda_n & \mu_n\ldots & \omega_n
\end{array}\right| ;$$

luego queda demostrado el teorema.

Corolario I.—*El determinante formado por los primeros miembros de* n *sistemas de ecuaciones de la forma*

$$\left.\begin{array}{l}
x_1=\lambda_1X_1+\mu_1Y_1+\nu_1Z_1+\ldots \\
y_1=\lambda_2X_1+\mu_2Y_1+\nu_2Z_1+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\},\quad
\left.\begin{array}{l}
x_2=\lambda_1X_2+\mu_1Y_2+\nu_1Z_2+\ldots \\
y_2=\lambda_2X_2+\mu_2Y_2+\nu_2Z_2+\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\},\ \text{etc.},$$

es un invariante.

(a).—(S. B.—2.º—n.º 258).—(R.—2.º—n.º 117).—(B.—Apéndice n.º XIII.).—(L.—1.º—Pág. 142).

En efecto, según la multiplicación de determinantes tenemos (a)

$$(x_1\, y_2\, z_3 \ldots) = (\lambda_1\, \mu_2\, \nu_3 \ldots)\,(X_1\, Y_2\, Z_3 \ldots),$$

y como el primer factor del segundo miembro de la anterior igualdad es el módulo de la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda_1 X + \mu_1 Y + \ldots \\ y = \lambda_2 X + \mu_2 Y + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

queda demostrado el teorema.

Corolario II.—*Si* (x_1, y_1), (x_2, y_2) *son raices de la ecuación* $(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n = 0$, *el determinante* $(x_1\, y_2 - y_1\, x_2)$ *es un invariante.*

En efecto, los dos sistemas (x_1, y_1), (x_2, y_2) son cogredientes porque se trasforman por las sustituciones directas

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 \\ y_1 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 Y_1 \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x_2 = \lambda_1 X_2 + \mu_1 Y_2 \\ y_2 = \lambda_2 X_2 + \mu_2 Y_2 \end{array}\right\};$$

y su determinante será, según el corolario anterior, un invariante.

59.—**Teorema II.**—*La resultante de dos ecuaciones homogéneas es un invariante.*

Sean, por ejemplo, las dos ecuaciones

$$\varphi = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y) \ldots (x - \alpha_m y) = 0,$$
$$\psi = b_0 (x - \beta_1 y)(x - \beta_2 y) \ldots (x - \beta_n y) = 0;$$

que suponemos ya descompuestas factorialmente para mayor

(a).—Para mayor sencillez no escribimos más que la diagonal principal de cada determinante siguiendo la notación de Baltzer y Salmon.

sencillez. Según sabemos (a) la resultante de estas dos ecuaciones puede ponerse bajo la forma

$$
\begin{aligned}
R = a_0^n\, b_0^m\,. & \;(\alpha_1-\beta_1)\,(\alpha_2-\beta_1)\ldots(\alpha_m-\beta_1)\\
\times & \;(\alpha_1-\beta_2)\,(\alpha_2-\beta_2)\ldots(\alpha_m-\beta_2)\\
& \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\times & \;(\alpha_1-\beta_n)\,(\alpha_2-\beta_n)\ldots(\alpha_m-\beta_n)\,,
\end{aligned}
$$

y vamos á demostrar que R es un invariante. Verificando en las ecuaciones φ y ψ la sustitución lineal

$$
\left.\begin{aligned} x &= \lambda_1 X + \mu_1 Y \\ y &= \lambda_2 X + \mu_2 Y \end{aligned}\right\}\,,
$$

cada uno de los factores

$$
x - \alpha_h\, y\,, \qquad\qquad x - \beta_k\, y\,,
$$

se convierte, según ya sabemos (n.º 48), en

$$
(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h)\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\alpha_h - \mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_h}\,Y\Big)\,, \qquad (\lambda_1-\lambda_2\,\beta_k)\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\beta_k - \mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\beta_k}\,Y\Big);
$$

y las trasformadas de φ y ψ tendrán la forma

$$
\Phi = A_0\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\alpha_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_1}\,Y\Big)\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\alpha_2-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_2}\,Y\Big)\ldots\Big(X - \frac{\mu_2\alpha_m-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\alpha_m}\,Y\Big);
$$

$$
\Psi = B_0\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\beta_1-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\beta_1}\,Y\Big)\,\Big(X - \frac{\mu_2\,\beta_2-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\,\beta_2}\,Y\Big)\ldots\Big(X - \frac{\mu_2\,\beta_n-\mu_1}{\lambda_1-\lambda_2\beta_n}\,Y\Big);
$$

designando por A_0 y B_0 los valores

$$
\begin{aligned}
A_0 &= a_0\,(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_1)\,(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_2)\ldots.(\lambda_1-\lambda_2\,\alpha_m)\,,\\
B_0 &= b_0\,(\lambda_1-\lambda_2\,\beta_1)\,(\lambda_1-\lambda_2\,\beta_2)\ldots.(\lambda_1-\lambda_2\,\beta_n)\,.
\end{aligned}
$$

Formemos ahora la resultante R' de las ecuaciones Φ y Ψ,

(a).—(R.—2.º—n.º 579).—(B.—2.ª parte.—n.os 275 y 276).—(L.—3.º—Pág. 121).

y para ello observemos que si designamos por θ_h una raiz de Φ y por ζ_k una de Ψ, los valores de estas raices son (n.º 48),

$$\theta_h = \frac{\mu_2 \alpha_h - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_h}, \qquad \zeta_k = \frac{\mu_2 \beta_k - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2 \beta_k};$$

cuya diferencia es

$$\theta_h - \zeta_k = \frac{\mu_2 \alpha_h - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_h} - \frac{\mu_2 \beta_k - \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2 \beta_k} = (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2) \frac{\alpha_h - \beta_k}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_h)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_k)},$$

y por lo tanto la resultante será,

$$R' = A^n{}_0 \, B^m{}_0 (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^{mn} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\alpha_1 - \beta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_1)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_1)} \cdot \dfrac{\alpha_2 - \beta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_1)} \cdots \dfrac{\alpha_m - \beta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_m)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times \dfrac{\alpha_1 - \beta_n}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_1)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_n)} \cdot \dfrac{\alpha_2 - \beta_n}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_2)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_n)} \cdots \dfrac{\alpha_m - \beta_n}{(\lambda_1 - \lambda_2 \alpha_m)(\lambda_1 - \lambda_2 \beta_n)} \end{array} \right\};$$

expresión que si se tienen en cuenta los valores de A_0 y B_0 se reduce á

$$R' = (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^{m.n} \, . \, R,$$

fórmula que demuestra el teorema enunciado.

60.—**Teorema III.**—*El discriminante de una forma binaria es un invariante.*

Efectivamente, el discriminante de una forma binaria es igual al producto de los cuadrados de las diferencias de las raices de esta forma (n.º 11, obs.), y es por lo tanto una función simétrica de estas diferencias que contiene á todas las raices con el mismo exponente, de manera que es un invariante (n.º 48).

61.—Teorema IV.—*El Jacobiano de dos formas binarias es un covariante simultáneo de estas formas.*

Sean las formas $\varphi=(a_0, a_1, a_2, \ldots a_m)(x, y)^m$ y $\psi=(b_0, b_1, b_2, \ldots b_n)(x, y)^n$, y vamos á demostrar que su Jacobiano

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{2}$$

es un covariante. Verificando, en efecto, en las formas propuestas la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1 X+\mu_1 Y \\ y=\lambda_2 X+\mu_2 Y \end{array}\right\}, \tag{3}$$

y designando por Φ y Ψ las trasformadas de φ y ψ tendremos (n^o 33, fór. 15),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial X}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial X}=\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial Y}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Y}=\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial X}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial X}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial X}=\lambda_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial Y}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial Y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Y}=\lambda_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{array}\right\}; \tag{4}$$

de manera que el Jacobiano de las funciones Φ y Ψ será

$$J'=\begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial X} & \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial X} & \frac{\partial\Psi}{\partial Y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} & \mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \lambda_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y} & \mu_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

y como este último determinante es el producto de los

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \Delta \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = J \qquad (6)$$

se tendrá

$$J' = \Delta . J,$$

y queda demostrado el teorema.

62.—**Teorema V.**—*El Hessiano de una forma binaria de grado superior al segundo, es un covariante de ésta forma.*

El Hessiano de una forma $\varphi = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n$ es el determinante

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

y vamos á probar que este determinante es un covariante. Para ello si verificamos en la forma la sustitución lineal (3), y designamos por Φ la trasformada de φ, las primeras derivadas de Φ estarán dadas por las fórmulas (4), y para abreviar las designaremos por h y k; las segundas derivadas de Φ serán,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} &= \frac{\partial h}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial h}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial X} = \lambda_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X . \partial Y} &= \frac{\partial h}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial h}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial Y} = \mu_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y . \partial X} &= \frac{\partial k}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial k}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial X} = \lambda_1 \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} &= \frac{\partial k}{\partial x} . \frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial k}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial Y} = \mu_1 \frac{\partial k}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial k}{\partial y} \end{aligned}\right\} ;$$

y por tanto el Hessiano de Φ, que representaremos por H_1, será

$$H_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial h}{\partial y} & \mu_1 \frac{\partial h}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial h}{\partial y} \\ \lambda_1 \frac{\partial k}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial k}{\partial y} & \mu_1 \frac{\partial k}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial k}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y} \end{vmatrix};$$

pero si en el último factor del segundo miembro de la expresión anterior se sustituyen en lugar de $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial y}$, sus valores deducidos de las ecuaciones (4), se obtendrá,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial k}{\partial x} & \frac{\partial k}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y . \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

y por consiguiente

$$H_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix}^2 . \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x . \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y . \partial x} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \Delta^2 . H,$$

fórmula que demuestra el teorema enunciado.

Observación.—*El Hessiano de una forma cuadrática binaria es un invariante.*

En efecto, las segundas derivadas de la forma cuadrática binaria

$$\varphi = a_0 x^2 + 2a_1 x y + a_2 y^2,$$

son

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=2a_0,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x.\partial y}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y.\partial x}=2a_1,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=2a_2;$$

y su Hessiano será

$$H=\begin{vmatrix} 2a_0 & 2a_1 \\ 2a_1 & 2a_2 \end{vmatrix}=4\,(a_0\,a_2-a_1^2),$$

que es un invariante porque aparte del factor numérico 4 es igual al discriminante de φ (n.° 23).

63.—**Teorema VI.**—*Todo invariante de un covariante de una forma, es también invariante de esta forma.*

En efecto, sea la forma $U=(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$ y sea $\varphi=(c_0, c_1, c_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^r$ un covariante de U; designemos por $U_1=(A_0, A_1, A_2, \ldots)(X, Y, Z, \ldots)^n$ y $\varphi_1=(C_0, C_1, C_2, \ldots)(X, Y, Z, \ldots)^r$ las trasformadas de U y φ por una sustitución lineal de módulo Δ. Si tenemos un invariante de φ, ψ por ejemplo, este invariante deberá satisfacer á la ecuación

$$\psi\,(C_0, C_1, C_2, \ldots)=\Delta^{\mu}.\,\psi\,(c_0, c_1, c_2, \ldots).$$

Pero por definición (n.° 50) los coeficientes $C_0, C_1, C_2, \ldots$, no difieren de $c_0, c_1, c_2, \ldots$, más que por una misma potencia de Δ; y por lo tanto reemplazando los coeficientes $C_0, C_1, C_2, \ldots$, por sus valores en función de los $A_0, A_1, A_2, \ldots$; y los $c_0, c_1, c_2, \ldots$, por los suyos en función de $a_0, a_1, a_2, \ldots$, se tendrá

$$\psi(A_0, A_1, A_2, \ldots)=\Delta^{\omega}.\,\psi(a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

que es lo que se quería demostrar.

64.—**Teorema VII.**—*Todo covariante de un covariante de una forma, es también covariante de esta forma.*

La demostración es casi igual á la del teorema anterior y por esa razón la omitimos.

65.—**Teorema VIII.**—*El Jacobiano de dos covariantes de una forma binaria, es también covariante de esta forma.*

Sean $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ dos covariantes de una forma binaria $U=(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$ y vamos á probar que el Jacobiano de φ y ψ,

$$J=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

es un covariante de U. Designemos por $\Phi(X, Y)$, $\Psi(X, Y)$ las trasformadas de φ y ψ por la sustitución lineal

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda_1 X+\mu_1 Y \\ y&=\lambda_2 X+\mu_2 Y \end{aligned}\right\}.$$

En virtud de las ecuaciones

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y)&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\mu}.\,\varphi(x, y) \\ \Psi(X, Y)&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\nu}.\,\psi(x, y) \end{aligned}$$

á que tienen que satisfacer los covariantes propuestos, y de las ecuaciones (4) del n.° 61, se tendrá

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial X}&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\mu}.\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial Y}&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\mu}.\left(\mu_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial\Psi}{\partial X}&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\nu}.\left(\lambda_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial\Psi}{\partial Y}&=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^{\nu}.\left(\mu_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+\mu_2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\};$$

de las cuales se deduce, teniendo presente las ecuaciones (5) y (6) del número antes citado,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial X} & \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial X} & \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \end{vmatrix} = (\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2)^{\mu+\nu+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

expresión que demuestra el teorema enunciado.

66.—**Número de invariantes de las formas binarias cuadráticas y cúbicas.**—Según se deduce del teorema 3.º (n.º 60) toda forma binaria de grado superior al primero tiene siempre un invariante que es su discriminante; y vamos ahora á investigar si las formas binarias cuadráticas y cúbicas tienen algún otro invariante distinto de su discriminante.

Para ello observemos lo primero que siempre que de una forma se conozcan dos invariantes podrá determinarse un invariante absoluto (n.º 39) de esta misma forma. Porque supongamos que φ y ψ son dos invariantes, de índices μ y ν respectivamente, de la forma $U = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$; después de verificarse en la forma una sustitución lineal de módulo Δ, estos invariantes se transforman en $\Delta^{\mu}\varphi$ y $\Delta^{\nu}.\psi$; elevando el primero de estos valores á la potencia ν, el segundo á la μ, y dividiendo los resultados se obtiene $\frac{\varphi^{\nu}}{\psi^{\mu}}$ que es un invariante absoluto de la forma U.

Hecha esta observación vamos á demostrar qué: *las formas binarias cuadráticas y cúbicas no admiten más invariante que su discriminante correspondiente.*

Si una forma binaria cuadrática ó cúbica admitiera más de un invariante admitiría también un invariante absoluto que satisfaría á la relación

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots) = \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots), \qquad (8)$$

relación independiente del módulo y por lo tanto de los coeficientes de la sustitución. Pero esta relación es imposible de verificar porque si $U=(a_0, a_1, \ldots a_n)(x, y)^n$ es una forma binaria y $U_1=(A_0, A_1, \ldots A_n)(X, Y)^n$ es su trasformada por la sustitución lineal (3), los coeficientes $A_0, A_1, \ldots A_n$ son funciones de los $a_0, a_1, \ldots a_n$, y de los coeficientes de la sustitución; pero los coeficientes (A) son $n+1$ y por lo tanto existirán $n+1$ ecuaciones entre estos coeficientes, los (a), y los λ_1, λ_2, μ_1, μ_2; y eliminando estos cuatro últimos coeficientes se hallarán $n-3$ ecuaciones entre los (A) y los (a); y por tanto en los dos casos de las formas cuadráticas y cúbicas, ó sea para $n=2$ y $n=3$, no existirán ecuaciones independientes de los coeficientes de la sustitución y no podrá satisfacerse á la ecuación (8), y por consiguiente las formas binarias cuadráticas y cúbicas no tienen más invariante que su discriminante.

Esta proposición puede generalizarse para las formas cuadráticas de un número cualquiera de variables, por medio de un razonamiento análogo al anterior.

CAPÍTULO VIII.

EMANANTES.—CONTRAVARIANTES.—CONCOMITANTES MIXTOS.—EVECTANTES.—INTERMUTANTES.—CATALETICANTES.

67.—**Objeto de este capítulo.** - Explicadas en los tres capítulos anteriores las propiedades principales de los invariantes y covariantes vamos á exponer en el actual la formación y propiedades de una série de importantísimos símbolos que se utilizan con suma ventaja en la formación de invariantes y covariantes; limitando nuestra exposición, en cada uno de ellos, á su definición y formación, y á la demostración de la propiedad de invariación en la función que originan.

68.—**Emanantes: definición.**—Supongamos que tenemos dos sistemas de variables cogredientes (n.° 30), $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$, y sea U una forma del primero de estos sistemas: si en esta función U se sustituyen en lugar de $x_1, x_2, x_3, \ldots$, las expresiones $x_1+\lambda y_1$, $x_2+\lambda y_2$, $x_3+\lambda y_3, \ldots$, se desarrolla la función resultante por medio de la fórmula de Taylor y se ordena el desarrollo por las potencias de λ, los coeficientes de estas potencias de λ reciben el nombre de *emanantes* de la forma U. Y se llaman *primero*, *segundo*, etc., *emanantes* á los coeficientes de la primera, segunda, etc., potencia de λ.

Sea, por ejemplo, la forma $U=f(x_1, x_2, x_3, \ldots)$; sustituyendo en lugar de $x_1, x_2\, x_3, \ldots$, los valores antes expresados, se obtendrá

$$U_1=f(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, x_3+\lambda y_3, \ldots),$$

y desarrollando por la fórmula de Taylor (n.° 47, nota (a)), tendremos que los coeficientes de las potencias de λ tendrán la forma siguiente, abstracción hecha de factores puramente numéricos,

$$E_h = \left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \dots \right)^h, \quad (1)$$

y esta expresión es la que se denomina *emanante* de la forma U (a).

Ejemplo.—Tratemos de determinar los emanentes primero y segundo de la forma binaria bicuadrática

$$U = a_0 x_1^4 + 4a_1 x_1^3 x_2 + 6a_2 x_1^2 x_2^2 + 4a_3 x_1 x_2^3 + a_4 x_2^4.$$

Sustituyendo en lugar de x_1 y x_2 las expresiones $x_1 + \lambda y_1$, $x_2 + \lambda y_2$ y desarrollando, tendremos para valor de los dos primeros emanantes, prescindiendo de los factores numéricos,

$$E_1 = y_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} = y_1 \, (a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2$$
$$+ a_3 x_2^3) + y_2 (a_1 x_1^3 + 3a_2 x_1^2 x_2 + 3a_3 x_1 x_2^2 + a_4 x_2^3),$$
$$E_2 = \left(y_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial U}{\partial x_2} \right)^2 = y_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} =$$
$$y_1^2 (a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2) + 2y_1 y_2 (a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2$$
$$+ a_3 x_2^2) + y_2^2 (a_2 x_1^2 + 2a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2).$$

69.—**Propiedades de los emanantes.—Teorema I.** —*Los emanantes de una forma son covariantes.*

En efecto, siendo cogredientes los sistemas de variables $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ é $(y_1, y_2, y_3, \dots)$, tendremos (n.° 30),

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \dots \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (2) \text{ y } \left.\begin{array}{l} y_1 = \lambda_1 Y_1 + \mu_1 Y_2 + \dots \\ y_2 = \lambda_2 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\}, \quad (3)$$

(a).—Conviene recordar que en el desarrollo de esta expresión los exponentes de $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, ... deben sustituirse por índices de derivación.

y de estas expresiones se deduce fácilmente;

$$\left.\begin{array}{l} x_1+\lambda y_1=\lambda_1 (X_1+\lambda Y_1)+\mu_1 (X_2+\lambda Y_2)+\ldots \\ x_2+\lambda y_2=\lambda_2 (X_1+\lambda Y_1)+\mu_2 (X_2+\lambda Y_2)+\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (4)$$

ecuaciones que demuestran que las variables $x_1+\lambda y_1$, $x_2+\lambda y_2, \ldots\ldots$, son también cogredientes con los $x_1, x_2, \ldots\ldots$; y además que las relaciones que ligan á las $x_1+\lambda y_1$, $x_2+\lambda y_2, \ldots\ldots$, con las $X_1+\lambda Y_1$, $X_2+\lambda Y_2, \ldots\ldots$, son las mismas que ligan á $x_1, x_2, \ldots\ldots$, con $X_1, X_2, \ldots\ldots$ Si suponemos ahora, que la forma $f(x_1, x_2, \ldots\ldots)$ se trasforma en $F(X_1, X_2, \ldots\ldots)$ por la sustitución lineal (2), de manera que tengamos

$$f(x_1, x_2, \ldots\ldots)=F(X_1, X_2, \ldots\ldots)$$

cuando se sustituyen $x_1, x_2, \ldots\ldots$ por sus valores, deberemos tener también

$$f(x_1+\lambda y_1, x_2+\lambda y_2, \ldots\ldots)=F(X_1+\lambda Y_1, X_2+\lambda Y_2, \ldots\ldots).$$

Y como esta igualdad debe verificarse independientemente del valor de λ, es preciso que desarrollando los dos miembros por la fórmula de Taylor y ordenando el desarrollo con relación á λ, los coeficientes de las diversas potencias de λ sean iguales, es decir, que se tenga de un modo general,

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}+y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}+\ldots\right)^h=\left(Y_1 \frac{\partial F}{\partial X_1}+Y_2 \frac{\partial F}{\partial X_2}+\ldots\right)^h, \quad (5)$$

expresión que demuestra el teorema enunciado.

Observación.—Para que tenga lugar el teorema anterior es preciso suponer que se han verificado simultáneamente las dos sustituciones (2) y (3); y entonces se vé fácilmente por la fórmula (5) que el emanante de la trasformada de una forma es simplemente la trasformada del emanante de la forma propuesta.

70.—**Teorema II.**—*Si se considera un emanante de una forma como función de las variables* $y_1, y_2, \ldots$, *suponiendo por el pronto á* $x_1, x_2, \ldots$, *como constantes, todo invariante del emanante propuesto será un covariante de la forma dada.*

Acabamos de ver en el teorema anterior que verificando en el emanante

$$\left(y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\right)^h = y_1{}^h \frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^h} + h y_1{}^{h-1} y_2 \frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^{h-1} . \partial x_2} + \ldots,$$

las sustituciónes (2) y (3) se obtiene la función

$$Y_1{}^h \frac{\partial^h F}{\partial X_1{}^h} + h Y_1{}^{h-1} Y_2 \frac{\partial^h F}{\partial X_1{}^{h-1} . \partial X_2} + \ldots;$$

y á este mismo resultado llegaríamos verificando primero la sustitución (3) y después la (2). Mas al verificar la sustitución (3) se obtendrá un resultado de la forma

$$C_0 Y_1{}^h + h C_1 Y_1{}^{h-1} Y_2 + \ldots,$$

en el cual $C_0, C_1, \ldots$ son unas ciertas funciones de $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots$, y de los coeficientes de la sustitución (3) que han de trasformarse por la (2) en $\frac{\partial^h F}{\partial X_1{}^h}, \frac{\partial^h F}{\partial X_1{}^{h-1} . \partial X_2}, \ldots$.

Si consideramos ahora un invariante del emanante propuesto, $\varphi\left(\frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^h}, \frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^{h-1} . \partial x_2}, \ldots\right)$ por ejemplo, y si representamos por Δ el módulo de la sustitución (3), tendremos

$$\varphi(C_0, C_1, \ldots) = \Delta^\mu . \varphi\left(\frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^h}, \frac{\partial^h f}{\partial x_1{}^{h-1} . \partial x_2}, \ldots\right).$$

Si verificamos ahora la sustitución (2) el invariante φ se convertirá en

$$\varphi.(C_0, C_1, \ldots) = \varphi\left(\frac{\partial^h F}{\partial X_1^h}, \frac{\partial^h F}{\partial X_1^{h-1}.\,\partial X_2}, \ldots\right);$$

y por tanto

$$\varphi\left(\frac{\partial^h F}{\partial X_1^h}, \frac{\partial^h F}{\partial X_1^{h-1}.\,\partial X_2}, \ldots\right) = \Delta^\mu \varphi\left(\frac{\partial^h f}{\partial x_1^h}, \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{h-1}.\,\partial x_2}, \ldots\right);$$

igualdad que demuestra que φ es un covariante de la forma propuesta.

71.—**Contravariantes: definición.**—Sea $U = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(x_1, x_2, x_3, \ldots)^n$ una forma de varias variables; y supongamos que siendo $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ un sistema de variables contragredientes con las $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, se tiene una función

$$\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots) \qquad (6)$$

homogénea respecto á los coeficientes de la U y á las variables $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Trasformando el sistema de variables $x_1, x_2, x_3, \ldots$ por la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 X_1 + \mu_1 X_2 + \ldots \\ x_2 = \lambda_2 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (7)$$

y al propio tiempo el sistema $y_1, y_2, y_3, \ldots$ por la sustitución

$$\left.\begin{array}{l} \Delta y_1 = L_1 Y_1 + M_1 Y_2 + \ldots \\ \Delta y_2 = L_2 Y_1 + M_2 Y_2 + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (8)$$

inversa de la (7) (n.° 30, 2.°); la forma U se convertirá en

$$U_1 = (A_0, A_1, A_2, \ldots)(X_1, X_2, X_3, \ldots)^n$$

y la función φ en

$$\Phi = \varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots Y_1, Y_2, Y_3, \ldots).$$

Si después de verificadas estas trasformaciones la función φ satisface á la ecuación

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots Y_1, Y_2, Y_3, \ldots) = \Delta^{\mu} \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots) \quad (9)$$

esta función recibe el nombre de *contravariante* (a) de la forma U.

Observación.—Cuando la forma U es binaria, las dos variables x_1, x_2 son cogredientes con $y_2, -y_1$ (n.º 30 caso particular), y por tanto si $\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots x_1, x_2)$ es un covariante de la binaria $U = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(x_1, x_2)^n$, la expresión

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots y_2, -y_1)$$

será un contravariante de la misma forma, porque satisfará á la ecuación (9).

72.—**Concomitantes mixtos ó divariantes.**— Si la función φ considerada en el párrafo anterior es función no solo de las variables $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sino también de las $x_1, x_2, x_2, \ldots$, es decir, si tiene la forma

$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots x_1, x_2, x_3, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

y es tál que verificando las sustituciones lineales (7) y (8) su trasformada satisface á la ecuación

$$\varphi(A_0, A_1, A_2, \ldots X_1, X_2, X_3, \ldots Y_1, Y_2, Y_3, \ldots)$$
$$= \Delta^{\mu} . \varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots x_1, x_2, x_3, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots);$$

(a).—El primer ejemplo de contravariante lo dió el matemático alemán Carlos Federico Gauss, designándole con el nombre de *forma adjunta*, nombre que aun conservan los matemáticos françeses.

se dice que la función es un *concomitante mixto*, según el nombre dado por Sylvester, ó un *divariante*, según el propuesto por Salmon. Con el nombre genérico de *concomitantes* designaba Sylvester á todas las funciones cuyas relaciones con la forma primitiva no se alteran por una sustitución lineal, y llamaba *concomitantes mixtos* á las funciones cuya definición acabamos de dar.

Ejemplo.—Con solo recordar la igualdad demostrada en la *Nota* del n.º 30,

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n,$$

se tiene un ejemplo de *concomitante mixto* de una forma cualquiera, por ser esta función independiente de los coeficientes de la forma.

73.—**Evectantes: definición y propiedades.**— Sea la forma del grado n y varias variables

$$U = a_0 x_1^n + n(a_1 x_2 + b_1 x_3 + \ldots) x_1^{n-1} + \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] (a_2 x_2^2 + b_2 x_3^2 + \ldots) x_1^{n-2} + \ldots;$$

verificando en esta forma la sustitución lineal (7) se trasformará en

$$U_1 = A_0 X_1^n + n(A_1 X_2 + B_1 X_3 + \ldots) X_1^{n-1} + \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] (A_2 X_2^2 + B_2 X_3^2 + \ldots) X_1^{n-2} + \ldots.$$

Designemos por $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ un sistema de variables contragredientes con $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, y designemos por $(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots)$ las variables que han de sustituir al nuevo sistema en virtud de las ecuaciones (8); según sabemos (n.º 30, nota), tendremos la relación

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n.$$

De esta última relación y de los valores de U y U_1 se deduce, siendo λ una indeterminada, que la función

$$U+\lambda(x_1 y_1+x_2 y_2+\ldots+x_n y_n)^n$$

se convertirá, al verificar las sustituciones indicadas en

$$U_1+\lambda(X_1 Y_1+X_2 Y_2+\ldots+X_n Y_n)^n.$$

Sea ahora $\varphi(a_0, a_1, b_1, \ldots a_2, b_2, \ldots)$ un invariante de la forma U, por definición, este invariante tiene que satisfacer á la relación

$$\varphi(A_0, A_1, B_1, \ldots A_2, B_2, \ldots)=\Delta^{\mu}.\varphi(a_0, a_1, b_1, \ldots a_2, b_2, \ldots),$$

y la condición necesaria y suficiente para que esta función φ sea también un invariante de la función $U+\lambda(x_1 y_1+x_2 y_2+\ldots)^n$ estará expresada por la ecuación

$$\varphi(A_0+\lambda Y_1^n, A_1+\lambda Y_1^{n-1}Y_2, B_1+\lambda Y_1^{n-1}Y_3, \ldots A_2+\lambda Y_1^{n-2}Y_2^2, \ldots)$$
$$=\Delta^{\mu}.\varphi(a_0+\lambda y_1^n, a_1+\lambda y_1^{n-1}y_2, b_1+\lambda y_1^{n-1}y_3, \ldots a_2+\lambda y_1^{n-2}y_2^2, \ldots).$$

Esta ecuación debe verificarse para cualquier valor de λ, y por tanto los coeficientes de las mismas potencias de esta indeterminada, en el desarrollo de las expresiones anteriores por la fórmula de Taylor, deben ser idénticos, es decir, que se tendrá de una manera general,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial A_0}Y_1^n+\frac{\partial\varphi}{\partial A_1}Y_1^{n-1}Y_2+\frac{\partial\varphi}{\partial B_1}Y_1^{n-1}Y_3+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial A_2}Y_1^{n-2}Y_2^2+\ldots\right)^h$$
$$=\Delta^{\mu}.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}y_1^n+\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}y_1^{n-1}y_2+\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}y_1^{n-1}y_3+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}y_1^{n-2}y_2^2+\ldots\right)^h. \quad (10)$$

La expresión

$$E_h=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}y_1^n+\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}y_1^{n-1}y_2+\frac{\partial\varphi}{\partial b_1}y_1^{n-1}y_3+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}y_1^{n-2}y_2^2+\ldots\right)^h$$

ha recibido el nombre de *evectante* de la forma propuesta, según propuso Sylvester, y se llama *primero*, *segundo*, *tercero*, etc. *evectante* según que $h=1, 2, 3$, etc.

Teorema.—*Los evectantes son contravariantes.*

Efectivamente, según la expresión (10) el evectante de orden h de una forma, satisface á la ecuación (9) que nos ha servido para definir los contravariantes.

Nota.—Teniendo presente un teorema demostrado en la teoría de invariantes (n.º 47), si se trata de hallar un invariante simultáneo de las formas U y

$$(x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3+\ldots)^n=y_1^n x_1^n+ny_1^{n-1} y_2 x_1^{n-1}x_2 +ny_1^{n-1} y_3 x_1^{n-1} x_3+\ldots,$$

cuando se conoce un invariante φ de U, se debe formar la función

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} y_1^n+\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} y_1^{n-1} y_2+\frac{\partial\varphi}{\partial b_1} y_1^{n-1} y_3+\ldots;$$

y este símbolo es simplemente un evectante de la forma U. De aquí se deduce que un evectante de una forma se puede mirar ó como un contravariante de esta forma ó como un invariante simultáneo de las formas U y $(x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3+\ldots)^n$.

74.—**Intermutantes: definición y propiedades.**— Sea φ (x_1, x_2) una forma binaria; según lo demostrado en la teoría de las sustituciones (n.º 33, caso particular), si se consideran las funciones $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, las variables x_1 y x_2 son cogredientes con las $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ y $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$. Si consideramos ahora una función homogénea de las variables x_1, x_2, $f(x_1, x_2)$ por ejemplo, y se sustituyen x_1 y x_2 por $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$ y $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ respectivamente (a), la función que resulta

$$I=f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$

se denomina *intermutante*, adoptando el nombre propuesto por Faá de Bruno.

Teorema.—*Los intermutantes son covariantes.*

Sea $\varphi(x_1, x_2)$ una función cualquiera, y sea $f(x_1, x_2)$ una forma que se trasforma en $F(X_1, X_2)$ por la sustitución lineal

$$\left.\begin{array}{l} x_1=\lambda_1 X_1+\mu_1 X_2 \\ x_2=\lambda_2 X_1+\mu_2 X_2 \end{array}\right\} ; \qquad (11)$$

vamos á demostrar qué,

$$F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\right)=\Delta^n . f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right).$$

En efecto, de las ecuaciones (11) se deduce

$$X_1=\frac{1}{\Delta}\left(\mu_2 x_1-\mu_1 x_2\right), \qquad X_2=\frac{1}{\Delta}\left(-\lambda_2 x_1+\lambda_1 x_2\right);$$

como además (n.º 33, caso particular) se tiene

(a).—En esta sustitución deben cambiarse los exponentes de las variables en índices de derivación.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} &= \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_1 \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} - \mu_1 \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\right) \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} &= \frac{1}{\Delta}\left(\lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial X_2} - \mu_2 \frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\right) \end{aligned}\right\};$$

y se vé por lo tanto, comparando este último sistema con el (11), que estas ecuaciones se deducen de las (11) con solo sustituir x_1 por $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}$, x_2 por $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$, X_1 por $\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}$ y X_2 por $-\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}$.

Pudiéndose verificar este cambio en las expresiones (11) también podrá verificarse en cualesquiera otras que de ellas se deduzcan; y como por la citada trasformación se tiene

$$f(x_1, x_2) = F(X_1, X_2),$$

se tendrá también

$$f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = F\left(\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}, -\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\right);$$

y por ser la función $f(x_1, x_2)$ homogénea y de grado n, por ejemplo, se tendrá finalmente

$$F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial X_1}\right) = \Delta^n \cdot f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right),$$

que es la fórmula que tratábamos de demostrar.

Observación.— Si la función φ fuera la misma forma $f(x_1, x_2)$, las derivadas que entran en sus diversos términos serán del mismo orden que la forma f, y el resultado será simplemente una función de los coeficientes de la forma, y por consiguiente será un invariante de dicha forma. Si la función φ fuera del mismo grado que f el resultado sería un invariante simultáneo.

75.—Cataleticantes: definición y propiedades. — Se llama *cataleticante* de una forma binaria al determinante (a)

$$\varphi = \sum \left(\pm \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{2m}} \cdot \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{2m-2} . \partial x_2^{2}} \cdot \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{2m-4} . \partial x_2^{4}} \cdots \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_2^{2m}} \right). \quad (12)$$

Observación.—Si en esta fórmula hacemos $m=1$, el cataleticante se convierte en el Hessiano (n.º 21) de la forma.

Teorema.—*Los cataleticantes son covariantes.*

Para demostrarlo vamos á hacer ver que trasformando la forma $U=f(x_1, x_2)$ por la sustitución lineal (11) el determinante φ (12) se reproduce. Con este objeto, observemos lo primero que de las expresiones (11) se deduce

$$\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = \lambda_1, \quad \frac{\partial x_1}{\partial X_2} = \mu_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \lambda_2, \quad \frac{\partial x_2}{\partial X_2} = \mu_2; \quad (13)$$

además como la trasformada de U es una función de X_1 y X_2, y estas variables son á su vez funciones de x_1 y x_2, al derivar la forma U con relación á X_1 y X_2 se tendrá, según ya sabemos (b)

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial X_2},$$

(a).—En este determinante no se ha escrito más que la diagonal principal.

(b).—(S. B.—2.º—n.º 286).—(B.—2.ª parte.—n.º 147).—(L.—2.º—Pág. 172).

ó bien, en virtud de las relaciones (13),

$$\frac{\partial U}{\partial X_1}=\lambda_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial U}{\partial x_2},\qquad \frac{\partial U}{\partial X_2}=\mu_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x_2}.$$

Volviendo á derivar sucesivamente estas expresiones, y teniendo en cuenta las (13) se obtendría, para las segundas derivadas

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 U}{\partial X_1^2}=\lambda_1^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+2\lambda_1\lambda_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_2}+\lambda_2^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial X_1.\partial X_2}=\lambda_1\mu_1\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+\left(\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2\right)\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_2}+\lambda_2\mu_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 U}{\partial X_2^2}=\mu_1^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1^2}+2\mu_1\mu_2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_1.\partial x_2}+\mu_2^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}\end{array}\right\};\quad(14)$$

y de un modo general, siendo $r+s=m$,

$$\frac{\partial^m U}{\partial X_1^r.\partial X_2^s}=k_{r,s}\frac{\partial^m U}{\partial x_1^m}$$
$$+k'_{r,s}\frac{\partial^m U}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2}+k''_{r,s}\frac{\partial^m U}{\partial x_1^{m-2}\partial x_2^2}+\ldots+k_{r,s}^{(m)}\frac{\partial^m U}{\partial x_2^m},\quad(15)$$

designando por k_{rs}, $k'_{r,s}$, $k''_{r,s}, \ldots k_{r,s}^{(m)}$ funciones determinadas de los coeficientes λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, cuyos valores serían (a),

---

(a).—Los valores de los coeficientes k se hallan fácilmente con sólo observar que la derivada $\dfrac{\partial^{2m} U}{\partial X_1^r.\partial X_2^s}$ se representa simbólicamente por

$$\frac{\partial^m U}{\partial X_1^r.\partial X_2^s}=\left(\lambda_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+\lambda_2\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^r.\left(\mu_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+\mu_2\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^s.$$

$$\left.\begin{array}{l} k_{r,s}=\lambda_1^r \mu_1^s \\ k'_{r,s}=r\lambda_1^{r-1}\lambda_2 \mu_1^s+s\lambda_1^r \mu_1^{s-1}\mu_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{r,s}^{(m-1)}=r\lambda_1\lambda_2^{r-1}\mu_2^s+s\lambda_2^r\mu_1\mu_2^{s-1} \\ k_{r,s}^{(m)}=\lambda_2^r\mu_2^s \end{array}\right\} ; \qquad (16)$$

dando á s y r los valores $0, 1, 2, \dots m$, en la fórmula (15) y en las (16) se formaría con los coeficientes k un determinante que designaremos por

$$K=\Sigma \pm k_{m,0}\, k'_{m-1,\,1}\, k''_{m-2,\,2} \dots k_{0,m}^{(m)}.$$

Derivando las expresiones deducidas de la (15), primero m veces con relación á x_1, después $m-1$ veces con relación á x_1 y una con relación á x_2, etc., y formando el determinante

$$H=\sum\left(\pm\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_1^m \partial x_1^m}\cdot\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_1^{m-1}.\partial X_2.\partial x_1^{m-1}\partial x_2}\cdots\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_2^m.\partial x_2^m}\right),$$

se tendrá por la regla de la multiplicación de determinantes

$$H=K.\varphi.$$

Llamando ahora Φ al determinante

$$\Phi=\sum\left(\pm\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_1^{2m}}\cdot\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_1^{2m-2}.\partial X_2^2}\cdots\frac{\partial^{2m}U}{\partial X_2^{2m}}\right),$$

se tendrá, repitiendo el razonamiento que acabamos de hacer,

$$\Phi=K.H=K^2.\varphi; \qquad (17)$$

ahora solo falta demostrar que K es una potencia del determinante de la sustitución (11). Para ello observaremos que sustituyendo en vez de $k_{m,0}$, $k'_{m,0}$, . . . sus valores, el determinante K se convierte en

$$K = \begin{vmatrix} \lambda_1^m & m\lambda_1^{m-1}\lambda_2 \dots\dots\dots & \lambda_2^m \\ \lambda_1^{m-1}\mu_1 & (m-1)\lambda_1^{m-2}\lambda_2\mu_1 + \lambda_1^{m-1}\mu_2 \dots & \lambda_2^{m-1}\mu_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \mu_1^m & m\mu_1\mu_2^{m-1} \dots\dots\dots & \mu_2^m \end{vmatrix};$$

dividiendo la primera horizontal de este determinante por λ_1^m, la segunda por $\lambda_1^{m-1}\mu_1$, . . . y la última por μ_1^m, y aplicando las reglas de simplificación de determinantes (a), se tendrá por último

$$K = (\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^{2m} \cdot \varphi,$$

como se quería demostrar.

Ejemplo.—Para aclarar la proposición precedente vamos á aplicarla al determinante de tercer orden

$$\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^2\, \partial x_2^2} \\ \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^3\, \partial x_2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} \\ \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Derivando las ecuaciones (14) primero dos veces con relación á x_1, después, una con relación á x_1 y otra respecto á x_2, y finalmente dos veces respecto á x_2, se obtendrán las ecuaciones

(a).—(S. B.—2.°—n.° 254).—(R.— 2.°—n.° 111 y 112).— (B.— 2.ª parte. —n.° 58.)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2 . \partial x_1^2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2 . \partial x_1 . \partial x_2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} + \lambda_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2 . \partial x_2^2} &= \lambda_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \, \partial x_2^3} + \lambda_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4}
\end{aligned}\right\} ,\ (19)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1 . \partial X_2 . \partial x_1^2} &= \lambda_1\mu_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} \\
&\quad + \lambda_2\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1 . \partial X_2 . \partial x_1 \partial x_2} &= \lambda_1\mu_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} \\
&\quad + \lambda_2\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_1 . \partial X_2 . \partial x_2^2} &= \lambda_1\mu_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} \\
&\quad + \lambda_2\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4}
\end{aligned}\right\} ,\ (20)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2 . \partial x_1^2} &= \mu_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} + \mu_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2 . \partial x_1 . \partial x_2} &= \mu_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 . \partial x_2} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} + \mu_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 . \partial x_2^3} \\
\frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2 . \partial x_2^2} &= \mu_1^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 . \partial x_2^2} + 2\mu_1\mu_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \, \partial x_2^3} + \mu_2^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4}
\end{aligned}\right\} ,\ (21)$$

y según estas fórmulas tendremos,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2.\partial x_1^2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2.\partial x_1.\partial x_2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_1^2.\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^4 U}{\partial X_1.\partial X_2.\partial x_1^2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_1.\partial X_2.\partial x_1.\partial x_2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_1.\partial X_2.\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2.\partial x_1^2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2.\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^4 U}{\partial X_2^2.\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1\mu_1 & (\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2) & \lambda_2\mu_2 \\ \mu_1^2 & 2\mu_1\mu_2 & \mu_2^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3.\partial x_2} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2.\partial x_2^2} \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3.\partial x_2} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2.\partial x_2^2} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_1.\partial x_2^3} \\ \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2.\partial x_2^2} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_1.\partial x_2^3} & \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} \end{vmatrix} = K.\varphi.$$

Del mismo modo se deduciría la fórmula (17), ó sea $\Phi=K^2.\varphi$. Ahora bien, si representamos por c_1 y c_2 los cocientes $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ y $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ tendremos;

$$K=\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & 2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_2^2 \\ \lambda_1\mu_1 & (\lambda_1\mu_2+\mu_1\lambda_2) & \lambda_2\mu_2 \\ \mu_1^2 & 2\mu_1\mu_2 & \mu_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^3\mu_1^3 \begin{vmatrix} 1 & 2c_1 & c_1^2 \\ 1 & c_1+c_2 & c_1c_2 \\ 1 & 2c_2 & c_2^2 \end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1^3\mu_1^3 \begin{vmatrix} 0 & c_1-c_2 & c_1(c_1-c_2) \\ 0 & c_1-c_2 & c_2(c_1-c_2) \\ 1 & 2c_2 & c_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1^3\mu_1^3(c_1-c_2)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 1 & 2c_2 & c_2^2 \end{vmatrix},$$

ó sea

$$K=\lambda_1^3\mu_1^3(c_2-c_1)^3;$$

y poniendo en vez de c_2 y c_1 sus valores se tiene

$$K=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^3;$$

luego

$$\Phi=(\lambda_1\mu_2-\mu_1\lambda_2)^6.\varphi.$$

Observación.—Cuando la forma U sea de un grado igual á $2m$ las derivadas de este orden no contendrán á las variables sino únicamente á los coeficientes de la forma y el cataleticante se convertirá en un invariante. En el caso de que la forma U sea de grado inferior á $2m$ las derivadas de este orden son nulas, y el cataleticante también lo es.

CAPÍTULO IX.

FORMACION DE INVARIANTES Y COVARIANTES.

76.—En el presente capítulo vamos á aplicar los principios expuestos en los anteriores á la formación de invariantes y covariantes fijándonos principalmente en aquellos métodos que tienen más importancia práctica.

77.—**Método de las funciones simétricas.** —Este método está fundado en los teoremas explicados en los números 48 y 56, y por tanto solo es aplicable á las formas binarias. Según lo demostrado en los citados teoremas, las fórmulas

$$\varphi = a_0^{\hat{\delta}} \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^h (\alpha_2 - \alpha_3)^i \ldots\ldots,$$

$$\varphi = a_0^{\hat{\delta}} \Sigma(\alpha_1 - \alpha_2)^h (\alpha_2 - \alpha_3)^i \ldots\ldots, (x - \alpha_1 y)^p (x - \alpha_2 y)^q \ldots;$$

nos darán respectivamente un invariante ó un covariante de la forma propuesta, siempre que las raices entren en ellas con el mismo exponente; de manera que formada una función cualquiera que cumpla con las condiciones expresadas en las referidas fórmulas la cuestión queda reducida á sustituir las raices, ó las diferencias de las raices, por sus valores en función de los coeficientes, por medio de las fórmulas estudiadas en la teoría de las funciones simétricas (a). Este método es muy complicado y por esta razón es de uso poco frecuente.

Ejemplo.—Sea la forma binaria cúbica

$$a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 xy^2 + a_3 y^3;$$

(a).—(R.—2.°—n.^{os} 420, 425 y sig.).—(B.—2.ª parte.—n.^{os} 271 y sig.).—(L.—3.°—Pág. 118 y sig.)

formando y desarrollando la función

$$\varphi=\Sigma(\alpha_1-\alpha_2)^2(x-\alpha_3 y)^2$$

se obtendrá el covariante,

$$\varphi=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_1a_3-a_2^2)y^2.$$

78.—**Método de las ecuaciones de derivadas parciales.**—El método que ahora vamos á explicar tampoco se aplica más que á las formas binarias, y está apoyado en los teoremas demostrados en los números, 46, 54 y 55. Para mayor claridad explicaremos por separado la formación de invariantes y covariantes.

Invariantes.—Fundados en una proposición ya demostrada (n.° 46), en la que vimos qué, *si una función de los coeficientes de una forma es isobárica, simétrica y satisface á la ecuación de derivadas parciales*

$$\Delta\varphi=a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots\ldots+n\,a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}=0, \qquad (1)$$

será un invariante, se puede hallar fácilmente un invariante de una forma: porque si designamos por r el grado de este invariante, su peso será (n.° 42) $\frac{nr}{2}$, y por tanto tendrá la forma

$$\varphi=\Sigma C.a_0^{e_0}a_1^{e_1}a_2^{e_2}\ldots a_n^{e_n};$$

expresión en la cual los exponentes e_0, e_1, e_2, ... e_n tienen que satisfacer á las dos ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} 0.e_0+1.e_1+2.e_2+\ldots\ldots+n.e_n=\frac{nr}{2} \\ e_0+e_1+e_2+\ldots\ldots+e_n=r \end{array}\right\}; \qquad (2)$$

con estas condiciones y con la expresada en el teorema del núm. 43, relativa á la simetría de los invariantes, se determina fácilmente la parte literal de cada uno de los términos del invariante buscado (a).

Para determinar los coeficientes del invariante, que se representan por letras cualesquiera, se aplica á la función φ la ecuación (1), y como el resultado debe ser una identidad, al igualar á cero los coeficientes que en esta ecuación se obtengan, se tendrán una série de relaciones que permitirán determinar con suma sencillez los valores de todos los coeficientes, menos uno, del invariante. El valor de uno de los coeficientes debe quedar indeterminado, porque la ecuación (1) no se altera si se multiplica el invariante por una cantidad arbitraria.

Ejemplo.—Determinar un invariante de 4.° grado de la binaria cúbica

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3.$$

Sea el invariante $\varphi=\Sigma\, C.\, a_0^{e_0}\, a_1^{e_1}\, a_2^{e_2}\, a_3^{e_3}$; como en este ejemplo se tiene $r=4$, $n=3$ y $\frac{nr}{2}=6$, las ecuaciones de condición (2) se reducen á

$$\left.\begin{array}{l} 0.e_0+1.e_1+2.e_2+3.e_3=6 \\ e_0+e_1+e_2+e_3=4 \end{array}\right\}:$$

siendo el invariante φ de 4.° grado los exponentes e_0, e_1, e_2, e_3, deberán ser iguales ó menores que 4, y con esta condición las únicas soluciones de las ecuaciones precedentes son

$$\left.\begin{array}{r} e_1=3 \\ e_3=1 \\ e_0=e_2=0 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r} e_2=3 \\ e_0=1 \\ e_1=e_3=0 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r} e_0=2 \\ e_3=2 \\ e_1=e_2=0 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{r} e_1=2 \\ e_2=2 \\ e_0=e_3=0 \end{array}\right\},\quad e_0=e_1=e_2=e_3=1;$$

(a).—Cuando se sabe resolver el problema de la *partición de los números* puede hallarse la parte literal de un invariante por un método más rápido que el expuesto, pero lo suprimimos por que su explicación exigiría la resolución del citado problema y esto nos llevaría fuera de los límites que nos hemos señalado.

y por lo tanto el invariante será

$$\varphi = C_1 a_1^3 a_3 + C_2 a_0 a_2^3 + C_3 a_0^2 a_3^2 + C_4 a_1^2 a_2^2 + C_5 a_0 a_1 a_2 a_3 .$$

Aplicando á esta expresión la ecuación (1) se halla

$$(3C_1 + 2C_5)\, a_0 a_1^2 a_3 + (2C_4 + 6C_2$$
$$+ 3C_5)\, a_0 a_1 a_2^2 + (C_5 + 6C_3)\, a_0^2 a_2 a_3 + (4C_4 + 3C_1)\, a_1^3 a_2 = 0;$$

é igualando á cero los coeficientes, se hallarán los siguientes valores

$$C_2 = C_1,\ C_3 = \frac{3}{12} C_1,\ C_4 = -\frac{3}{4} C_1,\ C_5 = -\frac{3}{2} C_1;$$

y si hacemos $C_1 = 4$ se obtendrá

$$C_2 = 4,\ C_3 = 1,\ C_4 = -3,\ C_5 = -6,$$

por lo tanto el invariante pedido será

$$\varphi = 4a_1^3 a_3 + 4a_0 a_2^3 + a_0^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_2^2$$
$$-6a_0 a_1 a_2 a_3 = (a_0 a_3 - a_1 a_2)^2 - 4\,(a_0 a_2 - a_1^2)\,(a_1 a_3 - a_2^2).$$

Covariantes.—Según sabemos, por definición, el covariante de una forma binaria

$$U = (a_0, a_1, \ldots a_n)\,(x, y)^n$$

será una función de la forma

$$\varphi = C_0 x^m + m C_1 x^{m-1} y + \left[\begin{matrix} m \\ 2 \end{matrix}\right] C_2 x^{m-2} y^2 + \ldots + C_m y^m,$$

y al aplicar á esta función las ecuaciones características del covariante, que son según ya sabemos (n.° 56),

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}=\Delta\varphi, \quad (3)$$

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial y}=na_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0}+(n-1)a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\ldots+a_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}=\nabla\varphi; \quad (4)$$

tendremos que identificar los coeficientes del primer miembro con los correspondientes del segundo; pero el primer miembro será

$$y\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.x^m+mC_0\,x^{m-1}y+m(m-1)\,C_1\,x^{m-2}y^2+\ldots+mC_{m-1}y^m;$$

y como los desarrollos de cada término del segundo miembro son

$$a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}=a_0\left(\frac{\partial C_0}{\partial a_1}x^m+m\frac{\partial C_1}{\partial a_1}x^{m-1}y+\left[\begin{matrix}m\\2\end{matrix}\right]\frac{\partial C_2}{\partial a_1}x^{m-2}y^2+\ldots\right),$$

$$2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}=2a_1\left(\frac{\partial C_0}{\partial a_2}x^m+m\frac{\partial C_1}{\partial a_2}x^{m-1}y+\left[\begin{matrix}m\\2\end{matrix}\right]\frac{\partial C_2}{\partial a_2}x^{m-2}y^2+\ldots\right),$$

. . . .

. . . .

se tendrá la série de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
&a_0\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial C_0}{\partial a_n}=0\\
&a_0\frac{\partial C_1}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_1}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_1}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial C_1}{\partial a_n}=C_0\\
&a_0\frac{\partial C_2}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_2}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_2}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial C_2}{\partial a_n}=2C_1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_0\frac{\partial C_m}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial C_m}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial C_m}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial C_m}{\partial a_n}=mC_{m-1}
\end{aligned}\right\}$$

ó sean, de una manera abreviada.

$$\Delta C_0=0,\ \Delta C_1=C_0,\ \Delta C_2=2C_1, \ldots \Delta C_m=mC_{m-1}; \qquad (5)$$

y del mismo modo para la ecuación condicional (4) se obtendrían las expresiones

$$\left.\begin{array}{l}
na_1 \dfrac{\partial C_m}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2 \dfrac{\partial C_m}{\partial a_1}+\ldots+a_n \dfrac{\partial C_m}{\partial a_{n-1}}=0 \\
na_1 \dfrac{\partial C_{m-1}}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2 \dfrac{\partial C_{m-1}}{\partial a_1}+\ldots+a_n \dfrac{\partial C_{m-1}}{\partial a_{n-1}}=C_m \\
na_1 \dfrac{\partial C_{m-2}}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2 \dfrac{\partial C_{m-2}}{\partial a_1}+\ldots+a_n \dfrac{\partial C_{m-2}}{\partial a_{n-1}}=2C_{m-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
na_1 \dfrac{\partial C_0}{\partial a_0}+(n-1)\,a_2 \dfrac{\partial C_0}{\partial a_1}+\ldots+a_n \dfrac{\partial C_0}{\partial a_{n-1}}=mC_1
\end{array}\right\},$$

ó sean,

$$\nabla C_m=0,\ \nabla C_{m-1}=C_m,\ \nabla C_{m-2}=2C_{m-1}, \ldots \nabla C_0=mC_1. \qquad (6)$$

Cuando se conozca el coeficiente C_0 se podrán hallar por las ecuaciones (5) y (6) todos los restantes, y como según la primera de las mismas ecuaciones (5), $\Delta C_0=0$, C_0 es un invariante ó un heminvariante (n.° 46), su cálculo se hará en cada caso con suma sencillez por el procedimiento antes explicado. Al coeficiente C_0 se le ha dado por Roberts el nombre de *surgente* porque de él surgen ó se deducen todos los demás del covariante

Ejemplo.—Supongamos que queremos hallar un covariante de 2.° orden y 2.° grado de la forma cúbica binaria $a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3$, covariante que tendrá la forma

$$\varphi=C_0x^2+2C_1xy+C_2y^2.$$

Como en este caso se tiene $n=3$, $m=2$, $r=2$, los pesos de los coeficientes C_0, C_1, C_2 serán respectivamente (n.º 52),

$$\frac{3.2-2}{2}=2, 2+1=3, 3+1=4;$$

además como el primer coeficiente ha de ser un invariante, ó un heminvariante, aplicando lo antes explicado tendrá la forma

$$C_0=H_1a_0a_2+H_2a_1^2;$$

operando sobre esta función con el símbolo ΔC_0, tendremos segun la primera de las ecuaciones (5),

$$\Delta C_0=2(H_1+H_2)a_0a_1=o,$$

y haciendo $H_1=1$, se tiene $H_2=-1$, y por tanto

$$C_0=a_0a_2-a_1^2.$$

Aplicando ahora las dos últimas de las ecuaciones (6), que en este caso se reducen á

$$2C_1=\nabla C_0=3a_1\frac{\partial C_0}{\partial a_0}+2a_2\frac{\partial C_0}{\partial a_1}+a_3\frac{\partial C_0}{\partial a_2},$$
$$C_2=\nabla C_1=3a_1\frac{\partial C_1}{\partial a_0}+2a_2\frac{\partial C_1}{\partial a_1}+a_3\frac{\partial C_1}{\partial a_2};$$

se obtiene

$$2C_1=a_0a_3-a_1a_2 \quad \text{y} \quad C_2=a_0a_3-a_2^2;$$

y por consecuencia el covariante será

$$\varphi=(a_0a_2-a_1^2)x^2+(a_0a_3-a_1a_2)xy+(a_0a_3-a_2^2)y^2.$$

79.—**Métodos de los emanantes, intermutantes y cataleticantes.**—Las definiciones y propiedades de los emanantes, intermutantes y cataleticantes que expusimos en el capítulo anterior, nos proporcionan otros tantos métodos para hallar invariantes y covariantes.

Método de los emanantes.—Según las proposiciones demostradas en los n.os 69 y 70, los emanantes de una forma y los invariantes de un emanante, considerado como función de las nuevas variables, son también covariantes de la forma; de manera que para formar un covariante de una forma será suficiente formar uno cualquiera de sus emanantes, deducir un invariante de la función resultante y este invariante será un covariante de la forma propuesta.

Ejemplos.—**I.**—Sea la forma cúbica binaria

$$U = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3,$$

formando su segundo emanante por la fórmula del n.° 68, se tendrá,

$$\left(y_1 \frac{\partial U}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2 = y_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + 2y_1 y_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 . \partial x_2} + y_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$
$$= y_1^2 (a_0 x_1 + a_1 x_2) + 2y_1 y_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2) + y_2^2 (a_2 x_1 + a_3 x_2);$$

y formando el discriminante de esta función, que según sabemos (n.° 60) es un invariante, tenemos la expresión

$$(a_0 x_1 + a_1 x_2)(a_2 x_1 + a_3 x_2) - (a_1 x_1 + a_2 x_2)^2$$
$$= (a_0 a_2 - a_1^2)\, x_1^2 + (a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_1 x_2 + (a_1 a_3 - a_2^2)\, x_2^2$$

que será un covariante de la forma propuesta.

II.—Según ya sabemos (n.° 68, ejemplo), el segundo emanante de la binaria bicuadrática

$$U=(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)(x_1, x_2)^4$$

es

$$y_1^2(a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2)+2y_1y_2(a_1x_1^2 +2a_2x_1x_2+a_3x_2^2)+y_2^2(a_2x_1^2+2a_3x_1x_2+a_4x_2^2);$$

y como el discriminante de esta función es

$$(a_0x_1^2+2a_1x_1x_2+a_2x_2^2)(a_2x_1^2+2a_3x_1x_2+a_4x_2^2) -(a_1x_1^2+2a_2x_1x_2+a_3x_2^2)^2=$$

$$(a_0a_2-a_1^2)x_1^4+2(a_0a_3-a_1a_2)x_1^3x_2+(a_0a_4+2a_1a_3-3a_2^2)x_1^2x_2^2 +2(a_1a_4-a_2a_3)x_1x_2^3+(a_2a_4-a_3^2)x_2^4,$$

obtendremos así un covariante de la forma propuesta U.

Método de los intermutantes.—Anteriormente hemos visto (n.º 74), que el intermutante de una función es un covariante, y la aplicación de este símbolo operatorio nos proporciona un método sencillo y muy fecundo para la formación de invariantes y covariantes. Recordando la observación que hicimos en el número citado, veremos que si en el símbolo

$$I=f\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$$

las funciones φ y f son idénticas, el intermutante que se obtenga será un invariante; si la función φ es de grado superior á f, y esta fuese un covariante conocido de φ, el intermutante nos producirá un nuevo covariante; y si las funciones φ y f son del mismo grado, el intermutante produce un invariante simultáneo de las formas propuestas.

Ejemplos.—**I.**—Sea la forma binaria cuadrática $f=a_0 x^2 + 2a_1 xy + a_2 y^2$; poniendo $\frac{\partial f}{\partial y}$ y— $\frac{\partial f}{\partial x}$ en lugar de x é y se tendrá,

$$a_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y . \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

y verificando operaciones se tendrá el conocido invariante

$$a_0 a_2 - a_1^2.$$

II.—Si operamos con el mismo símbolo sobre la binaria $f_1=b_0 x^2+2b_1 xy+b_2 y^2$, se obtendrá

$$b_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2b_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x . \partial y} + b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

ó sea,

$$b_0 a_2 - 2b_1 a_1 + b_2 a_0$$

que es un invariante simultáneo de las formas f y f_1.

Método de los cataleticantes. — Ya hemos visto (n.º 75), que el cataleticante de una forma es un covariante, de manera que aplicando el símbolo

$$\varphi = \sum \left(\pm \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{2m}} \cdot \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_1^{2m-2} . \partial x_2^{2}} \cdots \frac{\partial^{2m} U}{\partial x_2^{2m}} \right),$$

á una forma cualquiera, se obtendrá un covariante de esta forma. Si el grado de la forma propuesta fuese $2m$, el cataleticante nos producirá un invariante.

Ejemplos.—**I.**—Sea la forma quíntica binaria

$$U = a_0 x^5 + 5a_1 x^4 y + 10 a_2 x^3 y^2 + 10 a_3 x^2 y^3 + 5 a_4 x y^4 + a_5 y^5;$$

formemos el cataleticante

$$\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^4} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^3 . \partial y} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 . \partial y^2} \\ \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^3 . \partial y} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 . \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x . \partial y^3} \\ \dfrac{\partial^4 U}{\partial x^2 . \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial x . \partial y^3} & \dfrac{\partial^4 U}{\partial y^4} \end{vmatrix}$$

y se tendrá el covariante

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 x + a_1 y & a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y \\ a_1 x + a_2 y & a_2 x + a_3 y & a_3 x + a_4 y \\ a_2 x + a_3 y & a_3 x + a_4 y & a_4 x + a_5 y \end{vmatrix}$$

cuyo desarrollo es

$$\varphi = \left\{ \begin{array}{r|r|r|r|l} a_0 a_2 a_4 & x^3 + a_1 a_2 a_4 & x^2 y + a_1 a_3 a_4 & x y^2 + a_1 a_3 a_5 & y^3 . \\ -a_2^3 & -a_0 a_3 a_4 & -a_1 a_2 a_5 & -a_1 a_4^2 & \\ -a_0 a_3^2 & +a_0 a_2 a_5 & +a_0 a_3 a_5 & -a_2^2 a_5 & \\ +2 a_1 a_2 a_3 & -a_2^2 a_3 & -a_2 a_3^2 & +2 a_2 a_3 a_4 & \\ -a_1^2 a_4 & +a_1 a_3^2 & -a_0 a_4^2 & -a_3^3 & \\ & -a_1^2 a_5 & +a_2^2 a_4 & & \end{array} \right.$$

II.—Sea la forma binaria cuadrática

$$U = a_0 x^2 + 2 a_1 x y + a_2 y^2;$$

formando el cataleticante,

$$\varphi = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x . \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial x . \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

obtendremos el invariante

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_0 a_2 - a_1^2.$$

CAPÍTULO X.

FORMAS CANÓNICAS.

80.—**Definición y primeras nociones.**—*Se denomina* **forma canónica** *de una función dada, á la forma más sencilla á que puede reducirse sin perder nada de su generalidad.*

La trasformación de una función general á su forma canónica se verifica mediante una sustitución lineal, y para que esta trasformación sea posible es preciso, que el número de constantes, explícitas ó implícitas, de la nueva forma sea igual al de las que contiene la función general propuesta; porque de este modo, identificando los coeficientes de las mismas potencias de las variables, podrán determinarse las constantes de la nueva forma. Por ejemplo, la forma cúbica binaria

$$(a_0, a_1, a_2, a_3)(x, y)^3,$$

puede reducirse á la X^3+Y^3, siendo

$$X=\lambda_1 x+\mu_1 y\,, \qquad Y=\lambda_2 x+\mu_2 y$$

porque la expresión

$$X^3+Y^3=(\lambda_1 x+\mu_1 y)^3+(\lambda_2 x+\mu_2 y)^3$$

contiene cuatro constantes, que podrán determinarse desarrollando la última igualdad é identificando sus coeficientes con los correspondientes de la forma general propuesta. En cambio, la cúbica ternaria

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots)(x, y, z)^3,$$

que tiene diez constantes, no podrá reducirse, en general, á la forma

$$X^3+Y^3+Z^3=(\lambda_1 x+\mu_1 y+\nu_1 z)^3$$
$$+(\lambda_2 x+\mu_2 y+\nu_2 z)^3+(\lambda_3 x+\mu_3 y+\nu_3 z)^3,$$

que solo contiene nueve; porque los nueve coeficientes (λ, μ, ν) tendrían que satisfacer á diez ecuaciones condicionales, lo que no es posible en general; pero la forma propuesta podría reducirse á la $X^3+Y^3+Z^3+6\zeta XYZ$, porque con la nueva constante ζ, tendríamos ya tantas indeterminadas como ecuaciones.

Aunque la condición que acabamos de señalar es necesaria no siempre es suficiente; pues podría ocurrir que aun existiendo el mismo número de ecuaciones condicionales que de indeterminadas, algunas de las primeras fueran imposibles de satisfacer. Por ejemplo, la función cuadrática binaria

$$U=a_0x^2+a_1xy+a_2y^2+a_3x+a_4y+1,$$

no puede reducirse á la forma

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\lambda x+\mu y+\nu,$$

apesar de que esta última contiene cinco constantes como la propuesta; pero es porque la ecuación anterior exige que los coeficientes de x^2 é y^2 sean la unidad y que el de xy sea 0, y estos valores no pueden identificarse con los coeficientes de los términos correspondientes de U sin que esta función pierda su generalidad.

Ocurre también, por el contrario, que algunas veces la trasformación de una función en forma canónica puede verificarse de una infinidad de maneras, cual sucede cuando el número de ecuaciones condicionales es inferior al de constantes de la canónica, en cuyo caso algunas de estas constantes son arbitrarias. Esto sucede, por ejemplo, cuando se trata de reducir la forma cuadrática binaria $U=(a_0, a_1, a_2)(x, y)^2$; á la canónica

$$X^2+Y^2=(\lambda_1 x+\mu_1 y)^2+(\lambda_2 x+\mu_2 y)^2;$$

pués esta última expresión contiene cuatro constantes, y como la U solo contiene tres, solo se tendrían tres ecuaciones de condición, y quedaría una constante por determinar. En general, una forma cuadrática de n variables puede trasformarse de infinitas maneras en una suma de n cuadrados de la forma

$$X^2=(\lambda x+\mu y+\nu z+\ldots)^2,$$

porque la forma dada solo contiene $\frac{1}{2}n(n+1)$ constantes, y como la trasformada tiene n^2, quedarán completamente arbitrarias un número de constantes expresado por

$$n^2-\tfrac{1}{2}n(n+1)=\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

81.—**Formas de grado impar.**—La reducción de las funciones homogéneas binarias de grado impar á su forma canónica, puede verificarse con relativa facilidad, en virtud del siguiente teorema debido á Sylvester.

Teorema.—*Toda forma de grado impar,* $2n+1$, *puede trasformarse en la suma de las potencias del mismo grado de* $n+1$ *formas lineales.*

Sea la forma

$$a_0x^{2n+1}+(2n+1)\,a_1x^{2n}y+\left[\begin{matrix}2n+1\\2\end{matrix}\right]a_2x^{2n-1}y^2+\ldots+a_{2n+1}y^{2n+1};\ (1)$$

y vamos á demostrar que esta función puede reducirse á la forma canónica

$$(\lambda_1x+\mu_1y)^{2n+1}+(\lambda_2x+\mu_2y)^{2n+1}+\ldots+(\lambda_{n+1}x+\mu_{n+1}y)^{2n+1}.\quad(2)$$

En efecto, si hacemos

$$\mu_1=\lambda_1\alpha_1,\ \mu_2=\lambda_2\alpha_2,\ldots\ \mu_{n+1}=\lambda_{n+1}\,\alpha_{n+1};$$

y además

$$\lambda_1^{2n+1}=k_1,\ \lambda_2^{2n+1}=k_2,\ldots\ \lambda_{n+1}^{2n+1}=k_{n+1};$$

la expresión (2) se trasformará en

$$k_1(x+\alpha_1 y)^{2n+1}+k_2(x+\alpha_2 y)^{2n+1}+\ldots+k_{n+1}(x+\alpha_{n+1}y)^{2n+1}; \quad (3)$$

desarrollando esta expresión é identificando el desarrollo con la (1) se tendrá el siguiente sistema de ecuaciones condicionales,

$$\left.\begin{array}{llllll}
k_1 & +k_2 & +k_3 & +\ldots & +k_{n+1} & =a_0 \\
k_1\alpha_1 & +k_2\alpha_2 & +k_3\alpha_3 & +\ldots & +k_{n+1}\alpha_{n+1} & =a_1 \\
k_1\alpha_1^2 & +k_2\alpha_2^2 & +k_3\alpha_3^2 & +\ldots & +k_{n+1}\alpha^2_{n+1} & =a_2 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k_1\alpha_1^n & +k_2\alpha_2^n & +k_3\alpha_3^n & +\ldots & +k_{n+1}\alpha^n_{n+1} & =a_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
k_1\alpha_1^{2n+1} & +k_2\alpha_2^{2n+1} & +k_3\alpha_3^{2n+1} & +\ldots & +k_{n+1}\alpha_{n+1}^{2n+1} & =a_{2n+1}
\end{array}\right\} ; \quad (4)$$

y como estas ecuaciones son en número de $2n+2$, se podrán determinar en ellas las $2n+2$ cantidades (k) y (α).

Para resolver el sistema de ecuaciones (4), seguiremos el procedimiento siguiente: eliminando k_1 entre las $n+1$ primeras ecuaciones del sistema, obtendremos,

$$\Delta k_1 = \begin{vmatrix}
a_0 & 1 & 1 \ldots 1 \\
a_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_{n+1} \\
a_2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 \ldots \alpha^2_{n+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
a_n & \alpha_2^n & \alpha_3^n \ldots \alpha^n_{n+1}
\end{vmatrix}, \text{ siendo } \Delta = \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1 \ldots 1 \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots \alpha_{n+1} \\
\alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha^2_3 \ldots \alpha^2_{n+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_3^n \ldots \alpha^n_{n+1}
\end{vmatrix};$$

desarrollando este último determinante según los elementos de su primera columna, tendríamos

$$\Delta = A_0 . 1 + A_1 . \alpha_1 + A_2 \alpha_1^2 + \ldots + A_n \alpha_1^n ;$$

y como los menores relativos á los elementos de las primeras columnas de los determinantes Δ y Δk, son iguales, se tendrá

$$\Delta k_1 = A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n. \qquad (5)$$

Del mismo modo, eliminando $k_1 \alpha_1$ entre las $n+1$ ecuaciones que siguen á la primera, se obtendría

$$\Delta k_1 \alpha_1 = A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 + \ldots + A_n a_{n+1}; \qquad (6)$$

y siguiendo el mismo procedimiento, al eliminar $k_1 \alpha_1^{n+1}$ entre las $n+1$ últimas ecuaciones (4), llegaríamos á la expresión

$$\Delta k_1 \alpha_1^{n+1} = A_0 a_{n+1} + A_1 a_{n+2} + A_2 a_{n+3} + \ldots + A_n a_{2n+1}. \qquad (7)$$

De esta manera obtendríamos entre las $n+1$ relaciones

$$\frac{A_0}{\Delta k_1}, \quad \frac{A_1}{\Delta k_1}, \quad \frac{A_2}{\Delta k_1}, \ldots \frac{A_n}{\Delta k_1},$$

el sistema de $n+2$ ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}
-\Delta k_1 + A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 + \ldots + A_n a_n = 0 \\
-\Delta k_1 \alpha_1 + A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 + \ldots + A_n a_{n+1} = 0 \\
-\Delta k_1 \alpha_1^2 + A_0 a_2 + A_1 a_3 + A_2 a_4 + \ldots + A_n a_{n+2} = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\Delta k_1 \alpha_1^{n+1} + A_0 a_{n+1} + A_1 a_{n+2} + A_2 a_{n+3} + \ldots + A_n a_{2n+1} = 0
\end{array}\right\}; \qquad (8)$$

cuya resultante, que es la ecuación de grado $n+1$,

$$\begin{vmatrix}
1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \ldots & \alpha_1^{n+1} \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & a_{n+1} \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \ldots & a_{n+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} \ldots & a_{2n+1}
\end{vmatrix} = 0, \qquad (9)$$

nos dará los valores no solo de α_1, sino también de α_2, α_3, ... α_{n+1}, con solo sustituir en vez de α_1 una variable cualquiera, porque si en las ecuaciones (4) hubiéramos eliminado k_h, $k_h\,\alpha_h$, $k_h\,\alpha^2_h$, ... $k_h\,\alpha_h^{n+1}$, por ejemplo, se hubiera obtenido una ecuación que no diferiría de la (9) más que por la sustitución en la primera fila de las potencias de α_h en vez de las de α_1; de manera que la ecuación

$$Z=\left|\begin{matrix} 1 & z & z^2 & z^3 \dots & z^{n+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \dots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & a_{n+3} \dots & a_{2n+1} \end{matrix}\right|=0, \qquad (10)$$

nos dará los valores de las cantidades (α), y con estos valores las $n+1$ primeras ecuaciones (4) nos darán los valores de las constantes (k). Una vez obtenidos los valores de las cantidades (k) y (α) podremos determinar los de (λ) y (μ), y quedará resuelto el problema.

Observaciones.—I.—A la ecuación (10), que se la llama *canonizante* de la forma dada, se la puede dar una forma más sencilla observando, que si se hace $z=-\dfrac{x}{y}$ se tendrá

$$Z=\left|\begin{matrix} y^{n+1} & -xy^n+x^2y^{n-1} & & \dots & \mp x^{n+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n+1} \end{matrix}\right|.\, y^{n+1}=0, \qquad (11)$$

ó sea, poniendo el factor y^{n+1} bajo otra forma,

$$Z=\begin{vmatrix} y^{n+1}-xy^n+x^2y^{n-1} & . & . & \mp x^{n+1} \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \dots & a_{2n+1} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ x & y & 0 \dots 0 \\ 0 & x & y \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots y \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y^{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & a_0x+a_1y & a_1x+a_2y & \dots & a_n\,x+a_{n+1}y \\ a_1 & a_1x+a_2y & a_2x+a_3y & \dots & a_{n+1}x+a_{n+2}y \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_nx+a_{n+1}y & a_{n+1}x+a_{n+2}y & \dots & a_{2n}\,x+a_{2n+1}y \end{vmatrix}=0, \quad (12)$$

y dividiendo por y^{n+1},

$$Z_1=\begin{vmatrix} a_0x+a_1y & a_1x+a_2y \dots & a_nx+a_{n+1}\,y \\ a_1x+a_2y & a_2x+a_3y \dots & a_{n+1}\,x+a_{n+2}\,y \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_nx+a_{n+1}y & a_{n+1}x+a_{n+2}y \dots & a_{2n}\,x+a_{2n+1}\,y \end{vmatrix}=0;$$

que es un covariante de la forma propuesta (n.º 75), y que se le llama *covariante canónico* de la forma.

II.—La resolución de las ecuaciones (4) nos demuestra claramente, que no se puede obtener más que una série de valores para las cantidades (α) y (k): y por lo tanto, *que la reducción á canónica de una forma de grado impar no puede efectuarse más que de una sola manera.*

Ejemplo.—Sea la forma binaria cúbica

$$a_0x^3+3a_1x^2y+3a_2xy^2+a_3y^3, \qquad (a)$$

cuya forma canónica será, según la fórmula (3),

$$k_1\,(x+\alpha_1y)^3+k_2\,(x+\alpha_2y)^3; \qquad (b)$$

desarrollando esta expresión é identificando sus coeficientes con los de la (a), tendremos las ecuaciones,

$$\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= a_0 \\ \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 &= a_1 \\ \alpha_1^2 k_1 + \alpha_2^2 k_2 &= a_2 \\ \alpha_1^3 k_1 + \alpha_2^3 k_2 &= a_3 \end{aligned}\right\} ; \qquad (c)$$

eliminando k_1 entre las dos primeras ecuaciones, $k_1\,\alpha_1$ entre la segunda y tercera, y $k_1\,\alpha_1^2$ entre las dos últimas, se obtendrá el sistema

$$\left.\begin{aligned} \Delta k_1 &= \alpha_2 a_0 - a_1 \\ \Delta k_1 \alpha_1 &= \alpha_2 a_1 - a_2 \\ \Delta k_1 \alpha_1^2 &= \alpha_2 a_2 - a_3 \end{aligned}\right\} ; \qquad (d)$$

representando por Δ el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{vmatrix};$$

la resultante del sistema (d),

$$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_1 \\ \alpha_1 & a_1 & a_2 \\ \alpha_1^2 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0,$$

nos dará la canonizante de la cúbica propuesta al sustituir α_1 por una variable z, de manera que tendremos,

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0;$$

desarrollada esta ecuación nos dá,

$$(a_0a_2-a_1^2)\,z^2+(a_1a_2-a_0a_3)\,z+(a_1a_3-a_2^2)=0, \qquad (e)$$

ecuación que no es otra cosa más que el Hessiano de la forma propuesta, y que podría ponerse, según hemos indicado (obs. I), bajo la forma,

$$\begin{vmatrix} a_0x+a_1y & a_1x+a_2y \\ a_1x+a_2y & a_2x+a_3y \end{vmatrix}=0. \qquad (f)$$

Resolviendo la ecuación (e) con relación á z, ó la (f) respecto á $\frac{x}{y}$, los dos valores de z serán los de α_1 y α_2, y sustituidos estos valores en dos de las ecuaciones (c), deduciremos de ellas los correspondientes de k_1 y k_2, y quedará resuelto el problema.

82.—**Formas de grado par.**—La reducción á canónica de las formas de grado par, es problema que presenta más graves dificultades que el anterior. Una forma del grado $2n$ contiene $2n+1$ constantes, é igualada á la suma de las potencias $2n$ de n binomios, nos daría un sistema de $2n+1$ ecuaciones con $2n$ indeterminadas; ecuaciones que para ser compatibles exigen que se verifique una cierta relación entre los coeficientes de la forma. Si tomáramos un binomio más, $n+1$, obtendríamos un sistema de $2n+1$ ecuaciones con $2n+2$ indeterminadas, ecuaciones que podrían satisfacerse de una infinidad de maneras; y por consiguiente estos dos medios no dan siempre una solución determinada del problema.

Cayley ha expuesto el siguiente método, fundado en el empleo de los intermutantes, por el cual puede determinarse, en general, la forma canónica de una binaria de grado par. Sea la función

$$f=(a_0,\, a_1, \ldots a_{2n})\,(x,\, y)^{2n}, \qquad (13)$$

y propongámonos reducirla á la forma canónica

$$k_1 (x+\alpha_1 y)^{2n} + k_2 (x+\alpha_2 y)^{2n} + \ldots + k_n (x+\alpha_n y)^{2n}$$
$$+\lambda C (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\ldots(x+\alpha_n y), \qquad (14)$$

en la cuál C es un covariante de la forma

$$(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\ldots(x+\alpha_n y)=(A_0, A_1, \ldots A_n \between x, y)^n. \qquad (15)$$

El número de indeterminadas de la expresión (14) es $2n+1$, y por tanto identificando sus coeficientes con los de la (13) se tendrán $2n+1$ ecuaciones que permitirán determinar los valores de estas constantes. Para conseguirlo, observemos lo primero, *que si operamos con el símbolo intermutante*

$$\left(A_0\, A_1, \ldots A_n \between \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \qquad (16)$$

sobre uno cualquiera de los binomios k $(x+\alpha y)^{2n}$, *el resultado será cero.*

En efecto, este resultado se reduce á

$$(A_0, A_1, \ldots A_n \between \alpha, -1)^n, \qquad (17)$$

y como en virtud de la ecuación (15), la sustitución de $x=\alpha$, $y=-1$, reducirá á cero uno de los factores del primer miembro de la (15), la expresión (17) es también nula.

Demostrado esto, supongamos ahora que el covariante C sea tál que operando sobre el producto $C(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\ldots(x+\alpha_n y)$ con el símbolo (16), el resultado sea proporcional al mismo producto, es decir, que el resultado sea de la forma

$$\lambda_1 (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\ldots(x+\alpha_n y)=\lambda_1 (A_0, A_1, \ldots A_n \between x, y)^n,$$

siendo λ_1 una nueva constante. Aplicando entonces el intermutante (16) á los dos miembros de la ecuación

$$(a_0, a_1, \ldots a_{2n})(x, y)^{2n} = k_1 (x+\alpha_1 y)^{2n} + k_2 (x+\alpha_2 y)^{2n}$$
$$+ \ldots + k_n (x+\alpha_n y)^{2n} + \lambda C (x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y) \ldots (x+\alpha_n y),$$

se obtendría, por comparación de los coeficientes de las mismas potencias de las variables, el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales homogéneas entre las $n+1$ indeterminadas A_0, $A_1, \ldots A_n$,

$$\left.\begin{array}{l}
A_0 a_n - nA_1 a_{n+1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A_2 a_{n+2} - \ldots = \lambda_1 A_0 \\
A_0 a_{n-1} - nA_1 a_n + \frac{n(n-1)}{1.2} A_2 a_{n+1} - \ldots = \lambda_1 A_1 \\
A_0 a_{n-2} - nA_1 a_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} A_2 a_n \ldots = \lambda_1 A_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
A_0 a_0 - nA_1 a_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} A_2 a_2 \ldots = \lambda_1 A_n
\end{array}\right\}, \quad (18)$$

y para que este sistema tenga alguna solución es preciso que se verifique la ecuación

$$\begin{vmatrix}
a_n - \lambda_1 & a_{n+1} & a_{n+2} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\
a_{n-1} & a_n + \frac{\lambda_1}{n} & a_{n+1} \ldots\ldots\ldots a_{2n-1} \\
a_{n-2} & a_{n-1} & a_n - \frac{2\lambda_1}{n(n-1)} \ldots a_{2n-2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots\ldots a_n \mp \lambda_1
\end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Esta ecuación nos servirá para determinar el valor de λ_1, y para cada raiz que de ella obtengamos, las ecuaciones (18) nos darán un sistema de valores para A_0, $A_1, \ldots A_n$; y como uno de estos coeficientes será indeterminado, puede hacérsele igual á la unidad; determinados los coeficientes (A), la ecuación (15) nos dará los valores de las constantes (α), y una vez obtenidos, para hallar los de $k_1, k_2, \ldots k_n$, desarrollaremos las fórmulas (13) y (14) é identificaremos los coeficientes de n de sus términos. La principal dificultad, al par que el más grave inconveniente de este método, es la determinación del covariante C que se hace en cada caso de una manera arbitraria.

Ejemplo.—Vamos á aplicar lo que acabamos de exponer á la forma bicuadrada

$$a_0x^4+4a_1\,x^3y+6a_2\,x^2y^2+4a_3\,xy^3+a_4y^4. \qquad (a)$$

Comencemos aplicando á esta forma el procedimiento explicado para las formas de grado impar, y tendremos,

$$\begin{aligned} &a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2 \\ &+4a_3xy^3+a_4y^4=k_1(x+\alpha_1y)^4+k_2(x+\alpha_2y)^4; \qquad (b) \end{aligned}$$

desarrollando esta expresión é identificando los coeficientes, tendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} k_1+\ k_2 &= a_0 \\ \alpha_1\ k_1+\alpha_2k_2 &= a_1 \\ \alpha_1^2k_1+\alpha_2^2k_2 &= a_2 \\ \alpha_1^3k_1+\alpha_2^3k_2 &= a_3 \\ \alpha_1^4k_1+\alpha_2^4k_2 &= a_4 \end{aligned}\right\}, \qquad (c)$$

de cinco ecuaciones entre las cuatro indeterminadas α_1, α_2, k_1, k_2; sistema que para ser compatible exige que exista alguna condición entre los coeficientes. Para hallar esta condición eliminemos k_1 y k_2 primero entre las tres primeras ecuaciones (c), después entre las 2.ª, 3.ª y 4.ª, y por último entre las tres últimas, y se obtendrá el sistema

$$\left.\begin{array}{l} A_0 a_0 + A_1 a_1 + A_2 a_2 = 0 \\ A_0 a_1 + A_1 a_2 + A_2 a_3 = 0 \\ A_0 a_2 + A_1 a_3 + A_2 a_4 = 0 \end{array}\right\}, \qquad (d)$$

representando por A_0, A_1, A_2 los tres determinantes consecutivos de la matriz rectangular (a)

$$\left\| \begin{array}{cc} \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \\ 1 & 1 \end{array} \right\|;$$

eliminando ahora A_0, A_1, A_2 de las tres ecuaciones (d), se obtiene la relación buscada

$$\left| \begin{array}{ccc} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \right| = 0, \qquad (e)$$

cuyo primer miembro es uno de los invariantes de la bicuadrada propuesta. Si esta condición se verifica, puede observarse que el determinante

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & z \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & z^2 \end{array} \right| = A_0 + A_1 z + A_2 z^2$$

se anula para $z = \alpha_1$ y $z = \alpha_2$, y uniendo la ecuación $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 = 0$, á dos cualesquiera de las (d) y eliminando entre las tres A_0, A_1, A_2 se obtendrá la ecuación

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & z & z^2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \right| = (a_1 a_3 - a_2^2) + (a_1 a_2 - a_0 a_3) z + (a_0 a_2 - a_1^2) z^2 = 0, \qquad (f)$$

(a)—(R.—2.ª—n.º 55).

que será la *canonizante* de la bicuadrada propuesta. Una vez resuelta esta ecuación (f), se continúa el cálculo como en el caso de las formas de grado impar.

Si la condición (e) no se verifica, la bicuadrada propuesta tendrá que reducirse á la forma canónica

$$a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4$$
$$=k_1(x+\alpha_1y)^4+k_2(x+\alpha_2y)^4+6\lambda(x+\alpha_1y)(x+\alpha_2y), \quad (g)$$

aplicando el método de Cayley, es decir, aplicando á la ecuación (g) el intermutante

$$\left(A_0, A_1, A_2 \between \frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x}\right)^2,$$

y en este caso particular la ecuación (19) se convierte en

$$\begin{vmatrix} a_2-\lambda_1 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+\frac{1}{2}\lambda_1 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2-\lambda_1 \end{vmatrix}=0,$$

representando por λ_1 la expresión $2(4A_0A_2-A_1^2)$.

NOTA.

SOBRE LOS SÍMBOLOS $\Delta\varphi$ Y $\nabla\varphi$.

I.—Vamos á exponer en esta *Nota* la formación y naturaleza de dos símbolos operatorios que se emplean con suma frecuencia en la TEORÍA DE LAS FORMAS; símbolos cuyo desarrollo y estudio debe hacerse en la teoría de las funciones simétricas, y por lo tanto serán ya conocidos para la mayor parte de los lectores de esta obrita; pero como pudiera muy bien suceder que fuesen por alguien ignorados, y lo serán desde luego por los que únicamente conozcan de las funciones simétricas las brevísimas nociones que de ordinario se exponen en los tratados de Álgebra, nos ha parecido conveniente y aun necesario darlos á conocer en las breves líneas que siguen.

II.—Sea la forma binaria del grado n

$$U=(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)(x, y)^n=a_0 x^n$$
$$+\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_1 x^{n-1}y+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_2 x^{n-2}y^2+\ldots+a_n y^n;$$

si en esta forma sustituimos x por $x+\lambda y$, y desarrollamos las diversas potencias de este binomio, tendremos

$$a_0(x+\lambda y)^n$$
$$+\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_1(x+\lambda y)^{n-1}y+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_2(x+\lambda y)^{n-2}y^2+\ldots+a_n y^n;$$

ó sea

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a_0x^n + \begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} a_0\lambda & x^{n-1}y + \begin{bmatrix} n\\2\end{bmatrix} \quad a_0\lambda^2 & x^{n-2}y^2+\dots+a_0\lambda^n & y^n;\\
+\begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} a_1 & +\begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} n-1\\1\end{bmatrix} a_1\lambda & \dots\dots + \begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} a_1\lambda^{n-1} & \\
& \quad +\begin{bmatrix} n\\2\end{bmatrix} a_2 & \dots\dots + \begin{bmatrix} n\\2\end{bmatrix} a_2\lambda^{n-2} & \\
& & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
& & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
& & \qquad\vdots & \\
& & \qquad + \; a_n &
\end{array}$$

de manera que la forma propuesta se convertirá en

$$U_1 = A_0\, x^n + \begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} A_1\, x^{n-1}y + \begin{bmatrix} n\\2\end{bmatrix} A_2 x^{n-2}y^2 + \dots + A_n y^n,$$

obteniéndose para valores de los coeficientes A_0, A_1, A_2,... A_n, los siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l}
A_0 = a_0\\
A_1 = a_1 + a_0\lambda\\
A_2 = a_2 + 2a_1\lambda + a_0\lambda^2\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_h = a_h + \begin{bmatrix} h\\1\end{bmatrix} a_{h-1}\lambda + \begin{bmatrix} h\\2\end{bmatrix} a_{h-2}\lambda^2 + \dots + a_0\lambda^h\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
A_n = a_n + \begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} a_{n-1}\lambda + \begin{bmatrix} n\\2\end{bmatrix} a_{n-2}\lambda^2 + \dots + \begin{bmatrix} n\\1\end{bmatrix} a_1\lambda^{n-1} + a_0\lambda^n.
\end{array}\right.$$

Esto supuesto, consideremos una función algébrica, racional y entera de los coeficientes de la forma U, por ejemplo, la $\varphi\,(a_0, a_1, a_2, \dots a_n)$; formemos la función análoga de la trasformada U_1, que será

$$\Phi=\varphi(A_0, A_1, A_2 \ldots A_n)=\varphi(a_0, a_1+a_0\lambda_1, a_2+2a_1\lambda+a_0\lambda^2, \ldots);$$

apliquemos á esta función la fórmula de Taylor extendida al caso de varias variables, y observando que los incrementos de las variables son en este caso

$$0,\ a_0\lambda,\ 2a_1\lambda+a_0\lambda^2, \ldots \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_{n-1}\lambda+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_{n-2}\lambda^2+\ldots+a_0\lambda^n,$$

obtendremos el desarrollo siguiente (a):

$$\Phi=\varphi+a_0\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(2a_1\lambda+a_0\lambda^2)\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(3a_2\lambda+3a_1\lambda^2+a_0\lambda^3)\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}$$

$$+\ldots+\left(\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} a_{n-1}\lambda+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_{n-2}\lambda^2+\ldots+a_0\lambda^n\right)\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}$$

$$+\frac{1}{\underline{|2}}\left\{a_0^2\lambda^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1^2}+2a_0\lambda(2a_1\lambda+a_0\lambda^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1 . \partial a_2}\right.$$

$$\left.+2a_0\lambda(3a_2\lambda+3a_1\lambda^2+a_0\lambda^3)\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1\partial a_3}+\ldots+(2a_1\lambda+a_0\lambda^2)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_2^2}+\ldots\right\}+$$

$$\frac{1}{\underline{|3}}\left\{a_0^3\lambda^3\frac{\partial^3\varphi}{\partial a_1^3}+\ldots\right\}+\text{etc.};$$

y ordenando según las potencias ascendentes de λ resultará;

$$\Phi=\varphi+\left(a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+2a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots+na_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\right)\lambda$$

$$+\left(a_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+3a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\ldots+\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} a_{n-2}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}+\tfrac{1}{2}a_0^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1^2}\right.$$

$$\left.+2a_0a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1 . \partial a_2}+\tfrac{1}{2}a_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_2^2}+\ldots\right)\lambda^2+\text{etc.} \quad (\alpha)$$

(a).—La fórmula de Taylor extendida al caso de varias variables puede representarse simbólicamente por

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots)=f(x, y, z, \ldots)+\sum_{n=1}^{n=n}\frac{1}{\underline{|n}}(f'_x . h+f'_y . k+f'_z . l+\ldots)^n,$$

entendiéndose que los exponentes del desarrollo se han de cambiar en índices de derivación.

Esto sentado, representaremos por el símbolo $\Delta\varphi$ toda la operación indicada por el coeficiente de λ en la expresión anterior, ó sea,

$$\Delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + na_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_n}; \quad (\beta)$$

y observaremos que esta operación $\Delta\varphi$ puede verificarse sobre el mismo símbolo, no haciéndose en este caso más que repetir sobre φ dos ó más veces la misma operación representada por el símbolo $\Delta\varphi$. Así operando dos veces tendremos

$$\Delta.\Delta\varphi = 2\left(a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + 3a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots\right)$$

$$+ a_0^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1^2} + 4a_0a_1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1 . \partial a_2} + a_1^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial a_2^2} + \ldots = \Delta^2\varphi;$$

expresión que comparada con el coeficiente de λ^2 de la fórmula (α) nos hace ver que este coeficiente es igual á $\frac{1}{2}\Delta^2\varphi$. Del mismo modo se demuestra que el coeficientc de λ^3 es $\frac{1}{\underline{|3}}\Delta^3\varphi$; el de $\lambda^4 = \frac{1}{\underline{|4}}\Delta^4\varphi$, etc., y por lo tanto que la expresión (α) puede ponerse bajo la forma

$$\Phi = \varphi + \lambda.\Delta\varphi + \frac{1}{\underline{|2}}\lambda^2.\Delta^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}}\lambda^3.\Delta^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}}\lambda^n.\Delta^n\varphi. \quad (\gamma)$$

III.—Siguiendo el procedimiento empleado en el párrafo anterior demostraríamos, que si en la forma $U = (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)(x, y)^n$ sustituimos en vez de y, $y + \lambda x$, desarrolláramos la forma correspondiente y formáramos la función φ de los coeficientes de la trasformada, obtendríamos por resultado la fórmula

$$\Phi' = \varphi + \lambda . \nabla\varphi + \frac{1}{\underline{|2}} \lambda^2 . \nabla^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}} \lambda^3 . \nabla^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}} \lambda^n . \nabla^n\varphi; \quad (\gamma')$$

representando por el símbolo $\nabla\varphi$ la operación

$$\nabla\varphi = a_n \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}} + 2a_{n-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-2}} + 3a_{n-2} \frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-3}} + \ldots + na_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_0} . \quad (\beta')$$

IV.—Hemos supuesto en los dos párrafos anteriores que la forma propuesta U estaba escrita con los coeficientes numéricos de la fórmula del binomio de Newton, y en el caso en que no tenga estos coeficientes numéricos es preciso modificar algo los símbolos $\Delta\varphi$ y $\nabla\varphi$. Sea en efecto, la forma

$$\begin{aligned} U &= (a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \between x, y)^n \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n; \end{aligned}$$

sustituyendo en vez de x, $x+\lambda y$, tendremos

$$a_0 (x+\lambda y)^n + a_1 (x+\lambda y)^{n-1} y + a_2 (x+\lambda y)^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n,$$

ó sea,

$$\begin{array}{l|l|l|l}
a_0 x^n + n a_0 \lambda & x^{n-1} y + \left[\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right] a_0 \lambda^2 & x^{n-2} y^2 + \ldots + a_0 \lambda^n & y^n; \\
\quad + a_1 & \qquad + (n-1) a_1 \lambda & \qquad \ldots + a_1 \lambda^{n-1} & \\
 & \qquad\qquad + a_2 & \qquad \ldots + a_2 \lambda^{n-2} & \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
 & & \qquad\qquad + a_n &
\end{array}$$

de manera que los coeficientes de la trasformada serán

$$\left\{\begin{array}{l}A_0=a_0\\ A_1=a_1+na_0\lambda\\ A_2=a_2+(n-1)\,a_1\lambda+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]a_0\lambda^2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_n=a_n+a_{n-1}\lambda+a_{n-2}\lambda^2+\dots+a_1\lambda^{n-1}+a_0\lambda^n,\end{array}\right.$$

y la función $\Phi_1=\varphi\,(A_0,\,A_1,\,A_2,\dots A_n)$ de los coeficientes será

$$\Phi_1=\varphi\,(A_0,\,A_1,\,A_2,\dots A_n)$$
$$=\varphi\,(a_0,\,a_1+na_0\lambda,\,a_2+(n-1)\,a_1\lambda+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]a_0\,\lambda^2,\dots)$$

que desarrollada por la fórmula de Taylor generalizada nos dará, teniendo en cuenta que ahora los incrementos de las variables son

$$0,\,na_0\,\lambda,\,(n-1)\,a_1\,\lambda+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]a_0\lambda^2,\dots\,a_{n-1}\lambda+a_{n-2}\lambda^2+\dots+a_0\lambda^n,$$

$$\Phi_1=\varphi+na_0\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+\left\{(n-1)\,a_1\lambda+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]a_0\lambda^2\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}$$
$$+\left\{(n-2)\,a_2\lambda+\left[\begin{matrix}n-1\\2\end{matrix}\right]a_1\lambda^2+\left[\begin{matrix}n\\3\end{matrix}\right]a_0\lambda^3\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}+\dots$$
$$+\left\{a_{n-1}\lambda+a_{n-2}\lambda^2+\dots+a_0\lambda^n\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}+n^2a_0{}^2\lambda^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1{}^2}$$
$$+2na_0\lambda\left\{(n-1)\,a_1\lambda+\left[\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right]a_0\lambda^2\right\}\frac{\partial^2\varphi}{\partial a_1.\partial a_2}+\dots+\text{etc.},$$

ordenando con relación á las potencias de λ se obtendría

$$\Phi_1=\varphi+\left(na_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1}+(n-1)\,a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2}+(n-2)\,a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3}\right.$$
$$\left.+\dots+a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}\right)\lambda+\dots;$$

y representando por $\Delta'\varphi$ la operación indicada en el coeficiente de λ, ó sea,

$$\Delta'\varphi = na_0\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + (n-1)\,a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + (n-2)\,a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_3} + \ldots + a_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial a_n}, \qquad (\delta)$$

se tendría como en el número **II**,

$$\Phi_1 = \varphi + \lambda.\Delta'\varphi + \frac{1}{\underline{|2}}\lambda^2.\Delta'^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}}\lambda^3.\Delta'^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}}\lambda^n.\Delta'^n\varphi. \qquad (\gamma_1)$$

Si análogamente á lo expuesto en el párrafo **III**, en la forma U sustituimos en lugar de y, $y+\lambda x$, y hacemos los desarrollos convenientes, tendremos

$$\Phi'_1 = \varphi + \lambda.\nabla'\varphi + \frac{1}{\underline{|2}}\lambda^2\nabla'^2\varphi + \frac{1}{\underline{|3}}\lambda^3.\nabla'^3\varphi + \ldots + \frac{1}{\underline{|n}}\lambda^n.\nabla'^n\varphi, \qquad (\gamma'_1)$$

representando por $\nabla'\varphi$ la operación

$$\nabla'\varphi = a_1\frac{\partial\varphi}{\partial a_0} + 2a_2\frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 3a_3\frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + na_n\frac{\partial\varphi}{\partial a_{n-1}}. \qquad (\delta')$$

ERRATAS.

Pág.	Línea.	Dice.	Debe decir.
4	6	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-2} y$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} x^{n-1} y$
17	17	a_{1i}	a_{11}
24	20	$(x_2 y_1 - y_2 y_1)$	$(x_2 y_1 - y_2 x_1)$
26	16	$4 a_0 a^2 - a_1^2$	$4 a_0 a_2 - a_1^2$
32	última	$-a_3 b^1$	$-a_3 b_1$
42	6	$\frac{\partial^2 U}{\partial y . dx}$	$\frac{\partial^2 U}{\partial y . \partial x}$
43	6	M	U
56	21	(5)	(7)
64	14	M_2	M^2
89	18	$(\alpha_2 - \alpha_3)$	$(\alpha_2 - \alpha_3)^i$
102	1	h	k
143	15	$\sum C . a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} a_3^{e_2}$	$\sum C . a_0^{e_0} a_1^{e_1} a_2^{e_2} a_3^{e_3}$
156	última	Δk_1	Δ
159	4	a_{2nr+1}	a_{2n+1}

ÍNDICE.

Páginas.

PRÓLOGO. V
ADVERTENCIA. 1
Cap. I.—Preliminares. 3
» II.—Discriminantes.. 14
» III.—Jacobiano y Hessiano. 31
» IV.—Sustituciones lineales. 52
» V.—Invariantes.. 70
» VI.—Covariantes.. 97
» VII.—Teoremas sobre los invariantes y covariantes. 111
» VIII.—Emanantes.—Contravariantes. — Concomitantes mixtos. — Evectantes.—Intermutantes.—Cataleticantes. 123
» IX.—Formación de invariantes y covariantes. 141
» X.—Formas canónicas.. 153
NOTA. Sobre los símbolos $\Delta\varphi$ y $\nabla\varphi$. 167
Erratas.. 175