B
10-251 fio

51
VAL
Tra

B-1355

TRATADO ELEMENTAL

DE MATEMÁTICAS

ESCRITO DE ÓRDEN DE S. M. PARA USO

DE LOS CABALLEROS SEMINARISTAS

DEL SEMINARIO DE NOBLES DE MADRID

Y DEMAS CASAS DE EDUCACION DEL REINO,

POR DON JOSÉ MARIANO VALLEJO,

Catedrático que fué de Matemáticas, Fortificacion, Ataque y Defensa de las Plazas en dicho Seminario, individuo de varios establecimientos científicos, literarios y económicos; y en la actualidad Director General de Estudios, jubilado, Inspector de la Escuela Normal Militar, y Senador por la provincia de Granada.

TOMO II PARTE PRIMERA.

Que contiene la Trigonometría Esférica, la Aplicacion del Álgebra á la Geometría, las Secciones Cónicas, las Superficies de 2.º grado y las Ecuaciones superiores.

TERCERA EDICION

Corregida y aumentada con todos los adelantamientos que en estos Tratados se han hecho hasta el dia.

MADRID:

Imprenta Garrasayaza, propia del mismo autor.

Calle de Leganitos, número 37,

FEBRERO DE 1844.

DIPUTACION PROVINCIAL DE JAEN

Esta obra es propiedad de su autor; quien perseguirá judicial y criminalmente á los que se la reimpriman; pues cuando el autor se ocupa incesantemente en proporcionar aquellas obras, que son mas útiles para promover la pública y particular prosperidad, es uno de los mas enormes atentados, el que los especuladores con el sudor y trabajo egeno, le usurpen su propiedad, y le priven del fruto de sus fatigas, desvelos, y penalidades.

PRÓLOGO.

Mr. Biot, en el prólogo de la octava edicion de su Ensayo de Geometría Analítica, *dice:* "*Tambien he estado yo siempre persuadido, de que un libro elemental no puede ser juzgado sinó por la esperiencia; que es necesario, por decirlo asi, ensayarle sobre el espíritu de los discípulos, y verificar por esta prueba la bondad de los métodos que se han elegido. El solo medio de perfeccionar una obra de este género es, pues, el de recoger, y aun investigar con el mayor cuidado, las observaciones de los que la han enseñado.*"

Mucha satisfaccion me causa el haber coincidido en este punto con un sábio de tanto mérito, y que me dispensó ciertas atenciones cuando estuve en París. En efecto, al escribir yo la parte correspondiente á este volúmen en 1804, *como todos los métodos, que adopté, eran los mas modernos, y no estaban contenidos todavia en los libros españoles, daba manuscritas á mis discípulos del Seminario de Nobles de Madrid todas las nuevas teorías, para que me las esplicasen; y de todos los diferentes métodos que había para esponerlas, elegí los que comprendían con mayor facilidad: procurando no incurrir en el inconveniente, que precita* Cramer *en el prólogo de su obra sobre las curvas, de que* algunos han preferido el de hacerse admirar al de instruir.

Despues de impresa la obra, se ha verificado, que ya por órden del Gobierno, ya por inoitacion de los Gefes de los establecimientos particulares, he sido muy repetidas veces comisionado para examinar á los discípulos; esto me ha proporcionado el observar continuamente los efectos que producian mis obras en la enseñanza; y de preguntar á los dignos profesores que esplicaban por ellas, que me manifestasen cuantas observaciones hubiesen hecho, para enmendar y corregir todo lo que se hallase inexacto y obscuro; y estoy muy reconocido á muchos Profesores beneméritos, que han correspondido con mucho celo á mis inoitativas exhortaciones.

Ademas, en la época de mi emigracion, á consecuencia de los sucesos de Octubre de 1823, *para no recibir socorro de ningun Gobierno estrangero, procuré ganar mi subsistencia, enseñando Matemáticas tanto en Lóndres como en*

Paris; lo que me proporcionó hacer por mí mismo observaciones directas sobre el influjo del método de mis obras en la enseñanza; y tuve la satisfaccion de ver en Paris, que en ocho meses de estudio por ellas salieron varios discípulos tan instruidos como otros paisanos suyos que habian gastado cuatro años en otros establecimientos de aquella capital. En la edicion presente, *ademas de haber rectificado y corregido todas las inexactitudes que he advertido, he procurado añadir todos cuantos adelantamientos se han hecho hasta este mismo año de* 1843 *sobre los tratados que contiene; y las principales adiciones son las siguientes:*

1.ª *En el* § 15 *se han puesto algunos ejemplos para determinar las líneas trigonométricas de los arcos que tengan mas de* 360 *grados.*

2.ª *En el* § 16 *se pone una nota en que se determina el indefinido número de arcos que pueden corresponder á una línea trigonométrica dada.*

3.ª *En el* § 17 *se pone una nota para completar la demostracion de las fórmulas generales de la suma y de la diferencia de dos arcos; y se hacen varias aclaraciones acerca de las líneas trigonométricas de los arcos cuando se componen de un número exacto de cuadrantes.*

4.ª *En el* § 19 *se pone otra nota para manifestar, que al resolver la cuestion de* dado el seno de un arco, encontrar el de su mitad, *se deben hallar diferentes valores.*

5.ª *En el* § 25 *se ha puesto una nota sobre* cual es la línea mas corta sobre varias superficies: *debiendo añadir aquí, que en el cuaderno sesto del* Diario de la Escuela Politécnica *se resuelve el problma siguiente.* "*Dados dos puntos sobre una superficie, hallar la ecuacion de la línea mas corta, que se puede trazar sobre esta superficie, por los dos puntos dados.*

6.ª *En el* § 83 *se enumeran algunos triángulos esféricos, que sin ser rectángulos, se pueden resolver por el método de estos.*

7.ª *Despues del* § 94 *se añaden once párrafos, señalados con* 94*a hasta el* 94*k, en que se insertan nueve interesantísimos problemas de* Euler, *relativos al círculo, que se resuelven por mi nuevo método de* hallar las raices reales de las ecuaciones, *con mas facilidad y exactitud, que por el método empleado por* Euler.

8.ª *En el* § 161 *se pone una nota, en que se demuestra directamente que* la ecuacion de primer grado entre dos variables no puede tener por lugar geométrico sinó líneas rectas.

9.ª *En el* § 170 *se pone una nota, encontrando la distancia entre dos puntos, en el caso de que los ejes no sean rectangulares, sinó que formen entre sí un ángulo cualquiera.*

10.ª *En el* § 171 *se añade la siguiente cuestion:* "*por un punto dado, tirar una perpendicular á una recta dada, y hallar la longitud de la porcion de esta perpendicular comprendida entre el punto dado y la recta dada.*"

11.ª *En el* § 172 *se pone una nota para manifestar que una ecuacion de un grado cualquiera no corresponde siempre á una curva de igual grado, sinó que puede corresponder á un sistema de líneas rectas ó curvas, tales que, sumados los grados de sus ecuaciones, den un resultado igual al grado de la ecuacion propuesta.*

12.ª *En el* § 190 *se pone una nota en que se saca una ecuacion del plano, considerándole como el lugar geométrico de las diversas posiciones que toma una recta móvil sujeta á resbalar sobre una recta fija, permaneciendo paralela á una recta dada.*

13.ª *Despues del* § 196 *se añade la resolucion de las cuestiones siguientes:*

196*a* Por un punto dado, hacer pasar un plano paralelo á otro dado.

196*b* Hacer pasar un plano por un punto dado, y por una recta dada.

196*c* Dadas dos rectas, hacer pasar un plano por la primera, y que sea paralelo á la segunda.

196*d* *Encontrar la interseccion de una recta y de un plano, cuyas ecuaciones se conocen.*

14.ª *En el* § 202 *se pone una nota en que se inserta la demostracion que D.* Fernando Boccherini, *Profesor de Matemáticas en Santander, ha dado á sus discípulos en el curso de* 1842 *á* 1843, *de la trasformacion de las coordenadas en el espacio. Despues se pone la de Mr.* Leroy *sobre la misma cuestion. Se dan otras noticias modernas sobre el empléo de coordenadas curvilíneas; y se deducen las fórmulas para trasformar las coordenadas en el espacio cuando solo se varía el orígen, conservándose la direccion de los ejes.*

15.ª *En el* § 205 *se pone una nota en que se da noticia de la enumeracion de las curvas de cuarto órden, segun la naturaleza diferente de sus ramas infinitas por Mr.* Plucker.

16.ª *En el* § 206 *se añade lo relativo á las diferentes circunstancias que, segun diversos autores, deben reunir las curvas para ser semejantes.*

17.ª *En el* § 222 *se pone una nota en que se demuestra, que* la seccion hecha oblicuamente en el cilindro recto, *es una elipse.*

18.ª *En el* § 228 *se pone una nota en que se saca la ecuacion mas general de la circunferencia de círculo, en el caso de que no sean rectangulares los ejes.*

19.ª *En el* § 232 *se halla la ecuacion polar de la circunferencia de círculo.*

20.ª *En el* § 247 *se añade lo necesario para dar á conocer las dos directrices de la elipse, y el modo de construirlas.*

21.ª *En la nota del* § 248 *se aclara por medio de una figura el que una tangente de una curva cualquiera, es una secante en que dos puntos de interseccion con la curva se reunen en uno solo.*

22.ª *En el* § 291 *se dan á conocer, y se manifiesta el modo de construir las dos* directrices *de la hipérbola.*

23.ª *Al fin del* § 339 *se añade una digresion en que se determinan las relaciones que deben existir entre los coeficientes de la ecuacion general de segundo grado, para que represente;* 1.º *un lugar geométrico imaginario;* 2.º *un punto;* 3.º *dos rectas, sean ó no paralelas ó que se confundan en una sola; discusion de algunas ecuaciones, cuyos lugares geométricos son puntos aislados; y determinacion de los centros, diámetros y asíntotas de las curvas.*

24.ª *En el* § 340 *se añaden algunas consideraciones sumamente importantes acerca de las ecuaciones de las superficies; y se indica la na-*

turaleza de las que Monge *dió á conocer con el nombre de* enveloppes.

25.ª *En el* § 342 *se pone por nota el modo de hallar la ecuacion de la superficie de una esfera cuando el orígen de las coordenadas no está en el centro; y el de hallar la ecuacion del plano tangente á la esfera.*

26.ª *En el* § 341 *se añade la demostracion de que la* proyeccion de un círculo sobre un plano, que no es paralelo al plano del mismo círculo, es una elipse.

27.ª *En el* § 346 *se pone una nota, en que se da á conocer el contenido de un apéndice de* Euler *sobre la clasificacion de las superficies por sus ecuaciones.*

28.ª *En el* § 358 *se pone una nota en que se indican los adelantamientos que han hecho en las superficies de* 2.º *grado MM.* Binet, Petit y Chasles.

29.ª *En el* § 360 *se pone una nota para dar á conocer la superficie cónica, que es* asíntota *del hiperboloide de una cara ú hoja, segun Mr.* Leroy.

30.ª *En el* § 362 *se añade lo relativo para dar á conocer las superficies* de 2.º *grado, cuyo centro se halla en el infinito.*

31.ª *Con la numeracion de los párrafos* 363*a hasta el* 363*x se añade un capítulo acerca de las superficies consideradas bajo el aspecto de su generacion; en que se trata de las* superficies cilindráceas, *de las* coniculares, *de las* desarrollables, *de las de* revolucion, *de las* gauchas *ó* torcidas *y de las* curvas de doble curvatura.

32.ª *Al principio de la Teoría general de las ecuaciones, se pone una nota en que se estracta la obra que tiene por título* "Del Teorema de Mr. Sturm y de sus aplicaciones numéricas *por M. B. Midy*" *y se resuelve su primer ejemplo, tanto por mi método como por el suyo, para que se vea la superioridad del mio.*

33.ª *En el* § 365 *se pone una nota para manifestar, que la regla de los divisores se estiende á las ecuaciones en que el primer término lleva coeficiente; y se resuelve una ecuacion por mi nuevo método en que todas las raices son números quebrados y fraccionarios.*

34.ª *En el* § 373 *se pone una nota, en que se hallan las raices de una ecuacion, que resuelve Mr.* Bourdon *por la regla de exclusion de los divisores en la* novena edicion de su Álgebra, *publicada en Paris este mismo año de* 1843; *y resuelvo la misma ecuacion por mi nuevo método para que se patentice la superioridad del mio al de aquel.*

35.ª *En el* § 378 *se pone una nota en que se resuelve una ecuacion de* 4.º *grado por nuestro método, para manifestar sus ventajas sobre los procedimientos del testo.*

36.ª *En la nota del* § 382 *se añaden algunos ejemplos relativos al máximo comun divisor, siendo uno de ellos* el hallar el máximo comun divisor *de tres polinomios.*

37.ª *En el* § 384 *se añaden varios ejemplos relativos á encontrar todos los valores que satisfacen á dos ecuaciones con dos incógnitas; y por nota se da noticia de un nuevo teorema, debido á Mr.* Bret; *y se pone un ejemplo de resolucion de tres ecuaciones con tres incógnitas.*

38.ª *En el* § 388 *se añade la resolucion de un ejemplo importante acer-*

ca del modo de hallar las raices iguales de las ecuaciones; y se resuelve en una nota por mi método la misma ecuacion para que se palpe bien, que mi método halla los verdaderos resultados sin ningun otro conocimiento ausiliar; y con el mismo fin se resuelve una ecuacion del séptimo grado, que Mr. Bourdon *en la novena edicion de su Algebra, resuelve por el método de las raices iguales, y yo resuelvo la misma ecuacion por mi nuevo método, con el objeto espresado ántes.*

39.ª *En el* § 392 *se pone por nota el cálculo detallado, de la cuestion del texto, porque algunas personas han manifestado que hallaban obscuridad en las ediciones anteriores.*

40.ª *En el* § 400 *y* 401 *se hacen algunas aclaraciones y se ponen varios ejemplos acerca de la regla de los signos de Descartes y* de la presencia de las raices imaginarias en las ecuaciones.

Y por último se resuelven por mi método las dos últimas ecuaciones de Mr. Budan *para que se vea que mi método es tambien superior al de dicho Autor: resultando de la comparacion hecha con todos los métodos conocidos hasta el dia, que el mio es mas sencillo, mas general, mas breve y mas uniforme que todos los demas.*

ERRATAS.

Pág.	*Línea*	*Dice*	*Debe decir.*
6	12	toda lo	toda la
id.	18	Geometría	Geometría y á la Mecánica;
8	31	coseno CB	coseno BO
id.	33	coseno OC	coseno BO
10	2 nota	drán	gan
id.	22 nota	drán	gan
35	11 por abajo	ecs. ant.	esc. ant.
id.	3 por abajo	B forme	D forme
48	7	$\text{sen.}a = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A}$	$\text{sen.}c = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A}$
59	última	las	los
76	9	lo	la
77	6 por abajo	segundo	de segundo
83	15 por abajo	que da	queda
92	7 por abajo	la CB	la CB, paralela con DE,
100	3 por abajo	pero nuestro, entendimiento	pero, nuestro entendimiento
134	3	y mQ	y $m'Q$
164	9	$P'q = pp''$	$P'q = pp'$
165	1 nota	la u	la u'
id.	6 por abajo nota	$u'\cos.(u',u)$	$u'\cos.(u',x)$,
190	12 por abajo	$\frac{b^2}{a^2}x^2$	$-\frac{b^2}{a^2}x^2$
205	18	$F'M$	$F'M$ (fig. 90);
208	8 por abajo	ab^2	a^2b^2.
id.	7 por abajo	$c\cos\varphi$	$r\cos\phi$
223	2	á eje	al eje;
249	5	$\frac{px^2}{2u}$	$\frac{px^2}{2a}$
271	2	$\frac{B}{2A}x$	$\frac{B}{2A}x$
285	15	proposicin	proposicion
291	9	sustituyenpo	sustituyendo
292	3 por abajo	ordenadas	abscisas
327	15	ten-	tenga.
332	11	de las x,u,	de las xu,
351	20	igualee	iguales
439	12	mimo	mismo,

CONSIDERACIONES

ACERCA DE LAS

LÍNEAS TRICONOMÉTRICAS.

1 Las líneas trigonométricas son de un uso tan contínuo y trascendental, que aun van á formar el asunto de nuestras investigaciones. En la Trigonometría rectilínea hemos hallado fórmulas para los senos y cosenos de la suma y diferencia de dos arcos; ahora vamos á ejecutar lo mismo respecto de las demas líneas trigonométricas. Para acostumbrarnos á calcular con generalidad, reunirémos en una sola las dos [*u*, *y*, *I.* 642] por medio del signo de ambigüedad, y será

$$\text{sen.}(A\pm B)=\frac{\text{sen.}A\times\text{cos.}B\pm\text{sen.}B\times\text{cos.}A}{R};$$

y ejecutando lo mismo con las (*x*, *z*, *I.* 642), tendrémos

$$\text{cos.}(A\pm B)=\frac{\text{cos.}A\times\text{cos.}B\mp\text{sen.}A\times\text{sen.}B}{R};$$

y como para simplificar los cálculos se hace por lo regular el radio igual con la unidad, resultará $\begin{cases}\text{sen.}(A\pm B)=\text{sen.}A\times\text{cos.}B\pm\text{sen.}B\times\text{cos.}A\\ \text{cos.}(A\pm B)=\text{cos.}A\times\text{cos.}B\mp\text{sen.}A\times\text{sen.}B.\end{cases}$

2 Ahora, como la tangente es [*I.* 633 (*i*)] igual al seno partido por el coseno, tendrémos

$$\text{tang.}(A\pm B)=\frac{\text{sen.}(A\pm B)}{\text{cos.}(A\pm B)}=\frac{\text{sen.}A\times\text{cos.}B\pm\text{sen.}B\times\text{cos.}A}{\text{cos.}A\times\text{cos.}B\mp\text{sen.}A\times\text{sen.}B}=$$

[dividiendo ambos términos del quebrado por $\text{cos.}A\times\text{cos.}B$]

$$\frac{\frac{\text{sen.}A\times\text{cos.}B}{\text{cos.}A\times\text{cos.}B}\pm\frac{\text{sen.}B\times\text{cos.}A}{\text{cos.}A\times\text{cos.}B}}{\frac{\text{cos.}A\times\text{cos.}B}{\text{cos.}A\times\text{cos.}B}\mp\frac{\text{sen.}A\times\text{sen.}B}{\text{cos.}A\times\text{cos.}B}}=(*)\frac{\frac{\text{sen.}A}{\text{cos.}A}\pm\frac{\text{sen.}B}{\text{cos.}B}}{1\mp\frac{\text{sen.}A}{\text{cos.}A}\times\frac{\text{sen.}B}{\text{cos.}B}};$$

y como $\frac{\text{sen.}A}{\text{cos.}A}=\text{tang.}A$, y $\frac{\text{sen.}B}{\text{cos.}B}=\text{tang.}B$, se tendrá por último

$$\text{tang.}(A\pm B)=\frac{\text{tang.}A\pm\text{tang.}B}{1\mp\text{tang.}A\times\text{tang.}B}.$$

(*) *Simplificando.*

3 Si, en vez de las tangentes, queremos introducir las cotangentes, tendrémos que, como [*I.* 633 (*t'*)] $\text{tang.} = \frac{1}{\text{cot.}}$, haciendo las sustituciones correspondientes, se reducirá la espresion anterior á

$$\text{tang.}(A \pm B) = \frac{\frac{1}{\text{cot.}A} \pm \frac{1}{\text{cot.}B}}{1 \mp \frac{1}{\text{cot.}A} \times \frac{1}{\text{cot.}B}} = \frac{\frac{\text{cot.}B \pm \text{cot.}A}{\text{cot.}A \times \text{cot.}B}}{\frac{\text{cot.}A \times \text{cot.}B \mp 1}{\text{cot.}A \times \text{cot.}B}} = [\text{suprimiendo los denominadores}] \frac{\text{cot.}B \pm \text{cot.}A}{\text{cot.}A \times \text{cot.}B \mp 1}.$$

Este valor de la tangente le hubiéramos sacado directamente, si en vez de partir los términos de la espresion primitiva por cos.A×cos.B, los hubiéramos dividido por sen.A×sen.B.

4 Ahora, como la cotangente es igual á la unidad dividida por la tangente [*I.* 633 (*t*)], será

$$\text{cot.}(A \pm B) = \frac{1}{\text{tang.}(A \pm B)} = \frac{1}{\frac{\text{cot.}B \pm \text{cot.}A}{\text{cot.}A \times \text{cot.}B \mp 1}} = \frac{\text{cot.}A \times \text{cot.}B \mp 1}{\text{cot.}B \pm \text{cot.}A}.$$

Como la secante [*I.* 633 (*m*)], es igual á la unidad dividida por el coseno, será

$$\text{sec.}(A \pm B) = \frac{1}{\text{cos.}(A \pm B)} = \frac{1}{\text{cos.}A \times \text{cos.}B \mp \text{sen.}A \times \text{sen.}B}.$$

5 Finalmente, como la cosecante es igual [*I.* 633 (*r*)] á la unidad dividida por el seno, se tendrá

$$\text{cosec.}(A \pm B) = \frac{1}{\text{sen.}(A \pm B)} = \frac{1}{\text{sen.}A \times \text{cos.}B \pm \text{sen.}B \times \text{cos.}A}.$$

6 En todas estas espresiones hemos hecho abstraccion del valor del radio, suponiéndole igual con la unidad; pero como en algunas ocasiones puede ocurrir el querer introducir el radio donde convenga, vamos á manifestar cómo se ejecuta esto. En primer lugar, advertirémos que cualquiera de estas espresiones, siendo el valor de una línea, debe ser homojénea con ella; luego, no debe tener sinó una dimension; y si las vemos con mas ó con ménos, será porque habrán desaparecido algunos factores, por ser iguales con la unidad. Por lo cual, introduciéndolos convenientemente, haciendo que la espresion sea homojénea y tenga una dimension mas en el numerador que en el denominador, habrémos conseguido nuestro intento.

Elijamos, por ejemplo, la espresion de la tangente (2), y tendrémos que se podrá hacer homojénea de dos modos: ó quitando dos dimensiones al segundo término de su denominador, en cuyo caso quedará con ninguna dimension, ó añadiendo dos dimensiones á los dos tér-

minos del numerador, y otras dos al primer término del denominador; lo que hará entónces que en el numerador haya tres dimensiones y en el denonaminador dos, y por consiguiente que la espresion tenga las circunstancias pedidas: de manera que por el primero, tendrémos

$$\text{tang}(A\pm B)=\frac{\text{tang}.A\pm\text{tang}.B}{1\mp\text{tang}.A\times\text{tang}.B}=\frac{\text{tang}.A\pm\text{tang}.B}{1\mp\frac{\text{tang}.A\times\text{tang}.B}{R^2}};$$

y por el segundo será $\text{tang}.(A\pm B)=\frac{R^2\times\text{tang}.A\pm R^2\times\text{tang}.B}{R^2\mp\text{tang}.A\times\text{tang}.B}$.

En efecto, si no hubiéramos supuesto $R=1$, hubiéramos obtenido uno cualquiera de estos resultados; porque entónces [*I.* 633 (*i*) y 642..2ª]

$$\text{tang}.(A\pm B)=\frac{R\times\text{sen}.(A\pm B)}{\cos.(A\pm B)}=\frac{R\times\frac{\text{sen}.A\times\cos.B\pm\text{sen}.B\times\cos.A}{R}}{\frac{\cos.A\times\cos.B\mp\text{sen}.A\times\text{sen}.B}{R}}=\ldots$$

$$=\frac{R\times\text{sen}.A\times\cos.B\pm R\times\text{sen}.B\times\cos.A}{\cos.A\times\cos.B\mp\text{sen}.A\times\text{sen}.B}=$$ [dividiendo ambos términos por $\cos.A\times\cos.B$ y haciendo al mismo tiempo la simplificacion]

$$\frac{\frac{R\times\text{sen}.A}{\cos.A}\pm\frac{R\times\text{sen}.B}{\cos.B}}{1\mp\frac{\text{sen}.A\times\text{sen}.B}{\cos.A\times\cos.B}}=[I.\ 633\ (i)]\frac{\text{tang}.A\pm\text{tang}.B}{1\mp\frac{\text{tang}.A}{R}\times\frac{\text{tang}.B}{R}}.$$

Y si reducimos en el denominador de esta espresion el entero á la especie del quebrado y ejecutamos la division del entero por el quebrado, obtendrémos la otra espresion, que será

$$\text{tang}.(A\pm B)=\frac{\text{tang}.A\pm\text{tang}.B}{\frac{R^2\mp\text{tang}.A\times\text{tang}.B}{R^2}}=\frac{R^2\times\text{tang}.A\pm R^2\times\text{tang}.B}{R^2\mp\text{tang}.A\times\text{tang}.B}.$$

7 *Los valores absolutos de las líneas trigonométricas del primer cuadrante son los únicos que puede haber para un arco mayor que él*: porque el seno principia siendo cero y acaba siendo igual con el radio, que es el mayor que puede haber; luego los valores absolutos de los senos de cualesquiera arcos estarán comprendidos entre estos valores. La tangente principia siendo cero y termina siendo infinita, que siendo los valores menor y mayor que puede tener, sucede lo mismo; y así se verifica análogamente en las demas (*); por lo cual *vamos á indagar la*

(*) *No se verifica esto en el seno-verso y coseno-verso; pero como de es as*

::

dependencia que tienen las líneas trigonométricas de un arco cualquiera con las de este arco aumentado en un número cualquiera de cuadrantes.

Supongamos que se tenga un arco cualquiera m, que sea menor que un cuadrante; si llamamos π á la semicircunferencia, tendrémos que sen.$(\frac{1}{2}\pi+m)$ espresará el seno de un arco tal como RXL (figura 1ª) en el supuesto de que m represente el arco XL; y como el seno es positivo y está representado por LI, tendrémos que sen.$(\frac{1}{2}\pi+m)$=LI; pero LI es el coseno de XL=m, luego sen.$(\frac{1}{2}\pi+m)$=cos.m.

Si suponemos ahora que m=AX, será

$$\text{sen.}(\tfrac{1}{2}\pi-m)=\text{sen.RA}=\text{AB}=\text{cos.AX}=\text{cos.}m,$$

y reuniendo estas dos fórmulas en una, será sen.$(\frac{1}{2}\pi\pm m)$=cos.m (α).

8 En los mismos supuestos será cos.$(\frac{1}{2}\pi+m)$=cos.RXL=—IO, que le señalamos con el signo — porque es negativo; lo que se conoce en que cae el centro del círculo entre el seno recto y el otro estremo del arco; pero IO=LM=sen.LX=sen.m; luego cos.$(\frac{1}{2}\pi+m)$=—sen.m; y suponiendo que m represente á XA, será

$$\text{cos.}(\tfrac{1}{2}\pi-m)=\text{cos.RA}=\text{OB}=\text{AN}=\text{sen.}m;$$

luego reuniendo las dos en una, se tendrá cos.$(\frac{1}{2}\pi\pm m)$=$\mp$sen.m ($\mathcal{C}$).

9 Supongamos ahora que m esprese el valor del arco QG, y tendrémos que sen.$(\pi+m)$=—GH,

porque cae por la parte inferior del diámetro RQ; pero GH es el seno de QG=m, luego será sen.$(\pi+m)$=—sen.m;

y suponiendo que m represente el arco LQ, se tendrá que

$$\text{sen.}(\pi-m)=\text{sen.RXL}=\text{LI}=\text{sen.}m;$$

y reuniendo ambos resultados, será sen.$(\pi\pm m)$=$\mp$sen.m (α').

10 En los mismos supuestos será cos.$(\pi+m)$=cos.RXQG=—HO; pero HO=cos.QG=cos.m; luego cos.$(\pi+m)$=—cos.m, y cos.$(\pi-m)$=cos.RXL=—IO=—cos.m; y reuniendo ambos resultados, se tendrá cos.$(\pi\pm m)$=—cos.m ($\mathcal{C}'$).

11 Supongamos ahora que m esprese el valor de ZD, y tendrémos que sen.$(\frac{3}{2}\pi+m)$=sen.RXQZD=—DC,

por caer por la parte inferior del diámetro RQ; pero como tenemos

$$\text{DC}=\text{cos.ZD}=\text{cos.}m,$$ será sen.$(\frac{3}{2}\pi+m)$=—cos.m;

y si suponemos que m esté representado por GZ, será

$$\text{sen.}(\tfrac{3}{2}\pi-m)=\text{sen.RXQG}=-\text{GH}=-\text{cos.}m;$$

luego sen.$(\frac{3}{2}\pi\pm m)$=—cos.m (γ).

En el mismo supuesto se tendrá

$$\text{cos.}(\tfrac{3}{2}\pi+m)=\text{cos.RXQZD}=\text{OC}=\text{DE}=\text{sen.}m;$$

y cos.$(\frac{3}{2}\pi-m)$=cos.RXQG=—HO=—sen.GZ=—sen.m;

por lo que cos.$(\frac{3}{2}\pi\pm m)$=$\pm$sen.m (δ)

---

lineas no se hace uso, no disminuye la verdad de nuestra proposicion.

12 Suponiendo ahora que m sea igual con RA, será

$$\text{sen.}(2\pi+m)=\text{sen.RXQZRA}=\text{AB};$$

pero $\text{AB}=\text{sen.RA}=\text{sen.}m$; luego $\text{sen.}(2\pi+m)=\text{sen.}m$; y si suponemos el arco m representado por RD, será

$\text{sen.}(2\pi-m)=\text{sen.RXQZD}=-\text{CD}$; pero $\text{CD}=\text{sen.DR}=\text{sen.}m$, luego será $\text{sen.}(2\pi-m)=-\text{sen.}m$, de donde $\text{sen.}(2\pi\pm m)=\pm\text{sen.}m$ (γ').

13 En los mismos supuestos es $\text{cos.}(2\pi+m)=\text{cos.RXQZRA}=\text{BO}=\text{cos.}m$, y $\text{cos.}(2\pi-m)=\text{cos.RXQZD}=\text{OC}=\text{cos.}m$; luego $\text{cos.}(2\pi\pm m)=\text{cos.}m$ (δ').

14 Sustituyendo estas espresiones en las fórmulas de la tangente, cotangente, secante y cosecante halladas (I. 633), que supondrémos se tienen bien presentes, resultará

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tang.}\left(\tfrac{1}{2}\pi\pm m\right)=\frac{\text{sen.}\left(\frac{1}{2}\pi\pm m\right)}{\text{cos.}\left(\frac{1}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{\text{cos.}m}{\mp\text{sen.}m}=\mp\text{cot.}m;\\
&\text{cot.}\left(\tfrac{1}{2}\pi\pm m\right)=\frac{1}{\text{tang.}\left(\frac{1}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{\mp\text{cot.}m}=\mp\frac{1}{\text{cot.}m}=\mp\text{tang.}m;\\
&\text{sec.}\left(\tfrac{1}{2}\pi\pm m\right)=\frac{1}{\text{cos.}\left(\frac{1}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{\mp\text{sen.}m}=\mp\frac{1}{\text{sen.}m}=\mp\text{cosec.}m;\\
&\text{cosec.}\left(\tfrac{1}{2}\pi\pm m\right)=\frac{1}{\text{sen.}\left(\frac{1}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{\text{cos.}m}=\text{sec.}m;
\end{aligned}\right\}(\varepsilon)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tang.}(\pi\pm m)=\frac{\text{sen.}(\pi\pm m)}{\text{cos.}(\pi\pm m)}=\frac{\mp\text{sen.}m}{-\text{cos.}m}=\pm\frac{\text{sen.}m}{\text{cos.}m}=\pm\text{tang.}m;\\
&\text{cot.}(\pi\pm m)=\frac{1}{\text{tang.}(\pi\pm m)}=\frac{1}{\pm\text{tang.}m}=\pm\text{cot.}m;\\
&\text{sec.}(\pi\pm m)=\frac{1}{\text{cos.}(\pi\pm m)}=\frac{1}{-\text{cos.}m}=-\text{sec.}m;\\
&\text{cosec.}(\pi\pm m)=\frac{1}{\text{sen.}(\pi\pm m)}=\frac{1}{\mp\text{sen.}m}=\mp\text{cosec.}m;
\end{aligned}\right\}(\varepsilon')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{tang.}\left(\tfrac{3}{2}\pi\pm m\right)=\frac{\text{sen.}\left(\frac{3}{2}\pi\pm m\right)}{\text{cos.}\left(\frac{3}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{-\text{cos.}m}{\pm\text{sen.}m}=\mp\text{cot.}m;\\
&\text{cot.}\left(\tfrac{3}{2}\pi\pm m\right)=\frac{1}{\text{tang.}\left(\frac{3}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{\mp\text{cot.}m}=\mp\text{tang.}m;\\
&\text{sec.}\left(\tfrac{3}{2}\pi\pm m\right)=\frac{1}{\text{cos.}\left(\frac{3}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{\pm\text{sen.}m}=\pm\text{cosec.}m;
\end{aligned}\right\}(\zeta)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{cosec.}\left(\tfrac{3}{2}\pm m\right)=\frac{1}{\text{sen.}\left(\tfrac{3}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{-\cos.m}=-\sec.m;\\
&\text{tang.}(2\pi\pm m)=\frac{\text{sen.}(2\pi\pm m)}{\cos.(2\pi\pm m)}=\frac{\pm\text{sen.}m}{\cos.m}=\pm\text{tang.}m;\\
&\cot.(2\pi\pm m)=\frac{1}{\text{tang.}(2\pi\pm m)}=\frac{1}{\pm\text{tang.}m}=\pm\cot.m;\\
&\sec.(2\pi\pm m)=\frac{1}{\cos.(2\pi\pm m)}=\frac{1}{\cos.m}=\sec.m;\\
&\text{cosec.}(2\pi\pm m)=\frac{1}{\text{sen.}(2\pi\pm m)}=\frac{1}{\pm\text{sen.}m}=\pm\text{cosec.}m.
\end{aligned}\right\}(\zeta')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{cosec.}\left(\tfrac{3}{2}\pm m\right)=\frac{1}{\text{sen.}\left(\tfrac{3}{2}\pi\pm m\right)}=\frac{1}{-\cos.m}=-\sec.m;
\end{aligned}\right\}(\zeta)$$

15 Si tomamos los signos superiores de todas las líneas trigonométricas del arco $2\pi\pm m$, en el que tenga signo de ambigüedad, tendrémos que todas las líneas del arco $2\pi+m$ son las mismas que las del arco m, no solo en magnitud, sinó en posicion; lo cual proviene de que $2\pi+m$ representa el arco RXQZRA, el cual se compone de toda una circunferencia mas el arco RA: y como cuando el arco ha llegado á ser toda lo circunferencia se han confundido sus estremos, las líneas trigonométricas de una circunferencia son las mismas que las de un arco cero; y por lo mismo *las de un arco cualquiera serán las mismas que las de este arco aumentado en una circunferencia ó en un número cualquiera de circunferencias.* Estos arcos mayores que la circunferencia se suelen considerar algunas veces tanto en la Astronomía como en las aplicaciones de la Análisis á la Geometría; y por lo mismo generelizarémos aun mas las fórmulas del seno y del coseno.

Para esto, llamando C á la circunferencia, será $C=2\pi=\frac{4}{2}\pi$, y representando por n un número cualquiera, será $nC=\frac{4}{2}n\pi$; luego si añadimos esto á lo que hay dentro del paréntesis de dichas fórmulas, el segundo miembro no padecerá alteracion, y atendiendo á que

$$\frac{4n\pi}{2}+\tfrac{1}{2}\pi=\frac{4n\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{4n\pi+\pi}{2}=\frac{4n+1}{2}\pi,$$

que $\frac{4n\pi}{2}+\pi=\frac{4n\pi}{2}+\frac{2\pi}{2}=\frac{4n+2}{2}\pi$, que $\frac{4n\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=\frac{4n+3}{2}\pi$,

y á que $\frac{4n\pi}{2}+2\pi=\frac{4n\pi}{2}+\frac{4\pi}{2}=\frac{4n+4}{2}\pi$, será

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+1}{2}\pi\pm m\right)=\cos.m\ (n);\qquad \cos.\left(\frac{4n+1}{2}\pi\pm m\right)=\mp\text{sen.}m\ (\theta);$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+2}{2}\pi\pm m\right)=\pm\text{sen.}m\ (n');\quad \cos.\left(\frac{4n+2}{2}\pi\pm m\right)=-\cos.m\ (\theta');$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+3}{2}\pi\pm m\right)=-\cos.m\ (\lambda);\quad \cos.\left(\frac{4n+3}{2}\pi\pm m\right)=\pm\text{sen.}m\ (\mu);$$

$$\text{sen.}\left(\frac{4n+4}{2}\pi\pm m\right)=\pm\text{sen.}m\ (\lambda');\quad \cos.\left(\frac{4n+4}{2}\pi\pm m\right)=\cos.m\ (\mu');$$

Bajo el mismo aspecto podríamos poner las demas.

Si observamos la posicion de estas líneas respecto del diámetro RQ y el centro O, hallarémos que en el primer cuadrante ROX, se tienen senos y cosenos positivos; en el 2.° XOQ son los senos positivos y los cosenos negativos; en el 3.° QOZ son negativos el seno y el coseno; y en el 4.° se tienen senos negativos y cosenos positivos. De manera, que en sabiendo el cuadrante en que termina el arco que se considera, será muy fácil poner el signo que le corresponda á su línea trigonométrica. Y si observamos ademas las fórmulas (α), ($\mathcal{C}$), (γ), (δ), etc. en que el número de cuadrantes es ímpar, esto es, se tiene $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, etc., verémos que las líneas de los arcos $\frac{1}{2}\pi\pm m$, $\frac{3}{2}\pi\pm m$, etc. vienen espresadas por las colíneas del arco escedente m; y en las (α'), ($\mathcal{C}'$), (γ'), (δ') etc. en que el número de cuadrantes es par, las líneas de los arcos vienen espresadas por las del arco escedente m; con lo cual tendrémos lo suficiente para todos los casos que nos pueden ocurrir. Por ejemplo: si quisiéramos averiguar el seno y coseno del arco $\frac{19}{2}\pi\pm m$, veríamos que como 19 cuadrantes equivalen á 4 circunferencias y 3 cuadrantes, el arco $\frac{19}{2}\pi\pm m$ terminará en el 4.° cuadrante si m tiene el signo +, y en el 3.° si tiene el signo —. Por consiguiente, su seno en ambos casos es negativo; y su coseno positivo cuando se tiene $+m$, y negativo cuando $-m$. Y como el arco $(\frac{19}{2}\pi\pm m)$ consta de un número ímpar de cuadrantes, se tendrá

$$\text{sen.}\left(\tfrac{19}{2}\pi\pm m\right)=-\cos.m,\quad \cos.\left(\tfrac{19}{2}\pi\pm m\right)=\pm\text{sen.}m.$$

Si se nos diese un arco de un número de grados mayor que la circunferencia, y quisiésemos determinar sus líneas trigonométricas, procederíamos del modo siguiente. Supongamos que sea el arco de 1029°. Se dividirá 1029° por 360°; lo que da 2 por cociente y 309° por resta. Este resultado nos quiere decir, que dicho arco se compone de dos circunferencias y del arco de 309°. Luego, en virtud de lo que acabamos de manifestar, las líneas trigonométricas del arco de 1029° son las mismas que las del arco de 309°.

Para determinar ahora cuales son las del arco de 309°, observarémos que $309°=360°-51°$; y en virtud de la fórmula (γ'), tendrémos

$$\text{sen.}(360°-51°)=\text{sen.}(2\pi-m)=-\text{sen.}m=-\text{sen.}51°.$$

El mismo resultado hubiéramos obtenido, considerando que

$309°=270°+39°$; pues haciendo uso de la fórmula (γ), tendrémos

$$\text{sen.}(\tfrac{3}{2}\pi+m)=-\cos.m=-\cos.39°=-\text{sen.}51°.$$

Luego $\text{sen.}1029°=-\text{sen.}51°$.

Y si querémos llevar al estremo la determinacion, observarémos que el logaritmo del seno de 51° en las tablas, es 9,8905026, que corresponde al número 0,777146. Luego el seno de $1029°=-0,777146$ partes del radio tomado por unidad.

Si quisiéramos hallar directamente el coseno de 309°, la fórmula (δ') nos daría $\cos.(2\pi-m)=\cos.m=\cos.51°$; y de la ($\delta$) se sacaría $\cos.(\frac{3}{2}\pi+m)=\text{sen.}m=\text{sen.}39°=\cos.51°$; luego $\cos.1029°=\cos.51°$.

De las demas tórmulas se sacaría

$$\text{tang.}1029°=\frac{\text{sen.}1029°}{\cos.1029°}=\frac{-\text{sen.}51°}{\cos.51°}=-\text{tang.}51°.$$

Y del mismo modo procederíamos para la cotangense, secante y cosecante.

Si el arco dado fuese negativo, cambiaríamos el signo al seno; y tendríamos $\text{sen.}-1029°=\text{sen.}51°=0,777146$ partes del radio.

En los (§§ 9 y 10) hemos hallado

$$\text{sen.}(\pi+m)=-\text{sen.}m, \qquad \cos.(\pi+m)=-\cos.m;$$

y añadiendo á ambos arcos un número cualquiera de circunferencias, que espresarémos por $n\text{C}$ ó por $2k\pi$, se nos convertirán en

$$\text{sen.}((2k+1)\pi+m)=-\text{sen.}m, \quad \text{y} \quad \cos.((2k+1)\pi+m)=-\cos.m;$$

de donde debemos inferir, que si *teniendo los senos ó cosenos de un arco cualquiera, queremos espresar los senos ó cosenos de aquel arco, despues de añadirle ó quitarle un número ímpar de semicircunferencias, no tendrémos mas que mudar el signo á las espresadas líneas.*

En muchas ocasiones se necesita saber aisladamente el valor de las líneas trigonométricas de un número exacto de cuadrantes; por lo cual deducirémos aquí las de los senos y cosenos, de que dependen las demas.

Si el arco RA en vez de crecer, disminuye, su seno AB menguaría, y su coseno CB crecería; y si el arco RA se redujese á. o por confundirse el punto A con el R, tendríamos que el seno AB se reduciría á o, y el coseno OC se convertiría en OR=1; luego tendrémos $\text{sen.}0\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.}0=0$; $\cos.0\times\frac{1}{2}\pi=\cos.0=1$.

La misma fig. dá $\text{sen.}1\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.RX}=\text{OX}=1$; $\cos.1\times\frac{1}{2}\pi=\cos.\text{RX}=0$;
$\text{sen.}2\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.RXQ}=0$; $\cos.2\times\frac{1}{2}\pi=\cos.\text{RXQ}=-\text{OQ}=-1$;
$\text{sen.}3\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.RXQZ}=-\text{OZ}=-1$; $\cos.3\times\frac{1}{2}\pi=\cos.\text{RXQZ}=0$;
$\text{sen.}4\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.RXQZR}=0$; $\cos.4\times\frac{1}{2}\pi=\cos.\text{RXQZR}=\text{RO}=1$;
$\text{sen.}5\times\frac{1}{2}\pi=\text{sen.RXQZRX}=\text{XO}=1$; $\cos.5\times\frac{1}{2}\pi=\cos.\text{RXQZRX}=0$;

y así podríamos continuar: de lo cual se deduce, que *cuando el número de cuadrantes es ímpar, el coseno es cero; y cuando es par, el seno es cero.*

16 Ahora, si comparamos la posicion de dos arcos tales como RA y RD, que principien desde un mismo punto R, advertirémos que la posicion del uno es opuesta á la del otro, porque el uno se halla sobre el diámetro RQ y el otro debajo; luego el uno será negativo respecto del otro; sus senos AB, DC tambien guardan una posicion inversa; luego *el seno de un arco negativo es negativo.* No sucede así con el coseno, que, guardando la misma posicion en el arco RA que en el RD, se tiene que *el coseno de un arco negativo es el mismo que el del mismo arco positivo.*

De manera que sen.$-m=-$sen.m, cos.$-m=$cos.m, y de las demas fórmulas sacarémos que

$$\text{tang.}-m=\frac{\text{sen.}-m}{\text{cos.}-m}=\frac{-\text{sen.}m}{\text{cos.}m}=-\text{tang.}m,$$

$$\text{cot.}-m=\frac{1}{\text{tang.}-m}=\frac{1}{-\text{tang.}m}=-\text{cot.}m,$$

$$\text{sec.}-m=\frac{1}{\text{cos.}-m}=\frac{1}{\text{cos.}m}=\text{sec.}m,$$

$$\text{cosec.}-m=\frac{1}{\text{sen.}-m}=\frac{1}{-\text{sen.}m}=-\text{cosec.}m.$$

Luego, de todas las líneas trigonométricas de un arco, el seno, tangente, cotangente y cosecante mudan de signo cuando el arco; y permanecen los mismos signos para el coseno y secante (*).

(*) *En la nota del* (§ 637) *del Tomo* 1.º *hemos advertido, que un arco no puede tener sinó un solo seno, un solo coseno, una sola tangente, una sola cotangente, una sola secante, una sola cosecante, un solo senoverso, y un solo cosenoverso; porque todas estas líneas quedan determinadas por su misma definicion. Pero, tambien hemos manifestado allí, que una línea trigonométrica puede corresponder á muchos arcos, y hemos dado á conocer el modo con que Mr.* Cauchi *distingue un arco, cuando se quiere espresar que es uno cualquiera de los que corresponden á una línea trigonométrica dada, y cuando se quiere espresar el menor de todos estos arcos.*

Las fórmulas, que acabamos de sacar (§§ 7 al 16), *tambien nos dan á conocer, que toda línea trigonométrica puede corresponder á muchos arcos; y ahora nos proponemos determinar el infinito número de arcos que pueden corresponder á una línea trigonométrica dada.*

Principiemos por el seno, y supongamos que se quieran encontrar todos los arcos, que tengan por seno la cantidad A, *que suponemos conocida y menor que el radio; pues si fuese mayor que este, los arcos á que correspondiese todos serian imaginarios* (7).

Tómese una parte $Ok=A$ *en el radio* XO (fig. 1.ª); *por el punto* k *ti-*

§ 17 Las fórmulas que hemos sacado (I. 642) para el seno y coseno de la suma y diferencia de dos arcos, suponen que dichos arcos A, B y aun el que su suma sea menor que $\frac{1}{2}\pi$; tambien podríamos estender, con el auxilio de otra figura, dicha demostracion al caso en que la suma estuviese comprendida entre $\frac{1}{2}\pi$ y π, pero aun esto no sería sinó un caso particular; por lo que vamos á seguir otro rumbo, demostrando el siguiente:

§ Teor. *Si dichas fórmulas son verdaderas mientras que* A *y* B *sean menores que otras dos cantidades cualesquiera* a *y* b, *pero cuya suma no puede esceder á un cuadrante, lo serán tambien:* 1.° *para cuando permaneciendo* $B<$b, *se tenga* $A<\frac{1}{2}\pi+$a; 2.° *cuando se tenga* $B<\frac{1}{2}\pi+$b *y* $A<\frac{1}{2}\pi+$a, *ó* $B<$b *y* $A<\pi+$a; 3.° *cuando* $B<\frac{1}{2}\pi+$b

---

rese la ss′ *paralela con el diámetro* RQ, *y se verificará, que los arcos que tendrán por seno la cantidad* A, *serán todos los que terminen en* s *y* s′: *y no ningun otro; porque únicamente los senos* sp *y* s′p′ *son los que son iguales con* $Ok=A$.

Si espresamos el arco Rs *por* α, *el* $RsXs'$ *será igual con* $RsXs'Q-s'Q=\pi-\alpha$; *y los arcos positivos que tendrán por seno la cantidad* A, *estarán comprendidos en estos dos valores, aumentados* (§ 15) *en un número cualquiera de circunferencias, que espresarémos por* nC; *ó como una circunferencia equivale á* 2π, *un número cualquiera de circunferencias estará espresado por* $2n\pi$. *Luego tendrémos que los arcos positivos que cumplirán con la circunstancia de tener por seno la cantidad* $A=Ok$, *estarán comprendidos en estas espresiones* $2n\pi+\alpha$ *y* $2n\pi+\pi-\alpha=(2n+1)\pi-\alpha$.

Por consiguiente, dando á n *todos los valores enteros que se quieran, incluso tambien el cero en estas dos espresiones, se tendrán los arcos buscados, que sean positivos.*

Para encontrar los arcos negativos, que tienen por seno la cantidad $A=Ok=sp=s'p'$, *observarémos, que el arco negativo* $RZQs'$, *que tiene tambien por seno á* $s'p'=kO=A$, *está espresado por* $-\pi-\alpha$; *y el* $RZQXs$, *que tambien tiene por seno* $sp=kO=A$, *está espresado por* $-2\pi+\alpha=-(2\pi-\alpha)$; *y añadiendo á estas dos espresiones un número cualquiera de circunferencias negativas, que espresarémos por* $-nC=-2n\pi$, *resultará que todos los arcos negativos que tendrán por seno la cantidad* $A=kO$, *estarán comprendidos en las dos espresiones siguientes,*

$$-\pi-\alpha-2n\pi=-\alpha-(2n+1)\pi; \quad -2\pi+\alpha-2n\pi;$$

y como n *representa un número entero cualquiera, la cantidad* $-2\pi-2n\pi$, *la podrémos considerar espresada por* $-2n\pi$: *pues que siendo* -2π *una circunferencia, está comprendida en* $-2n\pi$ *que espresa un número cualquiera de circunferencias; por lo cual todos los mencionados arcos estarán espresados por* $-\alpha-(2n+1)\pi$, $-2n\pi+\alpha$.

Resulta, pues, que todos los arcos que tienen por seno la cantidad A, *son en esta forma; los positivos son todos los valores que pueden tener las dos es-*

y $A<\pi+a$, *ó* $B<b$ *y* $A<\frac{3}{2}\pi+a$; *y en general para todos los valores que puedan tener los arcos* A *y* B, *continuando añadiendo cuadrantes á la* A *ó á la* B *solamente, ó mejor á la* A *y á la* B.

1.° En efecto, si damos á la A la estension de $\frac{1}{2}\pi$ mas, de manera que se tenga $A<\frac{1}{2}\pi+a$, podrémos suponer $A=\frac{1}{2}\pi+m$, que dará $m<a$, y de consiguiente $m+B<\frac{1}{2}\pi$; por lo que (7 y 8)

$$\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}(\tfrac{1}{2}\pi+m+B)=\cos.(m+B)$$

$$\text{y}\quad \cos.(A+B)=\cos.(\tfrac{1}{2}\pi+m+B)=-\text{sen.}(m+B),$$

Y como $m+B<\frac{1}{2}\pi$, estas fórmulas se hallan en el caso de las demostradas (I. 642), y tendrémos:

---

presiones $2n\pi+\alpha$ *y* $(2n+1)\pi-\alpha$, *dando á* n *los valores* 0,1,2,3,4,5, *etc.*

Y los negativos, los que están comprendidos en estas dos espresiones $-\alpha-(2n+1)\pi$, $-2n\pi+\alpha$, *dando á* n *todos los valores posibles* 0, 1, 2, 3, 4, *etc.*

Estas cuatro espresiones se pueden reducir á dos, observando que el arco α, *se añade á los múltiplos pares de* π: *y se quita, ó se pone negativo, cuando los múltiplos de* π *son impares. Luego si hacemos* $k=\pm n$, *esto es, si representamos por* k *un número entero cualquiera positivo ó negativo, que tambien podrá ser cero, los arcos tanto positivos como negativos que tienen por seno la cantidad* A *son los comprendidos en las dos espresiones*

$$2k\pi+\alpha, \qquad (2k+1)\pi-\alpha \ (a).$$

Si la cantidad A *fuese negativa, se deberia tomar en la* OZ *una parte* $Ok'=A$. *Entónces todos los arcos terminados en* t *y en* t' *son los que corresponden al mismo seno* $-A$.

Hagamos $RXQt'=\alpha$, *y tendrémos* $RXQZt=3\pi-\alpha$; *porque* $RXQZt=2\pi-Rt=2\pi-t'Q$; *y como* $t'Q=RXQt'-RXQ=\alpha-\pi$, *se tendrá*

$$RXQZt=2\pi-\alpha+\pi=3\pi-\alpha.$$

Añadiendo á estos valores un número cualquiera de circunferencias espresado por $2k\pi$, *resultará que los arcos positivos que tendrán por seno la cantidad negativa* $-A$, *serán los comprendidos en estas dos espresiones*

$$2k\pi+\alpha, \text{ y } 2k\pi+3\pi-\alpha;$$

y como 3π *equivale á una circunferencia y ademas una semicircunferencia, y la circunferencia la podemos suponer incluida en* $2k\pi$, *á causa de que* k *representa un número cualquiera, tendrémos que á la última espresion le podemos dar esta forma* $(2k+1)\pi-\alpha$; *con lo cual se tienen las mismas dos espresiones* (a).

Los arcos negativos que tienen por seno á la cantidad $-A=Ok'$ *serán los terminados en* t *y en* t'; *y haciendo* $Rt=\alpha$, *se tendrá*

$$RtZt'=RZQ-Qt'=\pi-\alpha;$$

y añadiendo $2k\pi$ *á cada una de estas espresiones, se nos convertirán en*

$$2k\pi+\alpha, \text{ y } 2k\pi+\pi-\alpha=(2k+1)\pi-\alpha;$$

que son las (a); *en las cuales no debemos olvidar que* α *espresa el menor de todos los arcos que tengan el mismo seno.*

Pasemos ahora á encontrar todos los arcos que corresponden á un mismo

::

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B) = \text{cos.}(m+B) = \text{cos.}m \times \text{cos.}B - \text{sen.}m \times \text{sen.}B \\ \text{cos.}(A+B) = -\text{sen.}(m+B) = -\text{sen.}m \times \text{cos.}B - \text{sen.}B \times \text{cos.}m. \end{cases}$$

Ahora, de la ecuacion $A = \frac{1}{2}\pi + m$, se saca (7 y 8)

$\text{sen.}A = \text{sen.}(\frac{1}{2}\pi + m) = \text{cos.}m$, y $\text{cos.}A = \text{cos.}(\frac{1}{2}\pi + m) = -\text{sen.}m$, ó $\text{sen.}m = -\text{cos.}A$; y sustituyendo estos velores de sen.m y cos.m; en las dos ecuaciones anteriores, se convertirán en

$$\begin{cases} \text{sen.}(A+B) = \text{sen.}A \times \text{cos.}B + \text{sen.}B \times \text{cos.}A \\ \text{cos.}(A+B) = \text{cos.}A \times \text{cos.}B - \text{sen.}A \times \text{sen.}B. \end{cases}$$

Donde vemos, que las fórmulas demostradas para cuando la suma de los dos arcos no componían un cuadrante, son tambien verdaderas para cuando la suma de dichos arcos vale mas de un cuadrante y ménos de dos.

{ 2.° Sea ahora $A < \frac{1}{2}\pi + a$ y $B < \frac{1}{2}\pi + b$; y haciendo $A = \frac{1}{2}\pi + m$, y

---

coseno dado, que supondrémos espresado por A, y que A sea menor que el radio.

Si A es una cantidad positiva, tomarémos en el radio OR una parte Op$=A$, *y en el punto* p *levantarémos la perpendicular* spt; *y los valores de los diferentes arcos, tanto positivos como negativos terminados en* s *y en* t, *serán los que tengan por coseno la cantidad* $A =$ Op.

Para determinarlos, harémos $Rs = a$; *lo que dará*

$$RXQZt = RXQZR - Rt = 2\pi - \alpha;$$

y añadiendo á estas dos espresiones un número cualquiera de circunferencias, que espresarémos por $2k\pi$, *tendrémos que todos los arcos buscados serán los comprendidos en las dos espresiones* $2k\pi + \alpha$, *y* $2k\pi + 2\pi - \alpha$; *pero como* 2π *espresa una circunferencia, y* k *un número entero cualquiera, podemos considerar á* 2π *comprendido en* $2k\pi$; *y resulta que todos los arcos positivos que tienen el mismo coseno, se hallan comprendidos en las dos espresiones siguientes* $2k\pi + \alpha$, *ó* $2k\pi - \alpha$ (*b*); *ó en esta sola* $2k\pi \pm \alpha$ (c).

Para indagar los arcos negativos que corresponden al mismo coseno, harémos $Rt = \alpha$: *lo que da* $RZQXs = 2\pi - \alpha$; *y añadiendo* $2k\pi$ *á ambas, resultan las* (b).

Si la cantidad A, que se diese por coseno fuese negativa, esto es, estuviese espresada por $-A$, *se tomaría en OQ una parte* Op′ *igual con A; y tirando por* p′ *una perpendicular* s′p′t′, *resultará que los arcos que tienen por coseno á* $-A$, *serán los que terminen en* s′ *y en* t′.

Y haciendo $RXs' = \alpha$, *tendrémos que* $RXQt' = RXQZR - t'ZR = 2\pi - \alpha$; *lo cual nos conduce á las mismas espresiones* (b).

Los arcos negativos, que tienen el mismo coseno negativo, son los que terminan en t′ *y en* s′; *haciendo* $RZt' = \alpha$, *resultará* $RZQs' = 2\pi - \alpha$, *que conducen á las mismas espresiones* (b).

Por el mismo procedimiento llegariamos á obtener todos los arcos que correspondian á las demas líneas trigonométricas.

$B=\frac{1}{2}\pi+n$, se deducirá $m+n<a+b$, y con mas razon $m+n<\frac{1}{2}\pi$; y por lo dicho (9 y 10) se tendrá:

$$\begin{cases}\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}(\frac{1}{2}\pi+m+\frac{1}{2}\pi+n)=\text{sen.}(\pi+m+n)=-\text{sen.}(m+n)\\ \text{cos.}(A+B)=\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi+m+\frac{1}{2}\pi+n)=\text{cos.}(\pi+m+n)=-\text{cos.}(m+n);\end{cases}$$

y como $m+n<\frac{1}{2}\pi$, estas fórmulas se hallan en el caso de las demostradas (*I.* 642), y tendrémos

$$\begin{cases}\text{sen.}(A+B)=-\text{sen.}(m+n)=-\text{sen.}m\times\text{cos.}n-\text{sen.}n\times\text{cos.}m\\ \text{cos.}(A+B)=-\text{cos.}(m+n)=-\text{cos.}m\times\text{cos.}n+\text{sen.}m\times\text{sen.}n.\end{cases}$$

Ahora, de las ecuaciones $A=\frac{1}{2}\pi+m$, $B=\frac{1}{2}\pi+n$, se saca (7 y 8) $\text{sen.}A=\text{cos.}m$, $\text{cos.}A=-\text{sen.}m$; $\text{sen.}B=\text{cos.}n$, $\text{cos.}B=-\text{sen.}n$; y sustituyendo estos valores de $\text{sen.}m$, $\text{cos.}m$, $\text{sen.}n$, $\text{cos.}n$ en las ecuaciones anteriores, resultará

$$\begin{cases}\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}A\times\text{cos.}B+\text{sen.}B\times\text{cos.}A\\ \text{cos.}(A+B)=\text{cos.}A\times\text{cos.}B-\text{sen.}A\times\text{sen.}B.\end{cases}$$

Donde se ven demostradas las mismas fórmulas para cuando la suma de los arcos A y B vale mas de dos cuadrantes y ménos de tres.

Por un procedimiento análogo, las demostraríamos para cuando se tuviese $A<\pi+a$ y $B<\frac{1}{2}\pi+b$; despues para cuando $A<\pi+a$, $B<\pi+b$; $A<\frac{3}{2}\pi+a$, $B<\pi+b$; $A<\frac{3}{2}\pi+a$, $B<\frac{3}{2}\pi+b$;..... $A<\alpha\pi+a$, $B<\mathcal{C}\pi+b$; siendo α y $\mathcal{C}$ números cualesquiera. Luego dichas fórmulas que estaban demostradas (*I.* 642) solo para cuando $A+B<\frac{1}{2}\pi$, serán verdaderas para todos los valores que se quieran dar á A y B, que era L. Q. D. D. (*).

(*) *Para completar esta demostracion, conviene hacer ver que dichas fórmulas son tambien verdaderas para todos los valores que tengan los arcos* A *y* B, *quitando cuadrantes á la* A *solamente, á la* B *solamente, ó simultáneamente á la* A *y á la* B.

Para demostrarlo, supongamos que $A<-\frac{1}{2}\pi+a$; *y que sea* $A=-\frac{1}{2}\pi+m$, *que dará* $m<a$; *y de consiguiente* $m+B<\frac{1}{2}\pi$; *por lo que*

$\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}(-\frac{1}{2}\pi+m+B)=\text{sen.}-(\frac{1}{2}\pi-(m+B))=$(§ 16 *y ec.* α) $-\text{cos.}(m+B)$, *y* $\text{cos.}(A+B)=\text{cos.}(-\frac{1}{2}\pi+m+B)=$(§ 16) $\text{cos.}(\frac{1}{2}\pi-(m+B))=$(*ec.* $\mathcal{C}$) $\text{sen.}(m+B)$.

Y como $m+B<\frac{1}{2}\pi$, *estas fórmulas se hallan tambien en el caso de las demostradas (I.* 642*), y tendrémos*

$$\text{sen.}(A+B)=-\text{cos.}(m+B)=-\text{cos.}m\text{cos.}B+\text{sen.}m\text{sen.}B,$$
$$\text{cos.}(A+B)=\text{sen.}(m+B)=\text{sen.}m\text{cos.}B+\text{sen.}B\text{cos.}m.$$

Ahora, de la ecuacion $A=-\frac{1}{2}\pi+m$, *se saca (7) y (8)*

$$\text{sen.}A=\text{sen.}(-\tfrac{1}{2}\pi+m)=\text{sen.}-(\tfrac{1}{2}\pi-m)=-\text{sen.}(\tfrac{1}{2}\pi-m)=-\text{cos.}m,\ y$$
$$\text{cos.}A=\text{cos}\,(-\tfrac{1}{2}\pi+m)=\text{cos.}(\tfrac{1}{2}\pi-m)=\text{sen.}m;$$

y sustituyendo estos valores de $\text{cos.}m$ *y* $\text{sen.}m$ *en las dos ecuaciones anteriores, se convierten en*

$$\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}A\text{cos.}B+\text{sen.}B\text{cos.}A$$
$$\text{cos.}(A+B)=\text{cos.}A\text{cos.}B-\text{sen.}A\text{sen.}B;$$

y análogamente podríamos continuar.

Todo esto comprueba, que cuando por consideraciones geométricas se deduce una fórmula analítica, puede darse á esta toda la generalidad que permite la Análisis, aunque no se puedan espresar por figuras las trasformaciones que se

{ 18 La generalidad de las fórmulas de la diferencia, la deduciré-
mos de las que hemos obtenido ya para la suma. Con este objeto, ob-
servarémos que añadiendo y quitando B á la cantidad A, no se al-
terará, y tendrémos

$$\text{y} \quad \begin{array}{l} \text{sen.}A = \text{sen.}[(A-B)+B] = \text{sen.}(A-B)\times\text{cos.}B+\text{sen.}B\times\text{cos.}(A-B) \\ \text{cos.}A = \text{cos.}[(A-B)+B] = \text{cos.}(A-\text{B})\times\text{cos.}B-\text{sen.}(A-B)\times\text{sen.}B. \end{array}$$

---

dan á las fórmulas por la vía analitica. Pero, siempre que se pueda, se debn hacer las consideraciones oportunas, para manifestar la identidad de los resultados deducidos por las figuras geométricas con los obtenidos analiticamente. Y sin separarnos del asunto que nos ocupa, citarémos un caso de los mas importantes, y es el que sigue.

Para sacar las fórmulas de la tangente, secante, cotangente y cosecante, nos hemos valido (I. 633*) de varios triángulos; pero cuando el arco es de un número exacto de cuadrantes, como de* 0°, 90°, 180°, 270°, 360°, *etc. no existen los espresados triángulos, de que se deducen dichas fórmulas; porque sus lados ó caen los unos sobre los otros y se confunden, ó resultan paralelos y no se encuentran; y para que no se dude de que las fórmulas son generales, y de que eonvienen tambien á los arcos de un número exacto de cuadrantes, hemos tenido buen cuidado, en el (§* 635 *I) de determinar primero las lineas trigonométricas del arco de* 90° *geométricamente con arreglo á su definicion; y habiendo despues hallado sus valores por las fórmulas, hemos encontrado la mas exacta conformidad en los resultados.*

Debemos aun decir algo mas sobre este particular. Mr. Lefebure de Fourcy, *en la quinta edicion de sus Elementos de Trigonometría, hecha en* 1841, *dice página* 16: "*Se debe notar que el valor de* tang $90° = \infty$ *debe tomarse con el signo de ambigüedad* $\pm$; *porque es á un mismo tiempo límite de las tangentes positivas que se obtienen haciendo crecer el arco de* 0° *á* 90°; *y limite de las tangentes negativas que se obtienen haciéndole decrecer de* 180° *á* 90°. *La misma observacion se aplica á las otras lineas trigonométricas susceptibles de venir á ser infinitas*"; *á lo cual debemos añadir nosotros, que tambien se debe decir lo mismo respecto de las lineas que llegan á ser* 0; *pues el seno siendo negativo, en el cuarto cuadrante, al paso que crece el arco, va disminuyendo su valor absoluto; y cuando el arco llega á ser toda la circunferencia ó* 360°, *el valor absoluto del seno es* cero *exactamente, con arreglo á su definicion; pues el principio y el fin del arco ee confunden en un solo punto; pero como este* cero *es el valor á que se van acercando los valores negativos que van teniendo los senos, debe considerarse el cero que aqui resulta, como negativo; y decir que aunque el seno de* 0° *no hay duda en que con arreglo á la definicion es exactamente* 0 *positivo; el seno de* 360°, *aunque tiene por valor absoluto el* cero ó nada, *se le debe considerar con el signo* —. *Y por lo mismo en cualquier parte que se tenga cero para el seno de un arco, le deberémos señalar con* $\pm$.

Lo mismo sucede en el seno de 180°, *que con arreglo á su definicion, es cero positivo, como todos los senos de los grados intermedios entre* 0 *y* 180°. *Mas, si considerámos los arcos negativos, todos sus senos son negativos; y al pa-*

En estas ecuaciones tenemos las dos incógnitas sen.$(A-B)$, y cos.$(A-B)$, que despejarémos por el método de sustitucion, del modo siguiente. La primera dá $\text{sen.}(A-B)=\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B\times\text{cos.}(A-B)}{\text{cos.}B}$, cuyo valor sustituido en la segunda, dará

$$\text{cos.}A=\text{cos.}(A-B)\times\text{cos.}B-\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B\times\text{cos.}(A-B)}{\text{cos.}B}\times\text{sen.}B,$$

en la cual, quitando el divisor, será

$$\text{cos.}A\times\text{cos.}B=\text{cos.}(A-B)\times\text{cos.}B^2-\text{sen.}A\times\text{sen.}B+\text{sen.}B^2\times\text{cos.}(A-B)\ (*);$$

que dejando en un solo miembro todos los términos donde hay cos.$(A-B)$, y descomponiendo en factores, será

$$\text{cos.}(A-B)(\text{cos.}B^2+\text{sen.}B^2)=\text{cos.}A\times\text{cos.}B+\text{sen.}A\times\text{sen.}B,$$

de donde sale, observando que $\text{cos.}B^2+\text{sen.}B^2=R^2=1$;

$$\text{cos.}(A-B)=\text{cos.}A\times\text{cos.}B+\text{sen.}A\times\text{sen.}B;$$

cuyo valor sustituido en el de sen.$(A-B)$, dará

$$\text{sen.}(A-B)=\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B\times\text{cos.}A\times\text{cos.}B-\text{sen.}A\times\text{sen.}B^2}{\text{cos.}B}\ \ldots\ldots$$

$$=\frac{\text{sen.}A(1-\text{sen.}B^2)-\text{sen.}B.\text{cos.}A.\text{cos.}B}{\text{cos.}B}=\frac{\text{sen.}A.\text{cos.}B^2-\text{sen.}B.\text{cos.}A.\text{cos.}B}{\text{cos.}B}$$

$$=\text{sen.}A\times\text{cos.}B-\text{sen.}B\times\text{cos.}A.$$

{ Luego estas fórmulas, y todas las que hemos deducido ántes para las demas líneas trigonométricas, serán verdaderas respecto de cualesquiera valores de A y B, que era L. Q. D. D.

{ 19 Estas fórmulas suministran una multitud de consecuencias im-

---

so que el arco se va acercando á -180°, *el seno se va acercando á tener* cero *por valor absoluto, pero este* cero *será de la misma naturaleza que las cantidades que se le acercan; luego será negativo; y resulta probado en general, que cuando un seno tiene por valor absoluto* cero, *debemos considerarle con el signo de ambigüedad, y señalarle por* ± 0.

Todo esto va conforme con lo que tenemos añadido al § 480, *en la segunda edicion del Tomo* 2.° *parte* 2.ª *que contiene el Cálculo Diferencial é Integral; donde por investigaciones propias, tanto analíticas como geométricas, hemos deducido: que* toda espresion que por valores sucesivos de la variable cambia de signo, en el valor de la variable en que se verifica este tránsito, se puede y debe considerar el valor que recibe esta espresion, con el doble signo $\pm$.

Y lo que acabamos de copiar de Mr. Lefebure de Fourcy, *y que no hemos visto en ningun otro autor, comprueba la importancia de la nueva doctrina que hemos añadido al citado* § 480 *del Cálculo Diferencial é Integral.*

(*) *La espresion* cos.B^2 *quiere decir, que el coseno del arco* B *se debe elevar al cuadrado, y es lo mismo que* $(\text{cos.B})^2$; *tambien se suele indicar de este modo* $\text{cos.}^2\text{B}$; *lo mismo decimos del* sen.B^2, tang.B^2, *etc.*

portantes, entre las cuales vamos á poner las de mayor trascendencia.

Primeramente, si representamos por A' y B' dos arcos cualesquiera, tendrémos $\begin{cases} \cos.(A'+B')=\cos.A'\times\cos.B'-\text{sen.}A'\times\text{sen.}B' \\ \cos.(A'-B')=\cos.A'\times\cos.B'+\text{sen.}A'\times\text{sen.}B'. \end{cases}$

Si restamos la 1ª de la 2ª, y dividimos por 2, sacarémos

$$\text{sen.}A'\times\text{sen.}B'=\tfrac{1}{2}\cos.(A'-B')-\tfrac{1}{2}\cos.(A'+B')\ (1);$$

y si la sumamos, nos resultará despues de dividir por 2,

$$\cos.A'\times\cos.B'=\tfrac{1}{2}\cos.(A'-B')+\tfrac{1}{2}\cos.(A'+B')\ (2);$$

en las cuales suponiendo $A'=B'=\frac{1}{2}A$, será

$$(\text{sen.}\tfrac{1}{2}A)^2=\tfrac{1}{2}(\cos.0-\cos.A)=\tfrac{1}{2}(1-\cos.A)\ (3);$$
$$(\cos.\tfrac{1}{2}A)^2=\tfrac{1}{2}(\cos.0+\cos.A)=\tfrac{1}{2}(1+\cos.A)\ (4)\ (*),$$

(*) *Las fórmulas trigonométricas son tantas, y tan fecundas sus aplicaciones, que merecen la mas importante consideracion. En el texto hemos puesto las mas principales, ordenándolas de modo que se deduzcan las unas de las otras con facilidad, á fin de favorecer en cuanto sea posible las habitudes de la enseñanza. Y nos proponemos ahora en esta nota hacer algunas reflexiones acerca de las fórmulas del texto, para disipar y aclarar ciertas dudas que podrian ocurrir.*

En el (§ 641 I), suponiendo conocido el arco A, *hemos hallado para el seno de su mitad* $\text{sen.}\frac{1}{2}\text{A}=\frac{1}{2}\sqrt{2-2\sqrt{1-\text{sen.}^2\text{A}}}$; *que introduciendo el* $\frac{1}{2}$ *debajo del radical es* $\text{sen.}\frac{1}{2}\text{A}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}^2\text{A}}}$ (m);

ó poniendo cos.A *en vez de* $\sqrt{1-\text{sen.}^2\text{A}}$, *se tendrá*

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\text{A}=\sqrt{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos.\text{A}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(1-\cos.\text{A})}\ \ (\text{n}).$$

Allí no hemos tomado en consideracion lo que se ha demostrado en el Álgebra (I 200), á saber: que cuando se estrae una raiz de grado par, se debe poner al radical el signo de ambigüedad $\pm$. *Entónces se prescindió de esto, porque á nada conducia para el objeto que nos proponiamos, que era el manifestar la formacion de las tablas de las líneas trigonométricas. Y el ocuparse allí de dicho signo, mas bien nos hubiera separado del objeto, y distraido, sin necesidad ni utilidad, de lo que debia llamar entónces nuestra consideracion.*

Mas ahora, que nos ocupamos del desarrollo de las fórmulas trigonométricas, no estará demas el que tomemos en consideracion dicho doble signo $\pm$, *y el que manifestemos su significado, patentizando la exacta conformidad de los resultados geométricos con los analíticos ó algebraicos.*

*La (ec. n) es una trasformacion de la (*m*), que se obtuvo en el parage citado, por una figura geométrica; á la ecuacion (*3*) del texto hemos llegado por trasformaciones algebráicas ó analíticas; y si estraemos la raiz cuadrada de la espresada (ec.* 3*), atendiendo rigorosamente á los signos, tendrémos*

$\text{sen.}\frac{1}{2}\text{A}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos.\text{A})}$, *que es la misma que la ecuacion (*n*).*

En el parage citado, no hemos hallado fórmula para el coseno de la mitad de un arco, porque allí no nos hacia al caso; pero si estraemos la raiz cuadra-

dividiendo la primera de estas ecuaciones por la segunda, será despues de dividir por $\frac{1}{2}$

$$\frac{1-\cos.A}{1+\cos.A}=\frac{(\text{sen.}\frac{1}{2}A)^2}{(\cos.\frac{1}{2}A)^2}=(\text{tang.}\frac{1}{2}A)^2 \quad (5);$$

---

da de la (ec. 4) del texto, tendrémos $\cos\frac{1}{2}A=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos.A)}$.

Y ahora nos proponemos demostrar la necesidad que hay de poner el signo $\pm$ *en estas fórmulas.*

Para esto, debemos observar que en estos valores no entra el arco, sinó solamente su coseno; de manera, que las (ecs. 3 y 4) deben dar al mismo tiempo el seno y el coseno de todos los arcos que tienen el mismo coseno. Estos arcos se hallan contenidos en la espresion ((c) nota del § 16), que es $2k\pi\pm\alpha$; *en la cual* α *designa el mas pequeño arco positivo correspondiente al coseno dado;* π *la semicircunferencia, y* k *un número entero cualquiera positivo y negativo, podiendo tambien ser* cero. *Luego, se debe hallar para* $\text{sen.}\frac{1}{2}A$ *y* $\cos.\frac{1}{2}A$, *los valores de los arcos comprendidos en la mitad de dicha espresion, que son*

$$\text{sen.}(k\pi\pm\tfrac{1}{2}\alpha) \quad y \quad \cos.(k\pi\pm\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Si k *es par,* $k\pi$ *será un múltiplo de la circunferencia ó de* 360°, *y se podrá suprimir sin alterar ni el seno, ni el coseno (§ 15), y resultará*

$$\text{sen.}\pm\tfrac{1}{2}\alpha=\pm\text{sen}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad y \quad \cos.\pm\tfrac{1}{2}\alpha=\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Si k *es impar, tambien se podrá suprimir* $k\pi$; *pero, será necesario (§ 15) mudar los signos del seno y del coseno; y se tendrá*

$$-\text{sen.}(\pm\tfrac{1}{2}\alpha)=\mp\text{sen.}\tfrac{1}{2}\alpha, \quad -\cos.(\pm\tfrac{1}{2}\alpha)=-\cos.\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Donde se ve que se debian tener en efecto dos valores iguales y de signos contrarios para $\text{sen.}\frac{1}{2}\alpha$, *y lo mismo para* $\cos.\frac{1}{2}\alpha$.

Si en vez de cos.A, *se pone su valor* $\sqrt{1-\text{sen.}^2A}$ *en dichas fórmulas (3 y 4), resultarían ecuaciones como la (m) para el seno y el coseno; las cuales contendrían dos radicales del segundo grado; por lo que los dos valores que resultan del signo* $\pm$ *que debe afectar al radical interior, combinados con los dos signos del* $\pm$ *del radical esterior, darian cuatro valores para*

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A \quad y \quad \cos.\tfrac{1}{2}A.$$

Para no dejar nada que desear, propongámonos hallar los cuatro valores que da la fórmula (m), que no es mas que una trasformacion de la (w) del (§ 641 I.), para el seno de la mitad, suponiendo que se dé conocido el seno de 30°, *que es la mitad del radio, ó* $\frac{1}{2}$ *ó* 0,5, *y se tendrá*

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{sen.}^230^\circ}}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}}}=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\mp\tfrac{1}{4}\sqrt{3}}$$

$$=\pm\sqrt{0,5\mp0,4330127}.$$

Tomando los signos superiores tanto dentro como fuera del radical, se tendrá para el primer valor

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}A=+\sqrt{0,5-0,4330127}=+\sqrt{0,0669873}=+0,2588;$$

que será el primer valor.

El segundo valor resultará de tomar el mismo signo — de debajo del radi-

despejando cos.A en la (3), se tendrá cos.A=1—2(sen.$\frac{1}{2}A$)^2 (3′).

De sumar y restar las $\begin{cases} \text{sen.}(A'+B')=\text{sen.}A'\times\text{cos.}B'+\text{sen.}B'\times\text{cos.}A' \\ \text{sen.}(A'-B')=\text{sen.}A'\times\text{cos.}B'-\text{sen.}B'\times\text{cos.}A' \end{cases}$

nos resulta despues de dividir por 2

---

cal, y el signo — de fuéra del radical; por manera que será —0,2588.

El tercer valor resulta de tomar el signo + *de debajo del radical, y el* + *de fuera; y es* $\sqrt{0,9330127}$=0,9659.

El cuarto valor resulta de tomar el signo + *dentro del radical, y el signo* — *de fuera; lo que da* —0,9659.

Ahora nos falta saber cual de estos cuatro valores es el seno pedido. Para esto, debemos observar, que en el arco de 45° *el seno y el coseno son iguales; y la (ec.* (d) § 633 *I.), da* 2sen.^{2}45°=2cos.^{2}45°=1; *de la cual se deduce*

sen.^{2}45°=cos.^{2}45°=$\frac{1}{2}$.

*Ahora bien, la cantidad que hay debajo del radical de la ecuacion (*m*), lo mas que puede llegar á ser es* 1, *para que estrayendo la raiz cuadrada lo mas que pueda dar sea* 1, *que es el valor que puede tener el mayor seno; luego no tenemos mas que observar el valor que hay debajo del radical; si es* $<\frac{1}{2}$, *el arco deberá ser menor que* 45°; *si lo que hay debajo del radical es mayor que* $\frac{1}{2}$, *el arco será mayor que* 45°; *y si es igual con* $\frac{1}{2}$, *el arco será de* 45°. *Y como lo que hay debajo del radical en el primer valor es menor que* $\frac{1}{2}$=0,5, *resulta que* $\frac{1}{2}$A *debe ser menor que* 45°; *y como el número* 0,2588 *que resulta, contiene los cuatro primeros guarismos á que corresponde el logaritmo del seno de* 15°, *inferimos que el primer valor que se obtiene para* sen.$\frac{1}{2}$A *es* 15°.

Como el segundo valor es igual con el primero sin mas diferencia que el ser negativo, el segundo valor de sen.$\frac{1}{2}$A *será* —15°.

Para investigar cual es el tercer valor, observarémos que el número 0,9330127, *que hay debajo del radical, es mayor que* $\frac{1}{2}$ *ó* 0,5; *por consiguiente, el arco* $\frac{1}{2}$A *deberá ser mayor que* 45°; *y como el número* 0,9659, *que se obtiene para el seno, está compuesto de los cuatro primeros guarismos decimales que corresponden al logaritmo del seno de* 75°, *resulta que el tercer valor de* sen.$\frac{1}{2}$A *corresponde al arco de* 75°.

El cuarto valor solo se diferencia del tercero en que tiene el signo —; luego corresponderá al arco de —75°.

Lo mismo se podrá investigar respecto del coseno, etc.

Todo esto, por otra parte, nos hace concebir la mas sublime idéa no solo de la exactitud incomparable de las Matemáticas, sinó de su fecundidad en advertirnos cuanto tiene relacion con el objeto que nos ocupa.

En el simple despejo de incógnitas, al resolver las ecuaciones de primer grado, el Álgebra nos da siempre el número ó los números que buscamos; y cuando no hay números que cumplan con la condicion exacta que se pide, nos manifiesta si los hay que satisfagan á aquella cuestion en sentido inverso. Despues, en las ecuaciones superiores al primer grado, cuando se pide un número que satisfaga á ciertas condiciones, el Álgebra nos da tantos como puedan satisfacer á dichas condiciones, que, por lo general, son

$$\text{sen.}A'\times\text{cos.}B'=\tfrac{1}{2}\text{sen.}(A'+B')+\tfrac{1}{2}\text{sen.}(A'-B')\ (6),$$
$$\text{cos.}A'\times\text{sen.}B'=\tfrac{1}{2}\text{sen.}(A'+B')-\tfrac{1}{2}\text{sen.}(A'-B')\ (7),$$

en las cuales haciendo $A'+B'=A$, y $A'-B'=B$, que dan (I. 229) $A'=\frac{1}{2}(A+B)$, $B'=\frac{1}{2}(A-B)$, nos resultará despues de quitar los divisores y poner por primeros miembros los segundos

$$\text{sen.}A+\text{sen.}B=2\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (8);$$
$$\text{sen.}A-\text{sen.}B=2\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (9);$$

y haciendo las mismas sustituciones en las (2) y (1), darán

$$\text{cos.}A+\text{cos.}B=2\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (10);$$
$$\text{cos.}B-\text{cos.}A=2\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (11).$$

Dividiendo cada una de estas cuatro últimas por las que tenga debajo de sí, nos resulta despues de simplificar

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\text{sen.}A-\text{sen.}B}=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\times\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(A+B)}{\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)}\ (12);$$

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\text{cos.}A+\text{cos.}B}=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B)\ (13);$$

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\text{cos.}B-\text{cos.}A}=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (14);$$

(que en el caso de ser $L=0$, se convierten en

$$1=1;\quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}A=\frac{\text{sen.}A}{1+\text{cos.}A};\quad \text{cot.}\tfrac{1}{2}A=\frac{\text{sen.}A}{1-\text{cos.}A};$$

$$\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B}{\text{cos.}A+\text{cos.}B}=\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A-B)\ (15);$$

$$\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B}{\text{cos.}B-\text{cos.}A}=\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}=\text{cot.}\tfrac{1}{2}(A+B)\ (16);$$

$$\frac{\text{cos.}A+\text{cos.}B}{\text{cos.}B-\text{cos.}A}=\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{cos.}\frac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(A+B)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(A-B)}=\text{cot.}\frac{A+B}{2}\times\text{cot.}\frac{A-B}{2}\ (17);$$

---

tantos como unidades tiene el grado de la ecuacion. Y cuando no existe ningun número que satisfaga á las condiciones pedidas, nos lo manifiesta con valores imaginarios. Pues aqui se ve aun mas; y es que aunque el arco de 30° no tiene mas de una mitad, que es 15°, el Álgebra nos manifiesta que hay otros tres arcos que corresponden á la mitad de los arcos que tienen el mismo seno que el de 30°.

::

que como $\text{tang}=\frac{1}{\text{cot.}}$, y $\text{cot.}=\frac{1}{\text{tang.}}$, resulta que podrémos igualar las espresiones de la tangente y cotangente de un arco, con tal que trastornemos una de ellas; y así será (13) y (16)

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\cos.A+\cos.B}=\frac{\cos.B-\cos.A}{\text{sen.}A-\text{sen.}B} \quad (18);$$

y las (12) y 17) multiplicadas, y la (12) multiplicada por la (17) invertida, dan (observando que de $tang.=\frac{1}{cot.}$, sale $tang.\times cot.=1$)

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\text{sen.}A-\text{sen.}B}\times\frac{\cos.A+\cos.B}{\cos.B-\cos.A}=\text{cot.}^2\tfrac{1}{2}(A-B) \quad (19);$$

$$\frac{\text{sen.}A+\text{sen.}B}{\text{sen.}A-\text{sen.}B}\times\frac{\cos.B-\cos.A}{\cos.A+\cos.B}=\text{tang.}^2\tfrac{1}{2}(A+B) \quad (20).$$

20 Ahora, si suponemos $B=A$, en la fórmula

$$\text{sen.}(A+B)=\text{sen.}A\times\cos.B+\text{sen.}B\times\cos.A,$$

se tendrá $$\text{sen.}2A=\text{sen.}A\times\cos.A+\text{sen.}A\times\cos.A=2\text{sen.}A\times\cos.A.$$

En el mismo supuesto, $\cos.(A+B)=\cos.A\times\cos.B-\text{sen.}A\times\text{sen.}B$, dará

$$\cos.2A=\cos.A^2-\text{sen.}A^2=\cos.A^2-1+\cos.A^2=2\cos.A^2-1;$$

despejando $\cos.A^2$, se tendrá $\cos.A^2=\frac{1}{2}(1+\cos.2A)$ (20′).

Si suponemos $B=2A$, se tendrá

$$\text{sen.}3A=\text{sen.}A\times\cos.2A+\text{sen.}2A\times\cos.A.....$$
$$=2\cos.A^2\times\text{sen.}A-\text{sen.}A+2\text{sen.}A\times\cos.A^2=4\cos.A^2\times\text{sen.}A-\text{sen.}A;$$ y

$$\cos.3A=\cos.A\times\cos.2A-\text{sen.}A\times\text{sen.}2A=2\cos.A^3-\cos.A-2\text{sen.}A^2\times\cos.A.....$$
$$=(*)2\cos.A^3-\cos.A-2\cos.A+2\cos.A^3=4\cos.A^3-3\cos.A.$$

Continuando del mismo modo; hallaríamos los siguientes resultados.

$\text{sen.}0=0.$

$\text{sen.}A=\text{sen.}A,$

$\text{sen.}2A=2\text{sen.}A\times\cos.A,$

$\text{sen.}3A=4\text{sen.}A\times\cos.A^2-\text{sen.}A,$

$\text{sen.}4A=8\text{sen.}A\times\cos A^3-4\text{sen.}A\times\cos.A,$

$\text{sen.}5A=16\text{sen.}A\times\cos.A^4-12\text{sen.}A\times\cos.A^2+\text{sen}\,A,$

$\text{sen.}6A=32\text{sen.}A\times\cos.A^5-32\text{sen.}A\times\cos.A^3+6\text{sen.}A\times\cos.A,$

$\text{sen.}7A=64\text{sen.}A\times\cos.A^6-80\text{sen.}A\times\cos.A^4+24\text{sen.}A\times\cos.A^2-\text{sen.}A,$

$\text{sen.}8A=128\text{sen.}A\times\cos.A^7-192\text{sen.}A\times\cos.A^5+80\text{sen.}A\times\cos.A^3-8\text{sen.}A\times\cos.A,$

y observando la ley de los coeficientes, podrémos poner en general

---

(*) *Sustituyendo por* $\text{sen.}A^2$ *su valor* $1-\cos.A^2$.

$$\text{sen.}nA=\text{sen.}A(2^{n-1}\cos.A^{n-1}-(n-2)2^{n-3}\cos.A^{n-3}\ldots.$$

$$+\frac{(n-3)(n-4)}{2}\times 2^{n-5}\cos.A^{n-5}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2.3}2^{n-7}\cos.A^{n-7}\ldots$$

$$+\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2.3.4.}\times 2^{n-9}\times\cos.A^{n-9}-\text{etc.}).$$

§ En estos valores observamos que entra el coseno; si quisiéramos hacerlos independientes de este valor, pondríamos $\sqrt{1-\text{sen.}A^2}$ en vez de $\cos.A$; pero entónces en todos los senos de múltiplos ímpares de A, desaparecerá el radical por estar el coseno elevado á potencias pares, y tendrémos

$\text{sen.}A=\text{sen.}A,$

$\text{sen.}3A=3\text{sen.}A-4\text{sen.}A^3,$

$\text{sen.}5A=5\text{sen.}A-20\text{sen.}A^3+16\text{sen}\,A^5,$

$\text{sen.}7A=7\text{sen.}A-56\text{sen.}A^3+112\text{sen.}A^5-64\text{sen.}A^7,$

$\text{sen.}9A=9\text{sen.}A-120\text{sen.}A^3+432\text{sen.}A^5-576\text{sen.}A^7+256\text{sen.}A^9$ (*),

De donde resulta en general, siendo n un número ímpar cualquiera.

$$\text{sen.}nA=n\text{sen.}A-\frac{n(n^2-1)}{2.3}\text{sen.}A^3+\frac{n(n^2-1)(n^2-9)}{2.3.4.5}\text{sen.}A^5\ldots.$$

$$-\frac{n(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{2.3.4.5.6.7}\text{sen.}A^7+\text{etc.}$$

§ Cuando los múltiplos son pares, resulta

$\text{sen.}0A=0,$

$\text{sen.}2A=2\text{sen.}A\sqrt{1-\text{sen.}A^2},$

$\text{sen.}4A=(4\text{sen.}A-8\text{sen.}A^3)\sqrt{1-\text{sen.}A^2},$

$\text{sen.}6A=(6\text{sen.}A-32\text{sen.}A^3+32\text{sen.}A^5\sqrt{1-\text{sen.}A^2},$

$\text{sen.}8A=(8\text{sen.}A-80\text{sen.}A^3+192\text{sen.}A^5-128\text{sen.}A^7)\times\sqrt{1-\text{sen.}A^2}$

y en general, siendo n un número par cualquiera, resulta

$$\text{sen}\,nA=(n.\text{sen}\,A-\frac{n(n^2-4)}{2.3}\text{sen.}A^3+\frac{n(n^2-4)(n^2-16)}{2.3.4.5}\times\text{sen.}A^5\ldots.$$

$$-\frac{n(n^2-4)(n^2-16)(n^2-36)}{2.3.4.5.6.7}\times\text{sen.}A^7+\ldots\pm 2^{n-1}\text{sen.}A^{n-1}\sqrt{1-\text{sen.}A^2}.$$

Para los cosenos tendrémos

$\cos.0=1,$

$\cos.1A=\cos.A$

$\cos.2A=2\cos.A^2-1,$

$\cos.3A=4\cos.A^3-3\cos.A,$

$\cos.4A=8\cos.A^4-8\cos\,A^2+1,$

$\cos.5A=16\cos.A^5-20\cos.A^3+5\cos.A,$

(*) *Si quisiéramos hallar las potencias impares de los senos en valores*

$\cos.6A=32\cos.A^6-48\cos.A^4+18\cos.A^2-1.$

$\cos.7A=64\cos.A^7-112\cos.A^5+56\cos.A^3-7\cos.A$ (*);

y en general

$$\cos nA=2^{n-1}\cos.A^n-n2^{n-3}\cos.A^{n-2}+\frac{n(n-3)}{2}2^{n-5}\cos.A^{n-4}\ldots$$

$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{2.3}2^{n-7}\cos.A^{n-6}+\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4}2^{n-9}\cos A^{n-8}\mp\text{etc.}$$

Del mismo modo podríamos formar tablas para las demas líneas trigonométricas; pero no nos detendrémos en esto, y solo dirémos que estas fórmulas generales de $\text{sen.}nA$ y $\cos.nA$ solo se deben emplear cuando n sea un número entero, y que en los valores que ellas dan, se deben desechar todos los términos en que resulte $\cos.A$ con esponente negativo: pues que en ninguna de las fórmulas particulares de que se han sacado por induccion, se encuentra $\cos.A$ con esponente negativo ó en el denominador.

Tambien observarémos que si $A=B$, la fórmula de la tangente de la suma (§ 2) nos dará $\text{tang.}2A=\frac{\text{tang.}A+\text{tang.}A}{1-(\text{tang.}A)^2}=\frac{2\,\text{tang.}A}{1-(\text{tang.}A)^2}$ que, quitando el divisor nos dará $\text{tang.}2A-\text{tang.}2A\times(\text{tang.}A)^2=2\,\text{tang.}A$, que da

$$\text{tang.}2A=2\,\text{tang.}A+\text{tang.}2A\times(\text{tang.}A)^2;$$

de cuya fórmula harémos uso en adelante.

---

de los senos de los arcos múltiplos, no tendriamos mas que despejar los últimos términos del segundo miembro en estas ecuaciones, y hacer las sustituciones correspondientes.

En efecto, la segunda ecuacion nos daria $4sen.A^3=-sen.3A+3sen.A.$

La tercera nos dará $16sen.A^5=sen.5A-5sen.A+20sen.A^3.$

Ahora, $20sen.A^3=5.4sen.A^3=5.(3sen.A-sen.3A)=15sen.A-5sen.3A;$

luego $16sen.A^5=sen.5A-5sen.A+15sen.A-5sen.3A=\ldots..$

$$sen.5A-5sen.3A+10sen.A.$$

Aconsejamos á los principiantes que se ejerciten en hallar los demas valores.

(*) *Si quisiéramos hallar las potencias de los cosenos de un arco en valores de los cosenos del mismo arco y de sus múltiplos, no tendriamos mas que despejar los primeros términos del segundo miembro de las ecuaciones anteriores, y despues hacer las sustituciones correspondientes.*

En efecto, la ecuacion tercera nos da desde luego

$$2\cos.A^2=\cos.2A+1\ (k).$$

Despejando el primer término del segundo miembro de la ecuacion cuarta, se tiene $4\cos.A^3=\cos.3A+3\cos.A.$

Despejando el primer término del segundo miembro de la ecuacion quinta, tendrémos $8\cos.A^4=\cos.4A+8\cos A^2-1$; *muliplicando por 4 la* (ec. k), *será* $8\cos.A^2=4\cos.2A+4$; *por lo que sustituyendo, resulta*

$$8\cos A^4=\cos.4A+4\cos.2A+3.$$

Aconsejamos á los principiantes que se ejerciten en hallar mas valores.

{ 21 Aun podemos hacer otras reflexiones sobre este punto. Si suponemos el radio igual á la unidad, será $\cos.A^2+\text{sen.}A^2=1$; cuyo primer miembro se puede considerar como el producto (I. 213) de estos dos factores imaginarios

$$\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \cos.A-\text{sen.}A\sqrt{-1}.$$

{ Si multiplicamos entre sí los dos factores semejantes. $\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1}$, y $\cos.B+\text{sen.}B\sqrt{-1}$, tendrémos por producto

$\cos.A\times\cos.B-\text{sen.}A\times\text{sen.}B+(\text{sen.}A\times\cos.B+\text{sen.}B\times\cos.A)\sqrt{-1}$; que se reduce (I. 612) á $\cos.(A+B)+\text{sen.}(A+B)\sqrt{-1}$; que es semejante con cada uno de los factores.

Luego tendrémos en general que

$$(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})(\cos.B+\text{sen.}B\sqrt{-1})=\cos.(A+B)+\text{sen.}(A+B)\sqrt{-1};$$

donde se debe advertir que la multiplicacion de esta clase de espresiones tiene algo comun con la de los logaritmos; pues aquí basta sumar los arcos á que afectan los senos y cosenos.

{ De aquí deducimos que si $A=B$, tendrémos

$$(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})^2=\cos.2A+\text{sen.}2A\sqrt{-1},$$

$$(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})^3=(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})^2\ldots\ldots$$

$$=\cos.3A+\text{sen.}3A\sqrt{-1};$$

y en general, representando por n un número entero, se tendrá

$(\cos.A+\text{sen.}A\sqrt{-1})^n=\cos.nA+\text{sen.}nA\sqrt{-1}$; de donde resulta mudando el signo al radical, $(\cos.A-\text{sen.}A\sqrt{-1})^n=\cos.nA-\text{sen.}nA\sqrt{-1}$.

{ De donde podríamos aun deducir algunas consecuencias importantes, pero que nos separarían demasiado de nuestro objeto. }

De la Trigonometria esférica.

22 Se llama *triángulo esférico* á la parte de la superficie de una esfera comprendida por tres arcos de círculo máximo; y la ciencia que trata de resolver estos triángulos, se llama *Trigonometría esférica*, ACM (fig. 2) es un triángulo esférico; ADBCM es otro triángulo esférico, entre los cuales componen una semiesfera; pero como resuelto el uno lo quedará el otro, porque ambos tienen dos lados comunes AM, CM y el otro lado AC es lo que le falta al ADBC para toda la circunferencia, resulta que solo se consideran en la Trigonometría esférica triángulos cuyos lados son menores que π ó 180°.

El ángulo CAM (fig. 2) *que forman entre sí dos arcos* AC, AM *de círculo máximo es igual al ángulo* EAF *formado por las tangentes de estos arcos en el punto A*; porque la tangente EA tirada en el plano del arco AC es perpendicular al radio AO; la AF tirada en el plano del AM lo es tambien al mismo radio;

luego el ángulo EAF es igual (I. 557) al ángulo de los planos ACB, AMB que es el de los arcos AC, AM y está representado por CAM.

Antes de pasar á la resolucion de los triángulos esféricos, manifestarémos algunas de sus propiedades; y sea la primera el que si *en un triángulo esférico no hay ningun lado mayor que una semicircunferencia, tampoco habrá ningun ángulo que sea mayor que* π ó 180°; porque si dos lados cualesquiera AC, AM se prolongan hasta que se encuentren, dos ángulos contiguos tales como AMC, CMB valdrán dos rectos ó una semicircunferencia (I. 557 esc. 2º), y por lo mismo uno de ellos vale ménos que la semicircunferencia.

23 *Todo triángulo esférico determina en el centro de la esfera un ángulo sólido compuesto de tres ángulos planos, que tienen por medida cada uno al lado correspondiente del triángulo; y la inclinacion respectiva de dichos planos es la misma que la de los ángulos del triángulo esférico; y tambien se verifica la inversa.*

Dem. Sea el triángulo esférico ACM (fig. 2), en el cual tirando desde sus ángulos los radios AO, CO, MO, y concibiendo que por cada dos de ellos pasa un plano, tendrémos el ángulo sólido OACM compuesto de los tres ángulos planos AOM, AOC, COM, que tienen por medida respectivamente á los lados AM, AC y CM del triángulo; y como los ángulos que forman los arcos de círculo máximo son los mismos que los que forman los planos donde se hallan, y estos son los de los planos que forman el ángulo sólido, resulta la proposicion.

Recíprocamente, si se tiene un ángulo sólido compuesto de tres ángulos planos, y haciendo centro en su vértice se traza un arco en cada uno con un mismo radio, se tendrá un triángulo esférico, cuyas partes serán las mismas que las del ángulo sólido ó ángulo triedro que se dió.

24 *En todo triángulo esférico* ABC (fig. 3) *la suma de dos lados es siempre mayor que el tercero.*

Dem. Sea ABC el triángulo esférico: si concebimos tirados desde sus ángulos al centro de la esfera los radios AO, BO, CO, tendrémos en O un ángulo triedro; y como la suma de dos ángulos de un ángulo triedro es siempre mayor que el tercero (I. 562), tendrémos $AOC+COB>AOB$; luego las medidas de estos ángulos, que son los lados del triángulo, guardarán la misma relacion, y será

$$AC+CB>AB.$$

Cor. De aquí se deduce, que *si por un punto cualquiera* D *dentro de un triángulo esférico* ABC (fig. 3*) *se conciben dos arcos* DB, DC *que pasen por dos de los ángulos de dicho triángulo, la suma de estos arcos será menor que la de los lados* AB, AC *del triángulo, opuestos á dichos ángulos.*

Porque si prolongamos BD hasta que encuentre en E al lado AC, el triángulo ABE dará AB+AE>BE; y añadiendo EC y reduciendo, será BA+AC>BE+EC; pero el triángulo DEC da tambien DE+EC>DC, que añadiendo BD y reduciendo, da BE+EC>BD+DC; luego con mayor razon será BA+AC>BD+DC; que era L. Q. D. D.

25 *La distancia mas corta entre dos puntos de la superficie de la esfera está representada por el arco de círculo máximo que pasa por ellos* (*).

Dem. Sean A y C (fig. 4) los dos puntos dados, y ADC él arco de círculo máximo que pasa por ellos; si ADC no es la línea mas corta que desde A se puede tirar á C en la superficie de la esfera, habrá otra que en efecto lo sea; y suponiendo que B sea un punto de dicha línea, tendrémos que si por este punto concebimos los arcos de círculo máximo BA, BC, el triángulo esférico ABC (24) nos dará AC<AB+BC; y si en AC tomamos la parte CD igual con CB, tendrémos entónces, restando estas partes iguales, de la desigualdad anterior, AD<AB.

Supongamos ahora que el arco CB se mueve alrededor del diámetro que pasa por C hasta que CB se confunda con AC, y en este caso el punto B habrá caido exactamente sobre D; luego la distancia mas corta que haya desde B á C será la misma que la que haya desde C á D, cuéntese por donde se quiera; y como por el supues-

---

(*) *Sobre una superficie plana, hemos demostrado* (I. 373) *que* la línea mas corta entre dos puntos es la línea recta. *En el espacio, hemos hallado* (I. 560 esc.) *que la* distancia mas corta entre dos puntos es tambien la línea recta; *y en la proposicion* 19.ª *del apéndice puesto al fin de la segunda parte de nuestra Geometría, hemos demostrado que* la línea recta es tambien la distancia mas corta entre dos rectas que no se hallan en un mismo plano, ó que están en el espacio. *En el testo demostramos que* la distancia mas corta en la superficie de la esfera es un arco de círculo máximo.

Láplace en los (§§ 8 y 9) *del primer libro de su Mecánica Celeste, demuestra que la línea mas corta que se puede trazar sobre la superficie terrestre es la que se llama* perpendicular á la meridiana. *Y en las memorias de la Academia de Ciencias de París, años de* 1732 y 1733 *se halla, que* la mas corta distancia entre dos puntos sobre la superficie de la Tierra, considerada como un esferoide aplanado, es una curva de doble curvatura, que es la perpendicular á la meridiana de la Francia por Mr. Cassini. *Por manera, que es una investigacion importante el* averiguar cuál es la línea mas corta entre dos puntos dados sobre cada superficie: *problema que se halla resuelto en el tomo* 4.º *página* 108 *de las obras de* Juan Bernoulli. *Tambien se hallan investigaciones sobre esta materia en el tomo III de las* Memorias de la Academia de San Petersburgo.

to la distancia desde A á C contada por ABC era mas corta que el arco ADC, resulta que si les quitamos las distancias iguales CB, CD, quedará *distancia*AB$<$*distancia*AD; pero esto es un absurdo, porque si concebimos que el arco AB se mueva alrededor del diámetro que pasa por el punto A hasta que se confunda con AC, resultará por ser AB$>$AD, que el punto B habrá caido mas allá del punto D, por ejemplo en E; por lo cual la distancia de E á A no puede ser menor que la de D al mismo punto A; luego no se puede suponer que la distancia mas corta que hay desde A á C tenga ningun punto fuera del arco de círculo máximo, luego dicho arco es la distancia mas corta.

26 *Esc.* Si se reflexiona bien la demostracion que acabamos de dar, se hallará que envuelve un círculo vicioso; porque á pesar de que para hacer ver el absurdo con mas claridad que Legendre, hemos supuesto que el arco AB (fig. 4) se confunda con ADE distando E mas de A que D, no son absurdas ó totalmente contradictorias las dos circunstancias de AE$>$AD; y *distancia*AE$<$*distancia*AD, á no ser que se suponga que esta distancia se ha de contar en el arco ADE, que es lo mismo que se trata de probar, luego envuelve en si un círculo vicioso. Los demas autores, ó la han tomado por axioma, ó han querido dar demostraciones que son ménos exactas; por esta causa, la demostrarémos por el mismo método que hemos demostrado (I. 373) que la línea recta es mas corta que la curva, enunciando la proposicion del modo siguiente: *si desde un punto á otro sobre la superficie de una esfera se traza un arco de círculo máximo, y se concibe por dichos dos puntos otra curva cualquiera sobre la superficie de la esfera, ya sea un arco de círculo menor, ya se componga de arcos de círculos menores, ya sea de otra naturaleza cualquiera, vamos á demostrar que el arco de círculo máximo es menor que esta curva.*

Espl. Sean A y B (fig. 4*) los dos puntos, AB el arco de círculo máximo que pasa por ellos, y ACB otra curva cualquiera trazada sobre la superficie de la esfera: vamos á demostrar que ACB es mayor que el arco de círculo máximo AB.

Dem. En efecto, si por los estremos A y B del arco AB, y por un punto intermedio de la curva ACB tal como C, concebimos los dos arcos de círculo máximo ADC, BEC, el triángulo esférico ABC (24) nos dará ADC+BEC$>$AB.

Ahora, si por A y C, y por un punto cualquiera F de la AFC, concebimos dos arcos de círculo máximo AQF, FOC, y por B y C, y otro punto cualquiera N intermedio del arco CNB, concebimos otros dos arcos de círculo máximo CSN, NPB, los triángulos AFC, CSNPB nos darán AQF+FOC$>$ADC, CSN+NPB$>$CEB; y sumando ordenadamente saldrá AQF+FOC+CSN+NPB$>$ADC+CEB.

Concibiendo ahora otros arcos de círculo máximo por los estremos

y por un punto medio de cada uno de los arcos AQF, FOC, CSN, NPB, demostraríamos del mismo modo que el conjunto de estos arcos era mayor que el conjunto anterior: y como este conjunto, al paso que crece, se va aproximando á la ACB, por tener mas puntos comunes con ella y estar entre dicha curva y el conjunto anterior, resulta que dicha línea (I. 323) ACB es mayor que cualquiera de estos conjuntos; pero cualquiera de estos conjuntos es mayor que el arco AB, luego con mas razon se verificará que el arco AB<ACB, que era L. Q. D. D.

27 *La suma de los tres lados de un triángulo esférico es menor que la circunferencia de un círculo máximo.*

Dem. Sea ACM (fig. 2) este triángulo, y concibamos que dos de sus lados AC, AM se prolonguen hasta que se encuentren en B; con lo cual tendrémos que ACB y AMB serán dos semicircunferencias (I. 612 cor. 2.º); pero el triángulo CMB dará (24) $CM<MB+CB$, y añadiendo AC+AM tendrémos $CM+AC+AM<MB+CB+AC+AM=AMB+ACB=2\pi$.

28 En general, se llama *polo* de un círculo de la esfera aquel punto de su superficie que dista igualmente de todos los de la circunferencia de este círculo; y lo primero que demostrarémos es *que este punto se halla en los estremos del diámetro de la esfera que es perpendicular á dicho círculo.*

En efecto, sea primero el círculo CMDR (fig 2) un círculo máximo, y tendrémos que concibiendo la AB perpendicular sobre su centro O, será perpendicular á todas las líneas que pasen por él, tales como CO, MO, DO etc.; luego los arcos de círculo máximo AC, AM, AD, etc. que son medidas de los ángulos rectos AOC, AOM, AOD, etc. serán cuadrantes, y por lo mismo iguales; luego la distancia que hay desde A á cada punto del círculo CMDR es una misma, y está representada por un cuadrante; y como lo mismo demostraríamos del punto B, resulta que un círculo máximo tiene dos polos, que son los estremos del diámetro de la esfera que es perpendicular á dicho círculo.

Si el círculo no es máximo, tambien se verifica la proposicion; pues si suponemos que sea el LHN, tirando el diámetro AB que le sea perpendicular, y las OL, ON, resultará que estas oblicuas serán iguales por ser radios de la esfera, luego los triángulos OQL, OQN rectángulos en Q, serán (376 cor. 2.º) iguales, y darán LQ=QN; y concibiendo desde B tiradas las cuerdas BL, BN, serán iguales (I. 360), pues los triángulos LQB, BQN tienen BQ comun, LQ=QN por lo acabado de demostrar, y los ángulos en Q rectos, luego será LB=BN; y como estas son cuerdas, resulta que los arcos de círculo máximo que subtendan serán iguales; luego todos los arcos de círculo máximo, que pasando por B terminan en LHN son iguales: y como estos son las medidas de las distancias en la superficie de la esfera, resulta que el punto B está equidistante de todos los puntos del círculo LHN, luego es su polo. Y como lo mismo demostraríamos del otro estremo A del diámetro AB, resulta que todo círculo, sea máximo ó no, tiene dos polos, que son los estremos del diámetro de la esfera que le es perpendicular; pero hay la diferencia de que los polos del círculo máximo distan un cuadrante de todos sus puntos; y los de los menores, el uno dista ménos de un cuadrante y el otro una magnitud mayor que un cuadrante, é igual con el suplemento de la distancia del primero.

29 De aquí se deduce que el arco AC, *que mide la distancia del polo de un circulo máximo á dicho circulo, ademas de ser igual con un cuadrante, es perpendicular al arco* CMD; porque siendo la AO, perpendicular al plano CMD, tambien lo será todo plano tal como ACB que pase por ella (I. 558); luego el ángulo ACM es recto, y por lo mismo *para hallar el polo de un arco dado de circulo máximo, se le tirará otro indefinido perpendicular, y en él se tomará una magnitud igual con un cuadrante*, ó de otro modo: *por dos de sus puntos se le tirarán dos arcos perpendiculares, y el punto de interseccioa será el polo;* advirtiendo que esta última construccion tambien conviene al polo de un círculo menor.

Recíprocamente, *si la distancia de* A *á dos puntos* C, M *de un arco* CMD (fig. 2) *es igual con un cuadrante, el punto* A *será el polo de* CMD, *y al mismo tiempo los ángulos* ACM, AMC *serán rectos.*

Dem. Tírense al centro de la esfera los radios CO, MO; y como por el supuesto AC, AM, son cuadrantes, los ángulos AOC, AOM, de que son medidas, serán rectos; luego los arcos AC, AM, son perpendiculares al plano CMDR, y por lo mismo el punto A es el polo de CM, y los ángulos ACM, AMC son rectos.

30 *El ángulo* CAM (fig. 2) *formado por dos arcos de circulos máximos* AC, AM, *que es igual* (22) *al* EAF *formado por las tangentes de estos arcos en el punto* A, *tambien tiene por medida al arco* CM *del circulo máximo descrito desde el punto* A *como polo entre los lados* AC, AM *prolongados si se necesita.*

Dem. En efecto, siendo los arcos AC, AM iguales con un cuadrante, tendrémos que las CO, MO serán perpendiculares á AB, y por lo mismo el ángulo COM, será (I. 557) el ángulo que forman los planos ACB, AMB, el cual tiene por medida al arco CM; luego esta será la medida del ángulo esférico CAM.

Esc. Aquí se podría demostrar, que si dos ángulos esféricos son iguales, se pueden superponer, del mismo modo que en Geometría lo demostramos respecto de los rectilíneos.

31 *Si haciendo centro en cada uno de los ángulos* (fig. 5) A, B, C *del triángulo* ABC *como polos, trazamos los arcos de circulo máximo* EF, DF, ED, *de modo que formen el triángulo* DEF, *se verificará que los tres puntos* D, F, E, *serán los polos de los arcos* CB, BA, AC.

Dem. Por ser A el polo de EF, la distancia AE es un cuadrante; por ser C, el polo del arco DE, la distancia CE es igualmente un cuadrante; luego el punto E dista un cuadrante de los puntos A, C; luego es el polo del arco AC. Del mismo modo se demostraría que D es el polo de BC, y F el de AB.

32 De donde se deduce, que el triángulo ABC se puede describir por medio del DEF, así como se ha descrito este por medio de aquel. El triángulo DEF recibe el nombre de *triángulo polar* del ABC, y reciprocamente el ABC del DEF.

33 *En todo triángulo polar se verifica, que los ángulos son suplementos de los lados correspondientes en el triángulo primitico; y sus lados suplementos de los ángulos: y por lo mismo el triangulo polar recibe tambien el nombre de* riángulo suplementario.

Dem. Prolónguense si es necesario los lados AB, AC (fig. 5) hasta que encuentren á EF en G y H; y tendrémos que siendo A el polo de EF, el ángulo en A tendrá por medida (30) al arco GH; pero EH, GF son cuadrantes por ser E polo de AH, y F polo de AG; luego tendrémos

$$\pi = EH + GF = EH + GH + HF = GH + EF = A + EF.$$

Luego valiendo el ángulo en *A* junto con el lado EF una semicircunferencia, resulta que *A* tiene por suplemento á EF: del mismo modo demostraríamos que *B* tiene por suplemento á DF, y *C* á DE.

Ahora, por ser D polo del lado BC, los arcos DM, DN serán cuadrantes, y el ángulo *D* tendrá por medida al arco MN; y como tambien son cuadrantes los BN, CM, tendrémos

$$\pi = MC + BN = MC + BC + CN = MN + BC = D + BC.$$

Luego el lado BC tiene por suplemento al ángulo *D* correspondiente en su triángulo polar; y pudiéndose demostrar del mismo modo que AC tiene por suplemento al ángulo *E*, y AB al ángulo *F*, queda demostrada la proposicion.

34 *Esc.* Ademas del triángulo DEF se pueden formar otros tres por la interseccion de los tres arcos DE, EF, DF como se vé (fig. 6); pero la proposicion actual no se verifica siuó en el triángulo central, que se distingue de los otros tres en que cada dos ángulos están situados á un mismo lado respecto de su arco correspondiente BC.

35 *Si desde el vértice* A (fig. 7) *de un ángulo del triángulo dado* ABC *como polo, se describe con el intervalo* AC *el arco* CED *de círculo menor; desde* B *se traza el* CFD *con el intervalo* BC, *y desde el punto* D *en que se cortan los arcos* CED, CFD se conciben los arcos de círculo máximo AD, DB, *resultará un triángulo* ADB, *cuyas partes serán iguales á las del* ACB.

Dem. Por construccion AD=AC, BD=BC, y AB es comun; luego tienen sus tres lados respectivamente iguales. Para convencernos de que tambien los ángulos opuestos lo son, concibamos tiradas al centro de la esfera las AO, CO, BO, DO, y tendrémos los dos ángulos sólidos OABC, OADB que tendrán respectivamente iguales los ángulos planos que los forman, porque los arcos que los miden lo son; pero en este caso los planos en que se hallan los ángulos están igualmente inclinados (I. 564); luego los ángulos del triángulo esférico DAB son iguales á los del CAB, esto es, DAB=BAC, DBA=ABC, y ADB=ACB; luego los lados y los ángulos del triángulo ADB son iguales á los lados y á los ángulos del triángulo ACB. L. Q. D. D.

Esc. La igualdad de estos triángulos no es absoluta, ó de superposicion, porque el un triángulo no se podría colocar sobre el otro á causa de su convexidad, si no son isósceles; y por lo mismo á esta igualdad la llamarémos *igualdad por simetria*, y á los triángulos, *triángulos simétricos*.

36 Pasemos ahora á manifestar los casos de la igualdad de los triángulos esféricos.

Dos triángulos de una misma esfera, ó de esferas iguales, son iguales, cuando tienen dos lados iguales é igual el ángulo comprendido.

Dem Sea por ejemplo (fig. 8) AB=EF, AC=EG y el ángulo BAC=FEG, con lo cual tendrémos que el triángulo BAC se podrá colocar sobre el FEG

de modo que se confundan; luego todas las partes del primero serán iguales á las del segundo, y se tendrá BC=GF, el ángulo ABC igual con EFG y ACB=EGF. L. Q. D. D.

37 *Dos triángulos situados sobre la misma esfera, ó sobre esferas iguales, son iguales cuando tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales.*

Dem. Es la misma que la del caso homólogo de los rectilíneos.

38 *Si los tres lados de un triángulo esférico son iguales á los tres lados del otro, tambien lo serán los ángulos, y estarán opuestos respectivamente á los lados iguales.*

Dem. De lo espuesto (35) resulta que con tres lados (fig. 7) AB, AC, BC se pueden formar dos triángulos ACB, ADB, diferentes en cuanto á la posicion de las partes, pero iguales en cuanto á la magnitud de estas mismas partes; luego dos triángulos equiláteros respectivamente entre sí, son ó absolutamente iguales, ó á lo ménos iguales por simetría: en ambos casos son equiángulos, y los ángulos iguales están opuestos á los lados iguales por lo demostrado en dicha proposicion, luego resulta L. Q. D. D.

39 *En todo triángulo esférico isósceles son iguales los ángulos opuestos á los lados iguales; y reciprocamente, si son iguales dos ángulos de un triángulo, será isósceles.*

Dem. 1.° Sea en el triángulo ABC (fig. 9), AC=AB: digo que se tendrá el ángulo C=B; porque si por el vértice A y el punto D medio del arco BC, concebimos el arco AD, los dos triángulos ADB, ADC tendrán sus tres lados respectivamente iguales; luego (38) estos triángulos tendrán los ángulos iguales, y será por consiguiente B=C.

2.° Sea el ángulo B=C: digo que se tendrá AC=AB; porque si no son iguales, y suponemos que AB sea el mayor de ellos, tomando en él una parte BO igual con AC, y uniendo O con C por medio del arco OC, tendrémos que los dos lados BO, BC del triángulo BOC son iguales á los AC, BC del ABC; y como por el supuesto los ángulos comprendidos por estos lados son iguales, resultará (36) que los triángulos OBC, ABC serán iguales; y como el primero es parte y el otro es todo, resulta un absurdo; luego no se puede suponer que AB es mayor que AC, y por lo mismo estos lados AB, AC opuestos á los ángulos iguales B y C son iguales; que era todo L. Q. D. D.

40 *Esc.* La demostracion de la primera parte de la proposicion prueba igualmente, que el ángulo BAD=DAC, y que el BDA=ADC; luego estos dos últimos son rectos; de donde se deduce, que *un arco que desde el vértice de un triángulo isósceles divide á la base en dos partes iguales, es perpendicular á esta base, y divide á su ángulo opuesto en dos partes iguales.*

41 *En todo triángulo esférico* ABC (fig. 10) *al mayor ángulo se opone el mayor lado, y reciprocamente.*

Dem. 1.° Sea el ángulo A>B, y tendrémos que haciendo el ángulo BAD=B, se tendrá AD=DB; pero AD+DC>AC, luego poniendo en vez de AD su igual BD, se tendrá BD+DC ó BC>AC.

2.° Si suponemos ahora BC>AC, digo que BAC>ABC, porque si esto no se verifica, será igual ó menor: no puede ser BAC igual con ABC, porque en este caso sería BC=AC, contra el supuesto; tampoco puede ser menor,

porque si se tuviese BAC<ABC, resultaria por lo acabado de demostrar que BC<AC, que tambien es contra el supuesto. Luego si no puede ser igual ni menor, será mayor, y se tendrá BAC>ABC. L. Q. D. D.

42 *Si los dos lados* AB, AC *del triángulo esférico* ABC (fig. 11), *son iguales á los dos lados* DE, DF *del triángulo* DEF *trazados sobre una misma esfera, ó esferas iguales, y el ángulo* A *es mayor que* D, *digo que el tercer lado* BC *del* 1.º *será mayor que el* 3.º EF *del* 2.º

Dem. Concíbase por A un arco AH de círculo máximo, de modo que el ángulo CAG=EDF, y tómese en él una parte AG=DE; con lo cual resultará (36) que el triángulo GAC será igual con DEF, y por lo mismo GC=EF; luego todo estará reducido á probar que BC>GC.

Aquí pueden ocurrir tres casos: 1.º que el punto G caiga fuera del triángulo; 2.º que caiga en el lado BC, y 3.º que caiga dentro de dicho triángulo.

1.º Si cae fuera tal como en G, se tendrá (24)

$$GH+HC>GC, \quad BH+HA>BA;$$

sumando y reduciendo, se tendrá GA+BC>GC+BA, y quitando de ambos miembros AG=DE=AB, quedará BC>GC.

2.º Si G cayese sobre la BC v. g. en H, entónces como GC se confundiría con HC y sería parte de BC, resultaría menor que ella.

3.º Si el punto G cayese dentro tal como en *g*, tendríamos (24 cor.) que AB+BC>A*g*+*g*C, y quitando A*g* y AB que son iguales, por serlo ambas con DE, resultará por último BC>*g*C ó BC>EF, que era todo L. Q. D. D.

43 *Si dos triángulos* (fig. 12) *trazados sobre una misma esfera, ó esferas iguales son equiángulos entre sí, serán tambien equiláteros.*

Espl. Sean ABC, DEF dos triángulos equiángulos entre sí, esto es, que se tenga A=D, B=E y C=F: digo que será BC=EF, AC=DF, y AB=DE.

Constr. Tómense en la prolongacion de los lados AB, AC las partes AG=DE, AH=DF, úñase el punto G con el H, y prolónguense los arcos BC, HG hasta que se encuentren en L y K.

Dem. Los dos lados AG, AH son por construccion iguales á los dos DE, DF, el ángulo comprendido GAH igual por opuesto al vértice con BAC que es igual con EDF por el supuesto; luego los tríángulos AGH, DEF son iguales, y se tiene el ángulo AGH=DEF=ABC, y el ángulo AHG=DFE=ACB.

Ahora, siendo iguales los ángulos LGB, GBK, sus suplementos BGK, LBG tambien serán iguales; y como el lado BG es comun, los triángulos LBG, GBK serán iguales (37), y darán LG=BK, y LB=GK.

Como tambien se verifica que AHG=ACB, se concluirá del mismo modo que los triángulos LCH, HCK son iguales, por lo que LH=CK, y HK=LC.

Ahora, si de las cantidades BK, LG, que son iguales, se quitan las iguales CK, LH, las restas BC, GH serán iguales. Por otra parte tenemos el ángulo BCA=AHG, y ABC=AGH; luego los triángulos ABC, AHG tienen un lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, luego son iguales; pero el triángulo DEF es igual en todas sus partes al triángulo AHG; luego es igual en todas sus partes tambien al triángulo ABC, y se tendrá AB=DE, AC=DF, BC=EF. L. Q. D. D.

44 *La suma de los ángulos de todo triángulo esférico es menor que seis ángulos rectos, y mayor que dos.*

Dem. 1.° Siendo cada ángulo de triángulo esférico menor π, como hemos dicho (22), los tres juntos valdrán ménos que 3π, ó seis ángulos rectos.

2.° Los tres ángulos, juntos con los tres lados del triángulo suplementario valen 3π; y como la suma de los tres lados de dicho triángulo ha de valer (27) ménos que 2π, resulta que los tres ángulos valdrán mas que π.

45 *Cor.* 1.° De aquí se deduce que un triángulo esférico puede tener dos ó tres ángulos rectos ú obtusos; cuando tiene un ángulo recto se llama *rectángulo;* cuando dos, *birectángulo,* en cuyo caso los lados opuestos á estos ángulos son cuadrantes, porque el punto donde concurren es el polo del otro lado; cuando tiene tres ángulos rectos, se llama *trirectángulo,* y un triángulo de esta especie está contenido ocho veces en la superficie de la esfera; y se llama *hipotenusa* de un triángulo rectángulo al lado opuesto al ángulo que se considera como recto.

46 *Cor.* 2.° *La diferencia entre la suma de dos ángulos de un triángulo y el* 3.° *es siempre menor que* π; porque siendo en el triángulo suplementario los lados $\pi-A$, $\pi-B$, $\pi-C$, y debiendo ser la suma de dos de sus lados (24) mayor que el tercero, será $\pi-A<\pi-B+\pi-C$, que da $B+C-A<\pi+\pi-\pi=\pi$.

47 *En los triángulos esféricos rectángulos* (fig. 13) *los ángulos son de la misma especie que los lados opuestos, y viceversa.*

Dem. Sea el triángulo ACB rectángulo en B: vamos á demostrar que si CB es agudo, el ángulo CAB tambien lo será. En efecto, prolongando el lado BC hasta que $BCD=\frac{1}{2}\pi$, tendrémos que el punto D será el polo del arco AB, por serle BCD perpendicular y distar $\frac{1}{2}\pi$; uniendo el punto D con el A, será AD perpendicular á AB (29), y por lo mismo el ángulo DAB será recto; pero $DAB>CAB$; luego CAB será menor que recto, esto es, agudo.

Si suponemos ahora que BC es obtuso, tomando en él una parte $BD'=\frac{1}{2}\pi$, tendrémos que D′ será el polo del arco AB, y concibiendo el arco AD′, tendrémos que el ángulo D′AB será recto; pero $CAB>D'AB$, luego CAB es mayor que un ángulo recto; luego será obtuso.

Si partiéramos del conocimiento de los ángulos, demostraríamos la proposicion del mismo modo; pues si CAB es agudo, probarémos que BC tambien lo será. Porque formando el ángulo BAD que sea recto, el punto donde este arco encuentre al BC, será (29) el polo de AB; luego $BCD=\frac{1}{2}\pi$; pero $BC<DCB$, luego BC será agudo.

Si suponemos ahora que CAB sea obtuso, probarémos que BC tambien lo es; porque formando el ángulo BAD′ que sea recto, será D′ el polo del arco AB, y por consiguiente $D'B=\frac{1}{2}\pi$; pero $BC>BD'$, luego BC es obtuso.

48 *Si en un triángulo esférico rectángulo los lados que forman el ángulo recto son de una misma especie, la hipotenusa será aguda; y si son de diferente especie, será obtusa.*

Dem. 1.° Sea (fig. 13) el triángulo CAB rectángulo en B: vamos á demostrar que si BC y BA son agudos ú obtusos, la hipotenusa AC será aguda. Porque si suponemos primero que sean agudos, podrémos prolongar el lado BC hasta un punto tal como D, de manera que $BCD=\frac{1}{2}\pi$, en cuyo caso D será el polo del arco AB, y concibiendo tirado el DA, valdrá un cuadrante; de aquí resultan dos triángulos DAB y CBA rectángulos ambos en B, y como por el supuesto AB era agudo; los ángulos opuestos á este lado comun en ambos triángulos serán agudos (47); luego ACB y ADB son agudos, y por lo mismo ACD

que es suplemento del primero será obtuso, y por consiguiente mayor qué AEC; y como en un triángulo al mayor ángulo se opone el mayor lado (41), resultará en el ADC, que AD>AC; pero AD es un cuadrante, luego la hipotenusa AC es menor que un cuadrante ó aguda.

Sean ahora los dos lados AB, BC obtusos: vamos á demostrar que tambien en este caso la hipotenusa AC es aguda. Porque si en el lado BC tomamos una parte $BD'=\frac{1}{2}\pi$, el punto D' será el polo de AB, y concibiendo el arco D'A será un cuadrante; ahora en los triángulos ABD', ABC rectángulos en B, sabemos que AB es obtuso, luego los ángulos opuestos AD'B, ACB tambien lo serán, y por lo mismo AD'C que es suplemento del primero será agudo, y por consiguiente menor que ACD' en el triángulo ACD', luego AD'>AC; pero AD' es recto, luego AC que es la hipotenusa del triángulo propuesto será aguda.

2.° Si suponemos ahora (fig. 14) que de los lados qué forman el ángulo recto en B, AB sea agudo y BC obtuso, vamos á demostrar que la hipotenusa AC será obtusa. Porque si tomamos $BD=\frac{1}{2}\pi$, será D el polo de AB, y tirando DA valdrá un cuadrante, y los triángulos ADB, ACB rectángulos en B nos darán que los ángulos ADB, ACB opuestos al lado comun AB que es agudo, serán agudos, y por lo mismo ADC suplemento del primero será obtuso, y por consiguiente mayor que ACB; luego el triángulo ACD nos dará AC>AD; pero AD es un cuadrante, luego AC, que es la hipotenusa, será mayor que un cuadrante ú obtusa. L. Q. D. D.

49 *Si un triángulo esférico* ABC (fig. 15) *tiene dos ángulos* B, C *de una misma especie, esto es, agudos ú obtusos, el arco* AD *que desde el otro ángulo* A *baja perpendicularmente al lado opuesto* BC, *caerá dentro de dicho triángulo; pero si son de especie diferente, caerá fuera.*

Dem. Para probar lo primero, demostrarémos que no puede caer sobre ninguno de los lados AC, AB, ni fuera del triángulo. No puede caer sobre ninguno de los lados AB ni AC, porque entónces los ángulos en B ó en C serían rectos, contra la hipótesis que dice, que han de ser agudos ú obtusos. Tampoco puede caer fuera, porque en este caso, si lo representamos por AD', resultarán dos triángulos rectángulos BAD', CAD', que tendrán comun el lado AD'; y como en un triángulo rectángulo (47) los lados son de la misma especie que los ángulos opuestos, resultará que AD' deberá ser á un mismo tiempo de la misma especie que el ángulo B del 1.° y que ACD' del 2.°; pero si ABC y ACB son agudos, ACD' será obtuso por ser suplemento de ACB; y si ABC y ACB son obtusos, ACD' será agudo; luego debería ser AD' á un mismo tiempo agudo y obtuso, lo cual siendo un absurdo, manifiesta que no puede caer el arco perpendicular fuera del triángulo; luego caerá dentro.

Si suponemos abora que B es obtuso y C agudo, vamos á probar que el arco perpendicular caerá fuera.

Porque 1.° la hipótesis da á conocer que no puede coincidir con ninguno de los lados AB, AC; 2.° no puede caer dentro, porque si se supone que el AD lo sea, tendrémos que siendo comun á los dos triángulos rectángulos BAD, DAC, deberá ser á un mismo tiempo de la especie de sus ángulos opuestos en C y en B; y como por el supuesto uno de estos es agudo y el otro obtuso, tendrémos que AD debería ser á un mismo tiempo agudo y obtuso, lo cual siendo absurdo, da á conocer que en este caso no puede caer dentro. L. Q. D. D.

50 *Si un triángulo esférico tiene agudos sus tres ángulos* A, B, C (fig. 16), *tambien lo serán los tres lados* AB, AC, BC.

Dem. Porque si se forman en B y C dos ángulos rectos por medio de los arcos BE, CE, el punto E donde concurran será el polo del arco BC; y haciendo pasar por este polo E y A un arco EAD de círculo máximo, cortará por precision al arco BC, y formará con él en D dos ángulos rectos (29): y siendo el ángulo BAC agudo, lo serán los BAD, DAC que son parte suya; y como por el supuesto tambien son agudos los ACD, ABD, y en los triángulos rectángulos los lados son de la misma especie que los ángulos opuestos, resulta que en ambos triángulos ADB, ADC son agudos sus lados, y por lo mismo (48) las hipotenusas AB, AC serán agudas. Formando los dos ángulos rectos en B y en A, ó en A y en C, demostraríamos que BC era tambien agudo, luego queda demostrada la proposicion.

51 *Si un triángulo esférico* ABC (fig. 17) *tiene dos ángulos* ABC, ACB *agudos é iguales, los lados opuestos* AC *y* AB *serán agudos é iguales.*

Dem. Fórmense en B y en C dos ángulos rectos por medio de los arcos BD, CD, y tendrémos que D será el polo del arco BC; y ademas será (24 cor.) BA+AC<BD+DC. Ahora BA=AC (39); y como BD, DC son cuadrantes, será $2BA<2BD=\pi$, ó $BA<\frac{1}{2}\pi$, que era todo L. Q. D. D.

52 *Si un triángulo* BDC (fig. 17) *tiene los dos ángulos en* B *y en* C *obtusos é iguales, sus lados opuestos* DC, DB *tambien lo serán.*

Dem. Pues si formamos en B y C los ángulos rectos ABC, ACB por medio de los arcos BA, CA, el punto A donde concurran será el polo del arco BC, y se tendrá BD+DC>BA+CA, ó lo que es lo mismo $2BD>\pi$, de donde $BD>\frac{1}{2}\pi$ ú obtuso. L. Q. D. D.

53 *Si un triángulo* ABC (fig. 18) *tiene desiguales dos ángulos agudos* B, C, *el lado* AC *opuesto al menor, que supondrémos ser* B, *será* $<\frac{1}{2}\pi$ *ó agudo.*

Dem. Porque si se forman dos ángulos rectos en B y en C por medio de los arcos BD, CD, será D el polo de BC, y se verificará $BA+AC<BD+DC=\pi$; luego siendo ambos lados juntos menores que la semicircunferencia, uno de ellos será agudo por precision; y como al mayor ángulo se opone (41) el mayor lado, resulta que el lado menor ó el agudo será el opuesto al ángulo menor.

54 *Si un triángulo* ABC (fig. 19) *tiene dos ángulos* B *y* C *obtusos y desiguales, el lado* AC *opuesto al mayor de ellos, que supondrémos ser* B, *será obtuso ó* $>\frac{1}{2}\pi$.

Dem. Formando en B y C los ángulos rectos DBC, DCB por medio de los arcos BD, CD, será D el polo de BC, y tendrémos $BA+AC>BD+DC=\pi$; luego valiendo los dos lados BA, AC juntos mas de la semicircunferencia, uno de ellos lo ménos será obtuso; y como al mayor ángulo se opone el mayor lado, resulta que el lado obtuso será el opuesto al ángulo mayor. Podrá resultar tambien que el otro lo sea, pero esto no se verificará indispensablemente.

55 *Si un triángulo tiene dos ángulos agudos y el lado opuesto al uno de ellos no es agudo, serán obtusos el otro ángulo y el lado opuesto.*

Dem. Sea BAC (fig. 20) este triángulo, cuyos ángulos en B y en C sean agudos, y en que uno de los lados AC opuestos no sea $<\frac{1}{2}\pi$: digo que el ángulo A será obtuso y tambien el lado BC. Pues formando en B y C dos ángulos rectos por medio de los arcos BD, CD, será D el polo del arco BC, y bajan-

do por él y por A el arco DAE de círculo máximo será perpendicular á BC. Y no siendo $AC<\frac{1}{2}\pi$, será igual ó mayor. Si es igual, tendrémos que como por construccion tambien lo es CD, resultará que C (29) es el polo del arco DAE, luego $CE=\frac{1}{2}\pi$, y por lo mismo $BC>EC=\frac{1}{2}\pi$.

Si fuese $AC>\frac{1}{2}\pi$, entónces de los lados EA, EC que forman el ángulo recto, uno será agudo y el otro obtuso; y como AE es agudo por ser menor que el cuadrante DAE, resultará que EC será obtuso; pero en un triángulo rectángulo los ángulos son de la misma especie que los lados opuestos; luego en el primero de estos supuestos el ángulo $EAC=\frac{1}{2}\pi$, y por lo mismo $BAC>\frac{1}{2}\pi$ ú obtuso; en el segundo será $EAC>\frac{1}{2}\pi$, y con mas razon lo será BAC, que era todo L. Q. D. D.

Esc. Por el mismo método con que demostramos la proposicion contenida en el párrafo (376) del primer tomo, demostraríamos que *si desde un punto de la superficie de la esfera se baja un arco perpendicular á otro dado, y otros diversos arcos que no le sean perpendiculares, se verificará* 1.° *que el arco perpendicular será mas corto que cualquiera de los oblicuos*; 2.° *los arcos que disten igualmente del perpendicular serán iguales*; *y* 3.° *que de los que no disten igualmente, el que mas se separe del perpendicular será mayor.*

De donde deduciriamos, así como allí lo hicimos en el corolario 2.°, que *dos triángulos rectángulos son iguales cuando tienen las hipotenusas iguales, y uno de los lados que forman el ángulo recto.*

56 *Si en un triángulo esférico se prolonga uno de los lados, el ángulo esterno puede ser menor, igual ó mayor que cualquiera de los internos opuestos.*

Dem. Para demostrarlo, supongamos que se tengan las dos semicircunferencias (fig. 21) BGA, BEA que se encuentran en B y A, y que considerarémos por el lado en que formen el menor ángulo, esto es, supondrémos que el ángulo GAD sea menor que uno recto; tómese en una de ellas, tal como AGB, una parte AG menor que $\frac{1}{2}\pi$; desde G concíbase el arco GD perpendicular á BDA, y se tendrá en el triángulo AGD el ángulo $ADG>DAG$; pero el ángulo A es igual con el ángulo B del triángulo BGD, luego el ángulo GDA, esterno del triángulo BGD, es mayor que su opuesto interno en B.

Supongamos aun que $AG<\frac{1}{2}\pi$, pero mayor que el arco AD, y tendrémos que GD será tambien agudo y menor que GA (41), por ser $GDA>B=A$; luego si concebimos el arco GE tal que GE=AG, se tendrá el ángulo GEA=GAE=B; luego en este caso el ángulo esterno es igual al interno B opuesto en el triángulo BGE.

Por último, señálese en el arco EB un punto F entre B y E, y tendrémos que concibiendo el arco GF, será $GF>GE$ (ecs. ant.) y por consiguiente mayor que GA; luego en el triángulo GFA será el ángulo $GFA<GAF=B$, que era L. Q. D. D.

57 *Si en un triángulo esférico fuese el ángulo esterno igual á uno de los internos opuestos, la suma de los lados que forman el otro ángulo interno opuesto, será igual á una semicircunferencia; si mayor que el interno opuesto, será su suma menor, y si menor, mayor.*

Espl. Sea el triángulo ABG (fig. 22) en que el lado GB prolongado hacia B forme en B el ángulo ABD=AGB: digo que $GA+AB=\pi$; pero si $ABD>AGB$, será $GA+AB<\pi$; y si $ABD<AGB$, será $GA+AB>\pi$.

Dem. Porque si prolongamos los arcos GA, GB hásta que concurran en D,

se tendrá que siendo ABD=G=D, resultará BA=AD en el triángulo ABD; por lo que añadiendo GA, será AB+GA=AD+GA=π.

Si ABD>G=D, será AB<AD; y añadiendo AG se tendrá

$$AB+GA<AD+GA=\pi,$$

Finalmente si ABD<G=D, será BA>AD; y AB+GA>AD+GA=π.

58 *La parte* AMBNA (fig. 23) *de la superficie de la esfera, comprendida por dos círculos máximos, es á la superficie de toda la esfera, como el ángulo* MAN *que forman dichos círculos es á cuatro ángulos rectos; ó como el arco* MN, *que mide este ángulo* (30), *es á la circunferencia.*

Dem. Supongamos primero que el arco MN sea comensurable con la circunferencia MNPQ, y que tenga con ella la razon de 7 á 32; y tendrémos que, concibiendo dividido MNPQ en 32 partes iguales, resultará que MN contendrá 7; concíbiendo unido despues el polo A con los puntos de division por medio de cuadrantes, se tendrán 32 triángulos en la semiesfera AMNPQ, los cuales serán iguales entre sí por tener sus tres lados iguales. La esfera contendrá 64 triángulos de estos, y la parte AMBNA contendrá 14; luego AMBNA es á toda la esfera como 14 á 64, ó como 7 á 32, que es la relacion enunciada. Si el arco MN no fuese comensurable con la circunferencia, demostraríamos que la relacion de dichas superficies no podía ser mayor ni menor que la del arco MN á la circunferencia, por el mismo método que en diversas partes de la Geometría hemos pasado de una relacion racional á una irracional. Luego queda demostrada nuestra proposicion.

59 *Dos triángulos esféricos simétricos son iguales en superficie.*

Espl. Sean ABC, DEF (fig. 24) dos triángulos simétricos, esto es, dos triángulos que tengan sus lados iguales AB=DE, AC=DF, BC=EF, y que sin embargo no se puedan superponer: vamos á demostrar que la superficie de ABC es igual á la de DEF.

Dem. Sea P el polo del círculo menor que pasa por los tres puntos A, B, C (*); y concibiendo desde este punto los arcos iguales PA, PB, PC, figurémonos en el punto F el ángulo DFQ=ACP, el arco FQ=CP, y unidos los puntos D y E con Q; con lo cual tendrémos que los lados DF, FQ serán iguales á los lados AC, CP, el ángulo DFQ=ACP, luego los dos triángulos DFQ, ACP serán iguales (36) en todas sus partes; y por lo mismo el lado DQ=AP, y el ángulo DQF=APC.

En los triángulos propuestos DFE, ABC, los ángulos DFE, ACB opuestos á los lados iguales DE, AB son iguales: luego si se quitan los ángulos DFQ, ACP iguales por construccion, quedará el ángulo QFE=PCB. Por otra parte los lados QF, FE son iguales á los lados PC, CB, luego los dos triángulos FQE, CPB son iguales en todas sus partes; luego el lado QE=PB, y el ángulo FQE=CPB.

Si se observa ahora que los triángulos DFQ, ACP, que tienen los lados

---

(*) *El círculo que pasa por los tres puntos A, B, C ó que está circunscrito al triángulo ABC no puede ser círculo máximo, porque en este caso los tres lados AB, BC, AC se hallarían sobre el mismo plano en que está el centro de la esfera, y no habria triángulo.*

iguales respectivamente, son al mismo tiempo isósceles (28), se verá que pueden aplicarse el uno al otro; porque habiendo colocado PA sobre su igual QF, el lado PC caerá sobre su igual QD, y los dos triángulos quedarán confundidos en uno solo; luego son iguales, y por lo mismo la superficie DQF=APC. Por una razon semejante la superficie FQE=CPB, y la superficie DQE=APB; luego se tendrá DQF+FQE−DQE=APC+CPB−APB, ó DFE=ABC. L.Q.D.D.

{ *Esc.* Si los polos P y Q estuviesen situados dentro de los triángulos ABC, DEF, sería necesario sumar los tres triángulos DQF, FQE, DQE, para componer el triángulo DEF; é igualmente se necesitaría sumar los tres triángulos APC, CPB, APB para componer el triángulo ABC; y la demostracion y conclusion serían las mismas.

{ 60 *De cualquier modo que dos círculos máximos* AOB, COD (fig. 25) *se corten en el hemisferio* OACBD, *la suma de los triángulos opuestos* AOC, BOD *será igual á la superficie* OBNDO *comprendida por las dos semicircunferencias* OBN, ODN.

{ *Dem.* Porque si de las semicircunferencias AOB, OBN se quita OB, quedará BN=AO. Por una razon semejante se tendrá DN=CO y BD=AC; luego los dos triángulos AOC, BDN tienen los tres lados iguales; luego ó serán iguales ó iguales por simetría (35); y como en cualquiera de estos casos son iguales en superficie (59), resulta que la suma de los dos triángulos AOC, BOD es equivalente á los dos OBD, BDN, ó á OBNDO, que era L. Q. D. D.

{ 61 *La superficie de un triángulo esférico es á la de toda la esfera, como el eseeso de los tres ángulos del triángulo sobre dos rectos, es á ocho ángulos rectos ó á dos circunferencias.*

{ *Dem.* Para probarlo, supongamos que el triángulo dado sea ABC (fig. 26) y concíbanse prolongados sus lados hasta que encuentren al círculo máximo DEFGHI tirado de un modo cualquiera fuera del triángulo, y tendrémos en virtud de la proposicion precedente que los dos triángulos ADE, AGH juntos equivalen á la superficie comprendida por dos semicircunferencias, cuyo ángulo esté espresado por A; luego llamando 2π á la circunferencia ó á 4 ángulos rectos, y S á la superficie de la esfera, será (58)

$$\text{ADE}+\text{AGH}=S\times\frac{\text{áng.}A}{2\pi};\quad\text{por la misma razon será}$$

$$\text{BGF}+\text{BID}=S\times\frac{\text{áng.}B}{2\pi};\quad\text{CIH}+\text{CFE}=S\times\frac{\text{áng.}C}{2\pi};$$

pero la suma de estos seis triángulos escede á la semiesfera en dos veces el triángulo ABC; luego se tendrá

$$2\text{triáng.ABC}=S\times\frac{\text{áng.}A}{2\pi}+S\times\frac{\text{áng.}B}{2\pi}+S\times\frac{\text{áng.}C}{2\pi}-\frac{S}{2};$$

$$\text{y}\quad\text{triáng ABC}=\frac{S}{4\pi}\left(\text{áng.}A+\text{áng.}B+\text{áng.}C-\pi\right),$$

que puesta en proporcion manifiesta la proposicion enunciada (*).

(*) *En el tomo IV del* Diario de Matemáticas puras y aplicadas, *que se*

{ *Esc.* Esta proposicion se atribuye comunmente á *Alberto Girard* que la enuncia sin una demostracion rigorosa, en la obra intitulada *Invention nouvelle en Algebre*, impresa en Amsterdan; pero se debe atribuir mas bien á *Cavalleri* que la demuestra bien en la obra intitulada *Directorium generale urano metricum.* }

Resolucion de los triángulos esféricos.

62 La resolucion de los triángulos esféricos se puede hacer de dos modos: ó por un cierto número de analogías, ó por fórmulas que contengan las relaciones de las líneas trigonométricas de los lados con las de los ángulos opuestos; nosotros preferirémos el seguudo método, ya porque deja ménos casos dudosos, y ya porque siendo todo analítico, tiene la ventaja de no exigir mas de una construccion, que es la que vamos á manifestar.

Constr. Pues que hemos visto que todo triángulo esférico determina en el centro de la esfera (23) un ángulo triedro, cuyas partes son iguales á las de dicho triángulo, supongamos que ABC (fig. 27) sea el triángulo esférico que determina en el centro O de la esfera el ángulo triedro OACB; y tendrémos que si desde el ángulo C bajamos la perpendicular CD sobre el plano AOB, en que se halla el lado BA opuesto á este ángulo, y desde D se tiran las rectas DE, DF respectivamente perpendiculares á OA y OB, resultará (I. 547) que uniendo el punto C con los E y F, la *CE* será perpendicular á OA y la CF á OB.

De aquí se deduce inmediatamente que, siendo CE y DE perpendiculares á un mismo punto de la comun seccion AO de los planos COA, BOA, el ángulo CED será el que forman dichos planos; y como el ángulo esférico CAB es el mismo que el de estos planos en que se hallan los lados CA, AB, resulta que el ángulo rectilíneo CED es igual con el ángulo esférico CAB; y por la misma razon el ángulo rectilíneo CFD es igual con el ángulo esférico CBA.

De aquí en adelante señalarémos los ángulos de los triángulos esféricos por la letra que está colocada en el vértice, y sus lados opuestos con la misma letra minúscula; por lo cual designarémos el lado BC

---

publica en Paris, correspondiente al año de 1839, *ha demostrado Mr. Giulio, por el cálculo integral, que, llamando* z *la distancia del centro de gravedad de una superficie esférica cualquiera, que espresa por* φ, *al plano de un círculo máximo, y designando por* α *la proyeccion de* φ *sobre este plano, y por* r *el radio de la esfera, se tiene* $z=\frac{\alpha r}{\varphi}$.

opuesto al ángulo A con la letra a; el AC con b, y el AB con c.

De esta construccion tambien resulta

$$CE=\text{sen.}CA=\text{sen.}b\,;\quad OE=\cos.CA=\cos.b\,;$$
$$CF=\text{sen.}CB=\text{sen.}a\,;\quad OF=\cos.CB=\cos.a\,;$$

y como el triángulo rectilíneo CDE es rectángulo en D, tendrémos

(I. 649) $$\left.\begin{matrix}CD=CE\times\text{sen.}CED=\text{sen.}b\times\text{sen.}A\\ DE=CE\times\cos.CED=\text{sen.}b\times\cos.A\end{matrix}\right\}\ (A).$$

Por la misma razon será en el CDF $\left.\begin{matrix}CD=\text{sen.}a\times\text{sen.}B\\ DF=\text{sen.}a\times\cos.B\end{matrix}\right\}$ (B),

é igualando los dos valores de CD será $\text{sen.}b\times\text{sen.}A=\text{sen.}a\times\text{sen.}B$.

Haciendo una construccion análoga respecto de cada uno de los otros ángulos B, A, obtendríamos ecuaciones semejantes, y por lo mismo deduciríamos del triángulo ABC el sistema (C) de ecuaciones y proporciones que de ellas resultan

$$\left.\begin{matrix}\text{sen.}b\times\text{sen.}A=\text{sen.}a\times\text{sen.}B\\ \text{sen.}c\times\text{sen.}A=\text{sen.}a\times\text{sen.}C\\ \text{sen.}c\times\text{sen.}B=\text{sen.}b\times\text{sen.}C\end{matrix}\right\}\ \text{ó}\ \left\{\begin{matrix}\text{sen.}A:\text{sen.B}::\text{sen.}a:\text{sen.}b\\ \text{sen.}A:\text{sen.}C::\text{sen.}a:\text{sen.}c\\ \text{sen.}B:\text{sen.}C::\text{sen.}b:\text{sen.}c\end{matrix}\right\}\ (C).$$

Alternando las dos primeras, tendrán comun la primera razon y darán

$$\text{sen.}A:\text{sen.}a::\text{sen.}B:\text{sen.}b::\text{sen.}C:\text{sen.}c\ (\alpha);$$

que nos dice, que *en todo triángulo esférico los senos de los ángulos son como los senos de los lados opuestos.*

Ahora, tirando por el punto E la EG perpendicular á OB, y por D la DH paralela á la misma BO, tendrémos un triángulo rectángulo HDE, en el cual el ángulo HED es igual con AOB por ser ambos complemento del GEO: el 1º porque es lo que le falta para el ángulo recto DEO; y el 2.° porque en un triángulo rectilíneo rectángulo tal como EGO, un ángulo agudo es complemento del otro; luego (I. 649) será

$$HD=DE.\text{sen.}DEH=DE\times\text{sen.}AOB=DE\times\text{sen.}c=[A]\cos.A\times\text{sen.}b\times\text{sen.}c.$$

Pero $OF=\cos.CB=\cos.a=OG+GF=OG+HD$, por ser $GF=HD$ (I. 467); y el triángulo OGE rectángulo en G dará

$$OG=OE\times\cos.EOG=\cos.b\times\cos.c.$$

Luego si sustituimos el valor de HD y OG en el de $\cos.a$, tendrémos $\cos.a=\cos.b\times\cos.c+\cos.A\times\text{sen.}b\times\text{sen.}c$, ecuacion que manifiesta la relacion que hay entre el lado a, los otros dos lados y el ángulo que forman.

63 Considerando del mismo modo á cada uno de los otros dos lados, se hallarán ecuaciones semejantes á la precedente; de manera que entre las seis partes del triángulo ABC, tendrémos las tres ecuaciones siguientes.

$$\left.\begin{matrix}\cos.a=\cos.b\times\cos.c+\cos.A\times\text{sen.}b\times\text{sen.}c\\ \cos.b=\cos.a\times\cos.c+\cos.B\times\text{sen.}a\times\text{sen.}c\\ \cos.c=\cos.a\times\cos.b+\cos.C\times\text{sen.}a\times\text{sen.}b.\end{matrix}\right\}\ (D).$$

Pues que dado el seno de un arco se tiene determinado su coseno, resulta que en estas tres ecuaciones no hay mas de seis cantidades des-

conocidas; luego por medio de ellas podrémos determinar tres, si se nos dan las otras tres; por consiguiente, *dadas tres cosas de las seis que entran en un triángulo esférico, podrémos determinar con su auxilio las otras tres*. Pero, si por la Análisis algebráica quisiéramos determinar tres de estas cantidades, cuando se nos diesen las otras tres, como en efecto se podría ejecutar, nos vendrían ecuaciones muy complicadas, y sería muy incómodo el despejar las incógnitas que se pedían; por lo cual vamos á transformarlas en otras, cuya aplicacion sea sencilla en la práctica.

Lo primero que observarémos es que se pueden convertir los ángulos en sus lados opuestos, con tal que se mude el signo á cada coseno; esto lo podríamos deducir de la consideracion del triángulo suplementario, pues siendo en este, cada lado suplemento del ángulo opuesto en el primitivo, se deduce que lo que hayamos demostrado respecto de los ángulos en este, quedará demostrado respecto de los lados en aquel; y como en las fórmulas (D) solo entran senos y cosenos, y los senos corresponden tanto á un ángulo como á su suplemento, resulta que á los senos no se debe hacer ninguna alteracion; y en punto á los cosenos, como el coseno de un ángulo tiene un signo opuesto al de su suplemento, resulta la proposicion. Pero aquí lo demostrarémos por cálculo, para lo cual eliminarémos $\cos.a$ de las dos últimas ecuaciones (D) por medio de la primera, y se hallará

$$\left.\begin{array}{l}\cos.b=\cos.b.\cos.c^2+\cos.A.\text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.c+\cos.B.\text{sen}.a.\text{sen}.c\\ \cos.c=\cos.c.\cos.b^2+\cos.A.\text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.b+\cos.C.\text{sen}.a.\text{sen}.b\end{array}\right\}\text{(E)}.$$

Sustituyendo ahora en vez de $\cos.c^2$, y $\cos.b^2$ sus iguales $1-\text{sen}.c^2$, $1-\text{sen}.b^2$, tendrémos

$$\left.\begin{array}{l}\cos.b=\cos.b-\cos.b.\text{sen}.c^2+\cos.A.\text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.c+\cos.B.\text{sen}.a.\text{sen}.c\\ \cos.c=\cos.c-\cos.c.\text{sen}.b^2+\cos.A.\text{sen}.b.\text{sen}.c.\cos.b+\cos.C.\text{sen}.a.\text{sen}.b;\end{array}\right\}\text{(E)}$$

las cuales, despues de borrar $\cos.b$ en ambos miembros de la primera, y de dividir por $\text{sen}.c$; y $\cos.c$ en los de la segunda, y dividir por $\text{sen}.b$ se convierten, dejando en un solo miembro el último término de cada una, en

$$\left.\begin{array}{l}\cos.B\times\text{sen}.a=\cos.b\times\text{sen}.c-\cos.A\times\text{sen}.b\times\cos.c\\ \cos.C\times\text{sen}.a=\text{sen}.b\times\cos.c-\cos.A\times\cos.b\times\text{sen}.c\end{array}\right\}\text{(F)}.$$

Si multiplicamos la segunda de estas ecuaciones por $\cos.A$, y la sumamos con la primera, se tendrá

$$\cos.B\times\text{sen}.a+\cos.C\times\text{sen}.a\times\cos.A=\cos.b\times\text{sen}.c-\cos.A\times\text{sen}.b\times\cos.c....$$
$$+\text{sen}.b\times\cos.c\times\cos.A-\cos.A^2\times\cos.b\times\text{sen}.c,$$

que haciendo la destruccion, descomponiendo en factores y sustituyendo por $\cos.A^2$, su valor $1-\text{sen}.A^2$, se convierte en

$$\text{sen}.a(\cos.B+\cos.C\times\cos.A)=\cos.b\times\text{sen}.c-(1-\text{sen}.A^2)\times\cos.b\times\text{sen}.c....$$
$$=\cos.b\times\text{sen}.c-\cos.b\times\text{sen}.c+\text{sen}.A^2\times\cos.b\times\text{sen}.c.=\text{sen}.A^2\times\cos.b\times\text{sen}.c.$$

Pero, $\text{sen}.c\times\text{sen}.A=\text{sen}.a\times\text{sen}.C$ (C); luego si sustituimos en vez de $\text{sen}.A\times\text{sen}.c$ este valor en el segundo miembro, despues de divi-

dir por sen.a, tendrémos cos.B+cos.C×cos.A=sen.C×sen.A×cos.b, de donde cos.B=—cos.C×cos.A+cos.b×sen.C×sen.A (G), que es la misma que la 2.ª de las ecuaciones (D) mudando las letras mayúsculas en minúsculas, y al contrario, y poniendo el signo — á los cosenos.

En efecto, haciendo esta mutacion se convierte en

—cos.B=—cos.A×—cos.C—cos.b×sen.A×sen.C;

que despues de hecha la multiplicacion de los signos, y mudándolos á toda la ecuaciou para que el primer miembro resulte positivo, se convierte en la (G); la cual nos espresa la relacion que tiene un ángulo con los otros dos y el lado opuesto; y como tendríamos lo mismo respecto de los otros dos ángulos B y C, resultarán las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos.}A=-\text{cos.}B\times\text{cos.}C+\text{cos.}a\times\text{sen.}B\times\text{sen.}C\\ \text{cos.}B=-\text{cos.}A\times\text{cos.}C+\text{cos.}b\times\text{sen.}A\times\text{sen.}C\\ \text{cos.C}=-\text{cos.}A\times\text{cos.}B+\text{cos.}c\times\text{sen.}A\times\text{sen.}B\end{array}\right\}\text{(H)}.$$

64 Ahora, sabemos que el coseno de un ángulo es el mismo que el de su suplemento tomado negativamente; luego tendrémos

$$\text{cos.}(\pi-A)=-\text{cos.}A,\quad \text{cos.}(\pi-B)=-\text{cos.}B,\quad \text{cos.}(\pi-C)=-\text{cos.}C,$$
$$\text{cos.}(\pi-a)=-\text{cos.}a,\quad \text{cos.}(\pi-b)=-\text{cos.}b,\quad \text{cos.}(\pi-c)=-\text{cos.}c;$$

luego si sustituimos estos valores en las espresiones de arriba, haciendo

$$\pi-A=A',\quad \pi-B=B',\quad \pi-C=C',\quad \pi-a=a',\quad \pi-b=b',\quad \pi-c=c',$$

teniendo presente que el seno permanece el mismo para un arco y para su suplemento, se nos convertirán, despues de mudados los signos, en

$$\left.\begin{array}{l}\text{cos.}A'=\text{cos.}B'\times\text{cos.}C'+\text{cos.}a'\times\text{sen.}B'\times\text{sen.}C'\\ \text{cos.}B'=\text{cos.}A'\times\text{cos.}C'+\text{cos.}b'\times\text{sen.}A'\times\text{sen.}C'\\ \text{cos.}C'=\text{cos.}A'\times\text{cos.}B'+\text{cos.}c'\times\text{sen.}A'\times\text{sen.}B'\end{array}\right\}\text{(I)}.$$

Ecuaciones semejantes en un todo á las (D), y que pertenecen por consiguiente á un triángulo esférico cuyos lados son A', B', C', y los ángulos a', b', c'. Luego este triángulo tiene medidos sus ángulos por los suplemeutos de los lados del triángulo ABC, y sus lados miden á los suplementos de los ángulos del mismo triángulo; luego este triángulo es el que hemos dado á conocer con el nombre de triángulo suplementario.

65 Las ecuaciones (F) contienen cinco de las seis cosas que se consideran en un triángulo; pero se pueden transformar en otras que no contengan mas de cuatro, sustituyendo en la 1.ª en vez de sen.a su valor $\frac{\text{sen.}b\times\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$ sacado de la 1.ª de (C), y en la 2.ª su valor $\frac{\text{sen.}c\times\text{sen.}A}{\text{sen.}C}$ sacado de la 2.ª de (C), luego si lo ejecutamos nos resultará

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{cos.}B\times\text{sen.}b\times\text{sen.}A}{\text{sen.}B}=\text{cos.}b\times\text{sen.}c-\text{cos.}A\times\text{sen.}b\times\text{cos.}c,\\ \dfrac{\text{cos.}C\times\text{sen.}c\times\text{sen.}A}{\text{sen.}C}=\text{sen.}b\times\text{cos.}c-\text{cos.}A\times\text{cos.}b\times\text{sen.}c;\end{array}\right.$$

que dividiendo la 1ª por sen.b×sen.A, y por sen.c×sen.A la 2ª, y teniendo presente que la cotangente es igual al coseno partido por el seno, tendrémos

$$\left.\begin{array}{l}\cot.B=\dfrac{\cos.b\times\text{sen}.c-\cos.A\times\text{sen}.b\times\cos.c}{\text{sen}.b\times\text{sen}.A}\\ \cot.C=\dfrac{\text{sen}.b\times\cos.c-\cos.A\times\cos.b\times\text{sen}.c}{\text{sen}.c\times\text{sen}.A}\end{array}\right\}\ (\text{K}).$$

66 Con presencia de estos valores se pueden formar todos sus análogos, permutando las letras de un modo conveniente; pero importa notar que pues estas ecuaciones están deducidas de las (D), se podrá mudar en ellas los lados en ángulos, y recíprocamente, mudando los signos á los cosenos y cotangentes, en cuyo caso se nos convertirán las (K) en

$$\left.\begin{array}{l}\cot.b=\dfrac{\cos.B\times\text{sen}.C+\cos.a\times\text{sen}.B\times\cos.C}{\text{sen}.B\times\text{sen}.a}\\ \cot.c=\dfrac{\text{sen}.B\times\cos.C+\cos.a\times\cos.B\times\text{sen}.C}{\text{sen}.C\times\text{sen}.a}\end{array}\right\}\ (\text{L}).$$

67 Los cinco sistemas de ecuaciones (C), (D), (H), (K), (L), dan inmediatamente la resolucion de todos los casos que puede ofrecer un triángulo esférico cualquiera. El 1.er sistema espresa la relacion que hay entre los senos de los ángulos, y los de sus lados opuestos; del 2.° sistema se deducen las fórmulas siguientes por el simple despejo de las ncógnitas

$$\left.\begin{array}{l}\cos.A=\dfrac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\text{sen}.b\times\text{sen}.c}\\ \cos.B=\dfrac{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}{\text{sen}.a\times\text{sen}.c}\\ \cos.C=\dfrac{\cos.c-\cos.a\times\cos.b}{\text{sen}.a\times\text{sen}.b}\end{array}\right\}\ (\text{D}')$$

que espresan los cosenos de los ángulos en valores de los senos y cosenos de los lados.

El 3.er sistema (H), despejando los cosenos de los lados, nos da...

$$\left.\begin{array}{l}\cos.a=\dfrac{\cos.A+\cos.B\times\cos.\text{C}}{\text{sen}.B\times\text{sen}.C}\\ \cos.b=\dfrac{\cos.B+\cos A\times\cos.C}{\text{sen}.A\times\text{sen}.C}\\ \cos.c=\dfrac{\cos.C+\cos.A\times\cos.B}{\text{sen}.A\times\text{sen}.B}\end{array}\right\}\ (\text{H}').$$

El sistema (K) haciendo todas las permutaciones posibles, da las seis fórmulas.....

$$\left.\begin{aligned}
\cot.A &= \frac{\cos.a\times\text{sen}.b-\cos.C\times\text{sen}.a\times\cos.b}{\text{sen}.C\times\text{sen}.a}\\
\cot.B &= \frac{\cos.b\times\text{sen}.a-\cos.C\times\text{sen}.b\times\cos.a}{\text{sen}.C\times\text{sen}\ b}\\
\cot.C &= \frac{\cos.c\times\text{sen}.a-\cos.B\times\text{sen}.c\times\cos.a}{\text{sen}.B\times\text{sen}.c}\\
\cot.A &= \frac{\cos.a\times\text{sen}.c-\cos.B\times\text{sen}.a\times\cos.c}{\text{sen}.B\times\text{sen}.a}\\
\cot.B &= \frac{\cos.b\times\text{sen}.c-\cos.A\times\text{sen}.b\times\cos.c}{\text{sen}.A\times\text{sen}.b}\\
\cot.C &= \frac{\cos.c\times\text{sen}.b-\cos.A\times\text{sen}.c\times\cos.b}{\text{sen}.A\times\text{sen}.c}
\end{aligned}\right\}\ (\text{K}').$$

En fin, el sistema (L) conduce á las seis fórmulas siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
\cot.a &= \frac{\cos.A\times\text{sen}.C+\cos.b\times\text{sen}.A\times\cos.C}{\text{sen}.A\times\text{sen}.b}\\
\cot.b &= \frac{\cos.B\times\text{sen}.C+\cos.a\times\text{sen}.B\times\cos.C}{\text{sen}.B\times\text{sen}.a}\\
\cot.c &= \frac{\cos.C\times\text{sen}.B+\cos.a\times\text{sen}.C\times\cos.B}{\text{sen}.C\times\text{sen}.a}\\
\cot.a &= \frac{\cos.A\times\text{sen}.B+\cos.c\times\text{sen}.A\times\cos.B}{\text{sen}.A\times\text{sen}.c}\\
\cot.b &= \frac{\cos.B\times\text{sen}.A+\cos.c\times\text{sen}.B\times\cos.A}{\text{sen}.B\times\text{sen}.c}\\
\cot.c &= \frac{\cos.C\times\text{sen}.A+\cos.b\times\text{sen}.C\times\cos.A}{\text{sen}.C\times\text{sen}.b}
\end{aligned}\right\}\ (\text{L}').$$

Por medio del sistema (D) hallarémos un lado cualquiera cuando se nos dén los otros dos y el ángulo opuesto; las (D′) nos darán los ángulos cuando se conozcan los tres lados; las (H) nos darán un ángulo cualquiera cuando se conozcan los otros dos ángulos, y el lado adyacente á estos ángulos; las (H′) nos darán los lados cuando se conozcan los ángulos; las (K′) nos darán dos de los ángulos de un triángulo esférico, cuando se conozca el tercero y los lados que le forman. En efecto, si los datos fuesen A, b, c, resultaría que en los segundos miembros de las (ecs. 5ª y 6ª) de (K′) no entraban mas que dichas cantidades; luego nos darían los ángulos B, y C; en cuyo caso ya no nos faltaba encontrar sinó el lado a, que hallaríamos con el auxilio de la ecuacion ó proporcion primera ó segunda del sistema (C).

Finalmente, las (L′) darán dos lados cuando se conozca el tercero y los dos ángulos adyacentes; porque si se diese por ejemplo a, B, C, las

(ecs. 2ª y 3ª) nos darían b, c; despues, la (1ª ó 2ª ec. ó prop. de C) nos daría el otro ángulo A.

68 Las fórmulas, que acabamos de referir, merecen la mayor atencion, tanto por su elegancia como por la propiedad que tienen de hacer conocer si el arco ó ángulo que espresan, es mayor ó menor que un cuadrante ó que un ángulo recto: propiedad que no tendrían las espresiones de los senos. En efecto, el seno de un arco siendo el mismo que el de su suplemento, tanto en magnitud como en posicion, no puede indicar si este arco debe ser mayor ó menor que un cuadrante; pero cuando se tiene el coseno ó la cotangente, y se sabe por otra parte que este arco no puede llegar á ser igual con una semicircunferencia, que es el caso en que se hallan los lados de los triángulos esféricos y los arcos que miden sus ángulos, se ve por el signo del resultado si el arco que se busca está comprendido ó nó entre 90° y 180°. El coseno y la cotangente tienen el signo *ménos* en el primer caso, y el *mas* en el segundo. Luego si se tiene necesidad de dar á las cantidades conocidas que entran en las fórmulas precedentes los signos que las correspondan, segun el valor de los arcos á que pertenezcan, el signo del resultado hará conocer la especie del lado ó del ángulo que se busca, es decir, si es menor ó mayor que un cuadrante, ó lo que es lo mismo, si es agudo ú obtuso.

69 Estas mismas fórmulas se simplifican mucho cuando el triángulo es rectángulo, es decir, cuando uno de sus ángulos es recto; en efecto, si se supone el ángulo $C=\frac{1}{2}\pi$, se tendrá sen.$C=1$, cos.$C=0$; en cuyo caso las dos últimas ecuaciones del sistema (C) se convierten en

$$\text{sen.}a=\text{sen.}c\times\text{sen.}A,\quad \text{sen.}b=\text{sen.}c\times\text{sen.}B\ \text{(M)}.$$

La 3ª y 6ª del (L') se transforman en

$$\left\{\begin{array}{l}\text{cot.}c=\dfrac{\text{cos.}a\times\text{cos.}B}{\text{sen.}a}=\dfrac{\text{cos.}a}{\text{sen.}a}\times\text{cos.}B=\text{cot.}a\times\text{cos.}B,\\[2ex] \text{cot.}c=\dfrac{\text{cos.}b\times\text{cos.}A}{\text{sen.}b}=\dfrac{\text{cos.}b}{\text{sen.}b}\times\text{cos.}A=\text{cot.}b\times\text{cos.}A;\end{array}\right\}$$

que sustituyendo las tangentes en vez de las cotangentes, se convierten en

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{\text{tang.}c}=\dfrac{1}{\text{tang.}a}\times\text{cos.}B\\[2ex] \dfrac{1}{\text{tang.}c}=\dfrac{1}{\text{tang.}b}\times\text{cos.}A\end{array}\right\}\ \text{de donde}\ \left\{\begin{array}{l}\text{tang.}a=\text{cos.}B\times\text{tan.}c\\[2ex] \text{tang.}b=\text{cos.}A\times\text{tang.}c\end{array}\right\}\text{(N)}.$$

La tercera del (D) nos dará $\text{cos.}c=\text{cos.}a\times\text{cos.}b$ (O).

La 1ª y la 2ª del (H) se convierten en $\left.\begin{array}{l}\text{cos.}A=\text{cos.}a\times\text{sen.}B\\ \text{cos.}B=\text{cos.}b\times\text{sen.}A\end{array}\right\}$ (P).

La 1ª y 2ª del (L′) dan $\cot.a=\frac{\cos.A}{\text{sen.}b\times\text{sen.}A}$, $\cot.b=\frac{\cos.B}{\text{sen.}a\times\text{sen.}B}$;

de donde resulta lo mismo que en (N) $\left\{\begin{array}{l}\text{tang.}a=\text{sen.}b\times\text{tang.}A\\ \text{tang.}b=\text{sen.}a\times\text{tang.}B\end{array}\right\}$ (Q).

Y la 3ª del (H′) da $\cos.c=\frac{\cos.A\times\cos.B}{\text{sen.}A\times\text{sen.}B}=\cot.A\times\cot.B$ (R).

Que bastarán para resolver los triángulos esféricos rectángulos en *C.* Tambien se obtendrían fórmulas análogas para el caso en que el triángulo esférico propuesto tuviese uno de sus lados iguales con un cuadrante, en lo que no nos detendrémos.

70 No obstante, como en muchos libros se trata todavía la resolucion de los triángulos esféricos por analogías, deducirémos de estas ecuaciones las analogías correspondientes; y tendrémos que las (M) puestas en proporcion dan $\left\{\begin{array}{l}1:\text{sen.}c::\text{sen.}A:\text{sen.}a\\ 1:\text{sen.}c::\text{sen.}B:\text{sen.}b\end{array}\right\}$ que nos suministran la 1ª analogía, á saber: *en todo triángulo rectángulo el radio ó seno total es al seno de la hipotenusa, como el seno de un ángulo es al seno del lado opuesto.*

De las (N) sacarémos $\left\{\begin{array}{l}1:\cos.B::\text{tang.}c:\text{tang.}a\\ 1:\cos.A::\text{tang.}c:\text{tang.}b\end{array}\right\}$ que dan la 2ª analogía, á saber: *el radio es al coseno de un ángulo como la tangente de la hipotenusa es á la tangente del lado adyacente á dicho ángulo.*

De la (O) deducirémos $1:\cos.a::\cos.b:\cos.c$, que es la 3ª; y se enuncia: *el radio ó seno total es al coseno de un lado como el coseno del otro lado es al coseno de la hipotenusa.*

Las (P) dan $\left\{\begin{array}{l}1:\text{sen.}B::\cos.a:\cos.A\\ 1:\text{sen.}A::\cos.b:\cos.B\end{array}\right\}$ que suministran la 4ª, á saber: *el radio es al seno de un ángulo como el coseno del lado adyacente es al coseno del otro ángulo.*

De las (Q) sacarémos $\left\{\begin{array}{l}1:\text{sen.}b::\text{tang.}A:\text{tang.}a\\ 1:\text{sen.}a::\text{tang.}B:\text{tang.}b\end{array}\right\}$ que suministra la 5ª, á saber: *el radio es al seno de un lado como la tangente del ángulo adyacente á dicho lado, es á la tangente del otro lado.*

Por último la (R) nos da la 6.ª, que es $1:\cot.A::\cot.B:\cos.c$, y se enuncia: *el radio es á la cotangente de un ángulo como la cotangente del otro ángulo es al coseno de la hipotenusa.*

Si en la proporcion anterior, ponemos en vez de $\cot.B$ su igual $\frac{1}{\text{tang.}B}$, se tendrá $1:\cot.A::\frac{1}{\text{tang.}B}:\cos.c$, que multiplicando los antecedentes por $\text{tang.}B$ y permutando, se tiene

$$1{:}\cos.c{::}\tan.B{:}\cot.A{::}\frac{1}{\cot.B}:\frac{1}{\tan.A}{::}\tan.A{:}\cot.B,$$

por lo que esta 6.ª se enuncia tambien así: *el radio es al coseno de la hipotenusa como la tangente de un ángulo es á la cotangente del otro.*}

71 Aunque tanto por medio de las ecuaciones como de las analogías, que acabamos de manifestar, se pueden resolver completamente los triángulos esféricos rectángulos, no obstante, al hacer las aplicaciones, cuesta trabajo el tener que recordar todas las analogías ó ecuaciones, para saber de las que conviene usar, lo que es bastante incómodo en la práctica; por lo cual vamos á enumerar los casos que pueden ocurrir en la resolucion de los triángulos rectángulos, y á poner una tabla en que se halle cada parte espresada en valores de las cantidades conocidas que se den.

72 Los casos que pueden ocurrir son seis: 1º *dados los dos lados que forman el ángulo recto, hallar lo demas*; 2º *dada la hipotenusa y un lado, hallar lo demas*; 3.º *dado un lado y el ángulo opuesto, hallar lo demas*; 4º *dado un lado y el ángulo adyacente, hallar lo demas*; 5º *dada la hipotenusa y un ángulo, hallar lo demas*; y 6º *dados los dos ángulos, hallar lo demas.* Cuya resolucion se halla contenida en la siguiente

TABLA

Que contiene la resolucion de un triángulo esférico rectángulo en C.

casos.	*datos.*	*partes buscadas.*	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
I	C, a, b	c, A, B	$\cos.c=\cos.a\times\cos.b$; $\text{tang}.A=\frac{\text{tang}.a}{\text{sen}.b}$; $\tan.B=\frac{\text{tang}.b}{\text{sen}.a}$.
II	C, a, c	b, A, B	$\cos.b=\frac{\cos.c}{\cos.a}$; $\text{sen}.A=\frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.c}$; $\cos.B=\frac{\text{tang}.a}{\text{tang}.c}=\frac{\cot.c}{\cot.a}$.
III	C, a, A	c, b, B	$\text{sen}.c=\frac{\text{sen}.a}{\text{sen}.A}$; $\text{sen}.b=\frac{\text{tang}.a}{\text{tang}.A}$; $\text{sen}.B=\frac{\cos.A}{\cos.a}$.
IV	C, a, B	c, A, b	$\text{tang}.c=\frac{\text{tang}.a}{\cos.B}$; $\cos.A=\cos.a\times\text{sen}.B$; $\text{tang}.b=\text{sen}.a\times\tan.B$.
V	C, c, A	b, a, B	$\text{tang}\,b=\text{tang}.c\times\cos.A$; $\text{sen}.a=\text{sen}.c\times\text{sen}.A$; $\cot.B=\frac{\cos.c}{\cot.A}=\cos.c\times\text{tang}.A$ ó $\text{tang}.B=\frac{1}{\cos.c\times\text{tang}.A}$.
VI	C, A, B	c, a, b	$\cos.c=\cot.A\times\cot.B=\frac{1}{\text{tang}.A\times\text{tang}.B}$; $\cos.a=\frac{\cos.A}{\text{sen}.B}$; $\cos.b=\frac{\cos.B}{\text{sen}.A}$.

73 De las seis cuestiones propuestas en estos casos, todas determi-

nan las partes buscadas, de manera que no tienen mas de una acepcion, escepto la 3ª que tiene dos; porque las datos pueden corresponder á dos triángulos diferentes. Pues aunque $\text{sen.}A = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}c}$ de la 2ª cuestion, y $\text{sen.}a = \text{sen.}c \times \text{sen.}A$ de la 5ª, parece que tambien debían tener dos acepciones, no obstante como en un triángulo rectángulo los lados que forman el ángulo recto han de ser de la misma especie que sus ángulos opuestos (47), resulta que de los dos ángulos á que puede corresponder $\text{sen.}A$, se elegirá el que sea de la misma especie que el lado a que se da conocido: y de los dos que en el segundo caso pueden corresponder á $\text{sen.}a$, se tomará el que sea de la misma especie que su ángulo opuesto A, que se da conocido.

Por lo que toca á la resolucion de la 3ª cuestion, en que ademas del ángulo recto se da otro ángulo y el lado opuesto, es necesario distinguir dos casos: 1º cuando el segundo de los ángulos dados es recto, y 2º cuando no lo es.

En el 1er caso, que es cuando el segundo de los ángulos dados A es recto, los datos pueden corresponder á una infinidad de triángulos; porque entónces siendo los ángulos A y C de 90°, el ángulo B será el polo del arco AC, y por lo mismo los lados a y c son tambien cuadrantes; de donde resulta que se podrán formar tantos triángulos con los mismos datos como cuadrantes se pueden bajar desde el polo, que son todos los que se quieran.

ξ Tambien nos confirman esto mismo las fórmulas de la tabla; porque haciendo las sustituciones correspondientes se nos convierten en

$$\text{sen.}b = \frac{\text{tang.}a}{\text{tang.}A} = \frac{\text{sen.}a}{\text{cos.}a} \times \frac{\text{cos.}A}{\text{sen.}A} = \frac{1}{0} \times \frac{0}{1} = \frac{0}{0};$$

$$\text{sen.}c = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A} = \frac{1}{1} = 1; \quad \text{sen.}B = \frac{\text{cos.}A}{\text{cos.}a} = \frac{0}{0}.$$

Ecuaciones en que la primera y tercera no determinan nada con relacion á b, B; é indican (I. 330) que b y B pueden tener todos los valores que se quieran; y la media da para c un valor igual con 90° ó $\frac{1}{2}\pi$. ›

74 Cuando el 2º de los ángulos dados no es recto, el triángulo puede tener dos formas diferentes; pero no mas, como verémos despues; y sin embargo, dando la solucion

$$\text{sen.}b = \frac{\text{tang.}a}{\text{tang.}A}; \quad \text{sen.}c = \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A}; \quad \text{sen.}B = \frac{\text{cos.}A}{\text{cos.}a};$$

parece que deja dos valores á cada una de las cantidades que se bus-

can b, c, B; y entónces parece que el número de triángulos que se podrían construir con estos datos ascendería á $2\times2\times2=8$.

Para conciliar esto, observarémos que debiendo ser b y B de una misma especie, esta circunstancia reduce solo á cuatro el número de triángulos que se podrían construir con los datos. Ademas, ya sean b, B mayores que 90°, ya sean menores, la ecuacion $\cos.c=\cos.a\times\cos.b$ escluye una de las dos acepciones de c, que resultan de $\text{sen.}a=\frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A}$; y por tanto el número de triángulos que se pueden construir se reduce efectivamente á dos, couforme debía suceder.

Resolucion de los triángulos esféricos oblicuángulos.

75 Para poder aplicar cómodamente los logaritmos á los cálculos de los triángulos esféricos oblicuángulos, es necesario trasformar aun las fórmulas halladas ántes en otras, cuyo númerador y denominador estén descompuestos en factores; lo que ejecutarémos con Euler de un modo tan simple como elegante.

La espresion $\cos.A=\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}$ (D′) se convertirá, restándola de la unidad, en

$$1-\cos.A=\frac{\text{sen.}b\times\text{sen.}c-\cos.a+\cos.b\times\cos.c}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}=\frac{\cos.(b-c)-\cos.a}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c};$$

tambien podrá ser $=\frac{\cos.(c-b)-\cos.a}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}$; porque el coseno de un arco es el mismo cuando es positivo que cuando negativo.

Añadiendo la unidad á ambos miembros será

$$1+\cos.A=\frac{\text{sen.}b\times\text{sen.}c+\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}=\frac{\cos.a-\cos.(b+c)}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c};$$

ahora, dividiendo la una por la otra, suprimiendo el denominador, y teniendo presente [19(5)] que $\frac{1-\cos.A}{1+\cos.A}=\text{tang.}\frac{1}{2}A^2$, se tendrá:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}A^2=\frac{\cos.(b-c)-\cos.a}{\cos.a-\cos.(b+c)}=[19(11)]\frac{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c+a).\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b+c)}{2\,\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c).\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}$$

en donde suprimiendo el 2, estrayendo la raiz cuadrada, y poniendo las otras ecuaciones análogas, qua sacaríamos respecto de

los ángulos B y C; tendrémos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang.}\tfrac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b-c+a)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)}}\\
\text{tang.}\tfrac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(c-a+b)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a-c+b)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(c+a-b)}}\\
\text{tang.}\tfrac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a-b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(c-a+b)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}
\end{aligned}\right\}\ (\text{S}).$$

Por medio de estas tres fórmulas resolverémos un triángulo cuando se nos den los tres lados, sin que dejen ninguna duda; pues aunque el radical debe estar afecto del signo de ambigüedad $\pm$, no obstante el signo ménos de ningun modo puede tener lugar, porque siendo todo ángulo A de un triángulo esférico menor que π, la mitad será siempre menor que $\frac{1}{2}\pi$, y por lo mismo no habrá ningun caso en que tang.$\frac{1}{2}A$ sea negativa.

76 Haciendo ahora con la primera ecuacion

$$\cos.a=\frac{\cos.A+\cos.B\times\cos.C}{\text{sen.}B\times\text{sen.}C}$$ del sistema (H'), lo mismo que con la de $\cos.A$, tendrémos $1-\cos.a=-\frac{\cos.(B+C)+\cos.A}{\text{sen.}B\times\text{sen.}C}$,

$1+\cos.a=\frac{\cos.A+\cos.(B-C)}{\text{sen.}B\times\text{sen.}C}$; de donde

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a^2=\frac{1-\cos.a}{1+\cos.a}=-\frac{\cos.(B+C)+\cos.A}{\cos.(B-C)+\cos.A}=[19(10)]\ldots\ldots$$

$$-\frac{2\cos.\tfrac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{2\cos.\tfrac{1}{2}(B-C+A)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B-C-A)};$$

de donde omitiendo el 2, estrayendo la raiz cuadrada, y poniendo las que se deducirían respecto de los lados b y c, tendrémos

$$\left.\begin{aligned}
\text{tang.}\tfrac{1}{2}a &= \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C+A)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B-C-A)}}\\
\text{tang.}\tfrac{1}{2}b &= \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\tfrac{1}{2}(A-C+B)\times\cos.\tfrac{1}{2}(A-C-B)}}\\
\text{tang.}\tfrac{1}{2}c &= \sqrt{-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A+C)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B-A-C)}}
\end{aligned}\right\}\ (\text{T}).$$

77 Cada ecuacion de este sistema (T) aparece bajo la forma imaginaria; pero si observamos (44) que $B+C+A>\pi$ y $<3\pi$, ten-

drémos que $\frac{1}{2}(B+C+A)$ será por precision mayor $\frac{1}{2}\pi$ y menor $\frac{3}{2}\pi$, en cuyo caso siempre el coseno (15) es negativo; luego el signo — que tenga, combinado con el — que habla con la raya del quebrado, dará un signo + que hará desaparecer la forma imaginaria.

Ninguno de los otros factores puede ser negativo; porque siendo (46) en un triángulo la diferencia entre la suma de dos ángulos y el tercero, menor que π, tendrémos que $\frac{1}{2}(B+C-A)$, $\frac{1}{2}(A+C-B)$ ó $\frac{1}{2}(A+B-C)$ será menor que $\frac{1}{2}\pi$, por lo que su coseno será positivo; y como el coseno de un arco positivo es el mismo que el de su igual negativo, tambien será positivo el coseno de $\frac{1}{2}(A-B-C)$, $\frac{1}{2}(B-A-C)$, ó $\frac{1}{2}(C-A-B)$.

El signo del radical debe siempre ser el +, porque siempre ha de ser [22] $\frac{1}{2}a<\frac{1}{2}\pi$; y este sistema de ecuaciones nos servirá para resolver un triángulo cuando se nos den conocidos los tres ángulos.

Hemos preferido en estos dos sistemas el hacer uso de las tangentes, porque no dan lugar á duda; pero tambien podríamos haberlo conseguido por medio de los senos con alguna mas sencillez, observando

que [19(3)] $\text{sen.}\frac{1}{2}A^2=\frac{1-\cos.A}{2}=[\S\,75]\frac{\cos.(b-c)-\cos.a}{2\text{sen.}b\times\text{sen.}c}$ ....

$$=[(11)\,\S\,19].\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c+a)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{2\text{sen.}b\times\text{sen.}c};$$

de donde resulta

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\tfrac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+a-c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}}\\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}a\times\text{sen.}c}}\\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}a\times\text{sen.}b}}\end{aligned}\right\}(\text{S}').$$

78 Del mismo modo hallaríamos, que respecto de (T) se tendría

$$\left.\begin{aligned}\text{sen.}\tfrac{1}{2}a&=\sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen.}B\times\text{sen.}C}}\\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}b&=\sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(C+B+A)\times\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen.}A\times\text{sen.}C}}\\ \text{sen.}\tfrac{1}{2}c&=\sqrt{-\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{sen.}A\times\text{sen.}B}}\end{aligned}\right\}(T').$$

Esc. Estos sistemas tampoco dejan duda; porque como todo ángu-

lo ó arco debe ser menor (22) que π, el seno de su mitad será menor que el de $\frac{1}{2}\pi$, y por consiguiente se deberá siempre tomar de los dos ángulos á que puede corresponder un seno, el menor, esto es, el agudo.

79 Las espresiones (1ª y 2ª de D′) quitándoles los divisores dan

$$\begin{cases} \cos.a-\cos.b\times\cos.c=\text{sen}.b\times\text{sen}.c\times\cos.A, \\ \cos.b-\cos.a\times\cos.c=\text{sen}.a\times\text{sen}.c\times\cos.B ; \end{cases}$$

y dividiendo la primera por la segunda, y observando que los senos de los lados son proporcionales con los senos de los ángulos opuestos, se hallará

$$\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}=\frac{\text{sen}.b}{\text{sen}.a}\times\frac{\cos.A}{\cos.B}=\frac{\text{sen}.B}{\text{sen}.A}\times\frac{\cos.A}{\cos.B}=\frac{\text{sen}.B\times\cos.A}{\text{sen}.A\times\cos.B}\,(\text{d});$$

añadiendo á ambos miembros de esta ecuacion la unidad, y reduciendo el entero á la especie del quebrado que le acompaña, será

$$\frac{\cos.b-\cos.a\times\cos.c+\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}=\frac{\text{sen}.A\times\cos.B+\text{sen}.B\times\cos.A}{\text{sen}.A\times\cos.B}\,(\text{V}),$$

$$\text{ó}\quad\frac{(\cos.a+\cos.b)(1-\cos.c)}{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}=\frac{\text{sen}.(A+B)}{\text{sen}.A\times\cos.B}\,(\text{U});$$

quitando la unidad de ambos miembros de la misma (ec. d), y reduciendo los enteros á la especie de sus respectivos quebrados, será

$$\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c-\cos.b+\cos.a\times\cos.c}{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}=\frac{\text{sen}.B\times\cos.A-\text{sen}.A\times\cos.B}{\text{sen}.A\times\cos.B},$$

$$\text{ó}\quad\frac{(\cos.a-\cos.b)(1+\cos.c)}{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}=\frac{\text{sen}.(B-A)}{\text{sen}.A\times\cos.B}\,(\text{U}').$$

Dividiendo el primer miembro de esta ecuacion por el de la (U) y simplificando, resultará

$$\frac{(\cos.a-\cos.b)(1+\cos.c)}{(\cos.a+\cos.b)(1-\cos.c)}=\frac{\cos.a-\cos.b}{\cos.a+\cos.b}\times\frac{1+\cos.c}{1-\cos.c}\,(\text{U}'').$$

Ahora debemos observar, que las fórmulas, deducidas en el párrafo 19, son generales para todos los valores que tengan los arcos, ó los ángulos de que son medida. Hémos señalado allí los arcos por A y B; y dichas fórmulas serán tambien verdaderas, señalando los arcos por cualesquiera otras letras. Por lo que la fórmula (17) invertida, poniendo a en vez de B, y b en vez de A, se nos convertirá en $\frac{\cos.a-\cos.b}{\cos.b+\cos.a}=\text{tang}.\frac{b+a}{2}.\text{tang}.\frac{b-a}{2}$ (U‴).

Por la misma razon, podrémos sustituir en la fórmula (5) de

dicho párrafo, c en vez de A, y trastornándola se convertirá en

$$\frac{1+\cos.c}{1-\cos.c}=(\cot.\tfrac{1}{2}c)^2 \quad (U'^{v}).$$

Por lo que, el segundo miembro de la (ec. U'') se nos convertirá en

$$\text{tang.}\frac{b+a}{2}.\text{tang.}\frac{b-a}{2}.(\cot.\tfrac{1}{2}c)^2 \quad (U^{v}).$$

Dividiendo el segundo miembro de la (ec. U') por el de la (U), y simplificando se tiene

$$\frac{\text{sen.}(B-A)}{\text{sen.}(B+A)}=(\text{I. }644(aa'))\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B-A).\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B+A).\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)} \quad (U'^{vi}).$$

Igualando el valor (U^{v}), que representa el cociente de dividir el primer miembro de la (ec. U') por el de la (ec. U), con el de la espresion (U'^{vi}), que es el cociente de dividir los segundos miembros de las mismas ecuaciones, tendrémos

$$\text{tang.}\frac{b+a}{2}.\text{tang.}\frac{b-a}{2}.(\cot.\tfrac{1}{2}c)^2=\frac{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B-A).\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(B+A).\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)} \quad (X).$$

Ahora, comparando la suma de antecedentes con su diferencia en las dos primeras razones de la serie [(α) § 62], se tendrá

$$\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B}{\text{sen.}A+\text{sen.}B}=\frac{\text{sen.}a-\text{sen.}b}{\text{sen.}a+\text{sen.}b} \quad (U^{vii}).$$

Pero, en virtud de la (ec. 12 inv.) se tiene

$$\frac{\text{sen.}A-\text{sen.}B}{\text{sen.}A+\text{sen.}B}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A+B)\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)} \quad (U^{viii});$$

y respecto de los arcos a y b, la (ec. 12 inv.) tomando el último valor, nos da $\dfrac{\text{sen.}a-\text{sen.}b}{\text{sen.}a+\text{sen.}b}=\dfrac{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)}{\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a+b)}=\cot\tfrac{1}{2}(a+b)\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)$ (U'^{x}).

Como los primeros miembros de las (ees.U^{vii} y U'^{x}) son iguales en virtud de la (ec. U^{vii}), podrémos igualar los segundos, y será

$$\cot.\tfrac{1}{2}(a+b).\text{tang.}\tfrac{1}{2}(a-b)=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B).\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(A+B).\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Observando ahora, que (§ 16) el seno y la tangente de un arco negativo son negativos, y que el coseno permanece positivo aunque el arco sea negativo, podemos poner $b-a$ en vez de $a-b$, en el primer miembro de esta ecuacion, y $B-A$ en vez de $A-B$ en el segundo; lo cual equivale á mudar los signos á los dos miembros de la ecua-

cion; y tendrémos

$$\cot.\tfrac{1}{2}(b+a).\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b-a)=\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+A).\text{sen.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+A).\cos.\frac{1}{2}(B-A)}(\text{U}^x).$$

Multiplicando ordenadamente esta ecuacion y la (X), y teniendo presente que $\text{tang.}\frac{1}{2}(b+a)\times\cot.\frac{1}{2}(b+a)=1$, tendrémos

$$\text{tang.}^2\frac{b-a}{2}\times\cot.\tfrac{1}{2}c^2=\frac{(\text{sen.}\frac{1}{2}(B-A))^2}{(\text{sen.}\frac{1}{2}(B+A))^2},$$

que estrayendo la raiz cuadrada, será $\text{tang.}\frac{b-a}{2}\times\cot.\frac{1}{2}c=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+A)}$;

y dividiendo la (X) por esta, será por último

$\text{tang.}\frac{a+b}{2}\times\cot.\frac{1}{2}c=\frac{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\frac{1}{2}(B+A)}$; y dividiendo por $\cot.\frac{1}{2}c$ estas dos últimas, se convertirán, teniendo presente que $\frac{1}{\cot.\frac{1}{2}c}=\text{tang.}\frac{1}{2}c$,

$$\text{en}\quad \left.\begin{array}{l}\text{tang.}\frac{b-a}{2}=\text{tang.}\frac{1}{2}c\times\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+A)}\\ \text{tang.}\frac{b+a}{2}=\text{tang.}\frac{1}{2}c\times\frac{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\frac{1}{2}(B+A)}\end{array}\right\}(\text{Y});$$

con cuyo auxilio se podrán hallar dos lados de un triángulo esférico, en conociendo el otro y los dos ángulos adyacentes; pues señalando con b' y a' los valores de los arcos $b+a$, $b-a$, sale (I. 229) $b=\frac{1}{2}(b'+a')$, $a=\frac{1}{2}(b'-a')$; y para encontrar el valor del otro ángulo C, harémos uso de la ecuacion $\text{sen.C}=\frac{\text{sen.}A\times\text{sen.}c}{\text{sen.}a}$ (Y), sacada de la segunda del sistema (C § 62). Podríamos hallar otras semejantes para cuando se diesen A, C y b, ó B, C y a; pero en la práctica no lo necesitarémos, si al resolver un triángulo, tenemos cuidado de colocar la letra A en el menor de los ángulos conocidos, la B en el mayor de los conocidos, y la C en el ángulo que se busca.

8o Para deducir las fórmulas correspondientes al caso en que se conozcan dos lados y el ángulo que forman, nos valdrémos de lo demostrado (33) acerca del *triángulo polar ó suplementario*. Por lo que sustituirémos en las dos primeras ecuaciones (Y), las espresiones $\pi-\text{A}$ en vez da a; $\pi-\text{B}$ en vez de b; $\pi-c$ en vez de c; $\pi-a$ en vez de A; y $\pi-b$ en vez de B; lo que convertirá á la primera en $\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{A}-\text{B})=\text{tang.}(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}\text{C}).\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}(\pi-\frac{1}{2}(b+a))}$; y á la segun-

da en $\text{tang.}(\pi-\frac{1}{2}(B+A))=\text{tang.}(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}C).\frac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{\cos.(\pi-\frac{1}{2}(b+a))}$.

Y observando que en virtud de lo espuesto (§ 13 y 14)

$\text{tang.}(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}C)=\text{cot.}\frac{1}{2}C$; $\text{sen.}(\pi-\frac{1}{2}(a+b))=\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)$;

$\text{tang.}(\pi-\frac{1}{2}(B+A))=-\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)$, y $\cos.(\pi-\frac{1}{2}(b+a))=-\cos.\frac{1}{2}(b+a)$;

las dos últimas ecuaciones se convertirán en

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang.}\frac{1}{2}(A-B)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\dfrac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b)},\\ -\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\dfrac{\cos.\frac{1}{2}(a-b)}{-\cos.\frac{1}{2}(b+a)}.\end{array}\right\}$$

Como el seno y la tangente de un arco negativo son negativos, en la primera de estas dos ecuaciones podemos poner B—A en vez de A—B, y $b-a$ en vez de $a-b$; lo cual equivale á mudar los signos á los dos miembros de la ecuacion; y la primera de estas dos últimas se convertirá en $\text{tang.}\frac{1}{2}(B-A)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\dfrac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+a)}$.

En los dos miembros de la segunda ecuacion resulta un signo — que podrémos suprimir; y ademas, como el coseno de un arco negativo es el mismo que el del arco positivo, en el numerador de ella podrémos poner $b-a$ en vez de $a-b$; y tendrémos por último

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}.$$

Luego, para la resolucion del caso en que se nos den dos lados, y el ángulo que forman, nos servirán las dos ecuaciones

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(B-A)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+a)},$$

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)=\text{cot.}\frac{1}{2}C.\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}\ (Z)\ (*).$$

pues por ellas conocerémos la mitad de la suma y la mitad de la diferencia de los dos ángulos B y A; y en virtud de lo espuesto (I. 229) hallarémos los espresados ángulos B y A.

Para encontrar el valor del otro lado c, harémos uso de la ecua-

---

(*) *Estas dos ecuaciones y las dos primeras del sistema* (Y) *puestas en proporcion, se conocen con el nombre de* analogias de Neper.

TABLA

en que se contiene la resolucion de los triángulos esféricos oblicuángulos.

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
I	*a*	*A*	$\text{tang.}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c+a)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b+c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+a-c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}}$
	b	*B*	$\text{tang.}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(c-a+b)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a-c+b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(c+a-b)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\text{sen.}a\times\text{sen.}c}}$
	c	*C*	$\text{tang.}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(a-b+c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(c-a+b)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+b-c)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c-a)\times\text{sen.}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\text{sen.}a\times\text{sen.}b}}$
II	*A*	*a*	$\text{tang.}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\cos.\frac{1}{2}(B+A-C)\times\cos.\frac{1}{2}(B-C-A)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(B+C-A)}{\text{sen.}B\times\text{sen.}C}}$
	B	*b*	$\text{tang.}\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\cos.\frac{1}{2}(A-C+B)\times\cos.\frac{1}{2}(A-C-B)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+C+A)\times\cos.\frac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen.}A\times\text{sen.}C}}$
	C	*c*	$\text{tang.}\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(B+A+C)\times\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B-A+C)\times\cos.\frac{1}{2}(B-A-C)}}$, ó $\text{sen.}\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)\times\cos.\frac{1}{2}(A+B-C)}{\text{sen.}A\times\text{sen.}B}}$
III	*A*	*a*	$\text{tang.}\frac{b-a}{2}=\text{tang.}\frac{1}{2}c\times\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-A)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+A)}$
	B	*b*	$\text{tang.}\frac{b+a}{2}=\text{tang.}\frac{1}{2}c\times\frac{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\frac{1}{2}(B+A)}$
	c	*C*	$\text{sen.}C=\frac{\text{sen.}A\times\text{sen.}c}{\text{sen.}a}=\frac{\text{sen.}B\times\text{sen.}c}{\text{sen.}b}$

De donde llamando a', b', á los valores de estas tangentes, esto es, haciendo $\frac{b-a}{2}=a'$, y $\frac{b+a}{2}=b'$, resulta $a=b'-a'$, $b=b'+a'$.

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
IV	*a*	*A*	$\text{tang.}\frac{B-A}{2}=\text{cot.}\frac{1}{2}C\times\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+a)}$
	b	*B*	$\text{tang.}\frac{B+A}{2}=\text{cot.}\frac{1}{2}C\times\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}$
	C	*c*	$\text{sen.}c=\frac{\text{sen.}C\times\text{sen.}a}{\text{sen.}A}=\frac{\text{sen.}C\times\text{sen.}b}{\text{sen.}B}$

De donde, llamando A', B', á los ángulos á que corresponden estas tangentes, esto es, haciendo $\frac{B-A}{2}=A'$ y $\frac{B+A}{2}=B'$, resulta $A=B'-A'$, $B=B'+A'$.

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
V	*a*	*A*	$\text{sen.}A=\frac{\text{sen.}a\times\text{sen.}B}{\text{sen.}b}$
	B	*c*	$\text{tang.}\frac{1}{2}c=\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}\times\text{tang.}\frac{a+b}{2}$
	b	*C*	

Conocido por esta fórmula el lado *c*, se determinará *C* por la $\text{sen.}C=\frac{\text{sen.}c.\text{sen.}B}{\text{sen.}b}$, ó por la $\text{tang.}\frac{1}{2}C=\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(b+a)}.\text{cot.}\frac{1}{2}(A+B)$, sacada del tercer valor (Z).

Casos.	Datos.	Partes buscadas.	Valores de las partes desconocidas determinadas por las conocidas.
VI	*A*	*a*	$\text{sen.}a=\frac{\text{sen.}b\times\text{sen.}A}{\text{sen.}B}$
	B	*c*	$\text{tang.}\frac{1}{2}C=\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)}\times\text{cot.}\frac{A+B}{2}$
	b	*C*	

Conocido por esta fórmula el ángulo *C*, se determinará el lado *c* por la $\text{sen.}c=\frac{\text{sen.}C.\text{sen.}b}{\text{sen.}B}$, ó por la $\text{tang.}\frac{1}{2}c=\frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(B-A)}.\text{tang.}\frac{1}{2}(a+b)$, sacada de la 2.ª de (Y).

cion $\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.C.\text{sen}.a}{\text{sen}.A}$, ó de la $\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.C.\text{sen}.b}{\text{sen}.B}$ (Z), sacadas de la segunda y tercera del sistema (C).

Esc. Podríamos hallar otras ecuaciones semejantes para cuando se diesen a, c y B, ó b, c y A; pero en la práctica no tendrémos necesidad de ellas, si al resolver un triángulo colocamos la C en el ángulo que se da conocido, y las A y B en los ángulos opuestos respectivamente á los lados a y b que se dan conocidos.

81 Los otros dos casos que nos falta resolver son cuando se dan conocidos dos lados y el ángulo opuesto al uno de ellos, ó dos ángulos y el lado opuesto al uno de ellos. Si se dan conocidos los lados a, b y el ángulo B opuesto al uno de ellos, deberíamos determinar el ángulo A por la fórmula $\text{sen}.A = \frac{\text{sen}.a \times \text{sen}.B}{\text{sen}.b}$, sacada de la primera del sistema (C).

Y si se diesen los ángulos A, B y el lado b, hallaríamos el lado a por la fórmula $\text{sen}.a = \frac{\text{sen}.b \times \text{sen}.A}{\text{sen}.B}$, sacada de la misma ecuacion; y como en estos dos casos nos son ya conocidos dos ángulos A, B y sus dos lados opuestos a, b, conocerémos el lado c en ambòs por la fórmula $\text{tang}.\frac{1}{2}c = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\frac{1}{2}(B-A)} \times \text{tang}.\frac{1}{2}(a+b)$, sacada de la segunda del sistema (Y), y el ángulo en C por la fórmula

$\text{tang}.\frac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2}(b-a)}{\cos.\frac{1}{2}(a+b)} \times \cot.\frac{1}{2}(A+B)$, sacada de la segunda del sistema (Z); con lo cual quedarán resueltos todos los casos de la Trigonometría esférica.

Formarémos, del mismo modo que en los triángulos rectángulos una tabla en que se contenga la resolucion de estos seis casos, que es la adjunta.

82 En los dos primeros casos no puede ocurrir ninguna duda, porque estando determinados los ángulos ó los lados por las líneas trigonométricas de sus mitades, siempre deberán corresponder á ángulos ó lados agudos; porque en un triángulo debiendo ser todo ángulo ó lado menor que π, su mitad será siempre menor que $\frac{1}{2}\pi$, ó agudo.

En el tercer caso encontramos el ángulo C por su seno; pero conocerémos si es agudo, ú obtuso, teniendo presente que el mayor se debe oponer al mayor lado, pues teniendo ya conocidos los tres lados c, a, b, y los dos ángulos dados A, B, solo tendrémos que advertir qué ángulo de los dos que corresponden

den al seno que da el cálculo, cumple con dicha condicion; y si en algun caso no basta esto, echarémos mano de la fórmula (H)

$$\cos.C = -\cos.A \times \cos.B + \cos.c \times \text{sen}.A \times \text{sen}.B ;$$

en la cual si sustituimos los valores de A, B, c, y se obtiene un valor negativo, C será obtuso; y si positivo, será agudo.

En el cuarto evitarémos igualmente la duda que podría haber respecto del lado c, por la misma observacion; y si esto no basta recurrirémos á la fórmula (D) $\cos.c = \cos.a \times \cos.b + \cos.C \times \text{sen}.a \times \text{sen}.b$, que nos dará á conocer con su signo si c debe ser agudo ú obtuso.

En el quinto hay ocasiones en que los mismos datos pueden corresponder á dos triángulos. En efecto, supongamos que BCB′, BDB′ (fig. 28), sean dos semicírculos máximos; si desde un punto cualquiera C concebimos el arco CD perpendicular á BDB′, y los arcos CA, CA′ equidistantes de CD, los triángulos CDA, CDA′ serán iguales, por tener dos lados iguales é igual el ángulo comprendido; luego CA=CA′ y ÇAD=CA′D; por lo cual los dos triángulos CBA, CBA′ tienen los mismos datos, á saber, comun el lado BC y el ángulo en B, é iguales los lados CA, CA′ opuestos al ángulo comun; y sin embargo en el primero el ángulo BAC es suplemento del CA′D, porque este es igual con ÇAD. Mas, así como el caso homólogo de la Trigonometría rectilínea no siempre es dudoso, así tambien hay aquí casos particulares en que la cuestion solo admite una solucion, como vamos á manifestar.

Ante todas cosas observarémos que si el ángulo dado $B = \frac{1}{2}\pi$ ó es recto, no hay mas de una solucion; porque entónces en virtud de lo dicho (41) si $a > b$ será tambien $A > B$ ú obtuso; y si $a < b$ será $A < B$ ó agudo; luego en este caso no hay duda, y la cuestion solo admite una solucion. Si $b = a$, tampoco; porque entónces $A = B$ (§ 39); ni cuando $a + b = \pi$, porque entónces será $a = \pi - b$, y $\text{sen}.a = \text{sen}.(\pi - b) = \text{sen}.b$; con lo cuál la fórmula de la tabla nos dará $\text{sen}.A = \text{sen}.B$, y deberá ser ó $A = B$, ó $A = \pi - B$; pero no pudiendo ser $A = B$, si no es $a = b$, será $A = \pi - B$.

Habrá siempre dos resoluciones cuando $a = \frac{1}{2}\pi$; porque si suponemos $BC = \frac{1}{2}\pi$ (fig. 28), tendrémos que $CB' = \frac{1}{2}\pi$, y concibiendo el arco CD perpendicular á BB′, los triángulos BCD, B′CD serán iguales (55 esc.) por tener un lado CD comun é iguales las hipotenusas; luego de cualquier manera que tomemos DA=DA′ y se conciban los arcos CA, CA′, los triángulos CBA, CBA′ tendrán unos mismos datos, y el ángulo CA′D=CAD será suplemento de BAC.

Ahora, si suponemos que el ángulo B del triángulo ABC sea menor que $\frac{1}{2}\pi$, y concebimos prolongados los lados BC, BA hasta que se encuentren de nuevo en B′, tomamos el arco $BC < \frac{1}{2}\pi$, y bajamos el arco CD perpendicular al BA, los lados BD, CD del triángulo rectángulo CBD serán menores que $\frac{1}{2}\pi$, puesto que (47 y 48) han de ser de una misma especie, y de la misma especie que el ángulo en B; luego si desde D tomamos á derecha é izquierda dos arcos DA′=DA, y concebimos los arcos CA, CA′, serán iguales; porque los triángulos CDA, CDA′ tienen en este caso dos lados iguales é igual el ángulo comprendido. Por lo que resulta que hay dos triángulos BCA, BCA′ que tienen los mismos datos, á saber: el ángulo B, que es comun á los dos triángulos; el lado BC que tambien es comun, y los lados CA, CA′

que son iguales en virtud de lo que acabamos de manifestar; luego si suponemos BC$=a$, CA$=b$, tendrémos que un triángulo en que se verifica $B<\frac{1}{2}\pi$, $a<\frac{1}{2}\pi$, y $b<a$, tiene por precision dos soluciones, pues estos mismos datos convienen á los espresados triángulos CAB, CA′B.

Pero si, suponiendo siempre B y a menores que $\frac{1}{2}\pi$, se tiene $b>a$, entónces el punto A pasaría mas á la izquierda del punto B, porque debería distar mas del arco perpendicular CD (55 esc.); de manera, que estaría representado por CK, y entónces ya no es comun para ambos triángulos CKB, CA′B, sinó el lado CB y el CA′, que suponemos igual con CA; pues el ángulo CBK del primero ya no es el mismo CBA′ del segundo, sinó que son el uno suplemento del otro (I § 557 esc. 2.º); luego en este caso el ángulo buscado será el A′ y deberá ser agudo; por lo que no habrá mas de una solucion representada por A′BC.

Supongamos ahora que $B<\frac{1}{2}\pi$, y BC′$>\frac{1}{2}\pi$, y tendrémos bajando C′D′ perpendicular sobre BAB′, que C′D′$<$B′C′ (55 esc.) y el arco C′A‴ tirado entre D′ y B′ será mayor que C′D′, y menor que B′C′; luego haciendo BC′$=a$, C′A″$=$C′A‴$=b$, se advierte que la suposicion de $B<\frac{1}{2}\pi$ y $a>\frac{1}{2}\pi$, dará dos soluciones si $b+a<$BC′$+$B′C′$=\pi$; y no dará mas de una si $b+a>\pi$; porque entónces el punto A‴ pasaría mas allá de B′, y caería por ejemplo en H; en cuyo coso ya el triángulo BC′H tendría el lado BB′H mayor que una semicircunferencia BB′, lo que no puede ser; por lo cual en este caso no hay duda, y el ángulo que se busca opuesto al lado BC′ será por precision obtuso.

Supongamos ahora que el ángulo B, que es el conocido, sea obtuso, y tendrémos que si BC$=a<\frac{1}{2}\pi$, concibiendo el arco CD perpendicular á BDB′, resultará (47 y 48), que BD y CD serán obtusos, y con mayor razon los arcos CA, CA′, que se conciban á igual distancia del perpendicular CD; ahora, si el otro lado dado b fuese tal que $a+b>\pi$, como se tendría $b>\pi-a$, sería obtuso, y por consiguiente sen.$b<$sen.$(\pi-a)=$sen.a (porque en los ángulos ó arcos obtusos (I. 636) al mayor corresponde el seno menor); y dividiendo por sen.B la fórmula de la tabla, resultaría $\frac{\text{sen.}A}{\text{sen}\,B}=\frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}b}$, por lo que será sen.$B<$sen.$A$; ahora, siendo $b>a$, se debería tener $B>A$ (§ 41); y como si A es obtuso, con tal que sea menor que B, se verificará que sen.$B<$sen.A, y ambas circunstancias se verificarán igualmente en el suplemento de A (I. 637), resulta que estos datos nos darán dos soluciones. Al contrario, si en los mismos supuestos se verifica que $b+a<\pi$, como se tendrá $b<\pi-a$, y b debe ser obtuso, resultará sen.$b>$sen.$(\pi-a)=$sen.a; por lo que la fórmula de la tabla nos dará sen.$B>$sen.A, circunstancia que junto con la de $B>A$ no se puede verificar á ménos que A no sea agudo; luego en este caso no puede ser A obtuso, y por consiguiente solo hay una resolucion.

Supongamos ahora $B>\frac{1}{2}\pi$, y $a>\frac{1}{2}\pi$; concibiendo el arco CD perpendicular á BDB′, se tendrá que DC será obtuso, y BD agudo (47 y 48); si CD es obtuso, con mas razòn lo será CA ó CA′, que espresamos por b. Ahora, si $b>a$, siendo b y a obtusos, será sen.$b<$sen.a, y la fórmula de

la tabla nos dará que sen.B<sen.A, circunstancia que se podría verificar ya sea A agudo ú obtuso sin incurrir en contradiccion. Al contrario, si $b<a$, como han de ser obtusos, se tendrá sen.b>sen.a, y la fórmula de la tabla nos dará sen.B>sen.A, circunstancia que no se puede verificar al mismo tiempo que la de ser $B<A$ (§ 41), á ménos qúe A no sea obtuso. Por lo que podrémos poner todos estos resultados en la adjunta tabla.

No habrá mas de una solucion en los tres casos siguientes.

1.º Si $B=\frac{1}{2}\pi$; y A será obtuso si $a>b$: y agudo si $a<b$.

2.º Si $b=a$; y será $A=B$.

3.º Si $a+b=\pi$, y será $A=\pi-B$, si no es $a=b$.

Habrá dos si $a=\frac{1}{2}\pi$.

Si $B<\frac{1}{2}\pi$ y $a<\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} b>a & \text{da una solucion, y } A \text{ será agudo.} \\ b<a, & \text{da dos.} \end{cases}$

Si $B<\frac{1}{2}\pi$ y $a>\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} b+a>\pi & \text{da una, y } A \text{ será obtúso.} \\ b+a<\pi & \text{da dos.} \end{cases}$

Si $B>\frac{1}{2}\pi$ y $a<\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} b+a>\pi & \text{da dos soluciones.} \\ b+a<\pi & \text{da una y } A \text{ será agudo.} \end{cases}$

Si $B>\frac{1}{2}\pi$ y $a>\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} b>a & \text{da dos soluciones.} \\ b<a & \text{da una y } A \text{ será obtuso.} \end{cases}$

Estos mismos resultados se pueden aplicar al sesto caso por medio del triángulo polar; y se sacarán de él los caractéres siguientes que harán conocer, si para valores dados de A, B, b, hay dos triángulos que satisfacen á la cuestion, ó si no hay mas de uno. Habrá una solucion;

1.º Si $b=\frac{1}{2}\pi$, y a será agudo si $A>B$, y obtuso si $A<B$.

2.º Si $B=A$, y será $a=b$.

3.º Si $A+B=\pi$, y será $a=\pi-b$, si no es $A=B$.

Habrá dos siempre que $A=\frac{1}{2}\pi$.

Si $b>\frac{1}{2}\pi$, $A>\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} B>A & \text{da dos soluciones.} \\ B<A, & \text{una, y } a \text{ será obtuso.} \end{cases}$

Si $b>\frac{1}{2}\pi$, $A<\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} B+A>\pi & \text{da dos.} \\ B+A<\pi, & \text{una, y } a \text{ será agudo.} \end{cases}$

Si $b<\frac{1}{2}\pi$, $A>\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} B+A>\pi & \text{una, y } a \text{ será obtuso.} \\ B+A<\pi, & \text{da dos.} \end{cases}$

Si $b<\frac{1}{2}\pi$, $A<\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} B>A & \text{una, y } a \text{ será agudo.} \\ B<A, & \text{da dos.} \end{cases}$

Para no dejar nada que desear, sacarémos el resultado que corresponde á

$$B<\tfrac{1}{2}\pi, \text{ y } a<\tfrac{1}{2}\pi.$$

Para esto, no tenemos que hacer mas que sustituir $\pi-b$ en lugar de B, $\pi-A$ en lugar de a, y $\pi-B$ en lugar de b, y tendrémos

$\pi-b<\frac{1}{2}\pi$, $\pi-A<\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} \pi-B>\pi-A & \text{da una solucion, y } a \text{ será obtuso, porque } A \text{ era agudo.} \\ \pi-B<\pi-A & \text{da dos;} \end{cases}$

que haciendo las traslaciones y simplificaciones oportunas, se convierte en

Si $b>\frac{1}{2}\pi$, $A>\frac{1}{2}\pi$ $\begin{cases} B>A & \text{da dos,} \\ B<A & \text{da una, y } a \text{ será obtuso.} \end{cases}$

83 Ahora, cón el fin de manifestar el uso de estas tablas en la práctica, nos propondrémos resolver algunos casos.

1.º Sea ABC (fig. 29) un triángulo rectángulo, y supongamos que se conozcan los dos lados que forman el ángulo recto C, siendo el uno de $47°\,50'$ y el otro de $32°$ y $20'$, como se ve en la misma figura.

Para hallar la hipotenusa, harémos uso de la fórmula que nos da la tabla del (§ 72) en el caso 1.º que es en el que nos hallamos, de conocer los dos catetos; la cual es $\cos.c=\cos.a\times\cos.b=\cos.32°20'\times\cos.47°50'$, que por logaritmos se tiene

$$\begin{aligned}\log.\cos.32°20'&=\ 9{,}9268314\\ \log.\cos.47°50'&=\ 9{,}8269098\\ \hline +9{,}7537412&=\log.\cos.55°26'40''.\end{aligned}$$

Aquí se rebaja una decena á causa de que la fórmula se debe considerar dividida por el rádio.

Para hallar el ángulo A, la fórmula es $\text{tang.}A=\dfrac{\text{tang.}a}{\text{sen.}b}=\dfrac{\text{tang.}32°20'}{\text{sen.}47°50'}$,

que por logaritmos será

$$\begin{aligned}\log.\text{tang.}32°20'&=9{,}8013957\\ \text{comp. log.sen.}47°50'&=0{,}1300674\\ \hline 9{,}9314631&=\log.\text{tang.}40°29'51''.\end{aligned}$$

Para hallar el ángulo B, la fórmula es $\text{tang.}B=\dfrac{\text{tang.}b}{\text{sen.}a}=\dfrac{\text{tang.}47°50'}{\text{sen.}32°20'}$,

que por logaritmos será

$$\begin{aligned}\log.\text{tang.}47°50'&=10{,}0430228\\ \text{comp. log.sen.}32°20'&=\ 0{,}2717729\\ \hline +0{,}3147957&=\log.\text{tang.}64°9'16''.\end{aligned}$$

2.º Para manifestar la resolucion de los triángulos esféricos oblícuángulos, elegirémos un caso dudoso del quinto, que representarémos en la (fig.30).

Los datos son $B=57°\,30'$, el lado $a=87°\,45'$ y el $b=70°$.

Para hallar el ángulo A se tiene la fórmula $\text{sen.}A=\dfrac{\text{sen.}a\times\text{sen.}B}{\text{sen.}b}$; que por logaritmos dará

$$\begin{aligned}\log.\text{sen.}87°45'&=\ 9{,}9996650\\ \log.\text{sen.}57°30'&=\ 9{,}9260292\\ \text{comp. log.sen.}70°&=\ 0{,}0270142\\ \hline +9{,}9527084&=\log.\text{sen.}63°44'38''.\end{aligned}$$

Pero como el seno de un arco es el mismo que el de su suplemento, se tendrá que este logaritmo corresponderá igualmente al del seno de $116°15'22''$.

Ahora, como sabemos por otra parte que el triángulo admite dos resoluciones, y que A puede ser agudo ú obtuso, lo resolverémos en estos dos supuestos.

Vamos á hallar el lado c cuando A es agudo; para esto sumarémos las án-

gulos A, B, y despues los restarémos, y tomando la mitad de la suma y resta, tendrémos $\frac{1}{2}(A+B)=60°37'19''$, $\frac{1}{2}(A-B)=3°7'19''$; tomemos tambien la mitad de $a+b$, y tendrémos $\frac{1}{2}(a+b)=78°52'30''$; con cuya preparacion hallarémos el lado c por logaritmos en virtud de la fórmula de la tabla, como aquí se presenta:

log.cos.60°37'19''=.....	9,6907347
	—337
log.tang.78°52'30''=.....	10,7063163
compl. log, cos. 3° 7' 19''=.....	0,0006450
	2 0,3976623 =
	1

log.tang.68°11'9'', 4=log.tang.$\frac{1}{2}c$, que da $c=136°22'18'',8$.

El ángulo C lo hallarémos por cualquiera de las dos fórmulas de la tabla; y para manifestar su uso, lo harémos por las dos.

Para hacerlo por la primera, tendrémos

Log.sen.c=log.sen.136°22'18'', 8=log sen.43°37'41'', 2=....	9,8388306
	26
log.sen.B=log.sen.57°30'=....	9,9260292
compl.log.sen.b=compl.log.sen.70°=....	0,0270142
	1 9,7918766 =

log.sen.C=log.sen.38°15'44'',8.

Pero, como (41) á mayor lado se opone mayor ángulo, siendo c obtuso y b agudo, pues que no vale mas de 70°, resulta que el ángulo C debe ser mayor que el ángulo B. Luego el valor del ángulo C no será el que hemos puesto, sinó su snplemento, á saber: 141° 44' 15'',2.

Para encontrar el mismo ángulo C por la segunda fórmula de la tabla, sumarémos los lados a, b, restarémos este de aquel, y partirémos la suma y la resta por dos, lo que nos dará

$$\frac{1}{2}(a+b)=78°52'30'',\ \frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{2}(87°45'-70°)=\frac{1}{2}(17°45')=8°52'30'',\ \text{y}$$

$$\frac{1}{2}(A+B)=60°37'19''$$

con cuya preparacion, y teniendo presente (16) que $\cos.\frac{1}{2}(a-b)=\cos.\frac{1}{2}(b-a)$, la fórmula nos suministrará dicho ángulo como aquí se presenta:

log.cos. 8°52'30''=....	9,9947689
log.cot.60°37'19''=....	9,7505269
	—443
compl.log.cos.78°52'30''=....	0,7145550
	2 0,4598065 =
	1

log.tang.70°52'7'',6=log.tang.$\frac{1}{2}C$, de donde $C=141°44'15'',2$, que es el mismo valor de ántes.

De manera que, suponiendo que el ángulo en A sea agudo, nos resulta el lado $c=136°22'18'',8$, y el ángulo $C=141°44'15'',2$.

Ahora sacarémos los valores de c, C, cuando A es obtuso, ó de 116°15′22″: y haciendo con los ángulos A, B, y los lados a, c, lo mismo que cuando $A=63°44'38''$, tendrémos para encontrar el lado c,

$$\tfrac{1}{2}(A+B)=86°52'41'', \text{ y } \tfrac{1}{2}(A-B)=29°22'41'',$$

lo que dará:

log.cos.86°52′41″=.....	8,7361262
	—386
log.tang.78°52′30″=.....	10,7063163
compl. log, cos.29°22′41″=.....	0,0597816
	∓9,5021855=

log.tang.17°37′53″,3=log.tang.$\frac{1}{2}c$, de donde $c=35°15'46'',6$.

Para encontrar el otro ángulo C por la primera fórmula de la tabla, tendrémos:

log. sen. c=log.sen.35° 15′ 46″,6=...	9,7614042
	197
log. sen.B=log.sen57°30′=...	9,9260292
compl.log.sen.b=compl.log sen.70°=...	0,0270142
	∓9,7144673=log.sen. 31°12′33″.

Luego en este caso de ser el ángulo A obtuso, resulta que el ángulo $C=31°12'33''$.

Para encontrar el mismo ángulo C por la segunda fórmula de la tabla, tendrémos

log.cos. 8°52′30″=.....	9,9947689
log.cot.86°52′41″=.....	8,7367714
	—387
compl.log.cos.78°52′30″=.....	0,7145550
	∓9,4460566=

log.tang.15°36′16″,4=log.tang.$\frac{1}{2}C$, que da $C=31°12'32'',8$.

Luego suponiendo que el ángulo A sea obtuso, resulta que el lado $c=35°15'46'',6$, y el ángulo $C=31°12'32'',8$; que es el mismo que ántes; pues las dos décimas que hay de diferencia provienen de las aproximaciones de las tablas.

Terminarémos esta doctrina, manifestando que hay triángulos que se pueden resolver por el método de los triángulos rectángulos sin serlo: entre los cuales se hallan los siguientes.

1.° Si en un triángulo esférico se dan conocidas tres partes, entre las cuales haya un lado igual con 90°, el ángulo correspondiente en el triángulo polar será recto. Ademas, se conocerán dos de los otros cinco elementos de este triángulo; luego se podrá resolver; y resuelto este, lo quedará el primitivo.

2.° Cuando un triángulo es isósceles, los dos lados iguales no se cuentan sinó como un solo elemento; los ángulos que les son opuestos tambien por uno solo; y entónces bastan dos elementos para determinar el triángulo. Pero, concibiendo un arco de círculo máximo que pase por el vértice y el medio de su base, se le descompone en dos triángulos rectángulos, iguales en todas sus partes; y en cada uno de los cuales se conocerán dos elementos, ademas del ángulo recto; luego los triángulos isósceles pueden resolverse por el método de los triángulos rectángulos.

Digresion en que se *espresa la relacion que hay entre los lados y líneas trigonométricas de los ángulos opuestos en los triángulos, tanto rectilíneos como esféricos; en que se determina la superficie de un triángulo esférico; se resuelven en algunos casos los triángulos esféricos por métodos particulares con mas exactitud que por los métodos generales; y en que se insertan nueve importantisimos problemas de Euler, pertenecientes al círculo, que no son bastante conocidos.*

84 En la Trigonometría rectilínea hemos dicho que la analogía general para los triángulos rectilíneos era *que los senos de las ángulos eran como los lados opuestos;* pero con esta analogía, aun no tenemos lo suficiente para resolver el caso en que se nos den los tres lados, á ménos que no se haga alguna operacion auxiliar; y así, vamos á ver si hay otro medio que sea mas general. Para esto, principiarémos cifrando en una ecuacion el lado de un triángulo.

Sea el triángulo ABC (fig. 31), y tendrémos [I. 489] que cuando el ángulo en C es obtuso, será $AB^2=AC^2+BC^2+2AC\times CD$; y cuando agudo, será

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times CD.$$

Ahora, el triángulo rectángulo CBD nos dará en ambos [I. 649]

$$CD=CB\times\cos.BCD;$$

observando que en la primera figura $\cos.BCD=-\cos.ACB$, se tendrá haciendo estas sustituciones, que ambas espresiones se nos convertirán en esta

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times CB\times\cos.ACB.$$

Señalando con $A, B, C,$ los ángulos, y con $a, b,$ c, los lados, se tendrá

$c^2=b^2+a^2-2ab\times\cos.C$, de donde $\cos.C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$; que nos dice, que *el coseno de un ángulo es igual á la suma de los cuadrados de los lados que le forman, ménos el cuadrado del lado opuesto, dividido todo por el duplo del produeto de los lados que le forman;* y como sacaríamos un resultado análogo para cada ángulo, tendrémos el sistema de las tres ecuaciones

$$\cos.C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ab},\quad \cos.B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},\quad \cos.A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

que, comprendiendo á un mismo tiempo los tres lados y los tres ángulos, es mas general que la analogía citada.

Cuando demostramos dicha analogía, hicimos conocer que el seno de un ángulo, siendo la mitad de su lado opuesto, la relacion que tienen los lados con los senos de los ángulos opuestos es 2, ó es la misma que la del diámetro del círculo circunscrito al radio del mismo círculo. Esta relacion la podemos espresar solo por medio de los lados de los triángulos, y tambien por medio de su superficie.

Para esto, observarémos que si en la fórmula $\text{sen.}=\sqrt{1-\cos.^2}$, se sustituye el valor que acabamos de obtener en uno de los ángulos, por ejemplo en A, se tendrá, reduciendo el entero á la especie del quebrado, y sacando el denominador fuera del radical, $\text{sen.}A=\dfrac{\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}}{2bc}=\dfrac{d}{2bc}$, haciendo

el radical igual con d; que, dividiendo a por ambos miembros de esta ecuacion, sale $\frac{a}{\text{sen.}A}=\frac{2abc}{d}$, que espresa la relacion pedida en valores de los lados.

§ Ahora, llamando s á la superficje, será $s=\frac{1}{2}\text{AC}\times\text{BD}=[\text{I. 649}]\frac{1}{2}b\times c\times\text{sen.}A\,(\alpha)$; de donde $\text{sen.}A=\frac{2s}{bc}$, y por lo mismo $\frac{a}{\text{sen.}A}=\frac{abc}{2s}$; pero debiendo ser dicha relacion $=2r$, siendo r el radio del círculo círcunscrito al triángulo, resulta que igualando los dos valores de $\frac{a}{\text{sen.}A}$, y el primero con $2r$, será

$\frac{abc}{2s}=\frac{2abc}{d}$, y $2r=\frac{2abc}{d}$, que dan $s=\frac{d}{4}$, $r=\frac{abc}{d}$, y $d=\frac{abc}{r}$.

§ Efectuando el cuadrado de $b^2+c^2-a^2$ y reduciendo, se tiene

$$d=\sqrt{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4},$$

fórmula en que los tres lados a, b, c, entran igualmente.

§ El valor del radical d lo podemos poner bajo una forma mas sencilla, descomponiendo en factores lo que hay dentro, en virtud de lo espuesto [I. 179], y se tendrá $d=\sqrt{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}=\sqrt{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}=\ldots$

$$\sqrt{((b+c)^2-a^2)(a^2-(b-c)^2)}=\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}.$$

§ 85 Para determinar la misma relacion en los triángulos esféricos, partirémos de la fórmula 1.ª del sistema (D′) que es $\cos A=\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}$,

de donde $\text{sen.}A=\sqrt{1-\cos.A^2}=\frac{\sqrt{\text{sen.}b^2\times\text{sen.}c^2-(\cos.a-\cos.b\times\cos.c)^2}}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c}$;

que si con el objeto de abreviar, hacemos el radical igual con f, se tendrá

$$\text{sen.}A=\frac{f}{\text{sen.}b\times\text{sen.}c},\quad\text{de donde}\quad\frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A}=\frac{\text{sen.}a\times\text{sen.}b\times\text{sen.}c}{f};$$

que es la espresion de la relacion que nos proponíamos buscar.

§ La cantidad f es susceptible de simplificacioues análogas á las de d, porque sustituyendo en vez de $\text{sen.}b^2$ y $\text{sen.}c^2$ sus valores $1-\cos.b^2$, $1-\cos.c^2$, y reduciendo se tendrá $f=\sqrt{1-\cos.a^2-\cos.b^2-\cos.c^2+2\cos a\times\cos.b\times\cos.c}$ (w),

donde se ve que los tres lados entran igualmente.

§ Tambien se puede descomponer en factores la cantidad que hay debajo del signo radical, y se tendrá primero

$$\text{sen.}b^2\times\text{sen.}c^2-(\cos.a-\cos.b\times\cos.c)^2=$$
$$(\text{sen.}b\times\text{sen.}c+\cos.a-\cos.b\times\cos.c)(\text{sen.}b\times\text{sen.}c-\cos.a+\cos.b\times\cos.c)=$$
$$(\cos.a-\cos.(b+c))(\cos.(b-c)-\cos.a)=[(11)19]$$
$$2\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\times 2\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b-c+a)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a-b+c);$$

que da

$$f=2\sqrt{\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b+c-a)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(b-c+a)\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}(a-b+c)},$$

espresion bastante cómoda para el cálculo logarítmico.

§ 86 Busquemos ahora el radio del círculo circunscrito al triángulo esférico: y ante todas cosas obrervarémos que dicho círculo no puede ser un círculo máximo de la esfera; porque entónces el centro de la esfera estaría en el plano que pasa por los tres vértices del triángulo, ó uno de los vértices se hallaría en el mismo plano en que se hallan los otros dos y el centro de la esfera; luego dicho círculo será un círculo menor, y estará tambien circunscrito al triángulo rectilíneo formado por las tres cuerdas de los arcos a, b, c. Ahora, estas cuerdas siendo los duplos de los senos de las mitades de los arcos que subtenden, estarán espresadas por

$$2\text{sen.}\tfrac{1}{2}a,\quad 2\text{sen.}\tfrac{1}{2}b,\quad 2\text{sen.}\tfrac{1}{3}c,$$

y no habrá mas que sustituirlas en vez de a, b, c, en la espresion $\frac{abc}{d}$ del radio r, hallada (84).

§ Llamemos R al radio de este círculo circunscrito, y h el valor que toma d despues de hecha esta sustitucion, y se tendrá

$$R=\frac{8\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c}{h}.$$

§ Ahora, haciendo esta sustitucion en la espresion de d, y quitando el radical, se tiene $h^2=32(\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b)^2+32(\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2+32(\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2-16(\text{sen.}\tfrac{1}{2}a)^4-16(\text{sen.}\tfrac{1}{2}b)^4-16(\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^4$;

y sustituyendo en vez de $2(\text{sen.}\tfrac{1}{2}a)^2$, $2(\text{sen.}\tfrac{1}{2}b)^2$, $2(\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2$ sus valores [19(3)] $1-\cos.a$, $1-\cos.b$, $1-\cos.c$, despues de hechas las reducciones, se tendrá

$$h^2=12-8\cos.a-8\cos.b-8\cos.c+8\cos.a\times\cos.b+8\cos.a\times\cos.c+8\cos.b\times\cos.c-4\cos.a^2-4\cos.b^2-4\cos.c^2,$$

cuya cantidad, atendiendo al valor de f espresado en la ecuacion (w), la podrémos poner bajo esta forma $4f^2+8(1-\cos.a)(1-\cos.b)(1-\cos.c)$, ó teniendo presente la (ec. 3), bajo esta $4f^2+64(\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2$; por lo que sustituyendo el valor de h en el de R, se tendrá

$$R=\frac{4\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{f^2+16(\text{sen}\,\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2}}.$$

§ Si consideramos el radio de la esfera, que pasa por el centro del pequeño círculo circunscrito, este radio será (I. 612 cor. 4.º) perpendicular á este plano y terminará en el punto de dicha superficie que sea el polo del mismo círculo. Luego llamando ϕ al arco que mide la distancia del polo á la circunferencia del mismo círculo, se tendrá $R=\text{sen.}\varphi$; de donde

$$\text{sen.}\varphi=\frac{4\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{f^2+(4\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c)^2}};$$

y $\cos.\phi=\sqrt{1-\text{sen.}\varphi^2}=\dfrac{f}{\sqrt{f^2+(4\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}c)^2}}$

por lo cual $\text{tang.}\phi=\dfrac{4\text{sen.}\tfrac{1}{2}a\times\text{sen.}\tfrac{1}{2}b\times\text{sen}\,\tfrac{1}{2}c}{f}$; y pues que (I. 644)

$\text{sen.}a = 2\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{cos.}\frac{1}{2}a$, y lo mismo sucede con los otros senos, se tendrá (85)

$$\frac{\text{sen.}a}{\text{sen.}A} = \frac{8\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{cos.}\frac{1}{2}a \times \text{sen.}\frac{1}{2}b \times \text{cos.}\frac{1}{2}b \times \text{sen.}\frac{1}{2}c \times \text{cos.}\frac{1}{2}c}{f} = \ldots\ldots$$

$$\frac{4\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{sen.}\frac{1}{2}b \times \text{sen.}\frac{1}{2}c}{f} \times 2\text{cos.}\frac{1}{2}a \times \text{cos.}\frac{1}{2}b \times \text{cos.}\frac{1}{2}c = 2\text{tan.}\phi \times \text{cos.}\frac{1}{2}a \times \text{cos.}\frac{1}{2}b \times \text{cos.}\frac{1}{2}c.$$

§ 87 Si se quisiera tener la superficie del triángulo rectilíneo inscrito en el círculo de que se trata, y formado por las cuerdas de los arcos $a, b, c,$ llamando S á esta superficie, no habrá mas que mudar en la fórmula (84)

$$s = \frac{d}{4} = \frac{abc}{4r},$$ la s en S, r en R, y $a, b, c,$ en $2\text{sen.}\frac{1}{2}a$, $2\text{sen.}\frac{1}{2}b$, $2\text{sen.}\frac{1}{2}c$, lo que dará inmediatamente $S = \frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{sen.}\frac{1}{2}b \times \text{sen.}\frac{1}{2}c}{R}$, ó por ser $R = \text{sen.}\varphi$,

se tendrá $S = \frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{sen.}\frac{1}{2}b \times \text{sen}\frac{1}{2}c}{\text{sen.}\phi}$.

§ Si concebimos ahora la pirámide triangular, cuya base es este triángulo, y cuyo vértice se halla en el centro de la esfera, se tendrá que su altura estará representada por $\text{cos.}\phi$, y su volúmen por $\frac{1}{3}S \times \text{cos.}\varphi$; y sustituyendo en vez de S el valor que acabamos de hallar, dicho volúmen será igual

$$\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}a \times \text{sen}\frac{1}{2}b \times \text{sen.}\frac{1}{2}c}{3\text{tang.}\varphi} = \frac{f}{6},$$

despues de sustituir en lugar de $\text{tang.}\varphi$ su valor hallado ántes.

§ Para encontrar la superficie de un triángulo esférico en valores de los lados, observarémos que si llamamos δ al esceso de los tres ángulos de un triángulo esférico sobre π ó dos rectos, y consideramos la superficie S de la esfera como equivaliendo á 4π, se tendrá que la fórmula del (§ 61) se convertirá en δ; y manifiesta que en este caso se puede considerar representada la superficie de un triángulo esférico por el esceso de sus ángulos sobre dos rectos. Ahora, pues que $\delta = A+B+C-\pi$, se tendrá $\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(A+B+C) - \frac{1}{2}\pi$; y por la fórmula de la cotangente de la diferencia de dos arcos (4), teniendo presente que $\text{cot.}\frac{1}{2}\pi = 0$, será

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\delta = \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}(A+B+C) \times \text{cot.}\frac{1}{2}\pi + 1}{\text{cot.}\frac{1}{2}\pi - \text{cot.}\frac{1}{2}(A+B+C)} = \frac{1}{-\text{cot.}\frac{1}{2}(A+B+C)} = \ldots\ldots$$

$$-\text{tang.}\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\text{tang.}(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(B+A)) = (2)\ldots\ldots$$

$$-\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}C + \text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)}{1 - \text{tang}\frac{1}{2}C \times \text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)};$$

y sustituyendo en vez de $\text{tang.}\frac{1}{2}(B+A)$ su valor [80 (z)], se tendrá

$$\text{cot.}\tfrac{1}{2}\delta = -\frac{\text{tang}\frac{1}{2}C + \text{cot.}\frac{1}{2}C \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+a)}}{1 - \text{tang}\frac{1}{2}C \times \text{cot.}\frac{1}{2}C \times \frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-a)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+a)}};$$

y si observando que tang.×cot.=1, reducimos en ambos términos el entero á la especie del quebrado, sustituimos despues por tang.$\frac{1}{2}C$ su valor $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}C}{\cos.\frac{1}{2}C}$, y por cot.$\frac{1}{2}C$ el suyo $\frac{\cos.\frac{1}{2}C}{\text{sen.}\frac{1}{2}C}$, hacemos las simplificaciones necesarias, y sustituimos en vez sen.$\frac{1}{2}C^2$ su valor $1-\cos.\frac{1}{2}C^2$ y simplificamos, resultará por último $\cot.\frac{1}{2}\delta=-\frac{\cos.\frac{1}{2}(b+a)+\cos.\frac{1}{2}C^2(\cos.\frac{1}{2}(b-a)-\cos.\frac{1}{2}(b+a))}{\text{sen.}\frac{1}{2}C\times\cos.\frac{1}{2}C(\cos.\frac{1}{2}(b+a)-\cos.\frac{1}{2}(b-a))}$.

Ahora, poniendo en vez de $\cos.\frac{1}{2}C^2$ su valor [19(4)] $\frac{1}{2}(1+\cos.C)$, y reduciendo arriba el entero á la especie del quebrado, se convertirá esta espresion despues de hecha la destruccion, en

$$\cot.\tfrac{1}{2}\delta=-\frac{\cos.\frac{1}{2}(b+a)+\cos.\frac{1}{2}(b-a)+\cos C(\cos.\frac{1}{2}(b-a)-\cos.\frac{1}{2}(b+a))}{2\text{sen.}\frac{1}{2}C\times\cos.\frac{1}{2}C(\cos.\frac{1}{2}(b+a)-\cos.\frac{1}{2}(b-a))};$$

y como [19,(10)] $\cos.\frac{1}{2}(b+a)+\cos.\frac{1}{2}(b-a)=2\cos.\frac{1}{2}b\times\cos.\frac{1}{2}a$;

y [19,(11)] $\cos.\frac{1}{2}(b-a)-\cos.\frac{1}{2}(b+a)=2\text{sen.}\frac{1}{2}b\times\text{sen.}\frac{1}{2}a$,

$\cos.\frac{1}{2}(b+a)-\cos.\frac{1}{2}(b-a)=2\text{sen.}\frac{1}{2}b\times\text{sen.}-\frac{1}{2}a=-2\text{sen.}\frac{1}{2}b\times\text{sen.}\frac{1}{2}a$;

y (I. 644) $2\text{sen.}\frac{1}{2}C\times\cos.\frac{1}{2}C=\text{sen.}C$,

sustituyendo estos valores en la fórmula anterior, suprimiendo los signos — y el 2 que resulta comun en numerador y denominador, tendrémos

$$\cot.\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\cot.\frac{1}{2}b\times\cos.\frac{1}{2}a+\text{sen.}\frac{1}{2}b\times\text{sen.}\frac{1}{2}a\times\cos.C}{\text{sen.}\frac{1}{2}b\times\text{sen.}\frac{1}{2}a\times\text{sen.}C}.$$

Si en esta fórmula se sustituye el valor de cos.C (67) y el

$$\frac{\sqrt{\text{sen.}b^2\times\text{sen.}a^2-(\cos.c-\cos.b\times\cos.a)^2}}{\text{sen.}b\times\text{sen}\,a},$$

que se saca para el valor de sen.C por la fórmula $\text{sen.}=\sqrt{1-\cos.^2}$, teniendo presente que en virtud de la fórmula [(aa')I. 644] se tiene, multiplicando por el coseno de la mitad, $\text{sen.}b\cos.\frac{1}{2}b=2\text{sen.}\frac{1}{2}b\cos.\frac{1}{2}b^2$, y $\text{sen.}a\cos.\frac{1}{2}a=2\text{sen.}\frac{1}{2}a.\cos.\frac{1}{2}a^2$, resultará despues de dividir arriba y abajo por $\text{sen.}\frac{1}{2}b.\text{sen.}\frac{1}{2}a$, $\cot.\frac{1}{2}\delta=\frac{2\cos.\frac{1}{2}a^2.2\cos.\frac{1}{2}b^2+\cos.c-\cos.a.\cos.b}{\sqrt{\text{sen.}a^2\text{sen.}b^2-(\cos.c-\cos.a.\cos.b)^2}}$; que poniendo en vez de $2\cos.\frac{1}{2}a^2$ y $2\cos.\frac{1}{2}b^2$ sus valores $1+\cos.a$ y $1+\cos.b$ (§ 19 (4)), efectuando las operaciones, simplificando, y trasformando los quebrados, se tendrá

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\delta=\frac{\sqrt{\text{sen.}a^2\text{sen.}b^2-(\cos.c-\cos a\cos.b)^2}}{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c};$$

que es la fórmula mas simple para determinar la superficie δ de un triángulo esférico por medio de sus tres lados a, b, c.

{ 83 Hemos visto en el párrafo anterior, que $\frac{1}{6}f$ representa el volúmen de la pirámide triangular, formada por los tres radios de la esfera que corresponden á los tres ángulos del triángulo esférico. Considerémos ahora una pirámide triangular formada por estos mismos radios prolongados tanto como se quiera, de manera que se conviertan en p, q, r, y que a, b, c, sean los arcos ó

ángulos comprendidos entre estas rectas. Para tener el volúmen de esta pirámide, no habrá mas que considerarla como insistiendo sobre una de sus caras, por ejemplo, sobre la que tiene por lado las líneas p y q, y bajar desde el estremo de la tercera r una perpendicular P sobre el plano de esta misma cara. Desde luego advertirémos que si a es el ángulo comprendido entre p y q, la superficie de la cara que consideramos como base de la pirámide, será [(α) § 84] $\frac{1}{2}p\times q\times \text{sen}.a$; y por lo mismo dicho volúmen será $\frac{1}{6}P\times p\times q\times \text{sen}.a$.

ξ Pero si se llama λ al ángulo que la recta r forma con el plano que pasa por las rectas p y q, se tendrá (I. 649) $P=r\times \text{sen}.\lambda$; de donde resulta para el volúmen buscado $\frac{1}{6}p\times q\times r\times \text{sen}.a\times \text{sen}\,\lambda$.

ξ El ángulo λ está representado por el arco bajado perpendicularmente desde el ángulo A del triángnlo esférico sobre el lado opuesto a; luego podrémos determinar el valor de sen.λ por los senos ó cosenos de los lados a, b, c, del triángulo; mas para nuestro objeto basta considerar que este valor, así como el de sen.a, siendo independiente de las líneas p, q, r, si se hace $p=1$, $q=1$, $r=1$, se tendrá el caso de la pirámide de que se ha hablado ántes, y cuyo volúmen es $\frac{1}{6}f$; luego será sen.$a\times$sen.$\lambda=f$, de donde se sigue que en general $\frac{1}{6}pqrf$, espresará el volúmen de la pirámide triangular en que los tres lados ó aristas que forman uno cualquiera de los ángulos sólidos, son p, q, r, y los ángulos comprendidos entre estos lados son a, b, c.

{ Esta espresion del volúmen de toda pirámide triangular en valores de los tres lados y de los ángulos comprendidos, es, conforme se ve, muy simple y cómoda para el cálculo logarítmico, principalmente si se empléa para el valor de f la espresion resuelta en factores (85); y puede ser muy útil para determinar el volúmen de todos los cuerpos terminados por planos, pues que siempre se les puede descomponer en pirámides triangulares, del mismo modo que se resuelven todos los polígonos en triángulos.

{ Ahora, pues que hemos hallado sen.$a\times$sen.$\lambda=f$, será $\text{sen}.\lambda=\frac{f}{\text{sen}.a}$, de

cuya fórmula nos podrémos servir para determinar el arco perpendicular λ, bajado desde el ángulo A al lado de que es a por consiguiente la base, y b, c, los dos lados que le forman.

{ 89 Hemos resuelto los problemas precedentes con el objeto de manifestar el orígen y uso de algunas fórmulas notables, y principalmente de la espresion que hemos señalado con la f, que merece particularmente la atencion de los Analistas. Ahora vamos á pasar á hacer algunas otras consideraciones generales sobre la Trigonometría esférica, considerada analíticamente.

{ Las resoluciones analíticas de los triángulos esféricos no han sido al principio sinó simples aplicaciones del Álgebra á las construcciones geométricas.

{ Despues ha parecido suficiente establecer por la Geometria algunas proposiciones fundamentales, y se han deducido todas las fórmulas de la Trigonometría esférica de las ecuaciones que se sacan de estas proposiciones.

{ Lo que hay mas elegante en este género es una memoria de Euler, intitulada *Trigonometria spherica ex primis principiis derivata*, é impresa en las actas de Petersburgo en el año de 1779, que es bajo el aspecto que la hemos presentado, segun la esposicion de Lacroix, con aquellas modificaciones que hemos juzgado convenientes para ponerla á los alcances de nuestros discípulos; pero como todo es-

to se puede deducir de la ecuacion $\cos.a=\cos.b\times\cos.c+\text{sen}.b\times\text{sen}.c\times\cos.A$, como lo hizo *Mr. de Gúa* en las Memorias de la Academia de París año de 1783, y posteriormente Lagrange con muchísima mayor sencillez, claridad y elegancia, en el número 6.° de los cuadernos de la escuela politécnica, vamos á demostrar esta fórmula directamente sin suponer la construccion hecha (62).

§ Con este fin, observarémos que si en el triángulo esférico ABC (fig. 32), concebimos prolongados los radios OC, OB, hasta que encuentren á las tangentes AE, AD, de los arcos AC, AB, y se une E con D por medio de la ED, el triángulo rectilíneo ADE nos dará (84)

$$DE^2=AE^2+AD^2-2AE\times AD\times\cos.A=\text{tang}.b^2+\text{tang}.c^2-2\text{tang}.b\times\text{tang}\,c\times\cos.A,$$

y el ODE nos dará igualmente

$$DE^2=OE^2+OD^2-2OE\times OD(\cos.DOE=\cos.CB=\cos.a)=\sec.b^2+\sec.c^2\ldots\ldots$$
$$-2\sec.b\times\sec.c\times\cos.a.$$

Si de esta ecuacion restamos la antecedente, teniendo presente que $\sec.^2-\text{tang}.^2=R^2=1$, despues de dividir por 2, se tendrá

$$1+\text{tang}.b\times\text{tang}.c\times\cos.A-\frac{\cos.a}{\cos.b\times\cos.c}=0,$$

ó

$$1+\frac{\text{sen}.b\times\text{sen}.c}{\cos.b\times\cos.c}\times\cos.A-\frac{\cos.a}{\cos.b\times\cos.c}=0,$$

que da $\cos.a=\cos.b\times\cos.c+\text{sen}.b\times\text{sen}.c\times\cos.A$; de donde podríamos deducir todas las fórmulas de la Trigonometría esférica.

§ 90 La resolucion de los triángulos por las fórmulas que hemos dado, tiene todo el grado de generalidad que se puede desear; pero sucede algunas veces en la práctica, que el error de las tablas de los logaritmos se hace sensible en los resultados á que conducen las soluciones generales. Para obviar este inconveniente, analizarémos algunos de los casos particulares, cuyas soluciones, aunque aproximadas, se hallan en gran parte exentas del error de que se trata.

§ En esta investigacion, harémos uso de las fórmulas siguientes, que demostrarémos (§§ 474, 475, y 476)

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}.x=x-\dfrac{x^3}{2.3}+\dfrac{x^5}{2.3.4.5}\text{etc.},\quad \cos.x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{2\cdot3.4}\text{etc.},\\ \text{tang}.x=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{3.5}\text{etc.}\end{array}\right\}\text{(A)}.$$

{ Tambien tendrémos necesidad de convertir en grados un arco que venga espresado en partes del radio que se toma por unidad. Por lo cual, observarémos que si en el último valor de G (I. 507) suponemos que $L=R=1$, tendrémos $G=57^\circ,2957795131$; que nos manifiesta que el radio de todo círculo equivale á la longitud de un arco de $57^\circ,29$ etc. ó de $206264'',8$ á que llamarémos ν, y cuyo logaritmo es 5,3144251.

{ Principiarémos resolviendo el caso de la Trigonometría rectilínea en que *se dan dos lados y el ángulo comprendido, que se supone muy obtuso.*

§ Sean a, b, los lados conocidos, y $C=\pi-\lambda$ el ángulo comprendido, siendo λ muy pequeño; y tendrémos (84)

$$c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos.(\pi-\lambda)=[\S\ 10(\mathfrak{C}')]=a^2+b^2+2ab\times\cos.\lambda;$$

ahora, si en vez de cos.λ ponemos los dos primeros términos de su valor (A) $1-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^4}{2.3.4}$—etc., se tendrá $c^2=a^2+b^2+2ab(1-\frac{1}{2}\lambda^2)=(a+b)^2-ab\lambda^2$; luego si estraemos la raiz cuadrada (I. 246), limitándonos á los términos en que se halle λ^2, se tendrá $c=(a+b)-\frac{ab\lambda^2}{2(a+b)}$.

§ En esta fórmula, la cantidad λ representa un arco espresado en partes del radio; pero en la prática este arco está espresado en grados; y como se debe emplear espresado en partes del radio, se necesitará multiplicar el valor de λ por el factor constante 0,0174532925 (I. 506) para que esté espresado en valores del radio; y si á este valor le llamamos μ para abreviar, se tendrá $c=(a+b)-\frac{ab(\mu\lambda)^2}{2(a+b)}$.

§ Ahora, sustituyendo el valor de c y el de $\text{sen.}\lambda=\lambda-\frac{\lambda^3}{2\times3}$, en la ecuacion $\frac{\text{sen.}A}{\text{sen.}C}=\frac{a}{c}$, ó $\frac{\text{sen.}A}{\text{sen.}(\pi-\lambda)}=[\S\ 9(\alpha')]\frac{\text{sen.}A}{\text{sen.}\lambda}=\frac{a}{c}$, se saca

$$\text{sen.}A=\frac{a}{c}\times\text{sen.}\lambda=a\left(\lambda-\frac{\lambda^3}{2\times3}\right)\times c^{-1}.....$$

$$=a\left(\lambda-\frac{\lambda^3}{6}\right)\left((a+b)-\frac{ab}{2(a+b)}\times\lambda^2\right)^{-1}=a\left(\lambda-\frac{\lambda^3}{6}\right)\left(\frac{1}{(a+b)}+\frac{ab\lambda^2}{2(a+b)^3}\right);$$

de donde resulta efectuando las operaciones, y tomando solo hasta los términos donde hay λ^3, $\text{sen.}A=\frac{a\lambda}{a+b}\left(1+\frac{ab-a^2-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{\lambda^2}{6}\right)$.

§ Pero, siendo el ángulo C muy obtuso, el A será muy agudo, y por lo mismo el seno de este se podrá tomar por su arco (I. 645) y *viceversa;* y como $\text{sen.}A=A-\frac{A^3}{6}$, se tendrá $A=\text{sen.}A+\frac{\text{sen.}A^3}{6}$; y sustituyendo en vez de sen.A y sen.A^3 sus valores deducidos de la ecuacion anterior, se tendrá, limitándose siempre á los términos donde haya λ^3,

$$A=\text{sen.}A+\frac{\text{sen.}A^3}{6}=\frac{a\lambda}{a+b}\left(1+\frac{ab-a^2-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{\lambda^2}{6}\right)+\frac{a^3\lambda^3}{6(a+b)^3}.....$$

$$=\frac{a\lambda}{a+b}\left(1+\frac{b(a-b)}{(a+b)^2}\times\frac{\lambda^2}{6}\right).$$

§ En esta fórmula, así como en la que espresaba el valor de c, se necesita escribir $\mu\lambda$ en vez de λ, y tendrémos espresado el valor de A en partes del

radio ; luego para tenerle en grados, deberémos multiplicar por ν, y teniendo presente (I. 506 y 507) que $\mu\nu=1$, resultará

$$A=\frac{a\lambda}{a+b}\left(1+\frac{b(a-b)}{6(a+b)^2}\times(\mu\lambda)^2\right).$$

§ Como el otro ángulo b lo obtendríamos restando $A+C$ de π, tenemos resuelto nuestro caso.

§ 91 Nos propondrémos en segundo lugar, *la resolucion de un triángulo esférico, cuyos dos lados se diferencian poco de un cuadrante.*

§ Sean a y b los dos lados dados, y supongamos que se nos propone hallar el ángulo C. Si los lados a y b fuesen exactamente iguales con un cuadrante, se tendría (§ 30) $C=c$; luego diferenciandose a y b poco de $\frac{1}{2}\pi$, la diferencia entre C y c será muy pequeña. Por lo cual supondrémos que

$$a=\tfrac{1}{2}\pi+\alpha,\quad b=\tfrac{1}{2}\pi+\mathcal{C},\text{ y } C=c+x\ ;$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion $\cos.C=\dfrac{\cos.c-\cos.a\times\cos.b}{\text{sen.}a\times\text{sen.}b}$, teniendo presente que $\cos.(\frac{1}{2}\pi+m)=-\text{sen.}m$, $\text{sen.}(\frac{1}{2}\pi+m)=\cos.m$, se tendrá

$\cos.(c+x)=\dfrac{\cos.c-\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}\mathcal{C}}{\cos.\alpha\times\cos.\mathcal{C}}$; pero como suponemos que α y $\mathcal{C}$ son muy pequeños, tendrémos sustituyendo en vez de estas líneas sus valores espresados en los arcos (A), despreciando desde los términos en que hay cuatro dimensiones muy pequeñas en adelante $\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}=\alpha\mathcal{C}$, $\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}=1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\mathcal{C}^2}{2}$; lo que dará $\cos.(c+x)=\dfrac{\cos.c-\alpha\mathcal{C}}{1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\mathcal{C}^2}$; que poniendo el valor del coseno de la suma en el primer miembro y efectuando la division, despreciando desde los términos en que hay cuatro dimensiones muy pequeñas en adelante, resulta

$$\cos c\times\cos.x-\text{sen.}c\times\text{sen.}x=\cos.c+\tfrac{1}{2}\alpha^2\times\cos.c+\tfrac{1}{2}\mathcal{C}^2\times\cos.c-\alpha\mathcal{C},$$

ó teniendo presente que siendo x pequeña, se tiene aproximadamente $\cos.x=1$, y $\text{sen.}x=x$, resultará $\cos.c-x\text{sen.}c=(1+\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\mathcal{C}^2)\cos.c-\alpha\mathcal{C}$; que da

$$x=\frac{\alpha\mathcal{C}-(\frac{1}{2}\alpha^2+\frac{1}{2}\mathcal{C}^2)\cos.c}{\text{sen.}c};$$

y si hacemos $\frac{1}{2}(\alpha+\mathcal{C})=p$, $\frac{1}{2}(\alpha-\mathcal{C})=q$, que da $\alpha=p+q$, y $\mathcal{C}=p-q$, tendrémos

$$x=\frac{p^2-q^2-(p^2+q^2)\cos.c}{\text{sen.}c}=p^2\left(\frac{1-\cos.c}{\text{sen.}c}\right)-q^2\left(\frac{1+\cos.c}{\text{sen.}c}\right);$$

ahora, como en virtud de las fórmulas (3) y (4) del párrafo (19), se tiene quitando el divisor y dividiendo por sen.c,

$$\frac{1-\cos.c}{\text{sen.}c}=\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}c^2}{\text{sen.}c}=[\text{I.}644(aa')]\frac{2\text{sen.}\frac{1}{2}c^2}{2\text{sen.}\frac{1}{2}c\times\cos.\frac{1}{2}c}=\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}c}{\cos.\frac{1}{2}c}=\text{tang.}\tfrac{1}{2}c,$$

y $$\frac{1+\cos.c}{\text{sen.}c}=\frac{2\cos.\frac{1}{2}c^2}{\text{sen.}c}=\frac{2\cos\frac{1}{2}c^2}{2\text{sen.}\frac{1}{2}c\times\cos.\frac{1}{2}c}=\frac{\cos.\frac{1}{2}c}{\text{sen.}\frac{1}{2}c}=\text{col.}\tfrac{1}{2}c,$$

resulta, que si sustituimos estos valores en el de x, se obtendrá $x=p^2\text{tang.}\frac{1}{2}c-q^2\text{cot.}\frac{1}{2}c$, cuyo valor se halla espresado en valores del radio; pero como en la práctica vienen espresados en partes decimales de grado, si querémos que x resulte espresado en decimales de grado, tendrémos que sustituir μp, μq, en vez de p y q, siendo $\mu=0{,}017$ etc., y luego multiplicar el resultado por $\nu=57^\circ{,}2$etc. y teniendo presente que $\mu\nu=1$, resultará por último $x=\mu p^2\text{tang.}\frac{1}{2}c-\mu q^2\text{cot.}\frac{1}{2}c$, y sustituyendo este valor en el de C, se tendrá

$$C=c+\mu p^2\text{tang.}\tfrac{1}{2}c-\mu q^2\text{cot.}\tfrac{1}{2}c;$$

cuya fórmula es muy importante en las operaciones geodésicas.

{ 92 Propongámonos ahora *resolver un triángulo esférico rectángulo, del cual uno de los lados del ángulo recto es muy pequeño con relacion á los otros dos.*

{ Snpongamos que C sea el ángulo recto y b el lado adyacente, muy pequeño con relacion á la esfera sobre que está trazado el triángulo ABC; y se tendrá por lo dicho en la resolucion exacta de los triángulos esféricos rectángulos,

$$\cos.c=\cos.b\times\cos.a,\quad \text{tang.}B=\frac{\text{tang.}b}{\text{sen.}a},\quad \text{tang.}A=\frac{\text{tang}\,a}{\text{sen.}b}.$$

{ Pero, en virtud de nuestra hipótesis, los arcos $a, c,$ no se diferenciarán mucho entre sí, y llamando x al esceso del uno sobre el otro, se tendrá por ejemplo $c=a+x$, y sustituyendo este valor en la primera de las ecuaciones precedentes, se tendrá

$$\cos.(a+x)=\cos.b\times\cos.a,\quad \text{ó}\quad \cos.a\times\cos.x-\text{sen.}a\times\text{sen.}x=\cos.b\times\cos.a;$$

y limitándonos á los primeros términos de las espresiones de sen.x y cos.x, se tendrá sen.$x=x$, cos.$x=1$; luego $\cos.a-x\text{sen.}a=\cos.b\times\cos.a$; y como b tambien es muy pequeño, si sustituimos en vez de su coseno los dos primeros términos de su espresion (A), se tendrá

$$\cos.a-x\text{sen.}a=\cos.a(1-\tfrac{1}{2}b^2)=\cos.a-\cos.a\times\tfrac{1}{2}b^2;$$

de donde resulta $x=\dfrac{\cos.a\times b^2}{2\text{sen.}a}=\frac{1}{2}b^2\times\text{cot.}a$; y para tener x en decimales de gradó, multiplicarémos por $\nu=57^\circ{,}2$ etc. y resultará por último $c=a+\frac{1}{2}\nu b^2\text{cot.}a$; ecuacion que espresa el valor de la hipotenusa en valores de los otros dos lados. Si se quisiere hallar el valor de a en valores de c y b, lo conseguiríamos por un procedimiento semejante al precedente. En efecto, haciendo $a=c+x'$, se tendrá $\cos.c=\cos.b\times\cos.(c+x')$, que trasformarémos del mismo modo que ántes en

$$\cos.c=\cos.b\times(\cos.c-x'\text{sen.}c)$$

ó partiendo por sen.c en $\dfrac{\cos.c}{\text{sen.}c}=\text{cot.}c=\cos.b(\text{cot.}c-x')=\ldots\ldots$

$$(1-\tfrac{1}{2}b^2)(\text{cot.}c-x')=\text{cot.}c-\tfrac{1}{2}b^2\times\text{cot.}c-x'+\tfrac{1}{2}b^2x';$$

de donde se saca despejando x', y despreciando al hacer la division (I. 184), desde las cuartas potencias en adelante, $x'=-\frac{1}{2}b^2\text{cot}\,c(1-\frac{1}{2}b^2)^{-1}=-\frac{1}{2}b^2\text{cot.}c$; por lo cual sale por último $a=c-\frac{1}{2}\nu b^2\text{cot.}c$.

{ Pasemos ahora á la espresion de tan B, y tendrémos sustituyendo en vez de tang.B y tang.b sus valores $B+\dfrac{B^3}{3}=\dfrac{b+\frac{1}{3}b^3}{\text{sen.}a}$, ó $B=\dfrac{b}{\text{sen.}a}(1+\frac{1}{3}b^2)-\frac{1}{3}B^3$.

{ Siendo el ángulo B y su lado opuesto muy pequeños, se tendrá aproximadamente $B=\frac{b}{\text{sen.}a}$, y $B^3=\frac{b^3}{\text{sen.}a^3}$;

y por lo mismo la ecuacion precedente la podrémos poner bajo esta forma

$$B=\frac{b}{\text{sen.}a}\left(1+\frac{b^2(\text{sen.}a^2-1)}{3\text{sen.}a^2}\right)=\frac{b}{\text{sen.}a}-\frac{b^3\cos.a^2}{3\text{sen.}a^3};$$

de donde resulta por último $B=\frac{yb}{\text{sen.}a}-\frac{yb^3\cos.a^2}{3\text{sen.}a^3}$.

{ Para determinar el valor de A, supondrémos $A=\frac{1}{2}\pi-z$, siendo z por el supuesto bastante pequeña, y tendrémos (14) que

$$\text{tang.}A=\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\pi-z)=\cot.z=\frac{\text{tang.}a}{\text{sen.}b},\quad \text{de donde}\quad \text{tang.}z=\text{sen.}b\times\cot.a;$$

poniendo en esta espresion en vez de tang.z y sen.b sus valores (A), se tendrá $z+\frac{1}{3}z^3=b\cot.a-\frac{1}{6}b^3\cot.a$; esta espresion nos manifiesta que aproximadamente se tiene $z=b\cot.a$; de donde resulta $\frac{1}{3}z^3=\frac{1}{3}b^3\cot.a^3$; por lo cual se podrá poner dicha espresion bajo esta forma $z=b\cot.a-\frac{1}{3}b^3\times\cot.a(\frac{1}{2}+\cot.a^2)$; y se tendrá por último $A=\frac{1}{2}\pi-yb\times\cot.a+\frac{1}{3}yb^3\cot.a(\frac{1}{2}+\cot.a^2)$; ecuacion que espresa el ángulo A en valores de los dos lados que forman el ángulo recto.

{ 93 Pasemos ya á comparar los triángulos esféricos con los rectilíneos. Considerando igual con la unidad el radio de la esfera, conforme se acostumbra, resulta que los arcos, que forman un triángulo esférico, espresan los ángulos cuyos senos y cosenos se hallan en las tablas; pero si el radio de la esfera no es igual con la unidad, entónces, para tener el valor angular de los lados del triángulo, es necesario dividir su valor absoluto por el radio. Así, si $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$, son las longitudes absolutas de los arcos que forman un triángulo esférico, sobre la superficie de una esfera cuyo radio es r, se tendrá $\frac{\alpha}{r}, \frac{\mathfrak{C}}{r}, \frac{\gamma}{r}$, para los ángulos que en el centro de la esfera corresponden á estos arcos, y se deberán tomar estas cantidades por los lados que hasta ahora hemos señalado por a, b, c, suponiendo que A, B, C, sean los ángulos opuestos á los arcos $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$, en el triángulo propuesto.

{ Ahora, si el radio de la esfera se supone infinito, la superficie de esta se convertirá en una superficie plana, y el triángulo esférico en triángulo rectilíneo. De donde resulta que si en las fórmulas de los triángulos esféricos, se sustituye $\frac{\alpha}{r}, \frac{\mathfrak{C}}{r}, \frac{\gamma}{r}$, en vez de a, b, c, y despues se supone $r=\infty$, ó $\frac{1}{r}=0$, dichas fórmulas espresarán propiedades de triángulos rectilíneos, en que $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$, sean los lados, y A, B, C, los ángulos opuestos.

{ Así, si $V=0$ es una ecuacion entre los senos y cosenos de a, b, c, y de A, B, C, y se sustituye en vez de sen.a y cos.a sus valores (A)

$$\frac{a}{r}-\frac{a^3}{2\times 3r^3}+\text{etc.}, \quad 1-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{a^4}{2\times 3\times 4r^4}-\text{etc.};$$

y se ejecuta lo mismo con los valores de sen.b, cos.b, sen.c, cos.c, se tendrá despues de ordenado en potencias descendentes de r,

$$\frac{P}{r^m}+\frac{Q}{r^{m+1}}+\frac{R}{r^{m+2}}+\text{etc.}=0,$$

que, multiplicando por r^m, se tendrá $P+\frac{Q}{r}+\frac{R}{r^2}+\text{etc.}=0$;

ahora, en el supuesto del triángulo rectilíneo, que exige el que $\frac{1}{r}=0$, se tendrá $P=0$.

{ De esta manera se podrían deducir las reglas de Trigonometría plana ó rectilínea de las ecuaciones fundamentales de la Trigonometría esférica; pero esto no tendría utilidad sinó considerado como para ejercitarse en el cálculo, pues que sería demostrar lo simple por lo compuesto; mas, no obstante, para comprobar nuestra asercion, deducirémos una propiedad, valiéndonos de la 1.ª ecuacion del sistema [(H) 63] $\cos A=-\cos.B\times\cos.C+\text{sen}.B\times\text{sen}.C\times\cos.a$;

la cual da, sustituyendo en vez de cos.a su valor $1-\frac{\alpha^2}{2r^2}$ etc.,

$$\cos.A=-\cos.B\times\cos.C+\text{sen}.B\times\text{sen}.C-\text{sen}.B\times\text{sen}.C\times\frac{\alpha^2}{2r^2}+\text{etc.};$$

que, si queremos que esprese una propiedad de los triángulos rectilíneos, debemos hacer $r=\infty$, ó $\frac{1}{r}=0$, y se tendrá

$$\cos.A=-\cos.B\times\cos.C+\text{sen}.B\times\text{sen}.C=-\cos.(B+C);$$

de donde resulta, que si A y $(B+C)$ tienen sus cosenos iguales, y de signo contrario, será A suplemento de $(B+C)$; de manera que $A=\pi-B-C$; ó $A+B+C=\pi$, que es la propiedad conocida en los triángulos rectilíneos de *valer los tres ángulos de un triángulo dos ángulos rectos.*

{ Ahora, si el radio r de la esfera, en vez de ser infinito, le suponemos solo muy grande, el triángulo esférico no se convertirá precisamente en rectilíneo, pero se aproximará mucho; y en este caso, como los ángulos que corresponden á los lados a, b, c, vienen á ser muy pequeños, las tablas trigonométricas ordinarias no nos darían la exactitud suficiente para el cálculo de los lados y de los ángulos. En cuyo caso, es mas ventajoso el considerar los triángnlos esféricos como rectilíneos, atendiendo á la pequeña correccion que resulta de su diferencia.

{ El caso, de que tratamos, ocurre principalmente en las operaciones geodésicas de importancia, como son, por ejemplo, las de medir un arco del meridiano; en los triángulos que entran en estas operaciones, las cantidades $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$, son las longitudes mismas de los lados, y r es el radio de la Tierra.

§ Para determinar la correccion, de que acabamos de hablar, tomarémos otra vez la ecuacion $\cos.A=\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos c}{\text{sen}.b\times\text{sen}.c}$; haciendo en el segundo miembro las

sustituciones indicadas ántes, y deteniéndonos en los términos divididos por r^4, tendrémos

$$\cos.A=\frac{1-\frac{\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4}{2\times3\times4r^4}-\left(1-\frac{\mathfrak{C}^2}{2r^2}+\frac{\mathfrak{C}^4}{2\times3\times4r^4}\right)\left(1-\frac{\gamma^2}{2r^2}+\frac{\gamma^4}{2\times3\times4r^4}\right)}{\left(\frac{\mathfrak{C}}{r}-\frac{\mathfrak{C}^3}{2\times3r^3}\right)\left(\frac{\gamma}{r}-\frac{\gamma^3}{2\times3r^3}\right)}=$$

$$\frac{\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2-\alpha^2}{2r^2}+\frac{\alpha^4-\mathfrak{C}^4-\gamma^4}{2\times3\times4r^4}-\frac{\mathfrak{C}^2\gamma^2}{4r^4}}{\frac{\mathfrak{C}\gamma}{r^2}\left(1-\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2}{2\times3r^2}\right)};$$

que multiplicando arriba y abajo por r^2, y observando (I. 184) que

$\frac{1}{1-\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2}{2\times3r^2}}=1+\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2}{2\times3r^2}$, se tendrá deteniéndose en las potencias segundas de r,

$$\cos.A=\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\mathfrak{C}\gamma}+\frac{\alpha^4-\mathfrak{C}^4-\gamma^4}{2\times3\times4\mathfrak{C}\gamma r^2}-\frac{\mathfrak{C}^2\gamma^2}{4\mathfrak{C}\gamma r^2}+\frac{(\mathfrak{C}^2+\gamma^2-\alpha^2)(\mathfrak{C}^2+\gamma^2)}{3\times4\mathfrak{C}\gamma r^2};$$

que reuniendo los tres últimos términos en uno solo, despues de reducidoa á un comun denominador, resultará

$$\cos.A=\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\mathfrak{C}\gamma}+\frac{\alpha^4+\mathfrak{C}^4+\gamma^4-2\alpha^2\mathfrak{C}^2-2\alpha^2\gamma^2-2\mathfrak{C}^2\gamma^2}{2\times3\times4\mathfrak{C}\gamma r^2};$$

haciendo ahora $\frac{1}{r}=0$, el ángulo A se convierte en el ángulo opuesto al lado α en el triángulo rectilíneo cuyos lados fuesen $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$; luego si designamos por A' este ángulo, se tendrá $\cos.A'=\frac{\mathfrak{C}^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\mathfrak{C}\gamma}$, de donde sale

$$\text{sen.}A'^2=1-\cos.A'^2=\frac{2\alpha^2\mathfrak{C}^2+2\alpha^2\gamma^2+2\mathfrak{C}^2\gamma^2-\alpha^4-\mathfrak{C}^4-\gamma^4}{4\mathfrak{C}^2\gamma^2}=\ldots\ldots$$

$$-\frac{\alpha^4+\mathfrak{C}^4+\gamma^4-2\alpha^2\mathfrak{C}^2-2\alpha^2\gamma^2-2\mathfrak{C}^2\gamma^2}{4\mathfrak{C}^2\gamma^2};$$

luego sustituyendo estos valores en la ecuacion precedente, se tendrá

$$\cos.A=\cos.A'-\frac{\mathfrak{C}\gamma\,\text{sen.}A'^2}{2\times3r^2};$$

pero en el triángulo rectilíneo cuyos lados son $\alpha, \mathfrak{C}, \gamma$, está representada su superficie $[\mathfrak{S}4(\alpha)]$ por $\frac{1}{2}\mathfrak{C}\gamma\,\text{sen.}A'$; luego si esta la representamos por s, se tendrá $\cos.A=\cos.A'-\frac{s\times\text{sen.}A'}{3r^2}$.

§ Supongamos ahora que $A=A'+x$, y desechando desde la segunda poten-

cia de x, tendrémos $\cos.A=\cos.A'\times\cos.x-\text{sen}.A'\times\text{sen}.x=\ldots\ldots\ldots\ldots$
$\cos.A'(1-\frac{1}{2}x^2)-\text{sen}.A'(x-\frac{1}{6}x^3+\text{etc.})=\cos.A'-x\,\text{sen}.A'$;

de donde $x=\dfrac{\cos.A'-\cos.A}{\text{sen}.A'}=\dfrac{\cos.A'-\cos A'+\dfrac{s\times\text{sen}.A'}{3r^2}}{\text{sen}.A'}=\dfrac{s}{3r^2}$,

luego será $A=A'+\dfrac{s}{3r^2}$, de donde $A'=A-\dfrac{s}{3r^2}$;

y como mudando el lado α en $\mathfrak{C}$ ó γ, el ángulo A se converrirá en B ó C, se tendrá, que señalando con B' y C' los ángulos opuestos á los lados $\mathfrak{C}$ y γ en el triángulo rectilíneo, se tendrá igualmente

$$B=B'+\frac{s}{3r^2},\quad C=C'+\frac{s}{3r^2},\quad \text{ó}\quad B'=B-\frac{s}{3r^2},\quad C'=C-\frac{s}{3r^2}.$$

§ Luego cuando se tiene un triángulo esférico trazado sobre la superficie de una esfera, cuyo radio r es muy grande, y se forma un triángulo rectilíneo cuyos lados tengan la misma longitud que los del triángulo esférico, los ángulos de este serán iguales á los ángulos correspondientes del triángulo rectilíneo, aumentados cada uno en la cantidad $\dfrac{s}{3r^2}$, representando s la superficie del triángulo rectilineo, teniendo cuidado de reducir el valor de esta cantidad á ángulos, esto es, tomando por unidad el ángulo que corresponde al arco igual con el radio, que es 57°,2 etc.

§ Si se suman las tres ecuaciones

$$A=A'+\frac{s}{3r^2},\quad B=B'+\frac{s}{3r^2},\quad C=C'+\frac{s}{3r^2},$$

observando que $A'+B'+C'=\pi$, se tendrá

$$A+B+C=\pi+\frac{s}{r^2},\quad \text{que da}\quad \frac{s}{r^2}=A+B+C-\pi.$$

§ De donde se puede concluir, que *quitando de cada ángulo del triángulo esférico el tercio de la suma de sus tres ángulos sobre dos rectos, se tendrán los tres ángulos de un triángulo rectilíneo, cuyos lados serán iguales en longitud á los del triángulo esférico.* Así, se podrá considerar este como un triángulo rectilíneo, y los resultados serán exactos hasta las cantidades del órden $\dfrac{1}{r^4}$.

§ Este escelente teorema se debe á *Legendre*, que lo enunció la primera vez sin demostracion en las Memorias de la Academia de Ciencias del año de 1787, y que luego demostró en una memoria sobre el modo de determinar la longitud del cuadrante del meridiano. Antes de que *Legendre* lo enunciase, se había ya hecho uso de él en las operacioues geodésicas anteriores.

§ Tambien se debe al mismo Geómetra el siguiente teorema, que puede ser

bastante interesante en muchas ocasiones para resolver triángulos esféricos en que haya dos ángulos muy pequeños, siendo por otra parte los lados de una magnitud cualquiera.

§ *Sean* A, B, C, *los tres ángulos de un triángulo esférico*, A *y* B *muy agudos, y el tercero* C *por consiguiente muy obtuso, y sean* a, b, c, *sus lados opuestos. Si se construye un triángulo rectilíneo cuyos lados sean proporcionales á los números* A, B, π—C, *se tendrá que los ángulos opuestos serán* a, b, π—c; *de manera que la resolucion del triángulo esférico se referirá á lo del rectilíneo correspondiente.*

§ En efecto, en el triángulo propuesto se tiene (H′) $\cos.c=\frac{\cos.C+\cos.B\times\cos.A}{\text{sen.}A\times\text{sen.}B}$.

§ Si en esta fórmula se hace $C=\pi-D$, será [10(6′)] $\cos.C=-\cos.D$, y sustituyendo en vez de estas líneas sus valores (A), deteniendonos en las segundas potencias de los arcos, y haciendo las operaciones, resulta

$$\cos.c=\frac{-(1-\frac{1}{2}D^2)+(1-\frac{1}{2}B^2)(1-\frac{1}{2}A^2)}{AB}=\frac{L^2-B^2-A^2}{2AB}.$$

§ Pero en el triángulo rectilíneo, cuyos lados son A, B, D, y $\pi-c$ el ángulo opuesto al lado D, se tiene igualmente

$$\cos.(\pi-c)=[\S\ 10\ (6')]-\cos.c=(\S\ 84)\ \frac{L^2-A^2-B^2}{2AB}.$$

§ En este mismo triángulo, si a y b son los dos ángnlos opuestos á los lados A y B, se tendrá $\text{sen.}a:\text{sen.}b::A:B$, lo que se conforma con la proporcion $\text{sen.}a:\text{sen.}b::\text{sen.}A:\text{sen.}B$, dada por el triángulo esférico, cuando se conservan solo las segundas potencias de los arcos. Luego en efecto se verifica la relacion entre el triángulo rectilíneo y el triángulo esférico, enunciada en el teorema.

§ 94 Ocupémonos ahora de manifestar el modo de inscribir en el círculo el polígono regular de 17 lados. Para esto, observarémos ante todas cosas que la ecuacion [(2), 19] da, quitando el divisor

$$2\cos.A'\times\cos.B'=\cos.(A'-B')+\cos.(A'+B'),$$

en la cual A' y B' pueden tener un valor cualquiera; si en vez de A' sustituimos $\alpha\varphi$, y 6φ en vez de B', siendo φ un ángulo ó arco cualquiera, se tendrá $2\cos.\alpha\varphi\times\cos.6\varphi=\cos.(\alpha-6)\varphi+\cos.(\alpha+6)\varphi$, (μ).

§ Ahora, si suponemos que φ sea una parte alícuota de la circunferencia, se tendrá $\cos.\varphi+\cos.2\varphi+\cos.3\varphi+\cos.4\varphi+\ldots.+\cos.z\varphi=0$ (*).

§ Para demostrarlo, supongamos que la suma de estos cosenos sea S, y resultará $\cos.1+\cos.2+\cos.3+\cos.4+\ldots\ldots+\cos.n=S$; y multiplicando todos los términos de esta ecuacion por $2\cos.1$ se convertirá en $2\cos.1\times\cos.1+2\cos.1\times\cos.2+2\cos.1\times\cos.3+2\cos.1\times\cos.4+\ldots.$

$$2\cos.1\times\cos.(n-1)+2\cos.1\times\cos.n=2S\times\cos.1.$$

§ Pero sustituyendo en esta ecuacion los valores que en cada caso particular suministra la (μ), se tendrá

(*) *En lo que sigue omitirémos el poner* φ, *y solo pondrémos* cos 1, cos. 2, etc. *por* cos ϕ, cos. 2ϕ etc.

$$\cos.0+\cos.2+\cos.1+\cos.3+\cos.2+\cos.4+\text{etc.}+\text{etc.}+$$
$$\cos.(\mathcal{C}-2)+\cos.\mathcal{C}+\cos.(\mathcal{C}-1)+\cos.(\mathcal{C}+1)=2S\times\cos.1;$$

ahora, como (§ 15) $\cos.0=\cos.\mathcal{C}$, y $\cos.(\mathcal{C}+1)=\cos.1$, advertimos que el primer miembro contiene á cada uno de los cosenos dos veces, y por lo mismo se reducirá á $2S=2S\times\cos.1=2S\times\cos.\varphi$, ó $S(1-\cos.\varphi)=0$; ecuacion que no se puede verificar á no ser $S=0$, pues el otro factor no puede ser cero, porque entónces sería $\cos.\varphi=1$, y sería φ igual con cero ó con toda la circunferencia, y no sería por consiguiente una parte alícuota de esta.

§ De aquí resulta que para el arco que esté contenido 17 veces en la circunferencia, que es el que subtenda el lado del polígono de 17 lados, se tendrá

$$\cos.1+\cos.2+\cos.3+\cos.4+\text{etc.}+\text{etc.}....+\cos.15+\cos.16+\cos.17=0;$$

pero á causa de $\cos.17=1$, será

$$\cos.1+\cos.2+\cos.3+\cos.4+\text{etc.}+\text{etc.}+....\cos.15+\cos.16=-1 \quad (E);$$

y advirtiendo [13·(δ′)] que $\cos.1=\cos.16$, $\cos.2=\cos.15$, $\cos.3=\cos.14$, etc. podrémos descomponer la ecuacion anterior en las dos siguientes:

$$\cos.1+\cos.3+\cos.5+\cos.7+\cos.9+\cos.11+\cos.13+\cos.15=-\tfrac{1}{2} \quad (E'),$$
$$\cos.2+\cos.4+\cos.6+\cos.8+\cos.10+\cos.12+\cos.14+\cos.16=-\tfrac{1}{2} \quad (E'').$$

§ La ecuacion (E′) se puede descomponer igualmente en estas dos:

$$\left.\begin{aligned}\cos.3+\cos.5+\cos.7+\cos.11&=m\\ \cos.1+\cos.9+\cos.13+\cos.15&=n\end{aligned}\right\} \quad (e')$$

siendo m, n, dos cantidades tales que $m+n=-\frac{1}{2}$, y $mn=-1$.

§ En efecto, si multiplicámos las dos ecuaciones (e′), y mudamos los productos de los cosenos en sumas, por la fórmula (μ), observando que la ecuacion [(δ′) § 13] da $\cos.1=\cos.16$, $\cos.2=\cos.15$, $\cos.3=\cos.14$, etc., nos resultará el primer miembro igual al primero de la ecuacion (E); luego los segundos miembros serán iguales, y se tendrá $mn=-1$.

§ Cada una de las ecuaciones (e′), se puede descomponer en otras dos, haciendo $m=p+q$, de esta manera

$$\left.\begin{aligned} m&=p+q & n&=r+s\\ p&=\cos.3+\cos.5 & r&=\cos.1+\cos.13\\ q&=\cos.7+\cos.11 & s&=\cos.9+\cos.15\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & &\end{aligned}\right\} \quad (f))$$

y se verifica que $pq=rs=-\frac{1}{4}$, multiplicándolas entre sí, pues en ambos casos venimos á parar á la mitad del primer miembro de la ecuacion (E″). De las seis ecuaciones obtenidas anteriormente

$$m+n=-\tfrac{1}{2},\quad p+q=m,\quad mn=-1,\quad pq=-\tfrac{1}{4},\quad r+s=n,\quad rs=-\tfrac{1}{4},$$

se sacarán los valores de m, n, p, q, r, s, por medio de ecuaciones segundo grado.

§ Ahora, observando que, por la ecuacion (μ) se tiene

$$s=\cos.9+\cos.15=2\cos.3\times\cos.12=[\S\ 13\,(\delta')]\,2\cos.3\cos.5,$$

será $\cos.3\times\cos.5=\frac{1}{2}s$, y $r=\cos.1+\cos.13=2\cos.7\times\cos.6$; y nos dará $\cos.7\times\cos.6=\frac{1}{2}r$; por lo que las cuatro ecuaciones (f) las podrémos poner bajo esta forma:

cos.3+cos.5=p, cos.6+cos.7=q, cos.3×cos.5=$\frac{1}{2}s$, cos.6×cos.7=$\frac{1}{2}r$;
ó teniendo presente que cos.6×cos.7=$\frac{1}{2}$cos.1+$\frac{1}{2}$cos.13=$\frac{1}{2}$cos.1+$\frac{1}{2}$cos.4,
que p=cos.3+cos.5=2cos.1×cos.4, que

$$\frac{1}{2}s=\cos.3\times\cos.5=\frac{1}{2}\cos.2+\frac{1}{2}\cos.8=\frac{1}{2}\cos.2+\frac{1}{2}\cos.9,$$

y que q=cos.6+cos.7=cos.6+cos.10=2cos.8×cos 2=2cos.2×cos.9,
las podrémos poner bajo esta forma:
cos.1+cos.4=r, cos.2+cos.9=s, cos.1×cos.4=$\frac{1}{2}p$, cos.2×cos.9=$\frac{1}{2}q$;
de donde se sacarán por ecuaciones de segundo grado los valores de los ocho cosenos cos.1, cos. 2, cos.3, cos.4, cos.5, cos.6, cos.7, cos.9, respectivamente iguales á
cos.16, cos.15, cos.14, cos.13, cos.12, cos.11, cos.10 y cos.8;
y como toda ecuacion de segundo grado se puede construir geométricamente, esto es, solo con el auxilio de la regla y el compas; ó de la línea recta y el círculo, como verémos en adelante (114), resulta que tendrémos inscrito este polígono. }

94*a* Vamos á terminar esta digresion, insertando nueve interesantísimos problemas, relativos al círculo, que se hallan en el capítulo 22 del 2.° tomo de la obra de *Euler* intitulada: *Introductio in Analisin infinitorum*: por cuatro razones muy poderosas: 1ª por la importancia de dichas proposiciones, que no son conocidas generalmente; 2ª porque en su resolucion se empléan procedimientos que deben contenerse en las obras elementales para que puedan emplearse cuando convenga en ulteriores investigaciones; 3ª porque presentan nuevos é importantes ejemplos de aplicacion de mi *método para la resolucion de toda clase de ecuaciones numéricas*; y 4ª porque, con este motivo, aplicaré dicho método á una cuestion imposible, para que se perciba la manera con que dicho nuevo método manifiesta el absurdo.

94*b* La primera cuestion, que resuelve Euler, es la siguiente: *Hallar el arco de círculo que sea igual con su coseno*: lo que verifica por la regla de *falsa posicion*. Aquí emplearé mi nuevo método, porque es mas claro, mas breve y mas uniforme, como se convencerá cualquiera que resuelva una misma cuestion por ambos métodos.

La cuestion se reduce á *encontrar el número de grados de un arco, que, estendido en línea recta ó rectificado, tenga tantas partes del radio, como el coseno del espresado arco.*

Para esto, observarémos, que la longitud L de un arco rectificado, con relacion al radio (I. 506), es L=0,0174532925×R×G.

Ahora, en virtud de lo espuesto (I. 647) supondrémos el radio R igual con diez mil millones de partes; esto es, harémos R=10000000000; y se tendrá L=1745329 25×G; y como en las tablas trigonométricas artificiales, que son las que manejamos, se hallan los logaritmos de las partes del radio que contiene cada línea trigonométrica, la ecuacion anterior, por medio de los logaritmos, se convertirá en *log.* de las partes del radio que contiene un ar-

co=*log.* 174532925+*log.* del número de grados que contiene el arco.

Pero en virtud de lo espuesto (I. 306)

log. 174532925=8,2418774,

luego si con este logaritmo, sumamos el del número de grados del arco, tendrémos el logaritmo de las partes del radio que contenga dicho arco estendido en línea recta ó rectificado; y como este arco rectificado, por la naturaleza de la cuestion, debe ser igual al coseno, se verificará, que el logaritmo de que acabamos de hablar, deberá ser igual al logaritmo del coseno; y si no lo es, se determinará el error y se continuará el método por la regla dada (I. 284 j).

Supongamos que el arco sea de un grado; y como *log.* 1=0, se deberá tener

*log.*cos.1°	=	8,2418774
pero las tablas dan *log.*cos.1.°=		9,9999338
que escede al 8,2418774 en	+	1,7580564;

luego este será el *error* que resulta de suponer que el arco sea de un grado.

Supongamos ahora que el arco sea de dos grados:

Y como *log.*2.	=	0,3010300
si lo sumamos con.		8,2418774
tendrémos el log. del arco de 2° rectificado. .		8,5429074
que deberá ser igual con *log.*cos.2°. . .	=	9,9997354
pero como este le escede, resulta un error de	+	1,4568280.

Como este *error* es menor que el que resultó de suponer que el arco era da un grado, se debe hallar la correccion al supuesto de ser el arco de dos grados. Para esto, en virtud del número 4.° de la regla (I. § 284 j) deberé multiplicar el error 1,4568280 por la unidad positiva; lo que dará 1,4568280 por producto; el cual se debe dividir por la diferencia de los dos errores, que es

1,7580564—1,4568280=0,3012284.

Practicando la division, resulta 4,8 para la correccion al 2°; que, agregándosela, da 6°,8.

Tomando 7 grados por *tercer* número supuesto, resulta que

*log.*7	=	0,8450980
añadiéndole		8,2418774
resulta *log.* del arco de 7° rectificado.		9,0869754
que debiendo ser igual con *log.*cos.7° =		9.9967507
resulta un error de.	+	0,9097753

el cual siendo menor que los dos errores anteriores, se hallará la correccion al 7°.

Para esto, se multiplica su error 0,9097753 por 7°—2°=5°;

lo que da por producto 4,5488765; que, dividiéndole por la diferencia de los dos menores errores, que es

1,4568280—0,9097753=0,5470527,

resulta 8,3 para la correccion al 7°; que agregándosela, da 15,3.

Por una equivocacion que cometimos en un principio, sacamos 17°,2; y para patentizar tambien aquí que este método tiene la singular ventaja de que, aunque uno se equivoque, no hay necesidad de rehacer los cálculos posteriores, supondrémos 17° por *cuarto* número supuesto; y tendrémos

*log.*17 . . . . . =	1,2304489
añadiéndole.	8,2418774
se obtiene *log.*arc.17°rectificado	9,4723263
y como *log.*cos.17° . . . =	9,9805963
resulta un error de . . . +	0,5082700.

Para encontrar la correccion al 17°, multiplico su error 0,5082700 por 17—7=10; y dividiendo el producto 5,082700 por la diferencia de los dos menores errores, se obtiene 10,8 para la correccion al 17°; que, agregándosela, da 27°,8.

Tomando 28° por *quinto* número supuesto, se tiene

*log.*28. . . . . =	1,4471580
agregándole el.	8,2418774
resulta *log.*arco de 28° rectificado.	9,6890354
pero *log.*cos.28° . . . . =	9,9459349
luego resulta un *error* de . . +	0,2568995.

Para encontrar la correccion al 28°, multiplico su error 0,2568995 por 28—17=11; lo que da por producto 2,8258945; que dividido por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,2513656, resulta 11,2 para la correccion al 28°; que, agregándosela, da 39°,2.

Tomando 39° por *sesto* número supuesto, se obtiene

*log.*39° . . . . . =	1,5910646
añadiéndole el.	8,2418774
resulta *log.*arco de 39° rectificado.	9,8329420
pero como *log.cos.*39°. . . =	9,8905026
resulta un error de . . . +	0,0575606;

y se halla 3°,1 para la correccion al 39°; que, agregándosela, da 42°,1.

Tomando 42° por *séptimo* número supuesto, se tiene

*log.*42° . . . . . =	1,6232493
añadiéndole el	8,2418774
resulta *log.*42° rectificado	9,8651267
pero como *log.cos.*42°. =	9,8710735
resulta un error de. . +	0,0059468

y se halla 0,345 para la correccion al 42°; que, agregándosela, da 42°,345.

Tomando 42°,35 por *octavo* número supuesto, se tiene

*log.*42°,35 . . . . . =	1,6268534
añadiéndole el	8,2418774
resulta *log.*arco de 42°,35 rectificado.	9,8687308.

Para encontrar el logaritmo del coseno de 42°,35, observarémos que

*log.*42°. . . =	9,8710735
el *log.cos.*43° es. .	9,8641275
cuya diferencia es. . . .	0,0069460,

que multiplicada (I. 647) por 0,35 da 0,0024311; que quitándola del *log.cos.*42°, tendrémos *log.cos.*42°,35=9,8686424, que le faltan para el 9,8687308 la cantidad de 0,0000884; por lo cual este es el *error*; pero como es por defecto, pues el logaritmo del coseno es menor que el logagitmo del arco de 42°,35 rectificado, le señalarémos con el signo *ménos*, y será —0,0000884 el error.

Aquí observamos, que siendo de signos contrarios los errores, el verdadero valor del arco se halla entre 42° y 42°,35; y para encontrar la correccion al 42°,35, multiplico su error —0,0000884 por 42°,35—42°=0°,35; y se obtiene —0,0000309 por producto; el cual se debe dividir, segun el número 8º de la regla (I. § 284j), por

0,0059468——0,0000884=0,0060352;

y ejecutando la division, resulta —0,005096 para la correccion al 42°,35; que, agregándosela, da 42°,344904.

Tomando 42°,344904 por *noveno* número supuesto, resulta (I. 306)

*log.*42°,344904 . . . . . =	1,6268012
añadiéndole el.	8,2418774
se tiene *log.*arco 42°,344904 rectificado.	9,8686786
*log.cos.*42°,344904.	9,8686778
que da de error. . . . . —	0,0000008

y se obtiene +0,00000068 para la correccion al 42°,344904; que agregándosela, da 42°,34490468.

Ya las tablas no nos dan mayor aproximacion; y por lo mismo, el arco, que rectificado es igual á su coseno, es el de 42°,34490468. Si querémos espresar en minutos, segundos, terceros etc. el quebrado decimal que acompaña al 42°, no tendrémos mas que valuarle (I. 151), multiplicándole por 60′ que tiene el grado; y despues el quebrado que resulte, por 60 que son los segundos que tiene el minuto y así sucesivamente; lo que nos dará que el espresado arco, que rectificado, es igual en longitud con su coseno, tiene $42°20'41''39'''24^{IV}39^{V}10^{VI}4^{VII}$ y 48^{VIII}.

Euler saca $42°20'47''$ y $14'''$.

Hemos resuelto esta cuestion sin ninguna consideracion estraña á

nuestro método; pero hubiéramos podido abreviarle, teniendo en consideracion que, siendo en el arco de 45° el seno igual con el coseno, y siendo el arco mayor que el seno, resulta que ya el arco de 45° es mayor que su coseno. Por otra parte, sabemos que el seno de $30° = \frac{1}{2}$; el coseno de

$$30° = \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 1{,}73 = 0{,}865; \quad \text{tang.}30° = \frac{\text{sen.}}{\text{cos.}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58;$$

luego resulta que la tangente de 30° es menor que el coseno del mismo arco, y como la tangente (I. § 338 nota) es mayor que el arco, resulta que con mas razon el arco de 30° es menor que su coseno. Luego el arco, que ha de ser igual con su coseno, debe hallarse entre 30° y 45°. Por consiguiente, principiando los supuestos por arcos que se hallasen entre estos límites, se obtendrá mas pronto el resultado: que exhortamos á los principiantes á que lo hallen.

94c Para comprobar la escelencia y ventaja de nuestro método, le aplicarémos á una cuestion absurda, cual es *hallar el arco que sea igual con su seno*; la cual es imposible, porque (I. § 338 nota) el arco es mayor que el seno.

Sin embargo, le aplicarémos el método, suponiendo que el arco sea de un grado; como el logaritmo de 1 es cero, el logaritmo de un arco rectificado de 1 grado solo será . 8,2418774
Pero el *log.*del sen. de 1° es. 8,2418553

lo que da de error . . — 0,0000221.

Tomando 2° por *segundo* número supuesto, tendrémos como en el caso anterior *log.*2°. = 8,5429c74
pero *log.sen.*2° . . = 8,5428192

luego resulta un *error* de— 0,0000882.

Como el error que corresponde al supuesto de 1° es numéricamente menor que el del 2°, se debe hallar la correccion á 1°; y practicando la regla se halla —0,33 para la correccion al 1°, que, agregándosela, da 0,67.

Tomando 0,67 por *tercer* número supuesto, resulta que como (I.309)

*log.*0°,67 . . . . . = 9,8260748
añadiéndole el. 8,2418774

se obtiene *log.*arco de 0°,67 rectificado. 18,0679522,

y este logaritmo deberá ser igual con el del seno de 0°,67.

Para encontrar el logarimo de este seno sin tener que considerar, que el logaritmo de *cero* es el *infinito negativo*, basta observar, que el logaritmo del seno de 0°,5 que equivale á

*log.sen.*30°. . = 7,9408419
el *log.* de sen.1° = 8,2418553

diferencia. . = 0,3010134

Y para encontrar la parte del logaritmo que se debe añadir al de 0°,5 ó de 30′ por el esceso de 0,17 que lleva el 0°,67 al 0°,5, formarémos la siguiente proporcion

0,5:0,3010134::0,17:x=0,0511723.

Luego, si á *log.sen.*0°,5 . . . . . = 7,9408419
añadimos lo que acabamos de sacar. 0.0511723

tendrémos *log.sen.*0°,67. . . . . = 7,9920142
pero debía ser 8,0679522

luego resulta un error de . . . — 0,0759380.

Aquí vemos, que este error es numéricamente mayor que los dos anteriores; lo que ya nos indica que no debemos continuar por este procedimiento.

Si recurrimos á suponer el arco de 10°, 100°, 1000°, etc. vamos obteniendo errores qne son siempre negativos sin esperanza de que varíe de signo el error.

Si suponemos al arco los valores negativos —1°, —10°, —100°, etc. no podrémos efectuar los cálculos, porque los logaritmos de los números negativos, como verémos (§ 477), son imaginarios. Luego nuestro nuevo método nos manifiesta que esta cuestion es irresoluble; y que por lo mismo es un absurdo el suponerla realizable.

94*d* El segundo problema, que resuelve Euler, es el siguiente:

Dado un cuadrante de circulo, tirar un seno que divida en dos partes iguales á la superficie del cuadrante.

Llamemos s al arco AE (fig. *a* lám. 8″) que buscamos; y será BE=$\frac{1}{2}\pi-s$; y la superficie del cuadrante igual al arco AEB multiplicado por la mitad del radio CA=1, y tendrémos superficie del cuadrante =$\frac{1}{2}\pi\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\pi$; y la superficie del sector ACE, por la misma razon, será =$\frac{1}{2}s$. Si de este quitamos el triángulo CDE=$\frac{1}{2}$sen.s×cos.s, que da EDA=$\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}$sen.$s$cos.s; cuyo duplo deberá ser igual al cuadrante. Por lo que tendrémos

$$\tfrac{1}{4}\pi=s-\text{sen.}s\cos.s=(\text{I. }644\ aa)s-\tfrac{1}{2}\text{sen.}2s;$$

luego $s-\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{2}$sen.$2s$, y sen.$2s=2s-\frac{1}{2}\pi$.

Supongamos ahora $s-\frac{1}{4}\pi=s-45^\circ=u$; y duplicando será $2s-\frac{1}{2}\pi=2u$; que da $2s=\frac{1}{2}\pi+2u$; y sen.$2s$=sen.$(\frac{1}{2}\pi+2u)=(\S 7)\cos.2u$; pero como teníamos ántes sen.$2s=2s-\frac{1}{2}\pi$, será sen.$2s=2u$; é igualando estos dos valores de sen.$2s$, resultará $2u$=cos.$2u$.

Luego está reducida la cuestion á encontrar un arco que sea igual con su coseno, que es lo que ya hemos hecho al resolver el primer problema de Euler (94 *b*).

Allí hemos encontrado que $2u$ debe ser 42°,34490468; luego u deberá ser 21°,17245234. Y como por el supuesto es $u=s-45^\circ$=AE—45°, se tendrá AE=66°,17245234, y queda resuelta la cuestion.

94*e* El tercer problema de Euler es:

Hallar el sector de círculo ACB (fig. *b*), *que sea dividido en dos partes iguales por la cuerda AB; de modo, que el triángulo ACB, sea igual en superficie al segmento AFBEA.*

Suponiendo el radio AC=1, hagamos AEB=2*s*, de modo que su mitad sea AE=BE=*s*; y tirando el radio CE, será AF=sen.*s* y CF=cos.*s*. Por lo que triáng.ACB=sen.*s*cos.*s*=(I.644 *aa*)$\frac{1}{2}$sen.2*s*. La superficie del sector ACB será = con $2s\times\frac{1}{2}CE=2s\times\frac{1}{2}1=s$; el cual debiendo ser igual al duplo del triángulo ACB, se tendrá $s=2\times\frac{1}{2}$sen.2*s*=sen.2*s*. Por lo que para conseguir lo que deseamos, debe buscarse un arco que, rectificado, sea igual al seno del arco duplo.

Desde luego aparece, que el arco AEB ha de ser mayor que un cuadrante; porque siendo *s* de 45°, su longitud es $\frac{3,14159}{4}$=0,78etc., y el sen.2*s*=sen.90°=1. Luego, para que se verifique la cuestion, el arco AEB debe ser mayor que 90°. Por otra parte, *s* debe ser menor que 75°, ó el arco AEB no debe llegar á ser 150°.

En efecto, siendo *s* de 75°, su longitud estendida en línea recta será (I. 506) 0,0174532925×1×75=1,3089 etc. y el seno de 150°, que es igual al seno de 30°, que es su suplemento, es igual con $\frac{1}{2}$; luego el arco AEB ha de estar comprendido entre 90° y 150°. Por lo cual podemos principiar los supuestos por cualesquiera valores de *s* comprendidos entre 45° y 75°.

Principiarémos tomando los dos primeros supuestos de Euler, y supondrémos *s*=50°; lo que nos dará

*log.*50. . . . . =	1,6989700
añadiéndole.	8,2418774
*log.*arco de 50°rectificado . . . . . =	9,9408474
pero el *log.sen.*2*s*=*log.sen.*100°=*log.sen.*(90°+10°)=*log.* *cos.*10° . . . . . =	9,9933515
luego resulta un *error* de . . . . . +	0,0525041.

Tomando por *segundo* número supuesto *s*=55°, tendrémos

*log.*55° . . . . . =	1,7403627
añadiéndole	8,2418774
log. del arco de 55°rectificado =	9,9822401
pero *log.sen.*110°=*log.cos.*20° =	9,9729858
luego resulta un *error* de —	0,0092543

Como el error de 55° es numéricamente menor que el del supuesto *s*=50, se debe hallar la correccion al 55°.

Para esto, multiplico su error —0,0092543 por 55—50=5; y

dividiendo el producto —0,0462715 por la diferencia de los dos errores, que es 0,0617584, resulta —0,749 para la correccion al 55°, que, agregándosela, da 54°,251.

Tomando 54°,251 por *tercer* número supuesso, se obtiene un error de +0,0006481 y 0,049 para la correccion al 54°,251; que, agregándosela, da 54°,3.

Tomando 54°,3 por *cuarto* número supuesto, resulta —0,0060795 de *error* y +0,0047 para la correccion al 54,251; que, agregándosela, da 54°,2557.

Puesto que la correccion se halla en el tercer guarismo decimal, no intentarémos mayor aproximacion; y valuando el quebrado en minutos, segundos etc. se halla $s=54^\circ 15' 20'' 31''' \text{ y } 12''''$.

Euler saca $54^\circ 18' 6'' 52''' 43'''' 33''''$.

94*f* El cuarto problema de Euler es:

Dado el semicírculo AKDB (fig.*c*) *tirar la cuerda AD de modo que divida á la superficie del semicírculo en dos partes iguales AKD y DAB.*

Llamando *s* al arco buscado AKD, y tirando el radio CD que espresarémos por 1, tendrémos que la superficie del sector $ACD=\frac{1}{2}s$. Si de esto restamos el triángulo $ACD=\frac{1}{2}AC\times DE=\frac{1}{2}\text{sen.}s$, quedará

$$\text{segmento AKD}=\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}\text{sen.}s,$$

que deberá ser igual con la mitad de la superficie del semicírculo. Pero, la superficie del semicírculo, cuando el radio es la unidad es $\frac{1}{2}\pi$; luego deberémos tener

$$\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}\text{sen.}s=\tfrac{1}{4}\pi \text{ ó } s-\text{sen.}s=\tfrac{1}{2}\pi \text{ ó } s-\tfrac{1}{2}\pi=\text{sen.}s.$$

Hagamos $s-\frac{1}{2}\pi=u$: y tomando los cosenos de ambos miembros será $\cos.u=\cos.(s-\frac{1}{2}\pi)=(\S\,16)\cos.(\frac{1}{2}\pi-s)=[\S\,8\,(6)]\text{sen.}s$; y como $\text{sen.}s=s-\frac{1}{2}\pi=u$, deberémos tener $u=\cos.u$. Luego por el problema primero deberá ser

$$u=42^\circ,3449 \text{ etc. y AKD}=s=\tfrac{1}{2}\pi+u=90^\circ+u=132^\circ,3449 \text{ etc.}$$

94*g* El problema 5º de Euler es:

Desde un punto A de la circunferencia de un círculo, tirar dos cuerdas AB, AC (fig. *d*) *de modo que la superficie del círculo quede dividida en tres partes iguales AMB, ABKC, ANC.*

Suponiendo el radio del círculo igual á 1 y la semicircunferencia $=\pi$, espresemos por *s* el arco AMB ó su igual ANC, y tendrémos que, por el problema anterior, la superficie del segmento AMB ó del $\text{ANC}=\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\text{sen.}s$.

Y siendo π la superficie del círculo, la del segmento AMB ó ANC deberá ser su tercera parte; por lo que $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\text{sen.}s=\frac{1}{3}\pi$; pero π espresado en grados es 180°; luego $\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}\text{sen.}s=\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$, ó $s-\text{sen.}s=120^\circ$; que da $s-120^\circ=\text{sen.}s$.

Hagamos $s-120^\circ=u$; que da $s=120^\circ+u$; por lo que la ecua-

cion anterior nos dará $u=\text{sen.}s=\text{sen.}(120°+u)$. Pero como el seno de un arco es el mismo que el de su suplemento, y el suplemento de $120°+u$ es $180°-120°-u=60°-u$, deberá verificarse que

$$u=\text{sen.}(60°-u).$$

Luego para resolver la cuestion propuesta, se debe investigar cual es el arco u que sea igual con el seno de $60°-u$.

Desde luego se advierte que este arco debe ser menor que 60°; porque si llegase á 60°, el seno de $60°-60°$ sería *cero* y no podría ser igual con el arco u. Si u fuese mayor que 60°, tendríamos que $60-u$ sería un valor negativo y no podría ser igual al valor de u que consideramos como positivo.

En este concepto, podemos principiar por cualesquiera valores de u que no lleguen á 60°. Harémos los primeros supuestos como Euler, y así supondrémos $u=20°$, lo que da $60°-u=40°$

*Log.u=log.*20..	=	1,3010300
añadiéndole		8,2418774
resulta el *log.* del arco u rectificado =		9.5429074
log.sen.$(60°-u)$=*log.sen.*40° . .	=	9.8080675
resulta un error de.	+	0,2651601.

Haciendo $u=30°$, se tiene $60°-u=30$; y resulta un error de −0,0200287, y se obtiene −0,728 para la correccion al 30°; que, agregándosela, da 29°,272.

Tomando 29°,272 por *tercer* número supuesto, se obtiene +0,0000069 de error, y +0,00025 para la correccion al 29°,272; que, agregándosela, dá 29°,27225 que considerarémos como valor suficientemente aproximado y equivale á ser $u=29°16'20''$ y $6'''$.

Euler saca $29°16'27''$

Luego el arco AMB ó su igual ANC=$s=120°+u=149°16'20''$ y $6'''$.

94*h* El sesto problema de Euler es:

Dado el semicírculo AEB (fig. *e*) *determinar el arco AE tal que la longitud de dicho arco sea igual á la suma de las rectas AD+DE, que son el seno y el senoverso del espresado arco.*

Desde luego se advierte que el arco AE, que buscamos, ha de ser mayor que un cuadrante y menor que dos.

Llamemos s al suplemento BE del arco AE, y tendrémos que $AE=180°-s$; y suponiendo $AC=1$, será $CD=\cos.s$ y $DE=\text{sen.}s$; y pues ha de verificarse que arcoAE=AD+DE, deberá ser

$$180-s=1+\cos.s+\text{sen.}s.$$

Pero (I. 644 *aa*) $\text{sen.}s=2\text{sen.}\frac{1}{2}s\times\cos.\frac{1}{2}s$, y $1+\cos.s=$[§ 19 (4)]$2(\cos.\frac{1}{2}s)^2$. Sustituyendo estos valores, resulta

$$180°-s=2\cos.\tfrac{1}{2}s(\text{sen.}\tfrac{1}{2}s+\cos.\tfrac{1}{2}s).$$

Pero $\cos.45^\circ - \frac{1}{2}s = [1.642(z)]\cos.45^\circ\cos.\frac{1}{2}s + \text{sen.}45^\circ\text{sen.}\frac{1}{2}s$; y como tanto el seno como el coseno de 45° son iguales, y tienen por valor $\frac{1}{\sqrt{2}}$, tendrémos $\cos.(45^\circ - \frac{1}{2}s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos.\frac{1}{2}s + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{sen.}\frac{1}{2}s$.

Luego $\text{sen.}\frac{1}{2}s + \cos.\frac{1}{2}s = \sqrt{2}\times\cos.(45^\circ - \frac{1}{2}s)$; por lo que será

$180^\circ - s = 2\cos.\frac{1}{2}s \times \sqrt{2}\times\cos.(45^\circ - \frac{1}{2}s) = 2\sqrt{2}.\cos.\frac{1}{2}s.\cos.(45^\circ - \frac{1}{2}s)$ (α).

Los dos primeros supuestos de Euler son $\frac{1}{2}s = 20^\circ$ y $\frac{1}{2}s = 21^\circ$; y nosotros principiarémos del mismo modo

$$\frac{1}{2}s = 20$$
$$45^\circ - \frac{1}{2}s = 25$$
$$180 - s = 140$$

$log.(180 - s) = log.140$. . . . . =	2,1461280
añadiéndole.	8,2418774
resulta arco $180^\circ - s$ rectificado ó del primer miembro de la (ec. α). . . . . =	+0,3880054
$log.cos.\frac{1}{2}s = log.cos.20^\circ$. . . . . =	9,9729858
$log.cos.(45^\circ - \frac{1}{2}s) = log.cos.25^\circ$ . . . . . =	9,9572757
$log.2\sqrt{2}$. . . . . =	0,4515450
$log.$ del segundo miembro de la (ec. α). . . . =	20,3818065

que como es menor que el logaritmo del primer miembro, resulta de error . . . . . — 0,0061989.

Tomemos por *segundo* número supuesto $\frac{1}{2}s = 21^\circ$; lo que da +0,0007702 de error, y —0,1105 para la correccion al 21°; que, agregándosela, da $20^\circ,8895$.

Tomando $20^\circ,8895$ por *tercer* número supuesto, esto es, haciendo $\frac{1}{2}s = 20^\circ,8895$, se obtiene —0,0045285 de error, y —0,016 para la correccion al 21°; que, agregándosela, da $20^\circ,984$, que consideraré-mos suficientemente aproximado y equivale á $20^\circ 59' 2''$ y $24'''$.

Euler saca $20^\circ 54' 3''$ y $30'''$.

Siendo $\frac{1}{2}s = 20^\circ,984$, se tendrá $s = 41^\circ,968 = BE$.

94 *i* El problema séptimo de Euler es:

Determinar un sector de círculo, tal como ACD (fig. *f*) *cuya superficie sea la mitad del triángulo CAE formado por el radio CA, por la tangente AE, y por la secante CDE del arco AD del sector.*

Supongamos el arco que se busca $AD = s$; y tendrémos superficie de sector $ACD = \frac{1}{2}s$; y el triángulo $ACE = \frac{1}{2}CA\times AE = \frac{1}{2}\text{tang.}s$; y debiendo ser $ACD = \frac{1}{2}ACE$, deberá verificarse que $\frac{1}{2}s = \frac{1}{4}\text{tang.}s$ ó

$$s = \tfrac{1}{2}\text{tang.}s, \text{ ó } 2s = \text{tang.}s.$$

Supongamos primero con Euler $s = 60^\circ$; y tendrémos

*log.*2*s*=*log.*120°	=	2,0791813
añadiéndole		8,2418774
resulta *log.*(2*s*=120°) rectificado	=	10,3210587
pero *log.*tang.*s*=*log.*tang.60° .	=	10,2385606.
luego resulta un error de . .	—	00,0824981.

Para segundo número supuesto, hagamos tambien con Euler $s=70°$ y obtenemos un error de +0,0509287, y −0,38 para la correccion al 70°; que, agregándosela, da 69°,62.

Tomando 69°,62 por *tercer* número supuesto, se obtiene +0,0444903 de *error*, y −3°,38 para la correccion al 69°,62; que, agregándosela, da 66°,24.

Tomando 66°,24 por *cuarto* número supuesto, esto es, haciendo $s=66°,24$ se obtiene −0,0076353, y 0,9 para la correccion al 66°,24; que, agregándosela, da 67°,14.

Tomando 67°,14 por *quinto* número supuesto, esto es, haciendo $s=67°,14$ se obtiene +0,0052613 de *error*, y −0,367 para la correccion al 67°,14; que, agregándosela, da 66°,773.

Tomando 66°,773 por *sesto* número supuesto, se obtiene −0,0000663 de *error*, y +0,0048 para la correccion al 66°,773; que, agregándosela, da 66°,7778; que considerarémos como valor suficientemente aproximado, y equivale á $66°46'50''44'''$ y 48^{iv}.

Euler saca $66°46'54''$ y $14'''$.

94*j* El octavo problema de Euler es:

Dado un cuadrante de círculo BCA, (fig. g) *determinar el arco AGE, tal que estendido en plano, ó rectificado, sea igual á la longitud de su cuerda AE prolongada hasta que encuentre al radio CB prolongado.*

Llamemos s al arco AGE que buscamos; y se tendrá (I.632) que su cuerda $AE=2\text{sen.}\frac{1}{2}s$.

El $\text{sen.vers.DA}=1-\cos.s=[\S\,19\,(13)]\,2(\text{sen.}\frac{1}{2}s)^2$.

Ahora los triángulos semejantes ADE, ACF dan AD:AE::AC:AF; ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, teniendo presente que AF debe ser igual con el arco s, tendrémos $2(\text{sen.}\frac{1}{2}s)^2:2\text{sen.}\frac{1}{2}s::1:s$; que da $2(\text{sen.}\frac{1}{2}s)^2\times s=2\text{sen.}\frac{1}{2}s$; ó $s.\text{sen.}\frac{1}{2}s=1$.

Esta espresion contiene dos dimensiones en el primer miembro y ninguna en el segundo; por lo cual, para hacerla homojénea, necesitarémos (6) multiplicar su segundo miembro por R^2; y se nos convertirá en $s.\text{sen.}\frac{1}{2}s=R^2$; que tomando los logaritmos de ambos miembros, y teniendo presente que en estas cuéstiones consideramos (I. 647) que el logaritmo del radio es 10,0000000, tendrémos que para resolver esta cuestion, se ha de verificar que

$$log.s+log.\text{sen.}\tfrac{1}{2}s=2log.R=20,0000000.$$

En este concepto, principiarémos por los dos supuestos de Euler; y será el primero $s=70°$; lo que dará

*log.*70° . . . . . =	1,8450980
añadiéndole.	8,2418774
*log.s=log.arc.*70° rectificado =	10,0869754
$log.sen.\frac{1}{2}s=log.sen.35°$. . =	9,7585913
cuya suma es.	19,8455667
y como debía ser	20,0000000
resulta un error de. . . +	0,1544333.

Suponiendo con Euler $s=80°$, se obtiene $-0,0469651$ de error, y $+4°,37$ para la correccion al 80°; que, agregándosela, da $84°,37$.

Tomando $84°,37$ por *tercer* número supuesto, esto es, haciendo $s=84°,37$ se obtiene $-0,0048833$ de error, y $+0,507$ para la correccion al $84°,37$; que, agregándosela, da $84°,877$.

Tomando $84°,877$ por *cuarto* número supuesto, se obtiene $-0,0001431$ de error, y $0,0153$ para la correccion al $84°,877$; que, agregándosela, da $84°,8923$; que considerarémos como valor de AGE suficientemente aproximado, y equivale á $84°53'32''16'''$ y 48^{IV}.

Euler saca $84°53'38''$ y $51'''$.

94*k* El problema 9º de Euler, que es el último, es:

Hallar todos los arcos que son iguales con su tangente.

El primer arco que tiene esta propiedad es el arco de 0°; pues su tangente es tambien cero. En el primer cuadrante, la tangente siempre es mayor que el arco; en el segundo cuadrante las tangentes todas son negativas; por consiguiente, siendo los arcos positivos, no puede haber ninguna tangente que sea igual con el arco; en el tercer cuadrante, principia la tangente siendo *cero* y acaba por ser infinita; y como entre *cero* y el *infinito* se hallan comprendidas todas las cantidades, no hay duda en que habrá un valor de la tangente que sea igual con el arco. En el cuarto cuadrante es negativa la tangente, y no puede ser igual con el arco que se considera como positivo; en el quinto cuadrante sí; y del mismo modo en los cuadrantes ímpares.

Para resolver este problema, llama Euler *q* á la cuarta parte de la circunferencia; con lo cual el arco buscado tiene esta forma $(2n+1)q-s$; y en virtud de las fórmulas halladas (§§ 14 y 15), todas las tangentes de un arco que se componga de un número ímpar de cuadrantes ménos un arco cualquiera, son iguales á la cotangente de este mismo arco; luego será $tang.[(2n+1)q-s]=cotang.s=\frac{1}{tang.s}$; pero la tangente de este mismo arco ha de ser igual, por la naturaleza

de la cuestion, con la longitud del mismo arco rectificado; luego se tendrá

$$\text{arco}(2n+1)q = \frac{1}{\text{tang.}\, s} + s.$$

Despues hace Euler tang.$s = x$; y en virtud de una fórmula que nosotros demostrarémos (§ 647) obtiene por último que los arcos que cumplen con la condicion de que rectificados, sean iguales con sus tangentes, son los que siguen

I.	1.90°—	90°	
II.	3.90°—	12. . . .	32′48″
III.	5.90°—	7. . . .	22 32
IV.	7.90°—	5. . . .	14 22
V.	9.90°—	4. . . .	3 59
VI.	11.90°—	3. . . .	19 24
VII.	13.90°—	2. . . .	48 37
VIII.	15.90°—	2. . . .	26 5
IX.	17.90°—	2. . . .	8 51
X.	19.90°—	1. . . .	55 16.

APLICACION DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA Ó GEOMETRÍA ANALÍTICA.

95 El Álgebra es mas general que la Geometría, porque con la letra a, por ejemplo, podemos espresar no solo una cantidad cualquiera discreta, sinó una cantidad contínua como una línea, una superficie etc. La Geometría es mas clara que el Álgebra, porque presenta á los sentidos los objetos de las idéas que forman el asunto de nuestras investigaciones. Cuando para generalizar ó facilitar alguna verdad geométrica, se hace uso del Álgebra ó de la Análisis algebráica, se dice que *se aplica el Álgebra á la Geometría*; y cuando para hacer sensible alguna verdad algebráica ó analítica se hace uso de la Geometría, se dice que *se aplica la Geometría al Álgebra ó á la Análisis*. Pero, en general, se comprende bajo el nombre de *Aplicacion del Algebra á la Geometría*, ó de *Geometría Analítica*, *el uso que se hace de estas dos ciencias, ya sea para resolver alguna cuestion perteneciente á una de ellas; ya para resolver cualquiera otra, sea de la especie que sea. Vieta* fué el primero que empleó el Álgebra para encontrar las partes desconocidas de una figura, espresando por ecuaciones la dependencia que tienen entre sí todas las partes de dicha figura. *Descartes* no solo perfeccionó las investigaciones de Vieta, sinó que inventó métodos generales para referir la teoría de las curvas al cálculo algebráico; y de esta aplicacion han resultado ventajas considerables á cada una de estas ciencias, y á todas en general.

La aplicacion del Álgebra á la Geometría tiene dos partes, á saber: *manifestar cómo se pueden traducir en Geometría los resultados de la*

Análisis, y cómo se pueden escribir y resolver analíticamente las cuestiones de Geometría.

Para poner un problema de Geometría en ecuacion, no hay reglas de todo punto fijas, sucediendo aquí una cosa análoga á lo que se manifestó en el Álgebra al tratar del plantéo de los problemas Neuton establece sobre este particular lo siguiente: *cuando un problema está propuesto, es necesario considerarle como resuelto, y comparar entre sí todas las cantidades que comprende, sin ninguna distincion entre las que son conocidas y las que son desconocidas; y entónces será fácil poner el problema en ecuacion.*

La resolucion de un problema de Geometría con el auxilio del Álgebra, se compone generalmente de cuatro partes. 1ª *Traducir algebraicamente el enunciado del problema*, ó lo que *es lo mismo plantearle.* 2ª *Resolver la ecuacion ó las ecuaciones*, segun el enunciado encierre una ó muchas incógnitas. 3ª *Construir ó valuar en líneas* las espresiones algebráicas que se hayan obtenido. Y 4ª *examinar todas las circunstancias que son relativas al problema*; lo que se llama *discutir el problema.*

Principiarémos manifestando cómo se construyen las ecuaciones determinadas de primero y segundo grado.

96 Sea la ecuacion propuesta $x=a$. Cuando se dice, que se construya esta ecuacion, lo que se pide es espresar por medio de una línea el valor de x. Para esto, se tirará una recta indefinida DC (fig. 33), y desde uno cualquiera de sus puntos, tal como A, se tomará hacia la derecha, por ejemplo, una parte AE que contenga á la unidad lineal, que se elija, tantas veces como unidades numéricas tiene la cantidad a; y será $AE=a$; pero, ántes teníamos $x=a$; y como cosas iguales á una tercera, son iguales entre sí, resultará $x=AE$; luego tenemos trazada una recta AE, qué es igual con x, que era lo que nos proponíamos.

Si la ecuacion fuese $x=a+b$, despues de haber tomado AE igual con a, tomaríamos desde E tambien hacia la derecha una parte EB igual con b, y tendriamos que $AB=AE+EB=a+b$, de donde resulta $AB=x$; que era lo que nos proponíamos.

Si la ecuacion fuese $x=a+b-c$, despues de haber tomado hacia la derecha $AB=a$, y $BC=b$, se tomará desde C, hacia la izquierda, la $CE=c$, y tendrémos $AE=AB+BC-CE$; y sustituyendo en vez de estas líneas sus valores a, b, c, será $AE=a+b-c$; pero ántes teníamos $x=a+b-c$, luego $AE=x$; luego hemos encontrado una línea que espresa el valor de x, que era lo que se pedía. Luego esta operacion se reduce á encontrar una cuarta proporcional aritmética á las tres cantidades dadas a, b, c.

97 Es indiferente el tomar estas partes hacia la derecha ó hacia la izquierda del punto que se elige, al cual se le suele llamar *punto de*

origen; pero lo esencial es, que si las cantidades positivas se toman de izquierda á derecha, como las negativas influyen en sentido opuesto al de las positivas, se deben tomar de derecha á izquierda: si las primeras se tomasen de abajo arriba, las segundas se deberían tomar de arriba abajo; y en general, eligiendo á arbitrio la posicion de las cantidades positivas, la de las negativas será exactamente contraria á la de las primeras.

Si c fuese menor que $a+b$, el punto E caería entre C y A; si fuese $a+b=c$, el punto E caería sobre el mismo punto A y se confundiría con él; y si fuese $c>a+b$, el punto E caería á la izquierda de A, como en D.

98 Sea ahora $x=\frac{ab}{c}$; para hallar una línea que esprese el valor de x, tirarémos á arbitrio dos rectas AV, AZ (fig. 34) que formen un ángulo cualquiera VAZ; en uno de sus lados, tomarémos una parte AE igual con el denominador c; en el mismo lado se tomará otra parte AC igual con una cantidad cualquiera de las del numerador, por ejemplo, con a; en el otro lado se tomará una parte AD igual con la otra cantidad b del numerador; se unirá el estremo E de la primera línea con el estremo D de la tercera por medio de una recta ED, y por el estremo C de la segunda se tirará una paralela á DE, tal como CB, y la parte AB que corte en el otro lado será el valor de x.

En efecto, los triángulos AED, ACB, son semejantes por ser la CB paralela con DE, y dan $AE:AC::AD:AB=\frac{AC\times AD}{AE}$;

y poniendo en vez de AC, AD, AE, sus valores a, b, c, será $AB=\frac{ab}{c}$; y como por el supuesto $x=\frac{ab}{c}$, se tendrá $AB=x$, que era lo que se pedía. Luego está reducida la operacion á encontrar una cuarta proporcional geométrica á las tres cantidades c, a, b.

Podríamos tambien construir la misma ecuacion, tomando $AE=e$, $EC=a$, $AD=b$, unir E con D, y por C tirar la CB, y entónces resultará $BD=\frac{ab}{c}=x$.

Todavía se podría construir la misma ecuacion del modo siguiente: tirando una línea indefinida AZ, tomaríamos en ella una parte $AE=c$; por E tiraríamos de un modo cualquiera una recta indefinida ED; en ella tomaríamos una parte $ED=a$; se uniría el punto A con D por medio de la AD que se prolongará indefinidamente; des-

pues se tomará $AC=b$; por C se tirará la CB paralela con ED; y en este caso la línea buscada será $CB=\frac{ab}{c}=x$.

Los tres modos de construccion, que acabamos de esplicar, dan el mismo valor para x; pero le dan colocado de diversa manera; y se aprovecha està diversidad, para elegir, en cada problema la especie de construccion que utiliza lo mas posible las líneas ya trazadas en la figura, ó que da á la incógnita la posicion mas apropiada al objeto á que debe satisfacer. En esta sencillez de la construccion, y en su conveniencia, es en lo que consiste lo que se llama *la elegancia* de una resolucion.

99 Si la ecuacion fuese $x=\frac{a^2}{c}=\frac{aa}{c}$,

se reduciría la operacion á encontrar una tercera proporcional á las dos cantidades c, a; lo que se obtendría por la construccion anterior, tomando la tercera parte AD igual con la segunda AC.

100 Toda ecuacion en que la incógnita esté representada por un quebrado, se puede construir con el auxilio de las cuartas y terceras proporcionales; para lo cual no hay mas que descomponer el numerador y denominador en tantos factores como dimensiones tengan, y añadir por factor tantas veces una letra igual con la unidad, cómo y dónde se necesite, para que el número de dimensiones del numerador sea una unidad mas que el del denominador.

101 Sea la ecuacion $x=\frac{ab+db}{c+d}$: como aquí en el numerador es comun la cantidad b, descomponiendo será $x=\frac{(a+d)b}{c+d}$;

que se reduce á encontrar una 4ª proporcional á $c+d$, b y $a+d$,

102 Si la ecuacion fuese $x=\frac{a^2-b^2}{c}$, descompondríamos el numerador en sus factores $a+b$, $a-b$, y tendríamos $x=\frac{(a+b)(a-b)}{c}$;

y hallando una 4ª proporcional á c, $a+b$ y $a-b$ se tendría el valor de x.

103 Si la ecuacion fuese $x=\frac{abc}{de}$, la descompondríamos en factores de este modo $x=\frac{ab}{d}\times\frac{c}{e}$; donde se ve que, hallando primero una 4ª proporcional á d, a, b, y llamándola m, se tendría $m=\frac{ab}{d}$,

lo que daría $x=\frac{m\times c}{e}$; y hallando ahora una 4ª proporcional á e, m, c, se tendría construido el valor de x.

104 Sea la ecuacion $x=\frac{b^5}{a}$; como aquí al denominador le faltan tres dimensiones para tener una ménos que el numerador, espresarémos la unidad por una letra cualquiera, tal como c; y como toda potencia de la unidad es igual con ella misma, si se multiplica el denominador a por una potencia cualquiera de c, no se alterará su valor, ni por consiguiente el del quebrado; y multiplicando por c^3, que es lo que se necesita para que en el denominador haya sola una dimension ménos que en el numerador, se tendrá $x=\frac{b^5}{c^3\times a}$, que descompondrémos en factores del modo siguiente: $x=\frac{b^2}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$, y estaría reducido á encontrar primero una 3ª proporcional á c y b, que, llamándola m, daría $x=m\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$.

Hallando ahora una 4ª proporcional á c, m y b, y llamándola n, será $x=n\times\frac{b}{c}\times\frac{b}{a}$.

Buscando ahora otra 4ª proporcional p, á c, n y b, sería $x=p\times\frac{b}{a}$.

Y hallando por último una 4ª proporcional á a, p y b, se tendrá una línea que espresará el valor de x.

105 Si la ecuacion fuese $x=\frac{a}{b^2d^2}$, concebiríamos el numerador a multiplicado por la cuarta potencia de la unidad, que espresarémos por c, que es la suficiente para que el numerador tenga una dimension mas que el denominador, lo que daría $x=\frac{ac^4}{b^2d^2}=\frac{ac}{b}\times\frac{c}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}$, que construiríamos como la espresion anterior.

106 Para construir ecuaciones de esta forma $x=\frac{a^3+b^3}{a^2+c^2}$, en que ni el numerador ni denominador tienen factores, se hace que

los tengan, suponiendo, por ejemplo, todos los términos ménos uno, iguales con el producto de alguna ó algunas de las cantidades del primero por otra cantidad indeterminada; y así, aquí supondrémos $b^3=a^2m$, lo que dá $m=\frac{b^3}{a^2}=\frac{b^2}{a}\times\frac{b}{a}$, que se construye por una 3ª y una 4ª proporcional; en el denominador supondrémos $c^2=an$, lo que da $n=\frac{c^2}{a}$, que se construye hallando una 3ª proporcional á a y c, con lo cual será $x=\frac{a^3+a^2m}{a^2+an}=\frac{a^2+am}{a+n}=\frac{a(a+m)}{a+n}$;

lo que manifiesta que, despues de obtenidos los valores de m y n, y luego los de $a+m$, $a+n$, queda reducida la operacion á encontrar una 4ª proporcional á $a+n$, a y $a+m$.

107 Veamos ahora como se construyen los radicales de 2º grado.

Sea $x=\sqrt{ab}$: tírese una recta indefinida AB (fig. 35), tómese en ella una parte AC igual con a, á continuacion de ella tómese CB igual con b, trácese sobre AB como diámetro un semicírculo ADB, y en el punto C levántese la perpendicular DC; lo que dará, por ser dicha perpendicular media proporcional entre los segmentos del diámetro, AC:DC::DC:CB; de donde $DC^2=AC\times CB=ab$, y

$$DC=\sqrt{ab};\quad \text{pero}\quad x=\sqrt{ab};\quad \text{luego}\quad DC=x.$$

que era lo que se pedía.

Como todo radical de 2º grado tiene dos valores, si construyéramos todo el círculo, y prolongásemos la DC por la parte inferior del diámetro hasta llegar á la circunferencia, esta prolongacion de DC sería el valor negativo del radical.

108 Si fuese la ecuacion $x=\sqrt{abc}$, en que debajo del radical hay tres dimensiones, podríamos poner por denominador á la cantidad, que hay debajo del radical, una letra cuyo valor fuese igual con la unidad, tal como d; y sería $x=\sqrt{\frac{abc}{d}}=\sqrt{\frac{ab}{d}\times c}$,

hallaríamos primero una 4ª proporcional á d, a y b, y llamándola m se tendría $x=\sqrt{mc}$, que quedaría construida hallando una media proporcional entre m y c.

109 Si se tuviese $x=\sqrt{a}$, se multiplicaría la cantidad que está debajo del radical por la unidad, espresada por la letra b, y sería $x=\sqrt{ab}$, y estaría reducida al caso primero [107].

Cuando la cantidad, que está debajo del radical, es un polinomio,

siempre se puede construir por dos métodos: ó por una media proporcional, ó con el auxilio del triángulo rectángulo.

Sea, por ejemplo, $x=\sqrt{4ab+3dc+fg}$: para esto harémos como ántes [§ 106] $3dc=am$, $fg=an$, de donde resulta $m=\frac{3dc}{a}=\frac{3d\times c}{a}$; que se construirá hallando una 4ª proporcional á a, al triplo de la línea representada por d, y á c; y $n=\frac{fg}{a}$, que está reducida á encontrar una 4ª proporcional á a, f y g. Sustituyendo en vez de $3dc$ y fg sus valores en la propuesta, será

$$x=\sqrt{4ab+am+an}=\sqrt{a(4b+m+n)};$$

lo que reduce la operacion á encontrar una media proporcional entre a y $4b+m+n$.

110 Si la ecuacion fuese $x=\sqrt{a^2+b^2}$, supondríamos $b^2=am$, y entónces se tendría $x=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+am}=\sqrt{a(a+m)}$, cuya operacion estaba reducida al caso de ántes; pero se hace con mas sencillez por el triángulo rectángulo: para lo cual formarémos un ángulo recto cualquiera VAZ (fig. 36); en uno de los lados tal como AV, tomarémos una parte AB igual con a, y en el otro AZ otra parte AC igual con b; por los estremos B y C de estas líneas se tirará la BC, que será igual con x. En efecto, por ser rectángulo el triángulo BAC, dará $BC^2=BA^2+AC^2=a^2+b^2$, y $BC=\sqrt{a^2+b^2}=x$.

111 Para construir por medio del triángulo rectángulo la ecuacion $x=\sqrt{a^2-b^2}$ en el supesto de ser $a^2>b^2$, sobre la línea $AB=a$ (fig. 37) como diámetro, se trazaría una semicircunferencia ACB; desde uno de sus estremos tal como B colocaríamos por cuerda la $BC=b$, y tirando, desde el otro estremo A al estremo C de esta cuerda, la CA, esta será el valor de x; porque el triángulo ACB es rectángulo en C, y da $AC^2=AB^2-BC^2=a^2-b^2$;

de donde $AC=\sqrt{a^2-b^2}$; pero $x=\sqrt{a^2-b^2}$, luego $AC=x$, que era lo que se pedía.

Esta espresion tambien la pudiéramos haber construido por una media proporcional; pues resolviendo en factores lo que hay debajo del radical, será $x=\sqrt{(a+b)(a-b)}$;
ó tambien suponiendo $b^2=am$, será $x=\sqrt{a^2-am}=\sqrt{a(a-m)}$.

112 Se ha construido este radical en el supuesto de ser $a^2>b^2$, ó $a>b$; porque de otro modo, como el radical sería imaginario, no se podría construir. En efecto, al intentarlo, en este caso, por medio del trián-

gulo rectángulo, no se podría colocar la cuerda igual con b, porque esta cuerda debería ser mayor que el diámetro AB, lo que no puede ser. Si la quisiéramos construir por la media proporcional, tampoco podría ser; porque si suponemos que estén representadas las cantidades a y b por las líneas señaladas con estas letras en la (fig. 38), se deberá hallar una media proporcional entre $a+b$ y $a-b$; para esto desde un punto cualquiera de una recta indefinida, tal como MAN, se tomará una parte AB$=a$; desde B á C se tomará otra BC$=b$; y se tendrá que AC será una de las líneas entre que se deberá hallar la media proporcional; á continuacion de C se deberá colocar la línea que esprese á $a-b$; para lo cual se tomará una parte CD$=a$, y desde D hacia la izquierda una parte DE$=b$, porque b es negativa; sobre AE se trazaría una semicircunferencia AGE; y como levantando una perpendicular desde C jamas encontrará á la circunferencia, se sigue que tambieu se ve en este caso que no se puede construir.

113 Si debajo del radical hubiese muchos términos como en la espresion $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-e^2}$;
primero con dos líneas iguales á a y b formaríamos un triángulo rectángulo BAC (fig. 39), con lo que sería BC^2=AC^2+AB^2=a^2+b^2; que llamando m á la hipotenusa BC, tendríamos $m^2=a^2+b^2$, y

$$x=\sqrt{m^2+c^2+d^2-e^2}.$$

Ahora, en el estremo C de esta hipotenusa m, levantaríamos la perpendicular CD$=c$; y tirando la DB, que llamarémos n, tendrémos

$$DB^2=n^2=CB^2+CD^2=m^2+c^2,$$

lo que dará $x=\sqrt{n^2+d^2-e^2}$;
levantando otra perpendicular DE$=d$ al estremo D de la BD, y tirando la BE, que llamarémos p, será

$$BE^2=p^2=BD^2+DE^2=n^2+d^2,$$ y tendrémos $x=\sqrt{p^2-e^2}$;

ahora, como el cuadrado que sigue es negativo, sobre BE como diámetro, trazarémos un semicírculo BGE; desde E tomarémos una cuerda EG$=e$, y uniendo el punto G con el B, se tendrá que la BG$=x$; porque

$$BG^2=BE^2-EG^2=BD^2+DE^2-EG^2=BC^2+CD^2+DE^2-EG^2=\ldots.$$
$$BA^2+AC^2+CD^2+DE^2-EG^2=a^2+b^2+c^2+d^2-e^2,$$

y GB$=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2-e^2}$;
y como x es igual con esta misma cantidad, se sigue que GB$=x$, que era lo que se pedía.

Si quisiéramos construir por medio del triángulo rectángulo la espresion (§ 109), haríamos $4ab=m^2$, que daría $m=\sqrt{4ab}=\sqrt{4a\times b}$, $3dc=n^2$, que daría $n=\sqrt{3d\times c}$, y $fg=p^2$, que daría $p=\sqrt{fg}$; con lo cual sería $x=\sqrt{m^2+n^2+p^2}$, que construiríamos por el mé-

to lo que acabamos de esponer, despues de halladas las medias proporcionales que espresan los valores de m, n y p.

Si debajo del radical hubiese muchos cuadrados positivos y muchos cuadrados negativos, como por ejemplo

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+\ldots-(m^2+n^2+q^2+\ldots)},$$

hallaríamos primero un cuadrado $L^2=a^2+b^2+c^2+\ldots$ y despues otro $M^2=n^2+n^2+q^2+\ldots$, y quedaba reducida la cuestion á construir $\sqrt{L^2+M^2}$.

Los radicales numéricos tambien se construyen con mucha facilidad; pues si se nos pidiese construir el radical $\sqrt{12}$, lo descompondríamos en $\sqrt{3.4}$, ó en $\sqrt{6.2}$, ó en $\sqrt{16-4}=\sqrt{(4)^2-(2)^2}$, ó en $\sqrt{9+1+1+1}=\sqrt{3^2+1^2+1^2+1^2}$.

114 Pasemos á la ecuacion de segundo grado $x^2+px=q$; resolviéndola por la regla dada [I. 253], será $x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; que, separando los valores de la incógnita, da $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q} \\ x=-\frac{1}{2}p-\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}. \end{cases}$

Para construir estos valores de x, primero construirémos el radical $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; pero ántes observarémos que como q no tiene mas de una dimension, necesitamos multiplicarla por la unidad espresada, v. g. por a, y el radical se convertirá en $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+aq}$, y haciendo $aq=m^2$, que da $m=\sqrt{aq}$, el radical será $\sqrt{\frac{1}{4}p^2+m^2}$; por consiguiente formaríamos un triángulo rectángulo ACB (fig. 40) en que uno de los catetos CA fuese igual con $\frac{1}{2}p$, y el otro $CB=m$; con lo cual se tendría

$$AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{(\tfrac{1}{2}p)^2+m^2}=\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+m^2};$$

ahora, tomando desde B hacia la izquierda una parte $BO=\frac{1}{2}p$, por ser $\frac{1}{2}p$ negativo, se tendrá

$$AO=AB-BO=\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+m^2}-\tfrac{1}{2}p=-\tfrac{1}{2}p+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q},$$

que es el primer valor de x.

Para construir el segundo, se tomará desde A hacia la izquierda una parte $AM=\frac{1}{2}p$, y desde M tambien hacia la izquierda otra parte, $MN=\sqrt{\frac{1}{4}p^2+q}$; ó $=AB$; y se tendrá

$$AN=-AM-MN=-\tfrac{1}{2}p-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2+q}.$$

Si q tuviese el signo ménos, se construiría el radical por lo dicho (111).

115 No es necesario resolver las ecuaciones de 2º grado para encontrar gráficamente las raices; estas se obtienen inmediatamente por las

propiedades de las líneas proporcionales consideradas en el círculo.

Sea la ecuacion $x^2+px=q$; ó poniendo en vez de q el valor m^2 que podemos hacer que tenga, siendo m una media proporcional entre q y la unidad, se la puede transformar en $x(x+p)=m^2$, que se refiere á la propiedad de las secantes y de las tangentes que parten desde un mismo punto; porque si se describe (fig. 41) con un radio $BC=\frac{1}{2}p$ la circunferencia DBD′, se le tira una tangente AB cuya longitud sea m, y por los puntos A y C se tira una secante ADD′, llamando x á la línea AD, se tendrá

$$AD'=AD+DD'=AD+2CB=x+2\times\tfrac{1}{2}p=x+p;$$

y como toda tangente es media proporcional entre la secante y su parte esterna, se tendrá AD′:AB::AB:AD, de donde $AD\times AD'=AB^2$, ó $x(x+p)=m^2$, ó $x^2+px=q$; que es la ecuacion propuesta.

116 Si la ecuacion fuese $x^2-px=q$, ó $x^2-px=m^2$, entónces se supondría que $AD'=x$, lo que daría $AD=x-p$, y $x(x-p)=m^2$ ó $x^2-px=m^2$.

Si por el punto A tiramos la otra tangente AM, y unimos el punto M con B, la recta MB se llama *cuerda de los contactos*.

117 Para manifestar cómo se traducen las cuestiones de Geometría á ecuaciones algebráicas, nos propondrémos resolver algunos problemas, y lo ejecutarémos empleando el método analítico, que *consiste en suponer hecho lo que se trata de ejecutar*.

De esta suposicion, resulta inmediatamente que se ha de verificar alguna condicion, que hallándose escrita, suministre una ecuacion entre las cosas que se dan conocidas y las que se buscan ó son desconocidas. Indagando despues las consecuencias que resultan de esta condicion, que se supone verificada, ó de la ecuacion que resulta de ella, se llega á descubrir por último la cantidad ó cantidades desconocidas, ó á indicar el procedimiento que es necesario seguir para ejecutar lo que se pide.

En el método sintético se procede al contrario: enunciada una proposicion, se parte de una de las anteriormente demostradas; despues, esta se combina con otra de las anteriores, luego con otra, y así se continúa hasta llegar á tener la proposicion que se enunció. El primer método, abrazando el asunto propuesto en toda su estension, le hace pasar por diferentes formas, haciendo diversas traducciones del enunciado hasta llegar á tener lo que se busca, espresado por una condicion sencilla conocida, y por lo mismo se llama *método de descomposicion*; el segundo, que presenta siempre la proposicion enunciada, como la última consecuencia del conjunto de proposiciones que forman la demostracion, es una *composicion*; porque se va añadiendo principio sobre principio, hasta que se llega á esta consecuencia.

El método analítico se ha llamado *método de invencion*; el método sintético se dice que es mas *propio para la enseñanza*. Con el fin de dar á conocer tanto el uno como el otro, y de examinar el fundamento de

esta asercion, resolverémos aquí el siguiente problema por ambos métodos, para que se puedan comparar con exactitud.

118 Problema. *Dado un triángulo cualquiera, tal como el* HEI (fig. 42), *inscribirle un cuadrado.*

Resolucion por el método analítico: supongo ya hecho lo que se me pide, y que ABCD sea el cuadrado inscrito.

De este supuesto resulta inmediatamente que AB=BC; y que si se baja la EF perpendicular á la base HI del triángulo, como será paralela con BC, la parte GF, será igual con BC (I § 466 cor. 1°), luego AB=GF; pero los triángulos semejantes HEI, AEB, dan

EF:EG=EF−GF::HI:AB;

y como ha de ser AB=GF, sustituyendo en vez de AB su valor GF, se tendrá EF:EF−GF::HI:GF; pero si se verifica esta proporcion, se tendrá tambien (I. 267 teor. 4°) esta otra

EF+HI:EF−GF+GF::HI:GF, ó EF+HI:EF::HI:GF.

Luego para encontrar GF, que es igual con el lado BC del cuadrado, *no hay mas que hallar una cuarta proporcional á la suma de la base y altura del triángulo, á la altura, y á la base*: por consiguiente, tomando en la altura EF esta parte GF, se tendrá el punto G, por donde, tirando la AB paralela con la base HI, y desde A y B las perpendiculares AD, BC, se tendrá el cuadrado ABCD inscrito en el triángulo HEI.

119 Esta cuarta proporcional se podría encontrar segun la espuesto (98) en un paraje cualquiera, pero es mas elegante practicar la construccion en la misma figura. Sobre cuyo punto debemos advertir para todos los casos, que siempre conviene hacer servir la figura del enunciado para la construccion de los resultados; porque, en general, del enlace mas ó ménos directo entre la construccion y la figura, resulta la mayor ó menor elegancia de la solucion del problema. Y entre los diversos procedimientos que podríamos seguir, haciendo uso de la misma figura, el que satisface mejor, en el caso presente, á las condiciones de sencillez y claridad, consiste en hacer servir para el efecto el ángulo EFI, ejecutando en él la construccion de este modo: prolongarémos el lado FI hasta O, de modo que FO=EF+HI; tomarémos una parte FM=HI; unirémos el punto O con el punto E por medio de la OE; y desde el punto M tirarémos la MG paralela á la OE, la cual cortará en la altura EF la parte GF que será la cuarta proporcional; porque los triángulos semejantes OEF, MGF, dan

OF=EF+HI:EF::MF=HI:GF.

120 En este procedimiento se advierte que esta última proporcion no es mas que una consecuencia de haber supuesto hecho lo que se pedía, y que por consiguiente AB=BC; pero nuestro entendimiento no queda aun satisfecho, y quiere cerciorarse de si en efecto hallando esta cuarta proporcional, se verificará que AB=BC. Por eso el gran

Neuton no juzgaba digna de la luz pública ninguna proposicion en que, despues de encontrada su resolucion por el método analítico, no fuese acompañada de una demostracion sintética. Y así, para convencernos de que no nos hemos equivocado, deberémos partir de esta última proporcion, hasta llegar á tener que AB=BC; para lo cual no hay mas que invertir el órden de los raciocínios. Por lo que, fundándonos en que la diferencia de antecedentes es á la de consecuentes como un antecedente es á su consecuente, la proporcion EF+HI:EF::HI:GF se convertirá en EF+HI—HI:EF—GF::HI:GF ó en EF:EG::HI:GF; pero los triángulos semejantes AEB, HEI, dan EF:EG::HI:AB; y como estas dos proporciones tienen cumunes los tres primeros términos, los cuartos tambien serán iguales, luego AB=GF; pero GF=BC por lados opuestos del paralelogramo GBCF, luego AB=CB; por consiguiente teniendo dos lados contiguos iguales el paralelogramo ABCD, y rectos sus ángulos, será cuadrado; y como todos los ángulos están en el perímetro del triángulo, se sigue que este cuadrado está inscrito en el triángulo, que era lo que se pedía.

121 *Resolucion por el método sintético*: bájese la EF perpendicular á la HI; prolónguese la FI de modo que FO sea igual con EF+HI; únase el punto O con E, por medio de la OE, y tómese tambien FM=HI; por el puuto M tírese la MG paralela con OE, por el punto G donde encuentre á la EF, tírese la AB paralela con HI, y desde sus estremos A, B, bájense las perpendiculares AD, BC, con lo que se tendrá el cuadrado ABCD inscrito en el triángulo HEI.

Dem. Los triángulos OEF, MGF, dan OF:EF::MF:GF. Poniendo en vez de OF y MF sus valores EF+HI, y HI, se tendrá EF+HI:EF::HI:GF; y por lo dicho (I. 267 teor. 5º), tendrémos

EF+HI—HI:EF—GF::HI:GF,

que se convierte en EF:EG::HI:GF; pero los triángulos semejantes EHI, EAB, dan EF:EG::HI:AB; y como estas dos proporciones tienen comunes los tres primeros términos, los cuartos serán iguales, y por consiguiente AB=GF. Mas por la construccion hecha, GF=BC [I. 466 cor. 1º], luego AB=BC; y siendo rectos los ángulos A, B, C, D, y estando en el perímetro del triángulo, se sigue que tenemos inscrito el cuadrado ABCD que se nos pedía en el triángulo HEI.

122 Por la comparacion de estos dos métodos, se ve que el analítico es mucho mas largo que el sintético; y que si se omite en él la segunda parte ó la composicion, no es tan claro como el sintético; por eso se ha considerado al primero como el único para hallar cosas nuevas, y se le ha llamado *método de invencion*, y al segundo como *mas propio para la enseñanza*. En efecto, cuando nos proponíamos resolver este problema, nada teníamos en su enunciado que nos dijese á qué proposicion de las anteriores estaba reducida la cuestion; y así, no había

otro medio para averiguarlo, que suponer hecho lo que se pedia, y usan lo de proposiciones idénticas ir sacando consecuencias hasta llegar á una conocida, que manifieste la relacion de lo que se busca con lo que se da conocido, y por consiguiente lo que hay que hacer para hallar lo que se indaga. Como despues de hallado el modo de resolver una cuestion, es necesario que participe el género humano de este hallazgo, es indispensable simplificar su resolucion lo mas que sea posible, á fin de que esté mas á los alcances de todo el mundo; y así, como el método sintético lleva en sí ó mas brevedad, ó mas claridad, y tanto la una como la otra de estas circunstancias es esencial en la enseñanza, de ahí es que el método sintético es mas propio para enseñar. Sin embargo, no se debe hacer uso del método sintético sinó hasta haber ya demostrado con sencillez y claridad el número de principios que son indispensables, para que luego el método analítico se pueda aplicar con la generalidad que le es propia; y por eso de aquí en adelante siempre preferirémos y harémos uso del método analítico.

123 Hemos resuelto este problema de propio intento sin hacer uso del Álgebra, para dar á conocer que al método analítico no le es esencial el Álgebra; y así es que en las colecciones matemáticas de Pappus se encuentran una multitud de cuestiones resueltas por este método, y que todas empiezan suponiendo hecho lo que se intenta hacer.

En adelante, siempre harémos uso del Álgebra, ya porque por su medio se facilita mucho la resolucion de las cuestiones, y ya porque nuestro objeto es aquí el manifestar cómo se traducen en Álgebra las cuestiones de Geometría.

124 Propongámonos ahora *prolongar una recta dada, dividida de un modo cualquiera, con la circunstancia de que el rectángulo formado por la línea, despues de prolongada, y por la prolongacion, sea igual al cuadrado de la distancia que hay desde el punto de division hasta el estremo de la prolongacion.*

Sea AB (fig. 43) la línea dada, dividida de un modo cualquiera en el punto C: supóngase hecho lo que se pide, y que la prolongacion sea la BE; con lo cual se tendrá $AE \times EB = CE^2$; haciendo ahora la línea dada $AB = a$, $CB = b$, y $BE = x$, se tendrá

$$AE = AB + BE = a + x, \text{ y } CE = CB + BE = b + x,$$

sustituyendo estos valores en la ecuacion de arriba será $(a+x)x = (b+x)^2$, ó ejecutando las operaciones $ax + x^2 = b^2 + 2bx + x^2$; pasando al primer miembro todos los términos donde hay incógnita, haciendo la destruccion y resolviendo en factores, se tendrá $x(a-2b) = b^2$, que da $x = \frac{b^2}{a-2b}$, cuyo valor nos indica que la prolongacion, que se pide, debe ser una tercera proporcional á $a-2b$ y á b.

Para construir en la misma figura esta tercera proporcional, se prac-

ticará lo siguiente: tómese hacia la izquierda del punto C una parte CD=CB=b, y se tendrá AD=AB—DB=AB—2CB=$a-2b$; en el punto C levántese una perpendicular CL=AD=$a-2b$; por el punto B tírese BH paralela con CL é igual á CB, y por el punto H la HE paralela con LB, la cual irá á cortar en la prolongacion de AB una parte BE, que será la tercera proporcional.

En efecto, los triángulos semejantes LCB, HBE, dan

$$CL=AD=a-2b : CB=b :: BH=CB=b : BE=\frac{b^2}{a-2b}.$$

Pero ántes se tenía $x=\frac{b^2}{a-2b}$, luego BE=x.

Ahora, invirtiendo los raciocínios, podríamos llegar al primer supuesto de $(a+x)x=(b+x)^2$, ó de ser $AE\times BE=CE^2$.

Si b fuese menor que $\frac{1}{2}a$, el punto D caerá siempre entre A y C, y se verificará la construccion indicada. Si $b=\frac{1}{2}a$, el punto D caerá sobre el punto A, y será $AD=a-2b=a-a=0$, y por consiguiente el punto L caerá en C, la LB se confundirá con la CB, y por consiguiente la HE′ será paralela con AB; por lo que jamas la llegará á encontrar. Pero si $b>\frac{1}{2}a$, el punto D caerá hacia la izquierda de A, por ejemplo en D′, y será AD′ una cantidad negativa; luego la CL se deberá tomar por la parte inferior de la AB, esto es, estará representada por la CL′; uniendo el puuto L′ con el punto B y tirando por H la HE″ paralela con BL′; la prolongacion BE″ será negativa, y espresará que en este caso no se puede efectuar la prolongacion pedida, á ménos que no se trastorne el enunciado de la cuestion; por lo que el problema se debería proponer diciendo en vez de *prolongar*, *acortar*, *etc.*

125 *Dados los tres lados de un triángulo, hallar su superficie.*

Sea ABC (fig. 44) el triángulo dado, y supongamos conocida la superficie, que es lo que buscamos. De esto resulta que si se baja la perpendicular BD á la base AC, tendrémos sup. de triáng. ABC=$\frac{1}{2}$AC×BD.

Ahora, para encontrar el valor de BD, espresaremos los lados con las letras minúsculas correspondientes á los ángulos opuestos, y será BC=a, AB=c, AC=b, á la perpendicular BD la llamarémos z, y x al segmento DC; con lo cual superf. de triáng. ABC=$\frac{1}{2}bz$; pero los dos triángulos rectángulos ABD, BDC, dan

el 1º $BD^2=AB^2-AD^2$, ó $z^2=c^2-(b-x)^2=c^2-b^2+2bx-x^2$, y

el 2º $BD^2=BC^2-DC^2$, ó $z^2=a^2-x^2$;

por consiguiente, igualando los dos valores de z^2, tendrémos

$$c^2-b^2+2bx-x^2=a^2-x^2 \text{ ó } 2bx-x^2+x^2=a^2-c^2+b^2;$$

de donde resulta $x=\frac{a^2-c^2+b^2}{2b}$.

Sustituyendo este valor de x en el segundo de z^2, tendrémos

$$z^2=a^2-x^2=(a+x)(a-x)=\left(a+\frac{a^2-c^2+b^2}{2b}\right)\times\left(a-\frac{a^2-c^2+b^2}{2b}\right)=....$$

$$\frac{2ab+a^2-c^2+b^2}{2b}\times\frac{2ab-a^2+c^2-b^2}{2b}=\frac{(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-(a^2-2ab+b^2))}{4b^2};$$

pero $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ y $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$, luego tendrémos

$$z^2=\frac{((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)}{4b^2}.$$

Y como la diferencia de dos cuadrados es igual á la suma de las raices multiplicada por su diferencia (I. 179), se tendrá

$$z^2=\frac{(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)}{4b^2};$$

añadiendo y quitando al segundo factor la cantidad c, al tercero la b y al cuarto la a, y llamando $2s$ á la suma $a+b+c$ de los tres lados del triángulo, tendrémos

$$z^2=\frac{(a+b+c)(a+b+c-c-c)(c+a+b-b-b)(c+b+a-a-a)}{4b^2}=.....$$

$$\frac{2s(2s-2c)(2s-2b)(2s-2a)}{4b^2}=\frac{2s\times2(s-c)\times2(s-b)\times2(s-a)}{4b^2}=\frac{4s(s-c)(s-b)(s-a)}{b^2},$$

y $$z=\sqrt{\frac{4s(s-c)(s-b)(s-a)}{b^2}}=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}.$$

Sustituyendo este valor en el de la superficie del triángulo será

$$\text{sup. de triáng.}=\frac{b\times z}{2}=\frac{b}{2}\times\frac{2}{b}\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a}=\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}.$$

Por consiguiente, *para encontrar la superficie del triángulo por medio de sus tres lados, se restará de la semisuma de los tres lados cada uno de ellos; se multiplicarán estos tres factores, y despues este producto por la semisuma de los mismos tres lados; de este producto se estraerá la raiz cuadrada, y esta espresará el valor de la superficie que se pedía.*

Fundándonos en estas ecuaciones, podríamos deducir varias proposiciones geométricas y trigonométricas, demostradas ya; pero pasarémos á manifestar cómo un resultado algebráico nos da á conocer, que la cuestion, que se intentaba resolver como problema, es teorema.

126 Para esto, propongámonos resolver la siguiente cuestion: *Determinar dentro de un triángulo equilátero un punto tal, que, bajando*

desde él perpendiculares á los tres lados, la suma de dichas tres perpendiculares sea igual con la altura del triángulo.

Supóngase ya encontrado este punto, y que sea E (fig. 45): con lo cual, tirando las perpendiculares EF, EG, EH, á los lados del triángulo, se verificará que BD=EF+EG+EH.

Ahora, llamando a la altura BD, b á AD ó DC que es la mitad (I. 366 esc.) del lado AC, y prolongando la FE hasta que encuentre en K el lado CB prolongado, tendrémos que los triángulos ADB, AFI, serán semejantes; pues por ser las FI, BD, perpendiculares ambas á AC, serán paralelas; y nos darán llamando x á la parte AF,

$$AD=b:DB=a::AF=x:FI=\frac{ax}{b};$$

y quitando la EF, á que llamarémos z, será $EI=FI-EF=\frac{ax}{b}-z$.

Los triángulos CBD, CFK son tambien semejantes, por la misma razon, y dan $CD=b:DB=a::CF=AC-AF=2b-x:FK=$.....

$$\frac{a(2b-x)}{b}=\frac{a\times 2b}{b}-\frac{ax}{b}=2a-\frac{ax}{b},$$

y quitando $FE=z$, se tendrá $EK=FK-EF=2a-\frac{ax}{b}-z$.

Los triángulos ADB, EGI, son tambien semejantes, porque ademas de ser rectángulos el primero en D y el segundo en G, tienen los ángulos en B y en I iguales por correspondientes entre las paralelas BD, FI, siendo la secante AB, y darán

$$AB=AC=2b:AD=b::IE=\frac{ax}{b}-z:EG=\frac{b\times\left(\frac{ax}{b}-z\right)}{2b}=\frac{ax}{2b}-\tfrac{1}{2}z.$$

Los triángulos EKH y DBC, son tambien semejantes, por ser rectángulos y ademas tener iguales por correspondientes los ángulos en K y en B, luego darán

$$BC=AC=2b:CD=b::EK=2a-\frac{ax}{b}-z:EH.....$$

$$=\frac{b\left(2a-\frac{ax}{b}-z\right)}{2b}=\frac{2a-\frac{ax}{b}-z}{2}=a-\frac{ax}{2b}-\tfrac{1}{2}z.$$

Por consiguiente, sustituyendo estos valores de las perpendiculares en la ecuacion DB=EF+EG+EH, se nos convertirá en

$$DB=z+\frac{ax}{2b}-\tfrac{1}{2}z+a-\frac{ax}{2b}-\tfrac{1}{2}z=z-z+a=a.$$

127 Si en esta ecuacion sustituimos en vez de DB el valor a que

le supusimos, se nos convertirá en $a=a$, que es una ecuacion idéntica, en que está cifrado el axioma primitivo de que *una cantidad es igual con ella misma.* Así, esta ecuacion manifiesta que la cuestion propuesta no es problema, sinó teoréma; ó que la condicion de que se dedujo la ecuacion, está comprendida en los datos de la cuestion, y nunca puede existir sin ella. Para la determinacion del punto que buscábamos, se necesitan aun dos condiciones: una para encontrar la ecuacion respecto de x, por medio de la cual se conozca en qué punto de la línea AC se debe levantar la perpendicular EF; y otra para encontrar la ecuacion respecto de z, por medio de la cual se conozca en qué paraje de esta perpendicular se debe tomar este punto: mediante las cuales se haga la cuestion de todo punto determinada. Y pues que las condiciones que se han de verificar en la cuestion, están satisfechas y no hay ecuacion para determinar ninguna de las líneas incógnitas AF, FE, se podrán tomar á arbitrio; de donde se deduce que el punto buscado E se podrá tomar en cualquier parte del triángulo; por lo que enunciarémos y demostrarémos la proposicion como teorema de este modo.

128 Teor. *Si desde un punto cualquiera dentro de un triángulo equilátero se tiran perpendiculares á los lados, la suma de estas tres perpendiculares es igual á la altura de dicho triángulo.*

Dem. Sea E un punto cualquiera del triángulo ABC: tirando desde él las líneas EA, EB, EC, á los ángulos A, B, C, se tendrá dividido el triángulo en otros tres, y será

$$ABC=AEC+CEB+AEB.$$

Pero la superficie del triángulo ABC es igual con $\frac{1}{2}AC\times BD$, la del AEC es $\frac{1}{2}AC\times EF$; la del CEB es $\frac{1}{2}BC\times EH$; la del AEB es $\frac{1}{2}AB\times EG$; luego sustituyendo en vez de estos triángulos las espresiones de su superficie, será $\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}AC\times EF+\frac{1}{2}BC\times EH+\frac{1}{2}AB\times EG$; y como por ser equilátero el triángulo, tendrémos $AC=BC=AB$, será

$$\frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}AC\times EF+\frac{1}{2}AC\times EH+\frac{1}{2}AC\times EG;$$

y suprimiendo el factor comun $\frac{1}{2}AC$, será por último

$$BD=EF+EH+EG.$$

Pero BD es la altura del triángulo, $EF+EH+EG$ la suma de las perpendiculares tiradas á los lados desde un punto cualquiera; luego *si desde un punto dentro de un triángulo, etc.* L. Q. D. D.

129 Probl. *Dado un círculo* AGB (fig. 46) *y la posicion del diámetro* AB, *hallar un punto* E *fuera de este diámetro, tal que, bajando desde él una perpendicular* ED *á dicho diámetro, el cuadrado de esta perpendicular junto con el rectángulo formado por las partes de una línea cualquiera* FG *que pase por dicho punto, sea igual al rectángulo formado por las partes en que queda dividido dicho diámetro.*

Supóngase hallado lo que se busca, y que sea por ejemplo E el

punto que se pide: con lo cual, bajando la perpendicular ED y tirando la FG de un modo cualquiera, será

$$ED^2+FE\times EG=AD\times DB.$$

Ahora, si prolongamos la perpendicular ED hasta que se convierta en ML, las cuerdas FG, ML, darán (I. 491)

$$EF\times EG=ME\times EL=(MD+DE)\times(LD-DE)=(I.\S\ 436)....$$
$$(LD+DE)(LD-DE)=(I.\ 179)LD^2-DE^2;$$

y como por otra parte sabemos (I. 488 1ª) que $AD\times DB=LD^2$, si sustituimos en vez de $EF\times EG$ y $AD\times DB$, los valores que acabamos de obtener, resultará $DE^2+LD^2-DE^2=LD^2$; que haciendo la destruccion en el primer miembro, resulta $LD^2=LD^2$, que es una ecuacion idéntica. Y como quedan satisfechas todas las demas condiciones, se infiere que el punto E se puede tomar en cualquier parte; y que esta propposicion no és un problema, sinó un teorema, que enunciarémos y demostrarémos del modo siguiente.

130 Teor. *Si desde un punto cualquiera dentro de un círculo se baja una perpendicular á un diámetro cualquiera, y por el mismo punto se tira una cuerda, se verificará que el cuadrado de la perpendicular junto con el producto de los segmentos de la cuerda, será igual al producto de los segmentos que causa en el diámetro la perpendicular bajada.*

Espl. Sea E un punto dentro del círculo AFLGBM; digo que si desde un punto E se tira la perpendicular ED al diámetro, y la cuerda FG de un modo cualquiera, se verificará que

$$ED^2+EF\times EG=AD\times DB.$$

Dem. Prolónguese la perpendicular ED por una y otra parte hasta que termine en la circunferencia, y tendrémos (I.491)

$$EF\times EG=ME\times EL=(MD+DE)(LD-DE)=(LD+DE)(LD-DE).....$$
$$=LD^2-DE^2;$$

y trasladando DE^2 al primer miembro, será

$DE^2+EF\times EG=LD^2=$(I. § 488 1ª)$AD\times DB$, que era L. Q. D. D.

131 El corto número de cuestiones resueltas hasta aquí, basta para manifestar cómo se puede aplicar el Algebra á la resolucion de los problemas de Geometría. Por medio de ellas se habrá echado de ver, que las circunstancias relativas á la situacion de las líneas, se pueden siempre deducir de la consideracion de los triángulos, y mediante las propiedades de estas figuras, espresarse algebráicamente. El tino en formar los triángulos de que se trata, y que resultan esplícita ó implícitamente de las condiciones del problema propuesto, así como la facilidad de plantear los problemas numéricos, no se puede adquirir sinó con el uso. Por esta causa, Neuton en su Aritmética universal resuelve una multitud de cuestiones interesantes, y dice al fin del capítulo 14, que se ha detenido ex-profeso, "*porque para aprender bien las ciencias aprovechan mas los ejemplos que los preceptos.*»

132 Mas para buscar un método que asegure la posibilidad de poner todos los problemas en ecuacion, de un modo uniforme, consideraremos que una cuestiou de Geometría se puede reducir siempre en última análisis á encontrar uno ó muchos puntos dispuestos en virtud de ciertas condiciones dadas; de donde se sigue que para cumplir con el objeto propuesto, es necesario *indagar cómo se puede espresar analíticamente la posicion de los puntos, líneas, superficies y volúmenes en el espacio*: lo cual forma el objeto de la Geometría Analítica.

133 El espacio, como le consideran los Geómetras, es una estension indefinida en la cual se conciben colocados todos los cuerpos. En él no se puede determinar el lugar absoluto de estos, sinó sólo sus situaciones relativas, que son las únicas cuyo conocimiento necesitamos; para lo cual se refieren estos puntos á objetos fijos, cuya posicion se supone conocida.

134 Cuando se quiere fijar la posicion de un punto que se halla sobre un plano, se conciben dos rectas AX, AZ (fig. 47) que formen entre sí un ángulo cualquiera dado; con lo cual todo punto M situado en dicho plano, está determinado cuando se conocen las longitudes de las rectas MQ, MP, tiradas desde este punto paralelamente á las líneas AX, AZ, y terminadas en estas líneas; porque por las propiedades de las paralelas [I. 647] AQ=PM, y AP=QM. Luego conociendo estos valores se pueden tirar las rectas PM y QM, que por su interseccion determinen el punto M.

135 Para fijar un punto en el espacio, el método mas sencillo es concebir tres planos ZAX, XAU, UAZ (fig. 48) que formen entre sí ángulos dados. La posicion de un punto cualquiera M queda determinada cuando se conocen las longitudes de las rectas MM′, MM″, MM‴, tiradas por este punto paralelas respectivamente á cada uno de los tres planos, y terminadas en ellos; porque entónces se pueden hacer pasar tres planos paralelos á estos, sobre los cuales se encuentre dicho punto, y sea por consiguiente su punto comun de interseccion.

136 Antes de examinar las consecuencias que resultan del convenio precedente, debemos observar: que, en general, tomarémos las palabras *plano* y *línea recta* en toda la estension de su significado, es decir, que en general entenderémos por línea recta, una línea recta indefinidamente prolongada por ambos estremos, y por plano un plano indefinidamente estenso. Cuando se necesiten considerar porciones limitadas de planos ó de rectas, lo advertirémos como acabamos de hacer ahora; pero estas abstracciones quedarán siempre determinadas por las condiciones particulares de la cuestion propuesta.

Determinacion de los puntos y rectas sobre un plano.

137 Cuando los puntos M, M′ (fig. 49) de un plano, se refieren á dos rectas fijas AX, AZ, tiradas en este plano, las longitudes QM, Q′M′, ó sus iguales AP, AP′, se llaman *abscisas*; y las distancias PM, P′M′, ó sus iguales AQ, AQ′, se llaman *ordenadas*. La recta AX sobre la cual se cuentan las longitudes AP, AP′, se llama el *eje de las abscisas*, y la AZ sobre la que se cuentan las AQ, AQ′, se llama el *eje de las ordenadas*. Las ordenadas y abscisas se comprenden bajo el nombre general de *coordenadas*; las rectas AX, AZ, son entónces los ejes de las coordenadas; y el punto A, en que se cortan, es el orígen de las coordenadas.

138 La eleccion de los ejes es absolutamente arbitraria, y se pueden contar, conforme se quiera, las abscisas ó las ordenadas en el uno ó en el otro; pero siempre se debe tener presente, que la *abscisa* de un punto *es la distancia de dicho punto al eje de las ordenadas, contada en una recta paralela al eje de las abscisas*; y la ordenada es *la distancia al eje de las abscisas, contada en una recta paralela al eje de las ordenadas.*

139 Representemos en general por x las abscisas, y por z (*) las ordenadas; con lo cual tendrémos que x y z serán variables, que tomarán diferentes valores para los diversos puntos que se deban considerar. Si por ejemplo, habiendo medido las longitudes AP, PM (fig. 49) que determinan el punto M (134), se encuentra la primera igual con a, y la segunda igual con b, tendrémos, para fijar la posicion de este punto, las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$; y como bastan para este objeto, se llaman las ecuaciones del punto M; y se suelen llamar *simultáneas* estas ecuaciones por la circunstancia de que se han de verificar á un mismo tiempo.

140 Si permaneciendo la misma abscisa AP, la ordenada PM disminuye, el punto M se aproximará al eje AX. Si PM ó b llega á ser cero, el punto M caerá en P sobre el mismo eje de las abscisas, y se tendrá $x=a$, $z=0$, *que son las ecuaciones de un punto situado en el eje de las abscisas.*

Si permaneciendo una misma la ordenada PM, la abscisa AP dis-

---

(*) *Los extranjeros espresan constantemente la ordenada con la letra* y; *pero como esta letra, por si sola, tiene significacion en nuestra lengua, resulta alguna confusion en los cálculos escritos, y cacofonía al leerlos; por lo cual nosotros la hemos remplazado constantemente por la* z; *cuya escritura es tambien mas cómoda, principalmente cuando se halla por numerador de quebrado, que es con mucha frecuencia.*

minuye, el punto M se aproximará al eje AZ, con el cual coincidirá si AP ó a llega á ser cero: lo que da $x=0$, $z=b$, que *son las ecuaciones de un punto*, tal como Q, *situado sobre el mismo eje de las ordenadas.*

En fin, si la abscisa AP, y la ordenada PM llegan á ser cero á un mismo tiempo, el punto M debiendo hallarse en ambos ejes, se confundirá con su punto de interseccion; y por lo mismo caerá sobre el punto A, que es el orígen de las coordenadas; y *las ecuaciones para el punto de orígen* serán $x=0$, $z=0$.

Donde se ve, que suponiendo á las variables x y z todos los valores positivos posibles, desde cero hasta el infinito, se puede espresar la posicion de todos los puntos del ángulo ZAX.

141 Aquí hemos considerado que el punto M se hallaba en el ángulo ZAX, y hemos tomado por abscisa la distancia AP, contada desde el orígen hacia la derecha, y la ordenada PM contada por la parte superior del eje de las abscisas; si el punto se hallase en el ángelo XAz (fig. 50), y fuese tal como el punto M′, su ordenada M′P′ tendría una posicion inversa á la de PM, por lo que sería negativa: lo que se señala en el cálculo con el signo —; de manera, que el ángulo XAz es el ángulo de las abscisas positivas y de las ordenadas negativas; si el punto se hallase en el ángulo zAx, y fuese tal como M″, su abscisa AP″, y su ordenada M″P″ serían negativas; de manera, que el ángulo zAx es el de las coordenadas negativas. Si el punto se hallase en el ángulo xAZ, y fuese tal como M‴, su ordenada M‴P‴ sería positiva, y su abscisa AP‴ sería negativa, por lo que dicho ángulo será el de las abscisas negativas y ordenadas positivas; y como no hay punto del plano que no se halle comprendido en uno de estos cuatro ángulos, resulta que siempre podemos dar á x y á z valores tales, que las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$, determinen la posicion de un punto sobre el plano en que se hallan los ejes.

{ Las grandes ventajas que han resultado á las Ciencias de la aplicacion del Álgebra á la Geometría, provienen de que con el auxilio de la Análisis indeterminada se llega á espresar la cantidad contínua en ecuaciones, como si fuese discreta, y por consiguiente toda cantidad se calcula de un mismo modo.

{ Que los puntos, que se hallan en los otros ángulos zAX, zAx, ZAx, corresponden á valores negativos de las coordenadas, la podemos demostrar *à priori* del modo siguiente. Supongamos que en vez del eje AZ se tome por eje de las ordenadas la recta A′Z′ (fig. 51) paralela con la primera, y tal que $AA'=A$. Designemos con x' las nuevas abscisas contadas en el mismo eje AX, pero partiendo del nuevo orígen A′; y considerando un punto cualquiera M situado en el ángulo Z′A′X, será $AP=AA'+A'P$, ó $x=A+x'$; pero si consi-

deramos un punto M′ situado en el ángulo Z′A′A, y representamos tambien su abscisa A′P′ por la variable x', suponiéndole siempre un valor cualquiera; tendrémos AP′=AA′—A′P′ ó $x=A-x'$; donde se ve, que si se deséa que la espresion analítica $x=A+x'$ sea aplicable á un mismo tiempo á los puntos situados en el ángulo XA′Z′, y á los puntos situados en el ángulo AA′Z′, es necesario considerar respecto de estos, los valores de x' como negativos; de manera, que la mudanza de signo corresponde á su mudanza de posicion con relacion al eje A′Z′.

Para confirmar esta consecuencia, y hacer ver aun mas claramente cómo la espresion anterior puede unir los diferentes puntos del plano, supongamos que se considere un punto situado sobre el mismo eje A′Z′. Para este punto será $x'=0$, y la espresion $x=A+x'$ dará $x=A$, que es el valor de la abscisa AA′ con relacion á los ejes AX, AZ.

Pero sí se quiere que esta misma ecuacion convenga á los puntos situados sobre el eje AZ, considerando uno cualquiera de ellos, su abscisa x será nula, y la ecuacion precedente se convertirá en $A+x'=0$ ó $x'=-A$, que es tambien el valor de la abscisa AA′; pero referida al eje A′Z′; la cual viene á ser positiva para el eje AZ, y negativa para el A′Z′, cuando se suponen los puntos del plano unidos entre sí por la ecuacion $x=A+x'$.

Este resultado se aplica igualmente á los valores negativos de x; y prueba que pertenecen á los puntos situados del lado del eje AZ opuesto á los valores positivos; porque cualquiera que sea el punto de estos que se considere, si se le representa por M″ se podrá siempre tirar un nuevo eje A″Z″, que se hallará colocado con relacion al eje AZ como este lo estaba anteriormente, respecto del eje A′Z′.

Trasportando el eje AX paralelamente á sí mismo, y fijando el nuevo orígen en A″ (fig. 52) haciendo AA″=B, y llamando z' á las nuevas ordenadas, como MQ, contadas desde el eje A″X″ se tendrá MP=PQ+MQ=AA″+MQ, ó $z=B+z'$ para los puntos tales como M situados en el ángulo ZA″X″, y $z=B-z'$ para aquellos tales como M′ situados en el ángulo AA″X″; de modo que para comprenderlos en una misma espresion analítica, es necesario mirar los valores negativos de z' como correspondientes á puntos situados del lado del eje A″X″ opuesto á las z' positivas; y como esto se aplica igualmente á los ejes AX, AZ, se debe concluir de aquí, que las mudanzas de signo de la variable z corresponden á la mudanza de posicion de los puntos de una y otra parte del eje de las abscisas.

Reuniendo estos resultados, se ve que los valores negativos de las coordenadas se deben tomar en sentido contrario al de sus valores positivos, sin lo cual las mismas fórmulas no se podrían aplicar á todos los puntos del plano, y no comprenderían sinó á los que estuviesen

situados en un mismo ángulo de los ejes. Recíprocamente, convenidos en esto, todos los puntos del plano, cualquiera que sea su situacion, están comprendidos en las mismas espresiones.

En el ángulo	ZAX (fig. 51). . .	x positiva y z positiva.
En el ángulo	ZAx	x negativa y z positiva.
En el ángulo	xAz.	x negativa y z negativa.
En el ángulo	XAz	x positiva y z negativa.

{ Por consiguiente, las ecuaciones $x=a$, $z=b$, que determinan la posicion de un punto en el ángulo ZAX, vendrán á ser

$$x=-a,\ z=b;\quad x=-a,\ z=-b;\quad x=a,\ z=-b;$$

segun que este punto pase á uno de los ángulos ZAx, xAz, XAz. Suponiendo á a y á b cualesquiera valores, las primeras podrán comprender á todas las demas. }

142 Hasta aquí hemos llegado á tener las ecuaciones $x=a$, $z=b$, por consideraciones geométricas; veamos ahora cómo estas ecuaciones, consideradas en sí, nos conducen á la determinacion del punto M (fig. 49).

143 La primera, considerada como si existiese sola, y tomada en su sentido mas general, no atendiendo sinó á dos dimensiones, conviene á todos los puntos cuya abscisa es igual con a. Pero, si suponemos AP$=a$, todos los puntos (fig. 49) de la recta PM prolongada indefinidamente en los dos sentidos, satisfarán á esta condicion. Luego la ecuacion $x=a$, atendiendo solo á dos dimensiones, *pertenece á una recta* PM *paralela al eje de las ordenadas.*

144 Se probará del mismo modo, que la ecuacion $z=b$, *conviene á todos los puntos de una recta* QM, *paralela al eje de las abscisas*, prolongada indefinidamente en los dos sentidos.

145 Si se verifican á un mismo tiempo las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$, como la primera ha de corresponder á un punto de una paralela al eje de las ordenadas, y la segunda á una paralela al eje de las abscisas, resulta que su conjunto convendrá al punto de interseccion de estas dos rectas, que es la traduccion literal de la construccion geométrica que sirvió para encontrar dichas ecuaciones.

146 Como la ecuacion $x=a$, representa una recta paralela al eje de las ordenadas, tendrémos que segun sea a positiva ó negativa, esta recta se hallará situada con relacion al eje de las ordenadas del lado de las abscisas positivas ó negativas; y si a es nula, coincidirá con este eje; de manera, que *la ecuacion del eje de las ordenadas es* $x=0$, puesto que conviene á todos los puntos que no distan nada de dicho eje, que son por consiguiente los puntos que se hallan en él.

147 Igualmente, segun sea b positiva ó negativa, la recta, cuya ecuacion es $z=b$, estará situada por la parte de arriba ó por la de abajo del eje de las abscisas; y si b es nula coincidirá con este eje, cuya ecuacion es por consiguiente $z=0$.

148 En fin, si se verifican á un tiempo las dos ecuaciones $x=0$, $z=0$, conviniendo la primera al eje de las ordenadas, y la segunda al de las abscisas, el sistema de dichas ecuaciones conviene al punto en que se ecuentran los ejes; pero estos ejes solo se pueden encontrar en un punto, que es el orígen A de las coordenadas; luego el sistema de las dos ecuaciones $x=0$, $z=0$, *fija el punto de orígen*, que es lo mismo que hemos hallado ántes (140).

Tambien *se puede fijar la posicion de un punto sobre un plano, por medio de la distancia de dicho punto al origen, y del ángulo que forma la recta que espresa esta distancia con otra recta fija, que pase por el orígen.*

En efecto, si conocemos la distancia c que hay desde el punto M al punto A (fig. 50) y el ángulo α que la MA forma con la recta AX dada de posicion, queda determinada completamente la posicion del punto M; pues formando en A con la AX el ángulo XAR del número de grados conocido, y tomando en la AMR una parte AM de la magnitud conocida, se tendrá determinada la posicion del punto M sin que se pueda confundir con ningun otro del plano. Luego si la magnitnd AM la espresamos por r, y por Ψ el ángulo XAM del número de grados α, tendrémos las ecuaciones $r=c$, $\Psi=\alpha$, que podrán servir tambien para *fijar la posicion de un punto sobre un plano*; y para que corresponda á todos los puntos del plano, es necesario hacer que varien α ó Ψ desde 0° hasta 360°.

A las ecuaciones, que fijan la posicion de los puntos y de las líneas por medio de un ángulo y la magnitud de una línea, se caracterizan con el nombre de *ecuaciones polares*; al punto de orígen, que es respecto del cual se cuenta la distancia, se le llama *polo*; y á la línea AMR en que se mide esta distancia, se le llama *radio vector*, y por eso la hemos espresado con r.

149 *El método que hemos empleado para espresar analíticamente la posicion de un punto, puede servir aun para designar un conjunto de puntos situados sobre una misma recta.*

En efecto, generalizando este resultado, se ve que si todos los puntos de una línea cualquiera, recta ó curva, son tales que existe la misma relacion entre las ordenadas y las abscisas de cada uno de ellos, la ecuacion entre x y z que esprese esta relacion, debe caracterizar á esta línea. Recíprocamente, siendo dada la ecuacion, la naturaleza de la línea se deduce de ella; porque si se quieren encontrar aquellos puntos que corresponden á una abscisa determinada, bastará sustituir por x este valor en la ecuacion; la cual, no conteniendo ya mas incógnitas que la z, dará los valores correspondientes de las ordenadas, que será necesario colocar con relacion al eje de las abscisas conforme el signo de que están afectas. Igualmente dándose z la ecuacion manifestará los valores correspondientes de x.

150 Una ecuacion, que espresa de este modo la relacion que tienen entre sí las abscisas y las ordenadas de cada punto de una línea, se llama *la ecuacion de esta línea*; y esta es *contínua ó discontínua*, segun convenga ó no convenga la misma ecuacion á todos los puntos de que está compuesta.

151 Esto supuesto, para encontrar la ecuacion de la línea recta AM (fig. 53), supondrémos primero que pase por el orígen de las coordenadas, puesto que la eleccion de los ejes es arbitraria; y suponiendo que AX, AZ sean dichos ejes, llamarémos α al ángulo MAP que forme dicha recta con el de las abscisas, que nos es conocido, porque hemos elegido nosotros la posicion de dicho eje; y llamando $\mathcal{C}$ al ángulo ZAX que forman los ejes, que tambien nos es conocido por la misma razon, tendrémos, que, si desde un punto cualquiera M, tomado en esta recta, se tira la ordenada PM paralela al eje de las ordenadas AZ, el triángulo MAP nos dará (I. 638)

PM:sen.MAP::AP:sen.AMP, de donde $\frac{\text{PM}}{\text{sen.MAP}}=\frac{\text{AP}}{\text{sen.AMP}}$; y como desde cualquier punto que se tire la MP paralela con AZ, resultará una ecuacion de esta especie, si llamamos z á todas estas paralelas MP, M′P′, M″P″ etc., x á las AP, AP′, AP″ etc., y observamos que el ángulo $\text{AMP}=\text{MAZ}=\text{ZAX}-\text{MAX}=\mathcal{C}-\alpha$, resultará $\frac{z}{\text{sen.}\alpha}=\frac{x}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$, de donde $z=x\times\frac{\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$; y como esta ecuacion se verifica en todos los puntos de la recta AM, se dice que es la ecuacion de esta recta.

152 Aunque la hemos obtenido considerando los puntos situados en el ángulo ZAX, conviene tambien á los puntos situados en los otros ángulos de los ejes, con tal que se mude en ellos convenientemente el signo de las variables x y z. Si se hace en ella, por ejemplo, x negativa para tener los puntos situados del lado de las abscisas negativas; dará $z=-x\times\frac{\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$, es decir, que para estos puntos z viene á ser tambien negativa; de modo que están situados como el punto m, por la parte inferior del eje de las abscisas, siendo así que los que están situados en el ángulo XAZ están por la parte superior del mismo eje.

153 El valor de α es el mismo para todos los puntos de la recta AM, pero varía de una recta á otra; y dando á α todos los valores posibles, irémos obteniendo las ecuaciones de todas las rectas que pasan por el orígen A. Si $\alpha=0$, entónces la recta AM se confundirá con el

eje AX, y dará para z el valor $z=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}=\frac{x\times\text{sen.}0}{\text{sen.}(\mathcal{C}-0)}=\frac{x\times0}{\text{sen.}\mathcal{C}}=0$;

lo que comprueba lo dicho (147). Si $\alpha=\mathcal{C}$, la recta AM se confundirá con el eje AZ; y quitando el divisor en la ecuacion

$$z=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)},\quad \text{tendrémos}\quad z\times\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)=x\times\text{sen.}\alpha,$$

en la que despejando x, y sustituyendo $\mathcal{C}$ en vez de α, se tendrá

$$x=\frac{z\times\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}{\text{sen.}\alpha}=\frac{z\times\text{sen.}(\mathcal{C}-\mathcal{C})}{\text{sen.}\mathcal{C}}=\frac{z\times\text{sen.}0}{\text{sen.}\mathcal{C}}=\frac{z\times0}{\text{sen.}\mathcal{C}}=\frac{0}{\text{sen.}\mathcal{C}}=0;$$

lo que en efecto se debía verificar (146).

154 Supongamos ahora que se quiera la ecuacion de la recta BM (fig. 54), que no pasa por el orígen A de las coordenadas. Para esto, señalando con α el ángulo MBX que dicha recta forma con el eje de las abscisas, y con $\mathcal{C}$ el ZAX que forman los ejes, tendrémos que esta recta cortará á uno de los ejes lo ménos; porque si no los cortase, sería paralela á los dos; y por consiguiente dichos ejes lo serían entre sí, contra el supuesto, pues se deben encontrar en el orígen; luego si llamamos b á la distancia AA' á que encuentra al eje de las ordenadas, y tiramos por el orígen A la AN paralela con la recta dada BM, tendrémos que la ordenada NP será igual (151) con $\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$.

Y como $MP=NP+MN$, y MN es igual con AA' por lados opuestos de paralelogramo, tendrémos, llamando z á la ordenada MP,

$$z=MP=NP+MN=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}+AA'=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}+b;$$

pero este valor, que hemos sacado respecto de la ordenada MP, lo hubiéramos sacado respecto de otra ordenada cualquiera $M'P'$, porque siempre se compondría de la ordenada correspondiente $N'P'$ de la AN y de la parte $M'N'$, que en todos los casos es igual con $AA'=b$; luego *tenémos sacada la ecuacion de la recta* BM, *cuando no pasa por el orígen.*

155 Esta ecuacion es la mas general de una línea recta cuando no se consideran mas de dos dimensiones, y encierra dos indeterminadas α y b, porque se necesitan dos condiciones para particularizar la recta. La $\mathcal{C}$ no es indeterminada, porque es el ángulo que forman los ejes.

156 Dada la ecuacion $z=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}+b$,

podemos manifestar tambien que conviene á una línea recta; porque

de ella se saca $z-b=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$, y haciendo $z-b=z'$, será $z'=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}$; que da $z':x::\text{sen.}\alpha:\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)$; que nos dice que, siendo proporcionales las ordenadas con las abscisas, pues guardan una razon constante, *los estremos de las ordenadas corresponderán* [I. 486] *á una línea recta*; lo que se presentará á los sentidos, si suponiendo que $b=AA'$, se tira una paralela $A'Q$ al eje de las abscisas; pues entónces será $QM=z-b$, y $A'Q$ será igual á x; y pues que por la naturaleza de la ecuacion, la relacion de $z-b$ á x, es constante, será $\frac{MQ}{A'Q}=\frac{M'Q'}{A'Q'}$, etc.

{ Y así sucesivamente para todos los puntos M, M', etc., que verifiquen la ecuacion propuesta; de donde se sigue que

$$A'Q:MQ::A'Q':M'Q'::\text{etc.}:\text{etc.};$$

luego (I. 473 cor.) todos los puntos M, M', etc. están en línea recta.}

157 Si se quiere conocer en qué puntos corta al eje de las abscisas, será necesario suponer z nula; porque entónces la distancia de dicha recta al mencionado eje es cero, cuya suposicion da $x=-b\times\frac{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}{\text{sen.}\alpha}$; y el signo de este valor manifiesta que si $\alpha<\mathcal{C}$, siendo b positiva, la recta cortará al eje de las abscisas por el lado de las abscisas negativas; pero si $\alpha>\mathcal{C}$; entónces $\mathcal{C}-\alpha$ será una cantidad negativa; y su seno será negativo; por lo que este valor de x será positivo, y la recta cortaría al eje de las x á la derecha del punto de orígen A.

Suponiendo x negativa y mayor numéricamente que el valor precedente $x=-b\times\frac{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}{\text{sen.}\alpha}$ se tendrán las ordenadas de la recta por la parte inferior al punto B; y estos valores serán negativos, porque la recta pasa entónces por la parte inferior del eje de las abscisas.

Por lo cual la ecuacion $z=\frac{x\times\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}+b$ (K)

no solo pertenece á todos los puntos de una recta que forma con el eje de las x un ángulo α, y que encuentra al eje de las z á una distancia b del orígen, sinó que esta ecuacion basta para caracterizar la recta, y hallar su posicion con relacion á los ejes de las coordenadas. Por esta causa se dice, que la ecuacion (K) es *la ecuacion de la línea recta*; y la línea recta se dice que es *el lugar geométrico* de la ecuacion (K).

158 Las variables x y z solo se hallan elevadas á la primera poten-

cia en esta ecuacion, y no están multiplicadas entre sí. Por esta consideracion se llama *lineal* á toda ecuacion de esta forma, cualquiera que sea el número de las variables que encierre.

159 Hasta ahora hemos supuesto que el ángulo $\mathcal{C}$ formado por los ejes de las coordenadas era un ángulo cualquiera: lo mas frecuente es suponer recto este ángulo ó que $\mathcal{C}=\frac{1}{2}\pi$; y se le da este valor, porque contribuye para simplificar los cálculos, pues entónces se tiene

$$\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)=\text{sen.}(\tfrac{1}{2}\pi-\alpha)=(\S\ 7)\cos.\alpha,$$

y la ecuacion de la recta será $z=x\times\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha}+b=x\times\text{tang.}\alpha+b$,

{como es fácil de verificarlo *á posteriori*, observando que por la naturaleza de la línea recta, la relacion $\frac{z-b}{x}=[\S\ 156]\frac{z'}{x}=(\text{I. }650)\text{tang.}\alpha$,

está siempre satisfecha, cualquiera que sea el punto de ella que se considere, á causa del triángulo rectángulo MA′Q (fig. 55) que se origina, y da $A'Q=x$: $MQ=z-b=z'$:: 1 : tang.$MA'Q$=tang.α.}

160 Haciendo para mayor sencillez tang.$\alpha=a$, tendrémos $z=ax+b$; que es *la ecuacion de la línea recta, cuando las coordenadas son rectangulares, siendo a la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas* (*), *y representando b la distancia del orígen al punto en que corta al eje de las ordenadas*; ó lo que viene á ser lo mismo, este valor b es el de la ordenada correspondiente á $x=0$; por lo que si $b=0$, *la ecuacion* $z=ax$ *será la de una recta que pase por el orígen de las coordenadas.*

161 Mientras que a y b permanezcan indeterminadas, la situacion de la recta no es conocida, y solamente se sabe que sus puntos están en línea recta; pero si estos valores son dados, ó si se tienen condiciones que los determinen, se deducirá de ellos la posicion de la recta (**).

Tambien *queda determinada la posicion de una recta sobre un pla-*

(* *Algunos Geómetras franceses acostumbran espresar por* (l, x) *el ángulo que la línea, espresada por* l, *forma con el eje de las* x; *y por* (l, z) *el que forma la recta con el eje de las* z; *en cuyo caso las ecuaciones*

$$z=\frac{x\times sen.\alpha}{sen.(\mathcal{C}-\alpha)}+b,\quad z=x\,tang.\alpha+b,$$

se convierten en $z=\frac{sen.(l, x)}{sen.(l, z)}\times x+b,\quad z=x\times tang.(l, x)+b.$

(**) *Vamos á demostrar directamente que la ecuacion de primer grado entre dos variables, no puede tener por lugar geométrico sinó líneas rectas.*

La ecuacion mas general del primer grado entre las dos variables x, z *es*

no, cuando se conocen los ángulos que forma dicha recta con los ejes de las coordenadas; es decir, que una recta AR (fig. 50) queda determinada cuando se conocen los ángulos RAX y RAZ, que forma con los ejes AX, AZ. Uno solo no basta; porque si se nos pidiese el determinar una recta que forme con la AX en el plano de los ejes, un ángulo por ejemplo de 50°, cumpliría con esta circunstancia no solo la AR, sinó tambien la AR′; pero si ademas se nos dijese que dicha recta formaba con el eje AZ un ángulo de 30°, ya no había mas que ver cual de las dos rectas AR, AR′, cumplía con esta circunstancia, y no habría duda en que era la AR. Para que por medio de dos ángulos quede determinada una recta cualquiera, que se halle en el plano de las xz, será necesario hacer variar estos ángulos desde 0° hasta π.

Estos dos ángulos no se pueden tomar á arbitrio á un mismo tiempo; pues si se pidiese determinar la posicion de una recta AR en que el ángulo RAX fuese de 20° por ejemplo, y el RAZ de 30°, siendo el ángulo ZAX de 70°, se hallaría ser imposible la cuestion. Cuando los ejes son rectangulares, para que por medio de dichos ángulos se pueda determinar la posicion de una recta, deben tener una dependencia entre sí, que descubrirémos tirando desde uno cualquiera de sus puntos, tal como M, las coordenadas MP, MQ; pues entónces los triángulos rectángulos APM, AQM, darán (I. § 649)

$$AP=AM\times\cos.MAX,\quad AQ=AM\times\cos.MAZ;$$

y espresando por α y por $\mathcal{C}$ los ángulos MAX, MAZ, que forma con los ejes de las x y de las z, y por x, z, las coordenadas AP y AQ=MP del punto M, tendrémos las dos ecuaciones

$$x=AM\times\cos.\alpha,\quad z=AM\times\cos.\mathcal{C}.$$

Si las elevamos al cuadrado y las sumamos, resultará

$$x^2+z^2=AM^2\times\cos.\alpha^2+AM^2\times\cos.\mathcal{C}^2=AM^2(\cos.\alpha^2+\cos.\mathcal{C}^2);$$

y como en el supuesto de ser rectangulares los ejes, se tiene

$$AP^2+PM^2=x^2+z^2=AM^2,$$

si dividimos por esta ecuacion la anterior, tendrémos $1=\cos.\alpha^2+\cos.\mathcal{C}^2$.

$Az+Bx=C$; *esta ecuacion da* $z=-\frac{B}{A}x-\frac{C}{A}$; *y haciendo* $-\frac{B}{A}=a$, *y* $-\frac{C}{A}=b$, *se nos convierte en* $z=ax+b$, *que es la que hemos deducido para la ecuacion de la recta que no pasa por el origen de las coordenadas; y si suponemos ahora* $b=o$, *se convierte en* $z=ax$, *que es la de la recta que pasa por el origen; pues ahora lo que nos proponemos demostrar es que*, construyendo estas dos ecuaciones, obtendrémos sólo líneas rectas.

Ocupémonos primero de la ecuacion $z=ax$, *suponiendo que* a *sea una cantidad positiva. Si damos á* x *valores positivos,* z *será positiva*; y *si se dan á* x *valores negativos,* z *será negativa; luego todos los puntos deter-*

Tambien se podría emplear un solo eje y un solo ángnlo, con tal que se espresase por qué lado de dicho eje se debía contar el ángulo: y en este caso, para que la ecuacion comprendiese á cualquier recta

---

minados por la ecuacion $z=ax$ están situados en el ángulo ZAX *y en el ángulo opuesto al vértice* zAx *(fig. h lám. 8'').*

Esta ecuacion da $\frac{z}{x}=a.$

Asi, para todos estos puntos, la relacion de la ordenada con la abscisa es igual á la constante a. Por consiguiente, si M *y* M′ *son dos de estos puntos, y se tiran las ordenadas* MP, M′P′, *y unimos los puntos* M *y* M′ *con el origen* A, *por dos rectas* AM, AM′, *tendrémos*

$$\frac{MP}{AP}=a;\quad \frac{M'P'}{AP'}=a;\quad \textit{de donde}\quad \frac{MP}{AP}=\frac{M'P'}{AP'}.$$

Luego los triángulos MAP, *y* M′ÁP′ *son semejantes (I.* 484*); luego el ángulo* MAP *igual al ángulo* M′AP′, *y por lo mismo (I.* 348 *cor.)* todos estos puntos están sobre una línea recta DAD′, tirada por el orígen y por uno cualquiera de dichos puntos.

Recíprocamente, todos los puntos de esta recta se pueden considerar como determinados *por la ecuacion* $z=ax$. *En efecto, sea* M *un punto, determinado por medio de esta ecuacion, por el cual se haya tirado la recta* DAD′, *y sea* M′ *un punto cualquiera de esta recta; si se tiran las ordenadas* MP, M′P′, *los triángulos* AMP, AM′P′ *serán semejantes, y darán*

$$\frac{M'P'}{AP'}=\frac{MP}{AP}.$$

Pero, el punto M *estando determinado por medio de la ecuacion* $z=ax$, *se debe tener* $\frac{MP}{AP}=a$; *luego tambien* $\frac{M'P'}{AP'}=a$; *y por consiguiente, representando por* x *y* z *las coordenadas del punto* M′, *se tiene* $z=ax$. *De aquí se concluye que todo punto de la recta* DAD′ *se puede considerar como determinado por la ecuacion* $z=ax$.

Si a es una cantidad negativa $-a'$, *la ecuacion que se debe construír es* $z=-a'x$.

Entónces los valores positivos de x *corresponden á valores negativos de* z, *y los valores negativos de* x *corresponden á valores positivos de* z; *luego, todos los puntos determinados por esta ecuacion están situados en los ángulos* zAX *y* ZAx. *Se puede por otra parte hacer los mismos razonamientos que ántes, y se llega á las mismas consecuencias: es decir, que la ecuacion* $z=-a'x$ *representa tambien una linea recta, como* dAd', *que pasa por el orígen. Asi,* cualquiera que sea el valor de a, la ecuacion $z=ax$ representa siempre una recta que pasa por el orígen.

Designado ya el orígen, como punto de la recta, pues que $x=0$, *da*

que se hallase en el plano que se consideraba, sería preciso hacer variar el ángulo desde o hasta 2π.

De estas consideraciones se hace un uso contínuo en la Mecánica.

---

de $z=0$, *para tener un segundo punto de esta recta, se hará* $x=1$, *lo que da* $z=a$. *Se tomará pues, hacia el lado* AX, *una abscisa* AF, *que represente la unidad; se tirará* LFL′ *paralela con las ordenadas, y se tomará sobre esta paralela por encima ó por debajo del punto* F, *segun el signo de* a *una longitud* FG *ó* Fg *igual con* a, *y la recta* DD′ *ó* dd′ *tirada por el orígen y por el punto* G *ó* g, *será la línea recta que representa la ecuacion* $z=ax$.

Construyamos ahora la ecuacion $z=ax+b$, *en que supondrémos, para fijar mejor las idéas, que* a *y* b *son positivas. Se observará, que si se dan á* x *en esta ecuacion, los mismos valores que en la* $z=ax$, *la diferencia de los valores correspondientes de* z *será constante é igual con* b. *Luego el lugar de la nueva ecuacion es una recta paralela con la recta* DD′ *(fig. i lám. 8″), que está determinada por la ecuacion* $z=ax$; *y se construirá esta nueva recta tomando* AB$=b$ *sobre* AZ, *y tirando* BE *paralela con* AD, *la* EBE′ *será el lugar geométrico de la ecuacion* $z=ax+b$.

Si quedase alguna duda sobre este particular, se puede disipar, tomando puntos de la recta en cada uno de los tres ángulos que atraviesa, y demostrando que para todos estos puntos se tiene $z=ax+b$. *Si por ejemplo, se considera un punto* M *situado en el ángulo* ZAx, *se tira* MP *paralela con* AZ, *y se prolonga esta paralela hasta el punto* N *donde ella encuentra á* DD′, *se tendrá* MP$=$MN$-$PN$=b-$PN.

La abscisa de los puntos M *y* N *es igual con* $-$AP; *luego la ordenada correspondiente del punto* N, *que está situado sobre la recta* DD′ *será igual con* $-a$.AP. *Este valor es negativo, porque el punto* N *está debajo de* Xx: *no tomando sinó el valor absoluto, se tiene* PN$=a$.AP, *y por consiguiente* MP$=b-a$.AP; *valor igual con el que se deduce de la ecuacion* $z=ax+b$, *sustituyendo en ella* $-$AP *en vez de* x.

Acabamos de construir la ecuacion $z=ax+b$ *en el supuesto de que* a *y* b *sean cantidades positivas; pero, esta ecuacion presenta otras tres variedades relativamente á los signos de estas constantes, á saber:*

$$z=ax-b, \quad z=-ax+b, \quad z=-ax-b.$$

A cada una de estas ecuaciones se pueden aplicar razonamientos semejantes á los que se han hecho respecto de la ecuacion $z=ax+b$, *y se encuentra siempre una línea recta, pero la posicion no es la misma. He aquí las construcciones propias para cada uno de estos casos.*

Si la ecuacion es $z=ax-b$, *se construye, como en el primer caso, la recta* AD *(fig. j) representada por la ecuacion* $z=ax$, *se toma aún sobre el eje de las* z *una distancia* AB$=b$, *pero del lado opuesto á* AZ, *y se tira la* BE *paralela con* AD.

Si se tiene la ecuacion $z=-ax+b$, *se construye la recta* dAd′ *(fig. k), representada por la ecuacion* $z=-ax$, *se toma despues* AB$=b$ *del lado de* AZ, *y se tira aun la* BE *paralela con* dAd.

En fin, cuando se considere la ecuacion $z=-ax-b$, *la sola diferencia con*

La determinacion de las cantidades a y b de la ecuacion de la recta segun las condiciones que se den, y la combinacion de las líneas que de ellas resultan, dan orígen á las cuestiones siguientes, cuyas solucio-

---

el caso precedente consiste en que se toma AB=b *(fig. 1) debajo del origen por el lado* Az.

Cuando A *no es nulo, se puede referir la ecuacion* Az+Bx=C *á la forma* $z=ax+b$, *y esta última representa siempre una línea recta, como se acaba de demostrar. Cuando* A=0, *la ecuacion se reduce á* Bx=C *ó* $x=\frac{C}{B}$; *y esta tiene por lugar geométrico una recta* FDF' *(fig. II), paralela con el eje de las* z, y *que encuentra al eje de las* x *á una distancia* AD *del origen, igual con* $\frac{C}{B}$, *del lado* AX *ó del lado* Ax, *segun que esta cantidad sea positiva ó negativa.*

Por lo que podemos concluir, que en todos los casos, la ecuacion del primer grado tiene por lugar geométrico una línea recta.

En virtud de lo que precede, para construir una ecuacion del primer grado, seria necesario al principio ponerla bajo la forma $z=ax+b$; *construir la recta representada por la ecuacion* $z=ax$; *tomar sobre el eje de las* z, *encima ó debajo del orígen, una distancia igual con* b; *y tirar despues una paralela á esta recta. Pero, es mas simple determinar los dos puntos en que la recta buscada encuentra á los ejes; lo que se hará suponiendo sucesivamente* $x=0$ *y* $z=0$ *en la ecuacion de esta recta.*

Sea, por ejemplo, la ecuacion $3z-2x+5=0$.

Para encontrar el punto en que la recta que representa, viene á cortar al eje de las ordenadas, se hace $x=0$; *lo que dá* $z=-\frac{5}{3}$. *Luego si se toma (figura m) del lado de las* z *negativas, la distancia* AB=$\frac{5}{3}$ *de la unidad de longitud, el punto* B *pertenecerá á la recta buscada. Del mismo modo, haciendo* $z=0$ *se tiene* $x=\frac{5}{2}$, *lo que manifiesta que tomando, en el sentido de las* x *positivas,* AC=$\frac{5}{2}$, *el punto C pertenecerá tambien á la recta buscada. Luego esta recta queda determinada, y es la* BC *indefinidamente prolongada por ámbos estremos.*

Hasta el presente se ha demostrado solamente que la ecuacion del primer grado representa siempre una linea recta. Ahora, vamos á manifestar que no hay línea recta que no pueda ser dada por una ecuacion del primer grado.

En virtud de lo que se ha visto al principio de esta nota, para construir la recta de la ecuacion $z=ax$, *se hace* $x=1$, *lo que da* $z=a$; *se toma sobre* AX *(fig. h), en el sentido de las abscisas positivas, una distancia* AF *para representar la unidad, que es aqui de todo punto arbitraria; se tira* LFL$'$ *paralela con el eje de las* z; *se toma sobre esta paralela, y en el sentido indicado por el signo de la cantidad* a, *la distancia* FG *ó* Fg *igual con* a; *despues, se tira por el punto* G *ó* g *y por el orígen* A *la recta* DAD$'$ *ó* dAd', *que es la pedida. Por esta construccion, resulta que dando valores diferentes*

nes importa retener, porque sirven en casi todos los casos en que se aplica el cálculo á la Geometría.

162 *Encontrar la ecuacion de una línea recta que pase por dos puntos dados, como* M, M' (fig. 55).

Desde estos puntos bájense perpendiculares ó bien á ambos ejes, ó solo al de las abscisas; con lo que se tendrán las coordenadas de cada uno de estos puntos; y las espresarémos por x', z', x'', z''. Ahora, debiendo ser recta la línea buscada, su ecuacion será de la forma $z=ax+b$, permaneciendo aun desconocidas a y b.

Para que pase por el punto cuyas coordenadas son x', z', es necesario que su ecuacion quede satisfecha cuando se ponga en ella x' en vez de x, y z' en vez de z; por lo que exige que se tenga $z'=ax'+b$.

Para que pase por el punto, cuyas coordenadas son x'', z'', será necesario igualmente que $z''=ax''+b$.

Estas dos ecuaciones harán conocer á a y b, y sustituyendo sus valores en la ecuacion de la recta, quedará determinada.

La eliminacion ó despejo se puede hacer muy simplemente por métodos particulares; pues restando la segunda ecuacion de la primera, y la tercera de la segunda, se tiene
$z-z'=a(x-x')$, $z'-z''=a(x'-x'')$; de esta se saca $a=\frac{z'-z''}{x'-x''}$ (A),

y sustituyendo este valor en la anterior, da $z-z'=\frac{z'-z''}{x'-x''}(x-x')$,

---

á a, el punto G *ó g muda de posicion, y por consiguiente la recta* DD′ *ó dd′; y como la cantidad a puede pasar por todas las situaciones posibles sobre* LL′, *la recta* DD′ *ó dd′, puede tener todas las posiciones posibles alrededor del origen* A. *Luego* todas las rectas que pasan por el orígen pueden ser dadas por una ecuacion de la forma $z=ax$.

Se ha visto tambien, que, despues de haber construido la recta DD′ *(figura i), representada por la ecuacion* $z=ax$, *es necesario para tener la recta de la ecuacion* $z=ax+b$, *tomar sobre el eje* AZ *una ordenada* AB$=b$, *encima ó debajo del orígen, segun b sea positiva ó negativa, y despues tirar* BE *paralela con* DD′. *Por esta construccion resulta, que haciendo pasar b por todos los estados de magnitud, positiva y negativamente, el punto* B *podrá tomar todas las posiciones posibles sobre el eje* Zz. *Por otra parte, haciendo variar el coeficiente a, la recta* DD′, *á la cual* BE *es paralela, puede tomar, respecto de* AX *todas las inclinaciones posibles; luego* todas las rectas, que encuentran al eje de las ordenadas, pueden ser dadas por una ecuacion de la forma $z=ax+b$.

En fin, toda recta FDF′ *(fig. ll) paralela con el eje* AZ, *está representada por una ecuacion tal como* $x=c$, *pues que para todos los puntos de esta recta, la abscisa es constante: pero, la ecuacion* $x=c$ *es un caso particular de la ecuacion* $Az+Bx=C$; *luego enfin*, toda línea recta, cualquiera que sea su posicion, se puede espresar por una ecuacion del primer grado.

que es la ecuacion de la recta pedida, y la (A) determina la tangente del ángulo que dicha recta forma con el eje de las abscisas.

163 La ecuacion $z-z'=a(x-x')$ es la ecuacion de una recta, sujeta á pasar por un punto cuyas coordenadas son x', z', y que forma con el eje de las abscisas un ángulo cuya tangente trigonométrica es a.

Es fácil de verificar *à posteriori*, que las condiciones pedidas se encuentran satisfechas; porque si $x=x'$, la ecuacion $z-z'=a(x-x')$, da

$$z-z'=0, \quad \text{ó} \quad z=z';$$

y si $x=x''$, la ecuacion $z-z''=a(x-x'')$ da

$$z-z''=0, \quad \text{ó} \quad z=z''.$$

Si $z'-z''=0$, la ecuacion (A) nos da $a=0$; por lo que en este caso la tangente del ángulo que dicha recta forma con el eje de las abscisas es *cero*; luego dicha recta es paralela al espresado eje: lo que debe verificarse (I. 463), pues pasa por los estremos de dos ordenadas iguales.

Invirtiendo la ecuacion (A) se tiene $\frac{1}{a}=\frac{x'-x''}{z'-z''}$;

y si se supone que $x'-x''=0$, resultará $\frac{1}{a}=0$; la cual espresa, que la cotangente del ángulo que forma la recta con el eje de las x es *cero*; por lo cual dicho ángulo será (I. 635) recto, y la línea será paralela al eje de las z.

El método, de que acabamos de hacer uso, se puede aun emplear para hacer pasar una recta por dos puntos dados en el caso de no ser rectangulares las coordenadas.

164 *Hallar las condiciones necesarias para que una recta sea paralela con otra.*

Sea $z=ax+b$ la ecuacion de la recta dada, siendo a y b conocidas; la de la recta buscada será $Z=a'X+b'$ (*), siendo a', b' desconocidas.

(*) *Los Geómetras acostumbran señalar las coordenadas de todas las lineas que entran en una cuestion con las letras x, z, sin ninguna distincion; y asi, al resolver esta cuestion, principian de este modo.*

Sea $z=ax+b$ la ecuacion de la primera, $z=a'x+b'$ la de la segunda etc.

En esta notacion se advierte una gran impropiedad ideológica; pues siendo diferentes las rectas, y suponiéndose tácitamente que se refieren á un mismo origen y á unos mismos ejes, han de tener por precision diferentes coordenadas; ó al ménos, á una misma absvisa deben corresponder diferentes ordenadas, y el señalarlas ambas con unas mismas letras, lleva consigo el inconveniente de espresar con un mismo signo cosas realmente diferentes. Ademas de esta impropicdad, resulta una gran confusion en los principiantes, especialmente cuando en una misma cuestion entran las ecuaciones de muchas lineas; pues al ver una x ó una z, no saben de qué linea es coordenada. Convencido por

::

Para que las rectas sean paralelas, es necesario que formen el mismo ángulo con el eje de las abscisas, lo que da $a=a'$, y la ecuacion de la paralela se convierte en $Z=aX+b'$; donde b' queda indeterminada, porque hay una infinidad de rectas que pueden ser paralelas á la dada.

165 Pero, si se quiere que esta paralela pase por un punto dado, cuyas coordenadas sean x'', z'', será necesario que se tenga $z''=ax''+b'$, que eliminando b' por medio de esta ecuacion y la precedente, tendrémos $Z-z''=a(X-x'')$, que es *la ecuacion de la paralela tirada por el punto dado á la recta dada.*

166 *Hallar el ángulo de dos rectas, cuyas ecuaciones son dadas.*

Sean $z=ax+b$ la ecuacion de la primera recta, $Z=a'X+b'$ la de la segunda.

Supongamos que la primera recta forma con el eje de las abscisas un ángulo α, cuya tangente trigonométrica es a; y que la segunda recta forma con el mismo eje un ángulo α' cuya tangente es a'; con lo que el ángulo buscado será $\alpha'-\alpha$ (*); pero por las fórmulas trigonométricas (§ 2), se tiene $\text{tang.}(\alpha'-\alpha)=\frac{\text{tang.}\alpha'-\text{tang.}\alpha}{1+\text{tang.}\alpha'\times\text{tang.}\alpha}$; y llamando m á dicho ángulo, será $\text{tang.}m=\frac{a'-a}{1+aa'}$.

167 Si son paralelas, el ángulo m será nulo, y $\text{tang.}m=0$, lo que da $a'-a=0$, ó $a'=a$ como lo hemos visto ya (164).

---

la esperiencia de estos inconvenientes, he procurado siempre distinguir, ya con los caractéres mayúsculo y minúsculo, y ya con los acentos diversamente colocados, las coordenadas de cada una de las diferentes lineas que entran en una misma cuestion.

En prueba de la confusion que de esto resulta, no puedo ménos de manifestar, que Mr. Lacroix, que es uno de los que incurren en sus obras, así como los demas Matemáticos, en el inconveniente de espresar con unas mismas letras sin distincion ninguna las coordenadas de todas las líneas que entran en una misma cuestion, en la leccion que dió en el Colegio de Francia, el día 22 de diciembre de 1825, á que tuve el honor de asistir, se vió precisado á acentuar de diverso modo las coordenadas de cada linea, y dijo que esto era para evitar la confusion: *lo cual prueba que yo no me equivoqué al hacer la distincion espresada para no incurrir en el vicio ideológico de señalar con unos mismos signos cosas muy diferentes.*

(*) *Para convencernos de que el ángulo buscado es $\alpha'-\alpha$, supongamos que la primera recta sea la DX'* (fig. 66), *y la segunda la CZ'; con lo cual el ángulo buscado será el*

$$Z'A'X'=(\text{I. 356})DA'C=(\text{I. 386 } d)Z'CX-X'DX=\alpha'-\alpha.$$

168 Si son perpendiculares la una á la otra, el ángulo m será recto, y su tangente $\frac{a'-a}{1+aa'}$ deberá ser infinita, ó nula su cotangente, que está espresada [I. 633 (t)] por $\frac{1+aa'}{a'-a}$; lo que exige que $1+aa'=0$, de donde $a'=-\frac{1}{a}$, cuyo valor manifiesta, que *para que dos rectas sean perpendiculares la una á la otra, es indispensable que la tangente trigonométrica del ángulo que forma la una con el eje de las abscisas, sea igual á la cotangente negativa que forma la otra con el mismo eje.*

} Recíprocamente, de ser $1+aa'=0$, se deduce que las rectas cuyas tangentes trigonométricas son a' y a, forman un ángulo recto; porque si en la ecuacion $1+aa'=0$, sustituimos por a su valor

$$\text{tang.}\alpha=\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha},$$ y por a' el suyo $\text{tang.}\alpha'=\frac{\text{sen.}\alpha'}{\cos.\alpha'}$, tendrémos

$$1+\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha}\times\frac{\text{sen.}\alpha'}{\cos.\alpha'}=0;$$ que, quitando el divisor, da

$\cos.\alpha\times\cos.\alpha'+\text{sen.}\alpha\times\text{sen.}\alpha'=0$; y por consiguiente [I.642 (z)] $\cos.(\alpha'-\alpha)=0$; luego el ángulo $\alpha'-\alpha=\frac{1}{2}\pi$, ó es recto. {

169 *Encontrar el punto de interseccion de dos rectas, cuyas ecuaciones se conocen.*

Sean $\begin{cases} z=ax+b & \text{la ecuacion de la primera,} \\ Z=a'X+b' & \text{la de la segunda;} \end{cases}$

y como el punto de interseccion debe hallarse en las dos rectas, sus coordenadas deben satisfacer á un mismo tiempo á estas dos ecuaciones; luego en dicho punto deberá ser $Z=z$, $X=x$; por lo que las dos ecuaciones se convertirán en $z=ax+b$, $z=a'x+b'$ que restando la segunda de la primera, dan

$0=x(a-a')+b-b'$ ó $x=-\frac{b-b'}{a-a'}$, cuyo valor, sustituido en el de z, da

$$z=a\times-\frac{b-b'}{a-a'}+b=\frac{-ab+ab'+ab-a'b}{a-a'}=\frac{ab'-a'b}{a-a'};$$

cuando $a=a'$ estos valores son infinitos, es decir, que entónces no hay interseccion; ó en otros términos, que el punto de concurso de ambas rectas se halla infinitamente léjos; lo que en efecto debía verificarse, pues en este caso las rectas son paralelas y no se deben encontrar.

170 *Hallar la distancia de dos puntos, cuyas coordenadas se conocen.*

Sean M', M'' (fig. 56) los puntos de qne se trata: si se tira $M'Q'$ paralela al eje de las abscisas, y terminada en las coordenadas $M'P'$, $M''P''$, el triángulo $M'M''Q'$ rectángulo en Q' dará $M'M''=\sqrt{M'Q'^2+M''Q'^2}$,

Sean ahora x', z', x'', z'', las coordenadas AP′, P′M′, AP″, P″M″, y tendrémos

$M'Q'=P'P''=AP''-AP'=x''-x'$, y $M''Q'=P''M''-P''Q'=z''-z'$.

Luego si se representa por D la distancia buscada, se tendrá

$$D=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2}\ (*).$$

171 Si uno de los puntos, por ejemplo aquel cuyas coordenadas son x', z', fuese el orígen mismo de las coordenadas, se tendrá $x'=0$, $z'=0$, lo que dará $D=\sqrt{x''^2+z''^2}$.

Esta es la espresion de la distancia de un punto cualquiera al origen de las coordenadas, como es fácil de comprobar por consideraciones geométricas; pues si suponemos que M (fig. 57) representa el punto de que se trata, el triángulo AMP rectángulo en P, dará $AM^2=AP^2+PM^2$, ó haciendo $AM=D$, $AP=x''$, $PM=z''$, será $D^2=x''^2+z''^2$, que da $D=\sqrt{x''^2+z''^2}$.

Por un punto dado, tirar una perpendicular á una recta dada; y hallar la longitud de la porcion de esta perpendicular, comprendida entre el punto dado y la recta dada.

Sea $z=ax+b$ (1) la ecuacion de la recta dada, y x', z' las coordenadas del punto dado. Llámando X, Z las coordenadas de la recta, que le ha de ser

---

(*) *Para dar un ejemplo de la generalidad con que se puede manifestar esta doctrina, vamos á encontrar* la distancia entre dos puntos en el caso de que los ejes nò sean rectangulares, *sinó que formen entre sí un ángulo cualquiera, que espresarémos por* φ (fig. n lám. 8″).

Sean M', M'' *los dos puntos dados; y uniéndolos por la recta* $M'M''$, *tendrémos que lo que se pide es determinar analíticamente la distancia* $M'M''$ *por medio de las coordenadas de estos puntos, referidas á los ejes oblicuos* AX, AZ *que forman el ángulo* $ZAX=\varphi$.

Si se tiran las $M'P'$, $M''P''$ *paralelas al eje* AZ, *y la* $M'Q'$ *paralela con* AX, *el triángulo* $M'Q'M''$, *en virtud de lo espuesto* (§ 84) *nos dará*

$$\cos.Q'=\frac{M'Q'^2+M''Q'^2-M'M''^2}{2M'Q'.M''Q'}.$$

Pero, el ángulo Q' *es suplemento del ángulo* $ZAX=\varphi$ *que forman los ejes; luego tendrémos* (I. 637) $\cos.Q'=-\cos.\varphi$.

Sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, y despejando, se tendrá

$$M'M''^2=M'Q'^2+M''Q'^2+2M'Q'.M''Q'\cos.\varphi.$$

Si espresamos por x', z' *las coordenadas conocidas del punto* M', *y por* x'', z'' *las del punto* M'', *será* $M'Q'=P'P''=AP''-AP'=x''-x'$,

$$M''Q'=M''P''-Q'P''=z''-z';$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion anterior, será

$$M'M''^2=(x''-x')^2+(z''-z')^2+2(x''-x')(z''-z')\cos\varphi;$$

y estrayendo la raiz cuadrada, tendrémos la distancia pedida.

perpendicular, pues que ha de pasar por el punto cuyas coordenadas son x', z', tendrá por ecuacion, en virtud de lo demostrado (163 y 168)

$$Z-z'=-\frac{1}{a}(X-x') \quad (2).$$

Si espresamos por x'', z'' las coordenadas del punto de concurso de ambas rectas, las ecuaciones (1) y (2) darán $z''=ax''+b$, $z''-z'=-\frac{1}{a}(x''-x')$ (3), añadiendo y quitando $+ax'$ al segundo miembro de la primera, y quitando z' de ambos miembros, se convertirá en $z''-z'=a(x''-x')+b+ax'-z'$; é igualando el segundo miembro de esta con el de la (3), será

$$a(x''-x')+b+ax'-z'=-\frac{1}{a}(x''-x'); \quad \text{que da} \quad (x''-x')(a+\frac{1}{a})=z'-ax'-b;$$

$$\text{y} \quad x''-x'=\frac{z'-ax'-b}{a+\frac{1}{a}}=\frac{(z'-ax'-b).a}{a^2+1}.$$

Sustituyendo este valor en la (3) y simplificando, será

$$z''-z'=-\frac{z'-ax'-b}{a^2+1}.$$

Si llamamos P la longitud de esta perpendicular, se tendrá (170)

$$P=\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2}=\sqrt{\left(\frac{(z'-ax'-b).a}{a^2+1}\right)^2+\left(-\frac{z'-ax'-b}{a^2+1}\right)^2};$$

que haciendo las operaciones convenientes, se obtiene $P=\frac{z'-ax'-b}{\sqrt{a^2+1}}$, para la longitud de la porcion pedida de la perpendicular.

Si $x'=0$ y $z'=0$, en cuyo caso el punto por donde había de pasar la recta era el orígen, resultaría $P=\frac{-b}{\sqrt{a^2+1}}$.

172 Por último, nos propondrémos *hallar la ecuacion polar de la línea recta*. Para esto, supongamos que sea LL′ (fig. A lám. 8′) la recta, cuya ecuacion polar respecto del punto F nos propongamos hallar. Esta recta referida á los ejes rectangulares AX, AZ, tendrá por ecuacion $z=ax+b$; y lo que ahora deseamos es hallar una ecuacion en que sirva de abscisa el ángulo $MFX'=\phi$ formado por una recta FX′ paralela al eje de las x, con la línea ó *radio vector* FM, que desde un punto cualquiera de la recta va á parar al polo, y de ordenada la magnitud FM del mismo radio vector.

Para conseguirlo, observarémos que siendo

$$\{z=PM=PQ+MQ, \quad x=AP=Ap+pP=Ap+FQ\} \quad (1),$$

si espresamos por x' y z' las coordenadas Ap y pF del polo respecto del ori-

gen A, y tenemos presente (I. 649) que $MQ=FM\times\text{sen.}\phi$ y $FQ=FM\times\cos.\phi$, resultará que, llamando r al radio vector FM, será

$$MQ=r\times\text{sen.}\phi \text{ y } FQ=r\times\cos.\phi;$$

por lo que las ecuaciones anteriores se nos convertirán en

$$\{z=z'+r\times\text{sen.}\phi,\ x=x'+r\times\cos.\phi\} \ (2);$$

cuyos valores sustituidos en la ecuacion $z=ax+b$, darán

$$z'+r\times\text{sen.}\varphi=ax'+a\cos.\varphi+b \text{ ó } r(\text{sen.}\varphi-a\cos.\varphi)+z'-ax'-b=0,$$

en la que despejando r, tendrémos $r=\dfrac{ax'+b-z'}{\text{sen}\,\varphi-a\cos.\varphi}$ (3).

§ Cuando $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, lo que da $\text{sen.}\varphi=1$, y $\cos.\varphi=0$, el radio vector se convierte en FM′, y su valor es $r=ax'+b-z'$; y si lo espresamos por ϱ, tendrémos $r=\dfrac{\varrho}{\text{sen.}\varphi-a\cos.\varphi}$ (4), que es *la ecuacion polar de la linea recta.*

§ Despejando $\text{sen.}\varphi$ y $\cos.\varphi$ en las ecuaciones (2) y dividiendo la una por la otra, tendrémos $\dfrac{\text{sen.}\varphi}{\cos.\varphi}=\text{tang.}\varphi=\dfrac{z-z'}{x-x'}$.

{ Para no dejar nada que desear acerca del modo de fijar la posicion de la línea recta por una ecuacion, concluirémos manifestando cómo *se espresa la ecuacion de una recta por medio de la perpendicular á esta recta tirada desde el orígen.*

{ Sea RR′ (fig. *B* lám. 8′) la recta dada; espresémos por d la perpendicular AD que se le ha tirado desde el orígen, y por α el ángulo DAX que forma la perpendicular AD con el eje AX de las abscisas.

{ Si considerámos un punto M sobre la recta dada RR′, cuyas coordenadas rectangulares sean $AP=x$, $MP=z$, y desde P se tira la Pp perpendicular á AD, y desde M la Mm paralela con la misma AD, se tendrá

$d=AD=Ap+pD$; pero (I. § 649)

$Ap=AP\times\cos.DAX=x\cos.\alpha$, $pD=mM=MP\times\text{sen.}MPm=z\times\text{sen.}\alpha$;

luego $d=x\cos.\alpha+z\text{sen.}\alpha$ es la ecuacion de la recta RR′ fija de posicion por medio de la posicion y longitud de la perpendicular que se le ha tirado desde el orígen. }

Con el auxilio de lo que precede se pueden resolver todas las cuestiones que solo dependen de la línea recta, y que son relativas á puntos situados en un mismo plano (*). Vamos á estender estos resultados al caso general en que no se hace abstraccion de ninguna de las dimensiones del espacio.

(*) Vamos á llamar la atencion sobre un punto acerca del cual, en mi concepto no se ha fijado bastante la consideracion.

Hemos visto (160) que la ecuacion $z=ax$ es la de una recta que pasa por el origen; y a espresa en ella la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con el eje de las abscisas; y si suponemos $a=1$, tendrémos que esta recta formará con dicho eje de las x un ángulo de 45°, en que la tan-

De los puntos, de la línea recta y del plano, considerados en el espacio.

173 Hemos dicho (135) que la posicion de un punto en el espacio queda determinada, cuando se conocen las longitudes de tres rectas tiradas desde este punto, paralelas *á tres planos* y terminadas en estos planos.

Para mayor sencillez, supondrémos que estos planos son rectangu-

---

gente trigonométrica es igual al radio, que tomamos por unidad, y tendrá por ecuacion $z=x$.

Si en la ecuacion $z=ax+b$, hacemos tambien $a=1$, se nos convertirá en $z=x+b$; y será la ecuacion de una recta que forma con el eje de las x un ángulo tambien de 45°, y que corta al eje de las z á una distancia del orígen espresada por b. Como forma el mismo ángulo de 45° con el eje de las abscisas, si referimos ambas líneas á un mismo orígen, y á unos mismos ejes, las dos rectas que consideramos, serán paralelas.

Si para fijar mas las idéas suponemos $b=2$, esto es, suponemos que la distancia del orígen á que corta al eje de las ordenadas, sea igual á dos veces la tangente trigonométrica del ángulo de 45°, que hemos tomado por unidad, tendrémos que esta segunda ecuacion se nos convertirá en $z=x+2$.

Si los segundos miembros los pasamos al primero, se nos convertirán en $z-x=0$, y $z-x-2=0$. Y si multiplicamos ordenadamente estas ecuaciones entre sí, resultará $z^2-z(2x+2)+2x+x^2=0$ (α); y esta ecuacion corresponde al sistema de las dos rectas, que se halla representado en la (fig. ñ lám. 8ª),

Si queremos cerciorarnos de que esto es asi, construirémos esta ecuacion, dando diversos valores á x y viendo los que resultan para z. Supongamos primero $x=0$; en cuyo caso la ecuacion (α) se convierte en $z^2-2z=0$ ó $z(z-2)=0$; la cual se verificará ó cuando $z=0$, ó cuando $z-2=0$, que da $z=2$. El valor $z=0$ manifiesta que hay un punto del sistema que corresponde al orígen; y el valor $z=2$ manifiesta que hay otro punto del sistema, que dista del orígen 2 unidades; y se halla en el eje de las ordenadas z. Por consiguiente, si tomamos AB=2, el punto B corresponderá al sistema.

Si suponemos $x=AP=1$, la ecuacion (α) se convierte en $z^2-4z+3=0$; que da (I. 253) $z=2\pm\sqrt{4-3}=2\pm\sqrt{1}=2\pm1$; que separando los valores, se tiene $z=3$ y $z=1$.

Luego, si tomando un valor AP=1, levantamos una perpendicular PQ, y en ella tomamos $Pm=1$, si unimos el punto m con A por medio de la recta AmM, el triángulo APm será isósceles, y por consiguiente el ángulo mAP será de 45°. El otro valor $z=3$ dice: que si tomamos $Pn=3$, el punto n corresponderá tambien al sistema; y pues $Pm=1$, la mn valdrá 2 y será igual con AB. Ahora, uniendo el punto n con el B por medio de la recta BnN, tendrémos (I. 463) que esta recta será paralela con AmM.

Si tomamos $x=AP'=2$, la ecuacion (α) dará $z^2-6z+8=0$, que da

$z=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1$; que, separando los valores, se tiene $z=2$ y $z=4$.

lares; en cuyo caso, si los representamos por ZAX, XAU y ZAU (figura 58), y sabemos que un punto M del espacio está colocado á una distancia MM′ del primero, á una distancia MM″ del segundo, y á una distancia MM‴ del tercero, se sigue de la propiedad que tienen los planos paralelos (I. 553 cor.) de estar igualmente distantes en todos sus puntos, que si se hacen pasar á dichas distancias tres planos M‴MM″, M‴MM′, M″MM′, respectivamente paralelos á los precedentes, el punto M que debe hallarse en todos, se encontrará en su interseccion mutua.

174 Los planos rectangulares ZAX, XAU, ZAU, á que se refieren los puntos del espacio, se llaman los *planos coordenados*; los cuales se cortan de dos en dos en las tres rectas AX, AU, AZ, pasan-

---

Luego si tomamos $AP'=2$, y por P' tiramos la $P'Q'$ y en ella tomamos $P'm'=2$ y $P'n'=4$, los puntos m' y n' serán puntos del sistema, y resultará que $m'n'=2$, será igual y paralela con mn y con AB; luego el punto m' se hallará en la recta AM, y el n' en la BN.

Si supusiéramos $x=Ap=-1$, tendríamos $z^2-1=0$, que da $z=\pm 1$ y $z=-1$. El valor $z=-1$ nos manifiesta que el punto m_1 se halla debajo del eje de las x, y que uniendo este punto con A por medio de una recta Am_1, el triángulo pAm_1 será isósceles, y por consiguiente el ángulo pAm_1 de 45°; y en virtud de lo espuesto (I. 357), las rectas ÁnM, y Am_1 no formarán mas que una sola y misma recta.

El segundo valor $z=1$ corresponde al punto n_1; y pues que $pm_1=1$ y $pn_1=1$, resulta que $m_1n_1=2$; por lo que siendo AB=2, $mn=2$ y $m_1n_1=2$; se infiere que el punto n_1 se halla en la misma recta NnBn_1.

Del mismo modo resultaría, que multiplicando entre sí las ecuaciones de tres rectas, referidas á un mismo orígen y á unos mismos ejes, tendríamos una ecuacion de tercer grado, que representaría el sistema de tres líneas rectas; y asi obtendríamos el de cuatro, cinco etc. líneas rectas.

Lo mismo sucede con las ecuaciones de las curvas; y esto se verifica siempre que las ecuaciones que se dan, se puedan descomponer en factores.

Así es, que segun manifestarémos en adelante, toda ecuacion de 2.° grado corresponde á una curva del mismo grado; pero, si la ecuacion se puede resolver en factores reales, no corresponde á ninguna curva continua, sinó al sistema de dos rectas; y análogamente en las ecuaciones superiores. Así es, que una ecuacion de 4.° grado, si no se puede descomponer en factores racionales, corresponderá á una curva del 4.° grado; pero podrá corresponder al sistema de 4 rectas, si se puede descomponer en 4 factores del primer grado; á dos rectas y á una curva del 2.° grado, si se puede descomponer en dos factores del primer grado y en uno del 2.°; á dos curvas de 2.° grado, si se puede descomponer en dos factores del 2.° grado; y á una recta y á una curva de tercer grado, si la ecuacion se puede descomponer en un factor del primer grado, y en otro del 3.° Sobre cuyo punto se podrá consultar lo que dice *Euler* en el 2.° tomo de su *Introduccion á la Analisis de los infinitos*.

do todas tres por el punto A, y siendo perpendiculares entre sí.

Por la propiedad de los planos paralelos, la distancia MM′ del punto M al plano ZAX se puede medir sobre la recta AU, y es igual con AR.

Del mismo modo la distancia MM″ se puede medir sobre la recta AZ, y es igual con AQ.

En fin, la distancia MM‴=AP se puede medir sobre la recta AX.

Las rectas AU, AZ, AX, sobre las que contarémos desde aquí en adelante las distancias respectivas de los puntos del espacio á los planos ZAX, XAU, ZAU, se llaman los *ejes de las coordenadas*, cuyo orígen es el punto A. Representarémos en general por x las distancias que se cuentan sobre la última, á que siempre denominarémos *eje de las x*. Designarémos por z las que se cuentan sobre la línea AZ que será *el eje de las z*, y señalarémos con u las que se cuentan sobre el eje AU, que será *el eje de las u*.

175 Luego, si habiendo medido las tres distancias AP, AQ, AR, las encontramos iguales con a, b, c, tendrémos para determinar la posicion del punto M, las tres ecuaciones $x=a$, $z=b$, $u=c$; y como bastan para este objeto, se llaman *las ecuaciones del punto* M; y se suelen llamar *simultáneas* estas ecuaciones, por la circunstancia de que se han de verificar á un mismo tiempo.

176 Los tres planos indefinidamente prolongados formarían ocho ángulos sólidos, que abrazarían todo el espacio; y el signo de las coordenadas dará á conocer en qué ángulo de estos cae el punto dado.

Así es, que señalando con X′, Z′, U′, las prolongaciones AX′, AZ′, AU′, y espresando por MUZX la posicion del punto M en el ángulo sólido AUZX, y así de los demas, se tendrá

para	MUZX, se tiene...	$x=a$,	$z=b$,	$u=c$,
	MUZ′X,	$x=a$,	$z=-b$,	$u=c$,
	MUZ′X′,	$x=-a$,	$z=-b$,	$u=c$,
	MUZX′,	$x=-a$,	$z=b$,	$u=c$,
	MU′ZX,	$x=a$,	$z=b$,	$u=-c$,
	MU′Z′X,	$x=a$,	$z=-b$,	$u=-c$,
	MU′Z′X′,	$x=-a$,	$z=-b$,	$u=-c$,
	MU′ZX′,	$x=-a$,	$z=b$,	$u=-c$.

177 Las posiciones de los puntos M′, M″, M‴, que se llaman las *proyecciones* del punto M sobre los tres planos coordenados, se hallan determinadas por estas ecuaciones; porque se saca de ellas $z=b$, $x=a$, para las coordenadas del punto M′, proyeccion del punto M sobre el plano ZAX; $x=a$, $u=c$, para las coordenadas del punto M″, proyeccion del punto M sobre el plano XAU; $u=c$, $z=b$, para las coordenadas del punto M‴, proyeccion del punto M sobre el plano ZAU.

Donde se ve por las ecuaciones precedentes, que, dadas dos de es-

tas proyecciones, la tercera se sigue necesariamente de ellas; pues en las cuatro ecuaciones, que corresponden á dos proyecciones, están comprendidas las dos ecuaciones que corresponden á la tercera proyeccion. En la construccion geométrica, se deduce de dos de ellas la tercera con mucha facilidad. En efecto, si suponemos que se den conocídas M'' y M''', por ejemplo, se tirarán las $M'''Q$ y $M''P$ paralelas con AU; despues QM' y PM' respectivamente paralelas á los ejes AX, AZ; las cuales determinarán el punto M', que es la otra proyeccion.

Estas proyecciones, originadas en los tres planos coordenados, que hemos considerado perpendiculares entre sí, se designan con el nombre de *ortogonales*, para distinguirlas de las que se originarían por las paralelas, tiradas desde el punto á los planos coordenados, cuando estos no son perpendiculares entre sí, y que por lo mismo se llaman *oblícuos*.

Conviene tener presente, que *un punto del espacio tiene siempre dos coordenadas comunes con cada una de sus proyecciones*; y que *dos proyecciones de un mismo punto tienen siempre una coordenada comun, segun manifiesta la figura.*

178 De todo esto resulta que, hallándose todos los puntos del espacio referidos á tres planos perpendiculares entre sí, los puntos de cada uno de estos planos se encuentran naturalmente referidos á dos rectas perpendiculares entre sí, que son las intersecciones de dicho plano con los otros dos.

Así, designando cada plano por las coordenadas que le son propias, el plano ZAX será el plano de las xz; el plano XAU el de las xu, y el plano ZAU el de las zu, de cuyas denominaciones harémos uso de aquí en adelante.

179 Con el sistema de ecuaciones $x=a$, $z=b$, $u=c$, que determinan un punto en el espacio, se pueden hacer consideraciones análogas á las que se hicieron (140) con las dos $x=a$, $z=b$, que lo determinaban sobre un plano. *La ecuacion* $x=a$, *considerada por sí sola en las tres dimensiones, conviene á todos los puntos de un plano paralelo al de las* zu, *que diste de este una magnitud espresada por* a; y así se dice que *es la ecuacion de un plano paralelo al de las* zu. Por la misma razon, $z=b$ es, atendiendo á las tres dimensiones, *la ecuacion de un plano paralelo al de las* xu; y que $u=c$ *lo es de un plano paralelo al de las* xz. Si suponemos que se verifiquen simultáneamente ó á un mismo tiempo las dos ecuaciones $x=a$, $z=b$, su conjunto, atendiendo á las tres dimensiones, *convendrá á la recta que fuese la interseccion comun de dos planos paralelos á los de las* zu, y xu, *que pasasen á las distancias* a y b *de ellos*. Y si suponemos que se verifiquen simultáneamente ó á un mismo tiempo las tres ecuaciones $x=a$, $z=b$, $u=c$, su conjunto *corresponde al punto en que se encontrarían tres planos paralelos á los coordenados, que distasen de ellos las magnitudes espresadas por* a, b, c. Cada una de las ecuaciones $x=0$,

$z=0$, $u=0$, considerada por sí sola en las tres dimensiones, es la ecuacion de uno de los planos coordenados; la 1ª del de las zu; la 2ª del de las xu; y la 3ª del de las xz. Si se verificasen á un tiempo $x=0$, $z=0$, su conjunto equivale en las tres dimensiones, al eje de las u, que es la interseccion comun del plano de las zu y del de las xu; y del mismo modo las dos ecuaciones simultáneas $x=0$, $u=0$ representan el eje de las z; y las $z=0$, $u=0$ representan el eje de las x. Las tres ecuaciones simultáneas $x=0$, $z=0$, $u=c$ fijan la posicion de un punto en el eje de las u; las $x=0$, $z=b$, $u=0$ fijan la posicion de un punto sobre el eje de las z; las $x=a$, $z=0$, $u=0$ fijan la posicion de un punto sobre el eje de las x. Finalmente, si se verifican á un tiempo las tres ecuaciones $x=0$, $z=0$, $u=0$, su conjunto fija la posicion del punto A *de orígen*. Como es de la mayor importancia el que los principiantes adquieran idéas exactas sobre estas nociones primitivas, hemos tenido buen cuidado de advertir (143) que la ecuacion $x=a$, por ejemplo, pertenece á una recta paralela al eje de las z, pero es el caso en que solo se consideran dos dimensiones; y ahora acabamos de espresar, que la misma ecuacion $x=a$ conviene á un plano paralelo al eje de las zu, pero es teniendo en consideracion las tres dimensiones; y los principiantes, al ver por ejemplo la ecuacion $x=a$, deben reflexionar si se hallan considerando dos ó tres dimensiones. Si en el primer caso, la $x=a$ es la ecuacion de una recta paralela al eje de las z; y si en el segundo, es la de un plano paralelo al de las zu.

No estará demas el esplicar aquí, por qué en la *Geometría Descriptiva son suficientes dos planos para fijar la posicion de un punto*; *mientras que en la Geometría Analítica se necesitan tres planos coordenados.*

Para esto, debemos observar, que el conocimiento de las dos proyecciones de un punto sobre un plano horizontal y sobre un plano vertical es en efecto suficiente para las construcciones gráficas: pero, si se quiere fijar analíticamente la posicion de cada una de estas dos proyecciones; por ejemplo, de los puntos M′, M″, es necesario, *primero*, trazar en el plano horizontal xz dos ejes rectangulares AX, AZ; *segundo*, trazar en el plano vertical xu, dos ejes AX, AU, tomando para mayor sencillez, por *eje comun*, la interseccion de los dos planos de proyeccion. Y como los dos ejes AZ, AU determinan un tercer plano rectangular con los otros dos, resulta que *analíticamente se necesitan tres planos*, y *geométricamente* bastan dos.

180 *Espresar la distancia de dos puntos del espacio, cuyas coordenadas se conocen.*

Sean M y m (fig. 59) estos dos puntos, y x'', z'', u'', x', z', u', sus coordenadas; si por el segundo se concibe una recta nQ′ paralela al plano de las xz y terminada en la coordenada MM′, se tendrá $Mm^2=MQ'^2+mQ'^2$; pero $MQ'=MM'-M'Q'=MM'-mm'=u''-u'$, y $mQ'=M'm'$.

Si por el punto m' se tira $m'Q$ paralela al eje de las x, será

$$M'Q = M'P - PQ = M'P - m'P' = z'' - z';$$

y $$m'Q = PP' = AP - AP' = x'' - x';$$

y como el triángulo $m'M'Q$ es rectángulo en Q (*), porque $m'Q$ es paralela con AX, y $M'P$ le es perpendicular, tendrémos

$$M'm'^2 = M'Q^2 + m'Q^2 = (z'' - z')^2 + (x'' - x')^2;$$

sustituyendo estos valores en el de Mm^2 será

$$Mm^2 = (u'' - u')^2 + M'm'^2 = (u'' - u')^2 + (z'' - z')^2 + (x'' - x')^2.$$

Llamando D á la distancia buscada, se tendrá

$$D = \sqrt{(u'' - u')^2 + (z'' - z')^2 + (x'' - x')^2};$$ que *es la espresion de la distancia de dos puntos cualesquiera del espacio.*

181 Si el punto m coincide con el orígen A de las coordenadas, se tendrá $x' = 0$, $u' = 0$, $z' = 0$, y la fórmula precedente se convertirá en $D = \sqrt{x''^2 + z''^2 + u''^2}$, que espresa la distancia de un punto cualquiera del espacio al orígen de las coordenadas; y que es muy fácil de comprobar por las consideraciones geométricas. En efecto, siendo los triángulos AMM', AM'P (fig. 60) rectángulos el uno en M' y el otro en P, dan

$$AM^2 = MM'^2 + AM'^2 = MM'^2 + M'P^2 + AP^2 = u''^2 + z''^2 + x''^2,$$

de donde $AM = \sqrt{u''^2 + z''^2 + x''^2}$ como ántes.

182 *Hallar la relacion que debe existir entre las coordenadas de un conjunto de puntos para que estén situados en linea recta.*

Para esto basta notar, que si muchos puntos están en línea recta en el espacio, sus proyecciones lo estarán tambien en línea recta sobre cada uno de los planos coordenados (I. 561).

Este plano que contiene todas las perpendiculares tiradas desde los diversos puntos de la recta, se llama *plano proyectante*; su interseccion con los planos coordenados, se llama, en general, *traza del plano pro-*

(*) *Cuando las figuras han de representar objetos en que entren las tres dimensiones, es preciso ponerlas en perspectiva; en cuyo caso, los principiantes tienen que vencer muchas dificultades para formarse una exacta idéa de los objetos, por la figura, que á la verdad no los representa á la vista como son en sí. En efecto, no dejará de costar dificultad á un principiante, el concebir que los ángulos* m'M'Q', *APM' y* m'QM' *son rectos, cuando á la vista parecen agudos. Por esta causa, es de la mayor importancia, para que se perciba claramente lo que representa esta figura y algunas de las que siguen, el uso de los modelitos que casi á un mismo tiempo han inventado y construido los tres jóvenes y apreciabilísimos Profesores D. Eugenio de la Cámara, D. Agustin Pascual y D. Fernando Boccherini. Sabre cuyo punto damos los correspondientes detalles en las notas del* § 367 *y del índice del Tomo* 1.° *del Compendio de Matemáticas, y del* (§ 40) *del tomo* 2.°

yectante; y se llama *proyeccion de la recta*, sobre cualquiera de los planos coordenados, á la parte de la *traza* del plano proyectante comprendida entre las proyecciones de los estremos de la recta, cuando esta es finita y determinada, ó es igual á toda la traza indefinida del plano proyectante cuando la recta es indefinida.

Como una recta queda determinada cuando se conocen dos planos que la contienen, porque la comun seccion de dos planos solo es (I. 544) una línea recta, lo será si se tienen dos *planos proyectantes* suyos; pero estos quedan determinados cuando se tienen las proyecciones por donde pasan; luego una recta está determinada cuando se conocen sus proyecciones sobre dos de los planos coordenados. Por consiguiente, como las ecuaciones de estas proyecciones sobre los planos de las xu y de las zu, son $x=au+\alpha$, $z=bu+\mathcal{C}$, su conjunto fija en el espacio la posicion de la recta; y dichas ecuaciones se suelen caracterizar con el nombre de *simultáneas*, porque se han de verificar á un mismo tiempo. Si la recta dada pasa por el orígen de las coordenadas, α y $\mathcal{C}$ serán cero, y las ecuaciones de una recta que pasa por el orígen, serán

$$x=au, \quad z=bu.$$

Aunque estas ecuaciones son efectivamente las de las dos proyecciones de la línea recta, se dice que son las ecuaciones de la misma recta.

{ 133 Estas consideraciones son fáciles de verificar. En efecto, la ecuacion $x=au+\alpha$, espresando una relacion independiente de z, no solo pertenece á la línea recta, que es la proyeccion de la propuesta sobre el plano de las xu, sinó que conviene tambien á todos los puntos del plano que pase perpendicularmente al de las xu por esta proyeccion: pues que para estos puntos la relacion de las x y u es aun la misma. Del mismo modo, la ecuacion $z=bu+\mathcal{C}$, cuando se la considera separadamente, se verifica cualesquiera que sean los valores de x, pues que es independiente de esta variable; luego no solo pertenece á la proyeccion de la recta propuesta sobre el plano de las uz, sinó que conviene al plano proyectante que pase por esta proyeccion. Por consiguiente, el sistema de las dos ecuaciones simultáneas $x=au+\alpha$, $z=bu+\mathcal{C}$, significa que la recta propuesta se halla al mismo tiempo sobre dos planos dados, y he aquí porque su conjunto determina su posicion. Se ve tambien por esto que las variables x, z, u, de estas ecuaciones espresan las coordenadas de los puntos de la recta, las cuales deben tener entre sí las relaciones determinadas por estas ecuaciones.

Pues que la recta queda ya determinada de este modo, su proyeccion sobre el tercer plano, debe resultar de estos datos. En efecto, eliminando u entre las dos ecuaciones precedentes, se halla $\frac{x-\alpha}{a}=\frac{z-\mathcal{C}}{b}$ ó $z-\mathcal{C}=\frac{b}{a}(x-\alpha)$.

{ Las coordenadas x y z, que entran en este resultado, pertenecen á los puntos de la recta; ellas indican el lugar en que caen las perpendiculares bajadas desde estos puntos sobre el plano de las xz. Luego el conjunto de estas coordenadas forma la proyeccion de la recta; y la relacion que existe entre sus valores

manifiesta que esta proyeccion es tambien una recta, ó lo que viene á ser lo mismo, la ecuacion del plano proyectante que pasa por esta proyeccion. Esta ecuacion, unida con una cualquiera de las precedentes, bastaría igualmente para caracterizar la recta.

De aquí se infiere, que en general, se necesitan dos ecuaciones para fijar la posicion de una recta en el espacio, y estas dos ecuaciones son las de los dos planos sobre que se halla la recta.

Puesto que $x=au+\alpha$ es la proyeccion de la recta sobre el plano de las xu, resulta que a espresa (160) la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicha proyeccion con el eje de las u; y α es la distancia del orígen á que dicha proyeccion corta al eje de las x; y puesto que $z=bu+\mathcal{C}$, espresa la proyeccion de la recta sobre el plano de las zu, la b representa la tangente trigonométrica del ángulo que forma dicha proyeccion con el eje de las u, y $\mathcal{C}$ espresa la distancia del orígen á que dicha proyeccion corta al eje de las z.

De donde se sigue, que si la recta propuesta se hallase en uno de los planos tal como el de las zu, como sus proyecciones sobre los otros dos, serían los mismos ejes, resulta que dicha proyeccion no formaría ningun ángulo con el eje de las u, ni cortaría al de las x á ninguna distancia del orígen, lo que da $a=0$, $\alpha=0$; y sus ecuaciones se convertirán en $x=0$, $z=bu+\mathcal{C}$ (*).

Del mismo modo, si la recta se hallase en el plano de las xu, sus ecuaciones serían $z=0$, $x=au+\alpha$ siendo $b=0$, y $\mathcal{C}=0$. Y si se hallase en el de las xz, sus ecuaciones serían $u=0$, y $z-\mathcal{C}=\frac{b}{a}(x-\alpha)$.

Los procedimientos de que acabamos de hacer uso, pueden igualmente servir para indicar la sucesion de los puntos de una linea curva cualquiera.

En efecto, si la curva se hallase en un plano, como la MM′M″M‴ etc. (fig. ñ′), tomaríamos en el eje AX, las diferentes abscisas AP, AP′, AP″, etc. y por los puntos P, P′, P″, etc. tiraríamos las PM, P′M′, P″M″, etc. al eje AZ, y tomando en ellas las magnitudes, que correspondiesen á la naturaleza de la curva, tendríamos los puntos M, M′, M″, etc.; y como haciendo que los valores AP, AP′, AP″, etc., se diferencien tan poco como se quiera, estos pun-

---

(*) *En algunas ocasiones tendrémos que hacer uso de la siguiente proposicion:*

La proyeccion de una recta sobre un plano ó sobre otra recta, es igual á la longitud de la misma recta multiplicada por el coseno del ángulo que forma dicha recta con la proyeccion, prolongadas en caso necesario.

En efecto, sea FM (fig. A lám. 8′) *la recta dada; bajando desde F y M las perpendiculares Fp y MP sobre la AX, tendrémos que pP será la proyeccion de FM sobre AX, ó sobre cualquier plano que pase por AX. Si tiramos por F la FX′ paralela con AX, tendrémos que pP=FQ; y como FQ=*(I. 649) *FM.cos.MFX, será pP=FM.cos.MFX′; pero como el ángulo MFX′ sería igual por correspondiente con el que formase la MF prolongada, con Pp tambien prolongada, resulta la proposicion.*

tos M, M′, M″ etc. se aproximarán entre sí tanto como se quiera á formar la *curva continua* MM′M″M‴ etc.

Hemos visto (nota del § 161) que la ecuacion de primer grado corresponde sólo á la línea recta; luego la ecuacion de las curvas debe ser superior al primer grado; por lo que será del segundo grado, del tercer grado etc. Y como en este caso, á una misma abscisa corresponderán tantas ordenadas como unidades tenga el grado de su ecuacion, resulta que la curva se compondrá de dos, tres ó mas ramas; esto es, de tantas ramas como unidades tenga el esponente que da el grado á la ecuacion. En la (fig. ñ″) señalamos tres, á saber

MM′M″ ....NN′N″....RR′R″...

Si la curva se halla en el espacio, se determinarán dos proyecciones de ella sobre dos de los planos coordenados, con lo cual se hallará determinada enteramente; estas proyecciones son por lo general líneas curvas situadas en los planos coordenados. Así, cuando se conozcan las ecuaciones de estas curvas, se podrá, para cada valor dado de una de las variables x, z, u, hallar los valores correspondientes de las otras dos; lo que determinará en el espacio, sobre la curva propuesta el punto que responde á estos valores. El conjunto de estos puntos puede muy bien ser de tal naturaleza, que no puedan estar todos contenidos en un plano; y éste carácter es el que constituye á las curvas que se designan con el nombre *de doble curvatura*.

Del mismo modo que las proyecciones de una línea recta son las trazas de los dos planos proyectantes que la contienen, y que la dan por su interseccion, las dos proyecciones de una línea curva cualquiera son las trazas de superficies curvas, cuya generacion es á manera del segundo modo con que hemos esplicado (I. 595), que se origina el cilindro oblicuo; y sobre lo cual hablarémos con mayor detenimiento (§ 340 y siguientes).

§ 183 a Tambien *se puede fijar la posicion de una recta en el espacio por medio de los ángulos que dicha recta forma con los tres ejes coordenados.*

§ En efecto, si suponemos que sea AM (fig. *C* lámina 8ª) la recta dada, y que se conozcan los ángulos MAX, MAZ, MAU; que forma con los ejes rectangulares AX, AZ, AU, tendrémos que estos datos serán suficientes para fijar la recta AM en el espacio, sin que se pueda confundir con ninguna otra. Porque, si solo conociésemos el ángulo MAX, tendríamos que, concibiendo un cono ABECD, cuyo eje fuese AX y el ángulo que formase el lado del cono con el mismo eje fuese de la magnitud conocida MAX, la recta AM sería por precision uno de los lados, y tendríamos que la sola circunstancia de conocer el ángulo MAX, nos determina el que dicha recta ha de estar en la superficie del espresado cono.

§ Si concebimos otro cono AFHGK, cuyo eje sea la AU y el ángulo que forma el lado con el eje sea de la magnitud conocida MAU, la recta AM tambien se hallará en la superficie de este cono; y como había de estar tambien sobre la del anterior, resultará que deberá encontrarse en las comunes intersecciones de las superficies de estos dos conos; y como estas superficies se cortan en dos rectas AM, AM′, resulta que aun no sabemos cual de ellas ha de ser; pero, recurriendo al otro ángulo conocido ZAM, la interseccion que cumpla con la circunstancia de formar con el eje AZ un ángulo de la magnitud MAZ será la AM; por lo cual quedará esta completamente determinada.

§ Entendido esto, pasemos á deducir las circunstancias analíticas de esta determinacion; con cuyo objeto, observarémos que, si por un punto cualquiera M de la AMN (fig. *D* lám. 8′) se tiran las MM′, MM″, MM‴, y las AM′, AM″, AM‴, tendrémos que el triángulo AMM′, será rectángulo en M′ y dará (I. § 649) MM′=AM×cos.AMM′; y siendo el ángulo AMM′=MAU por alternos internos entre las paralelas MM′ y AU, si lo espresamos por U, por ser el que forma la recta con el eje de las *u*, y espresamos la MM′ por *u*, por ser la coordenada del punto M correspondiente al eje AU, tendrémos

$$u=\text{AM}\times\cos.U \quad (1).$$

§ El triángulo AMM″ rectángulo en M″, da MM″=AM×cos.AMM″, y como por la misma razon de ántes, se tiene el ángulo AMM″=MAZ, si lo llamamos Z, y *z* la coordenada MM″=AQ, será $z=\text{AM}\times\cos.Z$ (2).

§ El triángulo AMM‴, rectángulo en M‴, da MM‴=AM×cos.AMM‴; y como AMM‴=MAX, si espresamos este ángulo por *X*, y por *x* la coordenada MM‴=AP, será $x=\text{AM}\times\cos.X$ (3).

Si elevamos al cuadrado estas tres ecuaciones y las sumamos, tendrémos

$$x^2+z^2+u^2=\text{AM}^2(\cos.^2X+\cos.^2Z+\cos.^2U) \quad (4);$$

y siendo AM la diagonal del paralelepípedo rectángulo AM′M‴M″, cuyas aristas contiguas son AP=*x*, AQ=*z* y AR=*u*, tendrémos (I. 576 esc. 2.º)

$$x^2+z^2+u^2=\text{AM}^2 \quad (5);$$

y dividiendo la (4) por esta, resultará $\cos.^2X+\cos.^2Z+\cos.^2U=1$ (6), que espresa la relacion que deben tener los cosenos de los ángulos que forma una recta cualquiera con los ejes de las *x*, de las *z* y de las *u*; la cual manifiesta, que *no se pueden tomar los tres ángulos á arbitrio, sinó que en determinando dos, el tercero lo determinará esta ecuacion.*

§ Si la recta no pasase por el orígen, le tiraríamos por este punto una paralela, y los ángulos que esta formase con los ejes, estos serían los que formaba la espresada línea.

§ Estrayendo la raiz cuadrada de la ecuacion (5), da $\text{AM}=\sqrt{x^2+z^2+u^2}$, y despejando los cosenos en las ecuaciones (1), (2), (3), y sustituyendo por AM este valor, resulta

$$\cos.U=\frac{u}{\sqrt{x^2+z^2+u^2}},\quad \cos.Z=\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2+u^2}},\quad \cos.X=\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2+u^2}} \quad (7).$$

§ Como la recta AM pasa por el orígen A de las coordenadas, sus ecuaciones serán (§ 182) $x=au$, $z=bu$; sustituyendo en vez de *x* y *z* estos valores en las ecuaciones anteriores, y haciendo la simplificacion, resultará

$$\cos.U=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \cos.Z=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \cos.X=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \quad (8).$$

§ Los ángulos *U*, *Z*, *X*, que forma la recta AM con los ejes, son complementos de los MAM′, MAM″, MAM‴, que forma la misma recta con los planos coordenados; luego si los espresamos por *m′*, *m″*, *m‴*, será $\cos.U=\text{sen.}m'$, $\cos.Z=\text{sen.}m''$, $\cos.X=\text{sen.}m'''$; por lo cual tendrémos

$$\text{sen.}m'=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \text{sen.}m''=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \text{sen.}m'''=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

ecuaciones que espresan los senos de los ángulos que forma una recta cualquiera con los planos de las xz, de las xu y de las zu.

Si dividimos la ecuacion (3) por la (1), la (2) por la (1), y la (2) por la (3), tendrémos $\frac{x}{u}=\frac{\cos.X}{\cos.U}$, $\frac{z}{u}=\frac{\cos.Z}{\cos.U}$, $\frac{z}{x}=\frac{\cos.Z}{\cos.X}$; y como la recta AM pasa por el orígen, sus ecuaciones serán (§ 182) $x=au$, $z=bu$, las cuales dan $\frac{x}{u}=a$, $\frac{z}{u}=b$, $\frac{z}{x}=\frac{b}{a}$.

Por lo cual tendrémos $a=\frac{\cos.X}{\cos.U}$, $b=\frac{\cos.Z}{\cos.U}$, $\frac{b}{a}=\frac{\cos.Z}{\cos.X}$.

Ahora, considerando en el espacio una recta que no pase por el orígen, pero que sea paralela á la AM que pasa por el orígen, sus ecuaciones serán (§§ 182 y 183) $x=au+\alpha$, $z=bu+\mathcal{C}$, y la de la otra proyeccion

$$z-\mathcal{C}=\frac{b}{a}(x-\alpha);$$

y como tanto para esta recta como para su paralela AM, tienen la a y la b los mismos valores, y los ángulos que dicha recta forme con los ejes serán los mismos que los que forma la AM, tendrémos los mismos valores de ántes, á saber

$$a=\frac{\cos.X}{\cos.U},\quad b=\frac{\cos.Z}{\cos.U},\quad \frac{b}{a}=\frac{\cos.Z}{\cos.X};$$

y sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores, se convertirán en

$$x=\frac{\cos.X}{\cos.U}\times u+\alpha,\quad z=\frac{\cos.Z}{\cos.U}\times u+\mathcal{C},\quad z-\mathcal{C}=\frac{\cos.Z}{\cos.X}(x-\alpha);$$

que quitando el divisor, las podrémos poner bajo esta forma

$$(x-\alpha)\cos.U=u\cos.X,\quad (z-\mathcal{C})\cos.U=u\cos.Z,\quad (z-\mathcal{C})\cos.X=\cos.Z(x-\alpha);$$

que *son las ecuaciones de una recta en el espacio, haciendo entrar en ellas los cosenos de los ángulos que forma la recta con los tres ejes.*}

184 Nos propondrémos ahora resolver algunas cuestiones análogas á las que resolvimos cuando se consideró la recta sobre un plano, y sea la primera

Hallar las ecuaciones de una recta que pase por dos puntos dados.

Sean x', z', u', x'', z'', u'', las coordenadas de estos puntos; y tendrémos que las ecuaciones de esta recta serán $\left\{\begin{matrix}x=au+\alpha\\ z=bu+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}$ (m)

siendo a, b, α y $\mathcal{C}$, desconocidas, ó por mejor decir, indeterminadas ó por determinar. Ahora, para que esta recta pase por el primer punto, es necesario que las coordenadas x', z', u', satisfagan á estas ecuaciones, de manera que se tendrá

$$\left\{\begin{matrix}x'=au'+\alpha\\ z'=bu'+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}\ (n);$$

y para que pase por el punto cuyas coordenadas son x'', z'', u'', deberán estas satisfacer á las ecuaciones (m), y se tendrá $\left\{\begin{matrix}x''=au''+\alpha\\ z''=bu''+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}$ (o).

∴

Las cuatro ecuaciones (n) y (o), contienen cuatro incógnitas a, α, b, $\mathcal{C}$; despejándolas por medio de ellas y sustituyendo sus valores en las (m), se tendrán las ecuaciones de la recta pedida. Este despejo se consigue con mucha sencillez por métodos particulares; pues restando las (n) de las (m) se tiene

$$\{x-x'=a(u-u'),\quad z-z'=b(u-u')\}\quad (p);$$

que *son las ecuaciones de una recta sujeta á pasar por un punto cuyas coordenadas son* x', z', u'.

Restando las (o) de las (n), se tiene

$$\left\{\begin{matrix} x'-x''=a(u'-u'') \\ z'-z''=b(u'-u'') \end{matrix}\right\},\quad \text{que dan}\quad \left\{a=\frac{x'-x''}{u'-u''},\quad b=\frac{z'-z''}{u'-u''}\right\};$$

y sustituyendo estos valores en las (p), se tendrá

$$x-x'=\frac{x'-x''}{u'-u''}(u-u'),\quad z-z'=\frac{z'-z''}{u'-u''}(u-u'),$$

que *son las ecuaciones de la recta que pasa por dichos dos puntos.*

185 *Hallar las condiciones nececarias para que dos rectas sean paralelas en el espacio.*

Sean $\left\{\begin{matrix} x=au+\alpha \\ z=bu+\mathcal{C} \end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de la 1.ª y $\left\{\begin{matrix} X=a'U+\alpha' \\ Z=b'U+\mathcal{C}' \end{matrix}\right\}$ las de la 2.ª

Si estas rectas son paralelas, sus planos proyectantes lo serán tambien; y las intersecciones de estos planos con los coordenados, ó lo que es lo mismo, las proyecciones de las rectas sobre cada plano coordenado serán paralelas entre sí; para lo cual se deberá tener (§ 164) $a=a'$, $b=b'$, y las ecuaciones de la paralela se convertirán en $X=aU+\alpha'$, $Z=bU+\mathcal{C}'$, donde quedan indeterminadas las α' y $\mathcal{C}'$ porque hay una infinidad de rectas que pueden ser paralelas à la propuesta; y quedarían determinadas si se fijase un punto por donde debiese pasar.

En efecto, si se supusiese que x', z', u' fuesen las coordenadas del punto por donde hubiese de pasar la paralela, se debería tener $x'=au'+\alpha$, $z'=bu'+\mathcal{C}$; y restando estas ecuaciones de sus anteriores, se tendrá

$$X-x'=a(U-u'),\quad Z-z'=b(U-u')$$

para las ecuaciones de la paralela que pasase por el espresado punto.

Si el punto dado es el orígen (§ 179), estas ecuaciones se convertirán en

$$X=aU,\quad Z=bU.$$

186 *Hallar el ángulo de dos rectas cuyas ecuaciones se tienen; ó dadas las ecuaciones de dos rectas, hallar el ángulo que forman.*

Sean $\left\{\begin{matrix} x=au+\alpha \\ z=bu+\mathcal{C} \end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de la 1.ª y $\left\{\begin{matrix} X=a'U+\alpha' \\ Z=b'U+\mathcal{C}' \end{matrix}\right\}$ las de la 2.ª

Ante todas cosas debemos observar, que en el espacio no sucede lo mismo que sobre un plano, donde las rectas se encuentran siempre, á ménos que no sean paralelas. En el espacio dos rectas se pueden cruzar bajo diferentes ángulos sin encontrarse, y su inclinacion se mide en todos los casos por la de dos rectas que les fuesen respectivamente paralelas, y que pasasen por un mismo punto. Concibamos pues, por el orígen dos rectas respectivamente paralelas á cada una de las precedentes, y tendrémos que sus ecuaciones serán (§ 182)

$\left\{\begin{matrix} x_1=au_1 \\ z_1=bu_1 \end{matrix}\right\}$ para la 1.ª, $\left\{\begin{matrix} X_1=a'U_1 \\ Z_1=b'U_1 \end{matrix}\right\}$ para la 2.ª

Tomando sobre cada una de ellas un punto que diste del orígen, una cantidad igual con la unidad, la recta que una estos puntos será la cuerda del ángulo buscado, y por consiguiente dupla del seno de la mitad de este ángulo.

Sean x', z', u', las coordenadas del primer punto, que supondrémos ser M′ (fig. 61), y se tendrán las tres ecuaciones

$$x'=au', \quad z'=bu', \quad x'^2+z'^2+u'^2=1.$$

Las dos primeras significan que este punto se halla sobre la primera recta; y la tercera, que su distancia al orígen (181) es la unidad. Los valores de x' y z' sustituidos en esta última, dan, sacando el factor comun u'^2 fuera de un paréntesis

$u'^2(1+a^2+b^2)=1$; de donde resulta $u'=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, cuyo valor sustituido, en los de x' y de z', dan

$$x'=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, \quad z'=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}.$$

Sean x'', z'', u'', las coordenadàs del segundo punto, que está situado sobre la otra recta, y que supondrémos ser M″; como está determindo por condiciónes análogas, se tendrá igualmente

$$x''=a'u'', \quad z''=b'u'', \quad x''^2+z''^2+u''^2=1;$$

de donde se saca

$$u''=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad x''=\frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}}, \quad z''=\frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

la distancia de estos dos puntos representada por M′M″ es (§ 180)

$$\sqrt{(x''-x')^2+(u''-u')^2+(z''-z')^2},$$

ó lo que es lo mismo, esta espresion será el valor de la cuerda de dicho ángulo.

Sea m el ángulo buscado; y se tendrá [19, (3′)] $\cos.m=1-2\text{sen.}^2\frac{1}{2}m$;

pero $\text{sen.}\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}cuerda\text{M}'\text{M}''=\frac{1}{2}\sqrt{(x''-x')^2+(u''-u')^2+(z''-z')^2}$,

luego $\cos.m=1-\frac{1}{2}[(x''-x')^2+(u''-u')^2+(z''-z')^2]$,

ó reduciendo el entero á la especie del quebrado y efectuándo los cuadrados indicados, se tendrá

$\cos.m=\frac{1}{2}(2-x''^2+2x''x'-x'^2-u''^2+2u''u'-u'^2-z''^2+2z''z'-z'^2)$; pero (181)

$-(x''^2+u''^2+z''^2)=-1$, y $-(x'^2+u'^2+z'^2)=-1$,

luego el conjunto de estos seis cuadrados equivale á -2, que se destruirá con el 2 primero, y quedará reducida la espresion á

$$\cos.m=\frac{1}{2}(2x''x'+2u''u'+2z''z')=x''x'+u''u'+z''z';$$

que sustituyendo en vez de x'', x', u'', u', z'', z', sus valores, se convertirá por último en

$$\cos.m=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\times\sqrt{1+a'^2+b'^2}}=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{(1+a^2+b^2)(1+a'^2+b'^2)}} \quad \text{(B)};$$

y dividiendo por b' y a' sucesivamente el numerador y denominador de esta espresion, la podrémos poner bajo estas formas

$$\cos.m=\frac{\frac{1}{b'}+aa'.\frac{1}{b'}+b}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left(\left(\frac{1}{b'}\right)^2+a'^2.\frac{1}{b'^2}+1\right)}} \quad (B')$$

$$\cos.m=\frac{\frac{1}{a'}+a+\frac{bb'}{a'}}{\sqrt{(1+a^2+b^2)\left(\left(\frac{1}{a'}\right)^2+1+\frac{b'^2}{a'^2}\right)}} \quad (B'');$$

cuyas ecuaciones espresan el coseno del ángulo formado por dos rectas que se cruzan en el espacio de un modo cualquiera; tiene dos valores cada espresion, á causa del doble signo $\pm$ que puede tener el radical del denominador; y corresponde el uno al ángulo agudo y el otro al obtuso que forman entre sí las dos rectas (*).

(*) *Para obtener las espresiones (B), (B') y la (C), que viene despues* (§ 187), *podemos seguir otro rumbo, que por ser muy útil y elegante, vamos á dar á conocer.*

Partiendo de las ecuaciones $\left\{\begin{matrix}x_1=au_1\\z_1=bu_1\end{matrix}\right\}$ *y* $\left\{\begin{matrix}X_1=a'U_1\\Z_1=b'U_1\end{matrix}\right\}$ *de las dos rectas, que, pasando por el orígen, son paralelas á las propuestas, tomemos sobre la primera un punto cualquiera, cuya distancia al orígen espresarémos por* r', *y sus tres coordenadas rectangulares por* x', z', u'; *tomemos tambien sobre la segunda otro punto, cuya distancia al mismo origen (sin que por precision sea igual con la unidad, ni con la distancia* r') *espresarémos por* r'', *y sus coordenadas rectangulares por* x'', z'', u''. *En fin, espresemos por* D *la distancia de estos dos puntos, y tendrémos un triángulo formado por las tres rectas* $r', r'', y\ D$, *en el cual, llamando* m *al ángulo comprendido por* r' *y* r'', *tendrémos* (§ 84)

$$\cos.m=\frac{r'^2+r''^2-D^2}{2r'r''} \quad (\alpha);$$

y solo falta determinar las cantidades r', r'' *y* D.

Pero, espresando por X, Z, U, *los tres ángulos que la primera recta forma con los tres ejes rectangulares de las* x, *de las* z, *y de las* u, *se tendrá* (§ 183a) $x'=r'\times\cos.X,\ z'=r'\times\cos.Z,\ u'=r'\times\cos.U$ (6);
y espresando por X', Z', U', *los ángulos análogos para la segunda recta, se tendrá tambien* $x''=r''\times\cos.X',\ z''=r''\times\cos.Z',\ u''=r''\times\cos.U'$ (γ);
ademas, siendo D *la distancia entre los dos puntos, se tiene en general* (§180)

$$D^2=(x''-x')^2+(z''-z')^2+(u''-u')^2$$

ó $$D^2=x'^2+z'^2+u'^2+x''^2+z''^2+u''^2-2(x''x'+z''z'+u''u');$$

y sustituyendo en vez de las coordenadas rectangulares, sus valores (6), (γ), *será*

{ 187 Haciendo en la espresion de cos.m los diferentes supuestos que se pueden hacer, se obtendrán las condiciones qne se deberán verificar para que este ángulo sea tal como se le supone. Si se quiere por ejemplo que las dos rectas sean perpendiculares, será necesario hacer $m=\frac{1}{2}\pi$, lo que dará cos.$m=0$, y la ecuacion (B) se nos convertirá en $0=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$, que quitando el divisor se trasforma en $1+aa'+bb'=0$, ecuacion que espresa la relacion que debe haber entre las cantidades a, a', b, b', para que las dos rectas de que se trata sean perpendiculares en el espacio, lo que puede tener lugar sin que dichas rectas se corten, como verémos despues.

$$D^2=r'^2(cos.^2X+cos.^2Z+cos.^2U)+r''^2(cos.^2X'+cos.^2Z'+cos.^2U')-\ldots\ldots$$
$$2r'r''(cos.Xcos.X'+cos.Zcos.Z'+cos.Ucos.U') \quad (\delta).$$

Ahora podemos seguir dos rumbos distintos, segun queramos hacer ó no uso de la relacion demostrada (183*a ec.* 6) *entre los cosenos de los tres ángulos formados por una misma recta con los ejes rectangulares.*

En efecto, si suponemos conocido que

$$cos.^2X+cos.^2Z+cos.^2U=1, \quad cos.^2X'+cos.^2Z'+cos.^2U'=1,$$

la espresion anterior se convertirá en

$$D^2=r'^2+r''^2-2r'r''(cos.Xcos.X'+cos.Zcos.Z'+cos.Ucos.U'),$$

cuyo valor sustituido en la ecuacion (α), *la reduce á*

$$cos.m=cos.Xcos.X'+cos.Zcos.Z'+cos.Ucos.U';$$

que es la espresion del coseno del ángulo formado por las dos rectas, espresado en valores de los cosenos de los ángulos que dichas rectas forman con los ejes, y es la (ec. C) del texto.

Tambien podriamos llegar á este resultado sin suponer conocidas las fórmulas del (§ 183*a*) *relativas á los cosenos de los tres ángulos; y este segundo método mas directo que el precedente, es al mismo tiempo demasiado elegante para no ponerlo aqui. Está fundado en la consideracion de que el valor del ángulo es independiente de la longitud de las líneas r' y r'' que forman dicho ángulo* (I. 347); *por lo cual la ecuacion* $cos.m=\frac{r'^2+r''^2-D^2}{2r'r''}$, *ó (quitando el divisor y trasladando)* $D^2-r'^2-r''^2+2r'r''cos.m=0$ *deberá verificarse en todos los valores que puedan tener r' y r'', con tal que D^2 esté espresada en valores de estas cantidades. La condicion de esta independencia determina inmediatamente el valor de cos.m; porque sustituyendo en esta ecuacion por D^2 su valor* (δ), *tendrémos*

$$r'^2(cos.^2X+cos.^2Z+cos.^2U-1)+r''^2(cos.^2X'+cos.^2Z'+cos.^2U'-1)-\ldots\ldots$$
$$2r'r''(cos.Xcos.X'+cos.Zcos.Z'+cos.Ucos.U')+2r'r''cos.m=0;$$

y pues que debe quedar satisfecha, cualesquiera que sean r' y r'', es necesario

Si se quiere que estas rectas sean paralelas, como no formarán ningun ángulo, será $\cos.m=\cos.0=1$; por lo que la ecuacion (B) se nos convertirá en

$$1=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}},$$

que quitando el divisor, elevando al cuadrado, efectuando las operaciones, trasladando todos los términos al primer miembro y simplificando, se convierte en

$$a'^2-2aa'+a^2+b'^2-2b'b+b^2+a^2b'^2-2aa'bb'+a'^2b^2=0,$$

que podrémos poner bajo esta forma

$$(a'-a)^2+(b'-b)^2+(ab'-a'b)^2=0;$$

pero la suma de estos tres cuadrados no puede ser igual con cero, si no se verifica que cada uno de ellos sea cero en particular; luego la ecuacion anterior solo podrá quedar satisfecha, haciendo $a=a'$, $b=b'$, $ab'=a'b$.

Las dos primeras ecuaciones indican que las proyecciones de las dos rectas sobre los planos de las xu y de las zu, son paralelas entre sí; la tercera es una

---

que los términos afectos de las diferentes potencias de estas cantidades, se destruyan separada é independientemente los unos de los otros. Lo que para los términos afectos de r'^2 *y* r''^2, *dará primero*

$$\cos.^2X+\cos.^2Z+\cos.^2U=1, \quad \cos.^2X'+\cos.^2Z'+\cos.^2U'=1;$$

y despues, comparando los términos afectos de $r'r''$, *se tiene*

$$\cos.m=\cos.X\cos.X'+\cos.Z\cos.Z'+\cos.U\cos.U',$$

que es el mismo resultado de ántes y el que espresa la mencionada ecuacion (*C*) (187).

Sustituyendo en esta ecuacion, en vez de $\cos X$, $\cos.X'$ *etc. sus valores* (*cc.* 8 § 183*a*) *sacariamos para* $\cos.m$ *el valor* (*B*), *espresado por los coeficientes de las ecuaciones de las rectas.*

Por último observarémos que, siendo (§ 183*a*) *el numerador de las espresiones de los cosenos de los ángulos que una recta forma con los ejes, la coordenada correspondiente al eje de que se trata, los cosenos de dichos ángulos tendrán los mismos signos que las coordenadas; y en virtud de lo espuesto* (§176) *podrémos siempre conocer el ángulo en que debe caer la posicion de la recta, segun los signos de sus cosenos.*

Como los ángulos que la prolongacion Am de la recta AMN (*fig. D*) *forma con los ejes, serán suplementos de los que forma con ellos la misma recta AMN, tendrémos que los cosenos de estos ángulos serán iguales* (10) *á los cosenos de los otros, pero tendrán signos opuestos. De donde resulta, en general, que* cuando en alguna investigacion lleguemos á tener dos rectas, que, pasando por el mismo punto, formen con los ejes ángulos cuyos cosenos sean iguales, pero los signos opuestos, dichas rectas son la una prolongacion de la otra. *De cuya verdad se hace mucho uso en la Mecánica.*

consecuencia de las otras dos; pues resulta de su multiplicacion: de modo que todo está reducido á que se verifiquen las dos primeras.

❴ Si una de las espresadas rectas, por ejemplo la segunda, es el mismo eje de las u, cuyas ecuaciones son $X_{,}=0$, $Z_{,}=0$, se tendrá $a'=0$, $b'=0$, y representando por U el valor correspondiente de m, se tendrá

$$\cos U=\frac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}},$$

que *espresa el coseno del ángulo que una recta forma con el eje de las u.*

❴ Si dicha segunda línea fuese el eje de las z, cuyas ecuaciones son $U_{,}=0$, $X_{,}=0$, se deberá tener $a'=0$, $\frac{1}{b'}=0$, porque despejando $U_{,}$ en la ecuacion $Z_{,}=b'U$, sale $U_{,}=\frac{Z_{,}}{b'}=Z_{,}\times\frac{1}{b'}$, que no puede ser cero para cualquier valor de $Z_{,}$ á no ser $\frac{1}{b'}=0$; sustituyendo este valor en la ecuacion (B′), y llamando Z al valor que tenga m, resultará $\cos.Z=\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$, que *espresa el coseno del ángulo que una recta forma con el eje de las z.*

❴ Si dicha recta fuese el eje de las x, tendríamos que las dos ecuaciones de la segunda recta, despejando $U_{,}$ en la primera, y sustituyendo su valor en la segunda, se nos convertirán en $U_{,}=\frac{X_{,}}{a'}$, $Z_{,}=\frac{b'.X_{,}}{a'}$. Y como las ecuaciones del eje de las x, son $Z_{,}=0$, $U_{,}=0$, para que estas se verifiquen en todos los valores de $X_{,}$ deberá ser $\frac{1}{a'}=0$, $\frac{b'}{a'}=0$; por lo que llamando X al ángulo que forma la otra recta con el espresado eje de las x, la ecuacion (B″) se convertirá en $\cos.X=\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}$; que *espresa el coseno del ángulo que una recta forma con el eje de las x.*

❴ Si elevamos al cuadrado estas tres ecuaciones, y las sumamos, se tendrá

$$\cos.X^2+\cos.Z^2+\cos.U^2=1,$$

que espresa la relacion que debe haber entre los cosenos de los ángulos que una recta cualquiera debe formar con los ejes; y es la misma que obtuvimos ántes (183 a).

❴ El coseno del ángulo que forman dos rectas lo podemos determinar tambien en valores de los cosenos de los ángulos que forman estas rectas con los ejes; porque si suponemos que U', Z', X', sean los ángulos que la primera forme con los ejes de las u, z, x, se tendrá por lo que acabamos de manifestar

$$\cos.U'=\frac{1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\quad \cos.Z'=\frac{b'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}},\quad \cos.X'=\frac{a'}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}};$$

de estas tres ecuaciones y de las tres anteriores, sacarémos

$$\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{1}{\cos.U},\quad b=\cos.Z\times\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{\cos.Z}{\cos.U},$$

$$a=\cos.X\times\sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{\cos.X}{\cos.U},\ \sqrt{1+a'^2+b'^2}=\frac{1}{\cos.U'},\ b'=\frac{\cos.Z'}{\cos.U'},\ a'=\frac{\cos.X'}{\cos.U'},$$

cuyos valores sustituidos en la ecuacion (B) la reducen á

$$\cos.m=\cos.X\times\cos.X'+\cos.Z\times\cos.Z'+\cos.U\times\cos.U' \quad (C).$$

§ Si las rectas fuesen perpendiculares entre sí, se tendría $\cos.m=0$; por lo que la ecuacion $\cos.X\cos.X'+\cos.Z\cos.Z'+\cos.U\cos.U'=0$ (C'), espresa la condicion que se ha de verificar para qué dos rectas sean perpendiculares entre sí en el espacio

§ 187a *Hallar las condiciones necesarias para que dos rectas se corten en el espacio; y cuando quedan satisfechas estas condiciones, determinar su punto de interseccion.*

Sean $\left\{\begin{matrix}x=au+\alpha\\ z=bu+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de la 1.ª, y $\left\{\begin{matrix}X=a'U+\alpha'\\ Z=b'U+\mathcal{C}'\end{matrix}\right\}$ las de la 2.ª

Si se han de cortar, las coordenadas del punto de interseccion deberán satisfacer á las ecuaciones de ambas. Luego si espresamos por x', z', u', las coordenadas de dicho punto, tendrémos

$$\left\{\begin{matrix}x'=au'+\alpha\\ z'=bu'+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}\ \text{y}\ \left\{\begin{matrix}x'=a'u'+\alpha'\\ z'=b'u'+\mathcal{C}'\end{matrix}\right\}.$$

§ Estas cuatro ecuaciones siendo mas que suficientes para determinar las tres incógnitas x', z', u', conducirán á una ecuacion de condicion entre las solas cantidades a, b, α, $\mathcal{C}$, a', b', α', $\mathcal{C}'$, que determinan la posicion de las rectas.

§ En efecto, igualando los dos valores de x', y trasladando todos los términos al primer miembro, resulta $(a-a')u'+\alpha-\alpha'=0$; y haciendo lo mismo con los valores de z', sale $(b-b')u'+\mathcal{C}-\mathcal{C}'=0$; despejando u' en la ecuacion anterior, sustituyendo su valor en esta, y quitando el divisor, resulta

$$(a-a')(\mathcal{C}'-\mathcal{C})+(\alpha-\alpha')(b-b')=0;$$

ecuacion que espresa la condicion necesaria para que las dos rectas se corten; y verificada asta condicion, bastará considerar tres cualesquiera de las ecuaciones precedentes para tener los valores de x', z' y u', que serán

$$\left\{\begin{matrix}u'=\dfrac{\alpha'-\alpha}{a-a'},\quad \text{ó}\quad u'=\dfrac{\mathcal{C}'-\mathcal{C}}{b-b'},\\ x'=au'+\alpha=a\dfrac{\alpha'-\alpha}{a-a'}+\alpha=\dfrac{a\alpha'-\alpha a'}{a-a'}\\ z'=bu'+\mathcal{C}=b\dfrac{\mathcal{C}'-\mathcal{C}}{b-b'}+\mathcal{C}=\dfrac{b\mathcal{C}'-b'\mathcal{C}}{b-b'}.\end{matrix}\right.$$

§ Estos valores vienen á ser infinitos cuando $a=a'$, y $b=b'$; en cu-

yo caso la ecuacion de condicion está verificada; por lo que se puede decir, que las rectas se cortan, pero su punto de interseccion está infinitamente léjos, y por lo mismo las rectas serán paralelas.

§ La ecuacion de condicion, que acabamos de hallar, para que dos rectas se corten en el espacio, es diferente de la ecuacion $1+aa'+bb'=0$, hallada (187) para espresar que dos rectas son perpendiculares entre sí. Luego la segunda de estas dos condiciones puede quedar satisfecha independientemente de la primera; y resulta como hemos anunciado (187) que *dos rectas pueden ser perpendiculares entre sí en el espacio sin cortarse.*

§ Continuando estas consideraciones, podríamos resolver con el auxilio de estas fórmulas, todas las cuestiones de Geometría que no se refiriesen sinó á la línea recta.

El método, que acabamos de usar, para encontrar la interseccion de dos líneas rectas, puede tambien servir en general para encontrar los puntos de interseccion de dos curvas, cuyas proyecciones fuesen dadas; porque estos puntos siendo comunes á las dos curvas, sus coordenadas deberían satisfacer á un mismo tiempo á las ecuaciones de sus proyecciones. Esta consideracion dará generalmente cuatro ecuaciones entre las tres variables x', z', u'; es decir, una mas de las que se necesitan para determinarlas. Y eliminando estas variables, se obtendrá una ecuacion de condicion, que deberá quedar satisfecha para que las dos curvas se puedan encontrar; y esta ecuacion espresará las relaciones que deben existir para este objeto entre las cantidades constantes que determinan la forma de dos curvas y sus posiciones en el espacio.

Del plano.

188 Se ha visto ántes (149) que una línea está caracterizada, cuando se tiene una ecuacion que esprese la relacion que debe existir entre las abscisas y las ordenadas de cada uno de sus puntos. Lo mismo sucede con relacion á las superficies; su naturaleza queda determinada cuando se tiene una ecuacion entre las coordenadas x, z, u, de los puntos que le pertenecen. Porque tomando á arbitrio los valores de dos de estas variables, la ecuacion hará conocer el valor de la tercera, y el punto de que sean las coordenadas estará sobre la superficie propuesta, y no en otra parte.

§ 189 Si por ejemplo, se determinan los valores de x y de z que representarémos por $x=a$, $z=b$, tomando sobre los ejes de las x y de las z (fig. 58) AP$=a$, AQ$=b$, y tirando las paralelas QM′, PM′, á estos ejes, se determinará el punto M′, que será la proyeccion del punto buscado sobre el plano de las xz; la ecuncion que da despues el valor correspondiente de u, determinará la longitud de la ordenada M′M, y por consiguiente la posicion del punto M de la su-

perficie. De donde se sigue, que una ecuacion entre tres variables x, z, u, representa una superficie, del mismo modo que una ecuacion entre dos variables representa una línea; y la superficie se llama *continua* ó *discontinua* segun estén ó no sujetas todas sus partes á una misma ecuacion.

190 Esto supuesto, *busquemos la relacion que debe haber entre las coordenadas* x, z, u, para que *esta superficie sea un plano.*

El modo mas simple de concebir la generacion de una superficie plana es considerarla (I. 559 cor. 3º) como el concurso de todas las perpendiculares á una misma recta en el espacio por uno de sus puntos.

Supongamos que las ecuaciones de la recta, á que han de ser perpendiculares las otras, sean $\{X=aU+\alpha,\ Z=bU+\mathcal{C}\}$ (1), y tendrémos que si x', z', u', representan las coordenadas del punto de interseccion de esta recta con el plano, deberán satisfacer á dichas ecuaciones; lo que dará $\{x'=au'+\alpha,\ z'=bu'+\mathcal{C}\}$, que restándolas de las (1), será $\{X-x'=a(U-u'),\ Z-z'=b(U-u')\}$, que serán las ecuaciones de dicha recta.

Las de otra recta, cuyas coordenadas sean x, z, u, que pase por el mismo punto, serán $\{x-x'=a'(u-u'),\ z-z'=b'(u-u')\}$ (2), y si esta es perpendicular á la anterior, se tendrá (§ 187) $1+aa'+bb'=0$; las cantidades a' y b' son constantes para una misma perpendicular; pero variables de una perpendicular á otra. Luego si, en la última ecuacion, en vez de estas cantidades se ponen sus valores $\frac{x-x'}{u-u'}$, $\frac{z-z'}{u-u'}$, sacados de las (2), el resultado no indicará ya cuál de las perpendiculares se ha considerado, y no pertenecerá por consiguiente á ninguna de ellas en particular, sinó que espresará una relacion que les convenga á todas; luego esta relacion será la que debe existir entre las coordenadas del *plano* que las contiene á todas. Ejecutando esta sustitucion, y quitando el divisor $u-u'$, nos resulta $u-u'+a(x-x')+b(z-z')=0$; y como las cantidades a, b, que determinan la posicion de la primera recta, son absolutamente arbitrarias como tambien las x', z', u', esta ecuacion puede servir para representar un plano cualquiera.

Efectuando las operaciones, será $u-u'+ax-ax'+bz-bz'=0$, que haciendo en ella $x=0$, $z=0$, da $u=u'+ax'+bz'$, que es el valor de la ordenada AC (fig. 62) del plano en el orígen. Espresándola por c, la ecuacion anterior del plano se convierte en $u+ax+bz-c=0$ (3).

Esta ecuacien es lineal con relacion á las variables x, z, u, y contiene tres coeficientes constantes y arbitrarios a, b, c, porque es necesario en general tres condiciones para determinar la posicion de un plano. Si $c=0$, el plano pasa por el mismo orígen de las coordenadas.

La interseccion del plano con cualquiera de los planos coordenados, se llama la *traza* de dicho plano con el coordenado que se consi-

dera; por lo que si hacemos $z=0$, resultará la *traza* ó interseccion CD dél plano con el de las xu, porque esta es la propiedad comun á todos los puntos que están situados en él, y así resultarán las dos ecuaciones $z=0$, $u+ax-c=0$, que determinan esta interseccion; la primera espresa que su proyeccion sobre el plano de las xz es el mismo eje de las x; lo que debe ser así, porque esta interseccion debe estar toda en el plano de las xu. La segunda, que se puede poner bajo la forma $u=-ax+c$, es propiamente la ecuacion de la espresada interseccion CD; y la tangente trigonométrica del ángulo CDX, que forma dicha *traza* ó interseccion con el eje de las x, está representada (§ 160) por $-a$.

Haciendo igualmente $x=0$, se tendrá la *traza* ó interseccion CD' del plano con el de las zu, y sus ecuaciones serán $x=0$, $u+bz-c=0$.

La tangente trigonométrica del ángulo UD'Z que esta recta forma con el eje de las z, está representada por $-b$.

En fin, haciendo $u=0$, se tendrá la *traza* ó interseccion DD' del plano con el de las xz, que tendrá por ecuaciones $u=0$, $ax+bz-c=0$; y la tangente trigonométrica del ángulo D'DX que forma con el eje de las x, está representada por $-\frac{a}{b}$.

Con el fin de hacer los cálculos simétricos, pondrémos la ecuacion (3) del plano bajo esta forma $Ax+Bz+Cu+D=0$ (4), que no es mas general que la precedente, y con la cual coincide cuando está dividida por C; esta es la ecuacion completa del primer grado entre tres variables. Si pasa por el orígen, se tiene

$$Ax+Bz+Cu=0 \text{ (*)} \quad (5).$$

(*) Para sacar la ecuacion del plano, podemos seguir otro rumbo, que es útil conocer, por cuanto es análogo al método que se debe seguir para espresar analíticamente la generacion de las superficies curvas; y se reduce á *considerar la superficie plana ó el plano como el lugar geométrico de las diversas posiciones que toma una recta móvil sujeta á resbalar sobre una recta fija, permaneciendo paralela á una direccion dada.* La recta fija se llama *directriz*, y la móvil *generatriz.*

Sean $x=au+\alpha$ (1), $z=bu+6$ (2) las ecuaciones de la recta fija, que se llama *la directriz*; representemos la recta á la cual *la generatriz móvil* debe permanecer constantemente paralela $X_1=a'U_1$, $Z_1=b'U_1$, suponiendo que pase por el orígen; pues si no pasase, le tiraríamos por el orígen una paralela, á la cual podrémos suponer que sea paralela la generatriz. Llamando X, Z, U las coordenadas de la generatriz, sus ecuaciones tendrán (185) la forma

$$X=a'U+\alpha' \quad (3), \qquad Z=b'U+6' \quad (4);$$

y aquí a', b' serán constantes dadas é invariables, pues espresan (183) las tangentes trigonométricas de los ángulos que forman las proyecciones de la recta con

§ 191 Nos podemos asegurar *á posteriori* de que esta ecuacion pertenece á una superficie plana, demostrando que *una recta tirada por dos puntos cualesquiera tomados sobre esta superficie coincide con ella en toda su estension.*

§ En efecto, las ecuaciones de esta recta serán $\begin{cases} x=au+\alpha \\ z=bu+\mathcal{C} \end{cases}$

y suponiendo que x', z', u', sean las coordenadas de uno de los puntos que están situados en ella, se tendrá $\{ x'=au'+\alpha,\ z'=bu'+\mathcal{C} \}$. Pero si este punto se ha de hallar tambien en la superficie del plano,

---

los ejes de las x y de las u; pero las α' y $\mathcal{C}'$ variarán con cada posicion de la generatriz, aunque no de una manera de todo punto arbitraria; porque es necesario aun espresar que la recta móvil *debe tener*, en todas sus posiciones, *un punto comun con la directriz fija*; es decir, que las ecuaciones (1), (2), (3), (4) han de ser verificadas por un mismo sistema de valores de x, z, u; y las ecuaciones (3) y (4) se deberán verificar, sustituyendo x, z, u en vez de X_1, Z_1, y U_1; por lo que dichas ecuaciones (3) y (4) se nos convertirán en

$$x=a'u+\alpha' \ (5) \quad \text{y} \quad z=b'u+\mathcal{C}' \ (6).$$

Si restamos la (1) de la (5), se tiene

$$(a'-a)u=\alpha'-\alpha; \quad \text{que dá} \quad u=\frac{\alpha'-\alpha}{a'-a}.$$

Restando la (2) de la (6), se tiene

$$(b'-b)u=\mathcal{C}'-\mathcal{C}, \quad \text{que dá} \quad u=\frac{\mathcal{C}'-\mathcal{C}}{b'-b}.$$

Igualando estos dos valores de u, resulta

$$\frac{\alpha'-\alpha}{a'-a}=\frac{\mathcal{C}'-\mathcal{C}}{b'-b} \ (7);$$

que espresa la condicion que se ha de verificar para que las ecuaciones (3) y (4) representen completamente la generatriz.

Esto supuesto, atribuyendo sucesivamente á α' diversos valores arbitrarios $\alpha'=1, 2, 7, 15.....$, y sacando de la (ec. 7) los valores correspondientes de $\mathcal{C}'$, para sustituir los unos y los otros en (3) y (4), se obtendrán *sucesivamente* las ecuaciones determinadas de tal ó tal posicion particular de la generatriz. Pero, si en lugar de fijar así los valores de α' y de $\mathcal{C}'$, se eliminan estas dos constantes entre las (ecs. 3, 4 y 7), la *ecuacion final* en X, Z, U *convendrá entónces á todas las posiciones* de la generatriz; y resultará la ecuacion

$$\frac{X-a'U-\alpha}{a'-a}=\frac{Z-b'U-\mathcal{C}}{b'-b};$$

que quitando los divisores, se convierte en

$$X(b'-b)+Z(a'-a)+U(a'b-ab')+\alpha(b-b')+\mathcal{C}(a-a')=0;$$

y haciendo $b'-b=A$, $a'-a=B$, $a'b-ab'=C$, y $\alpha(b-b')+\mathcal{C}(a-a')=D$, se obtendrá $AX+BZ+CU+D=0$; que es la ecuacion que representa *la superficie plana* ó el *plano*.

cuya ecuacion es $Ax+Bz+Cu+D=0$, dichas coordenadas deberán tambien satisfácer á esta ecuacion, y se verificará que

$$Ax'+Bz'+Cu'+D=0;$$

y poniendo en vez de x', z', sus valores $au'+\alpha$, $bu'+\mathcal{C}$, se tendrá

$$(Aa+Bb+C)u'+A\alpha+B\mathcal{C}+D=0,$$

ecuacion que espresa la condicion necesaria para que la recta tenga un punto comun con la superficie de que se trata.

§ Sean x'', z'', u'', las coordenadas de otro punto comun á la superficie y á la línea recta de que hablamos, y por esta condicion resultará $(Aa+Bb+C)u''+A\alpha+B\mathcal{C}+D=0$.

Estas dos ecuaciones no se pueden verificar á un tiempo, á ménos que no se tenga separadamente $Aa+Bb+C=0$, $A\alpha+B\mathcal{C}+D=0$, porque de otro modo no se podría destruir con la segunda espresion, el producto de la primera multiplicado por u' y por u''; por lo cual resulta que estas dos ecuaciones son las que espresan las condiciones necesarias parà que la recta tenga dos puntos comunes con la superficie.

§ Pero, si los valores de los coeficientes a, α, b, $\mathcal{C}$, son tales que satisfacen á estas dos condiciones, todos los puntos de la recta serán tambien comunes con los de la superficie. Porque sean x''', z''', u''', las coordenadas de uno cualquiera de estos puntos; para que se halle en la superficie del plano, se deberá verificar

$$(Aa+Bb+C)u'''+A\alpha+B\mathcal{C}+D=0;$$

pero esta ecuacion se verifica por sí misma en virtud de las ecuaciones precedentes, luego el punto de que se trata es efectivamenre comun á la superficie y á la recta.

§ Siendo general este resultado, se deduce que toda recta que tenga dos puntos en la superficie, cuya ecuacion es $Ax+Bz+Cu+D=0$, coincidirá con dicha superficie en toda su estension, y por consiguiente (I. 339) esta ecuacion es la de una superficie plana ó la de un plano.

§ 192 Nos propondrémos ahora resolver con relacion al plano álgunàs cuestiones análogas á las que nos suministró la ecuacion de la línea recta, y será la primera

§ *Hallar la ecuacion de un plano que pase por tres puntos dados.*

§ Sean x', z', u', x'', z'', u'', x''', z''', u''', las coordenadas de estos puntos: la ecuacion del plano que se busca tendrá esta forma $Ax+Bz+Cu+D=0$, ó

dividiendo por D será $\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}z+\frac{C}{D}u+1=0$;

y pues que estos puntos se deben hallar en el plano, se deberá verificar que

$$\frac{A}{D}x'+\frac{B}{D}z'+\frac{C}{D}u'+1=0,\quad \frac{A}{D}x''+\frac{B}{D}z''+\frac{C}{D}u''+1=0,$$

$$\frac{A}{D}x'''+\frac{B}{D}z'''+\frac{C}{D}u'''+1=0.$$

Estas tres ecuaciones, que son del primer grado con relacion á las coordenadas de los puntos propuestos, nos podrán servir para determinar los tres coeficientes

$$\frac{A}{D}, \quad \frac{B}{D}, \quad \frac{C}{D};$$

y llamando á sus valores A', B', C', la ecuacion del plano buscado será

$$A'x+B'z+C'u+1=0.$$

193. *Hallar la interseccion de dos planos cuyas ecuaciones se conocen.*

Sean $\left.\begin{matrix} Ax+Bz+Cu+D=0 \\ A'X+B'Z+C'U+D'=0 \end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de estos planos; y pues que en la comun seccion han de ser unas mismas las coordenadas, deberémos poner en la segunda en vez de X, Z, U, sus iguales x, z, u, y se tendrán las dos ecuaciones $\left.\begin{matrix} Ax+Bz+Cu+D=0 \\ A'x+B'z+C'u+D'=0 \end{matrix}\right\}$.

Si multiplicamos la primera por C', la segunda por C, y restamos el primer producto del segundo, tendrémos eliminada la u, y nos resultará

$$(A'C-C'A)x+(B'C-C'B)z+D'C-C'D=0,$$

que pertenecerá á una línea recta que se halle en el plano de las xz; y como la relacion que espresa se verifica solamente entre las coordenadas x, z, de los puntos situados en la interseccion comun de los dos planos, esta línea será la proyeccion de la interseccion sobre el plano de las xz.

Se probará de la misma manera, que si se elimina z ó x por medio de las ecuaciones de los planos, el resultado pertenecerá á la proyeccion de la interseccion sobre el plano de las xu ó de las zu.

194. *Hallar las condiciones necesarias para que una recta sea perpendicular á un plano, y determinar la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano.*

Sean $\left.\begin{matrix} x=au+\alpha,\ z=bu+\beta \\ AX+BZ+CU+D=0 \end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de la recta; la del plano;

para que se verifique la condicion que exige la cuestion, la proyeccion de la recta sobre cada uno de los planos coordenados deberá ser perpendicular á la interseccion del plano con cada uno de los planos coordenados (*); pero haciendo $Z=0$ en le ecuacion que lo representa, se obtiene $AX+CU+D=0$, de donde

$$X=-\frac{C}{A}U-\frac{D}{A},$$

(*) *En efecto, pues que la recta ha de ser perpendicular al plano, todo plano que pase abrazándola le será perpendicular* [I. 558]; *luego el plano proyectante será perpendicular al plano propuesto, y tambien al plano sobre que se forma la proyeccion; luego la comun interseccion de estos dos planos será perpendicular* [I. 560] *al plano proyectante; y como si una recta es perpendicular á un plano, lo es tambien á toda recta que en este plano pase por su pie, resulta que dicha comun interseccion será perpendicular á la interseccion del plano proyectante con el plano sobre que se proyecta, ó lo que es lo mismo, será perpendicular á la proyeccion de la línea primitiva.*

que es la ecuacion de la interseccion del plano con el de las xu; y haciendo $X=0$,

se tendrá $BZ+CU+D=0$, que da $Z=-\frac{C}{B}\times U-\frac{D}{B}$,

que es la ecuacion de la interseccion con el plano de las zu.

Para que estas rectas sean perpendiculares á las proyecciones de la primitiva sobre los planos de las xu, y zu, es necesario que se tenga (§ 168)

$$a=-\frac{1}{\frac{C}{A}}=\frac{A}{C}, \quad \text{y} \quad b=-\frac{1}{\frac{C}{B}}=\frac{B}{C}, \quad \text{que dan} \quad A=aC \text{ y } B=bC,$$

que son las ecuaciones que espresan las condiciones pedidas.

Si la perpendicular pasa por un punto cuyas coordenadas sean x', z', u', sus ecuaciones tomarán esta forma (§ 184) $\begin{cases} x-x'=a(u-u') \\ z-z'=b(u-u') \end{cases}$;

y para hallar el punto en que encuentra al plano, será necesario sustituir x, z, u, en vez de X, Z, U, en la ecuacion del plano, y se tendrá $Ax+Bz+Cu+D=0$, que para mayor comodidad pondrémos bajo la forma siguiente

$$A(x-x')+B(z-z')+C(u-u')+D'=0,$$

añadiendo y quitando la cantidad $Ax'+Bz'+Cu'$, y haciendo para mayor sencillez $D'=D+Ax'+Bz'+Cu'$.

Sustituyendo ahora en vez de $x-x'$ y $z-z'$ sus valores, se tendrá

$$Aa(u-u')+Bb(u-u')+C(u-u')+D'=0,$$

que dá $u-u'=-\frac{D'}{Aa+Bb+C}$,

cuyo valor, sustituido en las ecuaciones de la recta, darán

$$x-x'=-\frac{aD'}{Aa+Bb+C}, \quad z-z'=-\frac{bD'}{Aa+Bb+C};$$

ó sustituyendo en vez de a y b sus valores $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, que suministra la condicion de ser perpendicular, se tendrá

$$u-u'=-\frac{CD'}{A^2+B^2+C^2}, \quad x-x'=-\frac{AD'}{A^2+B^2+C^2}, \quad z-z'=-\frac{BD'}{A^2+B^2+C^2};$$

ahora, siendo x, z, u, las coordenadas del punto de interseccion, su distancia al punto cuyas coordenadas son x', z', u', será (§ 180)

$$\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2+(u-u')^2},$$

y sustituyendo en vez de $x-x'$, $z-z'$, $u-u'$, sus valores, y llamando P á dicha distancia del punto cuyas coordenadas son x', z', u', al plano, se tendrá $P=\frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

ó poniendo en vez de D' su valor, será $P=\frac{D+Ax'+Bz'+Cu'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

§ 195 *Hallar el ángulo que forman dos planos entre sí.*

Sean $\left\{\begin{matrix} Ax+Bz+Cu+D=0 \\ A'X+B'Z+C'U+D'=0 \end{matrix}\right\}$ las ecuaciones de estos planos.

Si, desde un punto cualquiera de uno de ellos, se baja una perpendicular al otro, y desde el pie de esta una perpendicular al primero, el ángulo que formen estas perpendiculares será el que formen los planos (*); luego para encontrar el ángulo deseado, deberémos buscar el ángulo de estas rectas; y así, si suponemos que $\left\{\begin{matrix} x_{,}=au_{,}+\alpha \\ z_{,}=bu_{,}+\mathcal{C} \end{matrix}\right\}$ sean las ecuaciones de la 1.ª y $\left\{\begin{matrix} X_{,}=a'U_{,}+\alpha' \\ Z_{,}=b'U_{,}+\mathcal{C}' \end{matrix}\right\}$ las de la 2.ª; para que sean perpendiculares á los planos, se deberá verificar (194) que

$$A=aC, \quad B=bC, \quad A'=a'C', \quad B'=b'C',$$

y señalando con m el ángulo buscado se tendrá (§ 186)

$$\cos.m=\frac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\,\sqrt{1+a'^2+b'^2}},$$

ó poniendo en vez de a, a', b, b', los valores que se deducen de las ecuaciones anteriores, se tendrá $\cos.m=\dfrac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$.

§ Esta espresion es independiente de D y de D', porque estas cantidades que espresan las coordenadas del orígen, no influyen en la inclinacion de los planos.

(*) *Como es muy posible que algunos principiantes no perciban la verdad de esta proposicion, la demostrarémos por medio de la fig.* 63.

En efecto, si desde M *se baja la* MP *perpendicular al plano* XZ, *y desde* P *se tira la* PQ *perpendicular al* ST, *el ángulo* MPQ *será igual al que forman los planos entre sí; porque si tiramos la* PR *perpendicular á la comun interseccion de los dos planos, y se une* M *con* R, *la* MR *será perpendicular tambien* [I. 547] *á dicha interseccion, y el ángulo de los planos estará representado por el* MRP; *ahora, dos rectas del plano* MRP *son perpendiculares á la comun interseccion, luego dicha interseccion es perpendicular al plano que pase por* MRP; *luego el plano* ST *en que se halla la comun interseccion será perpendicular al* MRP, *y por lo mismo este abrazará* (I. 559) *á la* PQ, *que es perpendicular á la* MR, *y el ángulo* QMP *será complemento de* MPQ; *y como el triángulo* MPR *es tambien rectángulo en* P, *el ángulo* RMP *será complemento del* PRM; *luego los ángulos* PRM, MPQ, *que tienen un mismo complemento por defecto, serán iguales; y como el ángulo* PRM *es el que forman los planos, se deduce la proposicion.*

De aquí resulta que si uno de los planos, por ejemplo, el *XZ, fuese uno de los coordenados, la* MP *sería paralela al eje de las* u; *y el ángulo* MPQ *sería el mismo que formaria la* QP *con la* XU (§ 186); *y como se verificaría lo mismo respecto de cada uno de los otros planos coordenados, resulta que* el ángulo formado por un plano cualquiera y otro de los coordenados es el mismo que forma una perpendicular al plano, que se considera, con el eje de la otra coordenada.

§ Si los dos planos son perpendiculares entre sí, se deberá tener

$$\cos.m=0\,,\quad \text{lo que dará}\quad AA'+BB'+CC'=0\,,$$

cuya ecuacion espresa la condicion que se ha de verificar para que dos planos sean perpendiculares.

§ Si uno de ellos es el mismo plano de las xz, cuya ecuacion es

$$U=0,\quad \text{se tendrá}\quad A'=0,\ B'=0,\ D'=0,$$

para que la segunda ecuacion dada se reduzca á $U=0$; y llamando U' el valor correspondiente de m, resultará $\cos.U'=\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

que *espresa el coseno del ángulo que un plano forma con el de las* xz; del mismo modo, llamando U'', U''', á los ángulos que el plano forma con los de las xu y *de las* zu, se hallará

$$\cos.U''=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos.U'''=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

si cuadramos estos cosenos y sumamos los resultados, se tendrá

$$\cos.U'^2+\cos.U''^2+\cos U'''^2=1\ (*).$$

Si llamamos $'U$, $''U$, $'''U$, los ángulos que el segundo plano forma con los planos coordenados, tendrémos tambien $\cos.'U=\dfrac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$,

$$\cos.''U=\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\quad \cos.'''U=\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};$$

y por el mismo método del (§ 187) podríamos trasformar el valor anterior de $\cos.m$, en $\cos.m=\cos.U'\cos.'U+\cos.U''\cos.''U+\cos.U'''\cos.'''U$.

§ 196 *Hallar el ángulo que forma una recta con un plano.*

Sean $\left\{\begin{array}{l} x=au+\alpha,\ z=bu+\mathcal{C} \\ AX+BZ+CU+D=0 \end{array}\right\}$ las ecuaciones de la recta, la del plano.

§ Y observando que el ángulo que forma una recta con un plano, es el mismo que el que forma esta recta con su proyeccion sobre este plano, resulta que si se tira por un punto cualquiera de la recta propuesta una perpendicular al plano, el ángulo que forme dicha recta con la perpendicular será el complemento del ángulo buscado. Luego si $x_,=a'u_,+\alpha'$, $z_,=b'u_,+\mathcal{C}'$ son las ecuaciones de la perpendicular, se tendrá (§ 194) $A=a'C$, $B=b'C$, y el ángulo que forme con la recta propuesta tendrá (186) por coseno $\dfrac{1+aa'+bb'}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+a'^2+b'^2}}$; y representándo por m el ángulo buscado, este coseno será su seno; y poniendo en vez de a' y b' sus valores $\dfrac{'A}{C}$, $\dfrac{B}{C}$, se tendrá $\text{sen}.m=\dfrac{Aa+Bb+C}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$;

(*) *Esta ecuacion es la misma que la del* (§ 187); *y en efecto debe ser así, por cuanto segun lo espuesto en la nota anterior, los ángulos* U', U'', U''', *son los mismos que los que formaria con los tres ejes de las coordenadas una recta perpendicular al plano.*

de donde se deduce, que para que la recta sea paralela sl plano, se deberá tener $Ax+Bb+C=0$, para que sea céro su seno.

{ 196*a* *Por un punto dado, hacer pasar un plano paralelo á un plano dado.*

Supongamos que $Ax+Bz+Cu+D=0$ sea la ecuacion del plano dado; y $A'X+B'Z+C'U+D'=0$ la del plano que le ha de ser paralelo.

Como las intersecciones de dos planos paralelos cortados por otro plano son (I. 551) líneas paralelas, resulta que las trazas de estos dos planos sobre el plano de las xu deben ser paralelas, así como tambien sus trazas sobre el plano de las zu. Las ecuaciones de éstas trazas son $Ax+Cu+D=0$, $A'X+C'U+D'=0$ sobre el plano de las xu; $Bz+Cu+D=0$, $B'Z+C'U+D'=0$ sobre el plano de las zu.

Las dos primeras, las podrémos poner bajo esta forma $x=-\frac{C}{A}u-\frac{D}{A}$, $X=-\frac{C'}{A'}U-\frac{D'}{A'}$; y para que las líneas que representan sean paralelas, deberémos tener (185) $\frac{C}{A}=\frac{C'}{A'}$; por cuya razon, para que las otras dos sean paralelas, se deberá tener $\frac{C}{B}=\frac{C'}{B'}$; de donde resulta $\frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}$.

Cuando los planos encuentran al eje de las u, estas condiciones bastan para que sean paralelas: porque entónces las trazas del primer plano se cortan sobre el eje de las u, y son paralelas á las del segundo plano, las cuales se cortan tambien sobre este eje; pues que cuando dos ángulos tienen sus lados paralelos, los planos en que dichos lados se hallan, son tambien (I. 554) paralelos.

Pero, si los dos planos son paralelos al eje de las u; lo que viene á ser suponer (195) $C=0$ y $C'=0$, la sola condicion que se ha de verificar, es que las trazas sobre el plano de las xz sean paralelas, lo que exige que

$$\frac{A'}{B'}=\frac{A}{B}, \quad \text{ó} \quad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}.$$

Asi, en todos los casos, *para que dos planos sean paralelos, es necesario y basta que los coeficientes de las variables* x, z, u *en las ecuaciones de estos planos sean proporcionales.*

Supongamos satisfechas estas condiciones, y hagamos $\frac{A'}{A}=k$; lo que dará

$$A'=Ak, \quad B'=Bk, \quad C'=Ck;$$

y poniendo estos valores en la ecuacion del segundo plano, dividiendo por k, y haciendo $\frac{D'}{k}=D''$, resulta $AX+BZ+CU+D''=0$.

Esta ecuacion representa todos los planos paralelos al de la ecuacion primera, y no difiere de él sinó por el solo término constante D''.

Hasta aquí D'' ha permanecido indeterminada; pero, si se quiere que el plano pasase por un punto dado, cuyas coordenadas fuesen x', z', u', se deberá verificar que $Ax'+Bz'+Cu'+D''=0$; y restando esta ecuacion de la anterior, se tiene para el plano buscado la ecuacion $A(X-x')+B(Z-z')+C(U-u')=0$.

Si el punto dado es el orígen, es necesario hacer $x'=0$, $z'=0$, $u'=0$, y se tiene para el plano paralelo $AX+BZ+CU=0$.

196 b *Hacer pasar un plano por un punto dado, y por una recta dada.*

Sean x', z', u', las coordenadas del punto dado; $x=au+\alpha$, $z=bu+\mathcal{C}$ (1) las ecuaciones de la recta dada; y sea $AX+BZ+CU+D=0$ (2) la ecuacion del plano buscado.

Por deber pasar el plano por el punto dado, x', z', u', deberán satisfacer á la ecuacion anterior, y será $Ax'+Bz'+Cu'+D=0$ (3).

La condicion de que ha de contener á la recta dada, exige, que poniendo en la ecuacion del plano los valores de x y de z, sacados de las ecuaciones de esta recta, se verifique la ecuacion resultante, cualquiera que sea la coordenada u. Pero sustituyendo dichos valores, se tiene $(Aa+Bb+C)u+A\alpha+B\mathcal{C}+D=0$; y para que esta ecuacion se verifique sin ninguna determinacion particular de u, es necesario suponer $Aa+Bb+C=0$ (4), $A\alpha+B\mathcal{C}+D=0$ (5).

Y todas las condiciones del problema están espresadas por las (ecs. 3, 4 y 5).

Eliminando D entre las (ecs. 3 y 5), resulta

$$A(x'-\alpha)+B(z'-\mathcal{C})+Cu'=0.$$

Despejando A y B en esta ecuacion combinada con la (4), resulta

$$A=-\frac{(z'-bu'-\mathcal{C})C}{b(x'-\alpha)-a(z'-\mathcal{C})},\quad B=-\frac{(x'-au'-\alpha)C}{b(x'-\alpha)-a(z'-\mathcal{C})}.$$

Pero, si de la (ec. 2) se resta la (3), se obtiene

$$A(X-x')+B(Z-z')+C(U-u')=0;$$

y sustituyendo en ella los valores de A y B, y hechas todas las operaciones, tendrémos

$$(z'-bu'-\mathcal{C})(X-x')-(x'-au'-\alpha)(Z-z')+(b(x'-\alpha)-a(z'-\mathcal{C}))(U-u')=0;$$

que es la ecuacion del plano buscado.

196 c *Dadas dos rectas, tirar un plano que pase por la primera, y que sea paralelo á la segunda.*

Sean $\left\{\begin{matrix}x=au+\alpha\\z=bu+\mathcal{C}\end{matrix}\right\}$ las de la 1.ª; y $\left\{\begin{matrix}X=a'U+\alpha'\\Z=b'U+\mathcal{C}'\end{matrix}\right\}$ las de la 2.ª,

y sea $AX_1+BZ_1+CU_1+D=0$ la ecuacion del plano buscado.

Para que el plano sea paralelo á la segunda recta, es necesario que trasportando el plano, paralelamente á sí mismo hasta que pase por el orígen, y trasportando la recta paralelamente á ella misma hasta que pase tambien por el orígen, resulte que la recta se halle totalmente comprendida en el plano.

Entónces las ecuaciones son $\left\{\begin{matrix}X=a'U\\Z=b'U\end{matrix}\right\}$ (1) para dicha segunda recta (§ 182); y $AX+BZ+CU=0$ (2) para el plano (190), en atencion á que ya la recta, estando en el plano, tendrán las mismas coordenadas. Y poniendo los valores (1) en la (ec. 2) tendrémos $A.a'U+B.b'U+CU=0$ (3); que dividiendo por U, se tendrá $Aa'+Bb'+C=0$ (4); y esta es la ecuacion que espresa la condicion del paralelismo.

Para que el plano contenga á dicha primera recta, hemos visto (196 b ecuaciones 4 y 5) que se debe tener

$$Aa+Bb+C=0\ (5),\quad A\alpha+B\mathcal{C}+D=0\ (6).$$

La (ec. 5), que es semejante á la (ec. 4), espresa que el plano es paralelo á la primera recta. La (ec. 6) espresa que el plano pasa por el punto en que esta rec-

ta atraviesa al plano de las xz, porque para este punto se tiene $u=0$, $x=\alpha$, $z=\mathfrak{C}$.

Despejando B y C por medio de las (ecs. 4 y 5), resulta

$$B=-\frac{A(a'-a)}{b'-b}, \quad C=-\frac{A(ab'-a'b)}{b'-b}.$$

Pero, restando la (ec. 6) de la del plano, se tendrá

$$A(X_{,}-\alpha)+B(Z_{,}-\mathfrak{C})+CU_{,}=0;$$

y sustituyendo en vez de B y C los valores que acabamos de hallar, resultará

$$(b'-b)(X_{,}-\alpha)-(a'-a)(Z_{,}-\mathfrak{C})-(ab'-a'b)U_{,}=0;$$

que es la ecuacion del plano que cumple con todas las condiciones de la cuestion.

§ 196 d *Encontrar la interseccion de una recta y de un plano, cuyas ecuaciones se conocen.*

Supongamos que se tengan las ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x=au+\alpha \\ z=bu+\mathfrak{C} \end{matrix}\right\}$ para la recta,

y $AX+BZ+CU+D=0$ para el plano.

En la interseccion comun del plano y la recta, las coordenadas del plano serán las mismas que la de la recta; por lo que la ecuacion del plano en dicha interseccion será $Ax+Bz+Cu+D=0$.

Si eliminamos x y z por medio de esta ecuacion y las de la recta, se tiene

$$(Aa+Bb+C)u+A\alpha+B\mathfrak{C}+D=0;$$

que da $u=-\frac{A\alpha+B\mathfrak{C}+D}{Aa+Bb+C}$; y sustituyendo este valor en los de x y z, se tendrá

$$x=\alpha-\frac{a(A\alpha+B\mathfrak{C}+D)}{Aa+Bb+C}, \quad z=\mathfrak{C}-\frac{b(A\alpha+B\mathfrak{C}+D)}{Aa+Bb+C};$$

que espresan las tres coordenadas del punto de interseccion.

Si se tiene $Aa+Bb+C=0$, estos valores son infinitos: entónces la recta es paralela al plano y no le encuentra jamas.

Si se tiene al mismo tiempo $A\alpha+B\mathfrak{C}+D=0$, estos valores vienen á ser indeterminados, lo cual debe suceder así, porque entónces toda la recta se halla en el plano.

Estos preliminares bastan para resolver todas las cuestiones de Geometría relativas á la línea recta y al plano. }

De la trasformacion de las coordenadas.

197 Hemos dicho (138) que la eleccion de los ejes y su posicion es de todo punto arbitraria; y como entre las diversas posiciones que pueden tener, hay unas que dan los resultados con mas sencillez que otras, vamos á manifestar cómo se puede pasar de un sistema de coordenadas á otro, ya sea sobre un plano, ya sea en el espacio. Principiarémos por la trasformacion de las coordenadas sobre un plano, y espondrémos este punto por el sencillo método con que mi adorado Catedrático D. Antonio Varas lo esplicó á sus discípulos en el año de 1808. Este Geómetra, que se halla adornado de aquel talento particular que

se requiere para la enseñanza, esplicó la leccion relativa á este punto en los términos siguientes.

En la trasformacion de las coordenadas, que es el punto que va á llamar hoy nuestra atencion, pueden ocurrir tres casos: 1º que solo se intente mudar el orígen, quedando una misma la direccion de los ejes, esto es, siendo los nuevos ejes paralelos á los antiguos; 2º que permaneciendo uno mismo el orígen, varíe la posicion de los ejes; y 3º que varíe el orígen y la direccion de los ejes.

Para lo primero, supongamos que A (fig. 64) sea el orígen de las coordenadas, y AX, AZ, los ejes; si dentro del mismo ángulo ZAX tomamos ó se nos dá el punto A′, y suponemos que los nuevos ejes sean A′X′, A′Z′, resultará que pues A′ se nos da ó le elegimos, nos serán conocidas las distancias A′O, A′B, y llamándolas a y b se tendrá $A'O=AB=a$, $A'B=AO=b$.

Ahora, si concebimos un punto M en el mismo plano, sus coordenadas con relacion á los antiguos ejes serán AP y MP, y con relacion á los nuevos A′P′, MP′; y lo que se nos propone es hallar el valor de las primitivas coordenadas en valores de las nuevas; y así, llamando x, z, á las primitivas, y x', z', á las nuevas, se tendrá

$$x=AP=AB+BP=AB+A'P'=a+x',$$
$$z=MP=MP'+P'P=MP'+A'B=z'+b;$$

luego tenemos que $x=x'+a$, $z=z'+b$ (e)

son las fórmulas para pasar, en este caso, *de las coordenadas* x, z *á las* x', z'. Así, si tenemos una ecuacion entre las x, z, y la queremos referir á las coordenadas x', z' no habrá mas que sustituir en vez de x y z, los valores que acabamos de hallar.

Para que estas ecuaciones convengan á los puntos situados en el ángulo $Z'A'x'$, es necesario suponer la x' negativa, porque para uno cualquiera de estos puntos tal como m, se tendrá $Ap=AB-pB=AB-p'A'$, y poniendo en vez de estas líneas sus valores, será $x=a-x'$.
Si el punto fuese m', se tendría $pm'=p'p-p'm'=A'B-p'm'$,
ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, será $z=b-z'$.

Hasta ahora hemos supuesto que el nuevo orígen se hallaba en el ángulo ZAX, que es el de las coordenadas positivas; si se hallase en el XAz, que es el de las abscisas positivas y ordenadas negativas, sus coordenadas serían a y $-b$; si se hallase en el Z Ax serían $-a$ y b; y si en el xAz, serían $-a$ y $-b$.

Pero, como sobre este punto conviene radicarse bien, lo demostrarémos, suponiendo que el nuevo orígen se halle en A″, y que los ejes sean A″Z″, A″X″; y tendrémos que, para un punto cualquiera tal como M, las nuevas coordenadas serán A″P″, y MP″, las antiguas AP y PM, y se tendrá

$$\begin{cases} AP=oP''=A''P''-A''o=A''P''-Ab, \\ MP=MP''-P''P=MP''-Ao=MP''-bA'', \end{cases}$$

que haciendo $Ab=a$, $bA''=b$, y señalando con x, z, las primeras

coordenadas, y con las mismas letras acentuadas las nuevas, se tendrá

$$x=x'-a\,;\quad z=z'-b.$$

§ Por el conocimiento del orígen primitivo y del nuevo, hemos determinado las ecuaciones que nos han de servir para pasar de un sistema á otro; pero tambien podemos proceder en un órden inverso, y *determinar la posicion de uno cualquiera de los sistemas con relacion al otro*. Para conseguirlo, hagamos $x'=0$ en la ecuacion $x=x'+a$, que es la primera de las (e); y tendrémos $x=a$, ecuacion que nos dice, que el orígen dista del eje de las z una magnitud espresada por a; luego si en el eje AX tomamos $AB=a$, y se tira por el punto B la BZ' paralela con AZ, el orígen se hallará en esta recta; y si hacemos $z'=0$ en la ecuacion $z=b+z'$, resultará $z=b$; que nos dice, que el nuevo orígen dista del eje de las x una magnitud espresada por b; luego si en AZ tomamos una magnitud $AO=b$, y por O se tira la OX' paralela con la AX, el nuevo orígen se hallará en esta línea; y como ántes se debía encontrar en la BZ', se hallará en el punto de interseccion A' de estas dos líneas. Si, al contrario, supusiéramos que $x=0$, resultaría que $x'=-a$, lo que nos manifiesta, que suponiendo ahora que el orígen conocido séa A', resultará que tomando en la $A'X'$ una magnitud $A'O$, hacia la izquierda de A', igual con a, y tirando por O la OZ paralela con $A'Z'$, el orígen que buscamos se hallará en esta línea; y haciendo $z=0$, la ecuacion $z=z'+b$, dará $z'=-b$; por lo que si tomamos en la $A'Z'$ por la parte inferior al eje $A'X'$ una magnitud $A'B=b$, y se tira la BX paralela con OX', el nuevo orígen se hallará en esta línea; y como por lo dicho ántes se debía encontrar igualmente en la OZ, será el punto de interseccion A de estas dos rectas, que serán los otros ejes. }

198 Pasémos ya al 2º caso, en que *se trata de mudar la direccion de los ejes, permaneciendo uno mismo el orígen*. Supongamos primero que los ejes dados sean rectangulares, y estén representados por AX, AZ, (fig. 65), y que se quiera pasar á otro sistema en que los ejes formen un ángulo cualquiera tal como el $Z'AX'$; si tomamos un punto cualquiera tal como M y bajamos MP perpendicular á AX, y desde M la MQ paralela con AZ', serán las coordenadas dadas AP, MP, que señalarémos con x, z, y las que indagamos AQ, MQ, que señalarémos con x', z', y tirando desde Q la Qn paralela con AX, bajando la Qp perpendicular á AX, y llamando α al ángulo XAX', $\mathcal{C}$ ál $Z'AX$, el triángulo rectángulo AQp dará (I. § 649)

$$Ap=AQ\times\cos.QAp=x'\cos.\alpha\,,\quad Qp=Pn=AQ\times\text{sen}.QAp=x'\text{sen}.\alpha\,,$$

y el MQn dará

$$Qn=pP=QM\cos.MQn=z'\cos.Z'AX=z'\cos.\mathcal{C}\,,\quad Mn=MQ\text{sen}.\mathcal{C}=z'\text{sen}.\mathcal{C}\,;$$

y como $x=AP=Ap+pP$, y $z=MP=Mn+nP$, sustituyendo en estas ecuaciones los valores anteriores, resultará

$$x=x'\cos.\alpha+z'\cos.\mathcal{C}\,,\quad \text{y}\quad z=z'\text{sen}.\mathcal{C}+x'\text{sen}.\alpha\ (\text{f}).$$

ecuaciones que nos servirán para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares x, z, *á otro de coordenadas oblicuas* x′, z′, en que el ángulo formado por el eje de las x' con el de las x es α, y el que forma el eje de las z' con el mismo eje de las x es $\mathcal{C}$.

199 Supongamos ya que *no solo varíe la direccion de los ejes*, *sinó tambien que sea diferente el orígen*. Así, si suponemos que de los ejes rectangulares AX, AZ (fig. 66) queramos pasar á otros cualesquiera tales como A′X′, A′Z′, tendrémos que, para uno cualquiera de los puntos tal como M, las antiguas coordenadas serán AP, MP, y las nuevas A′Q, MQ; y bajando desde A′ y Q las A′B y QS, perpendiculares á la AX, y desde A′ la A′R paralela con la misma AX, tendrémos en primer lugar

$$x=AP=AB+BS+SP, \quad z=MP=PR+Rn+nM.$$

Ahora, como el nuevo orígen A′ se nos da, conocerémos sus coordenadas AB y A′B=PR, con relacion al antiguo, y por lo mismo las señalarémos con a y b; y llamando α al ángulo X′DX, y $\mathcal{C}$ al Z′CX, los triángulos rectángulos A′QP′, MQn, nos darán

$$A'P'=BS=A'Q\times\cos.QA'P'=A'Q\times\cos.X'DX=x'\cos.\alpha,$$

$$QP'=Rn=A'Q\times\text{sen.}QA'P'=x'\text{sen.}\alpha;$$

$$Qn=SP=MQ\times\cos.MQn=z'\cos.Z'A'R=z'\cos.Z'CX=z'\cos.\mathcal{C},$$

y $Mn=MQ\times\text{sen.}MQn=z'\text{sen.}\mathcal{C}$;

luego si sustituimos estos valores en las ecuaciones de arriba, se tendrá

$$\{x=a+x'\cos.\alpha+z'\cos.\mathcal{C}, \quad z=b+x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen.}\mathcal{C}\} \text{ (g)};$$

que *son las ecuaciones para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares* x, z *á otro de coordenadas oblicuas* x′, z′ en que α y $\mathcal{C}$ espresan los ángulos que forman los ejes de las x' y de las z' con el de las x, y a y b son las coordenadas del nuevo orígen con relacion á los ejes primitivos de las x y de las z.

§ 200 Lo que hemos espuesto hasta aquí se reduce á pasar de un sistema de coordenadas rectangulares á otro de coordenadas oblicuas; si, al contrario, *se quisiese pasar de un sistema de coordenadas oblicuas á otro de coordenadas rectangulares*, despejaríamos x' y z' en las ecuaciones (g), lo que dará

$$x'=\frac{(x-a)\text{sen.}\mathcal{C}-(z-b)\cos.\mathcal{C}}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}, \quad z'=\frac{(z-b)\cos.\alpha-(x-a)\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)} \text{ (h)};$$

y si tuviesen un mismo orígen tambien los nuevos ejes, haríamos en estas fórmulas $a=0$, $b=0$, y tendríamos

$$x'=\frac{x\text{sen.}\mathcal{C}-z\cos.\mathcal{C}}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)}, \quad z'=\frac{z\cos.\alpha-x\text{sen.}\alpha}{\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)} \text{ (k)}$$

para pasar de un sistema de coordenadas oblicuas x′, z′, *á otro de coordenadas rectangulares* x, z, espresando α y $\mathcal{C}$ los ángulos que forman los ejes de las x' y de las z', con el eje de las x.

§ Si los nuevos ejes hubiesen de ser tambien rectangulares, se tendría $\mathcal{C}-\alpha=\frac{1}{2}\pi$; de donde sen.$(\mathcal{C}-\alpha)=1$, sen.$\mathcal{C}=\cos.\alpha$, cos.$\mathcal{C}=-\text{sen}.\alpha$; y sustituyendo estos valores en las espresiones (g) de z y de x, se tendrá

$$\{x=a+x'\cos.\alpha-z'\text{sen}.\alpha,\quad z=b+x'\text{sen}.\alpha+z'\cos.\alpha\}\ (1).$$

Si tuviesen un mismo orígen dichos dos sistemas, sería $a=0$ y $b=0$, y se sendría

$$\S\ x=x'\cos.\alpha-z'\text{sen}.\alpha,\quad z=x'\text{sen}.\alpha+z'\cos.\alpha\ \S\ (m);$$

y si ademas de esta circunstancia, cayese el nuevo eje de las x' por la parte inferior de AX, y estuviese representado por AX$''$, el ángulo α sería negativo, y su seno variaría de signo; por lo cual se tendría

$$\S\ x=x'\cos.\alpha+z'\text{sen}.\alpha,\quad z=z'\cos.\alpha-x'\text{sen}.\alpha\ \S\ (n).$$

{ 201 Tratemos ya de manifestar *cómo se pasaría de un sistema de coordenadas oblicuas á otro tambien de coordenadas oblicuas*. Supongamos primero que no mude el orígen, y que sean los ejes primitivos AX, AZ (fig. 67), y que se quieran referir las coordenadas á los ejes AX′, AZ′. Para esto, concebirémos por el orígen un sistema de coordenadas x'', z'', cuyos ejes AX$''$, AZ$''$, sean rectangulares; y llamando $\mathcal{C}$, α, $\mathcal{C}'$, α', á los ángulos ZAX$''$, XAX$''$, Z′AX$''$, X′AX$''$, y suponiendo que del sistema de las x'', z'', se quisiese pasar á cada uno de los otros, se verificaría en virtud de las ecuaciones (f) respecto del de las x, z, que $x''=x\cos.\alpha+z\cos.\mathcal{C}$, $z''=x\text{sen}.\alpha+z\text{sen}.\mathcal{C}$; y respecto del de las x', z' sería

$$x''=x'\cos.\alpha'+z'\cos.\mathcal{C}',\quad z''=x'\text{sen}.\alpha'+z'\text{sen}.\mathcal{C}';$$

é igualando los dos valores de x'' y de z'' se tendrá

$$x\cos.\alpha+z\cos.\mathcal{C}=x'\cos.\alpha'+z'\cos.\mathcal{C}',$$
$$x\text{sen}.\alpha+z\text{sen}.\mathcal{C}=x'\text{sen}.\alpha'+z'\text{sen}.\mathcal{C}';$$

en cuyas ecuaciones despejando x y z, se tendrá

$$x=\frac{x'\text{sen}.(\mathcal{C}-\alpha')+z'\text{sen}.(\mathcal{C}-\mathcal{C}')}{\text{sen}.(\mathcal{C}-\alpha)},\quad z=\frac{x'\text{sen}.(\alpha'-\alpha)+z'\text{sen}.(\mathcal{C}'-\alpha)}{\text{sen}.(\mathcal{C}-\alpha)}\ (o);$$

y haciendo $\mathcal{C}-\alpha=\text{ZAX}=\gamma$, $\mathcal{C}-\alpha'=\text{ZAX}'=\varphi$, $\mathcal{C}-\mathcal{C}'=\text{ZAZ}'=\theta$, y $\alpha'-\alpha=\text{X}'\text{AX}=\psi$, $\mathcal{C}'-\alpha=\text{Z}'\text{AX}=\lambda$, estas fórmulas se convertirán en

$$x=\frac{x'\text{sen}.\varphi+z'\text{sen}.\theta}{\text{sen}.\gamma},\quad z=\frac{x'\text{sen}.\psi+z'\text{sen}.\lambda}{\text{sen}.\gamma}\ (p);$$

en las cuales γ es el ángulo que forman los ejes primitivos; φ el que forma el antiguo eje de ordenadas con el nuevo de abscisas; θ el que forman los ejes de las ordenadas; ψ el que forman los ejes de las abscisas; y λ el que forma el eje primitivo de las abscisas con el nuevo de las ordenadas.

{ Si ademas se quisiese suponer que variaba tambien el punto de

orígen, no tendríamos mas que añadir las coordenadas a, b, del nuevo orígen, y se tendría

$$x=a+\frac{x'\text{sen.}\varphi+z'\text{sen.}\theta}{\text{sen.}\gamma},\quad z=b+\frac{x'\text{sen.}\psi+z'\text{sen.}\lambda}{\text{sen.}\gamma}\quad \text{(q) (*).}$$

§ 202 Como *para la trasformacion de las coordenadas en el espacio* es bastante complicado cualquiera que sea el método que se elija, rogué á dicho Profesor continuase sus invertigaciones para ver si por el mismo método se podrían hallar las fórmulas para la trasformacion de las coordenadas en el espacio; y he aquí el fruto de sus investigaciones sobre este punto.

§ Supongamos que se tenga una ecuacion entre trés coordenadas x,z,u, que se refieran á los planos ZAU, UAX, ZAX (fig. 68) rectangulares entre sí, y que se quiera trasformar en otra cuyas coordenadas x', z', u', se refieran á los planos Z'AU', U'AX', Z'AX', que pasen tambien por el punto A y que tengan una posicion cualquiera. Para esto, desde un punto cualquiera M tomado en el espacio, bajarémos la MM', perpendicular al plano ZAX, y desde M' tirarémos la M'P paralela con ZA, con lo cual serán AP$=x$, PM'$=z$, y MM'$=u$, las coordenadas rectangulares del punto M.

§ Ahora, tirando desde M la Mm paralela al eje AU' hasta que encuentre en m al plano Z'AX', y desde m la mP' paralela á Z'A, se tendrá que AP'$=x'$, mP'$=z'$ y M$m=u'$, serán las coordenadas del mismo punto M referidas á los nuevos planos, y todo estará en determinar x, z, u, en valores de x', z', u'.

§ Para conseguirlo, concibamos que por M', por m y por P', pasen tres planos M'N, mn, P'n', paralelos al plano UAZ, y tendrémos que las comunes secciones M'P, $m'p'$, pr, de estos planos con el ZAX serán líneas paralelas al eje AZ, y por lo mismo serán rectos los ángulos en P, en p' y en p, puesto que la AX es perpendicular á la AZ.

§ Supongamos ahora, que desde m se tire la mm'' paralela con AX, y se tendrá, que será perpendicular en m'' al plano M'N; luego si tirámos la Mm'', el triángulo M$m''m$ será rectángulo en m'', y dará (I. § 649) $mm''=$M$m\times$cos.Mmm''; y como $mm''=p'$P por por ser partes de paralelas interceptadas entre planos paralelos, y el ángulo M$mm''=$U'AX en virtud de lo espuesco (I. 554), se tendrá

(*) *Tambien puede ocurrir el querer pasar de un sistema oblicuo á un sistema rectangular, permaneciendo el mismo orígen, y el mismo eje de las* x.

Para esto, en las (ecs. h § 200), harémos $a=0$, $b=0$, $\alpha=0$; y se nos convertiráu en $x'=\frac{x\text{sen.}\mathcal{C}-z\text{cos.}\mathcal{C}}{\text{sen.}\mathcal{C}}=x-z\text{cot.}\mathcal{C}$, $z'=\frac{z}{\text{sen.}\mathcal{C}}=z\text{cosec.}\mathcal{C}$.

$$p'P=mm''=Mm\times\cos.Mmm''=u'\cos.U'AX=u'X'',$$

llamando X'' á este coseno. Tirando desde P' á p en el plano P'n', la P'p, será perpendicular á Ap, y el triángulo AP'p rectángulo en p, dará $Ap=AP'\cos.X'AX=x'X$, poniendo en vez de AP' la letra x' que la representa, y señalando con X el coseno del ángulo $X'AX$. Y concibiendo desde P' la P'q paralela con AX, se tendrá que será igual con pp'', por partes de paralelas interceptadas por los planos paralelos mn, $P'n'$; y uniendo el punto q con m, el triángulo P'mq rectángulo en q dará $P'q=pp''=mP'\times\cos.mP'q$; y como $mP'=z'$ y el ángulo $mP'q=$ al XAZ' (I. § 554), cuyo coseno señalarémos con X', se tendrá $pp'=z'X'$; por lo cúal resultará

$$x=AP=Ap+pp'+p'P=x'X+z'X'+u'X''.$$

Llamando Z, Z', Z'', á los cosenos de los ángulos formados por los nuevos ejes con el de las z, y U, U', U'', á los de los ángulos formados por las mismas líneas con el eje de las u, se hallará por razonamientos análogos al primero

$$z=x'Z+z'Z'+u'Z'', \quad \text{y} \quad u=x''U+z'U'+u'U''.$$

Si el orígen no fuese el mismo, llamando a, b, c, á las coordenadas del nuevo orígen, se tendría

$$x=a+x'X+z'X'+u'X'', \quad z=b+x'Z+z'Z'+u'Z'', \quad u=c+x'U+z'U'+u'U''.$$

En estas ecuaciones entran nueve indeterminadas; pero tres se pueden determinar por medio de las tres ecuaciones

$$X^2+Z^2+U^2=1, \quad X'^2+Z'^2+U'^2=1, \quad X''^2+Z''^2+U''^2=1,$$

que espresan (187) la relacion que debe haber entre los ángulos que forma cada uno de los nuevos ejes con los tres primitivos.

§ Cuando los angulos, que han de formar los nuevos ejes entre sí son dados, tendrémos que si se llama α al ángulo que forman los ejes de las x' y z', $\mathcal{C}$ al que forman los de las z', u', y γ al que forman los de las u', x', se tendrán (187) estas tres ecuaciones

$$\cos.\alpha=XX'+ZZ'+UU', \cos.\mathcal{C}=X'X''+Z'Z''+U'U'', \cos.\gamma=XX''+ZZ''+UU'',$$

que, juntas con las seis anteriores, bastarán en todos los casos para establecer las condiciones relativas á los nuevos ejes, suponiendo rectangulares los primitivos (*).

(*) D. Fernando Boccherini, *Profesor de Matemáticas en Santander, ha esplicado á sus discípulos en el curso de* 1841 á 1842 *esta trasformacion del modo siguiente:*

Hallar las ecuaciones para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio á otro de oblicuas.

Sean (fig. 9 lám. 8'') los ejes rectangulares XG, ZG, UG; *y los oblicuos* X'G, Z'G, U'G. *Si elegimos un punto tal como* A, *y concebimos una recta* AB *paralela al eje* GX', *y si desde el punto* B *en que encuentre al plano* Z'U', *prolongándola, tiramos la* BC, *paralela al eje* U'G, *se ve-*

{ 203 *Para pasar de un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio á otro sistema de coordenadas tambien rectangulares*, empléa Laplace en el primer libro de su Mecánica Celeste un método muy elegante, y que por lo mismo darémos á conocer.

{ Para esto, señalarémos los planos primitivos por dos de las tres coordenadas

---

rificará que las nuevas coordenadas del punto A, *serán* AB *la* x', CB *la* u *y* GC *la* z'; *y si por los puntos* A, B *y* C *concebimos tres planos, prolongados indefinidamente, y perpendiculares al eje* UG, *se tendrá que* GF *será la coordenada* u, *en el sistema de ejes rectangulares; de donde se deduce que*

$$u=GF=GD+DE+EF.$$

Y como (I. 649) $GD=GC.\cos.Z'GU=z'Z$, *espresando por* Z *el coseno del ángulo* Z'GU.

$DE=$(§ 183 *nota*) $gK.\cos.U'GU=CB.\cos.U'GU=u'U$, *espresando por* U *el coseno del ángulo* U'GU.

$EF=$(§ 183 *nota*) $IH.\cos.X'GU=AB.\cos.X'GU=x'X$, *espresando por* X *el coseno del ángulo* X'GU; *por lo que haciendo las sustituciones, será*

$$u=z'Z+u'U+x'X;$$

y del mismo modo deduciríamos

que $x=z'Z'+u'U'+x'X'$ *y que* $z=z'Z''+u'U''+x'X''$.

Mr. Leroy *en su obra intitulada:* Análisis aplicada á la Geometría de las tres dimensiones, 3.ª edicion impresa en París este mismo año de 1843, *página* 54 *esplica esta trasformacion del modo siguiente:*

Supongamos (fig. p) que se trate de pasar de un sistema de ejes rectangulares OX, OZ, OU, á un sistema de ejes oblicuos OX', OZ', OU', que tengan el mismo orígen O que los primeros.

Si desde un punto cualquiera M *del espacio, tiramos las rectas* MP, MP' *respectivamente paralelas á* OU, OU', *y terminadas en los puntos* P, P' *donde ellas encuentren la una al plano* XZ, *la otra al plano* X'Z'; *despues, si desde estos pies tiramos* PQ, P'Q' *paralelas á* OZ, OZ', *tendrémos para las coordenadas de* M *en los dos sistemas*

$$x=OQ,\quad z=PQ,\quad u=MP,$$
$$x'=OQ',\quad z'=P'Q',\quad u'=MP';$$

y la cuestion consistirá en hallar los valores de las unas en valores de las otras. Para esto, proyectemos el conjunto de lineas $x'+z'+u'$ *sobre el eje* OX, *bajando desde cada uno de sus ángulos las perpendiculares* Q'G, P'H, MQ: *esta última estando necesariamente en el plano* MPQ, *terminará por precision en el estremo de la abscisa* $x=OQ$, *y asi se tendrá*

$$(1)\quad x=OQ=OG+GH+HQ;$$

*pero, en virtud de lo espuesto (*183 *nota), se obtiene*

$$OG=x'\cos.(x',x),\quad GH=z'\cos.(z',x),\quad HQ=u'\cos.(u',u),$$

designando siempre por estas notaciones y otras semejantes, los ángulos comprendidos entre dos semi-ejes positivos. *Luego sustituyendo, resultará*

$$(2)\quad x=x'.\cos.(x',x)+z'.\cos.(z',x)+u'.\cos.(u',x).$$

Á la verdad, la construccion parece suponer que los ejes OX', OZ', OU' *formen todos ángulos agudos con* OX; *sin embargo; si uno de ellos, por ejem-*

x, z, u, que cada uno de ellos contenga, y los nuevos planos por dos de las coordenadas x''', z''', u'''.

Sea θ el ángulo formado por los dos planos de las xz y de las $x'''z'''$; ψ el ángulo que el eje de las x forma con la interseccion de los planos $x'''z'''$, xz; y φ el ángulo de esta interseccion con el eje de las x; se trata de determinar

---

plo OZ' *formase un ángulo obtuso, entónces en la figura, que se construirá fácilmente, el punto* H *caeria á la izquierda de* G, *y se tendria en lugar de* (1), *ésta ecuacion* (3) $x=OG-GH+HQ$, *con la cual va conforme aun la ecuacion general* (2), *pues que segun la hipótesis* $Z'OX>90°$, *el término* $z'\cos.(z',x)$ *será tambien* negativo, *y siempre igual* numéricamente *á la proyeccion* GH, *de la ordenada* $P'Q'=z'$. *Por otra parte, si, dejando el ángulo* Z'OX *agudo, sucediese que el punto* M *tuviese su ordenada* z' *negativa, el punto* H *caeria tambien á la izquierda de* G, *y la ecuacion* (3) *remplazaría aun á la ecuacion* (1); *lo que prueba que para hacer la fórmula* (2) *aplicable á todos los casos, es necesario tener en cuenta* los signos de las coordenadas *y los signos de los* cosenos, *refiriendo siempre estos cosenos á los ángulos comprendidos* entre los semi-ejes positivos. *Por otra parte, proyectando el mismo conjunto de líneas* $x'+z'+u'$ *sobre* OZ *y sobre* OU, *se tendrían necesariamente resultados semejantes: luego se puede decir, que* cada coordenada rectangular es igual á la suma algebráica de las proyecciones de las tres nuevas coordenadas sobre cada uno de los antiguos ejes.

En la sesion de 20 *de febrero de este año de* 1843, *Mr. Cauchy ha leido en la Academia de Ciencias del Instituto de Francia, una* Memoria *sobre el empléo de las coordenadas curvilíneas en la valuacion de las superficies, de los volúmenes; de las masas, etc.*

En la sesion de la misma Academia, celebrada el 29 *de mayo de este mismo año de* 1843, *se leyó una Memoria, con el siguiente título:* Memoria sobre la sustitucion de planos topográficos á tablas numéricas de doble entrada; sobre un nuevo modo de trasformacion de las coordenadas, y sobre sus aplicaciones á este sistema de tablas topográficas, por Mr. LEON LALANNE.

Terminarémos esta nota, deduciendo las fórmulas para trasformar las coordenadas en el espacio, cuando solo se varia el origen, conservándose inalterable la direccion de los ejes, ó siendo los nuevos ejes paralelos á los primitivos; de que hemos hecho uso en este párrafo del texto sin demostracion formal. Y así, nos propondrémos pasar de un sistema de coordenadas rectangulares *ú* oblicuas á un sistema de coordenadas paralelas á las primitivas, pero de orígen diferente.

Sean AX, AZ, AU *(fig.* P') *los antiguos ejes, cuyas coordenadas señalarémos con* x, z, u; *y* A'X', A'Z', A'U', *los nuevos; y que supondrémos paralelos á los primeros y cuyas coordenadas señalarémos con* x', z', u'. *Las partes* AB, AC, AD *representan las coordenadas del punto de orígen* A *respecto de los ejes* A'X', A'Z', A'U'.

Ahora, si desde un punto cualquiera M *tiramos las coordenadas* MP, MQ, MR *paralelas á sus respectivos planos, tendrémos que* $x=MP$, $z=MQ$, $u=MR$ *serán las coordenadas del punto* M *respecto de los antiguos ejes;*

los valores de x, z, u, en valores de x''', z''', u''', y de los tres ángulos θ, ψ, ϕ.

{ Para esto, sean x', z', u', las coordenadas de un punto referido á los ejes rectangulares, contadas sobre las tres rectas siguientes: 1.ª sobre la interseccion del plano de las $x'''z'''$ con el de las xz; 2.ª la proyeccion del eje de las u''' sobre el plano de las xz; 3.ª el eje de las u; y se tendrá

$$x=x'\cos.\psi+z'\text{sen.}\psi\,,\quad z=z'\cos.\psi-x'\text{sen.}\psi\,,\quad u=u'.$$

{ Las dos primeras ecuaciones por la trasformacion espresada (200(n)), y la 3.ª porque, contándose las u y u' sobre un mismo eje, son iguales.

{ Sean x'', z'', u'', las coordenadas rectangulares del mismo punto contadas sobre las tres rectas siguientes: 1.ª la interseccion del plano de las $x'''z'''$ con el de las xz; 2.ª la perpendicular á esta interseccion sobre el plano de las $x'''z'''$; 3.ª el eje de las u'''; y se tendrá

$$x'=x''\,,\quad z'=z''\cos.\theta+u''\text{sen.}\theta\,,\quad u'=u''\cos.\theta-z''\text{sen.}\theta.$$

Verificándose la 1.ª ecuacion, porque tanto las x' como las x'' se cuentan sobre una misma recta, que es la interseccion del plano de las $x'''z'''$ con el de las xz; y las otras dos por la trasformacion de las coordenadas espuesta (200(n)).

{ Sean por último x''', z''', u''', las coordenadas del mismo punto referidas á los tres ejes de las x''', z''', u''', y se tendrá

$$x''=x'''\cos.\phi-z'''\text{sen.}\phi\,,\quad z''=z'''\cos.\phi+x'''\text{sen.}\phi\,,\quad u''=u'''\,;$$

las dos primeras por la trasformacion (200 (m)), y la 3.ª porque tanto las u'' como las u''' se cuentan sobre un mismo eje; de donde despejando x, z, u, resulta

$$\left.\begin{aligned} x&=x'''(\text{co.}\theta\text{se.}\psi\text{se.}\phi+\text{co.}\psi\text{co.}\phi)+z'''(\text{co.}\theta\text{se.}\psi\text{co.}\phi-\text{co.}\psi\text{se.}\phi)+u'''\text{se.}\theta\text{se.}\psi\\ z&=x'''(\text{co.}\theta\text{co.}\psi\text{se.}\phi-\text{se.}\psi\text{co.}\phi)+z'''(\text{co.}\theta\text{co.}\psi\text{co.}\phi+\text{se.}\psi\text{se.}\phi)+u'''\text{se.}\theta\text{co.}\psi\\ u&=u'''\cos.\theta-z'''\text{sen.}\theta\cos.\phi-x'''\text{sen.}\theta\text{sen.}\phi\end{aligned}\right\}\ (\text{k}).$$

§ Si quisiéramos pasar del sistema de las x''', z''', u''', al de las x, z, u, despejaríamos x''', z''', u''', en estas ecuaciones; lo que se conseguirá con mas facílidad por métodos particulares; pues multiplicando cada ecuacion por el coeficiente que en ella lleva x''', sumándolas y reduciendo, teniendo presente que $\text{sen.}^2+\cos.^2=1$, quedará despejada la x'''; multiplicando cada ecuacion por lo que en ella multiplica á z''', sumándolas y reduciendo, teniendo presente lo mismo, quedará despejada la z'''; y multiplicando cada una por el coeficiente que en ella multiplica á u''', sumándolas y reduciendo, teniendo presente lo mismo, quedará despejada la u'''; de manera que se tendrá

$x'=\text{MP}'$, $z'=\text{MQ}'$, $u'=\text{MR}'$ *serán las coordenadas de los nuevos ejes; y haciendo* $\text{PP}'=\text{AB}=\alpha$, $\text{QQ}'=\text{AC}=\mathfrak{C}$, $\text{RR}'=\text{AD}=\gamma$, *se tendrá*

$$x'=x+\alpha\,,\quad z'=z+\mathfrak{C}\,,\quad u'=u+\gamma\quad(\text{m})\,;$$

que dan

$$x=x'-\alpha\,,\quad z=z'-\mathfrak{C}\,,\quad u=u'-\gamma\quad(\text{n})\,,$$

que son las fórmulas por medio de las cuales se pasa de un sistema cualquiera de coordenadas á un sistema paralelo.

Hay ocasiones en que no conviene hacer de una vez el desplazamiento del origen, y la mudanza de direccion de los ejes, aunque la cuestion asi lo exija; y es mas ventajoso el hacer sucesivamente estas dos operaciones.

$x'''=x(\cos.\theta\,\text{sen}.\psi\,\text{sen}.\phi+\cos.\psi\cos.\phi)+z(\cos.\theta\cos.\psi\,\text{sen}.\phi-\text{sen}.\psi\cos.\phi)-u\,\text{sen}.\theta\,\text{sen}.\phi$
$z'''=x(\cos.\theta\,\text{sen}.\psi\cos.\phi-\cos.\psi\,\text{sen}.\phi)+z(\cos.\theta\cos.\psi\cos.\phi+\text{sen}.\psi\,\text{sen}.\phi)-u\,\text{sen}.\theta\cos.\phi$
$u'''=x\,\text{sen}.\theta\,\text{sen}.\psi+z\,\text{sen}.\theta\cos.\psi+u\cos.\theta.$

§ 204 Se hace aun uso de esta otra trasformacion: supongamos que se halle referido un punto á tres planos rectangulares por medio de las coordenadas x, z, u. Si se tira desde este punto al orígen de las coordenadas una recta, se tendrá conocida la longitud de esta recta (181) y los ángulos que forma (187) con los ejes rectangulares; y espresando por r la longitud AM (fig. D lám. 8') de esta recta, y por α, $\mathcal{C}$, γ, los ángulos que forma con los ejes de las x, de las z, y de las u, se tiene (§ 183 a) $x=r\times\cos.\alpha$, $z=r\times\cos.\mathcal{C}$, $u=r\times\cos.\gamma$.

§ De los tres ángulos α, $\mathcal{C}$, γ, dos solos son necesarios, á causa de la ecuacion $\cos.\alpha^2+\cos.\mathcal{C}^2+\cos.\gamma^2=1$, que puede servir para determinar el otro.

§ Cuando se determina la posicion de un punto M (fig. D lám. 8') por ejemplo, por medio de la recta AM=r y dos de los ángulos α, $\mathcal{C}$, γ, se llama *radio vector* de aquel punto á la recta r, y el orígen A de las coordenadas recibe el nombre de *polo*, de donde parten los radios vectores de los diferentes puntos del espacio, como ya indicamos al fin del (§ 148).

§ En algunos casos se proyecta el radio vector AM sobre uno de los planos de las coordenadas, por ejemplo sobre el de las xz; se da el ángulo MAM' que forma dicho radio con su proyeccion, y el ángulo de la proyeccion con uno de los otros ejes que supondrémos ser el de las x; y llamando φ al primer ángulo y ψ al segundo, se tendrá (I. § 649) MM'=AM×sen.MAM', ó $u=r\times\text{sen}.\varphi$, y la proyeccion AM' estará representada por $r\times\cos.\varphi$; ahora, la coordenada z, la proyeccion AM' del radio vector, y x que es igual con M'Q forman el triángulo AM'Q rectángulo en Q, que da

$$AQ=AM'\,\text{sen}.AM'Q=(\S\,183a)AM'\,\text{sen}M'AX;$$

y sustituyendo en vez de estas cantidades sus iguales; tendrémos $z=r\cos.\phi\,\text{sen}.\psi$, y el triángulo APM' rectángulo en P, dará AP=AM'cos.M'AP, ó sustituyendo en vez de estas líneas sus valores, será $x=r\cos.\varphi\cos.\psi$.

Luego las tres ecuaciones $u=r\,\text{sen}.\varphi$, $z=r\cos.\phi\,\text{sen}.\psi$, $x=r\cos.\varphi\cos.\psi$, nos espresan *las coordenadas rectangulares de un punto cualquiera del espacio en valores del radio vector de dicho punto, del ángulo* φ *que forma el espresado radio con su proyeccion sobre el plano horizontal ó de las* xz, *y del ángulo* ψ *que forma esta proyeccion con el eje de las* x.

Para que estas fórmulas abracen todos los puntos del espacio, bastará hacer variar el ángulo ψ desde 0° hasta 360° ó 2π, y el ángulo φ solo desde 0° hasta $\pm 90°$. Los signos que estos valores señalen á las líneas trigonométricas, determinarán completamente los signos que deban tener las coordenadas x, z, u, segun el cuadrante en que esté situado el punto al cual pertenezcan; y pues que esto es suficiente, no se necesitará atribuir ninguna mudanza de signo al radio vector, limitándose á hacerle variar desde cero hasta el infinito.

§ El triángulo ARM'' rectángulo en R, da (I. § 650)

$$RM''=AR\times\text{tang}.M''AR;\quad\text{de donde}\quad\text{tang}.M''AR=\frac{RM''}{AR}=\frac{AP}{AR}=\frac{x}{u};\quad\text{luego}$$

$\frac{x}{u}$ espresa la tangente trigonométrica del ángulo que forma el eje de las u con

la proyeccion del radio vector sobre el plano de las xu; luego si en vez de x y u sustituimos los valores anteriores y simplificamos, tendrémos que dicha tangente trigonométrica será igual con $\frac{\cos.\phi\cos.\psi}{\text{sen.}\phi}$.

§ El triángulo M'''AQ rectángulo en Q, da 1:tang.M'''AQ::AQ.M'''Q; de donde $\text{tang.M'''AQ}=\frac{\text{M'''Q}}{\text{AQ}}=\frac{u}{z}$.

Y como el ángulo M'''AQ tiene por complemento al M'''AR que forma con el eje de las u la proyeccion del radio vector r sobre el plano de las zu, resulta que $\text{tang.M'''AQ}=\text{cot.M'''AU}$; por lo que será $\text{cot.M'''AU}=\frac{u}{z}$; y trastornando será $\text{tang.M'''AU}=\frac{z}{u}$; y si en vez de z y u sustituimos sus valores y simplificamos, tendrémos que la tangente trigonométrica del ángulo M'''AU que forma con el eje de las u la proyección del radio vector sobre el plano de las zu, será igual con $\frac{\cos\phi\text{sen}.\psi}{\text{sen.}\phi}$.

§ Y como las ecuaciones del radio vector AM son (§ 182) $x=au$, $z=bu$, que dan $a=\frac{x}{u}$, $b=\frac{z}{u}$, tendrémos tambien $a=\frac{\cos.\phi\cos.\psi}{\text{sen.}\phi}$, $b=\frac{\cos.\phi\text{sen.}\psi}{\text{sen.}\phi}$.

§ Cuando el punto referido á tres planos rectangulares por las coordenadas x, z, u, pertenece á una superficie, se tiene una ecuacion entre estas tres coordenadas x, z, u; si se mudan las coordenadas y se llaman x', z', u', se sustituirán en la ecuacion de la superficie los valores de x, z, u, espresados en x', z', u', y la ecuacion que resulte pertenecerá á la superficie referida á los nuevos planos. Y si se sustituyen en la ecuacion de la superficie en vez de x, z, u, los valores $r\cos.\phi\cos.\psi$, $r\cos.\phi\text{sen.}\psi$, $r\text{sen.}\phi$, se convertirá en la ecuacion polar de la superficie.

§ Ahora nos falta probar que esta *trasformacion de las coordenadas en nada alterará el grado de la ecuacion de la línea ó superficie que se considera.*

§ Para conseguirlo, supongamos que se tenga que elevar un trinomio tal como $Ax'+Bz'+Cu'$ á una potencia entera espresada por α, y se tendrá por el binomio de Neuton (I. 302), considerando $Ax'+Bz'$ como un solo término

$$(Ax'+Bz'+Cu')^{\alpha}=(Ax'+Bz')^{\alpha}+C\alpha(Ax'+Bz')^{\alpha-1}u'\ldots$$
$$+\frac{C^2\alpha(\alpha-1)}{2}(Ax'+Bz')^{\alpha-2}u'^2+\ldots C^{\alpha}u'^{\alpha};$$

pero la fórmula del binomio da á conocer que, elevando $Ax'+Bz'$ á una potencia entera cualquiera, la suma de los esponentes de x' y de z' es siempre igual al esponente de la potencia; luego en $(Ax'+Bz')^{\alpha}$ esta suma será igual con α; en $(Ax'+Bz')^{\alpha-1}u'$, la suma de los esponentes de x', z', u', será aun igual con

α; y como sucederá lo mismo en todos los términos, resulta que si se eleva un trinomio $Ax'+Bz'+Cu'$ á una potencia entera α, la suma de los esponentes de x', z', u', en cada uno de sus términos será igual con α.

ξ Esto supuesto, representarémos por $V=0$ la ecuacion de la superficie entre las tres coordenadas x, z, u, y supongamos que $ax^{\alpha}z^{\mathcal{C}}u^{\gamma}$ sea el término en que la suma $\alpha+\mathcal{C}+\gamma$ de los esponentes de x, z, u, sea la mayor, de manera que el grado de la ecuacion $V=0$ esté espresado por $\alpha+\mathcal{C}+\gamma$; y representando los valores de x, z, u, en valores de las nuevas coordenadas x', z', u', por medio de las espresiones

$$Ax'+Bz'+Cu',\ A'x'+B'z'+C'u',\ A''x'+B''z'+C''u',$$

siendo A, B, C, A', B', C', etc. cantidades constantes y dependientes de la disposicion de los nuevos ejes, el término $ax^{\alpha}z^{\mathcal{C}}u^{\gamma}$ se convertirá en

$$a(Ax'+Bz'+Cu')^{\alpha}(A'x'+B'z'+C'u')^{\mathcal{C}}(A''x'+B''z'+C''u')^{\gamma};$$

y tendrémos que la suma de los esponentes de x', z', u', en el primer factor despues de efectuada la elevacion indicada, será igual con α; en el 2.° con $\mathcal{C}$, y por lo mismo en cada término del producto de los dos primeros factores, la suma de los esponentes de x', z', u', será $\alpha+\mathcal{C}$; y como en todos los términos del tercer factor será γ la suma de los esponentes de x', z', u', se tendrá que en el producto total la suma de los esponentes será $\alpha+\mathcal{C}+\gamma$; luego, por la trasformacion, el término $ax^{\alpha}z^{\mathcal{C}}u^{\gamma}$ se convierte en otro conjunto de ellos del mismo grado con relacion á x', z', u', y por lo mismo *no se muda el grado de la ecuacion por la trasformacion de las coordenadas.*

ξ Esto que acabamos de manifestar con relacion á las tres variables x, z, u, lo queda respecto de dos x, z, en que el término de mayor dimension sería $ax^{\alpha}z^{\mathcal{C}}$; y por lo mismo resulta que *tampoco se altera el órden de una línea cuando se halla sobre un plano, aunque se trasformen las coordenadas de un modo cualquiera.* ξ

Idéa general de la teoría de las curvas.

205 Una línea cualquiera, que esté trazada sobre un plano, y que por lo mismo se llama *plana*, estando caracterizada por la relacion que existe entre las coordenadas de cada uno de sus puntos; se clasifican estas líneas por la forma de su ecuacion; si esta es algebráica, la curva se llama tambien *algebráica*, *geométrica* ó *racional*; y si es trascendente, esto es, si comprende líneas trigonométricas, logaritmos, esponenciales, ó espresiones que en lo sucesivo darémos á conocer con el nombre de *diferenciales*, se llama *trascendente*, *mecánica* ó *irracional*.

Neutŏn dividió las líneas en órdenes; llamó línea del primer órden á aquella cuya ecuacion es de primer grado, que es la línea recta (160); líneas de segundo órden á aquellas cuya ecuacion es de segundo grado; y líneas del órden n á aquellas cuya ecuacion es del grado n. Pe-

ro como la Geometría elemental hace uua *division* de la línea en recta y curva, creyó Neuton con sólidos fundamentos, que para evitar la confusion que resultaría de la multitud de curvas que hay, debía dividirlas en *géneros*; de manera, que *curva del primer género* es aquella cuya ecuacion es de segundo grado; del *segundo género* aquella cuya ecuacion es de tercer grado; y curva del género n aquella cuya ecuacion es del grado $n+1$. Por consiguiente, el género de una curva es una unidad ménos que el órden que obtiene considerada como línea. En la actualidad se suele decir solamente que una curva *es del grado* que espresa su ecuacion.

Para cada órden de líneas se puede formar una ecuacion general que represente todas las líneas posibles de este órden; las cuales se dividen y subdividen despues en géneros y especies, segun la variedad de los coeficientes que multiplican á las coordenadas en los términos de estas ecuaciones.

La ecuacion $A+Bz+Cx=0$ espresa la naturaleza de las líneas del *primer órden*, porque no tiene ningun término que pase del primer grado. De este órden no hay mas línea que la recta; porque esta ecuacion dividida por B, y haciendo $\frac{C}{B}=-a$, $\frac{A}{B}=-b$, se convierte en la $z=ax+b$.

La ecuacion $A+Bz+Cx+Dz^2+Exz+Fx^2=0$, representa la naturaleza de todas las líneas de segundo órden. En este órden solo están comprendidas cuatro curvas, que son las que resultan de cortar un cono de diversas maneras, y por eso se llaman *secciones cónicas*.

La ecuacion

$$A+Bz+Cx+Dz^2+Ezx+Fx^2+Gz^3+Hz^2x+Izx^2+Kx^3=0$$

representa todas las líneas de tercer órden, que comprende segun Neuton 72 especies de líneas; *Stirling* añadió 4 y Cramer 2; por manera, que en el dia las especies de líneas de tercer órden son 78, que Cramer las clasifica en 14 géneros; si se quisiesen determinar los géneros de las líneas de cuarto órden, se hallaría un número casi infinito; y así, se dividen estas líneas en *nueve clases generales* (*); las de quinto órden en once clases, y así se podría hacer con las demas.

(*) En el Diario de Matemáticas puras y aplicadas *que Mr.* Liouville *publica en París, correspondiente al mes de julio de* 1836, *se halla un articulo con el siguiente epígrafe:*

"*Enumeracion de las curvas de* 4.° *órden, segun la naturaleza diferente de sus ramas infinitas, por Mr.* Plucker"; *y principia del modo siguiente.*

"*De todos los Geómetras,* Euler *es el que mas sistemáticamente se ha ocupado de las curvas de grado superior. Él ha fijado su consideracion, sobre todo,*

En estas ecuaciones se ve que hay un término sin variable, dos en que hay una dimension variable, tres en que hay dos dimensiones variables, cuatro en que hay tres dimensiones variables, etc.; luego el número de términos de una ecuacion general de una línea del órden n podrá llegar á ser

$$1+2+3+4+5....+(n+1)=(\text{I}\ \S\ 287)(1+n+1)\times\tfrac{1}{2}(n+1)=(n+2)\times\tfrac{1}{2}(n+1)....$$
$$=\tfrac{1}{2}(n^2+2n+n+2)=\tfrac{1}{2}(n^2+3n+2)=\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{3}{2}n+1.$$

El número de los coeficientes A, B, C, etc. de cada ecuacion general es el mismo que el número de sus términos. Pero este número

---

en las ramas infinitas; y ha deducido en su Introduccion á la Análisis de los infinitos, *el modo de clasificar las diferentes especies de curvas de un mismo grado, llevando esta clasificacion hasta el 4.° grado inclusive. Lo que él ha hecho sobre este punto hay mas de ochenta años, ha pasado á otras obras bajo su autoridad y sin ser examinado. Mas la longitud de los cálculos, que exigia su método, no le permitia demostrar de una manera cierta que todas las especies anunciadas por él, existen realmente. Él da de este modo 146 especies de curvas del 4.° grado, que distribuye en 6 clases: número que es preciso reducir desde luego á 125; porque, por un error de cálculo, contó 21 de mas en la sesta clase; despues, en las 125 curvas restantes, hay 12 que no existen absolutamente. De una de ellas* Euler *afirma positivamente lo contrario. Se le han escapado 22 especies, y entre ellas la especie general de la última clase. El olvido de las otras proviene de que Euler no ha reconocido: 1.° que el órden del contacto puede ser diferente sobre dos asintotas paralelas; y 2.° que puede haber (para esplicarme brevemente) un punto de retroceso de segunda especie en el infinito. En fin, sus nociones inexactas sobre las asíntotas parabólicas, que no están jamas aisladas, pero siempre en número infinito, y sobre las asintotas curvas en general, han debido conducirle inevitablemente, á errores manifiestos que señalarémos despues.*

»En esta memoria, nos proponemos rehacer el trabajo de Euler con los medios ordinarios de la Análisis, manejados sin embargo de un modo nuevo, de modo que podrémos escribir inmediatamente las ecuaciones que responden á las diferentes especies de curvas del 4.° grado, y esto por un método aplicable á las curvas de un grado cualquiera. Los ejes de las coordenadas no introducen en nuestras ecuaciones nada arbitrario que nos embarace y que sea necesario eliminar, por decirlo asi, si se quiere reconocer la naturaleza intima de la curva, sin atender á su posicion. Se ve inmediatamente la dependencia de cada término de nuestras ecuaciones con las curvas que representan, asi como la mudanza producida en la naturaleza de estas curvas por la mudanza de forma de uno cualquiera de los términos de sus ecuaciones. En fin, para servir de comprobacion á nuestra clasificacion, y en general á todos nuestros cálculos, hay un número abstracto, que se obtiene inmediatamente para cada una de nuestras ecuaciones. Yo quiero hablar del número de las constantes, de que dependen las curvas de una especie cualquiera...»

de coeficientes se puede disminuir en una unidad, porque siendo cero el segundo miembro de todas estas ecuaciones, se puede dividir todo el primero por un coeficiente cualquiera como el de la potencia más alta de z ó de x, la cual despues de esta division, no tiene mas coeficiente que la unidad.

Asi, dividiendo por B la ecuacion general del primer grado $A+Bz+Cx=0$, se reduce á $\frac{A}{B}+z+\frac{C}{B}x=0$, en la que no hay mas de los dos coeficientes $\frac{A}{B}$, y $\frac{C}{B}$.

Luego si n es el esponente de un órden cualquiera, el número de coeficientes de la ecuacion general de este órden será $\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$.

De aquí se sigue que regularmente se puede hacer pasar una línea del órden n por el número $\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$ de puntos dados, ó que una línea del órden n está determinada, y su ecuacion dada, cuando se han fijado $\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$ puntos por donde debe pasar; porque cada punto dado suministra una condicion para determinar un coeficiente; así, una línea del primer órden está determinada por dos puntos dados; una del segundo por cinco; una del tercero por nueve; una del cuarto por catorce; una del quinto por veinte etc.

Una línea algebráica no se puede cortar por una recta sinó en tantos puntos lo mas como espresa el órden de la línea; porque podemos concebir que esta recta se toma por eje de las abscisas, y haciendo la ordenada igual con cero, nos vendrá una ecuacion que espresará con sus raices el número de puntos en que la curva corta á dicho eje; y como esta ecuacion, lo mas que puede ser es del mismo grado que la primitiva, resulta que el mayor número de puntos en que una recta puede cortar á una curva es en tantos como unidades tiene el grado de su ecuacion. Podrá encontrarla en ménos puntos, que será cuando la ecuacion que resulta de igualar á cero la ordenada, tenga raices imaginarias ó sea de un grado ménos elevado que la ecuacion primitiva; y una curva del órden n podrá encontrar á otra del órden m lo mas en mn puntos, como demostrarémos (§§ 339 y 394).

Cuando una línea, que se toma por eje de abscisas, divide de tal modo las ordenadas que en la combinacion de estas ordenadas de una en una, de dos en dos etc., la suma de los valores positivos sea igual con la de los negativos, se llama á esta línea *diámetro*; y es de primer órden ó rectilíneo cuando la suma de las ordenadas positivas es igual con la de las negativas; de segundo órden (que ya será una línea curva) cuando la suma de los productos positivos de la combinacion de dos ordenadas que corresponden á una misma abscisa, son iguales con la suma de los negativos, y así sucesivamente.

El punto en que se encuentran dos diámetros se llama *centro*; y si se encuentran todos en un mismo punto, se llama *centro general*; toda recta que pasa por el centro de una curva y termina en ella por ambos estremos, está dividida por el centro en dos partes iguales; al punto en que un diámetro corta la curva se le llama *vértice*; cuando todas las ordenadas son perpendiculares al diámetro, toma el nombre de *eje*.

Cuando al diámetro corresponden ordenadas positivas y negativas iguales, divide al espacio terminado por la curva en dos partes iguales, que son semejantes cuando son perpendiculares al eje; en cuyo caso se dice que es *simétrica* respecto del eje; á estos diámetros les da Neuton el nombre de *diámetros absolutos*; y se llaman *contradiámetros* á los ejes de abscisas en que, á las abscisas opuestas iguales, corresponden ordenadas opuestas iguales. Finalmente, se llama *asíntota* de una curva á una línea, recta ó curva, hacia la cual se va acercando la curva, pero que jamas la llega á encontrar.

Las curvas se dividen tambien en *finitas*, *infinitas* y *mistas*; finitas ó cerradas son aquellas que encierran un espacio limitado, volviendo á entrar en sí mismas, ya haciendo una simple vuelta, ya haciendo dos ó mas, como las A, B, C, D, E, F, de la (fig. 69).

Infinitas son aquellas en que sus ramas se estienden todo lo que se quiere ó al infinito, como las G, H, I, K, L, M, (fig. 70); y mistas son aquellas que despues de haber cerrado un espacio, arrojan ramas al infinito, como las N, O, P, Q, (fig. 71).

La parte finita de una curva, que encierra un espacio, se llama una *hoja*; y el punto en que se cortan diferentes ramas de una curva se llama *nudo*. Las ramas infinitas de las curvas se dividen en dos géneros, á saber: en *parabólicas* é *hiperbólicas*; se llama hiperbólica cuando tiene asíntota, y parabólica cuando no. Toda línea algebráica de un órden ímpar, tiene á lo ménos dos ramas infinitas. Una curva algebráica no puede tener mas asíntotas rectas que unidades hay en el esponente de su órden.

Para la division de las líneas en clases y géneros se atiende al número, especie y posicion de las ramas infinitas. La línea del primer órden tiene dos ramas infinitas rectilíneas. En el segundo órden hay, ademas de la circunferencia, otra curva finita, una infinita con dos ramas parabólicas, y una con cuatro hiperbólicas. En el tercer órden hay curvas que tienen dos ramas parabólicas; otras que no tienen sinó dos ramas hiperbólicas; otras que tienen dos ramas parabólicas y dos hiperbólicas, otras que tienen cuatro ramas hiperbólicas, y otras que tienen seis.

En el cuarto órden se ecuentran curvas finitas; otras que tienen dos ramas infinitas, ó parabólicas ó hiperbólicas; otras que tienen cuatro ramas infinitas, ó parabólicas ó hiperbólicas, ó la mitad parabóli-

cas y la otra mitad hiperbólicas; otras que tienen seis ramas infinitas, ó todas hiperbólicas, ó cuatro hiperbólicas y dos parabólicas; y otras en fin que tienen ocho ramas infinitas todas hiperbólicas. En el quinto órden hay curvas que no tienen sinó dos ramas infinitas, ó parabólicas ó hiperbólicas; las hay que tienen cuatro ramas infinitas parabólicas ó hiperbólicas, ó que se componen de dos partes iguales, pero diferentes; las hay que tienen seis ramas infinitas, cuatro parabólicas y dos hiperbólicas, ó dos parabólicas y cuatro hiperbólicas, ó todas seis hiperbólicas; las hay que tienen ocho ramas, ó dos parabólicas y seis hiperbólicas, ó todas ocho hiperbólicas; las hay en fin que tienen diez ramas infinitas todas hiperbólicas.

Donde se ve, que el número de las ramas parabólicas no sobrepuja jamas al esponente del órden de la curva, ni aun á este esponente disminuido en una unidad, cuando es ímpar; que el número de las ramas hiperbólicas no sobrepuja jamas al duplo del esponente del órden de la curva; y que contando dos ramas hiperbólicas por una sola, el número de las ramas infinitas tanto parabólicas como hiperbólicas nunca sobrepuja al esponente.

Los géneros de curvas se dividen en especies por las variaciones que hay en lo que las curvas tienen de notable en el espacio finito, y que se reducen principalmente á *puntos singulares*. Se da este nombre á los puntos que se distinguen de los otros de la misma curva por alguna cosa que les es propia y peculiar.

Todo punto de una curva ó es *simple* ó es *múltiplo*: se llama punto *simple* al que pertenece solo á una rama de la curva, como cualquier punto de la G (fig. 70); y punto *múltiplo* al que es comun á muchas ramas. En particular se llama *punto duplo* al que es comun á dos ramas, como el *m* ó *n* de la P (fig. 71); *punto triplo* al que es comun á tres, como el *a* de la curva Q (fig. 71), etc.

Tambien son puntos singulares los puntos de *inflexion*, que son aquellos, como *m* de la curva K (fig. 70), en que la curva deja de ser cóncava y principia á ser convexa, ó al contrario. Cuando una recta que pasa por un punto de inflexion, corta á la curva en otro punto, y por algun supuesto desaparece la distancia, que hay entre ellos, este punto se llama de *dupla inflexion*, y del mismo modo se concibe que los puede haber de *tripla*, *cuádrupla etc. inflexion*; estos puntos de dupla, tripla inflexion etc., aunque no los perciben los sentidos en las curvas, los da á conocer la Análisis.

Los *puntos de retroceso* son aquellos, como *m* de las curvas I, M (fig. 70) en que terminan dos ramas de una curva, que tienen una misma tangente; cuando ambas ramas se vuelven sus convexidades, se llama de primera especie, como es el *m* (curva I); y cuando la una vuelve su concavidad hácia la convexidad de la otra, se llama de segunda especie, como es *m* curva C (fig. 69).

Finalmente, determinando las cantidades constantes que hay en las curvas, y que se llaman *parámetros*, se tienen los *individuos* de una misma especie (*).

(*) Todas las curvas, que resultan de dar diferentes valores á las constantes, que entran en la ecuacion de una curva, son curvas *semejantes ;* y en las cuales se verifica que las abscisas y las ordenadas de una curva son proporcionales con las de todas las curvas semejantes. Y cuando las abscisas de una curva son proporcionales con las de otra, y las ordenadas son tambien proporcionales entre sí; pero la proporcion ó razon, en que varían las abscisas, no es la misma que la proporcion ó razon en que varían las ordenadas, entónces las curvas no son semejantes; pero se parecen algun tanto, y se llaman *afines*. Sobre este punto se debe consultar el capítulo 18 del tomo 2.º de la obra de Euler intitulada: *Introductio in analisin infinitorum*, que tiene por epígrafe: *De Similitudine et Affinitate curvarum.*

Mr. Jacob en su obra intitulada: *Aplicacion del Álgebra á la Geometría*, impresa en 1842, trata, en el Cap. XVI, *de las curvas semejantes*. y dice: "Dos curvas de segundo grado son semejantes, cuando se las puede colocar de tal manera, que tirando por un mismo punto radios vectores á los diferentes puntos de las dos curvas, los radios vectores dirigidos segun las mismas rectas sean proporcionales."

Algunos otros Autores hacen consistir la semejanza en propiedades diversas de las que espresa *Euler*; y en mi concepto, no hay razon para separarse de la doctrina de este célebre Matemático.

Mr. *Bourdon* en la pág 429 de la cuarta edicion de su *Aplicacion del Álgebra á la Geometría*, impresa en 1837 pone un artículo sobre *las secciones cónicas semejantes*, y dice; *dos elipses ó dos hipérbolas* se dice que *son semejantes, cuando tienen sus ejes proporcionales*; y añade que esta denominacion proviene de que las dos curvas gozan entónces de las mismas propiedadades que las figuras semejantes de la Geometría. En lo que manifiesta sobre este punto, coloca las dos curvas, de manera que sean concéntricas y sus ejes se confundan.

Mr. Leroy, en el cap. IX de su obra intitulada: *Análisis aplicada á la Geometría de las tres dimensiones*, impresa en este mismo año de 1843, dice: "dos curvas de un grado cualquiera, situadas en el mismo plano (ó en planos paralelos), se dice que son *semejantes*, y que estan *semejantemente colocadas*, cuando despues de haber tomado en la primera un punto arbitrario, y tirado por él varios radios vectores, se puede hallar en la segunda otro punto tal, que los radios vectores trazados paralelamente á los de la primera, y dirigidos en el mismo sentido, tengan con ellos una relacion constante." Despues manifiesta en qué casos las curvas solo son *semejantes de forma*, y no *de posicion*, y cuando son *concéntricas*. Indica el caso de *semejanza inversa*; manifiesta que *dos parábolas, cuyos ejes son paralelos, son siempre semejantes de forma y de posicion, cualesquiera que sean sus parámetros ;* que *las diversas secciones paralelas, hechas en una misma superficie de 2.º órden son curvas semejantes de forma y posicion*; que *dos superficies de un grado cualquiera son semejantes de forma y de posicion, cuando, despues de haber tirado en la 1.ª diversos radios vectores que partan*

Clasificar una línea curva, y determinar su posicion, su naturaleza y su forma, por medio de su ecuacion, es lo que se llama *discutir la ecuacion de la curva.*

De las líneas de segundo órden ó secciones cónicas.

206 Despues de haber dado ya una idéa general acerca de la clasificacion de las curvas, vamos á pasar á las mas sencillas, que son las del primer género, ó líneas de segundo órden.

No hay mas líneas de 2º órden que las que pueden resultar de dar diferentes secciones á un cono, y por lo mismo á estas se les llama tambien *secciones cónicas.* Los antiguos manifestaban su teoría dando la seccion al cono; y deduciendo sus ecuaciones en valores de los datos que entran en el cono, como son la base, los lados etc.; el Marqués del Hospital fijó la nuturaleza de cada una de ellas en una propiedad de las mas sencillas, de donde deducía toda su teoría y construccion; y finalmente, los modernos toman la ecuacion general de estas líneas, deducen de ella las diferentes formas que pueden tener, y manifiestan las diferentes curvas que puede haber. Cualquiera de estos medios que se elija es bueno, con tal que de él se deduzcan los demás naturalmente; y así, nosotros elegirémos el primero, porque esto nos facilitará la aplicacion de la Geometría Analítica, y al mismo tiempo servirá para guardar el órden cronológico que se ha seguido en su invencion, aunque lo manifestarémos con un grado de generalidad muy superior al que tuvo en sus principios (*).

---

de un mismo punto arbitrario, se puede hallar en la 2.ª un punto tal que los radios vectores de esta superficie, dirigidos paralelamente á los primeros, y en el mismo sentido, tengan con aquellos una relacion constante. Y deduce que *dos superficies de 2.º órden, concéntricas y semejantes de forma y de posicion, están cortadas por un mismo plano cualquiera segun curvas semejantemente colocadas y concéntricas.*

(*) *El método que vamos á esponer es del todo analítico, y en él se verá la escelencia de este método. Sin embargo, debemos hacer una advertencia, y es que si no se estudia bien, de ningun modo se puede entender; porque toda la doctrina se halla tan unida, que no se verá una proposicion aislada que no dependa de todas las anteriores; pero estudiado con órden, presentará la mayor facilidad. Esta es tambien una de las razones porque se dice que el método analítico no es tan bueno para la enseñanza, porque por él no se le podrá decir á un principiante que demuestre aisladamente una proposicion, que es lo que suele sorprender á los poco inteligentes cuando se prueban las fuerzas del principiante; pero como el verdadero sabio conoce que esto no es mas que un efecto mecánico que desaparece luego que se deja de estudiar, y solo atiende á ver si han percibido bien el espíritu de los métodos, vamos á esponer toda*

Para esto consideraremos un cono recto, en que las coordenadas del vértice, la posicion del eje y el ángulo en el vértice, sean indeterminados con relacion á los tres planos rectangulares de las coordenadas, y manifestarémos que haciendo concurrir con él un plano secante en posiciones diferentes, se obtienen para la interseccion, todas las curvas posibles de 2º grado: tomarémos por plano secante el de las xz.

Sean x', z', u', las coordenadas del vértice del cono, como su eje es una recta que pasa por este punto, llamando X, Z, U, á sus coordenadas, tendrá por ecuaciones (§ 184 (p)),

$$X-x'=\alpha(U-u'),\quad Z-z'=\mathcal{C}(U-u'):$$

espresando aquí por α y $\mathcal{C}$, lo que allá por a y b.

La recta generatriz, esto es, el lado del cono debe pasar tambien por el vértice en todas sus posiciones; por consiguiente, si suponemos que sus coordenadas sean x, z, u, sus acuaciones serán tambien de la forma

$$\{x-x'=\alpha'(u-u'),\ \text{y}\ z-z'=\mathcal{C}'(u-u')\}\ \text{(C)},$$

siendo α', $\mathcal{C}'$, constantes para la misma generatriz, y variables de una generatriz á otra (183).

207 Como la generatriz debe formar siempre el mismo ángulo con el eje, tendrémos que si se designa el coseno de este ángulo por M, se tendrá ((B) § 186)

$$\frac{1+\alpha\alpha'+\mathcal{C}\mathcal{C}'}{\sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}\sqrt{1+\alpha'^2+\mathcal{C}'^2}}=M,$$

que elevando al cuadrado y quitando el divisor, dá

$$(1+\alpha\alpha'+\mathcal{C}\mathcal{C}')^2=M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)(1+\alpha'^2+\mathcal{C}'^2).$$

Esta ecuacion subsiste para cada posicion de la recta generatriz; si en ella se sustituyen en vez de α' y $\mathcal{C}'$ sus valores $\frac{x-x'}{u-u'}$, $\frac{z-z'}{u-u'}$, sacados de las ecuaciones (C), el resultado, no correspondiendo ya particularmente á ninguna de estas posiciones, pertenecerá á la superficie descrita, y se tendrá

$$\left(1+\alpha\frac{x-x'}{u-u'}+\mathcal{C}\frac{z-z'}{u-u'}\right)^2=M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)\left(1+\left(\frac{x-x'}{u-u'}\right)^2+\left(\frac{z-z'}{u-u'}\right)\right);$$

que, reduciendo los enteros á la especie de los quebrados, y omitiendo

---

esta teoría analíticamente, bien persuadidos de que los que la estudien con órden no sólo llegarán á aprender las proposiciones que encierra, sino que se llegarán á familiarizar en tales términos con el método de invencion, que en lo sucesivo saldrán airosos con su auxilio de cuantas investigaciones geométricas se les presenten. Por estas razones hemos procurado coordinar esta doctrina en el órden mas natural, y que se presente con toda claridad, elegancia y sencillez.

el divisor $(u-u')^2$ que resulta comun en ambos miembros, se convierte en $[u-u'+\alpha(x-x')+\mathcal{C}(z-z')]^2=$
$M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)[(u-u')^2+(x-x')^2+(z-z')^2]$;
ecuacion que conviene á todos los puntos de la superficie cónica.

208 Para los puntos que están situados en el plano de las xz se debe verificar ademas $u=0$, porque u espresa lo que cada punto dista de dicho plano, lo que da $[\alpha(x-x')+\mathcal{C}(z-z')-u']^2=$
$M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)[(x-x')^2+(z-z')^2+(-u')^2]$ (4);
que *es la ecuacion que espresa la interseccion del cono con el plano de las* xz; ella comprende todas las secciones cónicas, pues que el ángulo en el vértice del cono y su posicion en el espacio, son de todo punto indeterminados; y como es en general del segundo grado con relacion á las variables x y z, se ve que las secciones cónicas son curvas del segundo grado.

{ 209 Recíprocamente, toda ecuacion del segundo grado pertenece á una seccion cónica; porque representando esta ecuacion por la fórmula
$Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0$ (5),
que es la mas general de este grado, no contendrá otras indeterminadas que los coeficientes A, B, C, D, E, F; y como la ecuacion (4) contiene tambien seis indeterminadas x', z', u', α, $\mathcal{C}$, M, se deduce que las podrémos determinar de manera que la ecuacion (4) sea idéntica con la (5); y en efecto se obtienen así para estas arbitrarias, valores siempre reales escepto en un solo caso, que es aquel en que la ecuacion (4) es imposible; de lo que hablarémos luego que hayamos examinado las diversas formas que la ecuacion (4), y las curvas que representa, pueden tener, segun las diversas situaciones en que se coloca el plano secante con relacion al cono.}

210 Para seguir estas modificaciones con mas facilidad, consideremos un cono recto ABCB'A' (fig. 72), cuyo vértice sea C y DCD' el eje. Imaginemos que este eje siendo al principio perpendicular al plano secante MN, tome sucesivamente con relacion á él toda clase de inclinaciones, y veamos cual es la forma de las curvas que de ello resultan.

Cuando el eje es perpendicular al plano secante, la seccion es una curva cerrada, y se demuestra en los elementos de Geometría (I. 604) que esta curva es una *circunferencia de círculo*, la que se reduce á un punto, si el plano secante pasa por el vértice del cono.

211 Cuando el eje principia á inclinarse, la curva queda aun cerrada; pero ya no es círculo, y toma el nombre de *elípse* (fig. 73).

212 Esta elípse se alarga á medida que el eje se inclina sobre el plano secante; y cuando este llega á ser paralelo á una de las generatrices del cono, deja de ser reentrante en sí misma, se estiende indefinidamente sobre una de las caras de la superficie cónica, y toma el nombre de *parábola* (fig. 74).

213 Hasta aquí el plano secante no encontraba sinó á una de las caras de la superficie del cono; pero inclinándose mas el eje, las encuentra á ambas; la seccion se estiende entónces indefinidamente en todos sentidos, y se llama *hipérbola* (fig. 75).

Las dos partes opuestas ó las dos ramas de la hipérbola se aproximan al paso que el vértice se acerca al plano secante; y cuando coincide con él, se reducen á dos rectas que son dos generatrices de la superficie cónica, y se cortan en su vértice.

214 Para averiguar con mas facilidad las propiedades de las curvas, cuya existencia acabamos de reconocer, colocarémos el cono en situaciones propias para dar intersecciones simétricas con relacion á los ejes de las coordenadas x y z, á que se hallan referidas.

Coloquemos desde luego el vértice de la superficie cónica en el mismo eje de las coordenadas u, para lo cual será preciso hacer $x'=0$, $z'=0$, porque el carácter (179) del eje de las u es $x=0$, $z=0$, $u=c$.

Coloquemos ademas el eje en el mismo plano de las xu, para lo cual será necesario hacer $\mathcal{C}=0$; porque siendo (206) las ecuaciones de este eje $X-x'=\alpha(U-u')$, $Z-z'=\mathcal{C}(U-u')$, se convertirán por estas suposiciones en $X=\alpha(U-u')$, $Z=0$, y la segunda que pertenece al plano de las xu indicará que el eje está situado en él. Con estas simplificaciones, la ecuacion general (4) de la interseccion será

$$(\alpha x-u')^2-M^2(1+\alpha^2)(x^2+z^2+u'^2)=0 \quad (6).$$

El cono se halla entónces en la situacion representada por la (fig. 76); el eje DCD′ está en el plano mismo de las xu, y α espresa la tangente trigonométrica del ángulo DCO que él forma con el eje de las u, y OX es el lado de las x positivas.

215 Si queremos situar el cono de manera que su eje sea perpendicular al plano de las xz, como entónces el eje del cono coincidirá con el eje de las u, resultará $\alpha=0$, lo que reducirá la ecuacion (6) de la interseccion á $x^2+z^2=u'^2\left(\frac{1-M^2}{M^2}\right)$, que pertenece (fig. 72), como verémos despues, á una circunferencia de círculo cuyo centro está en el punto O, orígen de las coordenadas.

Y siendo M el coseno del ángulo que forman las generatrices del cono con su eje, $\frac{1-M^2}{M^2}$ es el cuadrado de su tangente (*), $u'\times\frac{\sqrt{1-M^2}}{M}$ ó CO×tang.OCE representa (I. 650) la línea OE que

(*) *Porque* $tang.^2=\frac{sen.^2}{cos.^2}=\frac{1-cos.^2}{cos.^2}$.

es el radio del círculo. Haciendo para mayor sencillez este radio igual con r, tendrémos $x^2+z^2=r^2$, para la ecuacion de la seccion hecha en el cono por un plano perpendicular á su eje.

216 No coloquemos ya el cono verticalmente, sinó hagamos de modo que *una de las generatrices coincida con el eje de las u*. Para esto, será necesario que el ángulo DCO (fig. 76) formado por el eje del cono y el eje de las u, sea igual al ángulo DCA que forma el eje del cono con la generatriz AC; pero el ángulo DCA tiene por coseno á M, el ángulo DCO tiene por tangente á α, y por consiguiente por coseno á $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ (**).

Así, para colocar el cono en la situacion pedida, basta suponer $M=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$ ó $M^2(1+\alpha^2)=1$; entónces la ecuacion (6) de la interseccion se reduce á $\alpha^2x^2-2\alpha u'x+u'^2-x^2-z^2-u'^2=0$, que haciendo las reducciones correspondientes, mudándole los signos y descomponiendo en factores, toma esta simple forma:

$$z^2+x^2(1-\alpha^2)+2\alpha u'x=0 \quad (7);$$

y el cono se halla colocado como lo indica la (fig. 77), representando α la tangente del ángulo DCA.

217 Si α es menor que 1, el ángulo DCA es menor (I. 632 cor. 2°), que 45° ó $\frac{1}{4}\pi$; el ángulo BCA formado por las dos generatrices opuestas es menor que uno recto; el plano de las xz encuentra entónces (I. 386*b*) á todas las generatrices de la superficie sobre una de las caras que la componen; y la interseccion es una *elipse*, como representa la (fig. 77).

218 Si $\alpha=1$, el ángulo DCA$=45°$ ó $\frac{1}{4}\pi$, y por consiguiente su duplo BCA será recto; la generatriz BC viene á ser paralela al plano secante, y la seccion es una *parábola*, como representa la (fig. 78); y la ecuacion (7) de la interseccion se reduce á

$$z^2+2u'x=0.$$

219 Si α es mayor que 1, el ángulo BCA es mayor que uno recto; por lo que ACB' será menor que uno recto; y en virtud de lo espuesto (I. 386*b*) el plano de las xz encuentra á las dos caras de la superficie cónica, y la interseccion es una *hipérbola*, como representa la (fig. 79); la ecuacion (7) de la intersecion será

$$z^2-x^2(\alpha^2-1)+2\alpha u'x=0.$$

220 Si al mismo tiempo que α es mayor que 1, u' es igual con

(*) *Porque siendo* $sec.=\frac{1}{cos.}$, *resulta* $cos.=\frac{1}{sec.}=\frac{1}{\sqrt{1+tang.^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

cero, es decir, si el vértice del cono se baja hasta encontrarse en el plano de las xz, la ecuacion (7) dará $z=\pm x\sqrt{\alpha^2-1}$, y la hipérbola se reduce á dos rectas que pasan por el punto A, orígen de las coordenadas.

221 Siendo OC igual con u' (fig. 77), $\alpha u'$ representa (I. 650) la recta OD. Si se supone que esta longitud OD permaneciendo la misma é igual con r, el vértice del cono se aleje mas y mas del plano de las xz, el ángulo DCO y su tangente que está espresada por α, vendrán á ser cada vez menores; en fin, estando el vértice infinitamente remoto, se tendrá $\alpha=0$, el cono se convierte en cilindro, y la (ec. 7) de la interseccion será $z^2+x^2+2rx=0$.

Y pues que el plano de las xz ha vuelto á ser perpendicular al eje dèl cono, que ahora se ha convertido en cilindro, debe pertenecer á una circunferencia de círculo como representa la (fig. 80) (*).

(*) *No será inoportuno el demostrar que la seccion hecha oblicuamente en el cilindro recto es una elipse.*

Para esto, supongamos que ABCD (fig. q) sea el rectángulo que proviene de la seccion de un cilindro recto, cuyo radio supondrémos sea r, *por un plano que pasa por su eje. Sea EMK la seccion oblicua hecha en el cilindro por un plano, cuya traza ó interseccion con dicho rectángulo sea EK; y concibamos que, por un punto cualquiera M de la seccion oblícua, pase un plano paralelo á la base del cilindro, ó perpendicular al eje. La comun interseccion del plano oblicuo con el plano perpendicular será la PM, que á un mismo tiempo es ordenada de la seccion LMQ, que es un círculo (I. 596), y de la seccion EMK, cuya forma tratamos de indagar. La MP, con referencia al círculo LMQ es (I. 488..1.°) media proporcional entre los dos segmentos LP y PQ del diámetro LQ: luego tendrémos* $PM^2=LP.PQ$; *y como PM es ordenada de la seccion, si la espresamos por* z, *tendrémos* $z^2=LP.PQ$.

Ahora, si tomamos por orígen de las abscisas el punto E de la seccion oblicua, tendrémos $EP=x$; *y haciendo* $EK=2a$, *será* $PK=2a-x$, *y los triángulos semejantes ELP, EGK, darán*

$$EK:EP::GK:LP=\frac{EP.GK}{EK}=\frac{x.2r}{2a}=\frac{xr}{a}.$$

Los triángulos KPQ, KEN, tambien semejantes, dan

$$EK:EN::PK:PQ=\frac{EN.PK}{EK}=\frac{2r.(2a-x)}{2a}=\frac{r.(2a-x)}{a},$$

Sustituyendo estos valores de LP y PQ, en el valor de z^2, *tendrémos*

$$z^2=\frac{xr}{a}.\frac{r.(2a-x)}{a}=\frac{r^2}{a^2}(2ax-x^2);$$

ecuacion que coincide con la (G § 239) sin mas diferencia de que allí representamos por b^2 *lo que aqui por* r^2. *Luego* la curva que se origina de dar una seccion oblicua al cilindro recto es una *elipse*, que tiene por eje mayor la traza del plano secante sobre el rectángulo que pasa por el eje del cilindro, y por eje menor el diámetro del mismo cilindro.

222 De todo esto resulta, que *la ecuacion* (7) *puede representar todas las secciónes cónicas, y que basta para obtenerlas hacer en ella variar la cantidad* α *que espresa la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta generatriz con el eje del cono, y que segun sea el coeficiente* $1-\alpha^2$ *de* x^2 *positivo, nulo ó negativo, así la ecuacion* (7) *pertenecerá á una elípse, á una parabola ó á una hipérbola*; de manera que la naturaleza de la interseccion no depende sinó del signo de este coeficiente. *La elipse comprende como casos particulares el círculo y el punto; la parábola comprende tambien como caso particular una línea recta única; y la hipérbola tambien comprende como caso particular dos rectas que se cortan.* Por lo que las secciones del cono son siete, á saber: *el punto, una línea recta, dos rectas, el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola.*

Vamos ahora á examinar en particular cada una de estas curvas, y á deducir de las ecuaciones que las representan, su posicion, su forma y sus principales caractéres y propiedades.

Del círculo.

223 Cortando un cono recto con un plano perpendicular á su eje, hemos tenido para la ecuacion de la interseccion (§ 215) $x^2+z^2=r^2$.

Siendo las coordenadas x y z perpendiculares entre sí, $\sqrt{x^2+z^2}$ espresa (171) la distancia de un punto de la curva al orígen de las coordenadas; esta distancia es constante en virtud de la ecuacion anterior, pues r lo es; por consiguiente la curva es una *circunferencia de círculo*, cuyo centro está en el orígen; del mismo modo se pueden determinar todas las circunstancias de su curso.

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, es necesario hacer $z=0$, lo que da $x=\pm r$, es decir, que se verifica en dos puntos diferentes, situados de uña y otra parte del orígen, y á una distancia r del eje de las z; luego si suponemos que A sea el punto de orígen y AX, AZ los ejes (fig. 81), cuyas prolongaciones Ax, Az, servirán para tomar las coordenadas negativas, tendrémos que tomando en el eje de las x, las distancias AB y AB′ iguales con la magnitud r, los puntos B y B′ serán las intersecciones de la circunferencia con el eje de las x.

Haciendo $x=0$ se tendrán los puntos en que la curva corta al eje de las z, cuya suposicion da $z=\pm r$.

Así, estos puntos son dos, están situados hacia diferente parte, y á una distancia r del eje de las x. Luego si tomamos las distancias AD′ y AD iguales con r, los puntos D′ y D serán las intersecciones de la circunferencia con el eje de las z.

224 Para seguir el curso de la curva en los puntos intermedios, to-

memos en general el valor de z; y será $z=\pm\sqrt{r^2-x^2}$; siendo los dos valores de z iguales y de signo contrario, manifiestan que la curva es simétrica por la parte inferior y superior del eje de las x.

Los valores de z son reales, ya se tome x positiva ó negativa, mientras que $x<r$; son cero cuando $x=r$, é imaginarios cuando $x>r$; de donde se infiere que la curva está limitada entre las abscisas $+r$ y $-r$, y que no se estiende mas allá.

225 La ecuacion propuesta se puede poner bajo esta forma (I. §179) $z^2=r^2-x^2=(r+x)(r-x)$; que da $r+x:z::z:r-x$; pero (fig. 81)

$$r+x=B'A+AP=B'P,\quad r-x=AB-AP=PB,\quad z=MP;$$

luego tendrémos $B'P:MP::MP:PB$, lo que nos dice, que *una recta* PM, *bajada perpendicularmente desde un punto de la circunferencia al diámetro*, *es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro*; cosa que ya sabíamos (I. 488 1ª)

226 Si concebimos que por el punto B′ cuyas coordenadas son $z'=0$ y $x'=-r$, pase una recta cuyas coordenadas sean X, Z, inclinada de un modo cualquiera, pero que la tangente trigonométrica del ángulo que forme con el eje de las x sea α, tendrá por ecuacion (§163)

$$Z=\alpha(X+r).$$

Si por el punto B, cuyas coordenadas son $z'=0$ y $x'=r$, concebimos otra recta tambien inclinada de un modo cualquiera, y cuyas coordenadas sean X', Z', tendrá por ecuacion $Z'=\alpha'(X'-r)$.

Supongamos que estas dos rectas se deban cortar sobre la circunferencia del mismo círculo, y tendrémos que para esto será necesario que en aquel punto sean iguales las coordenadas de estas rectas y de la circunferencia; luego deberá ser $X=X'=x$, y $Z=Z'=z$; por lo que las ecuaciones anteriores se convertirán en

$$z=\alpha(x+r),\quad z=\alpha'(x-r),$$

que multiplicadas dan $z^2=\alpha\alpha'(x+r)(x-r)=\alpha\alpha'(x^2-r^2)$; y como por la naturaleza del círculo $z^2=r^2-x^2$, será

$$\alpha\alpha'(x^2-r^2)=r^2-x^2=-(x^2-r^2),$$

que suprimiendo el factor x^2-r^2, da $\alpha\alpha'=-1$, ó $\alpha\alpha'+1=0$; es decir (168), que *dos rectas tiradas por los estremos opuestos de un mismo diámetro, y que se encuentran en la circunferencia, son perpendiculares entre sí*, propiedad que ya sabíamos (I. 454 cor. 3.°).

En general, se podrían deducir de la sola ecuacion del círculo todas las propiedades que demuestra la Geometría elemental, y la razon es que estas propiedades son resultados de la propiedad que encierra su definicion, que está traducida analíticamente en su ecuacion.

227 Recíprocamente, partiendo de una de las propiedades que hemos demostrado, y volviendo á tomar de un modo inverso la marcha que hemos seguido, se volvería á obtener la ecuacion del círculo, si esta propiedad no conviniese sinó á él solo, en cuyo caso sería igual con su definicion.

La forma, que acabamos de examinar, no es la sola bajo que se presenta la ecuacion del círculo; varía con la posicion de los ejes de las coordenadas; pero las unas se reducen á las otras.

En efecto, supongamos que se quiera *cifrar la naturaleza del círculo* $mMm'M'$ (fig. 82) *en una ecuacion*; para esto, elegirémos arbitrariamente un punto A que sirva de orígen, y por él considerarémos tirados los ejes AX, AZ. Lo primero que tenemos que fijar es la posicion del centro con relacion á dichos ejes; y así, tirándo desde él las perpendiculares CE, CF, á los ejes AX, AZ, se tendrán las coordenadas de dicho punto, las que señalarémos por b y a, y por r el radio.

228 Ahora, para cifrar la naturaleza de esta curva en una ecuacion, observarémos en general, que en la Geometría solo cuatro cosas pueden suministrar ecuaciones, á saber: *el axioma de que el todo es igual con sus partes*, la propiedad de que en *un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual con la suma de los cuadrados de los catetos*, ó *un cateto igual á la raiz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa ménos el cuadrado del otro cateto*; la de los *triángulos semejantes* que da proporciones; de dónde multiplicando estremos y medios, se tienen inmediatamente ecuaciones; y la de *las líneas proporcionales* en que sucede lo mismo; por lo que, para cifrar la naturaleza de dicha curva en una ecuacion, valiéndonos de la propiedad del círculo de que todos las radios son iguales, bajarémos desde un punto cualquiera M la perpendicular MP, tirarémos al centro el radio MC, y el triángulo rectángulo GMC, nos dará $MG^2+GC^2=MC^2$.

Tambien nos conduciría á una ecuacion semejante cualquiera otra propiedad del círculo; en efecto, si la ecuacion la quisiésemos deducir de que la MG es media proporcional entre los segmentos del diámetro, tendríamos por esta propiedad $mG:MG::MG:Gm'$; de donde, multiplicando estremos y medios, será

$MG^2=m'G\times Gm=(m'C-CG)(Cm+GC)=(MC-CG)(MC+CG)=MC^2-CG^2$;

que trasladando da $MG^2+CG^2=MC^2$, que es la que obtuvimos ántes. Pero $MG=MP-GP=MP-CE=z-b$, $GC=CF-FG=CF-AP=a-x$; luego si sustituimos estos valores en la ecuacion de arriba, llamando r al radio MC, será

$$(z-b)^2+(a-x)^2=r^2 \quad \text{ó} \quad z^2-2bz+b^2+a^2-2ax+x^2=r^2 \ (*).$$

(*) Aun podemos sacar otra ecuacion mas general para la circunferencia del círculo, suponiendo que los ejes de las coordenadas no sean rectangulares, sinó que formen un ángulo cualquiera ϕ.

Para esto, debemos observar, que si en la espresion del cuadrado de la distancia entre dos puntos, hallada (nota del § 170), suponemos que uno de estos puntos, por ejemplo el x', z', permanezca fijo, mientras que el otro pueda tomar todas las posiciones posibles, bajo la condicion de que el cuadrado de la distancia de estos dos puntos sea siempre la misma, el punto móvil describirá una circun-

229 Si en esta ecuacion suponemos $b=0$, esto es, que el centro se halle en el eje de las abscisas, se convertirá en $z^2+a^2-2ax+x^2=r^2$, que espresa la naturaleza del círculo tomando el orígen en F.

Si ademas suponemos que $a=0$, esto es, que la distancia del eje de las ordenadas al centro sea cero, ó que tambien pase por el centro el eje de las ordenadas, se tendrá $z^2+x^2=r^2$; ecuacion que espresa la naturaleza del círculo tomando el orígen en el centro C, como ya sabíamos (223).

Si suponemos $b=0$ y hacemos $a=r$, esto es, que diste el punto de orígen del centro una cantidad espresada por el radio, lo que equivale á tomar el orígen en la circunferencia, la ecuacion primitiva se convertirá en $z^2+x^2-2rx+r^2=r^2$, que se reduce á $z^2=2rx-x^2$, y espresa la naturaleza del círculo tomando el orígen en un punto de la circunferencia tal como m'.

Cuando digimos (221) que la ecuacion $z^2+x^2+2rx=0$, correspondía á un círculo, considerábamos que las abscisas positivas se contaban desde A (fig. 80) hacia la izquierda, y aquí consideramos las positivas hacia la derecha del orígen; luego si queremos que coincida la una ecuacion con la otra, mudarémos el signo á la x, y haciéndolo en la del párrafo (221) se tendrá

$$z^2+(-x)^2-2rx=0, \text{ que da } z^2=2rx-x^2,$$

que es la misma que acabamos de obtener.

230 Cualquiera de las ecuaciones del círculo que hemos sacado, es suficiente para construir esta curva por puntos; y así, tomarémos por ejemplo la última ecuacion $z^2=2rx-x^2$.

Aquí observarémos, ante todas cosas, que hay una cantidad constante $2r$ en la ecuacion, y que por consiguiente, variando este valor, variará tambien la circunferencia que se trace, es decir, será mayor, menor, etc. A estas cantidades constantes que entran en las ecuaciones que corresponden á curvas, se les llamaba antiguamente *parámetros*; y así, lo primero que debemos hacer es determinar á nuestro arbitrio el valor de $2r$; supongámosle igual con una línea tal como AB (fig. 83), la cual concibiéndola dividida en un número cualquiera de partes tal como 10, espresando 1 el valor de cada una de estas partes, se convertirá la ecuacion en $z^2=10x-x^2$, que da $z=\pm\sqrt{10x-x^2}$.

Supongamos ahora que la abscisa $x=0$, y tendrémos $z=\pm 0$,

---

ferencia cuyo radio es r; por lo que si remplazamos D por r, y en vez de las coordenadas x'', z'' del segundo punto, que considerábamos ántes como fijo, ponemos las x, z, porque ahora, debiendo corresponder á las diferentes posiciones, son variables, la ecuacion de la espresada nota será

$$(x-x')^2+(z-z')^2+2(x-x')(z-z')\cos.\phi=r^2.$$

que indica que el punto de orígen A ha de ser un punto de la curva; suponiendo la abscisa $x=1$, esto es, igual con la distancia que hay desde el orígen hasta el punto 1, será

$$z=\pm\sqrt{10\times1-1^2}=\pm\sqrt{10-1}=\pm\sqrt{9}=\pm3,$$

que dice, que en el punto 1 se levante una perpendicular ú ordenada tal como 1M, igual á *tres* veces la distancia A1 que hemos tomado por unidad; y como á una misma abscisa corresponde otro valor igual negativo de la ordenada, tambien se bajará desde el mismo punto 1 una perpendicular igual con 3, tal como 1*m*.

Suponiendo $x=2$, resulta $z=\pm\sqrt{20-4}=\pm\sqrt{16}=\pm4$, por lo que tomando dos ordenadas, la una positiva y la otra negativa iguales con 4, los puntos M′, *m*′, tambien corresponderán á la curva.

Haciendo $x=3$, resulta $z=\pm\sqrt{30-9}=\pm\sqrt{21}=\pm4,5$; que tomando ordenadas de esta magnitud, se tendrán los puntos M″, *m*″.

Haciendo $x=4$, resulta $z=\pm\sqrt{40-16}=\pm\sqrt{24}=\pm4,8$; que tomando las ordenadas 4M‴, 4*m*‴, de esta magnitud, los puntos M‴, *m*‴, corresponderán á la curva.

Suponiendo $x=5$, será $z=\pm\sqrt{50-25}=\pm\sqrt{25}=\pm5$; y tomando las ordenadas de esta magnitud se tendrán los puntos M^{iv}, *m*^{iv}.

Haciendo $x=6, 7, 8, 9, 10$, resultan para z los mismos valores que ántes se obtuvieron para cuando era $x=4, 3, 2, 1, 0$.

Haciendo $x=11$, resulta $z=\pm\sqrt{110-121}=\pm\sqrt{-11}$; valor imaginario, que indica que mas allá del punto B no hay curva.

231 Al trazar una curva por puntos, no solo se han de dar á la abscisa todos los valores positivos posibles hasta que resulten ordenadas imaginarias, ó se vea que crecen indefinidamente, sinó que se han de dar tambien todos los valores negativos posibles. Así, ahora supondrémos $x=-1$, lo que da $z=\pm\sqrt{-10-1}=\pm\sqrt{-11}$,

valor tambien imaginario, el cual indica que no hay curva mas á la izquierda del punto de orígen A; por lo que haciendo pasar ahora una curva por los puntos M, *m*, M′, *m*′, M″, *m*″, M‴, *m*‴ etc., esta será *la circunferencia del círculo*, y quedará trazada con toda exactitud.

232 Si llamamos a al valor $2r$, la ecuacion $z^2=2rx-x^2$ se nos convertirá en $z^2=ax-x^2=(a-x)x$, en la que se espresa, que el cuadrado de la ordenada es igual al producto de las dos partes en que queda dividida una línea que hace oficios de parámetro; y como los Matemáticos se han convenido en llamar *familia de curvas* á aquellas que están comprendidas en una ecuacion de esponentes indeterminados, resulta que el círculo, que acabamos de determinar, lo podrémos mirar como la madre de una numerosa familia, á saber, de la *de los círculos*

de todos los grados que están comprendidos en la ecuacion

$$z^{m+n}=(a-x)^m x^n,$$

que podríamos traducir en definicion, diciendo: *que se comprenden bajo la familia de los círculos, á todas aquellas curvas en que se verifica que el producto de las dos partes en que queda dividida una línea suya, que se puede llamar parámetro, por la ordenada, elevadas cada una á una potencia cualquiera, es igual á una potencia de las ordenadas espresada por la suma de los esponentes de las potencias de dichas partes del parámetro.*

Propongámonos por último *hallar la ecuacion polar de la circunferencia de círculo.*

Para esto, elegirémos la primera ecuacion que hemos considerado (§ 223); la cual, espresando el radio r por a, es $x^2+z^2=a^2$.

Sustituyendo en ella en vez de x, z, sus valores (§ 172 (2)), se nos convierte en $(z'+r\text{sen.}\varphi)^2+(x'+r\cos.\varphi)^2=a^2$;

que, practicando las operaciones y ordenando, teniendo presente que $\text{sen.}^2\varphi+\cos.^2\varphi=1$; se convierte en

$$r^2+(z'\text{sen.}\varphi+x'\cos.\varphi).2r+z'^2+x'^2-a^2=0;$$

que es *la ecuacion polar mas general de la circunferencia de círculo.*

De la Elipse.

233 Cortando un cono, cuyo ángulo en el vértice sea menor que $\frac{1}{2}\pi$, por un plano perpendicular á una de sus generatrices, y por consiguiente de modo que encuentre á todas las generatrices sobre una de los caras de la superficie del cono, hemos tenido para la ecuacion de la interseccion (§§ 216 y 217) $z^2+x^2(1-\alpha^2)+2\alpha u'x=0$,

en el supuesto de ser $\alpha<1$, las coordenadas x, z, perpendiculares entre sí, y que α y u' eran positivas, y hemos dicho que esta curva se llamaba *elipse.*

Para tener las puntos en que corta al eje de las x, hagamos $z=0$, con lo que resultará $x^2(1-\alpha^2)+2\alpha u'x=0$, lo que da para x dos valores: $x=0$, $x=-\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$, es decir, que esto se verifica en dos puntos diferentes, de los cuales uno es el mismo orígen de las coordenadas que suponemos colocado en B (fig. 84), y el otro está situado del lado de las abscisas negativas tal como en B', á una distancia $\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$ de este orígen.

Haciendo $x=0$ se tendrán los puntos en que la curva corta al eje de las z, cuya suposicion da $z=0$; es decir, que esto no tie-

ne lúgar sinó en un punto, que es el orígen mismo de las coordenadas, esto es en B.

234 Para seguir el curso de la curva, tomemos en general el valor de z, y tendrémos $z=\pm\sqrt{-2\alpha u'x-(1-\alpha^2)x^2}$;
cuyos valores siendo iguales y de signo contrario, manifiestan que la curva es simétrica de una y otra parte del eje de las x.

Mientras que x permanezca positiva, z permanece imaginaria, pues que $1-\alpha^2$ (§ 217) y u' son cantidades positivas; luego la curva no se estiende del lado de las abscisas positivas, y es limitada en este sentido por el eje de las z.

235 Suponiendo x negativa, se tendrá $z=\pm\sqrt{+2\alpha u'x-(1-\alpha^2)x^2}$.

Estos valores de z son reales mientras que $(1-\alpha^2)x^2<2\alpha u'x$ ó $x<\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$, pero vuelven á ser imaginarios mas allá de este límite; porque si se tiene $x>\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$, se saca de aquí $(1-\alpha^2)x^2>2\alpha u'x$, que hace negativa la cantidad que hay debajo del radical.

Luego la curva no se estiende del lado de las abscisas negativas, sinó desde el orígen de las cordenadas hasta la abscisa $\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$ en que corta al eje de las x; así, las dos ramas que la componen, despues de haberse juntado en el orígen de las coordenadas, se estienden simétricamente la una encima, y la otra debajo del eje de las abscisas, se vuelven á juntar de nuevo sobre este eje y entran en sí mismas, la curva es por consiguiente cerrada como representa la (fig. 84).

236 Mudemos el orígen de las coordenadas al punto A medio de la línea $BB'=\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$, á igual distancia de los dos vértices B, B'.

Si AP es una nueva abscisa designada por x', la antigua será BP ó $-x$, y se tendrá siempre

$$x=-BP=-(AB-AP)=-(\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2}-x')=x'-\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2}.$$

Sustituyendo en vez de x este valor en la ecuacion de la curva (§ 233), tendrémos $z^2+(1-\alpha^2)(x'-\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2})^2+2\alpha u'(x'-\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2})=0$,
que ejecutando las operaciones y reduciendo, se convierte en

$$z^2+(1-\alpha^2)x'^2-\frac{\alpha^2u'^2}{1-\alpha^2}=0, \text{ ó en } z^2+(1-\alpha^2)x'^2=\frac{\alpha^2u'^2}{1-\alpha^2} \text{ (D)};$$

haciendo $z=0$ se vuelve á encontrar $x'=\pm\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2}$ ó $x'=\pm AB$ como debía ser; pero aquí la curva encuentra en dos puntos al nuevo eje de las z, porque haciendo $x'=0$, se tiene $z=\pm\frac{\alpha u'}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, que manifiesta los límites C, C' de la curva en el sentido de las ordenadas.

237 La ecuacion de la curva toma una forma muy alegante introduciendo en ella las coordenadas de los puntos en que corta á los ejes.

Así es, que si se hace $a=\frac{\alpha u'}{1-\alpha^2}$, $b=\frac{\alpha u'}{\sqrt{1-\alpha^2}}$, que da $b^2=\frac{\alpha^2 u'^2}{1-\alpha^2}$, resultará de la primera $1-\alpha^2=\frac{\alpha u'}{a}$, y de la segunda $1-\alpha^2=\frac{\alpha^2 u'^2}{b^2}$, lo que da $\frac{\alpha u'}{a}=\frac{\alpha^2 u'^2}{b^2}$, de donde $\alpha u'=\frac{b^2}{a}$; y sustituyendo este valor en el primero de $1-\alpha^2$, se convertirá en

$$1-\alpha^2=\frac{\alpha u'}{a}=\frac{\frac{b^2}{a}}{a}=\frac{b^2}{a^2};$$

y sustituyendo en la ecuacion (D) este valor de $1-\alpha^2$, y en vez de $\frac{\alpha^2 u'^2}{1-\alpha^2}$ su igual b^2, se tendrá $z^2+\frac{b^2}{a^2}x'^2=b^2$, ó suprimiendo el acento de la x, de que no tenemos ya necesidad, y despejando z^2, será $z^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=\frac{b^2a^2-b^2x^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ (E).

238 Las cantidades $2a$ y $2b$ que representan las líneas BB' y CC' se llaman los ejes, y el punto A el centro de la elípse. Cuando su ecuacion se halla referida á esta forma, siendo rectangulares las coordenadas, se dice que está referida al centro y á sus ejes. Si estos ejes son iguales, se tiene simplemente $z^2=a^2-x^2$, ecuacion que en virtud de lo espuesto (223 y 229) corresponde á una circunferencia cuyo radio sea de la magnitud a; luego *el círculo es una elipse cuyos ejes son iguales.*

Para distinguir los dos ejes de una elipse se tiene costumbre de llamar al uno el primero ó el eje mayor, y al otro el segundo ó menor; á una tercera proporcional al eje mayor y al menor se le llama

parámetro del eje mayor; de manera que llamándole p será $2a:2b::2b:p=\frac{4b^2}{2a}=\frac{2b^2}{a}$, que dividiendo por $2a$, sale $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$, cuyo valor sustituido en la ecuacion (E) da $z^2=\frac{p}{2a}(a^2-x^2)$.

239 Si en la ecuacion (E) mudamos x en z y recíprocamente, se nos convertirá el eje mayor en el de las ordenadas, y el menor en el de las abscisas, en cuyo caso se tendría $x^2=\frac{a^2}{b^2}(b^2-z^2)$ (F); luego la ecuacion de la elipse no muda de forma cuando se la refiere á sus ejes, cualquiera que sea el que se tome por eje de abscisas: y como si llamamos q al *parámetro del eje menor*, se tendrá $2b:2a::2a:q=\frac{2a^2}{b}$, que partiendo por $2b$ da $\frac{q}{2b}=\frac{a^2}{b^2}$, resulta que si sustituimos este valor en la ecuacion anterior, se nos convertirá con rclacion al parámetro en $x^2=\frac{q}{2b}(b^2-z^2)$.

Si en las ecuaciones (E), (F), estraemos la raiz cuadrada, tendrémos las ecuaciones $z=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-z^2}$, que manifiestan que *la elipse es simétrica respecto de ambos ejes.*

Una vez que x ha de ser necesariamente negativa en la ecuacion del (§ 234) para que haya ordenadas reales; cuando se toma el orígen en B, resulta que si le queremos trasladar á B′, tendrémos que mudar el signo de la x para que dicha ecuacion convenga á las abscisas positivas, contadas desde el punto B′ á la derecha, en cuyo supuesto la ecuacion (7 del § 216) se convertirá en

$$z^2+x^2(1-\alpha^2)-2\alpha u'x=0,$$

que introduciendo en ella las espresiones a y b de los semiejes se nos convierte en $z^2+x^2\times\frac{b^2}{a^2}-\frac{2b^2}{a}x=0$, que da

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)=\frac{b^2}{a^2}x(2a-x)\ \text{(G)}.$$

Poniendo en vez de $\frac{b^2}{a^2}$ su valor $\frac{p}{2a}$, la ecuacion anterior se nos

convertirá en $z^2=\frac{p}{2a}(2ax-x^2)=px-\frac{px^2}{2a}$ (G').

240 Luego si se designan por x', z', x'', z'', las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la elipse, se tendrá

$$z'^2=\frac{b^2}{a^2}x'(2a-x'), \text{ y } z''^2=\frac{b^2}{a^2}x''(2a-x'');$$

que dan $z'^2:z''^2::\frac{b^2}{a^2}x'(2a-x'):\frac{b^2}{a^2}x''(2a-x'')::x'(2a-x'):x''(2a-x'')$;

es decir, que *los cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de las partes en que queda dividido el eje de las* x *por cada una de las ordenadas*, á cuyas partes se les da el nombre general de abscisas.

{ Puesto que (§ 238) $p=\frac{2b^2}{a}$, y (§ 237) $\alpha u'=\frac{b^2}{a}$, resulta $p=2\alpha u'$;

y como (§ 221) $\alpha u'$ es igual con la distancia OD (fig. 77) del orígen de las coordenadas al punto en que el eje del cono encuentra al plano de las xz, resulta que el parámetro p de la elipse es duplo de esta distancia.

{ Tambien tenemos que siendo α la tangente trigonométrica del ángulo DCO (fig. 77), la tangente trigonométrica del ángulo BCO, duplo del DCO, será (§ 20) $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$; y como el triángulo rectángulo BCO da BO=COxtang.OCB, si sustituimos en vez de CO y tang.OCB, sus valores u', $\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$, tendrémos BO=$\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$, que es la distancia del punto del plano de las xz, en que le encuentra la primera generatriz, que se confunde con el eje de las u, hasta el punto en que le encuentra la generatriz opuesta; y he aquí porque la cantidad $\frac{2\alpha u'}{1-\alpha^2}$ espresa (233) la distancia de los dos vértices de la curva. }

241 Toda línea, tal como la mAM (fig. 84) tirada por el centro, que termina con sus estremos en el perímetro de la elipse, se llama *diámetro*, y *todos los diámetros están divididos en el centro en dos partes iguales.* Porque si á derecha é izquierda del punto de orígen A se toman las abscisas AP, Ap iguales, la ecuacion de la curva nos dará que las ordenadas MP, mp, serán tambien iguales: luego si unimos los puntos M, m con el centro A, los triángulos Amp, AMP

serán iguales (I. 360) y darán $mA=MA$, y los ángulos $mAp=MAP$; por lo que (I. 357) las dos rectas mA, MA, no formarán sinó una sola y misma recta, la cual será un diámetro que quedará dividido en dos partes iguales en A.

242 Si desde el punto A (fig. 85) como centro, con un radio $AB=a$, se describe una circunferencia de círculo, su ecuacion será (§ 238) $z^2=a^2-x^2$, de donde se sigue que representando por z la ordenada de la elipse, y por Z la del círculo correspondiente á las mismas abscisas, se tendrá generalmeute $z=\frac{b}{a}\times Z$, (*) y segun sea $b<$ ó $>a$, así será $z<$ ó $>Z$; por consiguiente, si desde el centro de la elipse, con radios iguales á cada uno de sus ejes, se describen dos circunferencias de círculo, la elipse comprenderá á la mas pequeña, y estará comprendida por la mayor.

De aquí se sigue que *los dos ejes de la elipse son el uno mayor que todos sus diámetros, y el otro menor.*

Tambien se infiere que *todo ángulo inscrito en la elipse cuyos lados pasen por los estremos del eje mayor es obtuso; y si pasa por los estremos del eje menor es agudo.*

En efecto, el ángulo BgB′ (I. 372) es mayor que el BGB′ que es recto (I. 454 cor. 3º); luego es obtuso. Y el CDC′ es menor que CdC' que es recto; luego es agudo.

243 En virtud de la relacion precedente, basta para eucontrar las ordenadas de la elipse, cuando se conocen las del círculo descrito sobre uno de sus ejes, disminuir ó aumentar estas últimas en la relacion de b á a; esta propiedad da muchos medios de describir una elipse por puntos, cuando se conocen los dos ejes.

1ª *construccion.* Desde el punto A como centro, y con los radios AB, AC (fig. 85) iguales á los dos semiejes a y b; se describirán dos circunferencias de círculo; despues se tirará un radio cualquiera ANM, se bajará desde el punto M una perpendicular MP sobre el eje AB, y tirando despues NQ paralela con AB, el punto Q lo será de la elipse; porque los triángulos semejantes AMP, NMQ dan

$$AM:AN::MP:QP=\frac{AN}{AM}\times MP=\frac{b}{a}\times MP.$$

(*) *Porque siendo* $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, y $Z^2=a^2-x^2$, *sustituyendo* Z^2 *en vez de* a^2-x^2 *en la ecuacion anterior, será* $z^2=\frac{b^2}{a^2}\times Z^2$, *y* $z=\frac{b}{a}\times Z$.

Haciendo lo mismo para cada punto, se tendrá construida la elipse: esta construccion es la que da nuestro famoso Juan de Arfe en su escelente obra intitulada: *Varia comensuracion etc.*

2ª *constr.* Desde un punto cualquiera D (fig. 86), cuya distancia al centro sea menor que $a-b$, tomado sobre el eje menor CC′, y con un radio igual á la diferencia $a-b$ de los dos semiejes, se describirá un arco de círculo que corte á BB′ en O: por los puntos O y D se tirará OD, y se hará $DM=AB=a$. El punto M corresponderá á la elipse, porque si desde el punto D como centro se describe el círculo ME, cuyo radio $DM=a$, se tendrá $MO=b$, y los triángulos semejantes DMQ, OMP darán

$$DM=a:MO=b::MQ:PM=\frac{b}{a}\times QM.$$

En la práctica puede ser DM una regla cuya longitud sea a, y sobre la cual se señale un punto O tal que $MO=b$. Haciendo mover esta regla en el ángulo BAC, de manera que O se aplique sobre el eje mayor y D sobre el menor, el punto M describirá un cuadrante de la elipse pedida; y los otros cuadrantes se tendrán colocando la regla en los otros ángulos. Sirve tembien con mucha sencillez una tira de papel en que se señalan los dos semiejes del mismo modo que en la regla.

Puesto que para todos los puntos de la elipse se tiene

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),$$

resulta que para un punto situado fuera de la elípse, y cuya abscisa x fuese la misma, el valor de z sería mayor; por lo cual lo podríamos representar por $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+R^2$.

Y como para un punto tomado dentro de la elipse se tendría z^2 menor, le podríamos dar esta forma $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-R^2$.

Luego si quitamos el denominador a^2 en las tres ecuaciones anteriores, se tendrá

para los puntos { fuera de la elipse $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2>0$; en la misma elipse $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2=0$; dentro de la elipse $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2<0$.

Por consiguiente, para saber si un punto es esterior á la elipse, si está sobre esta curva, ó si está dentro de ella, bastará averiguar el signo de la espresion $a^2z^2+b^2x^2-a^2b^2$, cuya propiedad nos será muy útil en lo sucesivo.

244 Si por el punto B′ (fig. 87) cuyas coordenadas son $z'=0$, $x'=-a$, consideramos que pasa una recta, cuyas coordenadas sean X, Z tendrá por ecuacion (§ 163) $Z=\alpha(X+a)$; siendo α la tangente trigonométrica del ángulo que la recta forma con el eje de las x.

Si por el punto B, respecto del cual es $z''=0$, $x''=+a$, se concibe otra recta inclinada tambien de un modo cualquiera, y cuyas coordenadas sean X', Z', su ecuacion será (§ 163) $Z'=\alpha'(X'-a)$.

Y si se quiere que estas rectas se corten en el perímetro de la elipse, se necesitará para esto que sus ecuaciones puedan subsistir al mismo tiempo con las de la curva, es decir, que se verifique el ser

$$X=X'=x, \text{ y } Z=Z'=z;$$

y haciendo estas sustituciones en las ecuaciones anteriores, se convertirán en $z=\alpha(x+a)$, $z=\alpha'(x-a)$, que multiplicadas dan $z^2=\alpha\alpha'(x^2-a^2)$; y como por la naturaleza de la elipse

$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, tendrémos que igualando estos valores de z^2 será

$$\alpha\alpha'(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=-\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

que, suprimiendo el factor comun x^2-a^2, da $\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$, lo que establece una relacion constante entre los ángulos que forman con el eje mayor las cuerdas tiradas desde sus estremos, y que se suelen llamar *cuerdas suplementarias*. Esta relacion no depende sinó de la que tengan los ejes.

En el círculo que es una elipse, cuyos ejes son iguales, se tiene $\alpha\alpha'=-1$, y manifiesta que las cuerdas suplementarias se cruzan á ángulos rectos, como hemos visto (226).

Recíprocamente, cuando esta relacion tiene lugar entre los ángulos que forman dos rectas con el eje de las abscisas, estas rectas son cuerdas suplementarias de una elipse en que la relacion de los ejes es $\frac{b}{a}$.

245 Puesto que la ordenada de la elipse es igual con la ordenada del círculo disminuida en una relacion dadá, resulta que espresando una relacion cualquiera por $\frac{B}{A}$, tendrémos, multiplicando el segundo miembro de la ecuacion de la familia de todos los círculos (232) por $\frac{B}{A}$, que $z^{m+n}=\frac{B}{A}(a-x)^m x^n$ será la ecuacion de una fami-

lia de curvas que denominarémos *elipses*, y por lo mismo están comprendidas en ella las elipses de todos los grados.

246 Se llaman *fócus* de la elipse á los puntos F, F′ (fig. 88) situados sobre el eje BB′, y tales que la doble ordenada que corresponde á ellos es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$ del eje mayor.

Para determinarlos, se hará $z=\frac{b^2}{a}$ en la ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, que dará $\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}$, ó $\frac{b^2x^2}{a^2}=b^2-\frac{b^4}{a^2}$, de donde $x^2=a^2-b^2$ y $x=\pm\sqrt{a^2-b^2}$.

Para construir estos valores de x, se describirá desde el estremo del eje menor como centro, con un radio igual al semieje mayor, una circunferencia de círculo, y los puntos F, F′, en que encuentre al eje BB′ serán los fócus; porque el triángulo rectángulo ACF, da $AF=\sqrt{CF^2-CA^2}=\sqrt{a^2-b^2}$; y el ACF′ dará $AF'=\sqrt{a^2-b^2}$.

Si desde un punto cualquiera M de la curva se tiran á los dos fócus las líneas FM, MF′, que se llaman los *radios vectores*, y se señala con c la distancia que hay desde el centro á los fócus, que se llama *escentricidad*, tendrémos $c=AF=\sqrt{a^2-b^2}$, y el triángulo rectángulo FPM, nos dará $FM^2=PM^2+PF^2$, ó como $PM=z$ y $PF=AF-AP=c-x$, será $FM^2=z^2+(c-x)^2$, ó poniendo por z^2 su valor, y efectuando el cuadrado será

$$FM^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)+c^2-2cx+x^2=\frac{b^2a^2-b^2x^2+a^2c^2-2ca^2x+a^2x^2}{a^2}=\ldots$$

$$\frac{b^2a^2+x^2(a^2-b^2)+a^2c^2-2ca^2x}{a^2}=\frac{b^2a^2+c^2x^2+a^2c^2-2ca^2x}{a^2}=(*)\ldots$$

$$\frac{b^2a^2+c^2x^2+a^4-a^2b^2-2ca^2x}{a^2}=\frac{a^4-2a^2cx+c^2x^2}{a^2}=\left(\frac{a^2-cx}{a}\right)^2=\left(a-\frac{cx}{a}\right)^2,$$

lo que da $FM=a-\frac{cx}{a}$.

Del mismo modo se hallará que $F'M=a+\frac{cx}{a}$; sumando las es-

---

(*) *Poniendo por* c^2 *su valor* a^2-b^2 *en el término* a^2c^2

presiones antecedentes, resulta $FM+F'M=2a$, cuya ecuacion nos dice, *que la suma de los radios vectores tirados desde los fócus á un mismo punto de la elipse es igual con el eje mayor.*

247 De aquí resulta un nuevo método para describir una elipse, cuando se conoce su eje mayor BB′ y la posicion de los fócus F, F′; para lo cual se tomará desde el punto B una longitud cualquiera BK sobre el eje BB′, desde el fócus F como centro con un radio FM=BK, se describirá un arco de círculo, desde el fócus F′ como centro y con un radio F′M=B′K se describirá otro arco de círculo; el punto M en que estos arcos se encuentren corresponderá á la elipse; y procediendo del mismo modo, se tendrán todos los puntos que se deséen.

Es ventajoso describir los arcos de círculo á un mismo tiempo por la parte de arriba y por la de abajo del eje; por este medio se encuentran á cada operacion dos puntos de la elipse; y se obtienen cuatro cuando se lleva sucesivamente la misma avertura de compas á cada uno de sus fócus.

Este método es el mas espedito que se conoce para describir la elipse por puntos; cuando sólo se den conocidos los dos ejes, entónces se encuentra fácilmente la posicion de los fócus (246), y se construye la curva como acabamos de indicar.

Cuando la elipse debe ser muy grande, se fijan en los fócus los estremos de un cordel ó hilo, cuya longitud es igual al eje mayor, el cual se tiene tirante por medio de un piquete ó lapicero, se hace girar este piquete ó lapicero de modo que el cordel ó hilo esté siempre bien estendido, y se halla trazada la curva cuando se ha dado de este modo una revolucion entera.

En esta propiedad de ser la suma de los radios vectores igual con el eje mayor, cifró el Marques del Hospital la esencia de la elipse y dedujo de ella todas sus propiedades.

A los dos fócus corresponden dos *rectas* notables en la elipse, que se llaman *directrices*, y que vamos á dar á conocer.

Acabamos de hallar para los radios vectores $FM=a-\frac{cx}{a}$;

y $F'M=a+\frac{cx}{a}$.

Si el primer término del valor de FM lo multiplicamos y dividimos por ca, no se alterará, y tendrémos

$$FM=\frac{ca^2}{ca}-\frac{cx}{a}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right).$$

Ahora, si se toma (fig. r) $AH=\frac{a^2}{c}$, se tira HL perpendicular á AB, y MR perpendicular á HL, se tendrá

$$MR=PH=AH-AP=\frac{a^2}{c}-x;$$

luego $MF=\frac{c}{a}.MR$; de donde resulta $\frac{MF}{MR}=\frac{c}{a}$.

Del otro lado del centro, á la distancia $AH'=AH=\frac{a^2}{c}$, tírese tambien $H'L'$ perpendicular á AB, y MR' perpendicular á $H'L'$, con lo cual se tendrá $MR'=\frac{a^2}{c}+x$; pero $MF'=a+\frac{cx}{a}=\frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}+x\right)$; luego tambien $\frac{MF'}{MR'}=\frac{c}{a}$.

Las perpendiculares HL y $H'L'$ se llaman las *directrices* de la elípse; y las propiedades precedentes, que las caracterizan, pueden enunciarse de este modo: *Las distancias de cada punto de la elipse, al uno de los fócus y á la directriz vecina de este fócus, son entre sí como la escentricidad es al semieje mayor.*

Por otra parte se debe advertir, que, en virtud de la construccion, se tiene $AH.c=a^2$; es decir, que el semieje mayor AB debe ser medio proporcional entre AF y AH.

248 Veamos ahora como se debe tirar una tangente á la elipse, cuya ecuacion es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ ó $a^2z^2+b^2x^2=b^2a^2$,

quitando el divisor y pasando al primer miembro el término negativo: ó dividiendo por a^2b^2, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

Sean x'', z'', las coordenadas del punto de contacto; y como este punto lo es de la elipse, ellas cumplirán con la condicion que exige la ecuacion de esta curva, y se tendrá $a^2z''^2+b^2x''^2=a^2b^2$ (H).

Siendo la tangente una línea recta, y dibiendo pasar por este punto, su ecuacion será de esta forma (§ 163) $Z-z''=\alpha(X-x'')$; luego solo falta determinar α.

Para conseguirlo, buscarémos los puntos en que esta recta, considerada como secante, encuentra á la curva; y suponiendo despues que estos dos puntos se reunen en uno solo, se convertirá en tangente (*).

(*) *En Geometría se daba el nombre de tangente de un círculo á la recta que tenia un solo punto comun con la circunferencia estando toda fuera: lo mismo se podría decir respecto de una seccion cónica; pero como respecto de las otras curvas, ademas de tocar una recta á la curva, la puede cortar, se*

Como estos puntos han de ser comunes para la elipse y para la recta, deberá ser en ellos $Z=z$, y $X=x$, por lo que la ecuacion de la recta será $z-z''=\alpha(x-x'')$. Restando la ecuacion (H) de su anterior, se tiene $a^2(z^2-z''^2)+b^2(x^2-x''^2)=0$,
que da $a^2(z+z'')(z-z'')+b^2(x+x'')(x-x'')=0$,
ó poniendo en vez de $z-z''$ el valor que acabamos de sacar, se tendrá

$$a^2(z+z'')\alpha(x-x'')+b^2(x+x'')(x-x'')=0,$$

que se convierte en $(x-x'')(a^2\alpha(z+z'')+b^2(x+x''))=0$,
una de las raices de esta ecuacion es $x=x''$,
lo que da en la ecuacion de la recta $z=z''$,
porque el punto dado es comun á la tangente y á la curva; suprimiendo el factor $x-x''$ que suministra dicha raiz, queda

---

llama punto de contacto *á aquel en que se reunen dos intersecciones; y tangente en aquel punto á la recta á que se reduce una secante que corta á la curva en dos puntos, cuando se confunden estos dos en uno solo.*

Para aclarar esto, supongamos que se tenga la curva LN'NKMH (fig. rr lám. 8'') *compuesta de partes cóncavas y convexas. Si en un punto cualquiera* M, *se tira una recta* MNN' *que parece hallarse, con relacion á la parte* KMH *en la misma situacion que la tangente al círculo, esta recta se puede suponer que no tiene sinó un punto de contacto con esta parte de la curva; pero, prolongada indefinidamente, pasará por otros puntos* N,N'.... *de la curva. Luego no sería exacto decir que ella no tiene sinó un solo punto* M *comun con la curva* LN'NKMH.

Para tener una definicion que se pueda aplicar á todas las curvas, es necesario concebir que una recta MG *teniendo muchos puntos* M,M',M'', *comunes con la curva gire al rededor de uno de estos puntos,* M *por ejemplo, de manera que tome las diversas posiciones* MM'M'', *m'Mm''m'''....; se ve que en este movimiento, el punto* M' *que se hallaba al principio colocado á la izquierda del punto* M, *se halla ahora á la derecha de este mismo punto en m'. Pero, en el tránsito de la primera posicion á la segunda, debe necesariamente existir una intermedia en que el punto* M' *se confunda con el punto* M; *y en esta posicion representada por* MNN', *es en la que se dice que es una* tangente. *Se debe pues* considerar una tangente como una secante á la curva, de la cual dos de los puntos de interseccion vienen á reunirse en uno solo, ó como el *límite* hacia el cual converge una secante en que dos de sus puntos de interseccion se van acercando á confundirse en uno solo.

No es siempre necesario que el movimiento de la recta se haga al rededor del uno de los puntos de interseccion, puede ser tambien al rededor de un punto cualquiera. La recta puede aun en ciertas circunstancias, moverse paralelamente á ella misma. De todas suertes, la circunstancia esencial de toda tangente es que entre ella y la curva, no pueda pasar ninguna otra recta.

Se dice que un plano es tangente de una curva en un punto dado, cuando pasa por la tangente tirada por este punto; y como por una recta pueden pasar una infinidad de planos, resulta que por un punto de una curva pueden pasar infinitos planos tangentes á la curva.

$$a^2\alpha(z+z'')+b^2(x+x'')=0.$$

Para que la recta sea tangente, es necesario que el segundo valor de x sea $=x''$, porque los dos puntos de interseccion se han de reunir en uno; y como esta circunstancia dará tambien $z=z''$, tendrémos haciendo estas sustituciones $a^2\alpha\times 2z''+b^2\times 2x''=0$,

que da $$\alpha=-\frac{2b^2x''}{2a^2z''}=-\frac{b^2x''}{a^2z''} \quad (\text{I}).$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion de la tangente de la elipse,

se convierte en $$Z-z''=-\frac{b^2x''}{a^2z''}(X-x''),$$

ó quitando el divisor en $a^2Zz''-a^2z''^2=-b^2x''X+b^2x''^2$,
ó en $a^2Zz''+b^2Xx''=a^2z''^2+b^2x''^2=[(H)]a^2b^2$ (K);
que es la ecuacion de la tangente de la elipse.

Y si hacemos en ella $a=b$, que es el caso en que la elipse se convierte en círculo, se tendrá $Zz''+Xx''=a^2$; que será *la ecuacion de la tangente del círculo.*

Como la ecuacion (I) solo nos da un valor para α, resulta que por un punto de la elipse no se le puede tirar mas de una tangente.

{ Si queremos comprobar el que la recta determinada de este modo se halla toda ella fuera de la elipse, restarémos de la ecuacion (H), el duplo de la (K), y tendrémos $a^2z''^2+b^2x''^2-2a^2Zz''-2b^2Xx''=-a^2b^2$; que añadiendo á ambos miembros la cantidad $a^2Z^2+b^2X^2$, podrémos poner bajo esta forma $a^2(Z-z'')^2+b^2(X-x'')^2=a^2Z^2+b^2X^2-a^2b^2$; donde vemos que la cantidad $a^2Z^2+b^2X^2-a^2b^2$ siendo igual á la suma de dos cuadrados, será esencialmente positiva escepto para el caso de ser $X=x''$ y $Z=z''$, que será igual con *cero*; luego, en virtud de lo demostrado (243), todos los puntos de la tangente, escepto el punto de contacto, se hallan fuera de la elipse. }

249 Se llama *normal* de una curva á una recta que es perpendicular á la tangente en el punto de contacto (*); luego si llamamos Z', X', sus coordenadas, tendrá por ecuacion (§ 168)

$$Z'-z''=-\frac{1}{\alpha}(X'-x'')=[(\text{I})]\frac{a^2z''}{b^2x''}(X'-x''),$$

que quitando el divisor será

$$b^2Z'x''-b^2x''z''=a^2X'z''-a^2z''x'',$$

que podrémos poner bajo esta forma:

$$b^2Z'x''-a^2X'z''=b^2x''z''-a^2z''x''=(b^2-a^2)x''z''.$$

(*) *Se dice que un plano es* normal *á una curva cuando es perpendicular á la tangente en el punto de contacto.*

250 El valor de α (I) es nulo cuando $x''=0$, en cuyo caso la ecuacion (H) da $z''=\pm b$;
y viene á ser infinito cuando $z''=0$, lo que da (H) $x''=\pm a$.

Y como α representa la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente de la curva forma con el eje de las abscisas, resulta que en los estremos del eje menor, la tangente es paralela á las abscisas, y en los estremos del eje mayor es paralela á las ordenadas.

251 Si por el centro, que es el orígen de las coordenadas, concebimos una recta cuyas coordenadas sean X_1, Z_1, su ecuacion será de la forma (§ 160) $Z_1=\alpha' X_1$.

Si suponemos que esta recta pase por el punto de contacto, tendrémos por esta condicion $z''=\alpha' x''$, que da $\alpha'=\frac{z''}{x''}$, y $Z_1=\frac{z''}{x''}X_1$;

multiplicando el valor de α' por el de α que conviene á la tangente, se saca $\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$;

y comparando este resultado con el obtenido (244), se ve que la tangente MT y el diámetro AM (fig. 87) tirado por el punto de contacto, son las cuerdas suplementarias de una elipse AMT, cuyo eje mayor es AT y $\frac{b}{a}$ la relacion de los ejes.

De aquí resulta que si $a=b$, será $\alpha\alpha'=-1$, que manifiesta que las líneas AM, MT, son perpendiculares; y como por otra parte la elipse AMT se convierte en este caso en círculo, tenemos para tirar la tangente al círculo la resolucion dada en la Geometría (I. 444 cor.).

De donde se sigue que para tirar una tangente á la elipse por un punto M, dado sobre esta curva, es necesario tirar desde este punto al centro el diámetro AM; por el estremo B′ del eje BB′ tirar la cuerda B′N paralela con AM, unir el punto N con el B, y la MT paralela con NB será la tangente pedida.

En efecto, siendo las líneas BN, B′N, las cuerdas suplementarias de la elipse, si se llaman α, α' las tangentes trigonométricas de los ángulos XBN, XB′N, se tendrá $\alpha\alpha'=-\frac{b^2}{a^2}$,

y esta relacion subsistirá aun para los ángulos XTM, XAM que son iguales con los precedentes (I. 386a 3º)

252 Esta construccion nos manifiesta aun, que si se tira el diámetro AM′ paralelo á la cuerda BN, ó á la tangente MT, la tangente de la elipse en el punto M′ será paralela á la cuerda B′N ó al diámetro AM. Cuando dos diámetros están dispuestos como los pre-

cedentes, de modo que cada uno de ellos es paralelo á la tangente tirada por el extremo del otro, se les caracteriza con el nombre de *diámetros conjugados*. El ángulo MAM′ formado por dos diámetros conjugados es igual (I. 466 cor. 1º) al de las dos cuerdas suplementarias tiradas por los estremos del primer eje, paralelamente á estos diámetros.

Siendo la ecuacion de la elipse de la misma forma con relacion á sus dos ejes, las propiedades que acabamos de demostrar serán comunes á ambos, y se les podrá aplicar la misma construccion.

253 Para tener el punto en que la tangente encuentra al eje de las x, es necesario suponer $Z=0$ en su ecuacion (K), que da

$$X=\frac{a^2}{x''}.$$

Este es el valor de AT (fig. 88). Quitando de él AP ó x'', se tendrá la distancia PT del pie de la ordenada al punto en que la tangente encuentra al eje de las abscisas. Esta distancia se llama *subtangente*; y su espresion es aquí $PT=AT-AP=\frac{a^2}{x''}-x''=\frac{a^2-x''^2}{x''}$.

254 Haciendo $Z'=0$ en la ecuacion de la normal (249), se encontrará para el valor de la abscisa AN (fig. 89)

$$X'=-\frac{(b^2-a^2)x''z''}{a^2z''}=\frac{(a^2-b^2)x''}{a^2}.$$

Quitándola de $AP=x''$, se tendrá la distancia PN, que se llama la *subnormal*, cuyo valor será

$$PN=AP-AN=x''-\frac{(a^2-b^2)x''}{a^2}=\frac{a^2x''-a^2x''+b^2x''}{a^2}=\frac{b^2x''}{a^2}.$$

Las espresiones precedentes de la subtangente y de la subnormal son positivas ó negativas al mismo tiempo que x'', y su signo indica su posicion con relacion al orígen.

255 Se llama en particular *tangente* y *normal* á las distancias MT, MN contadas sobre la tangente y sobre la normal, interceptadas entre el punto de contacto y el eje de las abscisas.

Si querémos hallar sus espresiones en valores de las coordenadas, tendrémos que el triángulo MPT (fig. 88) rectángulo en P, nos dará

$$MT=\sqrt{MP^2+PT^2}=\sqrt{z''^2+\left(\frac{a^2-x''^2}{x''}\right)^2},$$

y el MPN daría $MN=\sqrt{MP^2+PN^2}=\sqrt{z''^2+\left(\frac{b^2x''}{a^2}\right)^2}$.

Siendo el valor de la subtangente PT (fig. 89) independiente del

segundo eje, es el mismo para todas las elipses que tienen á a por primer semieje, y que son concéntricas con la que consideramos. Conviene por consiguiente al círculo descrito desde el punto A como centro con un radio igual al semieje mayor; así, prolongando la ordenada MP de la elipse, hasta que encuentre al círculo en M' y tirando á este punto la tangente $M'T$, se tendrá el punto T, por el cual tirando al M la MT, se tendrá que esta será la tangente de la elipse en el punto M.

Esta construccion se aplicaría igualmente al segundo eje sobre el cual la espresion de la subtangente sería independiente del valor del primero.

256 Las fórmulas precedentes pueden aun emplearse cuando la tangente se debe tirar por un punto fuera de la elipse, y cuyas coordenadas son conocidas; en efecto, suponiéndolas representadas por x', z', deben verificar la ecuacion (K) de la tangente, lo que da

$$a^2z'z''+b^2x'x''=a^2b^2 \text{ (L)}.$$

Se tiene ademas, estando el punto de contacto x'', z'' sobre la elipse $a^2z''^2+b^2x''^2=a^2b^2$ (M).

Considerando á x'', z'' como desconocidas, estas dos ecuaciones bastarán para determinarlas, y se sustituirán despues sus valores en las ecuaciones de la tangente y de la normal.

Despejando z'' en la ecuacion (L), será

$$z''=\frac{a^2b^2-b^2x'x''}{a^2z'}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a^2-x'x''}{z'},$$

cuyo valor sustituido en (M), da $a^2\times\frac{b^4}{a^4}\times\frac{(a^2-x'x'')^2}{z'^2}+b^2x''^2=a^2b^2$,

que dividiendo toda la ecuacion por b^2, suprimiendo en el primer término un a^2 arriba y abajo, quitando el divisor y efectuando el cuadrado, será $b^2a^4-2b^2a^2x'x''+b^2x'^2x''^2+a^2x''^2z'^2=a^4z'^2$, que se convierte en $(a^2z'^2+b^2x'^2)x''^2-2b^2a^2x'x''-a^4(z'^2-b^2)=0$.

Esta ecuacion, que es del segundo grado con relacion á x'', tendrá su último término negativo cuando z' sea mayor que b; de donde se sigue que entónces x'', y por consiguiente z'', tendrán dos valores reales (I. 253). Si hubiéramos eliminado al contrario x'', hubiéramos hallado $(a^2z'^2+b^2x'^2)z''^2-2a^2b^2z'z''-b^4(x'^2-a^2)=0$, de donde resulta que x'' y z'' serán aun reales si x' es mayor que a.

Así, por un punto cualquiera tomado fuera de la elipse, se pueden siempre tirar dos tangentes á esta curva, y no se pueden tirar mas.

257 Si concebimos que por el punto de contacto pase una recta cualquiera, cuyas coordenadas sean $'X$, $'Z$, su ecuacion será (§ 163)

$$'Z-z''=m('X-x''),$$

∴

y si suponemos tambien que haya de pasar por el fócus F (fig. 88), respecto del cual es $'Z=0$ y $'X=\sqrt{a^2-b^2}=c$, esta condicion nos dará $-z''=m(c-x'')$, de donde $m=-\frac{z''}{c-x''}$.

La tangente de la elipse teniendo por ecuacion (§ 248)

$Z-z''=\alpha(X-x'')$, da [(I)] $\alpha=-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}$.

El ángulo FMT (fig. 90), que forma la tangente con la recta tirada desde el fócus, es igual (I. 386 *d*) con MTX—MFX; por lo cual tendrá por tangente trigonométrica (§ 2) $\frac{\alpha-m}{1+\alpha m}$,

ó poniendo en vez de α y m sus valores, será

$$\frac{-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}+\frac{z''}{c-x''}}{1+\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}\times\frac{z''}{c-x''}}=\frac{-cb^2x''+b^2x''^2+a^2z''^2}{a^2z''c-a^2z''x''+b^2x''z''}=\frac{a^2z''^2+b^2x''^2-cb^2x''}{a^2cz''-(a^2-b^2)x''z''}.$$

Ahora, como el punto de contacto se halla en la curva, será $a^2z''^2+b^2x''^2=a^2b^2$; y como por otra parte $a^2-b^2=c^2$, tendrémos que haciendo estas sustitucionès en la espresion anterior, se convertirá en $\frac{a^2b^2-cb^2x''}{a^2cz''-c^2x''z''}=\frac{b^2(a^2-cx'')}{cz''(a^2-cx'')}=\frac{b^2}{cz''}$.

Si consideramos ahora otra recta cuyas coordenadas sean $X_{,}$, $Z_{,}$, que pase por el otro fócus y por el punto de contacto, tendrémos que la condicion de pasar por el punto de contacto hará que su ecuacion sea

$$Z_{,}-z''=m'(X_{,}-x'');$$

y la de pasar por el fócus., cuyas coordenadas son $Z_{,}=0$ y $X_{,}=-c$, dará $-z''=m'(-c-x'')$, ó $z''=m'(c+x'')$, de donde $m'=\frac{z''}{c+x''}$;

el ángulo F'MT de esta recta y de la tangente de la elipse tendrá por tangente trigonométrica $\frac{\alpha-m'}{1+\alpha m'}$, que se reduce á $-\frac{b^2}{cz''}$

cuando se ponen en vez de α y m' sus valores.

Teniendo los ángulos FMT, F'MT sus tangentes trigonométricas iguales y de signo contrario, son suplemento el uno del otro, lo que da $FMT+F'MT=\pi$;

y como se tiene tambien $F'MT+F'Mt=\pi$, resulta que $FMT=F'Mt$; lo que nos enseña, que *en la elipse, las rectas tiradas desde el punto de contacto á los dos fócus, forman con la tangente y del mismo lado de esta linea, ángulos iguales.*

258 De donde se sigue, que *la normal divide en dos partes iguales al ángulo formado por los dos radios vectores tirados desde los fócus á un mismo punto de la curva*; porque estos son complementos por defecto de los FMT, F'Mt.

Esta propiedad suministra dos construcciones muy simples para tirar una tangente á la elipse por un punto dado.

Supongamos 1º que este punto se halle sobre la elipse.

1ª *Constr.* Tírense los dos radios vectores FM,F'M, al punto M; divídase el ángulo F'MF en dos partes iguales, y la línea que le divide será la normal; tírese á esta una perpendicular MT en el punto M y se tendrá la tangente pedida, por las consideraciones anteriores.

2ª Se tirarán los radios vectores FM,F'M, se prolongará el uno de los dos, por ejemplo F'M, una cantidad MK igual con FM; uniendo los puntos K y F, la línea MT perpendicular á FK, será la tangente pedida; porque, segun esta construcion, los ángulos TMF, TMK, F'Mt, son iguales entre sí.

{ Nos podemos asegurar *à posteriori* con mucha facilidad de que en efec, to la recta MT no encuentra á la curva sinó en el punto M; porque para cualquier otro punto t de esta tangente, se tendría $F't+tK>F'MK$; ó poniendo en vez de tK su igual tF (§.376 cor.3.º), será $F't+Ft>F'Ke$ y como $F'MK=F'M+MF=2a$, resulta $F't+Ft>2a$, luego el punto t no es punto (246) de la elipse.}

Si el punto dado está fuera de la elipse, y situado por ejemplo en t, desde el fócus F' como centro con un radio igual al eje mayor $2a$, se describirá un arco de círculo mn; desde el punto t como centro con un radio tF se describirá otro arco de círculo pq que corte al primero en K. Tirando F'K, el punto M será el punto de contacto, y uniendo M y t por medio de una recta, se tendrá la tangente pedida.

En efecto, por la construccion hecha, se tiene $tF=tK$, ademas $F'M+MF=2a$, y $F'M+MK=2a$, luego MF=MK; luego la recta Mt es perpendicular en el medio de FK (I § 377), luego los ángulos FMT, F'Mt son iguales, y la recta TMt tangente de la elipse.

Los círculos descritos desde los puntos F' y t como centros, pudiéndose cortar en dos puntos, esta construccion dará las dos tangentes que hemos visto (256) que se pueden tirar á la elipse por un punto t fuera de ella.

259 Se ha visto en lo que precede, que estando la elipse referida á sus ejes y al centro, las ordenadas de esta curva son iguales y de signo contrario de una y otra parte del eje de las abscisas. Esta propiedad es un caso particular de otra que se estiende á todos los diámetros, y que consiste en que *un diámetro divide siempre en dos partes iguales á las líneas tiradas paralelamente á la tangente en su estremo, y terminadas en la elipse.*

En efecto, si por el centro y por el punto de contacto, cuyas coordenadas son x'', z'', se tira un diámetro, cuyas coordenadas supondrémos sean X, Z, su ecuacion será (§ 251) $Z=\frac{z''}{x''}X$.

Por un punto cualquiera tomado sobre este diámetro, y cuyas coordenadas sean x''', z''', tirémos una recta dirigida de un modo cualquiera; y suponiendo que sus coordenadas sean X', Z', tendrá por ecuacion (§ 163) $Z'-z'''=\alpha(X'-x''')$.

En los puntos en que esta recta encuentre á la elipse, tendrá las mismas coordenadas x, z, que ella, y por consiguiente esta ecuacion será en ellos

$$z-z'''=\alpha(x-x''') \quad (N),$$

y para determinar estos puntos será necesario combinar su ecuacion con la de la elipse, que es $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$, en la cual quitando $a^2z'''^2$ y $b^2x'''^2$ de ambos miembros, se tendrá $a^2z^2+b^2x^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2=a^2b^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2$.

Ahora, añadiendo y quitando en el primer miembro

$$2a^2zz'''+2b^2xx'''+b^2x'''^2+a^2z'''^2,$$

se convierte en $a^2z^2-2a^2zz'''+a^2z'''^2+b^2x^2-2b^2xx'''+b^2x'''^2+2a^2zz'''-\ldots\ldots$

$$2a^2z'''^2+2b^2xx'''-2b^2x'''^2=a^2b^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2,$$

ó en $a^2(z-z''')^2+b^2(x-x''')^2+2a^2z'''(z-z''')+2b^2x'''(x-x''')=\ldots\ldots$

$$a^2b^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2;$$

y sustituyendo en ella el valor de $z-z'''$ sacado de la ecuacion (N), será

$$a^2\alpha^2(x-x''')^2+b^2(x-x''')^2+2a^2z'''\alpha(x-x''')+2b^2x'''(x-x''')=\ldots\ldots,$$

$$a^2b^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2,$$

ó $(a^2\alpha^2+b^2)(x-x''')^2+2(a^2\alpha z'''+b^2x''')(x-x''')=a^2b^2-a^2z'''^2-b^2x'''^2$.

Los valores de x son las abscisas AP, AP′ (fig. 91) de los puntos a y b, en que la recta corta á la elipse, y $x-x'''$ representa las distancias PP‴, P‴P′.

Para que la recta ab esté divídida en dos partes iguales en M‴ es necesario que estas dos distancias PP‴, P‴P′ sean iguales y de signo contrario (I. 472 esc.); pues que están situadas de una y otra parte del punto P‴; luego esta ecuacion deberá ser pura (I. 253), y se deberá tener por consiguiente

$a^2\alpha z'''+b^2x'''=0$, de donde $\alpha=-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x'''}{z'''}$;

pero las coordenadas x''', z''', deben satisfacer á la ecuacion del diámetro, luego se tendrá

$z'''=\frac{z''}{x''}x'''$, que da $\frac{x'''}{z'''}=\frac{x''}{z''}$, y por consiguiente $\alpha=-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}$.

de donde se sigue que la recta debe ser paralela (164 y 248) á la tangente tirada al estremo M″ del diámetro AM″.

Lo que manifiesta, que si dos diámetros son conjugados el uno del otro, cada uno de ellos divide en dos partes iguales á las líneas paralelas al otro y terminadas en la curva, y esta propiedad solo pertenece á los diámetros conjugados.

260 **En lo que precede hemos deducido de la sola ecuacion de la elipse las diversas circunstancias que la caracterizan; recíprocamente, una cualquiera de estas circunstancias nos conduciría á su ecuacion.**

Propongámonos por ejemplo *hallar una curva tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados sea constante é igual con una magnitud representada por* 2a.

Sean (fig. 88) F, F′ los puntos dados. Coloquemos el orígen de las abscisas en A medio de la línea FF′, que harémos igual con $2c$; y suponiendo que M sea un punto de la curva, hagamos AP$=x$, PM$=z$, y designemos por u, u' las distancias FM y F′M. Ahora, como los triángulos F′MP, FMP dan F′M^2=PM^2+PF′^{2}, FM^2=PM^2+PF^2, si sustituimos en vez de estas líneas sus valores, tendrémos

$u'^2=z^2+(c+x)^2=z^2+c^2+2cx+x^2$, $u^2=z^2+(c-x)^2=z^2+c^2-2cx+x^2$;

las cuales sumando la 1ª con la 2ª, y restando la 2ª de la 1ª nos darán $u^2+u'^2=2(z^2+x^2+c^2)$, $u'^2-u^2=4cx$.

Esta segunda se puede poner bajo esta forma: $(u'+u)(u'-u)=4cx$, y sustituyendo en vez de $u+u'$ su valor $2a$, resulta

$$u'-u=\frac{2cx}{a},$$ de donde se saca (I. § 229) $$u'=a+\frac{cx}{a},\quad u=a-\frac{cx}{a};$$

sustituyendo estos valores en el de u'^2+u^2, y suprimiendo el 2, resulta

$$a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}=z^2+x^2+c^2,$$

ó quitando el divisor y trasladando, será

$a^2z^2+a^2x^2-c^2x^2=a^2a^2-a^2c^2$, ó $a^2z^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$,

y como $a^2-c^2=b^2$ (§ 246), que da $c^2-a^2=-b^2$,

sustituyendo será $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$,

que es la ecuacion de la elipse referida al centro y á sus ejes, la cual tambien la podemos espresar de otro modo; pues si despejamos z^2,

será $$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2).$$

261 Antes de haber eliminado u, u', la elipse estaba tambien caracterizada por cualquiera de las ecuaciones $$u'=a+\frac{cx}{a},\quad u=a-\frac{cx}{a},$$

como por la que hemos obtenido despues; porque siendo variables las distancias u, u' al mismo tiempo que la abscisa x, pueden convenir sucesivamente á todos los puntos de la curva, y servir para determinarlos cuando x es conocida. Luego podrémos considerar á las variables u y x, ó u' y x como que forman un verdadero sistema de coordenadas que no son ya rectangulares; pero es preciso que estas coordenadas partan todas desde un mismo punto: de F′ por ejemplo, si se toma la ecuacion $u'=a+\frac{cx}{a}$, ó de F si se empléa la $u=a-\frac{cx}{a}$.

En el 1.er caso, llamando x' á una nueva abscisa tal como F'P (fig. 88), será $x'=c+x$, de donde $x=x'-c$, lo que da $u'=a+c\times\frac{x'-c}{a}$.

En el 2º caso, si se llama x' á una nueva abscisa tal como FP, se tendrá $x'=x-c$, lo que da $u=a-c\times\frac{x'+c}{a}$.

Las x' positivas de la 1ª de estas suposiciones dan para u' los mismos valores que las x' negativas de la 2ª, y recíprocamente; porque siendo la curva simétrica de una y otra parte del eje de las z, los puntos que corresponden á abscisas iguales y de signo contrario, estan situados á distancias iguales de los fócus opuestos.

Cuando las líneas variables á que está referida una curva, parten todas desde un mismo punto, como en el caso actual, se les da el nombre de *coordenadas polares*; la ecuacion polar de la elipse colocando el orígen en el fócus F, es $u=a-c\times\frac{x'+c}{a}$, ó quitando el divisor $au=a^2-cx'-c^2=b^2-cx'$.

En vez de la abscisa FP ó x' es mas cómodo introducir el ángulo que la FM forma con el eje de las abscisas, para lo cual el triángulo rectángulo FMP da $FP=FM\times\cos.MFP$; y llamando φ al ángulo MFP, se tendrá $x'=u\times\cos.\varphi$, cuyo valor sustituido en la ecuacion anterior, la reduce á

$au=b^2-c\times u\times\cos.\varphi$, que da $u=\frac{b^2}{a+c\times\cos.\varphi}$ (n), *ecuacion polar de la elipse.*

§ Si llamamos e la relacion de la escentricidad con el semieje mayor, será $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; de donde resulta $b^2=a^2(1-e^2)$; y $c=ea$; cuyos valores sustituidos en la ecuacion (n), la reducen á $u=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos.\phi}$ (n'); en la cual el numerador $a(1-e^2)=a\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a}$ es el semiparámetro del eje mayor; y el ángulo φ debe variar desde 0º á 360º.

§ Tambien *se puede hallar la ecuacion polar de la elipse sin suponer el orígen precisamente en el fócus.* Para manifestarlo, sustituirémos en la ecuacion $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$, en vez de z y x, los valores (§ 172 (2)) $z=z'+r\,\text{sen.}\varphi$, $x=x'+r\cos.\varphi$, y tendrémos

$(a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi)r^2+(2a^2z'\text{sen.}\varphi+2b^2x'\cos.\varphi)r+a^2z'^2+b^2x'^2-a^2b^2=0$ (n''),

que *es la ecuacion polar mas general de la elipse*; y siendo de segundo grado, dará (I. 253) dos valores para r, que serán los dos radios vectores que se pueden tirar á la curva desde un mismo punto y formando el mismo ángulo φ con el eje de las x, ó con una paralela á él tirada por el polo.

§ Si suponemos que el polo se halle en la misma elipse, sus coordenadas z' y

x' deberían verificar la ecuacion de la curva, y se tendría $a^2z'^2+b^2x'^2=a^2b^2$, por lo que la ecuacion anterior se reduciría á

$$(a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi)r^2+(2a^2z'\text{sen.}\phi+2b^2x'\text{cos.}\phi)r=0 \quad (\text{n}'''');$$

la cual queda satisfecha cuando $r=0$, es decir, que en este caso el uno de los dos valores del radio vector es siempre nulo, lo que en efecto debe ser así, por hallarse el polo en la misma curva. Suprimiendo dicho factor, resulta

$$r=-\frac{2(a^2z'\text{sen.}\phi+b^2x'\text{cos.}\phi)}{a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi}(\text{n}'^v).$$

§ Si se quisiese que esta segunda raiz fuese tambien igual con cero, debería ser cero el numerador, lo que daría $a^2z'\text{sen.}\phi+b^2x'\text{cos.}\phi=0$; de donde

$$\frac{\text{sen.}\phi}{\text{cos.}\phi}=\text{tang}\,\phi=-\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x'}{z'},$$

que es el mismo valor que hemos hallado (248) para la tangente trigonométrica del ángulo que la tangente en un punto, cuyas coordenadas de la elipse son x', z', forma con el eje mayor.

§ Si en la fórmula (n'^v) se sustituyen en vez de ϕ todos los valores posibles desde 0^o hasta 2π, se tendrán para r otros tantos valores diferentes que determinarán diversos puntos de la elipse, y permitirán describirla enteramente.

§ Pero aquí, como en todos los casos en que se empléan coordenadas polares, se debe hacer una importante observacion; á saber, que cuando se hacen variar los ángulos de un modo continuo desde 0^o hasta 2π, lo que es ventajoso para la interpretacion de las fórmulas, no se deben emplear sinó los valores positivos del radio véctor, y desechar los negativos. Si se quisiese que el radio vector r variase de signo con el ángulo ϕ, entónces para que la fórmula correspondiese á todos los puntos, era preciso limitar la variacion de ϕ á que solo fuese desde 0^o hasta π.

§ Si queremos trasladar el polo al centro mismo de la elipse, harémos $x'=0$, $x'=0$, por ser las coordenadas del centro, que es el orígen de las coordenadas; cuya suposicion reduce la ecuacion (n'') á $(a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi)r^2-a^2b^2=0$ (n^v),

que da $r^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi}$ y $r=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi}}$,

tomando solo el valor positivo, y haciendo variar ϕ desde 0^o hasta 2π.

§ Si suponemos $a=b$, resultará $r=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2(\text{sen.}^2\phi+\text{cos.}^2\phi)}}=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2\times1}}=a$;

lo que nos indica, que para todos los valores de ϕ resulta el radio vector igual con el semieje mayor; lo que en efecto debe ser así, pues que entónces la elipse se convierte en círculo.

§ Si queremos trasportar el polo á uno de los fócus, como las coordenadas de este punto son $z'=0$ y $x'=c=\sqrt{a^2-b^2}$, sustituirémos estos valores en la ecuacion (n''), y tendrémos $(a^2\text{sen.}^2\phi+b^2\text{cos.}^2\phi)r^2+2b^2cr\text{cos.}\phi=b^4$ (n^{v_I}) que resuelta con relacion á r (I. 253), da

$$r=-\frac{b^2c\cos.\phi}{a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi}\pm\sqrt{\frac{b^4c^2\cos.^2\varphi}{(a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi)^2}+\frac{b^4}{a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi}}\ (\text{n}^{VII});$$

la cantidad que hay debajo del radical, reduciendo los quebrados á un mismo denominador, sustituyendo por c^2 su valor a^2-b^2, y simplificando, teniendo presente que $\text{sen.}^2\varphi+\cos.^2\varphi=1$, se convierte en $\frac{b^4a^2}{(a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi)^2}$, que estrayendo la raiz cuadrada y sustituyéndola en los dos valores de r, que da la ecuacion (n^{VII}) á causa del signo de ambigüedad $\pm$, resulta

$$r=-\frac{b^2(c\cos.\varphi-a)}{a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi},\quad r=-\frac{b^2(c.\cos.\varphi+a)}{a^2\text{sen.}^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi}.$$

Estos valores se pueden poner aun bajo una forma muy sencilla, sustituyendo en vez de $\text{sen.}^2\varphi$, su valor $1-\cos.^2\varphi$, que reducirá el denominador á

$$a^2-a^2\cos.^2\varphi+b^2\cos.^2\varphi=a^2-(a^2-b^2)\cos.^2\varphi=a^2-c^2\cos.^2\varphi\ .....$$
$$=(\text{I. § 179})(a+c\times\cos.\varphi)(a-c\times\cos\varphi);$$

y como cada uno de estos factores se halla en los numeradores de los valores de r, suprimiendo el factor comun, resulta

$$r=\frac{b^2}{a+c\times\cos.\varphi},\quad r=-\frac{b^2}{a-c\times\cos.\varphi};$$

donde vemos que el primer valor es el mismo que (n), como debía verificarse.

§ Si supusiéramos $a=b$, en la ecuacion (n''), teniendo presente que $\text{sen.}^2\varphi+\cos.^2\varphi=1$, se nos convertiría despues de suprimir a^2, en

$$r^2+2(z'\text{sen}\phi+x'\cos.\phi)r+z'^2+x'^2-a^2=0;$$

que es la ecuacion polar mas general de la circunferencia de círculo; y es la misma que encontramos directamente (§ 232); y si queremos deducir de ella una verdad, que ya conocemos por Geometria, no tendrémos mas que observar, que en una ecuacion de un grado cualquiera en que el primer término tiene por coeficiente á la unidad, el término constante espresa (367) el producto de las raices; y como aquí el término constante es $z'^2+x'^2-a^2$, pues es independiente del ángulo φ que es variable, tenemos que la ecuacion anterior nos espresa que *el producto de los dos valores de* r *es constante en todas las posiciones que pueda tener el polo;* cuya propiedad es la demostrada (I. 491 y 492) relativa á las cuerdas que se cortan dentro de un círculo, ó á las secantes que se cortan fuera; pues siendo sus partes, como demostramos allí, recíprocamente proporcionales, quiere decir que el producto de las dos partes de la una es igual al producto de las dos de todas las otras que pasen por el mismo punto; luego *dicho pooducto es constante cualquiera que sea la direccion de las lineas que pasen por él.*

§ Por último, terminarémos demostrando una proposicion que no es muy conocida, á saber, *que todas las subtangentes polares de la elipse terminan en una recta perpendicular al primer eje.*

§ Para demostrarlo, observarémos que si por el fócus F′ de la elipse (fig. 89) se tira una perpendicular F′K al radio vector F′M″, y una tangente en este punto hasta que encuentre en K á la recta F′K, tendrémos la subtangente polar de la elipse.

§ En efecto, tomando el orígen en el centro A de la elipse, cuyas coordenadas con relacion al fócus F′ son $z'=0$ y $x'=c$, y llamando x'', z'' las coordenadas del punto de contacto M″, se tiene (162) para la ecuacion de F′M″ esta

$$z=\frac{-z''}{c-x''}(x-c);$$

y la ecuacion de la recta F′K, perpendicular á esta en el mismo punto, tendrá (168) por ecuacion, espresando por X, Z sus coordenadas,

$$Z=\frac{c-x''}{z''}(X-c).$$

Para tener las coordenadas del punto de concurso de F′K con M″K, es necesario sustituir este valor de Z en la ecuacion de la tangente de la elipse, que (248) es $a^2Zz''+b^2Xx''=a^2b^2$; y despues de hechas las simplificaciones, y despejando X, tendrémos

$$\text{AH}=X=\frac{a^2(a^2-cx'')}{c(a^2-cx'')}=\frac{a^2}{c}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

espresion que es independiente de las coordenadas del punto M″; y de la cual se concluye, que la abscísa del punto K es independiente de la posicion del punto de contacto M″, de modo que el lugar geométrico de los puntos K para todas las posiciones de M″, es la recta HL perpendicular al eje mayor, y fija de posicion por la abscisa AH. }

De la parábola.

262 Cortando un cono recto, cuyo ángulo en el vértice era $\frac{1}{2}\pi$ por un plano paralelo á una de sus generatrices, hemos tenido (218) para la ecuacion de la interseccion $z^2+2u'x=0$, siendo las coordenadas x y z perpendiculares entre sí, y u' una cantidad positiva; y hemos dicho que esta curva se llama *parábola*.

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, hagamos $z=0$, y resultará $x=0$; es decir, que esto tiene lugar en un solo punto, que es el orígen de las coordenadas.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que corte al eje de las z; y como esta suposicion da $z=0$, manifiesta que esto no se verifica sinó en el orígen. Así, la curva no tiene mas de un punto comun con el eje de las x y de las z, que es el orígen de las coordenadas.

Resolviendo su ecuacion con relacion á z, sale $z=\pm\sqrt{-2u'x}$.

Siendo estos dos valores iguales y de signo contrario, la curva es simétrica por la parte superior é inferior del eje de las x.

Todo valor positivo de x hace siempre z imaginaria, pues que u' es una cantidad positiva; luego la curva no se estiende por el lado de las abscisas positivas, y está limitada en este sentido por el eje de las z.

Haciendo x negativa, se tiene $z=\pm\sqrt{2u'x}$.

En este caso, los valores de z son siempre reales, y tanto mayores cuanto mayor es x. Luego la curva se estiende indefinidamente por este lado del eje de las x, y tiene la forma que representa la (fig. 92).

263 Pues que no hay ordenadas reales sinó del lado de las abscisas negativas, tomarémos á estas por positivas, y será $z^2=2u'x$.

La relacion del cuadrado de la ordenada á la abscisa, siendo por la ecuacion precedente, la misma para todos los puntos de la curva, respecto de otras coordenadas X, Z, se tendrá

$$Z^2=2u'X, \text{ lo que da } Z^2:z^2::2u'X:2u'x::X:x;$$

cuya proporcion manifiesta, que *en la parábola los cuadrados de las ordenadas son entre sí como las abscisas correspondientes.*

La recta indefinida XAx se llama *eje* de la parábola, y el punto A es su vértice.

Para evitar los acentos, escribirémos de aquí en adelante p, que es la inicial de *parámetro*, en lugar de $2u'$, en la ecuacion de la parábola, que se convertirá en $z^2=px$ (O).

No estendiéndose esta curva sinó de un lado del eje de las z, ninguna recta tirada perpendicularmente á su eje puede dividir en dos partes iguales á las rectas tiradas paralelas á este último y terminadas en la curva. No sucede aquí como en la elipse, que tenía dos ejes dotados de esta propiedad; la parábola no tiene mas de uno.

264 La parábola se puede describir con mucha sencillez del modo siguiente. Se tomará sobre el eje de las x, partiendo del orígen, una distancia AB (fig. 93) igual con p, que representa el parámetro de la parábola. Despues, haciendo centro en un punto cualquiera C tomado en el mismo eje, y con un radio igual á CB, se describirá una circunferencia de círculo; en el punto A se levantará la AQ perpendicular á BC; y en el estremo P del diámetro se elevará la perpendicular PM, y en ella se tomará una parte MP=QA, con lo que se tendrá el punto M, que corresponderá á la parábola.

En efecto, por esta construccion se tiene (I. § 488)

$$AQ^2=AB\times AP, \text{ de donde } PM^2=AQ^2=p\times AP=px;$$

del mismo modo se construirían cuantos puntos se necesitasen.

265 Esta parábola, que se llama la *vulgar ó apoloniana*, es la madre de una numerosa familia comprendida en la ecuacion $z^{m+n}=a'^m x^n$;

si $m=2$ y $n=1$, resulta $z^3=a'^2x$,

que conviene á la *primera parábola cúbica*;

si $m=1$ y $n=2$, se tiene $z^3=a'x^2$,

que conviene á la *seguuda parábola cúbica*; y así van resultando pa-

rábolas de todos los grados. Si la constante ó parámetro a' se toma por unidad, será la ecuacion de las parábolas de todos los grados $z^m = x^n$.

Tambien podríamos señalar con a el valor de a'^m, y $m+n$ con m solamente y la ecuacion de todas las parábolas sería

$$z^m = ax^n, \quad \text{ó } z^n = ax^m;$$

y en general se podría decir, que parábola es *una linea curva en que una potencia cualquiera de la ordedada es igual á una constante multiplicada por otra potencia de la abscisa*; ó que parábola es una curva en que *unas mismas potencias de las ordenadas guardaban la misma razon que otras potencias cualesquiera de las abscisas.* Porque si llamamos Z á otra ordenada de la misma curva, cuya ecuacion sea $z^m = ax^n$, correspondiente á otra abscisa X, será $Z^m = aX^n$,
y formando proporcion tendrémos $Z^m : z^m :: aX^n : ax^n :: X^n : x^n$.

Si $m=2$ y $n=1$, que es el caso de la parábola vulgar, resulta $Z^2 : z^2 :: X : x$; que espresa la proporcion enunciada (263).

En el tercer grado hay dos parábolas cúbicas; en el cuarto tres, cuyas ecuaciones son $z^4 = a^3x$, $z^4 = a^2x^2$, $z^4 = ax^3$,
y así sucesivamente. Todas las primeras parábolas las podemos cifrar en la ecuacion $z^n = Ax$, ó trastornando los ejes en $z = \frac{1}{A}x^n = A'x^n$.

Ahora, suponiendo que las abscisas se empiecen á contar desde otro punto cualquiera en el mismo eje, de manera que la nueva abscisa sea $x' = x - h$, ó $x = x' + h$, se tendrá $z = A'(h + x')^n$;
que elevando á la potencia n, y llamando a, b, c, etc. á los coeficientes de los términos que vayan resultando, tendrémos prescindiendo del acento $z = a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 \ldots lx^n$,
que se suele decir que es la ecuacion de todas las parábolas; tomando tres términos es la de la vulgar; si se toman cuatro, se tendrá la cúbica etc.

266 Se llama fócus de la parábola á un punto F (fig. 94) situado sobre el eje de las x, y tal que la doble ordenada, que le corresponde, es igual con el parámetro, Este punto goza de muchas propiedades notables.

Para determinarlo, es necesario hacer $z = \frac{1}{2}p$ en la ecuacion de la parábola, lo que da $\frac{1}{4}p^2 = px$; de donde $x = \frac{1}{4}p$,
que espresa la abscisa pedida. Así, *en la parábola la distancia del fócus al vértice* A *de la curva, es igual á la cuarta parte del parámetro.*

Si se busca la distancia FM de un punto cualquiera de la parábola al fócus, se tendrá $FM^2 = PM^2 + FP^2 = z^2 + (x - \frac{1}{4}p)^2 =$

$$px + x^2 - \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 = x^2 + \tfrac{1}{2}px + \tfrac{1}{16}p^2 = (x + \tfrac{1}{4}p)^2,$$

de donde se saca $FM = x + \frac{1}{4}p$.

Luego *la distancia de un punto cualquiera de la parábola al fócus es igual á la abscisa de este punto, mas la distancia del fócus al vértice de la curva.* Por consiguiente, si se toma á la izquierda de A (fig. 94) una magnitud $BA = \frac{1}{4}p$, y por B se concibe la BL perpendi-

cular al eje AX, como toda linea tal como ML tirada desde un punto cualquiera de la curva séra igual con su paralela $PB=AP+BA=x+\frac{1}{4}p$, tendrémos que *los puntos de la parábola están á igual distancia del fócus que de una recta* BL *tirada perpendicularmente á su eje*, y *á una distancia del vértice* $=\frac{1}{4}p$; cuya recta se llama la *directriz*.

267 De aquí resulta el siguiente medio de trazar la parábola cuando es conocido el parámetro.

De una y otra parte del punto A se tomarán en el eje AX las longitudes $AB=AF=\frac{1}{4}p$, y el punto F será su fócus. Por un punto cualquiera P del eje se levantará una perpendicular indefinida PM; despues tomando la distancia Bp, desde el punto F como centro y con esta distancia por radio, se describirá un arco de círculo que corte á la recta PM en dos puntos M, m, los cuales corresponderán á la parábola. Porque de este modo resulta $FM=AP+AB=x+\frac{1}{4}p$.

268 Tambien se puede, en virtud de la misma propiedad, describir una parábola por un movimiento contínuo.

Para esto, se coloca contra la directriz BL una escuadra móvil EQR (fig. 95); despues tomando un hilo de una longitud igual á QE, se fijará uno de sus estremos en E, y el otro en el fócus F de la parábola; se estenderá despues el hilo por medio de un lapicero que se tendrá siempre bien unido á la línea QE; haciendo correr la escuadra á lo largo de la directriz, y el lapicero á lo largo de QE, quedará descrita la parábola.

En efecto, como el hilo es igual con la longitud de la escuadra QE, se tendrá $FM+ME=QM+ME$, que da $MF=QM$.

269 Se ha visto (212), por la generacion de la parábola en el cono, que esta curva no es otra cosa que una elipse prolongada indefinidamente. Para confirmarlo, considerarémos una elipse cuyos ejes (fig. 96) sean $2a$, $2b$; la distancia de su vértice A al fócus igual $\frac{1}{4}p$, ó la cuarta parte del parámetro; y tendrémos que si el orígen de las coordenadas está en el vértice, su ecuacion con relacion al parámetro (239 (G')) será $z^2=px-\frac{px^2}{2a}$; pero, al paso que a aumenta, permaneciendo x la misma, el término $\frac{px^2}{2a}$ irá disminuyendo; y suponiendo $a=\infty$, este término se reducirá á cero; y la ecuacion de la curva será

$$z^2=px;$$

ecuacion de una parábola en que la distancia del fócus al vértice es la misma que en la elipse que hemos considerado. Luego esta parábola es el límite de todas las elipses que tienen su eje sobre la recta AX, su vértice en el orígen, y $\frac{1}{4}p$ por distancia de este vértice al fócus.

270 Indaguemos ahora el modo de tirar una tangente á la parábola, cuya ecuacion es $z^2=px$ (1).

Sean x'', z'', las coordenadas del punto de contacto que se supone dado, y se tendrá en dicho punto $z''^2=px''$ (2);
y debiendo pasar por este punto la tangente, cuyas coordenadas supondrémos ser X, Z, su ecuacion (163) tendrá esta forma

$$Z-z''=a(X-x'') \quad (3).$$

Se trata de determinar a. Busquemos los puntos en que esta recta, considerada como secante, encuentra á la curva. Para lo cual observarémos que en dichos puntos las coordenadas de la recta y de la parábola deberán ser las mismas, y será $X=x$, y $Z=z$,
y la ecuacion de la recta en estos puntos será $z-z''=a(x-x'')$ (P);
y como restando las dos (ecs. 1 y 2) se tiene $z^2-z''^2=p(x-x'')$,
ó resolviendo en factores el primer miembro $(z-z'')(z+z'')=p(x-x'')$;
si en vez de $z-z''$ sustituimos su valor sacado de la (P), se tendrá

$$a(x-x'')(z+z'')=p(x-x''),$$

ó pasándolo todo al primer miembro, y sacando fuera de un paréntesis el factor comun $x-x''$, se tendrá $(a(z+z'')-p)(x-x'')=0$.

Esta ecuacion queda satisfecha cuando $x-x''=0$, porque el punto que tiene por coordenadas x'' y z'' es una de las intersecciones de la recta con la curva; suprimiendo este factor, queda $a(z+z'')-p=0$.

Las dos intersecciones de la tangente con la curva, debiendo confundirse en una sola, el segundo valor de x debe ser tambien x'' como el primero. Luego la ecuacion precedente debe quedar satisfecha cuando $x=x''$, que da $z=z''$; luego si sustituimos z'' por z, se tendrá

$$a\times 2z''-p=0, \quad \text{que da} \quad a=\frac{p}{2z''},$$

y la ecuacion (3) de la tangente se convierte en $Z-z''=\frac{p}{2z''}(X-x'')$;

que quitando el divisor da $2Zz''-2z''^2=pX-px''$, de donde
$Zz''=\frac{1}{2}(2z''^2+pX-px'')=\frac{1}{2}(2px''+pX-px'')=\frac{1}{2}(px''+pX)=\frac{1}{2}p(x''+X)$ (Q),

ó $Z=\frac{p}{2z''}(x''+X)$ (Q').

271 La de la normal, que pasa por el mismo punto, y que es perpendicular á la tangente, llamando $,X$, $,Z$, á sus coordenadas, será

(§ 168) $,Z-z''=-\frac{2z''}{p}(,X-x'')$.

Ahora, teniendo presente que pues el punto de que se trata está en la parábola, existirá entre las x'', z'' la relacion $z''^2=px''$, que da

$$p=\frac{z''^2}{x''};$$

y la ecuacion de la tangente tomará esta forma $Z-z''=\frac{z''}{2x''}(X-x'')$;

y la de la normal se convertirá en $,Z-z''=-\frac{2x''}{z''}(,X-x'')$.

Con el auxilio de estas fórmulas, se puede tirar una tangente á la parábola por un punto cualquiera cuyas coordenadas sean x', z', y que no estuviese tomado sobre esta curva, ni dentro de ella.

Porque debiendo hallarse este punto sobre la tangente, sería necesario que satisfaciese á su ecuacion (Q), lo que daría

$$z'z''=\tfrac{1}{2}p(x'+x'') \quad (R),$$

cuya ecuacion combinada con la $z''^2=px''$ nos daría los valores de las coordenadas x'', z'' del punto de contacto, que serían en general de segundo grado; lo que manifiesta, que, por un punto fuera de la parábola, se le pueden tirar dos tangentes. Sustituyendo los dos valores de x'', z'' que se encontrasen, en la ecuacion de la tangente, esta se hallaría determinada para cada sistema de valores, y pasarían las dos tangentes por el punto dado.

272 Restando la 1ª de estas ecuaciones de la 2ª, tendrémos

$$z''^2-z'z''=px''-\tfrac{1}{2}px'-\tfrac{1}{2}px''=\tfrac{1}{2}px''-\tfrac{1}{2}px'=\tfrac{1}{2}p(x''-x').$$

Este resultado indica, respecto de la parábola, una propiedad que hemos reconocido ya análoga en el círculo y en la elipse. En efecto, si se supone que el punto dado está sobre el eje mismo de las x (fig.97), será $z'=0$, en cuyo caso la (ec. R) da para x' un valor negativo, y se tiene simplemente $z''^2=\frac{1}{2}p(x''+x')$,

lo que nos enseña que las coordenadas x'', z'' del punto de contacto pertenecen á una parábola MTm que tuviese su vértice en el punto dado y cuyo parámetro fuese la mitad del de la parábola propuesta.

273 Para tener el punto en que la tangente encuentra al eje de las x, supondrémos que el punto cuyas coordenadas eran x', z', se halle en dicho eje, lo que hace que $z'=0$; en cuyo caso la ecuacion (R) da

$$0\times z''=\tfrac{1}{2}p(x'+x''), \quad \text{de donde } x'=-x'';$$

este es el valor de AT, que añadiéndole la abscisa AP, haciendo abstraccion del signo, tendrémos la subtangente $PT=2x''$;

pero siendo x'' la abscisa correspondiente al punto de contacto, tenemos que en la parábola *la subtangente es dupla de la abscisa*. Siendo este valor susceptible de crecer indefinidamente, el punto T se aleja mas y mas del vértice de la curva al paso que x'' aumenta.

274 Del mismo modo; haciendo $,Z=0$ en la ecuacion de la normal, se tendrán los puntos en que encuentra al eje de las x. Esta suposicion da $-z''=-\frac{2x''}{z''}(,X-x'')$ ó $-z''^2=-2x'',X+2x''^2$,

que sustituyendo en vez de z''^2 su valor px'', da

$$-px''=-2x'',X+2x''^2, \quad \text{de donde } ,X=x''+\tfrac{1}{2}p,$$

que es el valor de AN; quitando de él $AP=x''$, se tendrá la subnor-

mal $PN=\frac{1}{2}p$, es decir, que en la parábola la *subnormal es constante é igual á la mitad del parámetro*; luego nunca podrá llegar á ser nula, y por consiguiente la normal MN jamás llegará á confundirse con MP; de donde resulta que la tangente, que ha de ser perpendicular á la normal, no es jamás paralela al eje AX.

Aquí se llama tambien en particular *tangente* á la distancia MT comprendida entre el punto de contacto y el eje de las abscisas contada en la misma tangente; y el triángulo MPT da para ella

$$MT=\sqrt{PM^2+PT^2}=\sqrt{z^2+(2x)^2}=\sqrt{px+4x^2}.$$

Del mismo modo, se llama *normal* en particular á la parte de la normal interceptada entre el punto de contacto y el eje de las abscisas: dando su valor el triángulo rectángulo PMN en esta forma:

$$MN=\sqrt{PM^2+PN^2}=\sqrt{z^2+(\tfrac{1}{2}p)^2}=\sqrt{px+\tfrac{1}{4}p^2}.$$

Si se quisiere atender al signo de AT cuando se busca el valor de la subtangente PT, parece á primera vista que se tendría

$$PT=AT+AP=-x''+x''=0,$$

lo que daría constantemente la subtangente igual á cero, resultado absurdo; pero esto no es sinó un error de signo que proviene de que añadiendo AP á AT en la figura para tener PT, no se tiene cuenta con la posicion de estas líneas con relacion al orígen comun, siendo así que en la espresion analítica se atiende á esta posicion.

Esta contradiccion no subsiste cuando se prescinde del signo — en la cantidad $-x''$, que espresa el valor analítico de AT, atendiendo á su situacion con respecto al orígen de las coordenadas; y hé aquí porque se llega así al resultado verdadero.

Estas modificaciones, que es necesario sufran las espresiones analíticas para deducir de ellas los valores absolutos de las cantidades geométricas, no provienen, como se acaba de ver, de una imperfeccion de la Análisis, son al contrario una consecuencia necesaria de su gran generalidad; porque dando la Análisis á un mismo tiempo los valores absolutos y sus posiciones relativas, que están indicadas por los signos + y —, es necesario prescindir de esta propiedad y hacer abstraccion de estos, cuando se quieren combinar los valores absolutos de las cantidades independientemente de su situacion con relacion al orígen comun.

275 Si concebimos una recta, cuyas coordenadas sean X', Z', que pase por F (fig. 98) y por el punto de contacto, tendrémos que su ecuacion, por pasar por el punto de contacto, será $Z'-z''=m(X'-x'')$; y como ademas se dice que ha de pasar por el fócus, cuyas coordenadas son $Z'=0$ y $X'=\frac{1}{4}p$, tendrémos $-z''=m(\frac{1}{4}p-x'')$, de donde sale $m=\frac{-z''}{\frac{1}{4}p-x''}$.

El ángulo TMF que esta recta forma con la tangente de la parábola, siendo igual con MFX—MTX, tiene por tangente trigonométrica

$$\frac{m-a}{1+am}.$$

Sustituyendo en vez de a en esta espresion su valor (§ 270) $\frac{p}{2x''}$, por m el que acabamos de encontrar, y observando ademas que $z''^2=px''$, se reducirá á $\frac{p}{2z''}=a$; de donde se sigue, que *en la parábola el ángulo formado por la tangente y una recta tirada desde el fócus al punto de contacto es igual al ángulo de la tangente con el eje; y por lo mismo el triángulo* TMF *es isósceles.*

276 Si por el punto de contacto M se tira una recta ME paralela con el eje, la tangente formará con esta recta el mismo ángulo que con el eje (I. 386 a 3º); de donde se sigue, que *en la parábola dos rectas tiradas desde el punto de contacto una al fócus y otra paralelamente al eje, forman ángulos iguales con la tangente*; propiedad que debía resultar naturalmente de que la parábola es una elipse cuyo eje mayor es infinito, y cuyos fócus están por consiguiente infinitamente remotos el uno del otro.

De aquí resulta un medio muy simple de tirar una tangente á la parábola por un punto fuera de ella.

Sea G el punto dado, F el fócus de la parábola, y BL su directriz. Desde el punto G como centro con un radio igual á GF se señalará un punto L en la directriz. Desde el punto L se tirará LM paralela al eje, con lo cual M será el punto de contacto y MG la tangente pedida.

Porque por la naturaleza de la parábola ML=MF, y por construccion GF=GL, luego el ángulo LMG ó su opuesto ℞ME es igual al ángulo GMF; luego la recta MG es tangente en el punto M.

Si solo se necesitase la direccion de la tangente, y el punto M debiese estar muy remoto, sería mas cómodo tirar desde el punto dado G á la recta FL una perpendicular GT, y esta sería la tangente pedida.

Si con el mismo radio GF señalamos el punto L′ en la misma directriz, y por L′ tiramos la L′E′ paralela con el eje AX, el punto M′ en que encuentre á la parábola, será el otro punto de contacto; y tirando por él y por G una recta, se tendrá la otra tangente, de las dos que hemos dicho (271) se pueden tirar á la parábola por un punto fuera de ella.

℞ Si se compara este método con el dado (258) para tirar una tangente á la elipse por un punto fuera, se verá que no se diferencia de

él, sinó en que en la parábola el segundo fócus se debe considerar como infinitamente remoto del primero, lo que hace paralelas al eje las rectas que se le tiran. La distancia AB del vértice de la parábola á la directriz BL no es otra cosa que la diferencia de las líneas F'B, F'A de la elipse (fig. 96), siendo la primera igual al eje mayor AA', y he aquí porque AB=AF. Luego la directriz BL representa en la parábola la circunferencia de círculo descrita en la elipse desde el punto F' como centro con el eje mayor por radio, circunferencia que viene á ser una línea recta cuando el punto F' está infinitamente remoto; entónces el punto L en que la circunferencia descrita desde el punto G (fig. 98) como centro, con GF por radio, encuentra á la directriz BL, corresponde al punto en que esta misma circunferencia cortaba á la precedente en la elipse; y la recta tirada por un punto L paralelamente al eje, corresponde á la que en la elipse se tira al segundo fócus F'.

§ Deducirémos aquí una propiedad de la parábola, que nos será de la mayor importancia en lo sucesivo; y es que *en la parábola cuando dos tangentes son perpendiculares la una á la otra, la recta tirada por los dos puntos de contacto pasa por el fócus.*

Para demostrarlo, observarémos, que si espresamos por a la tangente trigonométrica de una recca cualquiera que pase por el fócus, cuyas coordenadas son $z=0$, $x=\frac{1}{4}p$, la ecuacion de esta recta, espresando sus coordenadas por X, Z, será (§ 163) $Z=a(X-\frac{1}{4}p)$.

En los puntos en que esta recta encuentre á la parábola, cuya ecuacion es $z^2=px$, tendrán las mismas coordenadas, y será $Z=z$, y $X=x$; por lo que se verificará $z=a(x-\frac{1}{4}p)$, que da $x=\frac{z}{a}+\frac{1}{4}p$, cuyo valor sustituido en la ecuacion $z^2=px$, dará

$$z^2-\frac{p}{a}z-\tfrac{1}{4}p^2=0.$$

Las dos raices de esta ecuacion son las dos ordenadas de los dos puntos de interseccion en que la recta que pasa por el fócus encuentra á la parábola; llamándolas z', z'', su producto será igual al término independiente de z en la ecuacion anterior, por lo que se demuestra (§ 367) de este volúmen; luego se tendrá $z'z''=-\frac{1}{4}p^2$.

Pero si por cada uno de estos puntos se concibe una tangente á la parábola, y se espresan por a', y a'' las tangentes trigonométricas de los ángulos que estas rectas forman con el eje, se tendrá (§ 270)

$a'=\frac{p}{2z'}$, $a''=\frac{p}{2z''}$, y por consiguiente $a'a''=\frac{p^2}{4z'z''}$.

Si en este resultado se pone en vez de $z'z''$, su valor $-\frac{1}{4}p^2$, sale $a'a''=-1$; lo que significa que *las dos tangentes tiradas de este*

modo en los dos puntos de interseccion son (168) *perpendiculares la una á la otra.* }

277 En la elipse hemos llamado diámetro á toda recta tirada por el centro y terminada en la curva. En la parábola, cuyo centro está en el infinito, se llama *diámetro* á toda recta tal como BE (fig. 99) tirada desde un punto cualquiera de la curva paralelamente al eje. Un diámetro no encuentra á la parábola sinó en solo un punto B; porque siendo la ecuacion de esta curva $z^2=px$, y la ecuacion de un diámetro, siendo (§ 144) $Z=z''$, no se pueden encontrar sinó en un solo punto.

278 Llamemos x'', z'', á las coordenadas de un punto cualquiera B de la parábola; la tangente en este punto tendrá por ecuacion

(§ 163) $Z-z''=a(X-x'')$, en la que (§ 270) $a=\frac{p}{2z''}$.

Sean x''', z''', las coordenadas de un punto cualquiera N''' tomado sobre el diámetro BE, el cual, siendo paralelo al eje, hará que

$$z'''=z''.$$

Si tiramos por este punto una recta cualquiera, cuyas coordenadas sean X', Z', su ecuacion será $Z'-z''=a'(X'-x''')$; que en los puntos donde encuentre á la parábola, como será $Z'=z$, $X'=x$, hará que esta ecuacion se convierta en $z-z''=a'(x-x''')$ (S); y para determinar estos puntos será necesario combinarla con la ecuacion de la parábola $z^2=px$ ó $z^2-px=0$, que con el fin de hacer el cálculo mas fácil, le darémos otra forma. Para lo cual añadirémos á ambos miembros $px'''-z''^2$, y se tendrá $z^2-px+px'''-z''^2=px'''-z''^2$.

Ahora, añadiendo y quitando $2zz''$ y z''^2 al primer miembro, será

$$z^2-2zz''+z''^2+2zz''-2z''^2-px+px'''=px'''-z''^2,$$

que se convierte por último en

$$(z-z'')^2+2z''(z-z'')-p(x-x''')=px'''-z''^2,$$

en cuya ecuacion sustituyendo el valor de $z-z''$ (S); teniendo presente que $z'''=z''$, será

$$a'^2(x-x''')^2+2a'z''(x-x''')-p(x-x''')=px'''-z''^2,$$

que se reduce á $a'^2(x-x''')^2+(2a'z''-p)(x-x''')=px'''-z''^2$.

Los dos valores de x, que da esta ecuacion, pertenecen á los puntos de interseccion; para que el diámetro divida á la recta en dos partes iguales, es necesario aquí, del mismo modo que en la elipse, que los dos valores de $(x-x''')$ (*) sean iguales y de signo contrario, lo que

---

(*) *Si la recta MM' no cortase al eje, se demostraria, como lo hicimos ántes, que para que* $M'N'''=N'''M$, *se debía verificar que* $P'P'''=P'''P$; *pero como le corta, lo demostrarémos de este modo: los triángulos semejantes* $NP'''N'''$, NPM *dan* $NP''':NN'''::PP''':MN'''$ (α); los

exige que la ecuacion sea pura, y por consiguiente que se tenga

$2a'z''-p=0$, de donde $a'=\frac{p}{2z''}=a$, es decir, *que la recta debe ser paralela á la tangente tirada al estremo del diámetro.*

Así, *en la parábola, cada diámetro divide en dos partes iguales á las rectas paralelas á la tangente tirada á su estremo y terminadas en la curva, cuya propiedad pertenece esclusivamente á los diámetros.*

279 En lo que precede, hemos deducido de solo la ecuacion de la parábola, las propiedades que la caracterizan. Recíprocamente, estas propiedades nos conducirán á la ecuacion de esta curva. Propongámonos por ejemplo, *encontrar una curva tal que la distancia de cada uno de sus puntos á una recta y á un punto dado, sean iguales entre sí.*

Sean F y BL (fig. 98) el punto y la recta dada. Tomemos por eje de abscisas á la recta FB perpendicular á BL, y coloquemos el orígen en el punto A medio de BF, que harémos igual con $\frac{1}{2}p$, y las ordenadas serán paralelas á la recta BL.

Para cada punto M de la curva buscada se tendrá

$PM^2=FM^2-PF^2$; pero

$$MF=ML=PB=x+\tfrac{1}{4}p, \text{ y } PF=AP-AF=x-\tfrac{1}{4}p;$$

luego ejecutando las sustituciones, se tendrá

$$z^2=(x+\tfrac{1}{4}p)^2-(x-\tfrac{1}{4}p)^2=x^2+\tfrac{1}{2}px+\tfrac{1}{16}p^2-x^2+\tfrac{1}{2}px-\tfrac{1}{16}p^2=px,$$

ecuacion de la parábola.

280 Esta cúrva estaba igualmente caracterizada por la ecuacion $MF=x+\frac{1}{4}p$, ó haciendo $MF=u$, por $u=x+\frac{1}{4}p$; porque siendo variables las distancias u, al mismo tiempo que la abscisa x, pueden convenir sucesivamente á todos sus puntos, y se determinará u para cada uno de ellos, siempre que x sea conocida.

Pára llegar á la ecuacion polar de la parábola, concebirémos trasportado el orígen de la rectangular al polo ó fócus F; y llamando x' á la Fp, será, $x'=AF-Ap=\frac{1}{4}p-x$, que da $x=\frac{1}{4}p-x'$; cuyo valor sustituido en el de u da $u=\frac{1}{4}p-x'+\frac{1}{4}p=\frac{1}{2}p-x'$; y como $x'=Fp=Fm\times\cos AFm$, si llamamos φ al ángulo AFm, se tendrá $x'=u\times\cos.\varphi$, y por lo mismo $u=\frac{1}{2}p-u\times\cos.\varphi$,

que da por último $u=\dfrac{\frac{1}{2}p}{1+\cos.\varphi}$, *que es la ecuacion polar de la parábola.*

$NN'''P'''$, $NP'M'$ dan $NP':NM'::NP''':NN'''$, que da $NP'+NP''':NM'+NN'''::NP''':NN'''$, ó reduciendo $P'P''':M'N'''::NP''':NN'''$; luego darán $PP''':MN'''::P'P''':M'N'''$; luego si se quiere que los consecuentes MN''', $M'N'''$ sean iguales, deberán serlo los antecedentes PP''', $P'P'''$, que era L. Q. D. D.

§ Si quisiéramos hallar la ecuacion polar mas general de la parábola, sustituiríamos en la ecuacion $z^2=px$, en vez de z y x los valores [§ 172 (2)]

$$z=z'+r\text{sen.}\varphi, \quad x=x'+r\cos\varphi,$$

lo que nos dará $z'^2+2z'r\text{sen.}\varphi+r^2\text{sen.}\varphi^2=px'+pr\cos\varphi$; de la cual podríamos deducir, como lo hicimos con la de la elipse, las ecuaciones particulares que resultaban para las diversas posiciones del polo; en lo que no nos detendrémos, por ser muy fácil de ejecutar á los que hayan comprendido bien todo lo espuesso (261). }

De la hipérbola.

281 Cortando un cono recto, cuyo ángulo en el vértice era mayor que $\frac{1}{2}\pi$, por un plano inclinado á su eje, de modo que encontrase á las dos caras de esta superficie, hemos obtenido (219) para la ecuacion de la interseccion $z^2-x^2(\alpha^2-1)+2\alpha u'x=0$; siendo $\alpha>1$ y u' positiva, y hemos dicho que esta curva se llamaba *hipérbola*.

Para tener los puntos en que corta al eje de las x, hagamos $z=0$, y tendrémos $-x^2(\alpha^2-1)+2\alpha u'x=0$, ó $x^2(\alpha^2-1)-2\alpha u'x=0$, lo que da para x dos valores $x=0$, $x=\frac{2\alpha u'}{\alpha^2-1}$.

Es decir, que esto se verifica en dos puntos diferentes, de los cuales uno es el mismo orígen de las coordenadas, y el otro está situado del lado de las abscisas positivas, á una distancia de este orígen igual con $\frac{2\alpha u'}{\alpha^2-1}$.

Haciendo $x=0$, se tendrán los puntos en que la curva corta al eje de las z, cuya suposicion da $z=0$; es decir, que esto solo tiene lugar en un punto, que es el orígen de las coordenadas.

282 Resolvamos ahora la ecuacion con relacion á z, y tendrémos

$$z=\pm\sqrt{x^2(\alpha^2-1)-2\alpha u'x}.$$

Los valores de z siendo iguales y de signo contrario, la curva es simétrica por la parte superior é inferior del eje de las x.

Considerémos primero el lado de las x positivas.

Los valores de z serán reales mientras que se tenga

$$x^2(\alpha^2-1)>2\alpha u'x \text{ ó } x>\frac{2\alpha u'}{\alpha^2-1};$$

pero serán imaginarios entre este límite y el orígen de las coordenadas, porque si se tiene $x<\frac{2\alpha u'}{\alpha^2-1}$, se tendrá tambien $(\alpha^2-1)x^2<2\alpha u'x$.

Así, por el lado de las abscisas positivas la curva tiene ordenadas imaginarias, desde el orígen hasta el punto en que corta á eje; mas allá de este límite, sus ordenadas son siempre reales y tanto mayores cuanto mayor es x.

Del lado de las x negativas, se tendrá $z=\pm\sqrt{x^2(\alpha^2-1)+2\alpha u'x}$.

La ordenada z es siempre real, y tanto mayor cuanto x es mayor; y por lo mismo la curva se estiende indefinidamente de este lado por la parte inferior y superior del eje de las abscisas.

283 De esta discusion resulta, que la hipérbola es una curva compuesta de dos partes separadas, tal como las representa la (fig. 100), donde el orígen de las coordenadas, está colocado en el punto B', cuya forma se podía preveer segun la disposicion del plano secante (fig. 79); el intervalo BB' que separa las dos ramas es igual á $\frac{2\alpha u'}{\alpha^2-1}$, y se llama el *primer eje* de la hipérbola.

Trasportemos el orígen de las coordenadas al punto A (fig. 100), medio del eje BB'; para lo cual llamarémos x' á la abscisa AP, y tendrémos $B'P=B'A+AP$ ó $x=x'+\frac{\alpha u'}{\alpha^2-1}$.

Sustituyendo este valor de x en la propuesta, será

$$z^2-(\alpha^2-1)(x'+\frac{\alpha u'}{\alpha^2-1})^2+2\alpha u'x'+\frac{2\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}=0,$$

ó $z^2-x'^2(\alpha^2-1)-2\alpha u'x'-\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}+2\alpha u'x'+\frac{2\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}=0$,

ó finalmente $z^2-x'^2(\alpha^2-1)+\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}=0$ (T).

Haciendo $z=0$, sesulta $-x'^2(\alpha^2-1)=-\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}$,

que da $x'^2=\frac{\alpha^2u'^2}{(\alpha^2-1)^2}$ y $x'=\pm\frac{\alpha u'}{\alpha^2-1}$ como debía ser;

pero haciendo $x'=0$ en la (ec. T), se tiene $z^2=-\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}$, que da

$$z=\pm\sqrt{-\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}}=\pm\sqrt{\frac{\alpha^2u'^2}{\alpha^2-1}}\times\sqrt{-1}=\pm\frac{\alpha u'}{\sqrt{\alpha^2-1}}\times\sqrt{-1},$$

resultado imaginario; porque la curva no encuentra al nuevo eje de las z. Lo cual no impide que la ecuacion de la hipérbola tome, como la de la elipse, una forma muy elegante cuando se hace

$$a=\frac{\alpha u'}{\alpha^2-1} \quad y \quad b=\frac{\alpha u'}{\sqrt{\alpha^2-1}},$$

porque de la 1ª se saca $\alpha^2-1=\frac{\alpha u'}{a}$, y la 2ª da $\alpha^2-1=\frac{\alpha^2 u'^2}{b^2}$; que igualando estos valores, se tendrá $\frac{\alpha^2 u'^2}{b^2}=\frac{\alpha u'}{a}$, que da $\alpha u'=\frac{b^2}{a}$; cuyo valor sustituido en el primero de α^2-1, dará $\alpha^2-1=\frac{\alpha u'}{a}=\frac{b^2}{a^2}$; y sustituyendo estos valores en la ecuacion (T), se nos convertirá en

$$z^2-\frac{b^2}{a^2}x'^2+b^2=0, \quad \text{ó} \quad z^2a^2-b^2x'^2=-a^2b^2;$$

que suprimiendo el acento de que no tenemos ya necesidad, da

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2=\frac{b^2x^2-b^2a^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2) \quad (V),$$

que quitando el divisor podrémos poner bajo esta forma

$$a^2z^2-b^2x^2=-a^2b^2.$$

284 Las cantidades $2a, 2b$, se llaman los *ejes de la hipérbola*, aunque en efecto ella no determine realmente por su interseccion sinó al primero. El punto A es el centro de la curva, y $\frac{2b^2}{a}$ es su *parámetro*, que es una tercera proporcional á los dos ejes; y espresándolo por p, se tiene $p=\frac{2b^2}{a}$; y $\frac{p}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$. Cuando la ecuacion de la hipérbola se halla referida á esta forma, siendo rectangulares las coordenadas, se dice que *está referida al centro y á sus ejes.*

Toda línea terminada en la curva, y tirada por el centro, se llama *diámetro*; y resulta de la forma simétrica de la hipérbola que *los diámetros se encuentran divididos en el centro en dos partes iguales.* Porque si tomamos las abscisas iguales AP y AP′ (fig. 100), la ecuacion (V) dará MP=M′P′, y uniendo el punto A con los M y M′ por medio de las rectas MA y M′A, se tendrá que los triángulos APM y AP′M′ serán iguales (I. 360) y darán AM=AM′, y los ángulos PAM=P′AM′; luego las dos rectas AM, AM′ no forman (I. 357) sinó una sola y misma recta, y es por consiguiente un diámetro, cuyas partes AM, AM′ son iguales.

285 La ecuacion de la elipse referida tambien á sus ejes y al centro es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$.

Comparándola con la de la hipérbola, se ve que para *pasar de la una á la otra basta mudar* b *en* $b\sqrt{-1}$;

porque entónces en vez de b^2 será necesario poner $+b^2\times-1=-b^2$, lo que dará $z^2=-\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, que es la de la hipérbola; esta consideracion es en la Análisis de la mayor importancia.

Lo que hemos visto relativamente al curso de las coordenadas en las dos curvas es una consecuencia de esta ley; porque si se tienen una elipse y una hipérbola, cuyos ejes sean los mismos, la primera estará comprendida en los límites entre que la otra viene á ser imaginaria.

Cuando los dos ejes de la hipérbola son iguales entre sí, su ecuacion se convierte en $z^2=x^2-a^2$;
y entónces se dice que la hipérbola es *equilátera*.

Cuando los dos ejes de la elipse son iguales, su ecuacion se convierte en $z^2=a^2-x^2$
y ella se reduce á un círculo. Luego *la hipérbola equilátera es, respecto de las hipérbolas ordinarias, lo que es el círculo respecto de las elipses.*

286 Si concebimos que pase una recta inclinada de un modo cualquiera, cuyas coordenadas sean X, Z, por el punto B′ (fig.101) respecto del cual es $z''=0$ y $x''=-a$,
dicha recta tendrá por ecuacion $Z=\alpha(X+a)$.

Si consideramos otra recta cualquiera, cuyas coordenadas sean X′, Z′, que pase por el punto B respecto del cual es $z'=0$, y $x'=+a$, inclinada tambien de un modo cualquiera, tendrá por ecuacion

$$Z'=\alpha'(X'-a).$$

Para que estas dos rectas se corten en la hipérbola, es necesario que en el punto M donde lo hagan tengan las mismas coordenadas que la hipérbola; por consiguiente será $Z'=Z=z$ y $X'=X=x$;
y haciendo esta sustitucion en sus ecuaciones, tendrémos

$$z=\alpha(x+a),\quad z=\alpha'(x-a);$$

las cuales multiplicadas dan $z^2=\alpha\alpha'(x^2-a^2)$,
y como por la naturaleza de la hipérbola se tiene $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$,
resulta, igualando estos dos valores de z^2, que

$$\alpha\alpha'(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad \text{de donde}\quad \alpha\alpha'=\frac{b^2}{a^2},$$

lo que establece una relacion constante entre los ángulos que forman con el eje primero las rectas tiradas desde los dos vértices de la curva á uno de sus puntos. De donde resulta que estos ángulos tienen siempre sus tangentes trigonométricas de igual signo, pues que su producto es positivo.

Cuando la hipérbola es equilátera se tiene $b=a$, y resulta entónces

$$\alpha\alpha'=1\text{, que da }\alpha=\frac{1}{\alpha'},$$

es decir, que *en la hipérbola equilátera las rectas tiradas desde un mismo punto de la curva á los estremos del eje primero forman con él ángulos agudos, cuya abertura está en el mismo sentido, y cuya suma es igual á un recto*; pues que la tangente de uno de estos ángulos es igual á la cotangente del otro.

Las rectas tiradas del mismo modo en el círculo forman tambien con el eje ángulos agudos cuyo suma es igual á un recto; pero sus aberturas están dirigidas en sentidos contrarios.

287 Si se introducen las espresiones de los ejes $2a$ y $2b$ en la ecuacion de la hipérbola, tal como la hemos considerado al principio del (§ 281) cuando el orígen se hallaba en el vértice, se convierte en

$$z^2-x^2\frac{b^2}{a^2}+\frac{2b^2}{a}x=0,$$

que da $z^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-\frac{2b^2ax}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(x^2-2ax)=(\S\,284)\frac{p}{2a}(x^2-2ax)$ (V′);

que se puede poner bajo la forma $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x-2a)x$;

y como x y $x-2a$ son (fig. 100) las distancias B′P y BP del pie de la ordenada PM á los vértices B′ y B de la curva; y respecto de otra ordenada z', cuya abscisa fuese x', tendríamos $z'^2=\frac{b^2}{a^2}(x'-2a)x'$,

sesultaría $z^2:z'^2::\frac{b^2}{a^2}(x-2a)x:\frac{b^2}{a^2}(x'-2a)x'::(x-2a)x:(x'-2a)x'$,

cuya proporcion nos dice, que *los cuadrados de las ordenadas son entre sí como los productos de estas distancias*, á que se suele llamar en general *abscisas*.

Si trasladásemos el orígen á B, la abscisa BP, que ántes estaba representada por B′P−B′B$=x-2a$, lo estará ahora por x; y la B′P, que ántes estaba espresada por x, ahora lo estará por B′B+BP$=2a+x$, de manera que el producto de las abscisas estará representado en este caso por $x(2a+x)=2ax+x^2$;

y por consiguiente la ecuacion de la hipérbola respecto del orígen B, será $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$, ó con relacion al parámetro

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)=\frac{p}{2a}(2ax+x^2)=px+\frac{px^2}{2a}\text{ (V″).}$$

288 La hipérbola, que acabamos de considerar, es tambien madre de una numerosa familia llamada *familia de las hipérbolas*, y cuya ecuacion la podemos señalar de este modo

$$z^{m+n}=Ax^m(x-b)^n, \text{ ó de este } z^{m+n}=Ax^m(x+b)^n.$$

289 Mudando las x en z, y las z en x en la ecuacion (V), se convertirá en $x^2=\frac{b^2}{a^2}(z^2-a^2)$, que despejando z^2 da $z^2=\frac{a^2}{b^2}(x^2+b^2)$.

Esta trasformacion no influyendo sinó sobre la eleccion de los ejes, la ecuacion precedente debe aun pertenecer á la misma hipérbola, lo que se puede verificar discutiéndola. Pero aquí la suposicion de $x=0$ da z real, y $z=0$ da x imaginaria, porque la curva encuentra al nuevo eje de las ordenadas y no al de las abscisas; entónces se halla situada como representa la parte puntuada de la (fig. 101), siendo bb' su primer eje. En esta situacion se dice que está referida á su segundo eje, porque sobre este es sobre el que se cuentan las abscisas. Se ve que no sucede en la hipérbola lo mismo que en la elipse, cuya ecuacion guarda la misma forma, cualquiera que sea el eje que se tome por ejede abscisas.

290 Los fócus de la hipérbola son puntos F, F′, (fig. 102) situados en la prolongacion del eje BB′, y tales que la doble ordenada que á ellos corresponde es igual al parámetro $\frac{2b^2}{a}$.

Para determinarlos, es necesario hacer $z=\frac{b^2}{a}$ en la ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, lo que da $\frac{b^4}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, que se reduce á $x^2-a^2=b^2$, ó á $x^2=a^2+b^2$, que da $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}$, valor que se construye del modo siguiente.

En uno de los estremos del primer eje se eleva una perpendicular BE (fig. 102) igual al semieje segundo. Desde el punto A como centro con un radio AE, se describirá una circunferencia de círculo que cortará al eje de las abscisas en dos puntos F, F′, que serán los fócus de la hipérbola; porque

$$AF=AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

291 Si desde un mismo punto de la hipérbola se tiran las rectas FM, F′M á los fócus, y se hace para mayor sencillez $\sqrt{a^2+b^2}=c$, se tendrá $FM^2=MP^2+FP^2=MP^2+(AP-AF)^2$. ....

$$=z^2+(x-c)^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)+x^2-2cx+c^2;$$

de donde se saca de un modo análogo al espuesto (246) para la elipse $FM=\frac{cx}{a}-a$; y del mismo modo sería $F'M=\frac{cx}{a}+a$; lo que da $F'M-FM=2a$, es decir, que en la hipérbola la *diferencia de los radios vectores tirados desde los fócus á un mismo punto de la curva es igual al eje primero.*

Esta propiedad da una construccion para la hipérbola análoga á la que hemos hallado (247) para construir la elipse.

Desde el fócus F, como centro con un radio cualquiera BO se describirá un arco de círculo; desde el otro fócus F′ como centro con un radio $B'O=BB'+BO$ se describirá otro arco de círculo, y los puntos como el M en que corte al precedente, pertenecerán á la hipérbola; porque segun esta construccion se tendrá

$$F'M-FM=BB'=2a.$$

Haciendo lo mismo al otro lado del orígen, se tendrá la segunda rama de la curva; y se pueden aplicar aquí las observaciones hechas sobre la construccion de la elipse por el procedimiento análogo.

Tambien se puede, en virtud de esta propiedad, describir la hipérbola, como la elipse por un movimiento continuo: para esto se fija en el fócus F′ una regla F′M que pueda girar al rededor de este punto.

Al estremo Q y en el otro fócus F está fijo un hilo FMQ, tal que $F'MQ-FMQ=BB'$, que, quitando la parte comun QM, hace que F′M—FM sea igual al eje primero BB′; haciendo girar despues un lapicero á lo largo del hilo, se le obliga á aplicarse siempre contra la regla que gira al rededor del punto F′, y el lapicero por este procedimiento describe la hipérbola que se pedía.

La hipérbola tiene tambien dos *directrices*, como la elipse (§ 247).

En efecto, si tomamos $AH=\frac{a^2}{c}$ (fig. s lám. 8″), y por H se levanta la perpendicular HL, si desde un punto cualquiera M de la curva, se tira la MR perpendicular á HL, se tendrá

$$MR=HP=AP-AH=x-\frac{a^2}{c}.$$

Formando proporcion con esta ecuacion y la $FM=\frac{cx}{a}-a$,

tendrémos $FM:MR::\frac{cx}{a}-a:x-\frac{a^2}{c}::\frac{cx-a^2}{a}:\frac{cx-a^2}{c}::c:a.$

Haciendo la misma construccion á la izquierda del punto A, obtendrémos $F'M:MR'::c:a$.

Las rectas HL y H'L' se llaman las *directrices* de la hipérbola; y las proporciones anteriores nos dicen: qùe *las distancias de un punto de la hipérbola á uno de los fócus y á la directriz mas próxima de este fócus, guardan la misma razon que la escentricidad con el semieje primero.*

292 Ocupémonos ahora de tirar una tangente á la hipérbola, cuya ecuacion es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$.

Sean x'', z'' las coordenadas del punto de contacto, y tendrémos que en dicho punto será $z''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-a^2)$ (W).

Ahora, suponiendo que X, Z, sean las coordenadas de la tangente, tendrémos que debiendo pasar por el punto de contacto, su ecuacion será $Z-z''=\alpha(X-x'')$; no falta mas que determinar α.

Para conseguirlo, se podrá ejecutar con estas tres ecuaciones lo que en el párrafo (248) se hizo respecto de las de la elipse; pero como estas últimas son las mismas que las otras, mudando b en $b\sqrt{-1}$, tendrémos que el resultado tambien será el mismo con esta modificacion; por lo que la ecuacion [248 (I)] se convertirá en $\alpha=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}$; de donde resulta que la ecuacion de la tangente será

$$Z-z''=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}(X-x'');$$

que, quitando el divisor, es $a^2z''Z-a^2z''^2=b^2x''(X-x'')$, ó poniendo en vez de z''^2 su valor (W); será $a^2Zz''-b^2(x''^2-a^2)=b^2Xx''-b^2x''^2$, que da $a^2Zz''-b^2Xx''=-a^2b^2$.

293 La de la normal, cuyas coordenadas señalarémos con $,X$, $,Z$, será $,Z-z''=-\frac{a^2}{b^2}\times\frac{z''}{x''}(,X-x'')$, que quitando los divisores, es $b^2,Zx''-b^2z''x''=-a^2z'',X+a^2z''x''$, ó $b^2,Zx''+a^2z'',X=(a^2+b^2)x''z''$.

El valor de α es infinito cuando z'' es nula, lo que da en virtud de la ecuacion (W) $x''=\pm a$: x'' no puede llegar jamas á ser nula, porque $x''=0$ daría z'' imaginaria, y z'' infinita, daría x'' infinita; así, en los estremos del primer eje de la hipérbola la tangente es paralela al eje de las ordenadas, y jamas puede llegarlo á ser al eje de las abscisas. Siendo el valor de α del primer grado, manifiesta que no se puede tirar por un punto de la hipérbola nada mas que una tangente á esta curva.

294 Si por el centro, que es el orígen de las coordenadas, se tira una recta, cuyas coordenadas sean $'X$, $'Z$, su ecuacion será de la forma $'Z=\alpha'.'X$; y suponiendo que pase por el punto de contacto, será allí $'X=x''$, $'Z=z''$, y la ecuacion se convertirá en

$$z''=\alpha' x'', \quad \text{de donde} \quad \alpha'=\frac{z''}{x''}.$$

Este valor multiplicado por el de α, que conviene á la tangente, da

$$\alpha\alpha'=\frac{b^2}{a^2};$$

y comparando este resultado con el del artículo (286), se ve que el punto de contacto está sobre una hipérbola, cuyo primer semieje es AT (fig. 103) y la relacion de los ejes es $\frac{b}{a}$; de donde se sigue que para tirar una tangente á la hipérbola por un punto M dado sobre esta curva, es necesario tirar desde este punto al centro el diámetro AM, por el estremo B' del primer eje BB' tirar la B'N paralela con AM, unir el punto N con el B, y la MT paralela con NB, será la tangente pedida.

295 De esta construccion y de la forma simétrica de la hipérbola, resulta que las tangentes MT, *mt* á los estremos de un mismo diámetro son paralelas entre sí. Luego si se tira por el centro A una paralela á estas tangentes, ella no encontrará jamas á la curva; sin embargo, por analogía con la elipse, se toma sobre esta paralela una cantidad determinada, que se llama *diámetro conjugado* del diámetro AM.

296 Haciendo $Z=0$ en la ecuacion de la tangente, se encuentra $-b^2Xx''=-a^2b^2$, que da $X=\frac{b^2a^2}{b^2x''}=\frac{a^2}{x''}$; que es el valor de AT; quitándole de AP (fig. 104), se tendrá la subtangente

$$PT=x''-\frac{a^2}{x''}=\frac{x''^2-a^2}{x''};$$ igualmente se encontrará la subnormal

$$PN=\frac{b^2x''}{a^2};$$ de donde se deducirán fácilmente las longitudes de la tangente MT y de la normal MN, análogamente á lo espuesto (255 y 274).

297 El valor precedente de AT nos va á manifestar una propiedad notable de la hipérbola; en efecto, representando esta magnitud por x', se tiene $x'=\frac{a^2}{x''}$, que da $x''=\frac{a^2}{x'}$.

Si se introduce esta espresion de x'' en el valor general de α, que es

$$\alpha=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{z''}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{x''}{\pm\frac{b}{a}\sqrt{x''^2-a^2}}=\frac{b}{a}\times\frac{x''}{\pm\sqrt{x''^2-a^2}},$$

se converttirá en

$$\alpha=\frac{b}{a}\times\frac{\frac{a^2}{x'}}{\pm\sqrt{\frac{a^4}{x'^2}-a^2}}=\pm\frac{b}{a}\times\frac{\frac{a^2}{x'}}{\frac{a\sqrt{a^2-x'^2}}{x'}}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2-x'^2}}\ (W').$$

El doble signo de que está afecta, indica que por un mismo punto T, tomado sobre el eje BB′ se pueden tirar á la hipérbola dos tangentes igualmente inclinadas, la una por encima y la otra por debajo del eje BB′. Ademas, el signo de x'' siendo el mismo que el de x' ó de AT, los dos puntos en que estas tangentes encuentren á la curva, estarán situados sobre una misma rama, y tendrán la misma abscisa AP; es necesario, pues, que exista sobre el eje un punto en que las tangentes pasen de una rama á la otra.

Para descubrirlo, sigamos la marcha de los valores de α (ec. W′); el mayor corresponde á $x'=\pm a$; entónces el punto de contacto es úno de los vértices B, B′ de la hipérbola; α viene á ser infinita, y la tangente es paralela á las ordenadas; x' ó AT, llegando á ser menor que a, el valor de α disminuye, y el de x'' aumenta; entónces el punto T se aproxima al centro de la hipérbola, la tangente se inclina al eje, y el punto de contacto se aleja.

El menor valor de α, tanto positivo como negativo, corresponde al caso en que x' es nula, lo que da $\alpha=\pm\frac{b}{a}$; entónces el punto T coincide con el centro de la curva, y la abscisa x'' del punto de contacto viene á ser infinita. Por consiguiente, *si se tiran por el centro de la hipérbola dos rectas que formen con el eje de esta curva un ángulo cuya tangente trigonométrica sea igual con* $\pm\frac{b}{a}$, *estas rectas prolongadas indefinidamente serán el límite de todas las tangentes que se pueden tirar á la hipérbola por puntos tomados sobre su eje; esta propiedad les ha hecho dar el nombre de* asíntotas.

298 Segun esta definicion, las asíntotas de la hipérbola tendrán por ecuacion $'z=\frac{b}{a}.'x$, $,z=-\frac{b}{a'}.,x$.

Refiriéndose la diferencia de los signos á sus situaciones respectivas con relacion al eje.

Las asíntotas no encuentran jamas á la curva; porque la ecuacion de la hipérbola es $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$;

y cuadrando la ecuacion de cualquiera de las asíntotas, se tiene

$$'z^2=\frac{b^2}{a^2}.'x^2;$$

donde se ve que las ordenadas correspondientes á las mismas abscisas, serán siempre mayores para las asíntotas, que para la hipérbola, que estará por consiguiente comprendida toda entera en el ángulo formado por dichas asíntotas.

299 Las fórmulas precedentes pueden aun emplearse para *tirar tangentes á la hipérbola por un punto fuera de ella*; porque representando las coordenadas de dicho punto por x',z', deberán satisfacer á la ecuacion de la tangente (292), lo que dará $a^2z'z''-b^2x'x''=-a^2b^2$; y pues que el punto de contacto está sobre la curva, se tendrá ademas

$$z''^2=\frac{b^2}{a^2}(x''^2-a^2).$$

Estas dos ecuaciones bastan para determinar las coordenadas x'',z'', que serán en general dobles para este punto.

300 Si desde el fócus F (fig. 105) se tira una recta á un punto cualquiera de la hipérbola, que tenga por coordenadas x'',x'', la ecuacion de esta recta será $Z_1-z''=m(X_1-x'')$.

La condicion de pasar por el fócus, cuyas coordenadas son

$$Z_1=0,\quad X_1=\sqrt{a^2+b^2},\quad \text{la reduce á}\quad -z''=m(\sqrt{a^2+b^2}-x''),$$

que haciendo $\sqrt{a^2+b^2}=c$, da $m=\frac{-z''}{c-x''}$.

La tangente en el mismo punto de la hipérbola tiene por ecuacion (§ 292) $Z-z''=\alpha(X-x'')$, siendo $\alpha=\frac{b^2x''}{a^2z''}$.

El ángulo FMT ó fMt, que forma con la recta, siendo igual con MFN−MTF, tiene por tangente trigonométrica.

$$\frac{m-\alpha}{1+\alpha m}=\frac{\frac{-z''}{c-x''}-\frac{b^2x''}{a^2z''}}{1-\frac{b^2x''z''}{a^2z''(c-x'')}}=\frac{\frac{-a^2z''^2-cb^2x''+b^2x''^2}{a^2z''(c-x'')}}{\frac{a^2z''(c-x'')-b^2x''z''}{a^2z''(c-x'')}}$$

que, suprimiendo los denominadores, y sustituyendo en vez de $-a^2z''^2$ su valor $a^2b^2-b^2x''^2$, que da la ecuacion (W § 292), resultará

$$\frac{m-\alpha}{1+\alpha m}=\frac{a^2b^2-b^2x''^2-cb^2x''+b^2x''^2}{ca^2z''-a^2x''z''-b^2x''z''}=\frac{b^2(a^2-cx'')}{ca^2z''-z''x''(a^2+b^2-c^2)}=\ldots$$

$$\frac{b^2(a^2-cx'')}{cz''(a^2-cx'')}=\frac{b^2}{cz''}.$$

Igualmente, si desde el fócus F' se tira al punto de contacto una recta cuyas coordenadas sean $X_{''}$, $Z_{''}$, su ecuacion será

$$Z_{''}-z''=m'(X_{''}-x'');$$

y la condicion de pasar por el fócus, cuyas coordenadas son

$Z_{''}=0$, $X_{''}=-\sqrt{a^2+b^2}=-c$, dará $-z''=m'(-c-x'')$,

de donde $m'=\frac{z''}{c+x''}$.

El ángulo F'MT ó $f'Mt$, que forma esta recta con la tangente, siendo igual á MTF—TF'M, tendrá por tangente trigonométrica $\frac{\alpha-m'}{1+\alpha m'}$,

que sustituyendo en vez de α y m' sus valores, se reduce á $\frac{b^2}{cz''}$.

Teniendo los ángulos FMT y F'MT la misma tangente, son iguales entre sí; de donde resulta esta propiedad: que *en la hipérbola las rectas tiradas desde el punto de contacto á los dos fócus forman con la tangente de una y otra parte de esta recta ángulos iguales.*

De aquí se sigue que *la normal* MN *divide en dos partes iguales el ángulo* FM*f' formado por los radios vectores tirados desde los fócus á un mismo punto de la curva*; porque los ángulos que forma la tangente con ellos son los complementos por defecto de dichos ángulos primitivos.

Estas propiedades existen tambien en la elipse, y no hay mas diferencia sinó en la situacion de la tangente respecto á estas dos curvas.

301 Esto suministra la siguiente construccion *para tirar una tangente á la hipérbola por un punto dado.*

Si el punto se halla sobre la curva, tal como en M, se tirarán los radios vectores FM, F'M; sobre este último, partiendo desde el punto M, se tomará MG=MF. Uniendo el punto G con el F y tirándole la perpendicular MT, esta será la tangente pedida.

En efecto, por esta construccion los ángulos FMT, F'MT son iguales entre sí. Tambien se podría demostrar aquí, como en la elipse (§ 248), que la recta MT solo tiene el punto M comun con la hipérbola estando todos los demas puntos fuera de ella.

Supongamos el punto dado fuera de la curva, tal como en *t*.

Desde este punto *t* como centro con un radio igual á F*t*, se describirá un arco de círculo FGG′; desde el fócus F′ como centro, y con un radio F′G igual al primer eje BB′ de la hipérbola, se describirá otro arco de círculo *n*GG′ que cortará al anterior en dos puntos G y G′. Contraigámonos al punto G, y tirémos por él la F′G que encontrará á la curva en M; y el punto M será un punto de contacto, y uniéndole con el punto dado *t* por medio de la *t*MT, esta será tangente en M y pasará por *t*, como se pedía.

En efecto, si se tira *t*G, se tendrá por construccion G*t*=F*t*; ademas el punto M hallándose sobre la hipérbola, y F′G siendo igual al primer eje, se tiene MG=MF; luego la recta M*t* es perpendicular á la recta GF y divide el ángulo FMF′ en dos partes iguales; luego reune todas las circunstancias de tangente.

Las circunferencias descritas desde los puntos F′ y *t* como centros, cortándose en dos puntos G y G′, esta construccion da las dos tangentes que se pueden tirar á la hipérbola por un punto dado fuera de ella. Si este punto se halla comprendido entre las asíntotas y una de las ramas de la hipérbola, los dos puntos de contacto estarán sobre esta rama; pero, si está fuera de este ángulo, los dos puntos de contacto estarán situados sobre las dos ramas opuestas. En todos los casos, los dos puntos de contacto serán reales; porque para todos los puntos situados fuera de la hipérbola, la diferencia de sus distancias á los dos fócus es menor que la longitud del primer eje; de manera, que los círculos descritos desde los puntos F′ y *t* como centros, se cortarán siempre, en tanto que el punto *t* se halle esterior á la hipérbola.

302 Aplicando aquí lo que hemos dicho (259) tratando de la elipse, y mudando *b* en $b\sqrt{-1}$ en las fórmulas de que hemos hecho uso, se probará que *en la hipérbola cada diámetro divide en dos partes iguales á las líneas paralelas á la tangente tirada por su estremo y terminadas en la curva.*

Esta propiedad pertenece esclusivamente á los diámetros, y permite estender á la hipérbola lo que hemos dicho en el artículo citado acerca de los diámetros conjugados de la elipse.

303 Tambien podemos deducir la ecuacion de la hipérbola de una sola de las circunstancias que la caracterizan.

Propongámonos, por ejemplo, *hallar una curva tal que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados, sea constante é igual con* 2a.

Sean F, F′ (fig. 102) los puntos dados: coloquemos el orígen en A, medio de la recta FF′ que harémos igual 2*c*; y suponiendo que M sea un punto de la curva que tenga por coordenadas AP, PM, que representarémos por *x*, *z*, se tendrá $\left\{\begin{array}{l} FM^2=MP^2+PF^2=z^2+(x-c)^2 \\ F'M^2=PM^2+F'P^2=z^2+(x+c)^2, \end{array}\right\}$

que llamando u, u', á las distancias FM, F'M, tendrémos convertidas estas ecuaciones en $u^2=z^2+(x-c)^2$, $u'^2=z^2+(x+c)^2$, y como $u'-u=2a$, siguiendo el cálculo como en la elipse (260) se encontrará

$$u^2+u'^2=2(z^2+x^2+c^2),\quad u'=a+\frac{cx}{a},\quad u=-a+\frac{cx}{a}.$$

Sustituyendo los valores de u', u, en la primera de estas, se tendrá

$$a^2+2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}+a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}=2(z^2+x^2+c^2),$$

que ejecutando la reduccion y destruccion, quitando el divisor, dividiendo por 2 y sustituyendo por c^2 su valor a^2+b^2, resulta

$$a^4+a^2x^2+b^2x^2=a^2z^2+a^2x^2+a^4+a^2b^2,\text{ ó }b^2x^2=a^2z^2+a^2b^2,$$

que da $a^2z^2=b^2x^2-a^2b^2$, de donde $z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$, que es la ecuacion de la hipérbola referida al centro y á sus ejes.

304 Para encontrar la ecuacion polar de la hipérbola, determinarémos primero el radio vector en valores de la abscisa Fp tomada desde el fócus F, y llamándola x', y φ al ángulo mFO, será

$$\cos.m\text{FA}=\cos.(\pi-\varphi)=-\cos.\varphi,$$

y $x=\text{A}p=\text{AF}-p\text{F}=c-x'=c-u\cos.m\text{FA}=c+u\cos.\varphi.$

Cuyo valor sustituido en el de u, le convertirá en

$$u=-a+\frac{c(c+u\cos.\varphi)}{a}=\frac{-a^2+c^2+cu\cos.\varphi}{a},$$

de donde se saca $au-cu\cos.\varphi=c^2-a^2=b^2$, y $u=\frac{b^2}{a-c\cos.\varphi}$,

ecuacion polar de la hipérbola; pero si queremos obtener la ecuacion polar mas general de esta curva, sustituirémos en la ecuacion (§ 283)

$$a^2z^2-b^2x^2=-a^2b^2$$

en vez de x y z, sus valores (§ 172 (2)) y tendrémos

$$(a^2\text{se.}^2\varphi.-b^2\text{co.}^2\varphi)r^2+2(a^2z'\text{se.}\varphi-b^2x'\text{co.}\varphi)r+a^2z'^2-b^2x'^2+a^2b^2=0.$$

en la cual podríamos hacer supuestos análogos á los que hicimos respecto de la de la elipse, y deduciríamos las ecuaciones particulares para los diversos puntos en que colocásemos el polo.

Aplicacion de la trasformacion de las coordenadas á la investigacion de los diámetros conjugados de las secciones cónicas; y deduccion de las principales propiedades de estas curvas referidas á sus diámetros.

305 Cuando se ha reconocido la naturaleza de una curva, es necesario aun determinar su posicion relativamente á los ejes de las coordenadas, y referir su ecuacion á una forma que permita seguir con facilidad todas las circunstancias de su curso.

Respecto de las secciones cónicas hemos llegado á estas simplificaciones, colocando el cono de modo que estuviese dispuesto simétricamente con relacion á los ejes. En general, se empléan, para conseguir este objeto, métodos fundados sobre estos mismos principios.

Ellos consisten en mudar la posicion del orígen, y la direccion de los ejes de las coordenadas; para colocarlos de modo que refiriendo á ellos la ecuacion propuesta se reduzca á la forma mas simple que permita la curva que representa. Basta reconocer despues la posicion de los nuevos ejes con relacion á los antiguos para conocer la situacion de la curva.

Por el mismo medio se pueden referir las curvas á coordenadas que no sean rectangulares, y estudiar despues bajo este punto de vista sus diversas propiedades.

306 Principiemos estas investigaciones por la elipse, cuya ecuacion con respecto al centro y á sus ejes es (§ 248) $a^2z^2+b^2x^2=a^2b^2$;
sustituyendo en vez de x y z los valores (§ 198)

$$x=x'\cos.\alpha+z'\cos.\mathcal{C}\,,\quad z=x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen.}\mathcal{C}\,,$$

porque los diámetros pasan por el mismo orígen que es el centro, se convertirá en $a^2(x'^2\text{sen.}^2\alpha+2x'z'\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C})+$
$b^2(x'^2\cos.^2\alpha+2x'z'\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}+z'^2\cos.^2\mathcal{C})=a^2b^2$;

que se trasforma en $x'^2(a^2\text{sen.}^2\alpha+b^2\cos.^2\alpha)+$
$x'z'(2a^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+2b^2\cos.\alpha\cos.\mathcal{C})+z'^2(a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+b^2\cos.^2\mathcal{C})=a^2b^2$;

y como, para que haya diámetros conjugados, es necesaio que las ordenadas positivas (259) sean iguales con las negativas, lo que exige que los dos valores tanto de x' como de z' sean iguales y de signo contrario, se sigue que esta ecuacion debe ser pura si ha de cumplir con esta circunstancia; luego el coeficiente del segundo término deberá ser cero, y se tendrá

$$2a^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+2b^2\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}=0\quad(\text{X})\,,$$

$$\text{ó}\quad a^2\times\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha}\times\frac{\text{sen.}\mathcal{C}}{\cos.\mathcal{C}}+b^2=0\,,\quad\text{ó}\quad a^2\text{tang.}\alpha\text{tang.}\mathcal{C}+b^2=0\,,$$

y la ecuacion de la curva se convierte en

$$(a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+b^2\cos.^2\mathcal{C})z'^2+(a^2\text{sen.}^2\alpha+b^2\cos.^2\alpha)x'^2=a^2b^2.$$

Haciendo sucesivamente $z'=0$, $x'=0$, se tendrán las distancias del orígen de las coordenadas á los puntos en que la curva corta á los diámetros á que está referida. Si se representan estas distancias por a' y b', estando la primera contada sobre el eje de las x', y la segunda sobre el eje de las z', se encuentra

$$a'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2\alpha+b^2\cos.^2\alpha}\,(\text{X}'),\ \text{que da}\quad a^2\text{sen.}^2\alpha+b^2\cos.^2\alpha=\frac{a^2b^2}{a'^2}\,,$$

$$b'^2=\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+b^2\cos.^2\mathcal{C}}\,(\text{X}''),\quad\text{que da}\quad a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+b^2\cos.^2\mathcal{C}=\frac{a^2b^2}{b'^2},$$

y la ecuacion de la curva se convierte en $a'^2z'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2$, donde $2a'$, $2b'$ espresan las longitudes de los dos diámetros conjugados.

Siendo esta ecuacion de la misma forma que la sacada con relacion á los ejes,

tenemos un medio muy sencillo de describir la elipse cuando se conocen dos diámetros conjugados $2a'$, $2b'$ y el ángulo que forman. Para lo cual, sobre el primero se describirá una elipse cuyos ejes sean $2a'$, y $2b'$; despues se inclinarán las ordenadas de modo que formen el ángulo dado sin mudar su longitud, y los puntos hallados por este procedimiento pertenecerán á la curva buscada.

307 Se llama tambien parámetro de un diámetro á una tercera proporcional á este diámetro y á su conjugado; segun esto $\frac{2b'^2}{a'}$ es el parámetro del diámetro $2a'$, que llamándole p', será $p'=\frac{2b'^2}{a'}$, de donde $\frac{p'}{2a'}=\frac{b'^2}{a'^2}$; y $\frac{2a'^2}{b'}$ es el de su conjugado $2b'$; y despejando z'^2 en la ecuacion anterior, será

$$z'^2=\frac{a'^2b'^2-b'^2x'^2}{a'^2}=\frac{b'^2}{a'^2}(a'^2-x'^2);$$

ó sustituyendo en vez de $\frac{b'^2}{a'^2}$ su valor $\frac{p'}{2a'}$, se tendrá con relacion al parámetro $z'^2=\frac{p'}{2a'}(a'^2-x'^2)$, ecuacion de la misma forma que cuando la curva estaba referida á sus ejes.

308 Si se multiplican entre sí los valores de a'^2 y b'^2, resulta

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{a^4\text{sen.}^2\mathcal{C}\text{sen.}^2\alpha+a^2b^2\text{cos.}^2\alpha\text{sen.}^2\mathcal{C}+a^2b^2\text{sen.}^2\alpha\text{cos.}^2\mathcal{C}+b^4\text{cos.}^2\alpha\text{cos.}^2\mathcal{C}}.$$

Si al denominudor añadimos y quitamos $2a^2b^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C}$, se convertirá en

$$\begin{aligned}
&a^4\text{sen.}^2\mathcal{C}\text{sen.}^2\alpha+2a^2b^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C}+b^4\text{cos.}^2\alpha\text{cos.}^2\mathcal{C}+a^2b^2\text{sen.}^2\mathcal{C}\text{cos.}^2\alpha\ldots\ldots\\
&-2a^2b^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C}+a^2b^2\text{cos.}^2\mathcal{C}\text{sen.}^2\alpha=(a^2\text{sen.}\mathcal{C}\text{sen.}\alpha+b^2\text{cos.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha)^2\ldots\ldots\\
&+a^2b^2(\text{sen.}^2\mathcal{C}\text{cos.}^2\alpha-2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C}+\text{cos.}^2\mathcal{C}\text{sen.}^2\alpha)\ldots\ldots\\
&=(a^2\text{sen.}\mathcal{C}\text{sen.}\alpha+b^2\text{cos.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha)^2+a^2b^2(\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha-\text{cos.}\mathcal{C}\text{sen.}\alpha)^2\ldots\ldots\\
&=(a^2\text{sen.}\mathcal{C}\text{sen.}\alpha+b^2\text{cos.}\mathcal{C}\text{cos.}\alpha)^2+a^2b^2\text{sen.}^2(\mathcal{C}-\alpha).
\end{aligned}$$

La primera parte de este denominador se desvanece en virtud de la relacion (X) que existe entre $\mathcal{C}$ y α; por lo que la ecuacion anterior se reducirá á

$a'^2b'^2=\frac{a^2b^2}{\text{sen.}^2(\mathcal{C}-\alpha)}$, que da $ab=a'b'\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)$ (X'''').

El ángulo $\mathcal{C}-\alpha$ es el que forman los dos diámetros conjugados entre sí; por consiguiente, si desde A (fig.106) se baja la perpendicular Ap á la tangente en B', se tendrá (I. 649, 466 cor. 2.º y 637)

$$Ap=AB'\times\text{sen.}AB'p=AB'\text{sen.}B'AC'=a'\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha);$$

luego superficie del paralelogramo

$$AB'R'C'=C'A\times Ap=b'a'\times\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)=(\text{ec. X''''})ab;$$

luego esta superficie es igual al rectángulo formado sobre los semiejes; de donde

resulta este teorema, que en la elipse el *paralelogramo construido sobre dos diámetros conjugados cualesquiera es equivalente al rectángulo construido sobre los ejes.*

Si por medio de las ecuaciones (X), (X′) y (X″) eliminamos los ángulos α y $\mathcal{C}$, obtendrémos otra propiedad importante de la elipse.

Para esto, sustituirémos en la ecuacion (X′) $1-\text{sen.}^2\alpha$, en vez de $\cos.^2\alpha$; y despejando luego $\text{sen.}^2\alpha$, se tiene $\text{sen.}^2\alpha=\frac{b^2(a^2-a'^2)}{a'^2(a^2-b^2)}$; de donde

$$\cos.^2\alpha=1-\text{sen.}^2\alpha=\frac{a^2(a'^2-b^2)}{a'^2(a^2-b^2)}.$$

Del mismo modo la (ec. X″) nos da $\text{sen.}^2\mathcal{C}=\frac{b^2(a^2-b'^2)}{b'^2(a^2-b^2)}$,

$$\cos.^2\mathcal{C}=\frac{a^2(b'^2-b^2)}{b'^2(a^2-b^2)}.$$

Suprimiendo el factor comun 2 en la (ec. X), pasando el segundo término al segundo miembro, y cuadrando, se tiene $a^4\text{sen.}^2\alpha\,\text{sen.}^2\mathcal{C}=b^4\cos.^2\alpha\cos.^2\mathcal{C}$.

Sustituyendo en vez de los senos y cosenos, que entran en esta ecuacion, los valores que acabamos de obtener, y haciendo las simplificaciones convenientes, se halla $(a^2-a'^2)(a^2-b'^2)=(a'^2-b^2).(b'^2-b^2)$, que haciendo las multiplicaciones y suprimiendo en ambos miembros la cantidad $a'^2b'^2$, resulta

$$a^4-a'^2a^2-a^2b'^2=b4-a'^2b^2-b^2b'^2;$$

que, trasladando, se tiene $a^4-b^4=a'^2a^2+a^2b'^2-a'^2b^2-b^2b'^2=(a'^2+b'^2)(a^2-b^2)$; y como el primer miembro es igual (I. 179) con $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$, podrémos suprimir a^2-b^2; y quedará $a^2+b^2=a'^2+b'^2$; lo que nos dice, que *en la elipse la suma de los cuadrados de los semiejes es igual á la de los semidiámetros conjugados;* y lo mismo se verificará con *los cuadrados de los ejes respecto de los cuadrados de los diámetros enteros.*

§ Si se pidiese que los diámetros conjugados fuesen iguales entre sí, igualando los valores de a'^2 y b'^2, pues que tienen un mismo numerador, resultará

$$a^2\text{sen.}^2\alpha+b^2\cos.^2\alpha=a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+b^2\cos.^2\mathcal{C},$$

ecuacion que no se puede verificar, á ménos que no se tenga

$$\left.\begin{matrix}\text{sen.}^2\alpha=\text{sen.}^2\mathcal{C}\\ \cos.^2\alpha=\cos.^2\mathcal{C}\end{matrix}\right\} \text{ que dan } \left\{\begin{matrix}\text{sen.}\,\alpha=\pm\text{sen.}\,\mathcal{C}\\ \cos.\alpha=\pm\cos.\mathcal{C}\end{matrix}\right\}.$$

Estos valores no se pueden tomar con el mismo signo, porque la ecuacion $a^2\text{tang.}\alpha\,\text{tang.}\mathcal{C}+b^2=0$ del (§ 306) exige para que $\text{tang.}\alpha$ y $\text{tang.}\mathcal{C}$ sean reales, que estas sean de diferente signo; luego es necesario que se tenga

$$\left\{\begin{matrix}\text{sen.}\alpha=\text{sen.}\mathcal{C}\ \text{y}\ \cos.\alpha=-\cos.\mathcal{C},\\ \text{ó}\ \text{sen.}\alpha=-\text{sen}\,\mathcal{C}\ \text{y}\ \cos.\alpha=\cos.\mathcal{C},\end{matrix}\right\};$$

y por lo mismo será $\frac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha}=-\frac{\text{sen.}\mathcal{C}}{\cos.\mathcal{C}}$ ó $\text{tang.}\alpha=-\text{tang.}\mathcal{C}$; de donde resulta que la ecuacion anterior se convertirá en $-a^2\text{tang.}^2\alpha+b^2=0$, que da

$$\text{tang.}\alpha=\pm\frac{b}{a}.$$

§ Luego si tiramos las cuerdas CB, Cb (fig. 106), y por el centro las AC′, AB′ paralelas á ellas, estas serán los diámetros conjugados iguales; porque el triángulo rectángulo bCA dará tang.CbA=tang B′AB=$\frac{b}{a}$=tang.α.

El CAB tambien dará tang.CBA=$\frac{b}{a}$=tang.α; y como

tang.C′AB=—tang.C′Ab=—tang.B′AB, será tang.C′AB=—tang.α=tang.$\mathcal{C}$.

§ Siendo la ecuacion de la línea recta de la misma forma entre coordenadas oblicuas que entre coordenadas rectangulares, la combinacion de la línea recta y de la elipse referida á diámetros conjugados dependerá de las mismas formas que en el caso en que esta curva está referida á sus ejes, y se obtendrán por consiguiente en estos dos sistemas resultados análogos. }

309 Pasemos á la parábola. Esta curva referida á su eje, estando el orígen en el vértice, tiene por ecuacion (§ 263) $z^2=px$; y como los diámetros no pasan por el mismo orígen, deberán tener aquí los valores de x, z, las cantidades a y b (§ 199); por lo cual será

$$x=a+x'\cos\alpha+z'\cos.\mathcal{C}, \qquad z=b+x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen}\,\mathcal{C},$$

y sustituyendo estos valores en la ecuacion de arriba, se tendrá

$$b^2+2bx'\text{sen.}\alpha+x'^2\text{sen.}^2\alpha+2bz'\text{sen.}\mathcal{C}+2x'z'\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C}.....$$
$$=pa+px'\cos.\alpha+pz'\cos.\mathcal{C},$$

que podrémos poner de este modo:

$$z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+x'(2b\text{sen.}\alpha-p\cos.\alpha)+x'^2\text{sen.}^2\alpha+z'(2b\text{sen.}\mathcal{C}-p\cos.\mathcal{C}).....,$$
$$+2x'z'\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+b^2-pa=0;$$

y para que conserve la forma que tenía ántes, será necesario que

$b^2-pa=0$ (1), sen.αsen.$\mathcal{C}$=0 (2), $2b$sen.$\mathcal{C}$—$p$cos.$\mathcal{C}$=0 (3), sen.$^2\alpha$=0 (4);

con lo cual la ecuacion se reduce á $z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C}+x'(2b\times0-p\times\cos.\alpha)=0$, y como siendo sen.$\alpha$=0, resulta cos.$\alpha$=1, tendrémos $z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-px'=0$, que da

$$z'^2=\frac{px'}{\text{sen.}^2\mathcal{C}}=\frac{p}{\text{sen.}^2\mathcal{C}}\times x'.$$

Las (ecs. 2 y 4) nos enseñan que el eje de las x' es paralelo al eje de las x. Luego todos los diámetros de la parábola son paralelos á su eje, como ya hemos visto (277).

La primera y tercera dan $b^2=ap$, y $\frac{\text{sen.}\mathcal{C}}{\cos.\mathcal{C}}=\frac{p}{2b}$, ó tang $\mathcal{C}=\frac{p}{2b}$.

La primera de estas manifiesta que las coordenadas a y b del nuevo orígen A′ satisfacen á la ecuacion de la parábola; por lo que dicho nuevo orígen (fig. 107), se halla en un punto de la curva, tal como en A′.

La segunda determina el ángulo que forma el nuevo eje de las z' con el de las x; esto es, representa el ángulo $Z'T'P'$; y siendo la misma que la $a=\frac{p}{2z''}$ del (§ 270), se infiere que este nuevo eje de las z' es tangente á la parábola en A′.

Para mayor sencillez, suprimirémos los acentos de las variables x' y z', teniendo presente que representan coordenadas oblicuas; ademas harémos

$p'=\frac{p}{\text{sen.}^2\mathcal{C}}$, y p' será el parámetro del diámetro á que la curva está referida, y se tendrá $z^2=p'x$.

310 Las propiedades independientes de la inclinacion de las coordenadas serán por consiguiente comunes al eje de la parábola y á sus diámetros. Tambien se ve, que para describir una parábola en que es conocido el parámetro, con relacion á un diámetro, respecto del cual tambien se conoce la inclinacion de las coordenadas, es necesario describir otra parábola sobre este diámetro por eje con el parámetro dado, é inclinar despues convenientemente las ordenadas de esta curva sin mudar su longitud; pero se puede aun hacer con mas elegancia y prontitud.

Sea α (fig. 108) el ángulo que han de formar las coordenadas, y p' el parámetro dado: se formará con dos líneas indefinidas AD,AB el ángulo DAB$=\alpha$; se tomará en una de ellas una parte AC igual con el parámetro p', y por C se tirará la CE paralela con AD; en AB se tomará de un modo cualquiera una parte Am, se colocará sobre CE desde C á F, se unirá A con F, y por m se tirará la mn paralela con AD; Y el punto n de interseccion será un punto de la parábola. Del mismo modo se tendrán los puntos que se deséen; porque los triángulos ACF, Amn son semejantes y dan AC:CF::Am:mn;
pero tirando por n la nq paralela con AB, será

$$z=nq=Am=CF \text{ y } nm=Aq=x,$$

y como AC$=p'$, se tendrá $p':z::z:x$, de donde $z^2=p'x$.

Para trazar la otra rama, se tomarán las partes iguales á la izquierda de A en la AB, y por debajo de C en la EC.

311 Pasemos á la hipérbola. Las propiedades de la hipérbola con relacion á sus diámetros se pueden deducir con una estrema facilidad de las que pertenecen á la elipse.

En efecto, la ecuácion de la hipérbola referida á sus ejes y al centro es (283)

$$a^2z^2-b^2x^2=-a^2b^2;$$

y las abscisas están contadas entónces en el eje que encuentra á la curva.

Como los diámetros pasan por el centro de la hipérbola, que es el orígen, se tendrá (§ 198) $x=x'\cos\alpha+z'\cos.\mathcal{C}$, $z=x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen.}\mathcal{C}$, cuyos valores sustituidos en la propuesta, nos suministrarán la relacion necesaria para que el término $x'z'$ desaparezca; pero sin efectuar el cálculo, se puede llegar inmediatamente á este resultado; porque estas ecuaciones se deducirán de las relativas á la elipse (306), mudando b en $b\sqrt{-1}$ ó b^2 en $-b^2$ en estas últimas. Luego (306) la ecuacion de la hipérbola tomará esta forma $a'^2z'^2-b'^2x'^2=-a'^2b'^2$.

Ademas se tendrá para la hipérbola

$$\left\{\begin{array}{l}(a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\cos.^2\mathcal{C})z'^2+(a^2\text{sen.}^2\alpha-b^2\cos.^2\alpha)x'^2=-a^2b^2 \text{ (X'Y')}\\ a^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}-b^2\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}=0 \text{ (Y) ó } a^2\text{tang.}\alpha\text{taug.}\mathcal{C}-b^2=0.\end{array}\right\}$$

Haciendo sucesivamente $x'=0$ y $z'=0$, se tendrán las distancias del orígen á los puntos en que la curva corta á los diámetros á que está referida. Si se representan por a'^2 y b'^2 los cuadrados de estas distancias, resultará

$$b'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\text{cos.}^2\mathcal{C}},\quad a'^2=\frac{-a^2b^2}{a^2\text{sen}^2\alpha-b^2\text{cos.}^2\alpha}.$$

Multiplicando estas dos cantidades la una por la otra, como lo hicimos (308), el resultado se podrá poner bajo esta forma

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{(a^2\text{sen.}\,\alpha\,\text{sen.}\mathcal{C}-b^2\text{cos.}\,\alpha\,\text{cos.}\mathcal{C})^2-a^2b^2\text{sen.}^2(\mathcal{C}-\alpha)}.$$

La primera parte del denominador se desvanece en virtud de la relacion (Y) que existe entre $\mathcal{C}$ y α, y queda simplemente reducida á

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{-a^2b^2\text{sen.}^2(\mathcal{C}-\alpha)}=-\frac{a^2b^2}{\text{sen}^2(\mathcal{C}-\alpha)};$$

de donde se sigue, que una de las cantidades a', b' es imaginaria, porque de otro modo el producto de sus cuadrados no podrá ser negativo, y por consiguiente la hipérbola no encuentra nunca á sus dos diámetros conjugados, propiedad que habíamos reconocido ántes (295).

312 Podemos suponer real á arbitrio una ú otra de las cantidades a' y b', y esta eleccion determinará el eje de las coordenadas que encuentra á la curva. Supongamos que sea el de las x'; entónces a' será real, y para evitar las imaginarias, representarémos por $-b'^2$ la cantidad que hemos llamado b'^2, lo que dará $a'^2=-\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen,}^2\alpha-b^2\text{cos.}^2\alpha}$, que da $a^2\text{sen.}^2\alpha-b^2\text{cos.}^2\alpha=-\frac{a^2b^2}{a'^2}$,

$$b'^2=-\frac{a^2b^2}{a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\text{cos.}^2\mathcal{C}},\quad \text{que da}\quad a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\text{cos.}^2\mathcal{C}=\frac{a^2b^2}{b'^2},$$

entónces la ecuacion de la hipérbola (X'') se convertirá en

$$a'^2z'^2-b'^2x'^2=-a'^2b'^2,$$

como ya hemos hallado (311) mudando b' en $b'\sqrt{-1}$. Las cantidades $2a'$, $2b'$, se llaman por analogía diámetros conjugados de la hipérbola, aunque el primero sea el solo que esté terminado por la curva; $\frac{2b'^2}{a'}$ es el parámetro del primer diámetro, y $\frac{2a'^2}{b'}$ el de su conjugado.

313 Para mayor sencillez suprimirémos los acentos de las variables x' y z', teniendo presente siempre que pertenecen á coordenadas oblicuas, y resultará

$$a'^2z^2-b'^2x^2=-a'^2b'^2;$$

despejando z^2, y llamando p' al parámetro del primer diámetro $\frac{2b'^2}{a'}$, lo que da $\frac{p'}{2a'}=\frac{b'^2}{a'^2}$, resultará $z^2=\frac{p'}{2a'}(x^2-a'^2)$.

Agregando á la ecuacion precedente las siguientes

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2,\quad a'b'\text{sen.}(\mathcal{C}-\alpha)=ab,\quad a^2\text{tang.}\alpha\,\text{tang.}\mathcal{C}-b^2=0,$$

que se deducen de las que pertenecen á la elipse, mudando en ellas b y b' en $b\sqrt{-1}$ y $b'\sqrt{-1}$, tendrémos lo necesario para resolver todas las cuestiones relativas á la investigacion de los diámetros conjugados de la hipérbola.

§ La primera significa que *la diferencia de los cuadrados construidos sobre los semidiámetros conjugados es siempre igual á la diferencia de los cuadrados construidos sobre los semiejes.* De donde se deduce que esta propiedad convendrá tambien á los ejes y diámetros enteros.

§ De esta propiedad resulta, que todas las hipérbolas no tienen diámetros conjugados iguales, porque la suposicion de $a'=b'$ da $a=b$, y recíprocamente; y así, solo *la hipérbola equilátera es la que tiene diámetros conjugados iguales y todos los suyos lo son de dos en dos.*

La segunda de las ecuaciones precedentes significa, análogamente á lo espuesto respecto de la elipse, que *el paralelogramo construido sobre los diámetros conjugados es siempre equivalente al rectángulo de los ejes.*

{ 313 Si queremos averiguar algunas propiedades de la hipérbola con relacion á las asíntotas, tomarémos la ecuacion $a^2z^2-b^2x^2=-a^2b^2$; y como las asíntotas parten desde el centro, pondrémos en vez de x y z los valores (§ 198), $x=x'\cos.\alpha+z'\cos.\mathcal{C}$, $z=x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen.}\mathcal{C}$, y será

$$a^2(x'^2\text{sen.}^2\alpha+2x'z'\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+z'^2\text{sen.}^2\mathcal{C})\ldots$$
$$-b^2(x'^2\cos.^2\alpha+2x'z'\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}+z'^2\cos.^2\mathcal{C})=-a^2b^2,$$
$$\text{ó}\quad(a^2\text{sen.}^2\alpha-b^2\cos.^2\alpha)x'^2+(a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\cos.^2\mathcal{C})z'^2\ldots.$$
$$+(2a^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}-2b^2\cos.\alpha\cos.\mathcal{C})x'z'=-a^2b^2.$$

{ Determinando ahora α y $\mathcal{C}$, de modo que los cuadrados x'^2, z'^2, desaparezcan, tendrémos para esto las condiciones $\left\{\begin{matrix}a^2\text{sen}^2\alpha-b^2\cos.^2\alpha=0\\ a^2\text{sen.}^2\mathcal{C}-b^2\cos.^2\mathcal{C}=0\end{matrix}\right\}$ y la ecuacion de la curva se convetirá en

$$2(a^2\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}-b^2\cos.\alpha\cos.\mathcal{C})x'z'=-a^2b^2.$$

{ Puesta bajo esta forma, se halla referida á sus asíntotas; porque cada valor positivo ó negativo de x' da un valor real para z', y recíprocamente; lo que debe ser, pues que la curva es indefinida. Estos valores de z' disminuyen al paso que x' aumenta, y no vienen á ser nulos sinó cuando se supone x' infinita. Los valores de x' siguen la misma marcha con relacion á z'. Luego la hipérbola no encuentra á los ejes de las coordenadas, aunque se va aproximando á ellos continuamente, sinó á una distancia infinita del orígen que es su centro; por consiguiente estos ejes son sus asíntotas.

{ Las condiciones que determinan α y $\mathcal{C}$ dan

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\text{sen.}^2\alpha}{\cos.^2\alpha}=\dfrac{b^2}{a^2}, & \text{ó} & \dfrac{\text{sen.}\alpha}{\cos.\alpha}=\pm\dfrac{b}{a}, & \text{ó} & \text{tang.}\alpha=\pm\dfrac{b}{a},\\ \dfrac{\text{sen.}^2\mathcal{C}}{\cos.^2\mathcal{C}}=\dfrac{b^2}{a^2}, & \text{ó} & \dfrac{\text{sen.}\mathcal{C}}{\cos.\mathcal{C}}=\pm\dfrac{b}{a}, & \text{ó} & \text{tang.}\mathcal{C}=\pm\dfrac{b}{a}.\end{matrix}\right\}$$

{ No se pueden suponer á tang.$\mathcal{C}$ y á tang.α iguales y del mismo signo, porque entónces los nuevos ejes de las coordenadas coincidirían el uno con el otro, lo que es absurdo; luego estas cantidades se deben tomar con signos diferentes, lo que les da el mismo valor que en el artículo (308).

{ Si $b=a$, la hipérbola es equilatera, y será

$$\text{tang.}\alpha=-1\,,\quad \text{tang.}\mathcal{C}=+1 \quad \text{y} \quad \text{tang.}\alpha.\text{tang.}\mathcal{C}+1=0\,;$$

es decir, que sus dos asíntotas son perpendiculares entre sí. Supondrémos á tang.$\mathcal{C}$ positiva, lo que da

$$\cos.\mathcal{C}=\frac{1}{\sec.\mathcal{C}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tang.}^2\mathcal{C}}}=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \text{y}\quad \text{sen.}\mathcal{C}=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

y será necesario emplear el mismo signo en estas dos espresiones; pero su eleccion es arbitraria, y no influye sinó en el sentido en que las coordenadas x', z' se cuentan sobre los ejes. Se tendrá igualmente

$$\cos.\alpha=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,\quad \text{sen.}\alpha=\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,;$$

que será necesario emplear con signos contrarios, tomando para el último por ejemplo $\text{sen.}\alpha=\mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

❴ Supongamos que se tome en estas fórmulas el signo superior y se sustituyan los valores en el coeficiente de $x'z'$, y entónces la ecuacion de la curva se convertirá en $x'z'=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$ (X$^{\text{v}}$),
y las dos variables x', z' son del mismo signo para todos los puntos; pero, tomando los signos inferiores para $\mathcal{C}$ y los mismos de ántes para α, se encontraría $x'z'=-\frac{1}{4}(a^2+b^2)$,
y para todos los puntos de la hipérbola las variables x', z' serían siempre de signos diferentes. Se siguen con facilidad estas diversas mudanzas, observando que α, $\mathcal{C}$ representan los ángulos que los ejes de las x' y de las z' forman con el eje de las x.

❴ 314 Volvamos á tomar nuestra 1.ª suposicion, que da $x'z'=\frac{1}{4}(a^2+b^2)$, siendo los ejes AX′, AZ′ (fig. 109) las asíntotas, AB$=a$ y AE$=b$. Si por el punto H, medio de AB, se levanta la perpendicular DHD′, la figura ADBD′ será un rombo, porque los triángulos AHD, DHB son iguales, y lo mismo sucederá con los AHD′, BHD′, y el lado AD será$=\sqrt{\frac{1}{4}(a^2+b^2)}$,
porque AH$=\frac{1}{2}$AB$=\frac{1}{2}a$ y DH$=\frac{1}{2}$AE$=\frac{1}{2}b$.

❴ Sea n el ángulo X′AZ′ formado por las asíntotas, y tendrémos que la ecuacion precedente multiplicada por sen.n dará

$$x'z'\text{sen.}n=\tfrac{1}{4}(a^2+b^2)\text{sen.}n.$$

❴ El primer miembro representa análogamente á lo dicho (308) la superficie del paralelogramo APMQ construido sobre las dos coordenadas AP, PM de un punto cualquiera de la curva. El segundo miembro representa la superficie del paralelogramo ADBD′ formado sobre las coordenadas AD′, D′B del punto B que es su vértice, porque es igual con

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2+b^2)}\times\sqrt{\tfrac{1}{4}(a^2+b^2)}\text{sen.}n=\text{AD}'\times\text{D}'\text{B}\times\text{sen.}n,$$

y la ecuacion precedente hace ver que estas cantidades son constantemente iguales entre sí. El rombo grande BEB′E′, cuádruplo de ADBD′ se llama la *potencia de la hipérbola*.

❴ Cuando la hipérbola es equilátera, el ángulo de las asintotas es recto, por lo cual sen.$n=1$; y el rombo ADBD′ llega á ser un cuadrado, que es siempre

igual al rectángulo de las coordenadas contadas sobre las asíntotas.

{ Para mayor sencillez, suprimirémos los acentos de las variables x, z, teniendo presente que están contadas sobre las asíntotas, y que en general son oblicuas. Ademas harémos $\frac{1}{4}(a^2+b^2)=c^2$ y saldrá $xz=c^2$ (Z).

{ 315 La ecuacion de la familia de todas las hipérbolas con relacion á las asíntotas será de esta forma $x^n z^m=c^{n+m}$,
y haciendo $c=1$ se convierte en $x^n z^m=1$.

{ Si hacemos 1 el parámetro ó cantidad constante de la ecuacion de la familia de todas las parábolas (§ 265), será $z^m=x^n$,
á cuya ecuacion hubiéramos llegado suponiendo negativo el esponente de x en la de las hipérbolas, porque entónces sería

$$x^{-n} z^m=1, \quad ó \quad \frac{z^m}{x^n}=1 \quad ó \quad z^m=x^n.$$

Por consiguiente, teniendo alguna propiedad de una de estas familias, se tendrá la misma propiedad con relacion á la otra, solo con mudar el signo al esponente de la x.

{ 316 Sean x'', z'', las coordenadas de un punto cualquiera de la hipérbola; sustituyendo estos valores en la ecuacion (Z) se tendrá

$$x''z''=c^2 \text{ (AA)}.$$

{ Si por este punto se le tira una tangente, cuyas coordenadas sean X, Z, tendrá por ecuacion $Z-z''=a(X-x'')$.
Se trata de determinar a.

{ Para esto, considerarémos desde luego á esta recta como una secante, y para determinar los puntos en que encuentre á la hipérbola, deberémos suponer que en dichos puntos la tangente y la curva tienen unas mismas coordenadas, lo que dará, $X=x$, $Z=z$, y resultará, que la tangente tendrá por ecuacion en dichos puntos $z-z''=a(x-x'')$ (BB).
Ahora, restando la ecuacion (AA) de la (Z), será $xz-x''z''=0$, que añadiendo y quitando $z''x$, se puede poner bajo la forma siguiente

$$x(z-z'')+z''(x-x'')=0,$$

ó poniendo en vez de $z-z''$ su valor sacado de la ecuacion (BB), será

$$x\times a(x-x'')+z''(x-x'')=(x-x'')(ax+z'')=0.$$

{ Esta relacion queda satisfecha cuando $x=x''$, lo que da $z=z''$, porque x'', z'', son las coordenadas del primer punto de interseccion.
El otro factor igualado con cero da $ax+z''=0$.

{ Si la recta es tangente, esta relacion deberá aun quedar satisfecha cuando $x=x''$ y $z=z''$, lo que dá $ax''+z''=0$, ó $a=-\frac{z''}{x''}$,
por lo que la ecuacion de la tangente será

$$Z-z''=-\frac{z''}{x''}(X-x'').$$

{ Si hacemos $Z=0$, resultará $X=2x''$ para la distancia del orígen á que encuentra la tangente á la asíntota. De donde se sigue que para tirar una tangente á la hipérbola por un punto M (fig. 110) dado sobre esta curva, es necesario

tomar, partiendo del pie de la ordenada PM sobre la primera asíntota, PT=AP=x'', y MT será la tangente.

{ Por esta misma coustruccion, se vé que si se prolonga la recta MT hasta su concurso con la otra asíntota en t, se tendrá MT=Mt; porque el triángulo ATt da AP:PT::tM:MT, que siendo AP=PT, dará tM=MT.

{ *Luego la porcion de la tangente comprendida entre las asíntotas se encuentra dividida en dos partes iguales en el punto de contacto.*

{ 317 Si se tira al punto M el diámetro AM, y se llama n al ángulo ZAX formado por las dos asíntotas, los triángulos AMP, TMP darán

$$AM^2=z^2+x^2\mp 2xz\cos.n, \quad MT^2=z^2+x^2\mp 2xz\cos.n,$$

de donde, restando estas ecuaciones, se saca

$$AM^2-MT^2=4xz\cos.n \quad (CC).$$

{ El ángulo formado por las asintotas y el eje de la curva tiene por tangente trigonométrica (§ 313) $\frac{b}{a}$; luego llamándole θ se tendrá

$$\text{sen.}\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos.\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

pero $n=2\theta$, luego (I. 644 (bb) y 16) $\cos.n=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

{ La ecuacion (X^v), suprimiendo los acentos, da $4xz=a^2+b^2$, cuyos valores sustituidos en la ecuacion (CC) la convierten en $AM^2-MT^2=a^2-b^2$.

§ Esta es una de las relaciones que deben subsistir entre los diámetros conjugados de la hipérbola y sus ejes (312); y como mAM es un diámetro, resulta que TMt es su conjugado. Así, cuando se conoce un primer diámetro AM en la hipérbola, su conjugado es la porcion de la tangente tirada á su estremo, y terminada en las asíntotas. Las tangentes, cuyos puntos de contacto estan situados sobre diámetros conjugados, se suelen llamar *tangentes conjugadas.*

§ 318 Se acaba de ver que si desde un punto cualquiera M$''$ (fig. 111) tomado sobre la hipérbola, y cuyas coordenadas son x'', z'', se tira una recta que tenga por ecuacion $Z-z''=a(X-x'')$, el otro punto M$'''$ en que encuentre á la curva, está determinado (316) por la ecuacion $ax''+z''=0$,

que da $x''=-\frac{z''}{a}$.

Este es el valor de la abscisa AP$'''$; mas si se hace $Z=0$ en la ecuacion de la recta, da $X-x''=-\frac{z''}{a}$, entónces X representa la abscisa AQ$''$ del punto en que la recta encuentra al eje AX, y $X-x''$ es el valor de P$''$Q$''$. Luego de estas espresiones resulta que P$''$Q$''$=AP$'''$. Por consiguiente, si se tira M$'''$Q$'$ paralela con AX, los triángulos P$''$M$''$Q$''$, Q$'$M$'''$Q$'''$ serán iguales (I. 361), y las líneas M$''$Q$''$, M$'''$Q$'''$ serán iguales entre sí.

§ Es decir, que si desde un punto cualquiera de la hipérbola se tira una recta cualquiera terminada en las asíntotas, las porciones de esta recta comprendidas

entre las asíntotas y la curva serán iguales entre sí. Lo que aun se verifica cuando la recta es tangente, como se ha visto ántes (316).

§ 319 Esto suministra un medio muy simple de describir una hipérbola cuando se conoce un solo punto M'' con la posicion de las asíntotas; porque tirando desde este punto una recta cualquiera Q''M''Q''' terminada en estas líneas; se llevará Q''M'' desde Q''' á M''', y M''' será un nuevo punto de la curva. Repitiendo esta construccion se encontrarán otros tantos puntos como se quieran.

§ En la práctica es mas cómodo no tirar todas las rectas desde un solo punto M'', y hacer servir para esto algunos de los que se determinan. De este modo se evita la confusion que resultaría de un gran número de rectas qne pasen por un mismo punto.

§ Esta construccion se puede emplear tambien cuando se conocen los dos ejes de la hipérbola y su centro, porque entónces es fácil determinar sus asíntotas.

§ No insistirémos mas sobre las propiedades particulares de las secciones cónicas. Nuestro objeto ha sido no solo el dar á conocer estas mismas propiedades, sinó tambien el manifestar el modo con que la Análisis sirve para descubrirlas. Los procedimientos que hemos empleado tanto para discutir estas curvas, como para tirarles tangentes, son generalmente aplicables á todas las demas curvas, y bastan para resolver todos los problemas de la Geometría de dos dimensiones. §

De las secciones del cono oblicuo.

320 El cono recto no es la sola superficie que, estando cortada por planos, dé secciones cónicas; pero al ménos es la mas simple de las que gozan de esta misma propiedad: por esto la hemos preferido al cono oblicuo, que hubiera podido servir tambien para la generacion de estas curvas.

En efécto, sea ASB (fig. 112) un cono cualquiera de base círcular, es decir, el cuerpo terminado por la superficie que engendra una recta sujeta á pasar por el punto S, en todas las posiciones que tome cuando gira al rededor de la circunferencia de círculo ACBD. De esto resulta: 1.° que si este cuerpo se corta por un plano cualquiera que pase por el vértice del cono, pero que forme con el eje un ángulo mayor en todas direcciones que el que forma la recta con el eje SO del cono, como este plano jamas encontrará á la superficie cónica, no tendrá comun con ella sinó el vértice; y por lo mismo una de las secciones del cono es el *punto*.

2.° Si el cono se corta con un plano cualquiera CSD, que pase por su vértice S, y que forme con el eje un ángulo menor que el que forma la linea dada, el plano pasará por dentro de la superficie cónica, y la interseccion con dicha superficie serán dos líneas rectas; porque tirando desde dicho punto á otro punto cualquiera de cada uno de los lados de la interseccion una recta, esta se hallará en la superficie cónica, y corresponderá á una posicion de la recta generatriz; y como se han de hallar tambien en el plano secante por tener dos puntos comunes con él, se sigue que son las comunes intersecciones de dicho plano con la superficie cónica; cuando este plano pasa por el eje, se llama la seccion *triángulo por el eje*.

3.° Si el plano secante es A'C'B'D' paralelo al plano de la base ACBD, la seccion será un círculo; porque si por el eje del cono se conciben dos planos cualesquiera ASB y CSD, sus intersecciones respectivas con ACBD, A'C'B'D'

son AB y A′B′ paralelas entre sí, y CD, C′D′ tambien paralelas, y se tendrán los triángulos semejantes COS, C′O′S, que darán CO:C′O′::SO:SO′, y los AOS, A′O′S, que tambien son semejantes, dan AO:A′O′::SO:SO′; y como estas dos proporciones tienen una razon comun, podrémos formar proporcion con las otras dos, y se tendrá AO:A′O′::CO:C′O′, y pues que por el supuesto AO=CO, se tendrá A′O′=C′O′; y como probaríamos lo mismo respecto de O′D′, O′B′, etc. resulta que todos los radios de la seccion A′C′B′D′ son iguales, y por consiguiente que es *círculo*.

En el cono oblicuo, se puede tener otra seccion, que no sea paralela á la base, y que sea círculo: esta seccion se llama *subcontraria*, ó segun algunos *antiparalela*. Para esto, se necesita que el plano secante KHG (fig. 113) corte en el triángulo BAC por el eje, otro triángulo GAK semejante con él, esto es, que el ángulo AGK=ACB ó AKG=ABC, y que por consiguiente no sea dicho plano paralelo á la base.

En efecto, tómese un punto cualquiera H de la seccion de dicho plano con la superficie cónica; bájese desde él una perpendicular al plano ABC, la cual caerá sobre la GK en un punto tal como F. Concibase un plano DHE que pase por HF, y sea paralelo con la base del cono; por lo que DE será paralela con BC; y la seccion DHE que cause dicho plano en la superficie cónica será un círculo. Con lo cual tendrémos FD×FE=FH²; y por cuanto el ángulo ADE=ABC=AKG, y el ángulo KFE=GFD, los triángulos KFE, DFG serán semejantes y darán EF:FK::GF:FD, luego FK×GF=EF×FD=HF²; por lo que (225) la seccion GHK será un *círculo*.

321 Cuando se considera un cono, se entiende indefinidamente prolongado tanto por arriba como por abajo; y así, si á un cono cualquiera se le corta con un plano que encuentre á los dos lados de una de las caras del cono, y que la seccion no sea paralela á la base, ni subcontraria, dicha seccion será una *elipse*.

Para demostrarlo, observarémos en primer lugar que este plano IMM′I′ (fig. 114) no encontrará al cono opuesto *bSa*; porque concurriendo las dos rectas II′, I′*b* en un punto I′, no pueden volver á encontrarse en otro punto: y ademas será una curva cerrada.

Sea GH la comun seccion del plano secante con el plano de la base ACBD; y figurémonos otra seccion dada por el eje, pero tal que la recta AOB que determina con el punto S la posicion de dicho plano triangular, sea perpendicular á GH; y supongamos tirados dos planos EMF*m*, E′M′F′*m*′ paralelos á la base ACBD, y que encuentren al mismo tiempo al plano secante IMM′I′*m*′*m*: las comunes secciones de los dos primeros con el tercero representadas por M*m*, M′*m*′ serán paralelas á GH, y por consiguiente perpendiculares á las rectas EF y E′F′, que son paralelas entre sí, por ser las comunes secciones de los planos EMF*m*, E′M′F′*m*′ con el plano ASB. Las curvas EMF*m*, E′M′F′*m*′ siendo circunferencias de círculo (320) darán PM²=EP×FP y P′M′²=E′P′×F′P′.

Pero la recta II′, comun seccion de los planos ASB y IMI′*m*′ forma con las rectas EF, E′F′ y los lados del cono, los triángulos EI′P, E′I′P′ semejantes entre sí, y los triángulos F′IP′, FIP tambien semejantes entre sí, los dos primeros darán EP:E′P′::I′P:I′P′, y los otros dos FP:F′P′::IP:IP′; multiplicando ordenadamente estas proporciones, se tendrá

EP×FP:E′P′×F′P′::I′P×IP:I′P′×IP′;

y sustituyendo en vez de $EP\times FP$ y $E'P'\times F'P'$ sus valores PM^2 y $P'M'^2$, resultará $PM^2 : P'M'^2 :: I'P\times IP : I'P'\times IP'$, proporcion que enseña que *los cuadrados de las ordenadas son como los productos de sus abscisas*; esta propiedad puede convenir tanto á la elipse como á la hipérbola; pero como estas abscisas están cada una á diferente lado de la ordenada, se sigue (240) que esta curva *es elipse* L. Q. D. D.

322 Si el plano secante tuviese con relacion á los lados del cono, la situacion que presenta la (fig. 115), es decir, que pudiese encontrar á un tiempo á los dos conos opuestos, formaría en cada cono una curva indefinida; pues que este plano encontrando á cada lado del cono en un punto, jamas podrá volverle á encontrar. Los dos conos opuestos, no formando, sinó una sola superficie, las dos curvas KIk y $K'I'k'$ se deben cousiderar como no componiendo sinó una sola, y es la que hemos carácterizado con el nombre de *hipérbola*.

En efecto, suponiendo que el triángulo por el eje tenga la misma posicion que ántes, que se haya tirado el plano $EMFm$ paralelo con ACBD, y que se tiren las rectas $I'I$, Mm, $M'm'$, que son las comunes secciones del plano secante con los tres planos ASB, $EMFm$, ACBD, se compararán entre sí los triángulos semejantes EIP, AIP' que darán $EP : AP' :: IP : IP'$,
y los $FI'P$, $BI'P'$ darán $FP : BP' :: I'P : I'P'$:
multiplicando estas dos proporciones ordenadamente, resultará

$$EP\times FP : AP'\times BP' :: IP\times I'P : IP'\times I'P';$$

pero á causa de que las secciones $EMFm$ y ACBD son círculos, cuyos diámetros EF y AB son perpendiculares á las rectas Mm y $M'm'$ por construccion, se tendrá $EP\times FP = PM^2$, $AP'\times BP' = P'M'^2$,
y por consiguiente $PM^2 : P'M'^2 :: IP\times I'P : IP'\times I'P'$,
proporcion en que está espresada la propiedad característica de la hipérbola enunciada (287).

323 Cuando el plano secante es paralelo á uno de los lados del cono, entónces no puede encontrarle, la seccion será infinita y es una *parábola*.

En efecto, concibiendo los planos ASB, $EMFm$, ACBD (fig. 116) tirados con las mismas condiciones que ántes, el paralelismo de las rectas IP' y SB, da $FP = BP'$; por otra parte los triángulos EIP, AIP' que son semejantes, conducen á $EP : AP' :: IP : IP'$;
multiplicando el primer término de la primera relacion por FP y el segundo por BP', resultará $EP\times FP : AP'\times BP' :: IP : IP'$;
pero en los círculos $EMFm$ y ACBD se tiene siempre

$$PM^2 = EP\times FP,\quad P'M'^2 = AP'\times BP',$$

luego resultará $PM^2 : P'M'^2 :: IP : IP'$,
proporcion que espresa la propiedad característica de la parábola (263).

Apolonio Pergéo, que es el primero que reunió en cuerpo de doctrina la teoría de las secciones cónicas, saca el valor absoluto del cuadrado de la ordenada; y en la parábola encuentra (prop. XI del lib. I.) que es igual al paralelogramo formado por la abscisa y una recta que depende de los lados del cono; en la elipse, halla (prop. XIII lib. I) que es igual á un rectángulo semejante ménos otro que tambien determiná; y en la hipérbola (prop. XII lib. I.), que es igual á un rectángulo semejante, mas otro; por consiguiente, en estas tres secciones advertía que el cuadrado de la ordenada en el un caso era igual con un rectángulo: en otro, menor;

y en otro, mayor; por lo que les dió los nombres de *parábola*, *elipse é hipérbola* (ó *hipérbole*), que llevan en sí estas mismas idéas; pues parábola quiere decir *igualdad ó comparacion*, elipse *defecto*, é hipérbola *esceso*. Esto mismo nos dan á conocer las ecuaciones $z^2=px$ de la parábola (263),

$z^2=px-\frac{px^2}{2a}$ de la elipse (239), $z^2=px+\frac{px^2}{2u}$ de la hipérbola (287);

en que se ve, que el cuadrado de la ordenada en la parábola es igual al rectángulo formado por el parámetro y la abscisa; en la elipse, es menor en la cantidad $\frac{px^2}{2a}$; y en la hipérbola, mayor en la misma cantidad. Estas tres ecuaciones las podemos reunir en una sola, á saber, en la $z^2=px\mp\frac{px^2}{2a}$, que conviene á la elipse tomando el signo —, á la hipérbola tomando el signo +, y á la parábola haciendo $2a=\infty$, que reduce á cero el término $\frac{px^2}{2a}$.

Jacobo Bernoulli (en las actas de Leipsick año de 1689) se admiraba de que en una materia tan trillada por los antiguos y modernos, le hubiese quedado á él alguna cosa que descubrir. Esta era el determinar el parámetro en el mismo cono, lo que ejecuta en el parage citado.

324 Fundados en toda la teoría que acabamos de esponer, podemos resolver el siguiente problema: *Dado un arco de curva, determinar si es seccion cónica; y en caso de serlo, cual es.*

Sea el arco de curva ABC (fig. 117): tírense de un modo cualquiera dos rectas paralelas AB, *ab*; divídanse en dos partes iguales en *m* y *n*, y tírese por los puntos de division la *mn*: tírese tambien otra paralela *kh*, y si la *mn* divide en dos partes iguales á la *kh* será una seccion cónica; si no, no lo será; porque por la construccion la *mn* será un diámetro. Sabiendo ya que es seccion cónica, tírense tambien otras dos rectas cualesquiera *dc*, DC paralelas entre sí, divídanse en dos partes iguales en *q* y *r*, y por los puntos de division tírese una recta *qr*; si las rectas *mn*, *qr*, que serán diámetros, son paralelas, la curva será parábola; si se encuentran por la parte convexa, es hipérbola; y si por la parte cóncava, será elipse; si ademas de esta circunstancia, las partes de las dos rectas interceptadas entre la curva y el punto O de concurso son iguales, la curva es círculo; más como en la elipse hay tambien dos diámetros que son iguales, para asegurarse mejor, se tirarán otras dos rectas paralelas; se dividirán en dos partes iguales; se tirará por los puntos de division otra recta; y si esta encuentra á las otras en el mismo punto, y su parte interceptada entre dicho punto y la curva es igual con las otras, la curva será círculo.

Ahora, conociendo ya qué seccion cónica es, falta determinar todas sus líneas.

Supongamos que *se sepa ya que la curva es una parábola*, y que sea la representada por la (fig. 118); se tirarán de un modo cualquiera dos rectas paralelas *mn*, MN; se dividirán en dos partes iguales en *p* y *q*; por los puntos de division se tirará una recta *pq*, y esta será un diámetro. Por un punto cualquiera de

este, tíresele una perpendicular que encuentre á las dos ramas de la curva tal como KS; divídase esta en dos partes iguales en T; y por este punto tírese paralelamente á *pq* una recta TA, y esta será el eje. Hállese una tercera proporcional á AT y á TK, y esta será el parámetro del eje; tómese desde A hasta F la AF que sea igual con la cuarta parte del parámetro, y este punto será el fócus; tómese igual parte desde A hasta X, y tírese la XZ perpendicular al eje AT, y esta será la directriz; con lo que despues se podrán hacer sobre la curva las investigaciones que se quieran.

Si la curva solo fuese un arco, y la KT no encontrase á la otra rama, entónces hallando una tercera proporcional á la abscisa *ap* y á su ordenada *pn* ó á la *aq* y á la *q*N, se tendría el parámetro del diámetro, por medio del cual se podría construir toda la parte de curva que se necesitase.

Suponiendo que sea elipse, *determinar el centro, los ejes, los fócus etc.*

Sea la elipse representada (fig. 119): tírense de un modo cualquiera dos rectas paralelas entre sí MN, *mn*; divídanse en dos partes iguales, y por los puntos de division se tirará la *pq* que será un diámetro; si este se divide por medio en C, este punto será su centro; haciendo centro en C con un radio cualquiera trácense dos arcos en la curva como en *r*, *s*; tírese la *rs* y divídase en dos partes iguales en *h*; por C y *h* tírese una recta, y esta será uno de los ejes; tirando por C la CD perpendicular al eje, esta será el otro eje: en el estremo del eje menor con un radio igual al semieje mayor, se trazarán en este dos arcos, y estos puntos determinarán los fócus F, F′; con lo que se tendrá despues todo lo que se necesite.

Suponiendo que sea hipérbola, determinar sus puntos y lineas principales.

Sea la hipérbola representada en la (fig. 120): tírense dos rectas cualesquiera paralelas entre sí, tales como *mn*, MN; divídanse en dos partes iguales en *p*, *q*, y tírese la *pq*; tírense otras dos rectas cualesquiera tambien paralelas, tales como *rs*, RS; divídanse por medio en *t* y *x*; tírese la *tx*, y el punto C en que estas rectas *tx*, *pq*, se encuentren, será el centro; haciendo centro en C con un radio cualquiera, trácense dos arcos G y H; tírese la GH; divídase en dos partes iguales en P y tírese la CP, que será el primer eje, y A el vértice. Tómese desde C por la parte de arriba una parte C*a* igual CA, y el punto *a* será el otro vértice; hállese una media proporcional éntre AP y *a*P; despues hállese una cuarta proporcional á esta media proporcional, á la PH y á la CA, la cual será el otro semieje CB (*); que se colocará desde C á B á ángulos rectos con CP; y haciendo centro en C con un radio igual á BA, se trazarán dos arcos en el eje primero en F y F′, los cuales puntos serán los fócus; en el punto A ó *a* se tirará una perpendicular K*a*Z, y tomando desde *a* las *a*K, *a*Z, iguales con CB, y

---

(*) *Porque la ecuacion de la hipérbola es*

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}(x+a)(x-a);$$

luego si á la media proporcional entre $x+a$ *y* $x-a$ *la llamamos* M, *será*

$(x+a)(x-a)=M^2$, *lo que da* $z^2=\frac{b^2}{a^2}M^2$, *de donde* $b=\frac{az}{M}$ *ó* $M:z::a:b$.

tirando las KC, CZ, estas serán las asíntotas, y despues se podrán hacer cuantas investigaciones se quieran.

De las líneas de segundo órden en general, suponiendo rectangulares los ejes.

325 Despues de haber considerado las diferentes curvas que suministra la ecuacion ((4), § 208)

$$(\alpha(x-x')+6(z-z')-u')^2=M^2(1+\alpha^2+6^2)[(x-x')^2+(z-z')^2+(-u')^2],$$

vamos á probar que comprende todas las curvas que puede dar la ecuacion mas general de 2º grado entre dos indeterminadas, que representarémos por $Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0$ (DD).

Para esto, observarémos ante todas cosas que una ecuacion semejante no es siempre posible, y que solo puede representar una curva cuando no resultan siempre para z valores imaginarios; por lo que vamos á indagar las condiciones que se deberían verificar para que esto sucediese.

Preparando esta ecuacion con relacion á z, se tendrá

$$z^2+\frac{B}{A}xz+\frac{C}{A}x^2+\frac{D}{A}z+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0,$$

que resuelta (*) con relacion á z, despues de reducir el entero á la especie de quebrado que le acompaña, de haber estraido la raiz del denominador, y de descomponer en factores, da

$$z=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)} \quad (I).$$

Cuando x es nula, el polinomio que está debajo del signo radical se reduce á D^2-4AF; de donde se sigue que *para que sea z siempre imaginaria, es indispensable que se tenga desde luego* $D^2-4AF<0$ *ó negativo*. Es necesario, ademas, que este mismo polinomio permanezca siempre negativo, cualquiera que sea el valor de x; lo que exige que igualándole con cero se encuentre x imaginaria; porque si fuese real habría un valor de x que reduciría el polinomio á cero, y por consiguiente no sería una cantidad negativa. Por esta suposicion se tiene

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)=0,$$

que resolviéndola, reduciendo el entero de debajo del radical á la es-

---

(*) *La operacion de despejar una de las variables de la ecuacion propuesta ó resolverla con relacion à* x *ó á* z, *la llama* Mr. Bourdon, separacion de las variables.

pecie del quebrado que le acompaña, y estrayendo la raiz del denominador, da $x=-\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}\pm\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{1}{B^2-4AC}\sqrt{(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)}\quad\text{(II)},$$

luego será necesario que la cantidad

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)$$

que representarémos por Q, sea negativa; lo que supone que B^2-4AC lo sea, puesto que debiendo serlo D^2-4AF, por lo dicho ántes, resultaría del producto de estas cantidades un signo negativo, que combinado con el que afecta á dicho producto, daría un signo positivo, y tendríamos debajo del radical indicada la suma de dos cantidades. Si estas condiciones se verifican, á saber: que $D^2-4AF<0$ y $B^2-4AC<0$, el valor de z será siempre imaginario, cualquiera que sea x, y la ecuacion propuesta no podrá representar ninguna curva, ni recta, ni punto.

Tambien podemos asegurarnos de ello *à posteriori*, observando que la ecuacion (I) da quitando el divisor y el radical

$$(2Az+Bx+D)^2=(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)\quad\text{(III)},$$

y la ecuacion (II) da, quitando el divisor y el radical

$$[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2=(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF);$$

que efectuando el cuadrado, y pasando todos los términos al primer miembro, se reduce á

$$(B^2-4AC)^2x^2+2(B^2-4AC)(BD-2AE)x+(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0\quad\text{(IV)},$$

y como la misma ecuacion (II), sustituyendo Q en vez de lo que hay debajo del radical, da

$$\left\{\begin{array}{l}[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2=Q\\ \text{ó}\,[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2-Q=0\quad\text{(V)}\end{array}\right\};$$

si igualamos los dos primeros miembros de las ecuaciones (IV y V), y dividimos por B^2-4AC, tendrémos

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)=\ldots.$$

$$\frac{1}{B^2-4AC}[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2-\frac{Q}{B^2-4AC},$$

y como esta ecuacion tiene su primer miembro igual con el segundo de la (III), será $(2Az+Bx+D)^2=\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{1}{B^2-4AC}[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2-\frac{Q}{B^2-4AC};$$

ó pasándolo todo al primer miembro, será $(2Az+Bx+D)^2-\ldots\ldots$

$$\frac{1}{B^2-4AC}[(B^2-4AC)x+(BD-2AE)]^2+\frac{Q}{B^2-4AC}=0 \quad \text{(VI)}.$$

Luego si B^2-4AC y Q son cantidades negativas, el primer miembro de esta ecuacion se compone de la suma de tres cantidades positivas, y no puede llegar jamas á ser nulo, lo que hace imposible la propuesta (DD).

{ 326 Entendido esto, volvamos á la ecuacion (4)

$$[\alpha(x-x')+\mathcal{C}(z-z')-u']^2=M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)[(x-x')^2+(z-z')^2+(-u')^2],$$

y supongamos para mayor sencillez que el cono tenga una de sus generatrices perpendicular al plano secante, que es el de las xz; para lo cual basta que el ángulo de las generatrices con el eje del cono sea el mismo que el ángulo de este eje con la direccion de las ordenadas u.

{ El primero de estos ángulos tiene M por coseno (207), y el coseno del segundo (187) es $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}}$.

Luego si estas cantidades son iguales, se tendrá $M=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2+\mathcal{C}^2}}$,

de donde elevando al cuadrado, y quitando el divisor, saldrá

$$M^2(1+\alpha^2+\mathcal{C}^2)=1;$$

en cuyo caso la ecuacion anterior de la interseccion se convierte en

$$[\alpha(x-x')+\mathcal{C}(z-z')-u']^2=(x-x')^2+(z-z')^2+u'^2,$$

ó efectuando las operaciones en

$$\alpha^2x^2-2\alpha^2xx'+\alpha^2x'^2+2\alpha\mathcal{C}xz-2\alpha\mathcal{C}xz'-2\alpha\mathcal{C}x'z+2\alpha\mathcal{C}x'z'+\mathcal{C}^2z^2-2\mathcal{C}^2zz'+\ldots..$$
$$\mathcal{C}^2z'^2-2\alpha xu'+2\alpha x'u'-2\mathcal{C}zu'+2\mathcal{C}z'u'+u'^2=x^2-2xx'+x'^2+z^2\ldots..$$
$$-2zz'+z'^2+u'^2,$$

ó pasándolo todo al primer miembro y resolviendo en factores, en

$$(\mathcal{C}^2-1)z^2+2\alpha\mathcal{C}xz+(\alpha^2-1)x^2+(2z'-2\alpha\mathcal{C}x'-2\mathcal{C}^2z'-2\mathcal{C}u')z+\ldots\ldots\ldots$$
$$(2x'-2\alpha^2x'-2\alpha\mathcal{C}z'-2\alpha u')x+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\alpha^2x'^2+2\alpha\mathcal{C}x'z'+\mathcal{C}^2z'^2+2\alpha x'u'+2\mathcal{C}z'u'+u'^2-x'^2-z'^2-u'^2)=0.$$

§ Como las cantidades que están señaladas con las letras x', z', u', son constantes, pues son las coordenadas de un punto determinado, como es el vértice del cono, si llamamos A', B', C', D', E', F', á las cantidades que hay dentro de los paréntesis, esta ecuacion se convertirá en $A'z^2+B'xz+C'x^2+D'z+E'x+F'=0$.

§ Para que sea idéntica con la propuesta (DD), no es necesario que sus coeficientes sean precisamente los mismos; basta que no se diferencien el uno del otro, sinó en un factor comun á todos los términos de

ellas; porque multiplicando por este factor, se establecerá la completa identidad. Llamando K á este factor, tendrémos que comparar estas dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} KAz^2+KBxz+KCx^2+KDz+KEx+KF=0, \\ \text{y } A'z^2+B'xz+C'x^2+D'z+E'x+F'=0, \end{array}\right\}$$

lo que dará separadamente

$$A'=KA;\quad B'=KB;\quad C'=KC;\quad D'=KD;\quad E'=KE;\quad F'=KF;$$

ó poniendo en vez de A', B', *etc.* sus valores, se tendrá

$$\begin{array}{l} \mathcal{C}^2-1=KA;\quad 2\alpha\mathcal{C}=KB;\quad \alpha^2-1=KC\quad (\text{m}); \\ 2(\mathcal{C}^2-1)z'+2\alpha\mathcal{C}x'+2\mathcal{C}u'=-KD; \\ 2(\alpha^2-1)x'+2\alpha\mathcal{C}z'+2\alpha u'=-KE\quad (\text{n}); \\ (\mathcal{C}^2-1)z'^2+2\alpha\mathcal{C}x'z'+(\alpha^2-1)x'^2+2(\alpha x'+\mathcal{C}z')u'=KF. \end{array}$$

Eliminando α y $\mathcal{C}$ por medio de las tres ecuaciones (m), tendrémos $(B^2-4AC)K^2-4(A+C)K-4=0$, que da

$$K=\frac{2(A+C)}{B^2-4AC}\pm\frac{2}{B^2-4AC}\sqrt{(A+C)^2+(B^2-4AC)},$$

que efectuando el cuadrado que está debajo del radical, y haciendo la destruccion, resulta por último

$$K=\frac{2(A+C)}{B^2-4AC}\pm\frac{2}{B^2-4AC}\sqrt{B^2+(A-C)^2}=\ldots\ldots$$

$$\frac{2}{B^2-4AC}[C+A\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}].$$

Por consiguiente los dos valores de K serán siempre reales; puesto que debajo del radical se halla la suma de dos cuadrados, que siempre dará una cantidad positiva. Ademas, suponiendo que A sea una cantidad positiva, pues si no lo fuese se conseguiría mudando los signos á toda la ecuacion, se advierte que estos valores serán ambos negativos si B^2-4AC es negativo; porque en este caso el radical que es igual con

$$\sqrt{B^2-4AC+(A+C)^2}$$

será menor que $A+C$; y por consiguiente, con cualquier signo que se tome, reunido con $A+C$, dará siempre una cantidad positiva, que multiplicada por lo que hay fuera del paréntesis, que tendrá el signo —, dará una cantidad negativa; donde debemos observar que el ser B^2-4AC una cantidad negativa supone que C sea positiva. Finalmente, de los dos valores de K el uno sería positivo y el otro negativo cuando B^2-4AC sea una cantidad positiva; pero en todos los casos K sería real.

Ahora, si despejamos α y $\mathcal{C}$ en la segunda ecuacion de las (m),

se tendrá $\alpha=\frac{KB}{2\mathcal{C}}$, $\mathcal{C}=\frac{KB}{2\alpha}$, y añadiendo á estas ecuaciones la unidad en ambos miembros, se tendrá

$$\alpha+1=\frac{KB}{2\mathcal{C}}+1,\quad \mathcal{C}+1=\frac{KB}{2\alpha}+1,$$

y resolviendo en factores la primera y tercera de las ecuaciones (m), resultará $(\mathcal{C}+1)(\mathcal{C}-1)=KA$, $(\alpha+1)(\alpha-1)=KC$; y si en estas ecuaciones sustituimos en vez de $\alpha+1$ y $\mathcal{C}+1$ los valores hallados ántes, se tendrá $(\mathcal{C}-1)\left(\frac{KB}{2\alpha}+1\right)=KA$, y $(\alpha-1)\left(\frac{KB}{2\mathcal{C}}+1\right)=KC$; que efectuando la multiplicacion, quitando el divisor, y pasándolo todo á los primeros miembros se convierten en

$$\mathcal{C}KB-KB+2\alpha\mathcal{C}-2\alpha-2\alpha KA=0,\quad \alpha KB-KB+2\alpha\mathcal{C}-2\mathcal{C}-2\mathcal{C}KC=0;$$

y como en virtud de la segunda de las (ecs. m), será $2\alpha\mathcal{C}-KB=0$, estas ecuaciones se convertirán, mudándoles los signos, en

$$2KA\alpha-KB\mathcal{C}+2\alpha=0,\quad 2KC\mathcal{C}-KB\alpha+2\mathcal{C}=0,$$

las cuales siendo lineales, respecto de α y $\mathcal{C}$, manifiestan que estas serán reales siempre que K lo sea; pero como K es real en todos los casos, resulta qne siempre lo serán tambien α y $\mathcal{C}$.

§ En cuanto á las otras tres ecuaciones, poniendo en ellas en vez de $\mathcal{C}^2-1$, $2\alpha\mathcal{C}$, α^2-1, sus valores KA, KB, KC, dividiendo por K y pasándolo todo al primer miembro, se convierten en

$$2Az'+Bx'+D+\frac{2\mathcal{C}u'}{K}=0\ (\mathrm{m}'),\quad 2Cx'+Bz'+\mathrm{E}+\frac{2\alpha u'}{K}=0\ (\mathrm{n}'),$$

$$Az'^2+Bx'z'+Cx'^2-F+2(\alpha x'+\mathcal{C}z')\frac{u'}{\mathrm{K}}=0\ (\mathrm{o}').$$

§ Las dos primeras son lineales en x', z', u', luego estas cantidades serán reales, si la una de ellas por ejemplo u', es real. Multiplicando la primera de estas ecuaciones por z', la segunda por x', y quitando la tercera de su suma, se halla

$$Az'^2+Bx'z'+Cx'^2+Dz'+Ex'+F=0\ (\mathrm{p}'),$$

es decir, que las coordenadas x', z', deben satisfacer á la ecuacion propuesta; luego este resultado se podrá poner como en el párrafo (325) bajo la forma $(2Az'+Bx'+D)^2$.....

$$-\frac{1}{B^2-4AC}[(B^2-4AC)x'+BD-2AE]^2+\frac{\mathrm{Q}}{B^2-4AC}=0\ (\mathrm{q}'),$$

representando Q la cantidad $(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)$;

pero la ecuacion (m') da $2Az'+Bx'+D=-\frac{2\mathcal{C}u'}{K}$, en la cual despejando z', y sustituyendo su valor en la (n'), tendrémos despues de hechas las reducciones correspondientes

$$(B^2-4AC)x'+(BD-2AE)=\frac{2u'}{K}(2A\alpha-B\mathcal{C});$$

y como multiplicando por $\mathcal{C}$ la segunda de las ecuaciones (m) se convierte en $2\alpha\mathcal{C}^2=KB\mathcal{C}$, tendrémos que si se sustituye en vez de $\mathcal{C}^2$ el valor $AK+1$, que suministra la primera de las mismas ecuaciones, resultará despues de hecha la multiplicacion, $2\alpha AK+2\alpha=BK\mathcal{C}$, de donde $2\alpha AK-BK\mathcal{C}=-2\alpha$, y $2A\alpha-B\mathcal{C}=-\frac{2\alpha}{K}$; luego si sustituimos este valor en la ecuacion anterior, se tendrá

$$(B^2-4AC)x'+(BD-2AE)=-\frac{4\alpha u'}{K^2}.$$

Sustituyendo estas espresiones y haciendo desaparecer el denominador (B^2-4AC) en la ecuacion (q'), resulta

$$\frac{4\mathcal{C}^2u'^2}{K^2}(B^2-4AC)-\frac{16\alpha^2u'^2}{K^4}+Q=0,$$

ó multiplicando el primer término por $\frac{K^2}{K^2}$ y resolviendo en factores, será $\frac{4}{K^4}[\mathcal{C}^2K^2(B^2-4AC)-4\alpha^2]u'^2+Q=0$.

Pero si elevamos al cuadrado la segunda de las ecuaciones (m), y de ella restamos el producto de la primera y tercera, despues de haber multiplicado ambos miembros por 4, se tendrá

$$B^2K^2-4K^2AC=4(\alpha^2+\mathcal{C}^2-1) \text{ ó } K^2(B^2-4AC)=4(\alpha^2+\mathcal{C}^2-1),$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, resultará

$$\frac{4}{K^4}[\mathcal{C}^2\times4(\alpha^2+\mathcal{C}^2-1)-4\alpha^2]u'^2+Q=0,$$

que podrémos poner bajo esta forma $\frac{16(\mathcal{C}^2-1)(\alpha^2+\mathcal{C}^2)}{K^4}u'^2+Q=0$, ó en fin, poniendo en vez de $(\mathcal{C}^2-1)$ su valor KA, será

$$\frac{16KA(\alpha^2+\mathcal{C}^2)u'^2}{K^4}+Q=0, \text{ que da } (\alpha^2+\mathcal{C}^2)u'^2+\frac{K^3}{16A}\times Q=0.$$

§ Los dos valores de u' son por consiguiente iguales y de signo contrario; lo que era fácil de prever, porque si existe un cono recto que satisfaga á la ecuacion propuesta, y cuyo vértice esté colocado sobre el plano de las xz, existirá tambien otro simétrico al precedente, y cuyo vértice esté del otro lado de este plano.

§ Siendo A positiva, para que u' sea real, es necesario que K y Q sean de signo contrario. Pero cuando B^2-4AC es una cantidad positiva, K es susceptible de dos valores, el uno positivo y el otro negativo; luego se puede entónces, cualquiera que sea el signo de Q hacer á u' real; pero si B^2-4AC es negativa, K no tiene sinó valores negativos, y u' será real cuando Q sea positiva. Luego no existe sinó un caso en que el cono buscado sea imaginario, á saber, aquel en que B^2-4AC es negativo al mismo tiempo que Q; pero hemos visto (325) que en este caso la ecuacion (DD) es imposible, y no representa ninguna curva, ni recta, ni punto; luego tenemos demostrado que todas las curvas, cuya ecuacion es del segundo grado, son secciones cónicas; y la análisis precedente da el medio de determinar el cono á que pertenecen.

§ 327. Las ecuaciones de estas líneas no se presentan siempre bajo una forma tan sencilla como hemos examinado al principio.

§ Esta forma varía cuando se trasporta el orígen de las coordenadas á puntos diferentes del eje de las abscisas; pero varía aun mas cuando se coloca este orígen en un punto tomado fuera de los ejes de la curva, y cuando se muda al mismo tiempo la direccion de las coordenadas. Sin embargo, á pesar de esta generalidad se puede siempre reconocer en la ecuacion dada la naturaleza de la seccion cónica que representa.

§ En efecto, acabamos de asegurar que una ecuacion del segundo grado entre dos indeterminadas, siendo rectangulares las coordenadas, representa siempre una de las secciones del cono, que se reducen siempre á las siete siguientes: *el punto*, *una línea recta*, *dos líneas rectas*, *el círculo*, *la elipse*, *la parábola*, y *la hipérbola*, que ya hemos deducido (222).

§ Suponiendo estas líneas colocadas de un modo cualquiera sobre un plano, y referidas en este plano á ejes rectangulares situados como se quiera, se ve que la elipse no se estiende indefinidamente en ningun sentido; que la parábola no se estiende indefinidamente sinó en dos sentidos: en el de su eje y en el de las líneas que le son perpendiculares, y que en fin la hipérbola se estiende indefinidamente en todos los sentidos del lado de las x y de las z, tanto positivas como negativas.

§ He aquí, pues, los caractéres por medio de los cuales podrémos determinar la naturaleza de la curva que representa una ecuacion dada del segundo grado; no se trata mas que de saberlos reconocer por la forma de dicha ecuacion.

§ Para esto, tendrémos frecuentemente necesidad de esta proposicion, á saber, que *si se tiene un polinomio del segundo grado* Ax^2+Bx+C *en que* A, B, C, *son constantes, se puede siempre tomar* x, *ya sea positiva ya sea negativa, bastante grande para que el signo de este polinomio no dependa sinó del de su primer término* Ax^2.

§ Para lo cual bastará probar esta proposicion suponiendo A positiva, porque si fuese negativa é igual con A', se pondría el polinomio bajo la forma $-(A'x^2-Bx-C)$, que está reducido al caso en que A' es positiva.

§ Supongamos primero que x sea positiva; será necesario señalarle un valor tal que se tenga $Ax^2>Bx+C$.

§ Sea M una cantidad igual al mayor de los dos coeficientes B y C tomados positivamente; y la condicion pedida quedará satisfecha si se tiene $Ax^2>M(x+1)$, ó multiplicando y dividiendo el segundo miembro por $x-1$, será $Ax^2>M\frac{x^2-1}{x-1}$.

Mas para esto basta que $Ax^2=\frac{Mx^2}{x-1}$, lo que dividiendo por x^2, da $A=\frac{M}{x-1}$, de donde $x=1+\frac{M}{A}$.

§ No solo este valor de x hará el signo del polinomio dependiente del de su primer término, sinó que cualquiera otro valor mayor que este gozará de la misma propiedad; porque si se supone $x>1+\frac{M}{A}$, multiplicando por Ax, se tendrá $Ax^2>x(A+M)$; y poniendo en vez de A en el segundo miembro su valor $\frac{M}{x-1}$, y simplificando, se tiene $Ax^2>\frac{Mx^2}{x-1}$; y con mayor razon $Ax^2>M\frac{x^2-1}{x-1}$ ó $Ax^2>M(x+1)$, y con mucha mas razon $Ax^2>Bx+C$.

§ Supongamos ahora que x sea negativa, el polinomio se convertirá en Ax^2-Bx+C, y pues que, en el caso precedente se ha representado por M el mayor de los dos coeficientes B y C, el mismo valor $1+\frac{M}{A}$ que ha hecho $Ax^2>Bx+C$, con mas razon hará que $Ax^2>-Bx+C$.

Por consiguiente, siendo dado un polinomio de la forma Ax^2+Bx+C, se puede siempre hallar una cantidad que sustituida por x, sea positi-

ya sea negativamente, haga depender el signo del polinomio del de su primer término, y todas las cantidades mayores que aquella gozarán de la misma propiedad. Nosotros llamarémos á esta cantidad $1+\frac{M}{A}$, el límite de las raices del polinomio; porque mas allá de él no existe valor de x que le pueda hacer nulo. Si se tuviese $A=0$, la proposicion precedente sería aun verdadera; porque tomando $x>\frac{C}{B}$, haciendo abstraccion del signo, el de la cantidad $Bx+C$ sería el mismo que el de Bx.

§ 328 Entendido esto, volvamos á considerar la ecuacion general del segundo grado $Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0$, y supondrémos que los tres coeficientes A, B, C, no son nulos á un mismo tiempo; porque si esto sucediese, la ecuacion reducida al primer grado solo representaría una recta, el plano secante no entraría en el cono, y solo le tocaría en la direccion de una de sus generatrices.

§ Supongamos primero que A no sea nulo; y como el cuadrado de z entra en la ecuacion, se la podrá resolver con relacion á ella, lo que dará la (ec. I) que ya hemos obtenido (§ 325), á saber:

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}\ \text{(VII)}.$$

§ Para saber si la curva se estiende indefinidamente ó si está limitada, basta examinar segun la forma del polinomio que está debajo del radical, si los valores de z permanecen siempre reales mas allá del límite de sus raices, esto es, para valores de x mayores que los que reducen á cero el polinomio, ó si vienen á ser imaginarios; esto depende del signo que toma entónces el polinomio; y como este signo depende (327) del que tenga el primer término $(B^2-4AC)x^2$ podrán suceder tres casos segun que (B^2-4AC) sea negativo, nulo ó positivo; por lo que vamos á examinarlos sucesivamente.

§ Sea primero $B^2-4AC<0$, ó *negativo*.

§ Mas allá del límite de las raices, x se podrá tomar positiva ó negativamente; el polinomio que está debajo del radical será siempre negativo, y los dos valores de z serán imaginarios. Así, toda la curva está comprendida entre las dos rectas que se pueden tirar paralelamente al eje de las z por los puntos del eje de las x, á que corresponden estos límites. Se llegaría á un resultado análogo resolviendo la ecuacion propuesta con relacion á x. Luego la curva es limitada en todos los sentidos, y es por consiguiente del género de la elipse.

§ Sea ahora $B^2-4AC=0$.

§ El polinomio que está debajo del radical se reduce entónces á sus

dos últimos términos $2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)$; pero siempre se puede tomar x bastante grande para que $2(BD-2AE)x$ tomado positivamente sobrepuje á D^2-4AF.

Por consiguiente, si $BD-2AE$ es una cantidad positiva, todo valor positivo de x mas allá del mismo límite, dará para z valores reales; y todo valor negativo mas allá del mismo límite dará para z valores imaginarios. Si al contrario $BD-2AE$ es una cantidad negativa, mas allá del límite todo valor posivivo de x dará para z valores imaginarios, y todo valor negativo los dará reales. Así, en todos los casos se podrá tirar paralelamente al eje de las z una recta que deje á toda la curva de un lado; pero no se podrá comprender toda entera entre dos rectas tiradas de esta manera; luego esta curva es una parábola. A la misma conclusion se llegaría resolviendo la ecuacion con relacion á x. En el caso que examinamos, los tres primeros términos $Az^2+Bxz+Cx^2$ forman un cuadrado, que es el de

$$z\sqrt{A}+x\sqrt{C}.$$

§ Sea en fin $B^2-4AC>0$.

§ Mas allá del límite de las raices, se podrá tomar x positiva ó negativamente; y el polinomio que está debajo del radical quedará siempre positivo; luego los dos valores de z serán siempre reales, y crecerán indefinidamente. Será, pues, imposible tirar paralelamente al uno de los ejes una recta que deje á toda la curva de un mismo lado; esta curva es por consiguiente una hipérbola. Resolviendo la ecuacion con relacion á x, se llegaría al mismo resultado.

§ 329 Hasta aquí habíamos supuesto que A no era nulo. Si esto sucediese, y no lo fuese C al mismo tiempo, la ecuacion contendría el cuadrado x^2, se podría resolver con relacion á x, y se podría aplicar á x todo lo que hemos dicho con relacion á z. Si A y C fuesen nulos sin que B lo fuese, entónces la ecuacion correspondía á una hipérbola referida á sus asíntotas, pero cuyo centro no estuviese colocado en el orígen de las coordenadas, sinó que la abscisa de este centro fuese $-\frac{D}{B}$, y su ordenada $-\frac{E}{B}$.

En fin, si A, B y C, fuesen nulos á un mismo tiempo, la ecuacion representaría una recta y no habría que resolverla.

§ Resulta de esta discusion en que están comprendidos todos los casos, que la ecuacion $Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0$

pertenece { á una elipse cuando se tiene $B^2-4AC<0$, (1ª)
á una parábola cuando $B^2-4AC=0$, (2ª)
á una hipérbola cuando $B^2-4AC>0$; (3ª);

y recíprocamente, que no puede pertenecer á la elipse, á la parábola ó á la hipérbola, si no se verifica la 1ª ó la 2ª ó la 3ª de estas con-

diciones; de donde resulta que la naturaleza de la curva depende de los coeficientes A, B, C, y que todas las curvas representadas por la ecuacion (DD) quedan divididas en tres clases: la 1ª de *curvas limitadas en todos los sentidos*; la 2ª *de curvas indefinidas en un sentido y limitadas en sentido opuesto*; y la 3ª *de curvas indefinidas en todos los sentidos*. Por lo que vamos á discutir en particular cada una de estas clases de curvas, á fin de determinar precisamente su forma y su situacion.

Resolviendo la ecuacion general [(DD)§ 325] con relacion á x, en vez de hacerlo con relacion á z, resulta que el coeficiente de z^2 debajo del radical, es tambien B^2-4AC; por lo que se obtienen las mismas propiedades respecto de cada uno de los ejes; y se deduce que segun sea B^2-4AC negativo, nulo ó positivo, la curva será limitada en el sentido de las z, ó se estenderá indefinidamente en un solo sentido paralelamente á este eje, ó en fin se estenderá indefinidamente en los dos sentidos del lado de las z positivas y del lado de las z negativas.

§ 330 1ª clase. *Curvas limitadas en todos sentidos. Carácter*

$$B^2-4AC<0,$$

§ Para discutir esta clase de curvas, volvamos á tomar el valor de z, que (VII) es $z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)}$, el cual nos enseña que para tener los puntos de la curva, es necesario construir sobre cada abscisa AP (fig. 121) una cantidad PN igual con $-\frac{Bx+D}{2A}$, llevar por arriba y por abajo del punto N, determinado por esta condicion, la cantidad que representa el radical; de donde se sigue que cada uno de estos puntos N divide á la línea correspondiente MM′, terminada en la curva, en dos partes iguales.

§ Esta cantidad $-\frac{Bx+D}{2A}$, que varía con cada valor de x, es la ordenada de una recta que tuviese por ecuacion $Z=-\frac{Bx+D}{2A}$.

§ Por consiguiente esta recta comprende á todos los puntos N que acabamos de considerar; y por dividir en dos partes iguales á todas las rectas tiradas paralelamente al eje de las z, se le caracteriza con el nombre de *diámetro*. Y lo mismo sucede en todas las líneas de segundo órden.

§ Para encontrar el límite de la curva en el sentido de las x, observarémos que, dividiendo y multiplicando los dos últimos términos que se hallan debajo del radical (VII) por B^2-4AC, podrémos poner dicha ecuacion del modo siguiente:

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\ldots\ldots$$

$$\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)\left(x^2+2\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}\right)} \quad \text{(VIII)}.$$

§ Y si se espresan por x' y x'' las dos raices de la ecuacion

$$x^2+2\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}x+\frac{D^2-4AF}{B^2-4AC}=0 \text{ (EE)},$$

se podrá dar esta forma al valor de z, que es

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')} \text{ (IX)},$$

donde vemos que la realidad ó imposibilidad de z dependerá únicamente de los signos que tomen los factores $x-x'$, $x-x''$; y por consiguiente los límites de la curva dependerán de los valores de x' y de x''.

§ Pero, estas raices pueden ser reales y desiguales, ó reales é iguales, ó en fin las dos imaginarias. Por lo que examinarémos sucesivamente estos tres casos.

§ Si son reales y desiguales, para lo que es indispensable que

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0 \text{ (X)},$$

como nos convencerémos resolviendo la ecuacion (EE), se verificará que cuando los valores de x se hallen entre x' y x'', los factores $x-x'$, $x-x''$, serán de signo contrario, y su producto $(x-x')(x-x'')$ será negativo; y como B^2-4AC es tambien negativo, la cantidad $(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')$ será positiva; por consiguiente la ordenada z tendrá dos valores reales.

§ Cuando $x=x'$, ó $x=x''$, el radical se desvanecerá, y los dos valores de z se confundirán en uno solo, que será real é igual con $-\frac{Bx+D}{2A}$.

§ En este caso no habrá nada que llevar á uno y otro lado del diámetro para tener las ordenadas de la curva, y por consiguiente las abscisas x' y x'' pertenecen á los puntos en que la curva encuentra á su diámetro.

Pero, si los valores de x fuesen numéricamente mayores ó menores que x' y x'', los dos factores $x-x'$, $x-x''$, tendrán un mismo signo y su producto será positivo; y como B^2-4AC es negativo, la cantidad que hay debajo del radical será negativa; por lo que los dos valores de z serán imaginarios.

§ De esta discusion, resulta que la curva es contínua entre las abscisas x' y x'', y que no se estiende mas allá. Si en los estremos de estas abscisas se levantan perpendiculares indefinidas sobre el eje de las x, estas rectas comprenderán dentro de sí á la curva, y aun le serán tangentes, pues que se podrán considerar como secantes, cuyos puntos de interseccion se confunden en uno solo. En efecto para cada valor de la abscisa, se tienen siempre dos ordenadas, y por consiguiente dos puntos diferentes de la curva, escepto en los estremos de los diámetros, que no hay mas de una sola ordenada y por consiguiente un solo punto, que debe considerarse como la reunion de dos.

§ Resolviendo la ecuacion con relacion á x, se obtendrían resultados semejantes, con tal que entrase el cuadrado x^2; y se hallaría la curva limitada entre dos valores de z, en cuyos estremos se podrían tirar dos rectas paralelas al eje de las abscisas, y que comprenderían dentro de sí á la curva, tocándola. De este modo tendríamos cuatro puntos de la curva, y se podrian hallar mas puntos entre los límites en que se estiende. Por ejemplo, si se quiere reconocer los puntos en que corta al eje de las x, se hará $z=0$ en la ecuacion (DD § 325); lo que

dará $Cx^2+Ex+F=0$, que da $x=-\frac{E}{2C}\pm\sqrt{\frac{E^2}{4C^2}-\frac{F}{C}}=-\frac{E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{E^2-4CF}$,

lo que exige, para que en efecto corte á la curva en dichos dos puntos, el que $E^2-4CF>0$; si $E^2-4CF=0$, entónces los dos valores de x serían iguales y el eje de las x sería tangente á la curva; y si $E^2-4CF<0$, no cortará la curva en ningun punto al eje de las x.

§ Del mismo modo, haciendo $x=0$ en la ecuacion (DD), se tendrá

$$Az^2+Dz+F=0,$$

y las raices de esta ecuacion determinarán los puntos en que la curva corte al eje de las z, que por la misma análisis de ántes, hallarémos

ser { en dos puntos cuando. . . . . $D^2-4AF>0$,
en un punto, donde será tangente, cuando $D^2-4AF=0$,
y en ningun punto cuando. . . . . $D^2-4AF<0$.

§ Para no dejar ninguna duda sobre este punto, pondrémos el resultado de estas condiciones en la adjunta

TABLA

Condiciones geométricas.	*Condiciones entre los coeficientes.*
Curva cerrada del género de la elipse.	$B^2-4AC<0$ (1)
Son reales las raices x' y x''	$(BD-2AE)^2-(D^2-4AF)(B^2-4AC)>0$ (2)
Dos puntos de interseccion con el eje de las x.	$E^2-4CF>0$ (3)
Un punto de contacto con el eje de las x.	$E^2-4CF=0$ (4)
Ningun punto de interseccion con el eje de las x.	$E^2-4CF<0$ (5)
Dos puntos de interseccion con el eje de las z.	$D^2-4AF>0$ (6)
Un punto de contacto con el eje de las z.	$D^2-4AF=0$ (7)
Ningun punto de interseccion con el eje de las z.	$D^2-4AF<0$ (8)

Haciendo uso de estas observaciones, se hallará que la ecuacion

$$z^2-2xz+2x^2-2z+2x=0,$$

satisface á las condiciones (1), (2), (3), (6), (fig. E lám. 8′).

La $z^2-2xz+2x^2-2x=0$, á las (1), (2), (3), (7), (fig F).

Y la $z^2-2xz+2x^2+2z+x+3=0$, á las (1), (2), (5), (8), (fig. G).

§ 331 Hay un cáso particular comprendido en las condiciones precedentes, pero sobre el cual conviene estar prevenido, porque conduce á un resultado muy simple; y es cuando $A=C$ y $B=0$.

En cuyo caso la ecuacion general, despues de dividir por A, se convierte en

$$z^2+x^2+\frac{Dz}{A}+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0;$$

que, añadiendo á ambos miembros la cantidad $\frac{D^2+E^2}{4A^2}$, podrémos poner bajo esta forma $\left(z+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(x+\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4AF}{4A^2}$;

que comparada con la del (§ 228), se ve que representa un *círculo* en que las coordenadas de su centro son

$$-\frac{D}{2A},\quad -\frac{E}{2A}$$ y cuyo radio es $\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}$.

Para que este círculo sea real, es preciso que la cantidad D^2+E^2-4AF sea positiva.

§ Considerémos ahora el caso en que los dos valores de x' y de x'' sean iguales; entónces $(x-x')(x-x'')$ será un cuadrado, y el valor (IX) de z será

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{x-x'}{2A}\sqrt{B^2-4AC};$$

y cualquier valor que se dé á x, mientras que $x-x'$ no sea nulo, el valor de z será imaginario, á causa de ser $B^2-4AC<0$;
pero si se hace $x=x'$, se reduce á un sólo valor, real é igual á $-\frac{Bx'+D}{2A}$;

por lo que *la curva se reduce en este caso á un punto único situado sobre el diámetro y cuyas coordenadas son* $x=x'$, $z=-\frac{Bx'+D}{2A}$.

§ Para que este resultado pueda tener lugar, y que los valores de x' y de x'' sean iguales entre sí, es necesario que la parte radical de su espresion, sacada de la ecuacion (EE) se desvanezca por sí misma; lo que exige que

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0 \quad (9).$$

§ Esta condicion reunida á la primera $B^2-4AC<0$, determina el caso en que la curva se reduce á un *punto*.

§ He aquí algunos ejemplos de este caso en que convendrá se ejerciten los principiantes $x^2+z^2=0$, $z^2+x^2-2x+1=0$.

§ Considerémos en fin el caso en que las dos raices x', x'' son imaginarias; entónces, efectuando la multiplicacion $(x-x')(x-x'')$, su primer término será x^2; y como en virtud de lo demostrado (327), podrémos dar á x un valor tal que el signo de todo el producto sea el de su primer término x^2, resulta que como x^2 es un cuadrado, será esencialmente positivo; por lo que dicho pcoducto será siempre positivo; y como el factor B^2-4AC que le multiplica debajo del radical es negativo en el caso presente, se sigue que el valor de z será siempre imaginario, cualquiera que sea x; de modo que en este caso la curva es *imaginaria*; ó por mejor decir, no hay *curva*, ni *recta*, ni *punto*.

§ Esto sucederá cuando la cantidad que entre debajo del radical en los valores

de x' y x'', sea negativa; es decir, que será necesario que se tenga

$$B^2-4AC<0,\ (BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)<0.$$

§ He aquí algunos ejemplos en que la ecuacion propuesta es imposible

$$z^2+xz+x^2+\tfrac{1}{2}x+z+1=0,\quad z^2+x^2+2x+2=0.$$

§ Hasta aquí hemos resuelto la ecuacion (DD) solo con relacion á z; pero debemos advertir que se hallarían resultados de todo punto semejantes, si se resolviese con relacion á x, y se llegaría á las mismas condiciones.

§ De toda esta discusion resulta, que las curvas de segundo órden comprendídas en la primera clase, son en general curvas cerradas como la elipse. Pero las condiciciones secundarias dan lugar á tres variedades, que son *el punto aislada, la curva imaginaria* y *el círculo*.

§ Ahora solo nos falta el sacar de la ecuacion propuesta todos los datos necesarios para construirlas geométricamente. El medio mas simple de conseguirlo consiste en determinar el centro de la curva, y la direccion y magnitud de dos diámetros conjugados: con cuyos datos se puede construir geométrica y exactamente la elipse (306).

§ Para encontrar el centro, observarémos que se ha de hallar (241) en medio de los diámetros; y como en virtud de lo espuesto (330) conocemos ya un diámetro situado sobre la recta indefinida cuya ecuacion es

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}\quad\text{(XI)},$$

observarémos que las abscisas de los estremos de este diámetro son x', x'', que espresan los límites de las x; luego las ordenadas correspondientes z', z'' tendrán por valores $z'=-\dfrac{Bx'+D}{2A}$, $z''=-\dfrac{Bx''+D}{2A}$.

§ La longitud de este diámetro es la distancia de los dos puntos cuyas coordenadas son x', z', x'', z''; luego estará espresada (170) por

$$\sqrt{(x''-x')^2+(z''-z')^2};$$

que sustituyendo en vez de z' y z'' sus valores en x', x'', se reduce á

$$\left(\frac{x''-x'}{2A}\right)\sqrt{B^2+4A^2}.$$

§ Si espresamos por X, Z, las coordenadas del centro, como se ha de hallar en medio de esta distancia, será $X=\frac{1}{2}(x'+x'')$, $Z=\frac{1}{2}(z'+z'')$.

§ Hemos visto (330) que en los estremos de este diámetro, la tangente de la curva es paralela al eje de las z. Luego si por el centro tiramos una recta paralela con dicho eje, será el diámetro conjugado del precedente. Las ordenadas de la curva en los estremos de este nuevo diámetro serán los valores de Z correspondientes á la abscisa del centro, es decir, á X, y por consiguiente se obtendrán sustituyendo en la espresion general de z (IX) en vez de x el valor $\frac{1}{2}(x'+x'')$ que acabamos de sacar para X; y se tendrá

$$z=-\frac{B(x''+x')+2D}{4A}\pm\frac{x''-x'}{4A}\sqrt{4AC-B^2};$$

la diferencia de estas dos ordenadas será $\frac{(x''-x')}{2A}\sqrt{4AC-B^2}$;

que espresa la longitud del segundo diámetro paralelo á las z y conjugado al precedente. Con cuyos datos se construirá la elipse. Si x' y x'' son imaginarias, los dos diámetros serán tambien imaginarios y no habrá curva; si $x''=x'$, las longitudes de los dos diámetros serán nulas, y la curva se reducirá á un punto. En fin, si $4AC-B^2=B^2+4A^2$, los dos diámetros conjugados serán iguales entre sí. Si se espresa por α el ángulo que el primer diámetro conjugado forma con el eje de las x, la (ec. XI) dará

$$\text{tang.}\alpha=-\frac{B}{2A}\text{; por lo que } \cos.\alpha=\frac{2A}{\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

§ Pues que el segundo diámetro ha de ser paralelo al eje de las z, será perpendicular al eje de las x; y si espresamos por ω el ángulo que forman entre sí los dos diámetros, será $\omega=90-\alpha$,

por consiguiente (§ 7) $\text{sen.}\omega=\cos.\alpha=\frac{2A}{\sqrt{4A^2+B^2}}$.

§ Pero se ha visto (308) que el rectángulo de los ejes es igual al paralelogramo formado por los dos diámetros conjugados, ó que dicho rectángulo es igual al producto de dichos diámetros multiplicados por sen.ω. Aquí el producto de los dos diámetros es $\frac{(x''-x')^2}{4A^2}\sqrt{4AC-B^2}\sqrt{4A^2+B^2}$;

luego si espresamos por $2a$ y $2b$ los dos ejes de la elipse, y ponemos en vez de sen.ω su valor, se tendrá $ab=\frac{(x''-x')^2}{8A}\sqrt{4AC-B^2}$ (XI′).

§ Hemos visto tambien (308) que la *suma de los cuadrados de los ejes es igual á la de los cuadrados de dos diámetros conjugados;* aquí esta última suma es igual con

$$\frac{(x''-x')^2}{4A^2}(4A^2+B^2)+\frac{(x''-x')^2}{4A^2}(4AC-B^2)=\frac{(x''-x')^2}{A}(A+C);$$

luego se tendrá

$$4a^2+4b^2=\frac{(x''-x')^2}{A}(A+C), \text{ ó } a^2+b^2=\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C) \text{ (XI″)}.$$

§ Estas dos ecuaciones bastan para calcular las longitudes de los ejes. En efecto, despejando a en la (ec. XI′), se tiene

$$a=\frac{(x''-x')^2}{8Ab}\sqrt{4AC-B^2} \text{ (XI‴)}.$$

§ Sustituyendo este valor en la (ec. XI″), resulta

$$\frac{(x''-x')^4}{64A^2b^2}(4AC-B^2)+b^2=\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C).$$

Multiplicando esta ecuacion por b^2, se convierte en

$$b^4-\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C)b^2+\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(4AC-B^2)=0\ ;$$

que, en virtud de lo espuesto (I. 253), y considerándo á b^2 como la incógnita, se tiene

$$b^2=\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C)\pm\sqrt{\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(A+C)^2-\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(4AC-B^2)}=\ldots\ldots$$

$$\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C)\pm\frac{(x''-x')^2}{8A}\sqrt{(A+C)^2-4AC+B^2}=\ldots\ldots$$

$$\frac{(x''-x')^2}{8A}\left(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right)\quad(\text{XI}'^{v}).$$

Sustituyendo este valor en la (ec. XI$''$) y trasladando, resulta

$$a^2=\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C)-\frac{(x''-x')^2}{8A}\left(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right)=\ldots\ldots$$

$$\frac{(x''-x')^2}{8A}(2A+2C)-\frac{(x''-x')^2}{8A}\left(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right)=\ldots\ldots$$

$$\frac{(x''-x')^2}{8A}\left(A+C\mp\sqrt{B^2+(A-C)^2}\right);$$

estrayendo la raiz cuadrada de estas dos últimas ecuaciones, se tendrán los valores de los semiejes a y b; y duplicando, resultarán los ejes enteros $2a$ y $2b$.

Si se tiene $B=0$ y $A=C$, los dos ejes de la elipse son iguales, y por consiguiente se reduce á círculo.

§ 332 2.ª clase. *Curvas limitadas en un sentido é indèfinidas en el otro.*

Carácter $B^2-4AC=0$.

Para esta clase de curvas el valor general de z (VII), se reduce á

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)x+D^2-4AF}\quad(\text{XII});$$

que haciendo para mayor sencillez $\dfrac{D^2-4AF}{2(BD-2AE)}=-x'$ (XIII)), se puede poner bajo esta forma

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{2(BD-2AE)(x-x')}\quad(\text{XIV}).$$

§ Si $BD-2AE$ es positivo, y $x>x'$, el radical será real; si $x=x'$, el radical será nulo; y si $x<x'$, permaneciendo $BD-2AE$ positivo, el factor $x-x'$ será negativo, y el radical imaginario. Luego la curva se estiende al infinito en el sentido de las x positivas desde la abscisa $x=x'$; por lo que la ordenada correspondiente á esta abscisa servirá de límite y tocará á la curva. Al contrario, si $BD-2AE$ es negativo, la curva se estenderá indefinidamente en

el sentido de las x negativas, y será limitada en el sentido opuesto.

§ En ambos casos la recta que tiene por ecuacion

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A} \quad \text{(XV)}$$

será un diámetro de la curva, dando á esta espresion el sentido del (§ 330).

§ Resolviendo la ecuacion con relacion á x, la del diámetro sería

$$x=-\frac{Bz+E}{2C}; \quad \text{de donde se saca} \quad z=-\frac{2C}{B}x-\frac{E}{B}.$$

§ Pero siendo $B^2-4AC=0$, se tiene $\frac{2C}{B}=\frac{B}{2A}$;

luego si en vez de $\frac{2C}{B}$, sustituimos $\frac{B}{2A}$, la ecuacion anterior del diámetro se nos convertirá en $z=-\frac{B}{2A}x-\frac{E}{B}$, es decir, que es paralelo (164) al otro que se habia encontrado, resolviendo la ecuacion con relacion á z; lo que es una nueva analogía de la curva que examinamos con la parábola en que todos los diámetros son paralelos entre sí.

§ La posicion particular de esta curva, y su situacion con relacion á los ejes, dependerá de los coeficientes A, B, *etc.* y se descubrirá por el mismo método que hemos seguido respecto de la elipse.

§ Por lo demas, la condicion característica del género de curva que consideramos aquí, es muy fácil de reconocer; porque cuando $B^2-4AC=0$, los tres primeros términos $Az^2+Bxz+Cx^2$ de la ecuacion general forman un cuadrado perfecto, que es el de la cantidad $z\sqrt{A}+x\sqrt{C}$.

§ Hé aquí algunos ejemplos para que se ejerciten los principiantes

$z^2-2xz+x^2+x=0$, (fig. H), $\quad z^2-2xz+x^2+2z+1=0$ (fig. K),
$z^2-2xz+x^2+2z=0$, (fig. I), $\quad z^2-2xz+x^2-2z-1=0$ (fig. L),
$z^2-2xz+x^2-2z-2x=0$ (M).

§ Si $BD-2AE=0$, la espresion (XII) se convertiría en

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{D^2-4AF}.$$

§ Entónces, la curva dejenera en dos líneas rectas paralelas entre sí, por tener la misma tangente trigonométrica $-\frac{B}{2A}$ el ángulo que ambas forman con el eje de las x, y segun sea D^2-4AF positivo, nulo ó negativo, estas rectas serán ambas reales, ó se reducirán á una, ó serán ambas imaginarias.

§ En este caso, la ecuacion general se puede descomponer en factores del primer grado, y se puede poner bajo la forma

$$(2Az+Bx+D+\sqrt{D^2-4AF}).(2Az+Bx+D-\sqrt{D^2-4AF})=0 \quad (*).$$

§ Hé aquí algunos ejemplos

$z^2-2xz+x^2-1=0$
$z^2+4xz+4x^2-4=0$
} Dos rectas (figs. N y O),

$z^2-2xz+x^2+2z-2x+1=0$
$z^2-4xz+4x^2=0$
} Una sola recta (figs. P, Q),

$z^2+2xz+x^2+1=0$
$z^2+z+1=0$
} Dos rectas imaginarias (figs. R, S).

§ De esta discusion resulta que las curvas de 2.º órden comprendidas en la 2.ª clase son en general indefinidas en un solo sentido como la parábola, pero pueden dar como variedades *dos rectas paralelas*, ó *una sola*, ó *dos rectas imaginarias*.

§ Solo nos falta ahora el sacar de la ecuacion general todos los datos necesarios para su construccion geométrica; y no habiendo aquí centro como en la elipse, nos valdrémos de la propiedad demostrada (276) *de que en la parábola, cuando dos tangentes son perpendiculares la una á la otra, la recta tirada por los dos puntos de contacto pasa por el fócus* (**).

§ Para aplicar esta propiedad á la construccion de la ecuacion general, consideraremos que cuando se resuelve con relacion á z, se obtiene un diámetro cuyas ordenadas son paralelas á las z; y resolviéndola con relacion á x, se obtiene otro diámetro cuyas ordenadas son paralelas á las x, es decir, perpendiculares á las precedentes; pero las tangentes en el orígen de los diámetros son paralelas á estas ordenadas; luego serán perpendiculares entre sí; y

---

(*) *Para esto, basta separar los valores que acabamos de obtener para* z, *quitar el divisor, reducir á cero cada una de las dos ecuaciones que resultan, é indicar la multiplicacion.*

Esto confirma lo que hemos manifestado (nota del § 172).

(**) Mr. Biot, al enunciar esta proposicion, página 363 de la 8.ª edicion de su *Ensayo de Geometría analítica*, añade: *y el punto de interseccion de las dos tangentes se halla sobre la directriz*; y como esta propiedad no sabe que otro la haya notado, se detiene á demostrarla; y lo hace del modo siguiente.

Designemos por x', z', x'', z'' las coordenadas de los dos puntos de contacto; las ecuaciones de las dos tangentes serán (§ 270 cc. Q)

$$Zz'=\tfrac{1}{2}p(X+x'), \quad Z'z''=\tfrac{1}{2}p(X'+x'').$$

En el punto en que estas rectas se cortan, tienen las mismas coordenadas, y será

$$X=X', \quad Z=Z';$$

por lo que las dos ecuaciones anteriores, se nos convertirán en

$$Zz'=\tfrac{1}{2}p(X+x'), \quad Zz''=\tfrac{1}{2}p(X+x'').$$

Dividiendo estas ecuaciones ordenadamente, resulta

$$\frac{z''}{z'}=\frac{X+x''}{X+x'}; \quad \text{de donde se saca} \quad X=\frac{x''z'-x'z''}{z''-z'}.$$

Esta es la abscisa del punto de interseccion de las dos tangentes. Pero se puede

por lo mismo la recta que une los puntos de contacto contiene el fócus de la parábola.

§ Las coordenadas de estos puntos de contacto son fáciles de calcular, porque son los límites de la curva en estos diferentes sentidos; para el límite en que la tangente es paralela con las z, tenemos (XIII)

$$x=x'=-\frac{D^2-4AF}{2(BD-2AE)},$$

lo que reduce la ecuacion (XIV) á $z'=-\frac{Bx'+D}{2A}$ (XVI).

§ Resolviendo la ecuacion con relaciou á x, se hallarán del mismo modo las coordenadas del estremo del otro diámetro en que la tangente es paralela al eje de las x, y se tendrá

$$z''=-\frac{E^2-4CF}{2(BE-2CD)},$$ y entónces resultaría $x''=-\frac{Bz''+E}{2C}$.

§ Determinados estos dos puntos, se unirán por una recta, en la cual se hallará el fócus; y para que este punto quede fijo, se necesita determinar la posicion de otra recta que pase tambien por él; con lo cual el punto de interseccion de estas dos rectas será el fócus que deseamos. Como el eje de la parábola pasa por el fócus, nos valdrémos de él; y para determinar su posicion, tirarémos por el vértice del primer diámetro una perpendicular á este diámetro y terminada en la curva; y dividiendo esta perpendicular en dos partes iguales y tirando por este punto una paralela al espresado diámetro, tendrémos el eje.

---

simplificar, atendiendo á que los dos puntos de contacto, hallándose sobre la parábola, se tendrá

$$z'^2=px',\quad z''^2=px'';\quad \text{que dan}\quad x'=\frac{z'^2}{p},\quad x''=\frac{z''^2}{p}.$$

Sustituyendo estos valores en el de X, efectuando las operaciones, y simplificando, resulta $X=\frac{z'z''}{p}$.

Esta espresion es general para todos los pares de tangentes, cualesquiera que puedan ser; pero, como las tangentes, que aquí consideramos, son perpendiculares la una á la otra, se verificará (§ 276) que

$$z'z''=-\tfrac{1}{4}p^2.$$

Y haciendo la sustitucion en la ecuacion anterior, se tendrá

$$X=\frac{1}{p}\times-\tfrac{1}{4}p^2=-\tfrac{1}{4}p.$$

Lo que nos manifiesta, que *la abscisa del punto de interseccion está situada fuera de la parábola, á una distancia del vértice de esta curva igual á* $-\frac{1}{4}p$; que es precisamente *la distancia de la directriz al vértice de la parábola.*

§ Reduzcamos á cálculo esta construccion; y tendrémos que la ecuacion del diámetro de que se trata será $z=-\frac{Bx+D}{2A}=-\frac{B}{2A}x-\frac{D}{2A}$.

La recta, que le es perpendicular y que pasa por su vértice, cuyas coordenadas son x' y z', tendrá por ecuacion (§ 163 y 168) $Z-z'=\frac{2A}{B}(X-x')$, espresando por X, Z, sus coordenadas.

Para encontrar la interseccion de esta perpendicular con la parábola, observarémos que quitando el radical de la ecuacion (XIV), tendrémos

$$(2Az+Bx+D)^2-2(BD-2AE)(x-x')=0,$$

que, añadiendo y quitando $2Az'+Bx'$, se puede poner bajo esta forma

$$(2A(z-z')+B(x-x')+2Az'+Bx'+D)^2-2(BD-2AE)(x-x')=0;$$

ó simplemente

$$(2A(z-z')+B(x-x'))^2-2(BD-2AE)(x-x')=0;$$

en atencion á que las coordenadas x', z', del vértice del diámetro tienen entre sí (XVI) la relacion $2Az'+Bx'+D=0$.

§ Como el vértice del diámetro es punto de la parábola, y la recta perpendicular al diámetro pasa por dicho vértice, tendrá en dicho punto las mismas coordenadas que la parábola; esto es, será en dicho punto $X=x$, $Z=z$; y la ecuacion de la espresada recta, se convertirá en $z-z'=\frac{2A}{B}(x-x')$.

Sustituyendo este valor en la ecuacion anterior, resulta

$$(2A.\frac{2A}{B}(x-x')+B(x-x'))^2-2(BD-2AE)(x-x')=0,$$

que podrémos poner bajo esta forma

$$(x-x')^2\left(\frac{4A^2+B^2}{B}\right)^2-2(BD-2AE)(x-x')=0.$$

Las raices de esta ecuacion espresan los valores que corresponden á x en los puntos de interseccion; una de dichas raices es $x=x'$: lo que debía ser, pues que la recta pasa por el vértice del diámetro.

Dividiendo la ecuacion anterior por $x-x'$, se convierte en

$$(x-x').\frac{(4A^2+B^2)^2}{B^2}-2(BD-2AE)=0;$$

que da $x-x'=\frac{2B^2(BD-2AE)}{(4A^2+B^2)^2}$; de donde se saca

$$z-z'=\frac{2A}{B}.\frac{2B^2(BD-2AE)}{(4A^2+B^2)^2}=\frac{4AB(BD-2AE)}{(4A^2+B^2)^2}.$$

Luego la distancia entre estos dos puntos ó la cuerda correspondiente á ellos, resultará despues de hechas todas las reducciones

$$\sqrt{(x-x')^2+(z-z')^2}=\frac{2B(BD-2AE)}{(4A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculada esta longitud, se llevará sobre la perpendicular al diámetro, y el punto medio será un punto del eje.

§ Tirando por este punto una paralela al diámetro, será el eje de la parábola, y su interseccion con la recta que une los puntos de contacto, será el fócus.

§ Determinado ya el fócus, el eje y un punto de la curva, estos datos bastan para construirla geométricamente. Porque si se toma la distancia del fócus al espresado punto de la curva, y se coloca en el mismo diámetro por la parte esterior de la curva, este punto será (266) punto de la directriz, y tirando por él una perpendicular al espresado diámetro, se tendrá la directriz etc.

§ 333 Tercera clase. *Curvas indefinidas en todos sentidos.*

§ Carácter $B^2-4AC>0$.

§ Dando al valor general de z, la forma (IX)

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')}\quad\text{(XVII)},$$

si se supone que x' y x'' sean cantidades reales, como B^2-4AC es una cantidad positiva, se tendrá que la curva será imaginaria entre las abscisas x' y x''; y que será real fuera de estos límites, en que la tocan sus ordenadas: forma en un todo análoga á la hipérbola (fig. T).

§ La condicion de ser reales las raices x' y x'', es

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0,$$

que es la misma que obtuvimos (X) respecto de la elipse. Luego solo el signo de la cantidad B^2-4AC determina el ser cerrada y limitada la curva, ó el componerse de dos ramas infinitas.

§ Tambien se ve que las abscisas x' y x'' entre que la curva es imaginaria, corresponden á su interseccion con el diámetro que tiene por ecuacion

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}.$$

§ He aquí algunos ejemplos sobre que convendrá egercitarse

$z^2-2xz-x^2+2=0$ (fig. *V*),
$z^2-x^2+2x-2z+1=0$ (fig. *U*),
$z^2-2xz-x^2-2z+2x+3=0$ (fig. VV),
$z^2-2x^2-2z+6x-3=0$ (fig. X).

§ Se hallarían del mismo modo que en el (§ 330) las condiciones necesarias para que la curva corte á los ejes de las x y de las z, ó los toque en un solo punto, ó no los encuentre.

§ Hay sin embargo un caso que podría embarazar á los principiantes, y sobre el cual deben fijar su atencion; y es cuando falta alguno de los cuadrados x^2 ó

z^2 de la ecuacion propuesta, hallándose el término xz; como si se tuviese por ejemplo $Az^2+Bxz+Dz+Ex+F=0$ (XVIII); entónces haciendo $z=0$ para tener la interseccion de la curva con el eje de las x, se halla $x=-\frac{F}{E}$, este valor es infinito si $E=0$: y para saber lo que significa esto, considerémos primero este último caso, que es el mas simple, pues que entónces se tiene

$$Az^2+Bxz+Dz+F=0 \text{ (XIX)}.$$

Despejando x, se halla $x=-\frac{Az^2+Dz+F}{Bz}$ (XX).

Todos los supuestos reales para z, darán valores reales para x; pero estos valores acabarán siempre por ir aumentando, á medida que z disminuye; porque se pueden poner bajo esta forma $x=-\frac{A}{B}z-\frac{D}{B}-\frac{F}{Bz}$ (XXI); y ya se tome z positiva ó negativa, se la podrá hacer bastante pequeña para que el término $\frac{F}{Bz}$ esceda numéricamente á $\frac{Az}{B}$; mas allá de este punto, mientras mas pequeña sea z, mayor será el valor numérico de x: en fin quando $z=0$, resultará x infinita; lo que manifiesta que las dos ramas opuestas de la curva se aproximan sin cesar al eje de las abscisas, tanto del lado de las z positivas como de las negativas, sin poder jamas encontrarla. Este eje es por consiguiente una asíntota de la curva. Al contrario, á medida que z aumente, el término $\frac{F}{Bz}$ disminuirá, y por consiguiente el valor correspondiente de x hará que la curva se aproxime mas y mas á la recta que tuviese por ecuacion $x=-\frac{A}{B}z-\frac{D}{B}$; con la cual coincidirá exactamente si z se supone infinita, lo que hace nulo el término $\frac{F}{Bz}$.

Luego esta recta será otra asíntota de la curva.

Se hallarían resultados análogos enteramente, discutiendo la ecuacion (XVIII), solo que la una asíntota sería simplemente paralela al eje de las x, en vez de confundirse con este eje. Si en vez de faltar el cuadrado x^2, faltase el término donde se halla z^2, entónces hay dos asíntotas, de las que una es paralela al eje de las z; y solo en un caso la ecuacion propuesta no representa sinó una sola recta: no pudiéndose dudar de que en este caso la curva corresponde á la tercera clase; pues que el valor $A=0$, convierte á B^2-4AC en B^2.

En fin, si los dos cuadrados x^2 y z^2 faltan á un mismo tiempo, las dos asíntotas son respectivamente paralelas á los ejes de las z y de las x; porque entónces la ecuacion se convierte en $Bxz+Dz+Ex+F=0$, y se ha visto (329) que pertenece á una hipérbola referida á ejes paralelos á las asíntotas.

§ Pasemos al caso en que las dos raices x' y x'' son iguales entre sí; éntónces el producto $(x-x')(x-x'')$ viene á ser un cuadrado $(x-x')^2$; y la (ec. XVII) da $z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{1}{2A}(x-x')\sqrt{B^2-4AC}$ (XXII).

Esta ecuacion representa entónces dos líneas rectas, que son siempre reales; pues que B^2-4AC es una cantidad positiva.

Para que los dos valores de x sean iguales, es preciso que al resolver la (ec. EE § 330) desaparezca el radical; lo que exige que

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0 \text{ (XXIII).}$$

§ Como el coeficiente de x no es el mismo en las ecuaciones de las dos rectas (XXII), se sigue que aquí no son paralelas, como se verificaba en la parábola (332).

Si quitamos el divisor en la (ec. XXII), separamos los valores, trasladamos todos los términos al primer miembro é indicamos su multiplicacion, tendrémos convertida la propuesta en

$$(2Az+Bx+D-(x-x')\sqrt{B^2-4AC})\times(2Az+Bx+D+(x-x')\sqrt{B^2-4AC})=0.$$

§ Luego se descompone en factores del primer grado, y puede quedar satisfecha igualando separadamente á cero cada uno de estos factores; y construyendo cada uno de por sí, se tendrán las dos rectas si los factores son reales.

§ Generalmente, cuando la ecuacion propuesta se halla multiplicada por factores racionales en x y en z, es necesario tener gran cuidado de discutirlos sucesivamente cada uno en particular y no simultáneamente; á causa de que, como se satisface á la ecuacion igualándolos á cero, ofrecen otras fantas soluciones que no se deben despreciar.

§ He aquí algunos ejemplos del caso precedente.

$$z^2-2x^2+2z+1=0 \text{ (fig. } Y) \quad x^2-z^2=0 \text{ (fig. } Z),$$
$$z^2+xz-2x^2+3x-1=0 \text{ (fig. } Aa).$$

§ Pasemos en fin al caso en que las dos raices x', x'' son imaginarias: entónces (§ 331) la cantidad $(x-x')(x-x'')$ permanece siempre positiva; ademas B^2-4AC es tambien positivo. Así, cualquier supuesto que se haga relativamente á x, el valor de z (ec. XVII) será siempre real, y cada abscisa dará puntos de la curva. Sin embargo, esta curva estará aun compuesta de dos ramas separadas (fig. Bb); porque cada ordenada está dividida en dos partes iguales por el diámetro, cuya ecuacion es $z=-\frac{Bx+D}{2A}$; y como el radical $\sqrt{(B^2-4AC)(x-x')(x-x'')}$ no puede jamas ser nulo, este diámetro no corta á la curva, que se estiende indefinidamente por la parte superior é inferior á él. Circunstancia que conviene exactamente al segundo eje de la hipérbola.

§ Las condiciones particulares á este caso son

$$B^2-4AC>0, \quad (BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)>0.$$

§ He aquí algunos ejemplos

$$z^2-2xz-x^2-2=0 \text{ (fig. } Cc),$$
$$z^2+2xz-x^2+2x+2z+2=0 \text{ (fig. } Dd),$$
$$z^2-xz-x^2-2x+2=0 \text{ (fig. } Ee),$$

§ Si $A=-C$ y $B=0$, la ecuacion general se convierte en

$$Az^2-Ax^2+Dz+Ex+F=0 \text{ ó } z^2-x^2+\frac{D}{A}z+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0,$$

que añadiendo y quitando $\frac{D^2}{4A^2}+\frac{E^2}{4A^2}$, se puede poner bajo la forma

$$\left(z+\frac{D}{2A}\right)^2-\left(x-\frac{E}{2A}\right)^2=\frac{D^2-E^2-4AF}{4A^2}.$$

§ En cuyo caso representa una hipérbola equilátera (285), cuyas coordenadas del centro son $-\frac{D}{2A}$, $+\frac{E}{2A}$, y cuya potencia es $\frac{D^2-E^2-4AF}{4A^2}$, que es el caso análogo del círculo en la clase de las curvas cerradas.

§ De esta discusion resulta, que las curvas del 2.º órden, en que B^2-4AC es positivo, son siempre curvas indefinidas, compuestas de dos ramas separadas; ellas comprenden como variedades dos rectas que se cortan ó que no son paralelas, y la hipérbola equilátera.

§ De todo lo cual resulta, que dada la ecuacion de una curva, se puede determinar su forma, su estension, sus límites y todas las sinuosidades de su curso; el método que hemos seguido es general, y se aplica igualmente á todas las curvas algebráicas. Por lo cual es muy útil imponerse bien á fondo en él hasta familiarizarse por medio de ejemplos.

A esto añade Mr. *Biot* (§ 295) de la 8.ª edicion de su *Ensayo de Geometría Analítica*. "Mas tambien es todo lo que es necesario retener; porque sería inútil y aun perjudicial, fijar en la memoria las condiciones particulares que tienen lugar entre los coeficientes segun los diferentes casos, y es necesario mas bien dejarse conducir naturalmente á estas condiciones por la ilacion siempre semejante de los razonamientos."

§ Con el fin de obtener todos los datos necesarios para construir la hipérbola, determinarémos como en la elipse su centro, y la direccion y longitud de dos diámetros conjugados, lo que conseguirémos sin dificultad atendiendo á la analogía que existe entre la elipse y la hipérbola.

Por el procedimiento del (§ 331) hallarémos un primer diámetro, cuya longitud será $\frac{x''-x'}{2A}\sqrt{B^2+4A^2}$; y la longitud de su conjugado, será

$$\frac{x''-x'}{2A}\sqrt{4AC-B^2}.$$

Este será imaginario, porque en la hipérbola se tiene $B^2-4AC>0$, luego si se representa la mitad de este segundo diámetro por $B'\sqrt{-1}$, y la mitad del primero por A', estos datos bastarán para construir la hipérbola; porque el ángulo de los dos diámetros es conocido. Y representándolo por ψ, se tendrá aquí como en la elipse

$$\text{sen.}\psi=\frac{2A}{\sqrt{4A^2+B^2}}.$$

Del mismo modo se podrán obtener los dos ejes de la hipérbola; porque representándolos por a y $b\sqrt{-1}$, á causa de deber ser el uno imaginario, las ecuaciones (XI′ y XI″) se convertirán en

$$ab\sqrt{-1}=\frac{(x''-x')^2}{8A}\sqrt{4AC-B^2}\ (\text{XXIV}),\quad a^2-b^2=\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C)\ (\text{XXV}).$$

Si en la (XXIV), despejamos a, tendrémos $a=\dfrac{(x''-x')^2}{8A.b\sqrt{-1}}\sqrt{4AC-B^2}$,

Sustituyendo este valor en la (XXV), resulta

$$\frac{(x''-x')^4}{64A^2.-b^2}(4AC-B^2)-b^2=\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C).$$

Multiplicando esta por $-b^2$, y trasladando, se tiene

$$b^4+\frac{(x''-x')^2}{4A}(A+C).b^2+\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(4AC-B^2)=0;$$

que considerando á b^2 como la incógnita, será (I. 253)

$$b^2=-\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C)\pm\sqrt{\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(A+C)^2-\frac{(x''-x')^4}{64A^2}(4AC-B^2)}...$$

$$=-\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C)\pm\frac{(x''-x')^2}{8A}\sqrt{A^2+2AC+C^2-4AC+B^2}....$$

$$=-\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}).$$

Sustituyendo este valor en la (ec. XXV), se tiene

$$a^2+\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2})=\frac{(x''-x')^2}{8A}(2A+2C);$$

que da $a^2=\dfrac{(x''-x')^2}{8A}(2A+2C)-\dfrac{(x''-x')^2}{8A}(A+C\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2})...$

$$=\frac{(x''-x')^2}{8A}(A+C\mp\sqrt{B^2+(A-C)^2}).$$

Conocidos por estas ecuaciones los valores de a^2 y de b^2; estrayendo la raiz cuadrada, y duplicando, se tendrán los ejes enteros $2a$ y $2b$.

Concluirémos este asunto, manifestando que la ecuacion

$$Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0,$$

que representa todas las curvas de segundo grado, se puede referir á una forma mas sencilla sin disminuir en nada su generalidad, por medio de la transformacion de las coordenadas.

En efecto, si en vez de x y z, sustituimos los valores [(e)§ 197] $x'+a$, $z'+b$, se nos convertirá en otra que tendrá esta forma

$$lx'^2+mz'^2+nx'z'+\tilde{n}x'+oz'+p=0\ (k);$$

y determinando las cantidades a y b por la condicion de que desaparezcan los términos $\tilde{n}x'$ y oz', no tendrémos mas que igualar á cero lo que representan las letras $\tilde{n}$ y o; y entónces, quedará reducida la ecuacion anterior á

$$lx'^2+mz'^2+nx'z'+p=0.$$

Aun podemos reducir la ecuacion general de segundo grado á otra mas sencilla todavía; pues si en vez de x y z sustituimos los valores (m) del (§ 200), podrémos determinar las tres constantes a, b y sen.α (pues la otra queda determinada por la ecuacion $\cos.\alpha=\sqrt{1-\text{sen.}^2\alpha}$), de modo que la ecuacion (k), satisfaga á tres condiciones; y si suponemos que estas sean el que desaparezcan los términos $nx'z'$, $\tilde{n}x'$ y oz', quedará reducida la ecuacion á $lx'^2+mz'^2+p=0$; y si las determinamos de modo que desapareciesen los términos $nx'z'$, oz' y p se reduciría á $l'x'^2+m'z'^2+\tilde{n}'x'=0$; ó dividiendo por m', á

$$z'^2+\frac{l'}{m'}x'^2+\frac{\tilde{n}'}{m'}x'=0, \text{ ó haciendo } \frac{l'}{m'}=-m \text{ y } \frac{\tilde{n}'}{m'}=-n, \text{ se reducirá por}$$

último, prescindiendo de los acentos de las coordenadas á $z^2=mx^2+nx$. De manera, que cualquiera de estas ecuaciones comprende á todas las curvas de segundo grado.

De los lugares geométricos, de la resolucion de algunos problemas, y de la construccion de otras curvas, tanto algebráicas como trascendentes.

334 Los antiguos daban el nombre de *lugares geométricos* á aquellas líneas, ya fuesen rectas, ya curvas, de las que cada punto era igualmente propio para resolver un problema indeterminado; y en la actualidad se ha estendido esta denominacion á *un punto ó un conjunto de puntos, por los cuales se resuelve una cuestion de Geometría*; ó en otros términos, *á un punto ó á un conjunto de puntos, cuyas distancias á puntos, lineas ó superficies fijas, satisfacen á cualesquiera relaciones dadas entre constantes y variables, que ellas mismas espresan distancias, superficies ó volúmenes.*

Si nos proponemos por ejemplo *construir sobre una recta dada un triángulo de una magnitud ó superficie dada*, este problema es indeterminado; porque sobre la recta AB (fig. 122) se pueden describir cuantos triángulos iguales en superficie se deséen, que sean todos de la magnitud dada, tomando el vértice á distancia igual de la base comun AB; y darán de este modo una infinidad de resoluciones. Como todos estos triángulos iguales en superficie AcB, ACB, Ac'B, tienen sus vértices c, C, c', *etc.* sobre una misma recta cCc' paralela con AB (I. 386a cor. 2º), esta recta cCc' es lo que se llama el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos iguales en superficie con el ACB, descritos sobre la base AB.

Igualmente, si se pidiese *describir un triángulo rectángulo sobre la hipotenusa dada* DE, se propone un problema indeterminado. Por-

que la circunferencia DFE (fig. 123) descrita sobre el diámetro DE, tiene esta propiedad: que si desde uno cualquiera de sus puntos F, se tiran dos rectas FD, FE, á los dos estremos del diámetro DE, estas rectas formarán con el diámetro un triángulo rectángulo. Luego la circunferencia DFE es el lugar geométrico de los vértices de todos los triángulos rectángulos que se pueden describir sobre la hipotenusa dada.

335 Como despues que Descartes aplicó el Álgebra á la Geometría, todas las cuestiones se reducen á ecuaciones, *se llama lugar geométrico de una ecuacion á la figura que se construye por puntos por medio de ella.*

Así, el lugar de la ecuacion $x=a$ es un punto tomado á la distancia a, de un punto fijo, sobre una línea recta ó curva; sobre una superficie plana ó curva; del mismo modo, el círculo (fig. 83) es el lugar de la ecuacion $z^2=2ax-x^2=10x-x^2$;
la elipse (fig. 85) es el lugar de la ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$;

la parábola (fig. 93) es el lugar de la ecuacion $z^2=px$; y la hipérbola (fig. 102) es el lugar de la ecuacion $z^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$.

Cuando las cuestiones ó las ecuaciones son determinadas, entónces se resuelven por la interseccion de las curvas; pero en la eleccion de estas, advierte Descartes al principio del 3.er libro de su Geometría, se ha de tener presente el que se elijan las mas simples que puedan conducir al resultado; y nota que por mas simples, no solo se deben entender aquellas que se pueden describir con mas facilidad, y que hacen mas fácil la construccion y la demostracion del problema propuesto; sinó principalmente las que son del género mas sencillo que pueden servir para determinar la cantidad buscada.

Propongámonos resolver el famoso problema de la duplicacion del cubo (*). La cuestion está reducida á formar un cubo que esté con

---

(*) Había en Grecia una antigua tradicion de que los Atenienses habiendo irritado á Apolo, había embiado este una peste á su pais; y que habiendo consultado al oráculo del templo de Délos acerca de los medios de hacer cesar la peste, había respondido: *Duplicad el altar de Apolo.* El oráculo quería dar á entender con esto un pequeño altar de oro de forma cúbica, que Apolo tenía en Atenas, y de que él no estaba sin duda contento. Por esta causa se propuso este problema á todos los Geómetras de la Grecia, y ha llegado á formar el asunto de casi todos los Geómetras posteriores; y en la nota del (§ 508) y en el § 580 de nuestra Geometría, ó Tomo 1.° parte 2.ª, nos ocupamos tambien de la resolucion de este problema.

otro en la razon de 2 á 1, que es un caso particular de esta; *Dado un cubo, hallar otro que esté con él en una razon dada v. g. de* a:b

Si llamamos m al lado del cubo dado, y hallamos la cantidad que con él tenga la razon de $a:b$, será $a:b::m:\frac{mb}{a}=n$.

Por consiguiente, la razon dada podrémos hacer que sea la de $m:n$, siendo m el lado del cubo dado; y llamando x al lado del cubo que se pide, tendrémos por el supuesto

$m^3:x^3::m:n$, de donde $m^3n=mx^3$ ó $x^3=m^2n$.

La proporcion $m^3:x^3::m:n$ manifiesta que x debe ser el 2º término de una progresion, cuyo 1.er término es m y el cuarto n, ó lo que es lo mismo, es la primera de dos líneas medias proporcionales entre las dos cantidades que espresan la razon propuesta; llamando z á la otra media proporcional, será $\div\div m:x:z$, lo que da $x^2=mz$, y sustituyendo en vez de x^2 su igual mz en la ecuacion

$x^3=m^2n$ ó $x\times x^2=m^2n$, será $x\times mz=m^2n$ ó $zx=mn$.

Por consiguiente, construyendo estas dos ecuaciones, el punto que corresponda á su seccion comun resolverá la cuestion.

Para conseguirlo, tirarémos las AC, AQ (fig. 124) de manera que formen un ángulo cualquiera, que supondrémos recto para mayor sencillez. Tomarémos en la primera una parte $AC=m$, y con esta línea por parámetro, siendo AQ el eje, trazarémos la parábola ATM. Tomarémos en la otra recta la $AB=n$, y concluido el paralelogramo ACDB, trazarémos entre las asíntotas AQ, AC la hipérbola MD que pase por el punto D.

Estas dos curvas no pueden encontrarse sinó en el punto M, porque las ramas de la hipérbola DM se van acercando cada vez mas á las asíntotas AC, AQ, y la ATM de la parábola, que está en el ángulo de dichas asíntotas, se vá separando; las coordenadas correspondientes á dicho punto son las dos medias proporcionales, á saber, AP ó MQ, la 1ª x de las dos medias. En efecto, por la naturaleza de la parábola se tiene $QM^2=AC\times AQ$; pero por la naturaleza de la hipérbola DM, será $QM(MP=AQ)=AC\times CD$, de donde $AQ=\frac{AC\times CD}{QM}$;

luego sustituyendo este valor en el de QM^2 será

$$QM^2=\frac{AC\times AC\times CD}{QM},\ \text{ó}\ QM^3=AC^2\times CD=m^2n;$$

pero $x^3=m^2n$, luego $QM^3=x^3$ ó $QM=x$, luego QM es la 1ª de las dos medias proporcionales, ó el lado del cubo que se quería formar. En el caso de la duplicacion del cubo, se tendría $m=1$ y $n=2$.

336 Desde la antigüedad se puso mucho cuidado en la resolucion

de este problema de la duplicacion del cubo ó de las dos medias proporcionales. Nicomédes inventó una curva por medio de la cual se consigue esto con mucha facilidad, y es la que se conoce con el nombre de *Conchoide de Nicomédes*, cuya construccion es la siguiente.

Concíbase que la recta indefinida BAD (fig. 125) se mueva alrededor del punto B, de manera que la parte interceptada entre la recta HAG, que tambien suponemos indefinida, sea siempre igual á una recta dada a; la curva MDM′, que pase por todos estos puntos sobre la HAG, se llama *conchoide superior*; la *mdm′ conchoide inferior*; el punto B el *polo*, y la HAG la *directriz*. La conchoide superior siempre tiene la misma forma; la inferior tiene la forma que se presenta en esta figura, cuando la recta dada a es menor que la distancia BA del polo á la directriz; cuando es igual, tiene la forma que se ve en la (fig. 126); y cuando es mayor, la que se vé en la (fig. 127).

Para sacar la ecuacion de esta curva, tirarémos la MP perpendicular á AH (fig. 125), y harémos

$$AD=QM=a,\ AB=b,\ PM=z,\ AP=x,$$

con lo que del triángulo rectángulo PQM sacarémos

$$PQ=\sqrt{a^2-z^2},\ \text{y}\ AQ=AP-QP=x-\sqrt{a^2-z^2}.$$

Sentado esto, los triángulos semejantes BAQ, QPM darán

$$BA:AQ::MP:PQ,\ \text{ó}\ b:x-\sqrt{a^2-z^2}::z:\sqrt{a^2-z^2};$$

multiplicando estremos y medios, saldrá

$$xz-z\sqrt{a^2-z^2}=b\sqrt{a^2-z^2};$$

trasladando á un solo miembro todo lo que está multiplicado por el radical y reduciendo, saldrá $xz=(b+z)\sqrt{a^2-z^2}$,
y cuadrando será $z^2x^2=(b+z)^2(a^2-z^2)$.

En esta ecuacion está comprendida la de la conchoide inferior, siempre que se haga z negativa por caer debajo de la directriz HAG, lo que da $x^2z^2=(b-z)^2(a^2-z^2)$.

De esta curva se vale Pappus en sus colecciones matemáticas, para resolver el problema de la duplicacion del cubo ó de las dos medias proporcionales.

337 Aun nos propondrémos sacar las ecuaciones de algunas otras curvas, y sea:

1º Cifrar en una ecuacion la curva ADHd (fig. 128), cuya naturaleza es la siguiente: *Trazado el círculo* AHBM, *y tirada la tangente indefinida* BG, *tírense desde el punto* A *á esta tangente todas las rectas que se quieran* AG, AL, Ag, *etc.*; *tómese en cada una de ellas una parte desde el punto* A *igual con la parte comprendida entre la semicircunferencia y la tangente, esto es, hágase* AD=GF, AH=LH, Ad=gf, etc. *y la curva que pase por los puntos* D, H, d, etc. *será la* cisoide *de Diócles.*

Para encontrar su ecuacion, tirarémos desde uno cualquiera de sus puntos tal como D, la perpendicular DC á AB, y desde el punto F donde la ADG corta á la circunferencia, la FE tambien perpendicular con AB; con lo que será AC=EB (I. § 47²).

Sentado esto, tomando el diámetro AB por eje de la cisoide, A será su vértice; AC, AE las abscisas, y las ordenadas CD, E*d*. Si hacemos al eje AB=a, á las abscisas, iguales con x, y á las ordenadas con z, tendrémos AE=AB—EB=AB—AC=$a-x$,

y $EF^2=AE\times EB=x(a-x)=ax-x^2$; por lo que $EF=\sqrt{ax-x^2}$.

Los triángulos semejantes ACD, AEF dan

$$AC:CD::AE:EF \text{ ó } x:z::a-x:\sqrt{ax-x^2},$$

lo que, multiplicando estremos y medios, da $z(a-x)=x\sqrt{ax-x^2}$; cuadrando ambos miembros resultará

$$z^2(a-x)^2=x^2(ax-x^2)=ax^3-x^4=x^3(a-x);$$

y dividiéndolos por $a-x$, sacarémos $x^3=z^2(a-x)$ ó $z^2=\frac{x^3}{a-x}$ que será la ecuacion de la *cisoide*.

2º Hallar la ecuacion de la curva AMNAOAQARA (fig. 129), cuya construccion es la siguiente: *Descrito el círculo* BNRQO *con un radio* AB=a, *todos los puntos de dicha curva se determinan tirando un radio cualquiera, y tomando sobre este radio la parte* AM *igual al seno* DE *del arco* BCD *duplo del arco* BC, *comprendido entre el radio* AC *y el radio* AB *dado de posicion.*

Bájese desde un punto cualquiera M la ordenada MP, que llamarémos z; con lo que, llamando x á la abscisa AP, será $AM=\sqrt{z^2+x^2}$. Los triángulos AMP, AFB semejantes, á causa de ser rectángulos y tener el ángulo A comun, dan

$$AM=\sqrt{z^2+x^2}:MP=z::AB=a:BF=\frac{az}{\sqrt{z^2+x^2}},$$

y $$AM=\sqrt{z^2+x^2}:AP=x::AB=a:AF=\frac{ax}{\sqrt{z^2+x^2}};$$

y los triángulos ABF, BDE semejantes, á causa del ángulo comun B y de los ángulos rectos F, E, dan

$$AB=a:AF=\frac{ax}{\sqrt{z^2+x^2}}::BD=2BF=\frac{2az}{\sqrt{z^2+x^2}}:DE=\ldots.$$

AM (por construccion) $=\sqrt{x^2+z^2}$,

luego multiplicando estremos y medios, será

$$a\sqrt{x^2+z^2}=\frac{2a^2xz}{x^2+z^2} \text{ ó } (x^2+z^2)\sqrt{x^2+z^2}=2axz,$$

y cuadrando se tendrá $x^6+3x^4z^2+3x^2z^4+z^6=4a^2x^2z^2$,
que es la ecuacion de la curva pedida.

3º Hallar la ecuacion de la curva (fig. 130), cuya construccion es la siguiente:

Habiendo descrito con un parámetro $=a$, *la parábola* NCN', *cuyo eje de abscisas sea* CQ, *se tomará sobre esta curva el punto* A *cuya abscisa* CB *sea igual con* a, *lo que dará tambien la ordenada* BA$=a$, *por ser la ordenada media proporcional entre la abscisa y el parámetro*; *tomando por orígen este punto* A, *se tirará el eje* PA*p paralelo á* CB, *se tomarán de una y otra parte las* MP, *mp que sean medias proporcionales entre* AP *y* PN *ó* A*p*, *y pn*, *y los puntos* M, *m serán puntos de la curva.*

Por la parte de abajo de A no se pueden trazar mas de dos ramas iguales, porque habiendo considerado como positivas las AP, PN, la PN' sería negativa, y entre una cantidad positiva y una negativa, no se puede hallar media proporcional. Por la parte de arriba de A, como A*p*, *pn*, serán ambas negativas, así como A*p*, *pn'*, resultará que tomando hacia cada lado de *p* dos rectas que sean medias proporcionales entre A*p* y *pn'*, y entre A*p* y *pn*, tendrémos por arriba cuatro ramas que forman las dos hojas que presenta la figura.

Esta construccion da

$$AP=z=BQ,\quad CQ=CB+BQ=a+z \text{ y } PN=NQ-QP=NQ-a;$$

y por la naturaleza de la parábola $QN=\sqrt{a\times CQ}=\pm\sqrt{a^2+az}$;

lo que dá $PN=-a\pm\sqrt{a^2+az}$;

y así $PM=x$, (media proporcional entre AP y PN) es $=$.....

$$\pm\sqrt{-az\pm z\sqrt{a^2+az}},$$

que elevando al cuadrado, será

$$x^2=-az\pm z\sqrt{a^2+az},\quad \text{ó}\quad x^2+az=\pm z\sqrt{a^2+az},$$

ó elevando al cuadrado $x^4+2ax^2z+a^2z^2=a^2z^2+az^3$,

ó finalmente $x^4+2ax^2z-az^3=0$,

que es la ecuacion de la curva pedida; á esta curva le suelen llamar el *lazo*.

338 Hasta aquí no hemos tratado sinó de las curvas algebráicas; vamos ahora á cifrar en ecuacion la naturaleza de algunas curvas trascendentes, y empezarémos por la *cuadratriz de Dinostrátes*, cuya construccion es la siguiente.

Dado el cuadrante de círculo ADC (fig. 131) *y la tangente* AH, *se le hace dar al radio* AB *la vuelta alrededor del centro* B *andando en tiempos iguales arcos iguales de la circunferencia* ADC; *si al mismo tiempo concebimos que la* AH *baja á lo largo del radio, manteniéndose constantemente paralela á sí misma, y andando tambien en tiem-*

pos iguales porciones iguales del radio, de modo que en el tiempo en que AH *anda la 4.ª parte del radio* AB, *el radio* AB *ande la 4.ª parte del cuadrante* ADC, y *llegan la recta* AH *y el radio* AB *á confundirse ambas á un tiempo con la* BC; *la interseccion contínua* E, E′, *etc. de la recta* AH *con el radio* AB, *á medida que este da la vuelta, engendrará la curva* AEF, *que se llama cuadratriz de Dinostrátes.*

Para sacar su ecuacion, llamarémos *a* al cuadrante ADC, *b* al radio AB, *x* á las abscisas AG, AG′, etc., *z* á los arcos correspondientes AD, AD′, etc. del círculo. Sentado esto, la construccion de la curva da ADC:AB::AD:AG ó $a:b::z:x$, que da $ax=bz$ ó $z=\frac{ax}{b}$, que es la ecuacion de la *cuadratriz*.

Esta curva es trascendente, porque en su ecuacion entran arcos de círculo.

339 Hallar la ecuacion de la *Espiral de* Arquimédes, cuya propiedad es la siguiente: *Si se concibe que el radio* Aa (fig. 132) *se mueve alrededor del centro* a, *y que mientras dicho radio da una vuelta completa ó anda toda la circunferencia, su estremo* a *ande todo el radio* Aa, *corriendo ambos espacios iguales en tiempos iguales, el camino* abcdA, *se llama la primera espiral de Arquimédes.*

Para trazar la segunda A*ghi*F sería necesario suponer que el punto *a*, despues de haber llegado á A, prosiga audando la recta AF=*a*A del radio prolongado, mientras que el nuevo radio anda la circunferencia del segundo círculo FGHL concéntrico con el primero, andando siempre partes iguales en tiempos iguales. Y como se puede prolongar el radio *a*F, tanto como se quiera, se pueden trazar tantas espirales como se desée, y se pueden considerar como la continuacion de una sola curva.

Para encontrar la ecuacion de la 1ª espiral, perteneciente á uno cualquiera de sus puntos *c*, señalarémos con *a* á la circunferencia del 1.er círculo dado ABCD, y con *b* al radio *a*A; tomarémos por abscisa *x* al arco indeterminado ABC, y llamarémos *z* á la ordenada *ac*. Sentado esto, como han de andar en tiempos iguales espacios iguales, resulta que ha de haber la misma razon entre toda la circunferencia *a* del círculo y el arco ABC=*x*, que entre el radio *b* y su porcion *ac*=*z*; luego será $a:x::b:z$, de donde $az=bx$ ó $z=\frac{bx}{a}$.

La misma ecuacion sacaríamos respecto de otra espiral A*ghi*F con llamar *a* á la circunferencia de su círculo FGHI; *b* á la recta AF; *x* á un arco cualquiera FG del círculo, y *z* á la porcion correspondiente *ag* del radio.

Si espresamos $\frac{b}{a}$ por *A*, tendrémos que la ecuacion de la es-

::

piral de Arquimédes se convertirá en $z=Ax$, que podemos considerar como madre de la numerosa familia de las espirales comprendidas en la ecuacion $z=Ax^n$.

Cuando se hace $n=-1$, resulta $z=Ax^{-1}=\frac{A}{x}$ ó $zx=A$,

ecuacion que pertenece á la que se conoce con el nombre de *espiral hiperbólica*.

Si en vez de la distancia ac, tomásemos para z la parte Cc, comprendida entre el punto c y la circunferencia del círculo ABCD, la ecuacion $z^2=Ax$ correspondería á la curva que se conoce con el nombre de *espiral parabólica*, que se puede concebir originada de aplicar el eje de una parábola á la circunferencia ABCD; entónces las ordenadas son prependiculares á la circunferencia del círculo y se confunden con sus radios.

Terminarémos nuestras investigaciones sobre la teoría de las curvas, desvaneciendo una contradiccion, que resulta en la apariencia, de dos proposiciones que hemos sentado (205); y es la siguiente.

Hemos dicho que una línea del órden n queda determinada cuando se dan conocidos $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ puntos por donde deba pasar; y que dos líneas la una del órden n y la otra del órden m, se pueden encontrar en mn puntos. De donde se deduce que para determinar una línea del 4.º órden se necesitarán 14 puntos; y por consiguiente dos líneas del 4.º órden no pueden pasar por más de 14 puntos; porque si catorce son suficientes para carecterizar á una de ellas, de modo que no se pueda confundir con ninguna otra, con ménos razon podrán pasar dos curvas del mismo órden por mas de 14 puntos. Pero, en virtod de la segunda proposicion, dos líneas de 4.º órden se pueden cortar en $4\times4=16$ puntos; luegó pueden pasar dos líneas de 4.º órden por mas de 14 puntos; consecuencia contradictoria con la que hemos deducido de la primera proposicion; luego es indispensable que alguna de estas proposiciones ó las consecuencias que hemos deducido de ellas no sean legítimas; y como los Matemáticos se lisonjéan con razon de que todo lo que forma el objeto de sus meditaciones está caracterizado con el sello dé la evidencia, y que está exento de objeciones, aclararémos este punto, aunque sea uno de aquellos que no han formado hasta ahora parte de los libros elementales.

Si se reflexiona bien el objeto con que hemos enunciado dichas proposiciones, se advertirá que mas bien ha sido con el de presentar bajo un punto de vista todo lo que debe formar el asunto de las investigaciones de los Geómetras, en la teoría de las curvas, que el de manifestar toda la teoría, porque esto no se puede ni debe hacer en unos elementos; por lo cual nos detendrémos en examinar las dos proposiciones que conducen á la contradiccion enunciada.

Principiemos por la segunda, y supongamos que se tengan dos curvas, la una del órden n, cuyas coordenadas señalarémas con x, z; y otra del órden m cuyas coordenadas sean X, Z; las cuales tendrán por ecuaciones

$$az^n+z^{n-1}(b+cx)+z^{n-2}(d+ex+fx^2)+\text{etc.}=0$$
$$AZ^m+Z^{m-1}(B+Cx)+Z^{m-2}(D+Ex+Fx^2)+\text{etc.}=0.$$

Ahora, suponiendo que estén referidas á unos mismos ejes, deberán tener en

los puntos de interseccion unas mismas coordenadas; luego en dichos puntos será

$$x=X, \text{ y } z=Z,$$

por lo que las dos ecuaciones anteriores se convertirán en

$$az^n+z^{n-1}(b+cx)+z^{n-2}(d+ex+fx^2)+\text{etc.}=0,$$
$$Az^m+z^{m-1}(B+Cx)+z^{m-2}(D+Ex+Fx^2)+\text{etc.}=0.$$

Luego solo tendrémos que despejar z y x; y tantos como sean los valores de estas variables que satisfagan á dichas ecuaciones, tantos podrán ser los puntos de interseccion. Este despejo no se puede hacer en general; pero lo que si se prede manifestar en general, es que si por medio de estas ecuaciones, se elimina una de las variables, por ejemplo la x, resultará una ecuacion en z, que lo mas que podrá ascender será al grado mn; luego podrá haber mn valores de z que satisfagan á dichas ecuaciones, y por lo mismo podrá haber mn puntos de interseccion. La demostracion de esta proposicion la ponemos por digresion (394); y como las razones que allí damos son independientes de la teoría de las curvas, aunque colocamos despues aquella digresion, resulta demostrada nuestra 2.ª proposicin sin que se pueda sospechar incurrir en círculo vicioso.

Las consecuencias que se deducen de esta proposicion tambien están bien deducidas; porque teniendo dichas curvas en los demas puntos diversas coordenadas serán las curvas diferentes, y por lo mismo dos curvas diferentes se podrán cortar en mn puntos; y si son ambas del órden n en n^2 puntos. Luego solo se deberá añadir alguna restriccion á la primera proposicion ó á las consecuencias que se deducen de ella; pero en estas no se puede sospechar ningun paralogismo, porque si 14 puntos determinan una línea de cuarto órden, de manera que no pueda convenir esta propiedad sinó á ella sola, se deduce que por 14 puntos no pueden pasar dos líneas del cuarto órden, ni por $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ puntos dos líneas del órden n, y con mas razon no podrán pasar dos líneas de estos órdenes por mas puntos que estos; luego solo falta examinar la primera proposicion.

En efecto, reflexionando bien sobre el estado de dicha proposicion, notarémos que puede haber casos en que $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ puntos dados no sean suficientes para determinar una línea del órden n; porque la razon en que nos fundamos para establecer dicha proposicion era que, por cada punto que se nos diese, podríamos sustituir sus coordenadas en la ecuacion de la curva, y tendríamos tantas ecuaciones como puntos se nos diesen; y como en la ecuacion primítiva no había mas coeficientes indeterminados que $\frac{1}{2}(n^2+3n)$, este número de ecuaciones sería suficiente para determinarlos, y por consiguiente sustituidos sus valores en la ecuacion primitiva, quedaría de todo punto determinada, y no podría convenir sinó á una sola curva. Pero, cuando se dice en Álgebra que un número m de ecuaciones basta para determinar m incógnitas que se hallasen en ellas, se sobreentiende que *dichas ecuaciones han de ser diferentes entre sí*, esto es, que no han de ser idénticas, ni se deben deducir las unas de las otras por operaciones algebráicas; porque estas dos ecuaciones, por ejemplo, $4x-3z=6$ y $12z=16x-24$, no serían suficientes para determinar la x y la z, puesto que la segunda se deduce de la primera cuadruplicándola y trasladando los términos, lo que nos manifiesta dicho despejo; pues si el valor de z, que se saca de la primera, lo sustituimos en la segunda, se nos convierte en $16x-24=16x-24$, que, por ser idéntica, no puede servir para determinar la x. Luego, si los puntos estuviesen situados de tal modo que entre las ecuaciones que resultasen hubiese algunas que

fuesen idénticas entre si, ó que se deduzcan las unas de las otras por operaciones algebráicas, el número $\frac{1}{2}(n^2+3n)$ de ecuaciones no bastaría para determinar otros tantos coeficientes; por lo cual quedando algunos indeterminados, podrían pasar por los puntos dados tantas curvas como se desease; luego en este caso se deberían dar aun mas puntos para la determinacion de dicha línea.

Para dar un ejemplo de esto, supongamos que se tenga la ecuacion general de segundo grado $A'z^2+B'xz+C'x^2+D'z+E'x+F'=0$, que dividiendo por A' y haciendo $\frac{B'}{A'}=A$, $\frac{C'}{A'}=B$, etc. se convertirá en

$$z^2+Axz+Bx^2+Cz+Dx+E=0;$$

y supongamos que se den cinco puntos para determinar esta línea.

Puesto que la eleccion de los ejes es arbitraria, supondrémos pasa abreviar el cálculo, que se tome por eje de abscisas una recta que pase por dos de estos puntos, y por eje de ordenadas otra recta que pase por uno de estos puntos y por otro punto de los dados.

Luego si suponemos que las coordenadas del 1.º sean $x=0$, $z=0$; las del 2.º $x=a$, $z=0$; las del 3.º $x=0$, $z=b$; las del 4.º $x=c$, $z=d$, y las del 5.º $x=e$, $z=f$, tendrémos las cinco ecuaciones siguientes:

$$E=0,\ Ba^2+Da+E=0,\ b^2+Cb+E=0,$$
$$d^2+Adc+Bc^2+Cd+Dc+E=0,$$
$$f^2+Afe+Be^2+Cf+De+E=0,$$

que servirán para determinar las cinco indeterminadas A, B, C, D, E, que entran en la ecuacion de la curva; pero si suponemos $d=0$ y $f=0$, lo que supone que el 4.º y el 5.º punto se hallen tambien en la recta que se ha tomado por eje de abscisas, dichas ecuaciones se convertirán en

$$E=0,\ Ba^2+Da+E=0,\ b^2+Cb+E=0,$$
$$Bc^2+Dc+E=0,\ Be^2+De+E=0,$$

las cuales no conteniendo la A, no podrán servir para determinarla; y por lo mismo quedará indeterminada; y podrá haber tantas curvas que pasen por los 5 puntos dados como valores se den á A. Para dar á conocer lo que significa esto, observarémos que como las líneas de 2.º órden comprenden á dos rectas, cuando cuatro de los puntos dados estén en línea recta, que es la circunstancia que espresan los supuestos hechos, la recta que pase por estos cuatro puntos, formará parte de la línea de 2.º órden, y la otra recta deberá pasar por el otro punto; y no habiendo otra circunstancia para determinarla, satisfarán á las condiciones dadas todas las rectas que pasen por dicho punto.

DIGRESION en que se determinan las relaciones que deben existir entre los coeficientes de la ecuacion general de segundo grado, para que represente: 1.º *un lugar geométrico imaginario;* 2.º *un punto;* 3.º *dos rectas, sean ó no paralelas, ó que se confundan en una sola; discusion de algunas ecuaciones, cuyos lugares geométricos son puntos aislados; y determinacion de los centros, diámetros y asíntotas de las curvas.*

{ 339*a* Los progresos que ha hecho la Geometría Analítica de medio siglo á esta parte, son de tal importancia y trascendencia para los adelantamientos de los

demas tratados de las Matemáticas, y principalmente para los de la Mecánica y Astronomía, que merecen todavia fijar nuestra consideracion. Al esponer su doctrina, hemos procurado conciliar la exactitud y claridad con el espíritu de investigacion, que ha de conducir á nuevos adelantos. Así es, que tanto al ocuparnos de las secciones del cono, como de las líneas de 2.º órden que coinciden con dichas secciones, hemos dado á conocer, como casos particulares, el *punto*, la *recta* y dos *rectas*, y las secciones que resultan *imaginarias*. Mas como entónces lo que nos importaba era el instruirnos acerca de las curvas de 2.º grado, no nos detuvimos sinó en dar á conocer dichos casos particulares, como conexionados con aquella doctrina; y por lo mismo, vamos á ocuparnos ahora esclusivamente de dichos casos; porque son dignos de fijar nuestra consideracion, para enlazar los conocimientos y preparar nuevos progresos.

§ 339*b* Principiarémos dando á conocer que para que la ecuacion general de segundo grado entre dos variables no pertenezca á curva ni recta, ni punto de ninguna especie, es necesario que ningun valor real de la abscisa x, pueda suministrar ningun valor real para la ordenada z; lo cual se verificará cuando estando reducida á cero, todos los términos del primer miembro sean cantidades positivas; como por ejemplo, si fuesen términos cuadrados, ó mas generalmente potencias pares de cualesquiera cantidades, como se verifica en la ecuacion

$$(z+ax+b)^2+c^2(x+d)^2+e^2=0 \quad (\alpha);$$

que, efectuando las operaciones, y ordenando, se tiene

$$z^2+2axz+(a^2+c^2)x^2+2bz+(2ab+2c^2d)x+b^2+d^2c^2+e^2=0 \quad (\alpha').$$

§ Dividiendo por A la ecuacion general [(DD)§ 325], resulta

$$z^2+\frac{B}{A}xz+\frac{Cx^2}{A}+\frac{D}{A}z+\frac{E}{A}x+\frac{F}{A}=0 \quad (6)$$

§ Estas dos ecuaciones (α') y (6) serán idénticas si todos sus términos son de todo punto iguales; ó si como hemos manifestado (326) no se diferencian los coeficientes de sus términos sinó en un factor comun á todos los términos de ellas. Allí hemos manifestado la identidad de dos ecuaciones en el caso de la existencia del factor comun; y en las investigaciones que ahora nos proponemos, lo haremos igualando los coeficientes de las mismas potencias de las variables en estas dos ecuaciones, y así tendrémos

$$\frac{B}{A}=2a \ (1); \quad \frac{C}{A}=a^2+c^2 \ (2); \quad \frac{D}{A}=2b \ (3); \quad \frac{E}{A}=2(ab+c^2d) \ (4);$$

$$\text{y} \quad \frac{F}{A}=b^2+c^2d^2+e^2 \ (5).$$

§ Con estas cinco ecuaciones, deberémos determinar las cindo cantidades a, b, c, d, e que contienen las ecuaciones (α) y (α'), que nosotros hemos introducido para simbolizar, que la curva sea imaginaria.

La (ec. 1) da $\frac{B}{2A}=a$, y sustituyendo en la (2), tendrémos

$C=A\left(\frac{B^2}{4A^2}+c^2\right)$; que da $c^2=\frac{4AC-B^2}{4A^2}$.

§ Pero siendo c^2 un cuadrado, debe ser positivo; luego $4AC-B^2$ para que la ecuacion (6) sea imaginaria, debe ser positiva ó >0; ó $B^2-4AC<0$; pero, este es caso de la elipse (§ 329); luego *el caso en que la curva de segundo grado es imaginaria es un caso particular de la elipse;* lo que va conforme con lo manifestado (331).

§ De la (ec. 3) se saca $b=\frac{D}{2A}$, ó multiplicando esta ecuacion por la $a=\frac{B}{2A}$, se tendrá $ba=\frac{BD}{4A^2}$.

§ Sustituyendo estos valores en la (4), resulta

$$\frac{E}{A}=2\left(\frac{BD}{4A^2}+\frac{4AC-B^2}{4A^2}.d\right);\quad \text{que da}\quad d=\frac{BD-2AE}{B^2-4AC}.$$

Y haciendo la sustitucion en la (ec. 5), simplificando y despejando e^2, se tiene $e^2=\frac{(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)}{4A^2(B^2-4AC)}$.

§ Y como e^2 es un cuadrado, será esencialmente positivo; luego el segundo miembro tambien deberá ser positivo; y como el denominador es negativo, á causa de que se tiene en la elipse $B^2-4AC<0$, resulta que el numerador tambien deberá ser negativo; y se tendrá

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)<0;$$

que es la condicion que obtuvimos (331) para el mismo caso por otro método.

§ 339*c* Para obtener el segundo caso de imposibilidad, basta hacer $c=0$; porque entónces la (ec. α) se reduce á $(z+ax+b)^2+e^2=0$; y en este supuesto, el valor sacado para c^2 será igual con cero; y se tendrá $\frac{4AC-B^2}{4A^2}=0$, que da $4AC-B^2=0$, ó $B^2-4AC=0$; lo que manifiesta, *que en el caso de la parábola se puede tambien encontrar lugar imaginario.*

§ Siendo c nulo, queda d por determinar; luego la segunda condicion es que el valor de d resulte indeterminado; pero, el valor de su espresion tiene *cero* por denominador; luego para que d quede indeterminada, deberá ser tambien *cero* el numerador; luego la segunda condicion es que $BD-2AE=0$; en cuyo caso la (ec. 5) se convierte en $\frac{F}{A}=b^2+e^2$, que da

$$e^2=\frac{F}{A}-b^2=\frac{F}{A}-\frac{D^2}{4A^2}=\frac{4AF-D^2}{4A^2};$$

y como e^2 es un cuadrado, su espresion deberá ser positiva; por lo que se deberá tener $4AF-D^2>0$, ó $D^2-4AF<0$; que es la tercera condicion; y es la misma que ya hemos deducido (332).

§ 339*d* 2.º Para que la ecuacion general represente un punto, es necesario que se reduzca á la suma nula de dos cuadrados, que ambos contengan á las variables que hacen de coordenadas, y que tenga por ejemplo la forma

$$(z+ax+b)^2+e^2(x+d)^2=0\ (\alpha'');$$

porque su primer miembro no podrá reducirse á cero, sinó se verifican las dos ecuaciones simultáneas $z+ax+b=0$, y $x+d=0$.

§ Estas ecuaciones son las de dos rectas; luego el punto comun á estas dos rectas será el lugar de la ecuacion.

§ Para identificar la (ec. α'') con la ($\mathcal{C}$), no tenemos mas que desarrollarla, é igualar los coeficientes de unas mismas potencias de las variables; lo que nos dará

$$z^2+2axz+x^2(a^2+c^2)+2bz+(2ab+2c^2d)x+c^2d^2+b^2=0\ ;$$

$$\frac{B}{A}=2a\ (1);\quad \frac{C}{A}=a^2+c^2\ (2),\quad \frac{D}{A}=2b\ (3);$$

$$\frac{E}{A}=2ab+2c^2d\ (4);\quad \frac{F}{A}=b^2+c^2d^2\ (5).$$

§ Las cuales no difieren de las que hemos obtenido precedentemente sinó en que e^2 es nulo; y siguiendo el mismo método de eliminacion, se obtiene siempre para la primera condicion $B^2-4AC<0$; por lo que *se verifica esto aun en la elipse.* Cuando despues se llega á la relacion (5), como e^2 es nulo, se obtiene para la segunda relacion $(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF)=0$; que es la misma condicion que por otro método manifestamos (331) se había de verificar para que la elipse se convirtiese en un punto.

§ 339*e* 3.° Para que la ecuacion general del segundo grado represente un *sistema de dos rectas* que se encuentren, ó que sean paralelas, ó que se confundan en una sola, es necesario que tenga la forma de un producto de dos factores del primer grado, cuyo valor sea nulo, como por ejemplo $(z+ax+b)(z+a'x+b')=0$; y para que esta ecuacion se verifique, es necesario á su vez que ó

$$z+ax+b=0\ ,\ \text{ó}\ z+a'x+b'=0;$$

y estas ecuaciones forman un sistema de dos rectas; pero estas dos ecuaciones no deben tener lugar simultáneamente, es decir, que no se han de verificar al mismo tiempo, sinó separadamente; y segun los diferentes valores de a, a', b, b', se tendrán las diferentes posiciones de las dos rectas.

§ Verificando el producto y ordenando, se tendrá

$$z^2+xz(a+a')+x^2.aa'+z(b+b')+x(ba'+b'a)+bb'=0.$$

§ Para que esta ecuacion se identifique con la ($\mathcal{C}$) deberá ser

$$\frac{B}{A}=a+a'\ (1),\quad \frac{C}{A}=aa'\ (2);\quad \frac{D}{A}=b+b'\ (3);$$

$$\frac{E}{A}=ab'+ba'\ (4);\quad \frac{F}{A}=bb'\ (5).$$

§ De estas cinco ecuaciones, vamos á deducir las relaciones que deben existir entre los coeficientes de la ecuacion general para que represente el lugar pedido.

§ Quitando del cuadrado de (1) el cuádruplo de (2), resulta

$$(a-a')^2=\frac{B^2-4AC}{A^2}\ (6).$$

§ Y como el primer miembro es un cuadrado, será esencialmente positivo; para lo cual es indispensable que $B^2-4AC>0$; luego solo en el caso de la hipérbo-

la *es en el que se puede hallar un sistema de dos rectas que se encuentren.*

§ Restando del cuadrado de (3) el cuádruplo de (5), se tiene

$$(b-b')^2=\frac{D^2-4AF}{A^2} \quad (7).$$

§ Y para que se verifique esta ecuacion se necesita que $D^2-4AF>0$.

§ Por medio de las ecuaciones (1), (3), (6), (7); y teniendo presente lo demostrado (I. 229...1.ª) se determinan los valores de a, a', b, b', resultando

$$a=\frac{B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, \quad a'=\frac{B\mp\sqrt{B^2-4AC}}{2A},$$

$$b=\frac{D\pm\sqrt{D^2-4AF}}{2A}, \quad b'=\frac{D\mp\sqrt{B^2-4AF}}{2A}.$$

§ Sustituyendo estos valores en (4), y haciendo las operaciones y simplificaciones, se tiene

$$2AE=BD-\sqrt{(B^2-4AC)(D^2-4AF)};$$

que da $(BD-2AE)^2=(B^2-4AC)(D^2-4AF)$.

§ Luego, *para el caso de dos rectas que concurren, están escluidas la elipse y la hipérbola*; porque si $a=a'$, las dos rectas son paralelas; entónces se tiene $(a-a')^2=0$; luego en virtud de la ecuacion (6), deberá ser $B^2-4AC=0$; y como esta ecuacion corresponde á la parábola, resulta que el caso de *dos rectas paralelas es un caso particular de la parábola.*

§ Si ademas de ser $a=a'$, se tiene $b=b'$, las dos paralelas no forman sinó una, y resulta $B^2-4AC=0$, $D^2-4AF=0$, $BD-2AE=0$.

§ 339*f* Propongámonos ahora *encontrar las relaciones que deben existir entre los coeficientes de la ecuacion general del segundo grado, para que, en el caso de la elipse, esta curva se trasforme en un círculo.*

§ La ecuacion mas general del círculo, suponiendo que las coordenadas no sean rectangulares, hemos hallado (nota del § 228) que es

$$(z-z')^2+(x-x')^2+2(x-x')(z-z')\cos.\phi-r^2=0;$$

ejecutando las operaciones indicadas y ordenando, se tiene

$$z^2+2\cos.\varphi.xz+x^2-z(2z'+2x'\cos.\varphi)-x(2x'+2z'\cos.\varphi)+\ldots\ldots$$
$$(z'^2+x'^2+2x'z'\cos.\varphi-r^2)=0.$$

§ Para identificar esta ecuacion con la (6), haremos

$$\frac{B}{A}=2\cos.\varphi \ (1); \quad \frac{C}{A}=1 \ (2); \quad \frac{D}{A}=-(2z'+2x'\cos.\varphi) \ (3);$$

$$\frac{E}{A}=-(2x'+2z'\cos.\varphi) \ (4); \quad \frac{F}{A}=z'^2+x'^2+2x'z'\cos.\varphi-r^2.$$

§ Las dos primeras relaciones son las solas ecuaciones de condicion para que la elipse se trasforme en círculo; las otras tres servirán para encontrar las coordenadas del centro, y hacer ver la condicion que se deberá verificar para que el radio sea real.

§ Luego se necesita (2) que $C=A$, es decir, que los cuadrados de las variables

tengan el mismo signo, y el mismo coeficiente; es necesario en segundo lugar que

$$B=2A\cos.\varphi.$$

§ Las (ecs. 3 y 4) darán las coordenadas del centro; y como ellas son del primer grado, se deduce que el centro es único. Se obtiene desde luego

$$z'+x'\cos.\varphi=-\frac{D}{2A}\ (6),\qquad x'+z'\cos.\varphi=-\frac{E}{2A}\ (7).$$

§ Multiplicando la (6) por cos.φ, y restándola de la (7), teniendo presente que $1-\cos.^2\phi=\text{sen}^2\varphi$, resulta $x'\text{sen.}^2\varphi=\frac{D\cos.\varphi-E}{2A}$; de donde $x'=\frac{D\cos.\varphi-E}{2A\text{sen.}^2\varphi}$.

§ Multiplicando la (7) por cos.φ, restándola de la (6), y despejando z', se tiene $z'=\frac{E\cos.\varphi-D}{2A\text{sen.}^2\phi}$. Donde se ve que las coordenadas del centro son reales.

§ Sustituyenpo estos valores de x' y z' en la (ec. 5), y haciendo las operaciones convenientes, se llega á deducir que la condicion para que el radio r sea real es la misma que la que determina la realidad de la elipse; lo que da á conocer que *la elipse verdaderamente es el caso general de la circunferencia, así como esta es el caso particular de la elipse.*

§ 339*g* Pasemos ya á considerar algunas ecuaciones que conducen á *lugares imaginarios* y *puntos aislados.*

§ La ecuacion $z^2+(x^2-1)^2+2=0$ representa *un lugar imaginario*; porque no hay ningun valor real de x, que dé un valor real para z: y *viceversa*, no hay ningun valor real de z que pueda dar ningun valor real para x.

§ La ecuacion $z^2=x^2(x^2-1)$ conviene solo á *un punto aislado,* que es cuando $x=0$, que da $z=0$, y el lugar se halla reducido al punto de orígen.

§ La ecuacion $z^2+x^2(x-1)^2=0$; representa *dos puntos aislados,* situados en el eje de las x, uno en el mismo orígen, y el otro se halla á una distancia del orígen espresada por la unidad.

§ En efecto, para saber en qué parage el lugar que representa la ecuacion propuesta corta al eje de las x, debemos hacer $z=0$; en cuyo caso, la ecuacion propuesta se nos convierte en $x^2(x-1)^2=0$; á cuya ecuacion solo satisfacen los valores $x=0$ y $x=1$.

§ 339*h* La ecuacion $z=(-1)^x$ da *dos conjuntos de puntos aislados, que cada uno se halla formando una línea recta, paralela al eje de las* x. En efecto, si $x=0$, resulta (I. 182) $z=1$, que espresa un punto en el eje de las z, á una distancia del orígen representada por 1. Suponiendo $x=1$, resulta $z=-1$, que representa un punto por debajo del eje de las x, distando de él una cantidad igual con la unidad. Si $x=2$, se tiene $z=1$; que espresa un punto por encima del eje de las x á una distancia de dicho eje representada por 1. Si $x=3$ resulta $z=-1$, que da un punto inferior al eje de las x, tambien á la distancia de él espresada por la unidad; y así sucesivamente. Por lo cual dichos puntos se hallan en líneas paralelas al eje de las x, una por la parte superior, y otra por la parte inferior, distando la unidad de dicho eje.

§ Veamos lo que resulta de suponer negativos los valores de x. Si $x=-1$,

$$z=(-1)^{-1}=\frac{1}{(-1)^1}=-1\ ;\qquad ::$$

lo que dá un punto á la izquierda del eje de las z, y por la parte inferior al eje de las x, distando de este eje una cantidad igual con 1. Si $x=-2$, se tiene

$$z=(-1)^{-2}=\frac{1}{(-1)^2}=\frac{1}{1}=1\ ;$$

que espresa un punto á la izquierda del eje de las z, pero por la parte superior del eje de las x, distando 1 de este eje; y continuando de este modo, inferimos que dichos puntos se hallan en líneas rectas que se estienden tambien por el paraje de las x negativas.

§ Para demostrar que estos puntos son verdaderamente aislados, y que no son los unos continuacion de los otros, supongamos $x=\frac{1}{2}$; en este caso se tendrá

$$z=(-1)^{\frac{1}{2}}=\pm\sqrt{-1}\ ,$$

que siendo un valor imaginario, manifiesta, que en todos los valores intermedios entre $x=0$ y $x=1$, no hay ningun valor real para z; por lo que en toda la distancia entre $x=0$, y $x=1$ no hay nada que esprese el lugar geométrico; y como lo mismo resultaría de suponer que x tenía cualesquiera otros valores espresados por números fraccionarios ó mistos, resulta que todos estos puntos son aislados. El que se hallan todos en línea recta, se deduce de la teoría de los paralelogramos y de la proposicion (I. 355). Y de toda esta discusion resulta: que *el lugar de la ecuaciou* $z=(-1)^x$ *se halla representado por la* (fig. *t* lám. 8″).

§ 339 *i* Si la ecuacion fuese $z=ax(-1)^x$, tendríamos que el supuesto $x=0$, da $z=0$; de donde se infiere que el punto de orígen es punto del lugar que representa la espresada ecuacion. Suponiendo $x=1$, se tiene $z=a.1.(-1)^1=-a$, que da un punto por debajo del eje de las x, distando de él una magnitud espresada por a. Si $x=2$, $z=a.2.(-1)^2=2a$, que da un punto sobre el eje de las x á una distancia de este eje espresada por $2a$. Si $x=3$, $z=-3a$; que da un punto inferior al eje de las x, distando de él una magnitud espresada por $3a$. Si $x=4$, $z=4a$, etc., etc. De modo, que para valores pares de x, á saber: $x=0$, 2, 4, 6, etc. resultan para z los valores $z=0$, $2a$, $4a$, $6a$, etc. que estan sobre el eje de las x.

§ Para los valores ímpares de x, como $x=1,3,5,7$, *etc.* resultan para z los valores siguientes $z=-a$, $-3a$, $-5a$, $-7a$, *etc.*

§ En ambos casos se tiene que las ordenadas son proporcionales á las abscisas; pues $2:2a::4:4a::6:6a::etc.:etc.$ y $1:-a::3:-3a::5:-5a::7:-7a::etc.:-etc.$; luego dichos puntos se hallan (I. 486) en dos líneas rectas que pasan por el orígen; y como la razon en que está la ordenada con la abscisa es a, resulta (160) que a es la tangente trigonométrica del ángulo que dichas rectas forman con el eje de las x.

§ Para valores negativos de x, se tiene que si $x=-1$, resulta

$$z=a.-1.(-1)^{-1}=-a.\frac{1}{-1}=-a.-1=a;$$

que quiere decir que, en este caso, el punto se halla sobre el eje de las ordenadas á una distancia de dicho eje espresada por a. Si $x=-2$,

$$z=a.-2.(-1)^{-2}=-2a.\frac{1}{(-1)^2}=-2a;$$

que nos dice que, en este caso, el punto se halla por la parte inferior al eje de las abscisas, distando de este eje una magnitud espresada por $2a$. Del mismo modo determinaríamos una inmensidad de puntos que se hallarían á la izquierda del eje de las z en las prolongaciones de las rectas en que se hallaban los que estaban á la derecha del eje de las z.

§ Si $a=1$, los puntos aislados se hallarían todos en las rectas mn, pq, que formen con los ejes ángulos de $45°$ ó $\frac{1}{4}\pi$ (fig. u lám. $8''$).

§ Ahora solo nos falta demostrar, que todos estos puntos se hallan en efecto aislados, es decir, que no forman ninguna línea contínua. Supongamos por ejemplo

$$x=\tfrac{3}{2};\quad \text{lo que nos dará}\quad z=a.\tfrac{3}{2}(-1)^{\frac{3}{2}}=\frac{3a}{2}\sqrt{(-1)^3}=\frac{3a}{2}\sqrt{-1};$$

que siendo un valor imaginario, da á conocer que entre la abscisa 1, y la abscisa 2, no hay ningun valor real para z; y como lo mismo se manifestaría para cualesquiera otros valores de x, que fuesen fraccionarios ó números mistos, resulta que el lugar de la ecuacion propuesta *son dos conjuntos de puntos aislados, que se hallan en dos rectas que pasan por el origen, y que en el caso de ser* $a=1$, *forman ángulos de* $45°$ *con los ejes.*

§ 339j Pasemos ya á determinar *los centros de las curvas*. Segun lo espuesto (205) se llama *centro* de una curva á *un punto tal, que si se tira por él una recta cualquiera, que termine por ambos lados en la curva, los puntos de interseccion de la espresada recta con la curva se hallan simétricamente colocados respecto de los dos lados del centro*, es decir, *en número igual é igualmente distantes.*

§ Suponiendo esta condicion satisfecha, concibamos trasportado el orígen de las coordenadas al mismo centro. Entónces si se representan por $+x'$, $+z'$ las coordenadas de uno cualquiera de los puntos de interseccion, que satisfacen á un mismo tiempo á la ecuacion de la curva, y á la ecuacion de la recta tirada por el centro, será necesario que la curva tenga aun otro punto, cuyas coordenadas sean $-x'$, $-z'$; es decir, que su ecuacion aun quedará satisfecha cuando en ella se sustituyan estos nuevos valores $-x'$, $-z'$ en lugar de $+x'$, $+z'$; y todo esto se verificará sin que de ello resulte ninguna determinacion particular de estas cantidades. Esta condicion se hallará satisfecha si la ecuacion de la curva solo contiene términos variables, tales que la suma de los esponentes de x y de z forme siempre un número par en cada término. Porque entónces estos términos no mudarán cuando se muden simultáneamente los signos de las dos variables; y la condicion de su constancia no puede quedar satisfecha de otra manera; porque si la ecuacion contuviese productos variables de dimension ímpar, los términos que estuviesen afectos de ellos mudarían de signo al mismo tiempo que las variables x, z; por consiguiente, si la ecuacion quedase satisfecha por ciertos valores de estas cantidades, no podría ya serlo generalmente por los mismos valores tomados con signos contrarios. En virtud de esto, para saber si una curva dada, cuya ecuacion se tiene, goza de la propiedad de tener un centro, *no hay mas que buscar si existe sobre el plano en que está, un punto tal, que fijando el orígen de las coordenadas en él, la condicion analítica que caracteriza un centro quede satisfecha*; es decir, que *la ecuacion trasformada se reduzca á no contener sinó términos variables de dimension par*. Será necesario pues para esto sustituir, en lu-

gar de x y z espresiones de la forma $x=a+x'$, $z=b+z'$, en las cuales a y b designen las coordenadas indeterminadas del nuevo orígen, y ver si, disponiendo de estas dos cantidades, se puede hacer de modo que los términos en que es ímpar la suma de los esponentes de x' y de z' desaparezcan de la ecuacion trasformada.

§ Por ejemplo, si se efectúa esta sustitucion en la ecuacion mas general de 2.º grado

$$Az^2+Bxz+Cx^2+Dz+Ex+F=0 \quad (K),$$

se halla que su trasformada contiene generalmente dos términos de dimension ímpar; á saber: $(2Ab+Ba+D)z'$ y $(2Ca+Bb+E)x'$. Así, para que estos términos desaparezcan, es necesario disponer de las cantidades a y b, de manera que se tenga $2Ab+Ba+D=0$, $2Ca+Bb+E=0$; y entónces la ecuacion referida al nuevo orígen se convertirá en

$$Az'^2+Bx'z'+Cx'^2+Ab^2+Bab+Ca^2+Db+Ea+F=0.$$

§ Bajo esta forma se ve que no muda ya cuando se sustituye en ella $-z'$ y $-x'$ en lugar de $+z'$ y $+x'$, lo que es el carácter del centro.

Las relaciones que existen entre las coordenadas a y b del nuevo orígen, son del primer grado, y por consiguiente representan dos líneas rectas. Estas rectas no pudiéndose cortar sinó en un solo punto, se sigue que no hay mas que un solo centro en las curvas del segundo grado.

En efecto, estas ecuaciones dan para a y b los valores siguientes

$$a=\frac{2AE-BD}{B^2-4AC}, \quad b=\frac{2CD-BE}{B^2-4AC},$$

y estos valores son únicos. Ellos vienen á ser infinitos cuando $B^2-4AC=0$, lo que significa que entónces no hay centro, ó en otros términos, que está colocado á una distancia infinita del orígen. Este caso es el de la *parábola*, como lo indica la ecuacion $B^2-4AC=0$, que forma el carácter de esta curva. En este caso las dos rectas que determinan el centro por su interseccion vienen á ser paralelas, pues que su punto de concurso se halla infinitamente léjos.

§ 339 *k*. La existencia de las *líneas diametrales ó diámetros*, que hemos reconocido en las curvas de 2.º grado, se estiende tambien á las curvas de todos los grados. Generalmente, se llama *diámetro* de una curva, *á una recta ó curva, tal que divide en dos partes iguales á todas las cuerdas tiradas paralelamente las unas á las otras terminadas en la curva, bajo una cierta inclinacion.* En virtud de esto, si se toma un diámetro por eje de las abscisas, y se dirige el eje de las ordenadas paralelamente á las cuerdas que divide en dos partes iguales, la ecuacion trasformada deberá ser tal, que si ella está satisfecha por un cierto par de valores, tales como $+x'$ y $+z'$, ella lo sea tambien por el par $+x'$ y $-z'$, es decir, por la misma ordenada tomada en sentido contrario para la misma abscisa. Consiguientemente, para saber si una curva propuesta es susceptible de uno ó de muchos diámetros, es necesario mudar las direcciones actuales de las coordenadas del modo mas general, por ejemplo por medio de las fórmulas (*g*)

$$x=a+x'\cos.\alpha+z'\cos.\mathfrak{C}, \quad z=b+x'\text{sen.}\alpha+z'\text{sen.}\mathfrak{C}$$

que hemos obtenido (§ 199), suponiendo que las ordenadas primitivas sean rectangulares. Hecha esta sustitucion, se determinarán los valores de a, b, α y $\mathfrak{C}$, de modo que hagan desaparecer todos los términos afectos de las potencias ímpares de una de las variables, sin que estas mismas variables dejen de ser indetermina-

das. Si la cosa es posible, la direccion de la otra variable será un diámetro de la curva propuesta.

§ 339*l* Para dar un ejemplo de este método, apliquémosle á las curvas de segundo grado. Haciendo la sustitucion que acabamos de espresar en la ecuacion (K) del párrafo (339*j*), que es la mas general de dichas curvas, resulta que la trasformada contiene generalmente tres términos, en que una de las nuevas variables x', z', entra en una dimension ímpar; y estos términos son

$$\left.\begin{array}{l} x'z'(2A\text{sen.}\alpha\text{sen.}\mathcal{C}+B(\text{sen.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C}+\text{sen.}\mathcal{C}\text{cos}\,\alpha)+2C\text{cos.}\alpha\text{cos.}\mathcal{C})\,; \\ z'\,((2Ab+Ba+D)\text{sen.}\mathcal{C}+(2Ca+Bb+E)\text{cos.}\mathcal{C}) \\ x'((2Ab+Ba+D)\text{sen.}\alpha+(2Ca+Bb+E)\text{cos.}\alpha) \end{array}\right\} \quad (\text{K}').$$

§ Estos términos deben desaparecer; luego sus coeficientes deben ser iguales con cero.

§ Igualando el primero con cero y dividiendo toda la ecuacion por $\cos.\alpha\cos.\mathcal{C}$, lo podemos poner bajo esta forma

$$2C+B(\text{tang.}\alpha+\text{tang.}\mathcal{C})+2A\text{tang.}\alpha\text{tang.}\mathcal{C}=0 \quad (1).$$

§ Ahora, si es el eje de las x' el que se quiere hacer un diámetro, será necesario que el coeficiente del término en z', desaparezca; lo que exige que el coeficiente del 2.º término de los (K′) sea igual con *cero*; lo que nos dará

$$(2Ab+Ba+D)\text{sen.}\mathcal{C}+(2Ca+Bb+E)\text{cos.}\mathcal{C}=0 \quad (2);$$

§ Pero, si se quiere dar esta propiedad al eje de las z', será necesario hacer nulo el coeficiente de x'; lo que exigirá que se tenga

$$(2Ab+Ba+D)\text{sen.}\alpha+(2Ca+Bb+E)\text{cos.}\alpha=0 \quad (3).$$

§ Examinemos lo que nos indican estas ecuaciones.

§ Desde luego debemos observar que, cualquiera que sea el eje de coordenadas que se elija para diámetro, se ve que será necesario siempre el que se verifique la (ec. 1), y reunir á ella solamente una de las otras dos.

§ Ahora, la (ec. 1) no determina mas que una relacion entre los ángulos α y $\mathcal{C}$; y cuando el uno de ellos es conocido, ella siempre da para el otro un valor real, pues que cada una de las dos tangentes de α y de $\mathcal{C}$ no entra en dicha ecuacion sinó en el primer grado. Pero, despues que ella quede así satisfecha, la segunda ecuacion, sea la (2), sea la (3) puede serlo solamente por los valores de a y b de que se disponga; así cualquier direccion que se dé á la recta secante, de que se quiere hacer un diámetro, la (ec. 1) señalará siempre una direccion de cuerdas que serán cortadas por ella en dos partes iguales; y la segunda ecuacion, esto es, la (2) ó la (3) entre a y b será la ecuacion de este diámetro relativamente á los primeros ejes de las coordenadas sobre que se cuentan las a y b.

§ Estas dos últimas ecuaciones quedan satisfechas cuando

$$2Ab+Ba+D=0, \quad 2Ca+Bb+E=0 \quad (4).$$

§ Así, los valores de a y b dados por estas dos ecuaciones, pertenecen á un punto que se halla sobre todos los diámetros. Pero estas condiciones son precisamente las mismas (339*j*) que determinan el centro. Luego, todos los diámetros de las curvas de segundo grado pasan por su centro; y recíprocamente toda recta tirada por el centro, en las curvas de segundo grado, es un diámetro, pues que su direccion, siendo dada, las ecuaciones (2) y (3) quedan satisfechas, y que la direccion de las cuerdas es determinada despues en cantidades reales por la (ec. 1).

§ 339*ll* Supongamos que en una curva cualquiera se haya encontrado una di-

rccion de coordenadas, tal que el eje de las x' y el de las z' sean diámetros el uno y el otro, vamos á manifestar *que la ecuacion transformada en* x' *y en* z', *no contendrá sinó potencias pares de cada una de estas variables.* En efecto, si el eje de las x' es un diámetro, la ecuacion no deberá contener sinó potencias pares de z'; y si el eje de las z' es un diametro, no conservará sinó potencias pares de x'. Consiguientemente, si estos dos caractéres tienen lugar á un mismo tiempo la ecuacion no encerrará sinó potencias pares de x' y z'.

§ Esta condicion está siempre satisfecha en las curvas de segundo grado, cuando el orígen de las x' y de las z' está colocado en el centro, y sus direcciones satisfacen á la (ec. 1). Porque en este caso, las primeras potencias de x' y de z' habiendo desaparecido, así como el término en $x'z'$, la ecuacion no contiene sinó los cuadrados de las variables. Los sistemas de diámetros que la (ec. 1) da en esta circunstancia son pues siempre diámetros conjugados. Pero la condicion de pasar por el centro limita realmente esta propiedad á la elipse y á la hipérbola, solo caso en que las dos ecuaciones (4) pueden quedar simultáneamente satisfechas dando á las coordenadas a y b del nuevo orígen valores finitos.

§ 339*m* Cuando es posible reducir asi, la trasformada á no contener sinó las potencias pares de las variables, resulta, que si existe un par de valores $+x'$, $+z'$ que satisfaga á ellas, se podrá igualmente satisfacer á las mismas con los otros *pares* $-x'$, $+z'$; $-x'$, $-z'$; $+x'$, $-z'$: es decir, que los cuatro ángulos formados por las intersecciones de los ejes coordenados serán iguales, escepto en el signo.

§ Si las coordenadas x', z' son rectangulares, los ángulos de que se trata, vendrán á ser cuadrantes iguales entre sí, y la forma de la curva será idénticamente la misma en todos, de suerte que se podrán superponer estas cuatro partes las unas sobre las otras. En este caso, se dice que la curva es *simétrica* al rededor de los dos ejes coordenados. Esto tiene lugar por ejemplo en la elipse y en la hipérbola, cuando las coordenadas están dirigidas segun los ejes mismos de estas curvas. Entónces la rectangularidad de las x' y de las z' (§ 199) da

$$\mathfrak{C}=90+\alpha; \quad \text{por lo que} \quad \text{tang.}\mathfrak{C}=\text{tang.}(\tfrac{1}{2}\pi+\alpha)=(\S 14)-\cot.\alpha=-\frac{\cos.\alpha}{\text{sen.}\alpha}; \quad \text{y}$$

eliminando $\mathfrak{C}$ de la (ec. 1) con el auxilio de esta condicion, queda

$$-2C\text{sen.}\alpha\cos.\alpha+B(\cos.^2\alpha-\text{sen.}^2\alpha)+2A\text{sen.}\alpha\cos.\alpha=0;$$

de donde (§ 20) se saca $(A-C)\text{tang.}2\alpha+B=0$ (5); ecuacion que dará siempre para $\text{tang.}2\alpha$ un valor real.

§ 339*n* *Asíntotas de las curvas. Método general para determinarlas.* Si en la (ec. I) del (§ 325) hacemos $B^2-4AC=m$, $BD-2AE=n$ y $D^2-4AF=p$,

se nos convertirá en $$z=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{1}{2A}\sqrt{mx^2+2nx+p} \quad (1).$$

§ El trinomio $mx^2+2nx+p$ se puede poner de este modo

$$m\left(x^2+\frac{2n}{m}x+\frac{p}{m}\right),$$

ó añadiendo y quitando $\frac{n^2}{m^2}$ á lo que hay dentro del paréntesis, se tendrá

$$m\left(\left(x+\frac{n}{m}\right)^2+\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}\right) \quad (2).$$

§ En la hipérbola se tiene que $m=B^2-4AC$ es esencialmente una cantidad *positiva*; pero $\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}$ puede ser indiferentemente positiva ó negativa. No puede ser nula; porque si se tuviese $\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}=0$, resultaría que $mx^2+2nx+p$ sería igual con $m\left(x+\frac{n}{m}\right)^2$, y la (ec. 1) se convertiría en

$$z=-\frac{Bx+D}{2A}\pm\frac{\left(x+\frac{n}{m}\right)}{2A}\sqrt{m};$$

y la curva se reduciría (§ 332) á un sistema de dos rectas. Por lo que se tendrá $\frac{p}{m}-\frac{n^2}{m^2}=\pm k^2$; y la espresion (2) se convertirá en $m\left(\left(x+\frac{n}{m}\right)^2\pm k^2\right)$; que multiplicando y dividiendo $\pm k^2$, por $\left(x+\frac{n}{m}\right)^2$, podrémos poner bajo esta forma: $m\left(x+\frac{n}{m}\right)^2\times\left(1\pm\frac{k^2}{\left(x+\frac{n}{m}\right)^2}\right)$; y la (ec. 1) se convertirá en

$$z=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{m}}{2A}\cdot\sqrt{1\pm\frac{k^2}{\left(x+\frac{n}{m}\right)^2}} \quad (3).$$

§ Esto supuesto, vamos á demostrar, que las rectas representadas por la ecuacion $z_1=-\frac{(Bx+D)}{2A}\pm\frac{\left(x+\frac{n}{m}\right)\sqrt{m}}{2A}$ (4) son asíntotas de la curva.

§ En efecto, notemos desde luego que los valores de z y z_1 tienen una parte comun $-\frac{(Bx+D)}{2A}$; así, para demostrar que las ramas de la curva se acercan sin cesar y tanto como se quiera á estas rectas, basta hacer ver que la diferencia de las dos partes no comunes se va acercando cada vez mas á *cero*, cuando

x aumenta, y que esta diferencia viene á ser nula cuando el valor de x es infinito.

§ Para demostrarlo, hagamos

$$u=\frac{\left(x+\frac{n}{m}\right)\cdot\sqrt{m}}{2A}\sqrt{1\pm\frac{k^2}{\left(x+\frac{n}{m}\right)^2}},\quad u_1=\frac{\left(x+\frac{n}{m}\right)\cdot\sqrt{m}}{2A};$$

elevando al cuadrado estas dos ecuaciones, y restando la segunda de la primera, se tendrá $u^2-u_1^2=\pm\frac{mk^2}{4A^2}$; y (I. 179) $u-u_1=\frac{\pm mk^2}{4A^2(u+u_1)}$.

§ Pero la inspeccion de los valores de u y de u_1, manifiesta que estas cantidades aumentan cuando x crece; y vienen á ser infinitas cuando x es infinita; luego sucederá lo mismo á su suma $u+u_1$.

§ Por consiguiente, la diferencia $u-u_1$ disminuye al paso que aumenta x, y viene á ser nula cuando x es infinita.

§ Luego las dos rectas representadas por la (ec. 4) gozan de la propiedad característica de las *asíntotas*.

§ 339 *ñ*. Vámos ahora á manifestar que todas *las parábolas, que tienen el mismo parámetro y el mismo eje, pero cuyos vértices tienen posiciones diferentes sobre dicho eje, son asíntotas las unas á las otras.*

§ Considerémos en efecto las dos parábolas

$$z^2=2px,\text{ y }z_1^2=2p(x-\alpha);$$

designando α la abscisa del vértice de la segunda parábola, contada partiendo del vértice de la primera.

§ De estas ecuaciones se deduce $z^2-z_1^2=2p\alpha$; y por consiguiente

$z-z_1=\frac{2p\alpha}{z+z_1}$; y como z y z_1 aumentan al mismo tiempo á medida que aumenta x, y vienen á ser infinitas cuando x lo es, resulta lo mismo para su suma $(z+z_1)$; así, la diferencia $(z-z_1)$ de las ordenadas de las dos curvas correspondiente á la misma abscisa, disminuye mas y mas á medida que x aumenta, y viene á ser *nula* cuando x es infinita. *Luego la segunda curva es asintota de la primera.*

§ 339 *p*. *Aplicacion á curvas de grado superior al segundo.* El método, que acabamos de aplicar á ecuaciones de 2.º grado, se puede igualmente aplicar á ecuaciones de un grado superior, con tal que se pueda efectuar la separacion ó despejo de las variables.

§ Sea la ecuacion $z^2-x^2z+2xz-x^3+2z+2x=0$ (a), que es del tercer grado, porque se puede resolver con relacion á z.

§ De ella se deduce $z=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^4+4}$ (b).

Designemos la primera parte de este valor de z, por z_1 (fig. v lám. 8″), y construyamos primero el lugar geométrico $z_1=\frac{x^2-2x-2}{2}$, que da

$$x=1\pm\sqrt{2z_1+3}\ (c);$$

donde se ve, que el lugar geométrico es una parábola, que tiene por *diámetro* ó mas bien por *eje*, la línea EE' tirada paralelamente al eje de las z, á una distancia $AP=1$; el límite de esta parábola es, por otra parte, DE tirada paralelamente con AX por el punto D, respecto del cual se tiene

$$2z_1+3=0, \quad \text{ó} \quad z_1=-\tfrac{3}{2}=AD.$$

Haciendo $z_1=0$ en la (ec. c), se halla $x=1\pm\sqrt{3}$, ó $x=AQ$, y $x=AQ'$.

Haciendo $x=0$ en la misma (ec. c), resulta $z_1=-\frac{3}{2}=-1$; así, la parábola pasa aun por el punto B, respecto del cual $AB=-1$. La curva correspondiente á $z_1=\dfrac{x^2-2x-2}{2}$ está suficientemente determinada, y puede estar representada por $RQEBQ'R'$.

Esta parábola debe ser considerada como un diámetro de la curva buscada.

En efecto, para un valor cualquiera AP' de x, es necesario, despues de haber construido la ordenada $P'B'$ correspondiente de la parábola, llevar, á partir del punto B', encima y debajo de esta curva, una parte $B'K$, $B'K'$ igual al valor del radical $\frac{1}{2}\sqrt{x^4+4}$. Se ve pues que *la línea* $RQEBQ'R'$, pasa por los medios de todas las cuerdas de la curva buscada, que son paralelas al eje de las z; luego (205) esta línea es un *diámetro* de los que hemos llamado de primer órden (§ 205) y es *curvilíneo*.

Si observamos ahora que el radical $\sqrt{x^4+4}=x^2.\sqrt{1+\dfrac{4}{x^4}}$,

se puede poner la espresion (b) bajo la forma

$$z=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\tfrac{1}{2}x^2.\sqrt{1+\frac{4}{x^4}};$$

y si á esta ecuacion se aplican los razonamientos hechos (339n), se deducirá que la curva buscada tiene por asintotas el sistema de las líneas representadas por la ecuacion

$$z''=\frac{x^2-2x-2}{2}\pm\frac{x^2}{2}.$$

Esta ecuacion, considerada sucesivamente con el signo superior y con el signo inferior, da $z''=x^2-x-1$, y $z''=-x-1$.

La segunda de estas es la ecuacion de una recta LL', que pasa por los dos puntos B, B'' respecto de los cuales se tiene $AB=-1$, y $AB''=-1$.

En cuanto á la primera, se deduce de ella $x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4z''+5}$; y construyéndola, se obtiene una nueva parábola SIS' que tiene por eje II', y por vértice el punto I, que se obtiene haciendo

$$4z''+5=0; \quad \text{de donde} \quad z''=-\tfrac{5}{4}=AC;$$

resultando que el valor de x, que da el punto I, es $x=Ap=\frac{1}{2}$.

Se debe notar que las dos asíntotas LL', SIS' tienen el punto B comun, y se tocan en este punto; porque la parte no comun de su ecuacion siendo $\dfrac{x^2}{2}$, si se hace $x=0$, resulta $z''=-1$.

Este mismo punto pertenece tambien, como se ha visto mas arriba, al diámetro parabólico $RQB'EBQ'R'$.

§ Ya no nos falta mas que determinar algunos puntos de la curva buscada. Hágase primero $z=0$ en la (ec. a); y se tendrá $-x^3+2x=0$, ó $x(x^2-2)=0$; de donde $x=0$, $x=+\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$. Así, la curva pasa por el orígen A, y por los puntos G, G' respecto de los cuales se tiene $AG=\sqrt{2}$, $AG'=-\sqrt{2}$.

§ Supongamos ahora $x=0$, y la misma (ec. a) se nos convertirá en

$$z^2+2z=0\,;\quad \text{de donde}\quad z=0,\ z=-2\,;$$

luego la curva pasa por el nuevo punto H tomado sobre el eje de las z á una distancia $AH=-2$.

§ Hagamos despues $x=1$ en la (ec. b), y tendrémos $z=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$; lo que da los nuevos puntos E'', E''', para los cuales se tiene

$$AP=1,\ PE=-\tfrac{3}{2},\ EE''=\tfrac{1}{2}\sqrt{5},\ EE'''=-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

§ Hagámos en fin $x=2=AP'$; se halla $z=-1\pm\frac{1}{2}\sqrt{20}$.

§ Construidos estos dos valores, dan áun los puntos K y K' para dos puntos de la curva.

§ Como el lugar geométrico buscado debe pasar por los puntos K, G, E'', A, despues por K', E''', H, G', y teniendo por asíntotas la parábola SIS' y la recta LL', está necesariamente representado por las dos líneas

$$TKGE''AT' \text{ y } G'HN'E'''K'.$$

Digresion acerca de las superficies curvas; en que se añade lo relativo á considerar dichas superficies por su generacion; y á las curvas de doble curvatura.

340 Hemos visto (190) que la ecuacion del plano incluye tres variables, y que las de las curvas solo contienen dos, de lo cual podríamos deducir, que *toda ecuacion que comprendiese tres variables correspondía á una superficie*; pero no obstante lo demostrarémos directamente. En efecto, concibamos sobre un plano ZAX (fig. 133) una recta AX que tenga tantas perpendiculares PM, PM en el plano ZAX como se desée, y que sobre cada una de estas perpendiculares se tengan tambien cuantas perpendiculares MN, MN se quieran al plano ZAX; si se tiene una ecuacion que encierre tres variables x, z, u, de las cuales la 1ª esprese las rectas AP contadas desde A hasta los puntos en que la recta AP encuentre á las perpendiculares MP; la 2ª esprese estas perpendiculares MP; y la 3ª las perpendiculares MN al plano ZAX: vamos á probar que esta ecuacion representará siempre una superficie.

Porque, dando un valor determinado á la variable que espresa las AP en esta ecuacion, no tendrá ya sinó las dos variables PM y MN, y por consiguiente espresará el lugar de una línea recta ó curva NNG, cuyas coordenadas serán las PM y MN; y como se pueden dar tantos valores determinados á la variable AP como puntos hay en el eje APX, esto es, tantos como se quieran, se sigue que habrá tambien tantas líneas como se quiera, tales como la NNG; y como estas se hallarán tan próximas las unas de las otras como se elijan los puntos en el eje

APX, resulta que como los puntos de este se hallan contínuos los unos á los otros, estas líneas lo estarán igualmente, y formarán una superficie en la que se hallarán todas estas líneas.

Si tuviéramos dos ecuaciones con tres variables x, z, u, podríamos eliminar por medio de ellas una de las variables, y nos resultaría una ecuacion con solo dos variables. Si eliminamos la u, tendrémos una ecuacion que contendrá solo á x, y á z, y representará la interseccion de la superficie con el plano de las xz. Si eliminásemos la z, nos resultaría una ecuacion entre u y x, que espresaría una línea, recta ó curva, que fuese la interseccion de la superficie con el plano de las ux. Si eliminásemos la x, nos resultaría una ecuacion en que entrarían las dos variables z, u, que espresaría la interseccion de la superficie con el plano de las zu. Si por los puntos de estas intersecciones, concebimos perpendiculares á sus respectivos planos, tendrémos que se formará en el espacio una superficie, en que, para cada punto de la cual, las x y las z, serán las mismas que las de la curva. La interseccion de dos de estas superficies corresponderá á todos los puntos que se hallan á un mismo tiempo en ambas superficies, y esta interseccion será por lo general una curva. Luego tambien, el lugar de todos los puntos que satisfacen al mismo tiempo á las dos ecuaciones primitivas de tres variables es una línea; lo que exige que los lugares geométricos de estas ecuaciones sean *superficies*, y no sólidos, como acaso se podría imaginar. Ademas, concurre la circunstancia, para que este lugar no se pueda reputar como un sólido, el que entónces el plano secante debería dar por seccion una superficie, siendo así que no da sinó una curva de una ó de muchas ramas.

Para convencernos de que una ecuacion de tres variables espresa una superficie y no un sólido, basta observar que la espresada ecuacion ha de ser de un grado determinado, y que por lo mismo, suponiendo dos coordenadas cualesquiera determinadas, resolviendo la ecuacion con relacion á la tercera, obtendrémos para esta un limitado número de valores, que lo mas podrán llegar á ser, tantos como esprese el grado de la ecuacion. Luego solo habrá tantos puntos diferentes como unidades tenga el grado de dicha ecuacion. Por lo cual, resultará que estos puntos corresponderán á una superficie y no á un sólido; pues qúe en un volúmen ó sólido, por pequeño que fuera su grueso, siempre se podrian considerar una infinidad de puntos, y por consiguiente una infinidad de valores para la coordenada u.

Se debe notar sin embargo, que si la ecuacion primitiva de tres variables, contuviese, ademas de estas, una ó muchas indeterminadas, que hiciesen oficios de parámetros, esta ecuacion suministraría otras tantas superficies diferentes cuantos valores se podrían dar á las indeterminadas; de modo que, en este caso, el lugar geométrico sería la reunion de una infinidad de superficies ó de *capas* infinitamente delga-

das, que formarán entónces, hablando propiamente, un *sólido*, y otra clase de superficies á que *Monge* ha dado el nombre de *enveloppes*, como si dijéramos *cubiertas* (*).

Supongamos actualmente que se tengan tres ecuaciones entre las tres variables x, z, u que existan al mismo tiempo.

Como las dos primeras ecuaciones caracterizan todos los puntos de la línea de interseccion de las superficies espresadas por estas ecuacio-

---

(*) Para dar alguna idéa de lo que significa esta denominacion, observarémos, que si en las ecuaciones $z^2+(u-\mathfrak{C})^2=r^2-\alpha^2$, $x=\alpha$, que representan un círculo, eliminamos α, tendrémos

$$x^2+z^2+(u-\mathfrak{C})^2=r^2 \quad (m).$$

la cual pertenece por los diversos valores que se pueden dar á $\mathfrak{C}$ á una infinidad de esferas de un radio constante, y cuyos centros situados en el eje de las u, se obtienen haciendo variar $\mathfrak{C}$ desde 0 hasta $\pm\infty$.

Igualmente, si eliminamos α entre las ecuaciones

$$z^2+u^2=\mathfrak{C}^2-\alpha^2+r^2, \quad x=\alpha$$

que corresponden tambien á un círculo, tendrémos la ecuacion

$$x^2+z^2+u^2=\mathfrak{C}^2+r^2 \quad (n);$$

la cual pertenece por los diversos valores que se pueden dar á $\mathfrak{C}$, á *todos los puntos del espacio* indefinido, que se hallan fuera de la esfera que tiene á r por radio, y cuyo centro está en el orígen de las coordenadas.

Así, cuando una ecuacion como la (m) y la (n) contiene una constante arbitraria $\mathfrak{C}$, que puede recibir todos los valores posibles desde 0 hasta $\pm\infty$, la ecuacion propuesta representa una infinidad de superficies, que pertenecen á una *misma familia*, y que ordinariamente se cortan consecutivamente las que corresponden á dos valores bastante aproximados de la constante arbitraria. Hallando la curva de interseccion de estas dos superficies, se consideran despues las que resultan de hacer disminuir el intérvalo ó diferencia de los dos valores de la constante arbitraria, hasta suponer luego igual á cero dicha diferencia; con lo cual se tiene la curva segun la cual una superficie individual relativa á un valor cualquiera $\mathfrak{C}$, está cortada por la superficie que le es infinitamente próxima. Y como para cada valor de la constante arbitraria, ó para cada superficie individual existe una curva de dicha naturaleza, resulta que *si se quiere obtener el lugar de todas estas intersecciones, no hay mas que eliminar la constante arbitraria ó parámetro;* y la ecuacion que se obtenga es la de la superficie que *Monge* ha llamado *enveloppe* de todas las superficies individuales comprendidas en la ecuacion primitiva. Esta denominacion está fundada en que esta *enveloppe* ó *cubierta toca* á cada superficie individual á lo largo de una de las curvas de interseccion. Y á la curva segun la cual se cortan dos *enveloppes* ó superficies individuales infinitamente próximas, le ha dado el mismo *Monge* el nombre de *característica* de la *enveloppe* ó *cubierta*.

Aplicando el mismo procedimiento á una ecuacion solo de dos variables, se obtiene la *familia de curvas*, que se cortarán en general consecutivamente para valores muy próximos de la constante arbitraria, y se halla la línea *enveloppe* de todas estas curvas individuales, eliminando la constante arbitraria.

nes; resulta que el conjunto de las tres ecuaciones corresponderá á los puntos en que la curva, que es interseccion de las dos primeras superficies, encuentra á la otra superficie correspondiente á la tercera proyeccion. Y se tendrán las coordenadas de estos puntos, eliminando x, z, u entre las ecuaciones propuestas. El número de los puntos comunes es igual al número de los sistemas de valores reales de x, z, u, propios á verificar estas ecuaciones simultáneamente.

Se puede concluir de las consideraciones precedentes: 1.° que una sola ecuacion entre tres variables x, z, u, determina analíticamente una superficie; 2.° que el sistema de dos ecuaciones en x, z, u caracteriza una línea curva, que es *plana* cuando todos sus puntos se hallan en un plano; y cuando no, se designan bajo el nombre de *curva de doble curvatura*; porque viene á participar de la naturaleza de la una y de la otra superficie, representadas por las dos ecuaciones; y 3.° que el sistema de tres ecuaciones que contienen tres variables, fija la posicion de un cierto número de puntos en el espacio, de modo que no es siempre necesario que se den esplícitamente las coordenadas de estos puntos, pues bastan las ecuaciones de tres superficies en las cuales se hallen colocados.

Antes de dirigirnos á encontrar la ecuacion de ninguna superficie, manifestarémos: *que si una superficie cualquiera plana se concibe en un plano inclinado, y se proyecta sobre el plano horizontal por perpendiculares tiradas desde todos los puntos de su perímetro á este plano, la superficie de la proyeccion será igual á la de la figura, multiplicada por el coseno del ángulo que forman los dos planos.*

Para demostrarlo, supongamos 1º que la figura sea un trapecio MNPQ (fig. 134), cuyos lados paralelos MN, PQ sean perpendiculares á la comun seccion AC de los planos BAC, DAC; y á causa (I. 548 cor. 1.°) de las paralelas MM′, NN′, será (I. 649)

$$N'M' : NM :: G'M' : G'M :: \cos.M'G'M : \text{radio} = 1,$$

de donde llamando α á dicho ángulo $M'G'M$, será $N'M' = NM\cos.\alpha$. Del mismo modo se hallará que $P'Q' = PQ\cos.\alpha$.

Ahora, como tanto el trapecio como su proyeccion tienen la misma altura, que está representada por $G'H'$, guardarán la misma relacion que la suma de las bases; luego será

$$M'N'P'Q' : MNPQ :: NM\cos.\alpha + PQ\cos.\alpha : MN + PQ :: \cos.\alpha : 1,$$

de donde $M'N'P'Q' = MNPQ \times \cos.\alpha$.

Si la figura, en vez de ser un trapecio, fuese un paralelogramo con las mismas circunstancias, la demostracino sería la misma.

Supongamos ahora que se tenga un triángulo cualquiera ABC (fig. 135) situado en un plano inclinado, cuya comun seccion con el plano horizontal sea $G'H'$; si se tiran las AD y CE perpendiculares á esta recta, y por el punto B la recta DBE paralela al lado AC, resulta que el triángulo ABC será la mitad del paralelogramo ACED,

porque ambos tendrán la misma base y altura; y esta figura teniendo sus lados perpendiculares á la comun seccion G'H', se hallará en el caso del razonamiento anterior, y se verificará la proposicion, pues lo que sucede al todo debe acontecer á las partes.

{ Y como toda figura rectilínea se puede dividir en trapecios y en triángulos, se sigue que la proposicion es verdadera igualmente para toda figura rectilínea.

{ Supongamos ahora que la superficie sea la MNPQRS (fig. 136) terminada por una curva cualquiera; y tendrémos que, concibiendo en ella una figura rectilínea cualquiera, ya sea inscrita, ya circunscrita, ya en parte esté inscrita ó circunscrita, su proyeccion M'N'P'Q'R'S' será igual á MNPQRS×cos.α, luego se tendrá $\frac{M'N'P'Q'R'S'}{MNPQRS}=\cos.\alpha$.

{ Concibiendo otra figura de duplo número de lados, tendríamos que la relacion de su superficie á la de su proyeccion sería igual tambien con cos.α; y continuando del mismo modo llegaríamos á tener, que la superficie rectilínea se iría acercando á la curvilínea al mismo tiempo que lo hacían las proyecciones; y como se podría aproximar tanto como se quisiese, se sigue que tenemos aquí dos cantidades variables, á saber, la superficie de la figura rectilínea y su proyeccion, que se pueden acercar á un mismo tiempo tanto como se quiera á la curvilínea y á su proyeccion, que son constantes, y en que la relacion de las variables es constante; luego esta relacion (I. 328 cor.) será la de las constantes, y se tendrá que

$$\frac{proyeccion}{superficie}=\cos.\alpha, \text{ de donde } proyeccion=superficie\times\cos.\alpha.$$

Luego tenemos demostrada nuestra proposicion en general; debiendo advertir, que aun cuando el plano en que se halla la figura no se encuentre con el plano en que se proyecta, la proposicion se verificará del mismo modo; pues prolongando el plano de la figura, ó encontrará al en que se proyecta, ó no le encontrará. Si le encuentra, es el caso de la proposicion; y si no le encuentra, le será paralelo: en cuyo caso la proyeccion será igual con la figura, el ángulo que formen los planos será ○, y su coseno = 1; luego la proposicion se verifica en todos los casos.

{ 341 *Si una figura cualquiera plana se proyecta sobre tres planos rectangulares, el cuadrado de la superficie de esta figura es igual á la suma de los cuadrados de las superficies de sus tres proyecciones* (se debe entender valuadas estas superficies en números).

Para demostrarlo, supongamos que sea S la superficie; S', S'', S''', sus tres proyecciones; α, $\mathcal{C}$, γ, los ángulos que forma el plano de la superficie con los tres planos coordenados, y se tendrá

$$S'^2=S^2\cos.\alpha^2,\ S''^2=S^2\cos.\mathcal{C}^2,\ S'''^2=S^2\cos.\gamma^2;$$

por lo que, sumando será

$$S'^2+S''^2+S'''^2=S^2\cos.\alpha^2+S^2\cos.\mathcal{C}^2+S^2\cos.\gamma^2=S^2(\cos.\alpha^2+\cos.\mathcal{C}^2+\cos.\gamma^2);$$

y como (§ 195) $\cos.\alpha^2+\cos.\mathcal{C}^2+\cos.\gamma^2=1$, será $S'^2+S''^2+S'''^2=S^2$, cuyo teorema es muy notable por la analogía que tiene con el del cuadrado de la hipotenusa; y ejerce en la teoría de las superficies curvas tanta influencia como el del cuadrado de la hipotenusa en la teoría de las curvas.

§ Fundados en lo que precede, podemos *demostrar, que la proyeccion de un círculo sobre un plano, que no es paralelo al plano del mismo círculo, es una elipse.*

Supongamos que en el plano MR (fig. v' lám. 8ª) se halle descrito un círculo ACBD, y que deseamos hallar su proyeccion sobre el plano MQ, que forma con el MR un ángulo cualquiera AGS=α.

§ Desde el centro O del círculo tirarémos OG perpendicular á la comun interseccion MN de los dos planos; y tendrémos que bajando desde los estremos A, B del diámetro AB, dos perpendiculares al plano MQ, determinarán en este la recta *ab*, que será la proyeccion de AB sobre el plano MQ; y en virtud de lo manifestado (§ 340), se tendrá ab=AB.cos.α (1).

Si tiramos el diámerto DC, perpendicular á BAG, será paralelo con la comun seccion MN en el plano MR; y bajando desde C y D las perpendiculares C*c*, D*d* al plano MQ, tendrémos que *de* será la proyeccion del espresado diámetro DC. Pero *esta proyeccion* dc *es exactamente igual con el mismo diámetro* DC *que la causa.*

Para demostrarlo, observarémos que si desde *d* se tira *d*F perpendicular á MN, y se une el punto F con D, resultará (I. 547) que DF será perpendicular á MN en el plano de las dos rectas FD, MN, que es el MR. Haciendo la misma construccion respecto del punto *c*, deducirémos que CE es perpendicular á la misma MN en dicho plano MR; y las DF y CE siendo perpendiculares á MN, serán paralelas; y siendo DC paralela con FE, la figura DFEC es un paralelogramo, y da (I. 466 cor. 1.°) DC=FE, y DF=EC.

Ahora, las *d*F y *c*E, por ser perpendiculares á MN, son paralelas entre sí; luego el ángulo DF*d* es igual (554) con el CE*c*; y como los triángulos DF*d*, CE*c*, ademas de tener este ángulo igual, son rectángulos en *d* y *c*, y tienen las hipotenusas DF, CE iguales, serán (I. 361 esc.) iguales; y darán F*d*=E*c*; y en virtud de lo demostrado (I. 463), se tendrá FE=*dc*; y como ántes teníamos DC=FE, resulta DC=*dc*; que era lo que nos proponíamos demostrar.

Ahora, la (ec. 1) da AB:*ab*::1:cos.α (2); y como AB=CD por diámetro; y CD=*cd* por lo que acabamos de demostrar, tendrémos *cd*:*ab*::1:cos.α; que nos quiere decir, que *las proyecciones* cd, ab *de dos diámetros* del círculo, perpendiculares entre sí, no son iguales,

sinó que guardan la relacion de 1:cos.α, esto es, la del radio con el coseno del ángulo que forma el plano en que se halla el círculo con el plano sobre que se proyecta.

Dividiendo por 2 los términos de la primera razon, de la proporcion anterior, será $do:ob::1:\cos.\alpha$ (3).

Si tirámos ahora la HP paralela con BA, su proyeccion será

$hp=HP.\cos.\alpha$; que da $HP:hp::1:\cos.\alpha$ (4);

y como esta proporcion y la (3) tienen comun la segunda razon, se verificará que $HP:hp::do:ob$ (5).

Pero HP es la ordenada en el círculo correspondiente al punto H; *hp* es la ordenada de la proyeccion correspondiente; *od* es el radio OD del círculo, ó el semieje mayor de la proyeccion, y *ob* es el semieje menor de la proyeccion; luego la proporcion anterior, en virtud de lo demostrado (243), nos dice: que *la proyeccion es una elipse, que tiene por semieje mayor el radio del mismo círculo, y por semieje menor una cuarta proporcional á la unidad, al coseno del ángulo que forma el plano donde se halla el círculo con el en que se proyecta, y al radio del mismo círculo.*

§ De aquí se deduce, que la seccion de un cilindro oblicuo, que no sea paralela á la base, es una clipse; porque, prolongando el plano de la seccion, encontrará al plano de la base, tambien prolongado, formando ángulo diedro, en que el círculo se halla en uno de los planos, el cual estará proyectado en el otro plano, lo mismo que el del caso anterior, sin mas diferencia que estarlo por proyecciones oblicuas, por ser el lado del cilindro, oblicuo respecto de su base.

§ 342 Entendido esto, principiarémos estas investigaciones por ejemplos particulares; porque la esperiencia tiene acreditado la gran dificultad que ofrece á los discípulos el comenzar las teorías por preceptos generales cuando se ignoran las circunstancias á que deben su orígen. Por lo cual, nos propondrémos primero *hallar la ecuacion de la superfidie de una esfera, cuyo centro se halle en* A (fig. 137) *y un diámetro* CB *colocado sobre un plano dado de posicion* ZAX.

§ Para conseguirlo, supondrémas que el orígen de las coordenadas se halle en el centro A; y bajando desde un punto cualquiera de la superficie de la esfera la perpendicular NM sobre el plano dado ZAX, y tirando desde el punto M la MP perpendicular al diámetro CAB, llamando $x, z, u,$ á las AP, PM, NM, y tirando la AN, se tendrá

$$AN=\sqrt{AM^2+MN^2}=\sqrt{AP^2+PM^2+MN^2}=\sqrt{x^2+z^2+u^2};$$

y como por la propiedad de la esfera, la distancia de un punto cualquiera de su superficie al centro es igual al radio, se tendrá, llamándole r, que $r=\sqrt{x^2+z^2+u^2}$ ó $r^2=x^2+z^2+u^2$ (1),

será la ecuacion de la superficie de la esfera que se deseaba.

§ Si el orígen se hallase en otro punto cualquiera A′, conserván-

dose los ejes paralelos á los primitivos, sustituiríamos en esta ecuacion los valores (n) de la nota del (§ 202), y tendríamos que

$$(x-\alpha)^2+(z-\mathcal{C})^2+(u-\gamma)^2=r^2 \quad (2)$$

sería la ecuacion de la superficie de la esfera cuando el orígen se toma fuera de su centro.

§ Si nos propusiéramos determinar la ecuacion del *plano tangente á la esfera* por un punto dado en su superficie, espresaríamos por x', z', u' las coordenadas de dicho punto de contacto; y como la ecuacion de un plano cualquiera es $AX+BZ+CU+D=0$ (3), se verificará que por deber pasar por el punto de contacto, tendrá en él las mismas coordenadas que dicho punto, y será

$$Ax'+Bz'+Cu'+D=0 \quad (4).$$

Restando esta ecuacion de la (3), resulta

$$A(X-x')+B(Z-z')+C(U-u')=0 \quad (5),$$

que es la ecuacion de un plano sujeto á pasar por el punto de contacto, cuyas coordenadas son x', z', u'.

§ Ahora, del modo con que hemos espresado (I. 611), que se origina la esfera, se deduce que si en el punto superior del semicírculo que por su revolucion la origina, concebimos una tangente á dicho semicírculo, y que gire al mismo tiempo, esta tangente trazará (I. 559 cor. 3.°) un plano, que será perpendicular al radio de la esfera en el punto de contacto.

§ Ahora, si espresamos por X', Z', U' las coordenadas de este radio, la circunstancia de deber pasar por el centro, cuyas coordenadas son α, $\mathcal{C}$, γ, y por el punto de contacto, cuyas coordenadas son x', z', u', tendrá por ecuaciones (§ 184)

$$X'-x'=\frac{x'-\alpha}{u'-\gamma}(U'-u'), \quad Z'-z'=\frac{z'-\mathcal{C}}{u'-\gamma}(U'-u') \quad (6);$$

y en virtud de lo demostrado (194), deberá verificarse que $A=aC$, $B=bC$, ó poniendo, en vez de a y b los valores que les corresponden en las (ecs. 6), tendrémos

$$A=\frac{x'-\alpha}{u'-\gamma}.C, \quad B=\frac{z'-\mathcal{C}}{u'-\gamma}.C.$$

§ Sustituyendo estos valores en la (ec. 5), dividiendo por C, y quitando los divisores, se tendrá

$$(x'-\alpha)(X-x')+(z'-\mathcal{C})(Z-z')+(U-u')(u'-\gamma)=0 \quad (7);$$

que es la ecuacion del plano tangente que se pedía.

§ A esta ecuacion se le puede dar otra forma, teniendo en consideracion que correspondiendo el punto de contacto á la superficie de la esfera, deberá tenerse (ec. 2) $(x'-\alpha)^2+(z'-\mathcal{C})^2+(u'-\gamma)^2=r^2$ (8) ó

$$(x'-\alpha)(x'-\alpha)+(z'-\mathcal{C})(z'-\mathcal{C})+(u'-\gamma)(u'-\gamma)=r^2 \quad (9);$$

y añadida á la (ec. 7), resulta

$$(x'-\alpha)(X-\alpha)+(z'-\mathcal{C})(Z-\mathcal{C})+(u'-\gamma)(U-\gamma)=r^2 \quad (10).$$

§ Si en esta ecuacion hacemos $\alpha=0$, $\mathcal{C}=0$, $\gamma=0$, tendrémos

$$x'X+z'Z+u'U=0 \quad (11);$$

que espresa *la ecuacion del plano tangente*, *suponiendo el orígen en el centro de la esfera*; y es de la que se hace mas uso.

§ 343 Propongámonos *hallar la ecuacion de la superficie de un cono recto*, *cuyo eje sea* AP, *el vértice* A, APCM *un plano que pase por el vértice*, *y el ángulo jenerador el* CAP.

§ Para lo cual, tomando un punto cualquiera N sobre esta superficie, se bajará la perpendicular NM al plano ZAX, y desde el punto M en que le encuentra, la perpendicular MP al eje AP, y llamarémos igualmente x, z, u, á las AP, PM, MN. Ahora, la relacion de AP á PC debe ser constante é igual á la de 1:tang.CAP; luego si al ángulo CAP dado, le llamamos α se tendrá

$$AP=x:PC::1:\text{tang.}\alpha,$$

de donde $PC=x\text{tang.}\alpha$; y uniendo el punto P con el N por medio de la PN, que será igual con la PC por radios de la base del cono, será $PC=PN=\sqrt{PM^2+MN^2}$, ó poniendo en vez de estas líneas sus valores, será $x\text{tang.}\alpha=\sqrt{z^2+u^2}$, ó $x^2\text{tang.}\alpha^2=z^2+u^2$ (a).

§ Si suponemos ahora $\text{tang.}\alpha^2=\frac{n^2}{m^2}$, se tendrá $\frac{n^2}{m^2}x^2=z^2+u^2$ (b).

§ Si el cono lo colocásemos de modo que, teniendo su vértice en A, se confundiese su eje con AZ, entónces esta ecuacion, poniendo z en vez de x, y x en vez de z, se convertiría en $\frac{n^2}{m^2}z^2=x^2+u^2$ (c).

§ 344 Propongámonos ahora encontrar *la ecuacion de la superficie del cuerpo que se origina de girar una parábola* AE (fig 139) *alrededor de su eje* AB, *y que por lo mismo se llama parabolóide*.

§ Para conseguirlo, tomarémos como en las cuestiones precedentes un punto N sobre su superficie, y bajarémos la NM perpendicular á ZAX, y MP al eje AP; y llamando x, z, u, á las AP, PM, MN, y p al parámetro de la parábola, se tendrá por la propiedad de la curva $PE^2=PN^2=AP\times p=px$; ó poniendo en vez de PN su valor $\sqrt{PM^2+MN^2}=\sqrt{z^2+u^2}$, será $px=z^2+u^2$, que es la ecuacion buscada.

§ Del mismo modo hallaríamos las ecuaciones de las superficies originadas por *elipses*, *hipérbolas etc.* á cuyos cuerpos se les llama *elipsóides*, *hiperbolóides etc.*; pero es mejor dar un método general para encontrar las superficies de revolucion, es decir, las superficies que se originan de girar una línea cualquiera alrededor de una recta.

§ 345 *Supongamos que* AE (fig. 139) *sea una curva dada con su eje* APX, *sus abscisas* AP=x, *sus ordenadas* PE=t, *y que se nos proponga encontrar la ecuacion de la superficie del cuerpo que ella origina, girando alrededor de su eje* APX.

§ Tomemos un punto cualquiera N en esta superficie, desde el cual bajarémos las MN, PM á que llamarémos u, z, como ántes; se prolongará PM hasta E, y se tirará PN que será $=\sqrt{z^2+u^2}$, é igual con PE=t por causa de la revolucion; y así teniendo la ecuacion de la curva generatriz AE espresada en x, t, se sustituirá en ella en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}$, y se convertirá en la de la superficie pedida.

§ Si se quisiese tener la ecuacion de la superficie de un sólido formado por la revolucion de una curva alrededor de una línea que no sea su eje, no habría mas que hallar ántes la ecuacion de esta curva tomando las abscisas x sobre esta línea, y las ordenadas t perpendiculares, y despues sustituir del mismo modo en la ecuacion en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}$.

§ Apliquemos esta regla general á algunos ejemplos. 1.° Para tener la ecuacion de la superficie, formada por la revolucion de una parábola alrededor de su tangente en el vértice, como su ecuacion es entónces $x^2=pt$, á causa de que las ordenadas son las x, sustituyendo en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}$, tendrémos $x^2=p\sqrt{z^2+u^2}$, ó cuadrando $x^4=p^2z^2+p^2u^2$.

§ 2.° Para tener la ecuacion de la superficie que se forma de la revolucion de una hipérbola equilátera alrededor de sus asíntotas, se sustituirá en la ecuacion $xt=a^2$ de esta hipérbola, en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}$, y se tendrá $x\sqrt{z^2+u^2}=a^2$ ó $x^2z^2+x^2u^2=a^4$, que es la ecuacion pedida.

§ 3.° Sea la curva generatriz una parábola ó una hipérbola de un grado cualquiera, cuya ecuacion supondrémos que sea en general $t^n=x$. Para encontrar la ecuacion de la superficie de revolucion alrededor del eje de las x, no hay mas que poner en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}=(z^2+u^2)^{\frac{1}{2}}$, y se tendrá $(z^2+u^2)^{\frac{1}{2}n}=x$, ó $(z^2+u^2)^n=x^2$, que espresará la ecuacion de todas las superficies de parabolóides si n es positiva, y de hiperbolóides si n es negativa.

§ 4.° Para encontrar la superficie del cuerpo que se origina por la revolucion de un círculo, cuyo diámetro sea igual con $2a$, alrededor de su tangente, se pondrá en su ecuacion, que es en este caso $2at-t^2=x^2$; en vez de t su valor $\sqrt{z^2+u^2}$, y se tendrá

$$2a\sqrt{z^2+u^2}-z^2-u^2=x^2 \quad \text{ó} \quad 2a\sqrt{z^2+u^2}=x^2+z^2+u^2,$$

que elevando al cuadrado se convierte en

$$4a^2z^2+4a^2u^2=x^4+2x^2z^2+z^4+2x^2u^2+2z^2u^2+u^4,$$

que es la ecuacion pedida.

§ 5.° Sea la curva que se hace girar la cisoide, cuya ecuacion es (337) $at^2-xt^2=x^3$; para encontrar la ecuacion de la superficie del cuerpo que se origina por esta revolucion ó del *conoide cisoidal*, sustituirémos en ella en vez de t^2 su valor z^2+u^2, y se tendrá convertida en $az^2+au^2-xz^2-xu^2=x^3$, que es la ecuacion pedida.

§ 6.° Propongámonos por último hallar la del elipsoide, que se origina de girar la elipse alrededor de su eje mayor; como su ecuacion (260) es llamando $2a$ al eje mayor y $2b$ al menor, $a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}t^2$, poniendo en vez de t^2 su valor z^2+u^2, resultará

$$a^2-x^2=\frac{a^2}{b^2}z^2+\frac{a^2}{b^2}u^2 \quad \text{ó} \quad a^2b^2=b^2x^2+a^2z^2+a^2u^2,$$

que es la ecuacion pedida.

§ 346 Hemos principiado estas investigaciones por consideraciones sintéticas, porque siendo para nosotros mas conocidos los cuerpos originados, que las ecuaciones de sus superficies, nos es mas fácil venir en conocimiento de lo que significan las ecuaciones de su superficie por medio de los cuerpos, que del de las superficies por sus ecuaciones. Mas cuando ya se ha familiarizado nuestro entendimiento por medio de algunos ejemplos con el tránsito de uno á otro, ya nos es muy fácil el proceder en un órden inverso; y como es mucho mas general y elegante el partir de las ecuaciones, vamos ya á continuar con este rumbo (*).

(*) *Euler al fin de su obra citada* (94a), *pone un apéndice acerca* de las superficies, *que se puede considerar como el primer cuerpo de doctrina ordenado sobre tan importante materia. En él establece las bases y nociones convenientes con aquella claridad que tanto le caracteriza. Se ocupa de las superficies de primero y segundo grado sobre poco mas ó ménos en los términos que lo hacemos en el testo. Hace algunas indicaciones acerca de dividir en géneros las superficies de tercer grado y de los grados superiores; y como no hemos visto en ningun autor posterior nada relativo á estas superficies, nos parece oportuno llamar algun tanto la atencion sobre tan interesante materia.*

Dice, pues, que en estas superficies, los términos de mayores dimensiones, esto es, todos los que tienen tantas dimensiones variables como espresa el grado de la superficie, se consideren como formando un todo, que él denomina

§ Puesto que las ecuaciones de tres variables representan superficies (340), resulta que en una ecuacion en que entren x, z, u, se podrán tomar dos de ellas á arbitrio, y determinar el valor que resulta para la tercera; y así, el médio que parece mas simple para discutir ecuaciones de esta especie, es el resolverlas con relacion á una de las variables, y entónces dando sucesivamente valores á las otras dos, se deducirían los valores de la primera, y por consiguiente la posicion de diferentes puntos de la superficie.

§ Pero este método, que ya hemos empleado en la discusion de las líneas curvas, no sería propio para dar una ídea clara de la forma y del curso de las superficies; porque si es fácil retener con el pensamiento la dependencia de un conjunto de valores de una variable, sería muy difícil estender esta idéa á dos conjuntos de valores. Para obviar este inconveniente, se imaginan una multitud de planos secantes, tirados segun una ley dada, por ejemplo, paralelos á uno de los planos coordenados. Y combinando las ecuaciones de estos planos con la de la superficie propuesta, se determinan sus intersecciones mútuas. La naturaleza de estas intersecciones, y el modo con que se suceden, hacen conocer en el espacio la superficie y los diversos movimientos de las *caras* que la componen.

§ Para aclarar esto, elegirémos un ejemplo particular, y tomarémos para ello la ecuacion $u^2+x^2+z^2=r^2$; que sabemos (342) es la de una esfera, cuyo radio está representado por r; si concebimos los planos secantes paralelos al plano de las xz, la ecuacion de uno de estos (179) será $u=a$ siendo a una constante.

§ Sustituyendo este valor de u en la ecuacion propuesta, se tendrá

$$x^2+z^2=r^2-a^2.$$

§ Esta ecuacion, que pertenece á la proyeccion de la interseccion sobre el plano de las xz, representa, cualquiera que sea a, una cir-

---

miembro supremo; *que si este miembro supremo tiene factores, las superficies tendrán conos por asíntotas.*

En las superficies de tercer órden, dice que el supremo miembro es

$$\alpha u^3+\beta zu^2+\gamma z^2u+\delta x^2u+\epsilon xz^2+\zeta xzu;$$

que para determinar los factores de este supremo miembro se iguale á cero; que se vean los factores simples en que se puede resolver, sean reales ó imaginarios; y segun el número y la naturaleza de estos factores, la superficie tendrá una asíntota plana; ó dos asíntotas una plana, y otra que será un cono de segundo órden, etc.; y advierte que en este órden no hay ninguna superficie que no se estienda al infinito.

El capítulo VI del espresado apéndice *trata de la* interseccion de dos superficies: *y en él deduce que* si una superficie del órden m corta á otra del órden n, la proyeccion de la interseccion no podrá ser de un órden mas alto que el producto mn.

cunferencia de círculo, cuyo centro está en el orígen, y cuyo radio es $\sqrt{r^2-a^2}$; este radio es real mientras que a, sea positiva ó negativa, sea menor que r; es nulo cuando $a=r$, é imaginario cuando $a>r$.

§ Así, en el primer caso, la interseccion es una circunferencia de círculo; en el 2.° este círculo se reduce á un punto, que es el orígen, porque para que $x^2+z^2=0$, es preciso que $x=0$ y $z=0$; y en el 3.° el plano ya no encuentra á la superficie.

§ 347 Siendo la ecuacion propuesta simétrica con relacion á las tres variables x, z, u, se obtendrían resultados semejantes eligiendo los planos secantes paralelos á uno cualquiera de los planos coordenados.

§ Si queremos averiguar ahora las intersecciones de los planos coordenados con esta superficie, haríamos la otra variable igual con cero; de manera que $x^2+z^2=r^2$ representará la interseccion con el plano de las xz; $x^2+u^2=r^2$ la del plano de las xu; y $z^2+u^2=r^2$ la del de las zu; que todas son ecuaciones de círculos iguales.

§ De donde se deduce que se puede concebir originada la superficie propuesta como del movimiento de un círculo paralelo al plano de las xz, y cuyo radio variable y representado por $\sqrt{r^2-u^2}$, es la ordenada del círculo, que es la interseccion de la superficie propuesta con el plano de las zu, ó de las zu; luego se la puede concebir originada por el movimiento de uno de estos círculos alrededor de su diámetro, que es el aspecto bajo que hemos considerado originada la esfera en la Geometría elemental.

§ 348 Entre las ecuaciones de superficies que hemos sacado, hemos hallado unas de segundo grado, otras de tercero, otras de cuarto etc. y por esta causa se clasifican las superficies, del mismo modo que las líneas, por los grados de las ecuaciones que las representan. Se llama en general *centro* de una superficie al punto en que se verifica que todas las cuerdas que pasan por él y terminan en la superficie, quedan divididas en dos partes iguales; á estas cuerdas se les suele llamar *diámetros*, y *plano diametral* al que divide en dos partes iguales á cada una de las cuerdas de un sistema paralelas entre sí. De donde se sigue que cuando una superficie tiene un centro, todos los planos diametrales que pueda tener pasan necesariamente por este punto.

§ Aunque sobre este asunto no nos podémos detener mucho, no obstante manifestarémos cómo se debe reconocer si una superficie tiene centro y planos diametrales, y lo aplicarémos á las superficies de segundo grado.

§ Para indagar si tiene un centro la superficie propuesta, concibámosla referida á tres planos por coordenadas que pasen por el mismo centro, y se tendrá que una recta cualquiera tirada por el orígen de las coordenadas será un diámetro, y cortará á la superficie en dos pun-

tos; si suponemos que las coordenadas del primero sean x, z, u, las del segundo serán $-x$, $-z$, $-u$. Luego la ecuacion de la superficie deberá verificarse, ya se tomen las x, z, u, positivas, ya se tomen negativas. Para que cumpla con esta condicion, es necesario que la suma de los esponentes de las tres coordenadas en cada término sea el mismo que el que espresa el grado de la ecuacion propuesta. Así, si se tiene una ecuacion algebráica entre r, s, t, que representará por consiguiente una superficie referida á tres planos cualesquiera, haré-mos en esta ecuacion $r=x+a$, $s=z+b$, $t=u+c$, y se tendrá espresada en x, z, u, la ecuacion de la superficie propuesta, y referida á tres nuevos planos paralelos á los primeros, y que pasen por el punto que se supone ser el centro de la superficie. Si por valores particulares que se señalen á las constantes a, b, c, se pueden hacer desaparecer todos los términos en que la suma de los esponentes de las tres coordenadas sea diferente del que espresa el grado de la ecuacion, la superficie propuesta tendrá un centro.

§ Cuando en todos los términos de la ecuacion de una superficie, el esponente de una de las coordenadas es un número par, el plano de las otras dos coordenadas divide á la superficie en dos partes iguales y semejantes. Así, si la ecuacion está espresada en x, z, u, y en todos los términos el esponente de u por ejemplo es un número par, el plano de las xz será un *plano diametral*; porque dará para u un valor α espresado en valores de x, z y constantes, y $u=-\alpha$ satisfará tambien á esta ecuacion; luego á las mismas x, z corresponderán dos valores de u, que no se diferenciarán sinó por el signo del radical; luego el plano de las xz será un plano diametral; por la misma razon los otros dos planos de las coordenadas serán planos diametrales cuando en cada término los esponentes de x y de z sean números pares.

§ Supongamos que se tenga una ecuacion algebráica entre las variables r, s, t, que representará una superficie; por la trasformacion de las coordenadas referirémos esta superficie á tres nuevos planos

$$Ar+Bs+Ct+D=0, \quad A'r+B's+C't+D'=0,$$
$$A''r+B''s+C''t+D''=0;$$

en cuyas ecuaciones entran solo nueve constantes, porque en cada una podémos suprimir una, dividiendo por ella cada ecuacion.

§ 349 La superficie propuesta tendrá planos diametrales, cuando por los valores particulares y reales que se señalen á las nueve constentes, se puedan hacer desaparecer los términos en que los esponentes de las coordenadas son números ímpares. Las raices reales de las ecuaciones que se obtienen igualando á cero los coeficientes de estos términos, determinan el número de los planos diametrales.

De las superficies de segundo grado.

§ 350 Todas las superficies de segundo grado deben estar contenidas en la ecuacion

$$ax'^2+bz'^2+cu'^2+dx'z'+ez'u'+fx'u'+gx'+hz'+ku'+1=0,$$

que es la mas general de segundo grado entre tres variables.

§ Aquí podríamos manifestar, del mismo modo que lo hicimos (§ 325) respecto de la ecuacion general de segundo grado entre dos variables, que una ecuacion de esta especie, no siempre es posible, pero no nos detendrémos en esto, y pasarémos á ver si tiene algun centro.

§ Para lo cual, observarémos que si α, $\mathcal{C}$, γ, son las coordenadas de dicho centro, y hacemos $x'=x+\alpha$, $z'=z+\mathcal{C}$, $u'=u+\gamma$, se convertirá la ecuacion general en

$$a'x^2+b'z^2+c'u^2+d'xz+e'zu+f'xu+g'x+h'z+k'u+1=0.$$

§ Esta, siendo aún de segundo grado, no tiene sinó tres términos en que la suma de los esponentes de las coordenadas sea ímpar. Estos términos se hacen desaparecer igualando sus coeficientes con cero, lo que da $g'=0$, $h'=0$, $k'=0$, ó efectuando la multiplicacion y no tomando sinó los términos multiplicados por x, z, u, será

$$2a\alpha+d\mathcal{C}+f\gamma+g=0,\quad 2b\mathcal{C}+d\alpha+e\gamma+h=0,\text{ y }2c\gamma+e\mathcal{C}+f\alpha+k=0,$$

ecuaciones que siendo lineales respecto de α, $\mathcal{C}$, γ, se deducen para estas cantidades valores reales; luego las superficies de segundo grado tienen un centro. Estableciendo una cierta relacion entre las constantes a, b, c, d, *etc.* se puede colocar este centro á una distancia infinita del orígen de las coordenadas.

§ En efecto, en la hipótesis de $\alpha=\frac{1}{0}=\mathcal{C}=\gamma$, desaparecerán (§ 479) las g, h, k, y se convertirán las tres ecuaciones anteriores en

$$2a\alpha+d\mathcal{C}+f\gamma=0,\quad 2b\mathcal{C}+d\alpha+e\gamma=0,\quad 2c\gamma+e\mathcal{C}+f\alpha=0;$$

de donde, eliminando γ y α, y dividiendo por $2\mathcal{C}$, se saca

$$ae^2+bf^2+cd^2=4abc+def\ (k).$$

§ Recíprocamente, cuando se verifique esta ecuacion entre las constantes de la ecuacion general de la superficie de segundo grado, las coordenadas del centro de esta superficie serán infinitas.

§ 351 Para averiguar si tiene planos diametrales, observarémos que trasformando las coordenadas, se puede referir la superficie á tres nuevos planos, y en la ecuacion que resulte habrá nueve constantes arbitrarias; y si suponemos que x, z, u, sean las nuevas coordenadas, la ecuacion general se convertirá en

$$Ax^2+Bz^2+Cu^2+Dxz+Ezu+Fxu+Gx+Hz+Ku+1=0.$$

§ Haciendo desaparecer los términos en que el esponente de una cualquiera de las coordenadas, es ímpar, se tendrán las seis ecuaciones

$$D=0,\quad E=0,\quad F=0,\quad G=0,\quad H=0,\quad K=0,(A).$$

§ De las nueve constantes solo seis quedarán determinadas por estas ecuaciones; de donde se sigue que trés planos pueden cortar simétri-

camente á la superficie de segundo grado de una infinidad de maneras; luego *tiene una infinidad de planos diametrales conjugados*, propiedad análoga á la de las curvas de segundo grado, que tienen una infinidad de diámetros conjugados; y así como en las curvas hay dos diámetros conjugados perpendiculares entre sí, que se llaman ejes, así tambien *las superficies de segundo grado tienen tres planos diametrales conjugados; cuyas intersecciones son rectas, sobre que se cuentan los ejes de esta superficie.*

§ 352 Las condiciones de ser rectangulares los nuevos planos nos darán tres ecuaciones (§ 202) qne reunidas con las seis ecuaciones (A) determinarán las nueve constantes que entran en las ecuaciones de estos planos.

§ Ahora, debemos demostrar *à priori* que los valores que se obtengan para estas nuevas constantes son siempre reales. Para lo cual volverémos á tomar la ecuacion

$$ax'^2+bz'^2+cu'^2+dx'z'+ez'u'+fx'u'+gx'+hz'+ku'+1=0 \quad (a),$$

y nos proponemos demostrar, que, siendo rectangulares los ejes de las x', z', u', se puede reducir esta ecuacion por la trasformacion de las coordenadas, á esta forma $Lx^2+Mz^2+Nu^2+1=0$, sin dejar de tomar los planos de las coordenadas perpendiculares entre sí.

§ Para demostrarlo, supondrémos primero que las nuevas coordenadas x, z, u, tienen el mismo orígen que las primitivas x', z', u', y que los ejes de las x, z, u, estén determinados por los tres ángulos que hemos caracterizado (203) con las letras Ψ, θ, y φ, y para simplificar los cálculos, supondrémos ademas que el ángulo φ sea cero, lo que reducirá las fórmulas (k) del párrafo citado á

$$\begin{cases} x'= x\cos.\Psi+z\cos.\theta\,\mathrm{sen}.\Psi+u\,\mathrm{sen}.\theta\,\mathrm{sen}.\Psi, \\ z'=-x\,\mathrm{sen}.\Psi+z\cos.\theta\cos.\Psi+u\,\mathrm{sen}.\theta\cos.\Psi, \\ u'= u\cos.\theta-z\,\mathrm{sen}.\theta. \end{cases}$$

§ Sustituyendo estos valores de x', z' y u', en la ecuacion (a), se tendrá una ecuacion de segundo grado que contendrá á x, z, u, en la que los coeficientes de las variables comprenderán los ángulos Ψ y θ; y si se igualan con cero los coeficientes de los rectángulos zu, xu, tendrémos las dos ecuaciones

$$2\,\mathrm{sen}.\theta\cos.\theta(a\,\mathrm{sen}.\Psi^2+b\cos.\Psi^2+d\,\mathrm{sen}.\Psi\cos.\Psi-c).....$$
$$-(\mathrm{sen}.\theta^2-\cos.\theta^2)(f\,\mathrm{sen}.\Psi+e\cos.\Psi)=0 \quad (b),$$
$$2(a-b)\,\mathrm{sen}.\theta\,\mathrm{sen}.\Psi\cos.\Psi+\cos.\theta(f\cos.\Psi-e\,\mathrm{sen}\,\Psi).....$$
$$-d\,\mathrm{sen}.\theta(\mathrm{sen}.\Psi^2-\cos.\Psi^2)=0 \quad (c);$$

los valores de Ψ y θ determinados por estas ecuaciones serán reales; porque si eliminamos tang.θ entre estas dos ecuaciones, dividimos la ecuacion que resulta por cos.Ψ^3, y hacemos tang.$\Psi=t$, lo que da

$$\cos.\Psi^2=\frac{1}{1+t^2},\quad \mathrm{sen}.\Psi^2=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{sen}.\Psi\cos.\Psi=\frac{t}{1+t^2},$$

::

sustituimos estos valores y quitamos el divisor $1+t^2$, obtendrémos una ecuacion de tercer grado con relacion á t, la cual da por lo ménos, como verémos (377), una raiz real para $t=\text{tang.}\Psi$; y quedando determinado el ángulo Ψ, la ecuacion (c) que solo es de primer grado con relacion á tang.θ, dará tambien un valor real para esta tangente. Y así, por esta primera trasformacion, la ecuacion (a) quedará reducida á esta forma

$$Ax^2+Bz^2+Cu^2+Dxz+Gx+Hz+Ku+1=0 \text{ (e).}$$

§ Ahora será muy fácil hacer desaparecer el rectángulo xz; para lo cual bastará mudar la direccion de los ejes de las x y de las z en su plano; por lo que si se llama $x_,$ y $z_,$ á las nuevas coordenadas, y φ al ángulo que forme el eje de las x con el de las $x_,$ se tendrá (200(n))

$$x=x_,\text{cos.}\varphi+z_,\text{sen.}\varphi \text{ y } z=z_,\text{cos.}\varphi-x_,\text{sen}\,\varphi;$$

pero si se sustituyen estos valores de x y z en la ecuacion (e), y se iguala á cero el coeficiente del rectángulo $x_,z_,$ se hallará

$$2\text{sen.}\varphi\text{cos.}\varphi(A-B)+D(\text{cos.}\varphi^2-\text{sen.}\varphi^2)=0,$$

ó sustituyendo en vez de $2\text{sen.}\varphi\text{cos.}\varphi$ y $\text{cos.}\varphi^2-\text{sen.}\varphi^2$ sus valores (§ 20) sen.2φ, cos.2φ, resultará

$$(A-B)\text{sen.}2\varphi+D\text{cos.}2\varphi=0,$$

de donde $\text{tang.}2\varphi=\dfrac{\text{sen.}2\varphi}{\text{cos.}2\varphi}=\dfrac{-D}{A-B}=\dfrac{D}{B-A}$; por lo cual será siempre real tang.2φ, y la ecuacion (e) se podrá reducir en todos los casos á

$$Ax_,^2+Bz_,^2+Cu_,^2+Gx_,+Hz_,+Ku_,+1=0 \text{ (f);}$$

y como variando el orígen de las coordenadas podrémos hacer que desaparezcan los términos (350) donde se hallan lineales las variables, quedará reducida por último la ecuacion (f) á

$$L'x^2+M'z^2+N'u^2+1=0,$$

siendo rectangulares las coordenadas x, z, u.

§ De donde se sigue, así como en el (§ 351), que *las superficies de segundo grado tienen tres planos diametrales conjugados que son perpendiculares entre sí; pero no pueden tener mas que tres de estos planos.* En efecto, la ecuacion que determina el valor de tang.$\Psi=t$, resulta como acabamos de decir, de tercer grado; Ψ espresa (203) el ángulo que el eje de las x forma con la interseccion de los planos de las $x'z'$, que aquí remplaza al que allí espresamos por $x'''z'''$, y el delas xz; luego Ψ ó tang.Ψ lo mas que podrá tener (§ 366) son tres valores; luego las superficies de segundo grado no pueden tener mas de tres planos diametrales conjugados perpendiculares entre sí.

§ Ahora, mudando los signos y concibiendo que $L=-L'$, $M=-M'$, $N=-N'$, será tambien

$$Lx^2+Mz^2+Nu^2-1=0 \text{ (g).}$$

§ 353 Entendido esto, lo primero que vamos á demostrar es que

la interseccion de toda superficie de segundo grado con un plano da una curva de segundo grado (*).

§ En efecto, cualquiera que sea este plano secante, se puede convertir por la trasformacion de las coordenadas en uno de los planos coordenados á que se refiere la superficie; y como despues de esta trasformacion, la ecuacion es de segundo grado, y ademas las ecuaciones de las secciones hechas sobre una superficie por los planos de las coordenadas, no pueden ser de un grado mas elevado que el de la ecuacion de la superficie, resulta la proposicion.

§ *Si el plano secante se mueve paralelamente á él mismo, la seccion es siempre semejante á ella misma, sus ejes permanecen siempre paralelos entre sí, y su centro está siempre sobre el mismo diámetro de la superficie*, lo que se puede demostrar del modo siguiente.

§ La ecuacion de una curva de segundo grado, por la trasformacion de las coordenadas, se puede siempre poner (§ 333) bajo la forma

$$lx^2+mz^2+nxz+p=0,$$

y si en esta ecuacion se sustituye kx en vez de x, y kz en vez de z, siendo k una constante, la nueva ecuacion que resulte de esta sustitucion pertenecerá á una curva semejante á la primera (nota del párrafo 205), y que solo se diferenciará de ella á causa del término constante; porque, despues de haber dividido toda la ecuacion por k^2, se convertirá en $lx^2+mz^2+nxz+\frac{p}{k^2}=0$; luego todas las curvas de segundo grado, cuyas ecuaciones sean de esta forma, y no se diferencien sinó en el término constante, serán semejantes y se hallarán colocadas del mismo modo.

§ 354 Esto supuesto, volvamos á tomar la ecuacion (g) de la superficie de segundo grado $Lx^2+Mz^2+Nu^2-1=0$, y sea

$$u=Ax+Bz+C;$$

(*) *Esta proposicion se verifica tambien en las superficies de todos los grados. En efecto,* una superficie del órden ó grado m no puede ser cortada por un plano en una línea superior al órden m, ni ser encontrada por una recta en mas de m puntos.

Porque si se toma el plano secante por el de las xz, *se deberá hacer* u=0 *en la ecuacion de la superficie; con lo cual se tendrá la ecuacion de la interseccion de la superficie con el plano secante; y esta ecuacion puede ser á lo mas del grado* m.

En segundo lugar, dada una recta, se la puede tomar por eje de las x; *para lo cual se necesita hacer* z=0, u=0 *en la ecuacion de la superficie; lo que dará una ecuacion que será á lo mas del grado* m, *y que dará para valores de* x, *las distancias del orígen á los diferentes puntos de interseccion de la superficie con la recta; luego el número de las intersecciones no esce-de á* m.

la ecuacion de un plano que corte á la superficie; con lo cual tendrémos que la proyeccion de la curva de interseccion sobre el plano de las *xz* tendrá por ecuacion

$$x^2(L+NA^2)+z^2(M+NB^2)+2ABNxz\ldots\ldots$$
$$+2ACNx+2BCNz+NC^2-1=0 \text{ (h)}.$$

§ Cuando el plano secante muda de posicion, si se mueve paralelamente á él mismo y varía solo C, permaneciendo A y B las mismas, resultará que los coeficientes de x^2 y z^2 en la ecuacion de la proyeccion serán siempre los mismos, cualquiera que sea C. Pero por la trasformacion de las coordenadas, esta ecuacion se puede referir á esta forma

$$l't^2+m'v^2+n'tv+p'=0,$$

ecuacion en que los coeficientes l', m', n', no contienen sinó A y B, mientras que p' solo contiene á C; haciendo mudar de posicion al plano secante, ó lo que es lo mismo, haciendo variar á C, el valor de p' variará tambien y se convertirá en p''; luego la ecuacion precedente se convierte en $l't^2+m'v^2+n'tv+p''=0$.

§ Pero esta no se diferencia de la anterior sinó en el término constante; luego pertenece á una curva semejante á la primera proyeccion; y por lo mismo queda demostrado, que todas las proyecciones de las secciones paralelas son semejantes; de donde se concluye que todas las secciones son semejantes á ellas mismas y están colocadas del mismo modo.

§ 355 Ademas, el lugar de los centros de estas secciones es un diámetro de la superficie; porque resolviendo la ecuacion (h) con relacion á x, y despues con relacion á z, y no tomando de estos valores sinó la parte que está fuera del radical, se tendrán las ecuaciones de dos diámetros de la curva á que pertenece la ecuacion (h), á saber:

$$x=-\frac{AN(Bz+C)}{L+NA^2}\ldots\ldots\text{(i)} \quad \text{para el primero y}$$

$$z=-\frac{BN(Ax+C)}{M+NB^2}\ldots\ldots\text{(k)} \quad \text{para el segundo.}$$

§ Dando á C un valor particular C' y deduciendo de estas dos ecuaciones los valores de x y de z, serán los de las coordenadas del centro de la seccion correspondiente á C', pues que el centro de la proyeccion de una curva es la proyeccion del centro de esta curva; luego eliminando C entre estas dos ecuaciones, se tendrá para la línea, que es el lugar de todos los centros de las secciones paralelas, la ecuacion

$$x(L+NA^2)+ABNz=\frac{A}{B}[z(M+NB^2)+ABNx],$$

que pertenece á una recta trazada sobre el plano de las *xz*.

§ 356 Sustituyendo en la ecuacion del plano $u=Ax+Bz+C$; en

vez de C su valor sacado de la ecuacion (i), se obtiene, despues de hechas todas las simplificaciones, $ANu=-Lx$, que es la segunda ecuacion de la misma recta, y se halla en el plano de las xu. Estas dos ecuaciones siendo lineales y no teniendo término constante, pertenecen á una recta que pasa por el orígen de las coordenadas; luego esta recta pasa por el centro de la superficie, y es por consiguiente un diámetro.

{ 357 Si en la ecuacion $Lx^2+Mz^2+Nu^2-1=0$ se sustituyen en vez de los coeficientes L, M, N, las constantes $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, siendo $a>b>c$, se nos convertirá en

$$b^2c^2x^2+c^2a^2z^2+a^2b^2u^2=a^2b^2c^2 \quad (1).$$

{ La ventaja de esta sustitucion es que el signo de cada término sea independiente de valores particulares de los coeficientes, y que no se introducen por constantes en las ecuaciones de las secciones de la superficie por los planos de las coordenadas, sinó los ejes principales de estas secciones.

{ La combinacion de los signos de la ecuacion (1) presenta tres distintos casos, á saber: *cuando el segundo miembro de la ecuacion siendo siempre positivo, ó todos los términos del primer miembro son positivos; ó los dos primeros son positivos y el tercero es negativo; ó en fin el primero es positivo y los otros dos negativos*; luego podrémos escribir la ecuacion propuesta en cada uno de estos tres casos

$$b^2c^2x^2+c^2a^2z^2+a^2b^2u^2=a^2b^2c^2 \quad (1) \quad \text{ó} \quad Lx^2+Mz^2+Nu^2=1,$$
$$b^2c^2x^2+c^2u^2z^2-a^2b^2u^2=a^2b^2c^2 \quad (1') \quad \text{ó} \quad Lx^2+Mz^2-Nu^2=1,$$
$$b^2c^2x^2-c^2a^2z^2-a^2b^2u^2=a^2b^2c^2 \quad (1'') \quad \text{ó} \quad Lx^2-Mz^2-Nu^2=1,$$

{ A cada ecuacion corresponde una forma particular de la superficie.

{ Consideremos primero la ecuacion en que todos los términos son positivos.

§ *La superficie de la ecuacion* (1) *es cerrada, y no tiene por consiguiente ninguno de sus puntos que no se halle á una distancia finita de su centro.* En efecto, tirando por el orígen de las coordenadas una recta cualquiera, cuyas ecuaciones sean $x=\alpha u$, $z=\mathfrak{C}u$, sustituyendo en vez de x y z estos valores en (1), se tendrá para el valor de u correspondiente al punto de interseccion de la recta y de la superficie, $u=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\mathfrak{C}^2+a^2b^2}}$; pero, cualesquiera que sean las constantes α, $\mathfrak{C}$, el radical no puede llegar á ser nulo, porque solo consta de la suma de cuadrados; luego los valores de las coordenadas del punto de interseccion de la superficie y de una recta cualquiera, no pueden ser infinitos, y por lo mismo la superficie es cerrada. Para distinguirla de las otras que no son cerradas, se llama *elipsóide*.

§ 358. Las secciones principales del elipsóide, que se obtienen haciendo sucesivamente $u=0$, $z=0$, $x=0$, son elipses que tienen por ecuaciones

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad u^2=\frac{c^2}{a^2}(a^2-x^2)\ \text{y}\ u^2=\frac{c^2}{b^2}(b^2-z^2).$$

§ Los ejes de las elipses $2a$, $2b$, $2c$, son tambien los ejes de la superficie. Los puntos en que estos ejes encuentran á la superficie son sus *vértices*.. El elipsóide se convierte en elipsóide de revolucion ó en esfera, segun sean iguales dos ó tres de sus ejes.

§ Este elipsóide está representado en la (fig. 140 lám. 9), en la que (1) es la seccion de esta superficie por el plano de las xz; (2) su seccion por el plano de las xu; y (3) sn seccion por el plano de las zu,

§ Estas tres secciones son elipses, cuyos ejes son $2a$, $2b$, $2c$, ó

SS', $S''S'''$, $S^{IV}S^{V}$; y S, S', S'', S''', S^{IV}, S^{V},

son sus seis vértices.

§ Si desde el punto O' como centro, con un radio $OS''=AO'=b$, se describe un arco de círculo que corte á la elipse (2) en el punto A ó a, las dos rectas AA', OO' ó aa', OO', determinan la posicion del plano, cuya interseccion con el elipsióde es un circulo (*).

§ 359 El 2.º género de las superficies de 2.º grado está comprendido en la ecuacion (I'), cuyos dos primeros términos son positivos y el 3.º negativo; y las tres secciones principales tienen por ecuaciones

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2),\quad u^2=\frac{c^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad u^2=\frac{c^2}{b^2}(z^2-b^2).$$

(*). MMrs. *Binet*, *Petit* y *Chasles* han enriquecido esta materia con muchas proposiciones nuevas, que se hallan en la *Correspondencia de la Escuela Politécnica de* Mr. *Hachette*, en los *Anales de Matemáticas* de Mr. *Gergogne*, y en la *Correspondencia Matemática y Física* de Mr. *Quetelet*. Y aunque los límites de nuestra obra no permiten incluirlas, enunciarémos sin embargo las que nos parecen mas interesantes, y son las siguientes:

1.ª *La suma de los cuadrados de los diámetros conjugados de un elipsóide es constante é igual á ta suma de los cuadrados de los ejes.*

2.ª *La suma de los cuadrados de las proyecciones de tres diámetros conjugados de un elipsóide sobre una recta fija, es constante.*

3.ª *La suma de los cuadrados de las caras del paralelepípedo construido sobre los diámetros conjugados de un elipsóide es constante.*

4.ª *Si se proyectan sobre un plano fijo las caras del paralelepipedo construido sobre tres diámetros conjugados del elipsóide, la suma de los cuadrados de las proyecciones será constante.*

5.ª *El volúmen del paralelepipedo construido sobre tres diámetros conjugados de un elipsóide es constante é igual al paralelepipedo construido con los ejes.*

6.ª *Si se tienen dos superficies del segundo órden concéntricas, la suma de*

§. La 1.ª seccion es una elipse, y las otras dos son hipérbolas. De donde se puede concluir que esta superficie, que se ha llamado *hiperbolóide de una cara* ó *de una hoja* no está cerrada; lo que tambien se puede demostrar, concibiendo por el orígen de las coordenadas una recta que tenga por ecuaciones $x=\alpha u$, $z=\mathcal{C}u$; la cual cortará á la superficie en un punto, cuyas coordenadas son

$$\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\mathcal{C}^2-a^2b^2}}, \quad \alpha.\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\mathcal{C}^2-a^2b^2}},$$

$$\mathcal{C}.\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\mathcal{C}^2-a^2b^2}};$$

haciendo nulo el radical, lo que hace infinitas las coordenadas, se tiene

$$b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\mathcal{C}^2-a^2b^2=0, \quad \text{de donde se saca} \quad \mathcal{C}=\frac{b\sqrt{a^2-c^2\alpha^2}}{ac},$$

que será real cuando a^2 sea mayor que $c^2\alpha^2$. Las ecuaciones $x=\alpha u$, $z=\mathcal{C}u$ de la recta que corta á la superficie en un punto situado á una distancia infinita del orígen de las coordenadas, se convierten en

$$x=\alpha u, \quad z=\frac{bu\sqrt{a^2-c^2\alpha^2}}{ac}.$$

§ Si se elimina α entre estas dos ecuaciones, se tendrá

$$b^2c^2x^2+c^2a^2z^2-a^2b^2u^2=0.$$

§ Esta ecuacion, que se obtendría igualando á cero el 2.º miembro de la ecuacion (l'), pertenece (343) á una superficie cónica que tiene su vértice en el orígen de las coordenadas, y que es *ásintota del hiperbolóide*. Y en efecto, esta ecuacion consta, como la (cc. a § 343) de solos tres términos, y en cada uno se halla una de las variables x, z, u elevada al cuadrado (*).

---

los cuadrados de tres diámetros conjugados cualesquiera de la primera superficie, divididos respectivamente por los cuadrados de los tres diámetros de la segunda superficie comprendidos sobre las direcciones de estos tres diámetros conjugodos, es constante.

El diez y siete de abril del presente año de 1843 se leyó en la Academia de Ciencias del Instituto de Francia por Mr. *Amiot*, una Memoria cuyo título es: *Nuevo método de generacion y de discusion de las superficies de segundo órden*. Y segun el dictámen de los informantes, que lo fueron MMrs. *Liouville* y *Cauchy*, el autor da á conocer en esta Memoria nuevas propiedades de las superficies de segundo grado; y manifiesta el partido que se puede sacar de ellas para la discusion de estas mismas superficies; y que para obtener la ecuacion mas general de estas superficies, basta resolver la cuestion siguiente: *¿cuál es el lugar geométrico descrito en el espacio por un punto móvil, cuya distancia á un punto fijo ofrece un cuadrado constantemente proporcional al rectángulo construido sobre la distancia del mismo punto á dos planos fijos dados?*

(*) *Mr. Leroy representa la superficie cónica, que es* asíntota del hiperbolóide de una cara ú hoja *por la (fig. v'' lám. 8'), en la cual* VOV' *es la*

§ El hiperbolóide de una cara ú hoja goza de una propiedad muy notable, y que no conviene sinó á esta superficie, y es que se puede *engendrar por una recta de dos maneras diferentes*, como se manifiesta (§ 363 *f*).

§ El hiperbolóide es de revolucion cuando dos de sus ejes son iguales.

§ La ecuacion (l′) comprende las ecuaciones de los conos y de los cilindros rectos ú oblicuos. En el elipsóide, los seis vértices son reales; en este hiperbolóide, dos son imaginarios y cuatro son reales.

§ 360 La figura 141 lám. 9) representa el hiperbolóide de una cara; la interseccion del plano de las xz con esta superficie es la elipse (1); las de los planos de las xu y de las zu son las hipérbolas (2) y (3); S, S', S'', S''' son los cuatro vértices reales.

§ Si desde el punto O″ como centro, con un radio $O''A=OS=a$ se describe una circunferencia que corte á la hipérbola (3) en el punto A ó a, las dos rectas AA′, OO″, ó aa', OO″, determinan la posicion del plano, cuya interseccion con el hiperbolóide es un círculo.

§ Las rectas fg, hk, lm tangentes de la elipse (1), y sus correspondientes $f'g'$, $h'k'$, $l'm'$ *etc.* tangentes á la hipérbola (2), son las proyecciones de la recta generatríz del hiperbolóide, considerada en diferentes posiciones.

§ 361 El 3.er género de superficies de 2.º grado está representado por la ecuacion (l″), cuyo primer término es positivo y los otros dos negativos. Las secciones principales tienen por ecuaciones

$$z^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad u^2=\frac{c^2}{a^2}(x^2-a^2),\quad -c^2a^2z^2-a^2b^2u^2=a^2b^2c^2.$$

§ Las dos 1.as secciones son hipérbolas, y la 3.ª es imaginaria; lo que indica que la superficie tiene caras infinitas entre las cuales hay un intervalo. A esta superficie se la caracteriza con el nombre de *hiperbolóide de dos caras ú hojas*; y se deduce por el mismo método que en el caso anterior, que tiene por asíntota una superficie cónica, cuya ecuacion es $b^2c^2x^2-c^2a^2z^2-a^2b^2u^2=0$, y cuyo vértice está en el orígen de las coordenadas.

§ El hiperbolóide de dos caras está representado en la (fig. 142 lám. 9); las intersecciones de los planos de las xz y de las xu con esta superficie, están repesentadas por las hipérbolas (1) y (2); AA′ ó aa' es la recta que determina la posicion del plano, cuya intersercion con la superficie es un círculo, siendo este plano perpendicular al de las xu. Tiene dos vértices reales, que son S y S′.

§ 362 *Por un punto cualquiera de una superficie de* 2.º *grado se pueden hacer pasar dos circunferencias de círculo que se hallen enteramente sobre la superficie.*

§ Para demostrarlo, supongamos que sea $x^2+z^2+u^2=r^2$ la ecuacion de una esfera, cuyo radio esté representado por r, y cuyo centro esté en el orígen de las coordenadas; cortándola por un plano $U=AX+BZ$, que pase tambien por

---

superficie cónica, cuyo vértice se halla en el orígen O *de las coordenadas. Este cono tiene por base paralela á* XY *una elipse, cuyo centro está sobre* OZ; *pero es necesario considerarle generalmente como* un cono del 2.º grado, *cuya base puede ser una de las tres curvas de este órden.*

el orígen, la seccion es necesariamente un círculo, y en ella se verificará que $u=Ax+Bz$; sustituyendo este valor en la ecuacion de la esfera, tendrémos que la proyeccion de esta interseccion sobre el plano de las xz tiene por ecuacion

$$x^2(1+A^2)+z^2(1+B^2)+2ABxz=r^2 \quad (a');$$

cortando la superficie de 2.º grado, cuya ecuácion es

$$Lx^2+Mz^2+Nu^2-1=0$$

con el mismo plano, la seccion es en general una curva de 2.º grado, cuya proyeccion sobre el plano de las xz tiene por ecuacion

$$x^2(L+NA^2)+z^2(M+NB^2)+2ABNxz-1=0 \quad (a'').$$

§ La seccion será un círculo, si para valores reales de A, B, r, se hacen idénticas las ecuaciones (a'), (a''); lo que se verificará si se tiene

$$\frac{1+B^2}{1+A^2}=\frac{M+NB^2}{L+NA^2}, \quad \frac{2AB}{1+A^2}=\frac{2ABN}{L+NA^2}, \quad \frac{r^2}{1+A^2}=\frac{1}{L+NA^2}.$$

§ La 2.ª ecuacion de estas da $AB=0$; de otro modo se tendría $L=N$, lo que no se puede verificar sinó en un caso particular. De $AB=0$, se concluye ó $A=0$ ó $B=0$. Supongamos primero que $B=0$, y tendrémos que las otras dos ecuaciones darán para A y r los valores siguientes:

$$A=\sqrt{\frac{M-L}{N-M}}, \quad r=\sqrt{\frac{1}{M}}; \quad \text{ó (§ 357)} \quad A=\frac{c}{a}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}}, \quad r=b.$$

§ Si se hubiera hecho $A=0$, se hubiera encontrado

$$B=\sqrt{\frac{M-L}{L-N}}, \quad r=\sqrt{\frac{1}{L}},$$

que manifiestan la propiedad enunciada.

§ 362a Acerca de *las superficies de 2.º grado, cuyo centro se halla en el infinito*, solo dirémos que la (ec. k § 350) espresa la relacion que deben tener las constantes a, b, c, d, e, f para que se verifique la circunstancia de que la superficie de 2.º grado tenga su centro á una distancia infinita del orígen de las coordenadas.

§ Dos son las superficies que se hallan en este caso, y estan representadas por las (figs. x, y lám. 8″).

§ La (fig. x) espresa el *parabolóide elíptico*; denominacion que se le ha dado, á causa de que las secciones con los planos de las xz y de las xu son *parábolas*, cuyas ramas divergen hacia la misma parte del espacio, y que todas las secciones hechas en esta superficie, paralelamente al plano de las zu, son *elipses*. Señalamos por (1) y (2) las parábolas, que son las secciones de la superficie con los planos de las xz y de las xu; st, $s'l'$, $s''l''$, *etc.* son las trazas de los planos paralelos al plano de las xu, que como este último, cortan á la superficie segun la parábola (2), cuyo vértice se halla sucesivamente en S, s, s', s'', *etc.*

§ La (fig. y lám. 8″) representa el *parabolóide hiperbólico*; denominacion que se le ha dado, á causa de que, de las tres secciones principales con los planos de las xz, xu y zu, las dos primeras son *parábolas*, cuyas ramas divergen hacia diferentes lados con relacion al plano de las xu, correspondiendo la última al sistema de dos rectas; y todas las secciones hechas en su su-

perficie paralelamente á los planos de las xu, y zu, son *hipérbolas*. Representamos por (1) y (2) las secciones de la superficie por los planos de las xz y de las xu, que son parábolas. Los ejes de estas son los ejes de las coordenadas.

§ Las dos rectas tt', tt' que se ven en (3), resultan de la interseccion de la superficie por el plano TST' de las zu.

§ ts, $t's'$, $t''s''$ *etc.* son las trazas de los planos paralelos al plano de las xu, que cortan á la superficie segun la parábola (2), cuyo vértice se halla sucesivamente en s, s', s'', *etc.*

§ Las rectas fg, hk, lm, *etc.* $f'g'$, $h'k'$, $l'm'$, *etc.* tangentes á la parábola, son las proyecciones de la recta generatriz de la superficie sobre los tres planos rectangulares.

§ De todo lo que acabamos de esponer, resulta: que *las superficies* de 2.° grado son cinco, á saber: el ELIPSÓIDE; el HIPERBOLÓIDE *de una cara ú hoja*; el HIPERBOLÓIDE *de dos caras ú hojas*; el PARABOLÓIDE ELÍPTICO, y el PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO.

§ Para que esta clasificacion sea completa, es necesario agregar á estas superficies, como casos particulares, los *conos* y los *cilindros*. Ademas se debe advertir que una ecuacion de 2.° grado entre tres incógnitas puede tambien dar *dos planos que se corten*; dos *planos paralelos*; un *plano único*; una *recta*; un *punto*; y aun puede ofrecer *casos de imposibilidad*.

§ Para que se pueda formar una justa y exacta idéa de todo lo que acabamos de manifestar, sería de la mayor importancia el que se construyesen modelos, que representasen cada una de estas superficies. Cuando yo estuve en París, por los años de 1826 y 1827, conseguí, en virtud de muchos sacrificios de toda especie que *Mr. Brocchi*, constructor de modelos para la Escuela Politécnica, me hiciese los correspondientes al *elipsóide* y al *hiperbolóide de una cara*; lo que efectuó con el mayor primor y exactitud; pero, á causa de mis vicisitudes, no me fué posible traerlos á España, como me proponía.

§ 363 Terminarémos estas investigaciones, manifestando el modo de tirar un plano tangente á una superficie de 2.° grado.

§ Para esto, observarémos que se dá el nombre de *plano tangente* de una superficie á aquel que la encuentra en un solo punto; por lo cual todas las líneas que pasen por este punto y se hallen en dicho plano, encontrarán á la superficie en un solo punto; y recíprocamente, el plano tangente es el lugar de todas las rectas que, pasando por el punto de contacto, encuentran á la superficie solo en dicho punto, de cuya propiedad nos valdrémos para encontrar dicho plano.

§ En efecto, si tomamos la ecuacion [(f) 352],

$$Ax^2+Bz^2+Cu^2+Gx+Hz+Ku+1=0\,,$$

y suponemos que x', z', u', sean las coordenadas del punto de contacto, tendrémos $Ax'^2+Bz'^2+Cu'^2+Gx'+Hz'+Ku'+1=0$ (f'),

que, restada de la anterior y descomponiendo en factores, resultará

$$A(x+x')(x-x')+B(z+z')(z-z')+C(u+u')(u-u')+G(x-x')+\ldots\ldots$$
$$H(z-z')+K(u-u')=0 \quad (f'')\,;$$

y llamando X, Z á las coordenadas de una recta que pase por el punto de contacto, tendrá por ecuaciones $X-x'=a(U-u')$, $Z-z'=b(U-u')$, en las cuales a y b representan las tangentes trigonométricas de los ángulos que sus

proyecciones forman con el eje de las u. En los puntos en que esta recta encuentre á la superficie, se tendrá $x=X$, $z=Z$ y $u=U$, y las ecuaciones anteriores se convertirán en $x-x'=a(u-u')$, $z-z'=b(u-u')$;
y sustituyendo en vez de $x-x'$, $z-z'$, estos valores en la ecuacion (1''), se tendrá $[Aa(x+x')+Bb(z+z')+C(u+u')+Ga+Hb+K](u-u')=0$;
esta ecuacion queda satisfecha cuando $u=u'$, que da $z=z'$, $x=x'$, lo que debía verificarse, pues que hemos supuesto que la recta pasaba por el punto, cuyas coordenadas son x', z', u'.

§ Suprimiendo el factor $u-u'$ resulta

$$Aa(x+x')+Bb(z+z')+C(u+u')+Ga+Hb+K=0,$$

ecuacion que pertenece al 2.° punto en que la recta considerada como secante encuentre á la superficie. Si esta recta debiese ser tangente, este 2.° punto se debería confundir con el 1.°, y sus coordenadas deberían ser las mismas; por lo que la ecuacion precedente deberá quedar satisfecha en este caso, haciendo

$$x=x',\ z=z',\ u=u',$$

lo que da $2Aax'+2Bbz'+2Cu'+Ga+Hb+K=0$, ecuacion que espresa las condiciones necesarias para que una recta sea tangente á una superficie de segundo grado. Como ella no basta para determinar las dos cantidades a y b, una de ellas quedará arbitraria, y existirán para cada punto una infinidad de rectas que gocen de esta propiedad.

§ Si en esta ecuacion sustituimos en vez de a y b sus valores $\frac{X-x'}{U-u'}$, $\frac{Z-z'}{U-u'}$, sacados de las ecuaciones de las rectas, el resultado espresará una propiedad comun á todas las rectas que tocan á la superficie en el punto dado; no comprenderá nada que sea particular á ninguna de ellas, y por lo mismo pertenecerá á la superficie que ellas formen, la cual tendrá por ecuacion

$$(X-x')(2Ax'+G)+(Z-z')(2Bz'+H)+(U-u')(2Cu'+K)=0,$$

que siendo lineal con relacion á X, Z, U, manifiesta que el lugar de estas tangentes es un plano que no tendrá mas de un punto comun con dicha superficie, y será por consiguiente el plano tangente; y no entrando en esta ecuacion mas indeterminadas que A, B, C, G, H, K, x', z', u', que son dadas por la ecuacion de la superficie, y por suponer dado el punto de contacto, se sigue que queda determinado de todo punto este plano.

De las superficies curvas consideradas bajo el aspecto de su generacion.

§ 363*a* Considerando las superficies curvas, en virtud de su generacion, nos vemos conducidos á cuestiones que exigen el empléo de la mas alta y sublime *Análisis*, y que se rozan con los procedimientos mas importantes y trascendentales de la *Geometría Descriptiva*; requiriéndose, ademas, cierta predisposicion intelectual para concebir á un mismo tiempo, y con claridad, muchos puntos, líneas, superficies y aun cuerpos en el espacio. *Monge* en sus *Hojas de Análisis aplicada á la Geometría, para uso de la Escuela Politécnica*, ha hecho un servicio sumamente grande á las ciencias, por sus sabias y difíciles investigaciones sobre tan interesante ramo; y aunque la presente obra no permite profundizar sobre esta materia tanto como requiere su importancia, no podemos ménos de

bosquejar su objeto, indicando algo acerca del modo de sacar las ecuaciones de varias superficies engendradas por líneas que se mueven segun leyes dadas y de las intersecciones de las superficies, que forman *curvas de simple ó de doble curvatura.*

§ Para señalar desde luego el camino, recordarémos que ya hemos llamado la atencion de los principiantes sobre el modo con que se debe proceder en estas investigaciones, al sacar la ecuacion del plano en la nota del § 190. Pero, ante todas cosas, debemos manifestar ahora, que cuando *Monge* se ocupó de tan importante asunto, hizo uso de los conocimientos del *Cálculo Infinitesimal*; pero como esta materia se debe considerar como del resorte de la aplicacion á la Geométria de la Análisis finita, hay cierta dificultad en poner estos conocimientos bajo el aspecto elemental; y así, ántes de principiar nuestras investigaciones, debemós anticipar ciertas idéas para que se presente con claridad, exactitud y generalidad lo que nos proponemos manifestar; y se referirán á los dos puntos siguientes.

§ 363 *b* 1.° Hemos visto en la Geometría elemental, que el *cilíndro recto* se puede considerar engendrado como por la revolucion de un rectángulo alrededor de uno de los lados. El *cilindro oblicuo* no es cuerpo de revolucion; y le hemos considerado originado por una recta, que se moviese paralelamente á ella misma ó á otra, dada de posicion, alrededor de la circunferencia de un círculo. *Cavaleri*, en su *Geometría de los indivisibles*, impresa en 1653; pág. 3 considera los cuerpos que se originan por el movimiento de una recta finita, que se mueve paralelamente á una recta dada, alrededor de una figura plana cualquiera; y llama *cilíndrico* al cuerpo que se describe de esta manera; y á la superficie, que se origina, la llama *cilindrácea.*

§ En la pág. 4 considera los cuerpos que se originan por el moivmiento de una recta, sujeta á pasar por un punto dado, y girando alrededor del perímetro de una figura cualquiera; y á los cuerpos, originados por este procedimiento, los caracteriza con el nombre de *cónicos;* y la superficie, que se origina, la designa con el nombre de *conicular.*

§ Y de estas dos definiciones saca por corolario, que el cilindro y cono, que definen *Apolonio* y *Sereno* son *cilíndricos* y *cónicos.*; y en el libro 1.° se ocupa de las diversas secciones hechas por planos en estos cuerpos. *Juan Bernoulli* en la pág. 110 del tomo 4.° de sus obras, usa de la palabra *cilíndróidica.* Y Euler, en el capítulo segundo de su Apéndice citado (nota del § 346), usa de la palabra *cilíndrico* en el mismo sentido que *Cavaléri.*

§ Los Geómetras modernos, sin esceptuar á *Monge*, han tenido necesidad de considerar cuerpos originados por rectas paralelas á una recta dada, ó sujetas á pasar por un punto dado, y que recorran el perímetro de una figura cualquiera; y sin darse por entendidos de las denominaciones dadas por *Cavaleri*, han llamado á estos cuerpos *cilindros ó conos de tal ó tal base;* y cuando tienen que hablar del cilindro y cono, que son del resorte de la Geometría elemental; usan de la denominacion de *cilindro y cono de base circular*, y distinguen los demas con la denominacion de cilindro y cono *elíptico*, *parabólico*, *etc. etc*,

§ Segun mi modo de pensar, esto es una verdadera retrogradacion, perjudicial á los progresos de las ciencias; y por lo mismo haré aquí uso de la denominacion de *Cavaleri*, para despertar, al ménos el deséo de establecer el lenguage con la mayor exactitud; pues dadas las idéas de cilindro y cono en la Geo-

metría elemental, el decir despues *cilindro ó cono de base circular* es una redundancia; y el decir *cilindro ó cono de base eliptica ó parabólica ó hiperbólica etc.* viene á ser una contradiccion.

§ Los que conocen la importancia de que el lenguage sea exacto, no pueden ménos de desaprobar, por las mismas razones, la denominacion de *centro* con que caracterizan, sin necesidad ni utilidad, lo que tan propiamente se llama *vértice del cono* en Geometría.

§ 363*c* 2.° Lo 2.° de que nos vamos á ocupar aquí, es la anticipacion de una idéa, que se esplica (§ 418 de este 2.° tomo); y es: que se llama *funcion de una ó mas variables, toda cantidad cuyo valor depende de aquella ó aquellas variables*; y para espresar una funcion cualquiera de una ó mas variables, no hay mas que poner la variable ó las variables dentro de un paréntesis, precedido este de alguna de las letras que se ponen como inicial de la palabra *funcion*, y son: f, F, φ, ó cualquiera otra, con tal que así se esprese. Por manera, que $f(x)$ se lee *funcion* x, y espresa una cantidad, cuyo valor depende del valor que tenga x; $f(x,z)$ es una cantidad, cuyo valor depende del de las dos variables x y z, cualesquiera que sean por otra parte las constantes que contengan; $f(x,z,u)$ espresa una cantidad, cuyo valor depende de las tres variables x, z, u; y así sucesivamente, y con cualquiera otro signo de funcion como F, F', φ', etc.

§ *De las superficies cilindráceas.* 363*d* Si suponemos que la recta CM (fig. z lám. 8'') se mueva paralelamente á ella misma ó á otra recta cualquiera, dada de posicion, como el eje AU, pero con la condicion de que su estremo C recorra el perímetro de la figura $CC'C''$, trazará en su movimiento una superficie de las que *Cavaleri* llama *cilindráceas*. La traza de esta superficie en el plano de las xz será la curva $CC'C''$, en cuya ecuacion entrarán las dos variables x, z; y como toda ecuacion se puede reducir á cero, pasando todos los términos al primer miembro, resulta que en general, en virtud de lo que acabamos de manifestar, podrémos espresar toda ecuacion entre dos variables, por

$$f(x,z)=0,$$

siendo f signo de funcion. La recta por cuyo movimiento se traza la superficie *cilindrácea*, se llama *generatriz*; y el perímetro de la figura por donde resbala la generatriz, se llama *directriz*. De esta generacion, resulta que el *contacto de un plano con un cilíndrico se verifica segun una generatriz entera*, y un punto cualquiera N de la superficie cilindrácea, cualquiera que sea el valor de u, esto es, diste mucho ó poco el punto N del punto C, tendrá siempre el mismo valor de x y de z, que su proyeccion C; por consiguiente, las coordenadas de todos los puntos de la superficie de este *cilíndrico* satisfarán á la relacion $f(x,z)=0$, que no contiene á la variable u; mientras que todo punto L tomado fuera de esta superficie, teniendo una proyeccion G, que no caiga sobre la curva $CC'C''$, no podrá verificar por sus coordenadas $x=AH$, $z=GH$, la ecuacion propuesta. De donde se debe concluir, que *la ecuacion* $f(x,z)=0$ *representa una superficie cilindrácea*, paralela al eje AU, y cuya traza sobre el plano xz es dada tambien por la misma ecuacion, cuando se consideran solo dos dimensiones del espacio. Una consecuencia análoga se aplica á las ecuaciones

$$f'(x,u)=0, \text{ ó } f''(z,u)=0,$$

de las cuales, cada una, tomada aisladamente, pertenece á la superficie de un *cilíndrico* paralelo con AZ, ó AX; es decir, *paralelo al eje de la coordenada que no entra en la ecuacion.*

§ Debemos observar: que si se quisiese determinar analíticamente la curva $CC'C''$ sola, sería necesario emplear las ecuaciones simultáneas $f(x,z)=0$ y $u=0$; porque entónces no habría ya sobre toda la superficie cilindrácea sinó los puntos de su base que verificarían á un mismo tiempo á las dos relaciones citadas.

§ Cuando la ecuacion propuesta contiene tres variables, como $F(x, z, u)=0$, hay necesariamente dos á las cuales se pueden dar valores arbitrarios; luego si hacemos solamente $u=c$, la ecuacion $F(x, z, c)=0$ contendrá aun dos variables, y representará una superficie cilindrácea paralela con AU; mas como no se pueden tomar aquí sinó los puntos de esta superficie que satisfacen á la condicion $u=c$, se sigue que por esta primera hipótesis, se obtendrá una curva, á saber, la seccion hecha en este cilíndrico por el plano $u=c$ paralelo al XZ. Si se hace despues $u=c'$, se hallarán todos los puntos de la curva trazada por el plano $u=c'$ en el nuevo cilindrico $F(x, z, c')=0$; y continuando del mismo modo, se obtendrán una infinidad de curvas diversas situadas en planos paralelos al XZ, y tan aproximadas como se quieran las unas de las otras Por consiguiente, el lugar geométrico de una ecuacion de tres variables $F(x,z,u)=0$, es una *superficie*, cuya naturaleza dependerá de la forma de la funcion F: todo lo cual va conforme con lo demostrado (340). Por otra parte conviene observar, que este lugar geométrico no es un *sólido*; pues entónces cada plano secante debería dar por seccion *una área*, mientras que no produce, cortando la *superficie cilindrácea* $F(x,z,c)=0$, sinó una curva de una ó muchas ramas, idéntica con la base de este cilíndrico.

§ 363*e* Ahora, si se hacen concurrir dos *ecuaciones simultáneas*

$$F(x,z,u)=0 \text{ y } F'(x,z,u)=0;$$

es decir, en las cuales las variables se reputa que reciben á un mismo tiempo los mismos valores, este sistema representará una *linea*, recta ó curva; pues que no podrá convenir sinó á los puntos situados al mismo tiempo sobre las dos superficies, es decir, en su comun seccion. Recíprocamente, el solo medio que tenemos para determinar una curva en el espacio, siendo el señalar dos superficies conocidas de que ella sea la interseccion, no podrémos representar analíticamente esta línea, sinó por dos ecuaciones simultáneas. A esto es á lo que viene á reducirse en efecto el *método de las proyecciones*, cuya ventaja consiste en que entre el número indefinido de superficies diferentes que pueden pasar por una curva dada, este método empléa de preferencia *dos cilíndricos, de los cuales cada uno es paralelo al uno de los ejes coordenados*, y cuyas ecuaciones se hallan consiguientemente mas sencillas.

§ Si se tuviesen las tres ecuaciones simultáneas

$$f(x,z,u)=0, \quad F(x,z,u)=0, \quad \varphi(x,z,u)=0,$$

cada una representaría una superficie, y el conjunto de las tres, solo daría un cierto número de puntos, segun hemos manifestado (340).

§ 363*f* Problema. *Dada una recta á la que la generatriz debe ser paralela, y una curva directriz sobre la que debe siempre apoyarse ó resbalar, encontrar la ecuacion de la superficie del cilindrico que describe.*

§ Sean $f(x,z,u)=0$, $f'(x,z,u)=0$ (1) las ecuaciones de la curva *directriz*; y

$$X=aU+\alpha, \quad Z=bU; \text{ \& (2)}$$

las de la *generatriz*. Los coeficientes a y b son constantes, pues que a espresa (183) la tangente trigonométrica del ángulo que la proyeccion de la recta sobre el plano

de las xu, forma con el eje de las u; y b la tangente trigonométrica del ángulo que la proyeccion de la recta sobre el plano de las zu forma con el mismo eje de las u. Pero α y $\mathcal{C}$, que espresan las distancias del orígen á que dichas proyecciones encuentran á los ejes de las x y de las z, vienen á ser dos cantidades indeterminadas, que deben estar sujetas á la relacion necesaria para que la generatriz, en todas sus posiciones, encuentre á la curva directriz. Para que se verifique esta interseccion, es necesario que las ecuaciones (1) y (2) queden satisfechas por los mismos valores de x, z, u; luego si se eliminan estas tres cantidades entre dichas cuatro ecuaciones, resultará la relacion que deben tener entre sí las cantidades α y $\mathcal{C}$, que deben ser *simultáneamente constantes, y simultáneamente variables.*

§ Espresemos esta relacion por $F(\alpha,\mathcal{C})=0$ (3) ó $\mathcal{C}=\phi(\alpha)$ (3′),

§ Ella debe siempre existir cuando las ecuaciones (2) son las de una generatriz; y por consiguiente, para obtener la ecuacion de la superficie del cilíndrico, basta eliminar α y $\mathcal{C}$ entre las tres ecuaciones (2) y (3). Como las ecuaciones (2) se han de verificar en los mismos valores de las ecuaciones (1), dan $\alpha=x-au$, $\mathcal{C}=z-bu$; y poniendo estos valores en la ecuacion (3), se tendrá para la ecuacion de la superficie del *cilíndrico*

$$F(x-au,\ z-bu)=0\ (4)\ \text{ó}\ z-bu=\varphi(x-au)\ (4').$$

§ Tomemos por ejemplo el caso en que la directriz es un círculo situado en el plano de las xz; y sean $u=0$, $(x-f)^2+(z-g)^2=r^2$ (5), las ecuaciones de este círculo; $\left\{\begin{matrix} x=au+\alpha \\ z=bu+\mathcal{C} \end{matrix}\right\}$ (2) las ecuaciones de la generatriz.

§ Para que esta encuentre siempre á la circunferencia del círculo, se tendrá la condicion $(\alpha-f)^2+(\mathcal{C}-g)^2=r^2$ (6).

§ Sustituyendo en esta ecuacion, en vez de α y de $\mathcal{C}$ los valores $x-au$, $z-bu$ que dan las ecuaciones (6), se hallará para la superficie del cilíndrico, que aquí es el verdadero cilindro que considera la Geometría elemental, la ecuacion

$$(x-au-f)^2+(z-bu-g)^2=r^2\ (7).$$

§ Si en el caso de ser rectangulares los ejes, suponemos que la generatriz sea paralela al eje de las u, sus proyecciones sobre los planos de las xu y de las zu serán paralelas al mismo eje de las u; y por lo mismo no formarán ningun ángulo con dicho eje; luego $a=0$ y $b=0$; por lo que la ecuacion anterior se reducirá á $(x-f)^2+(z-g)^2=r^2$ (8); que es la ecuacion de la superficie del cilindro recto, y es la misma que la del círculo de su base; lo que va conforme con lo manifestado (363 *d*).

§ Debe advertirse, que de cualquier manera que un cilíndrico sea determinado, se le puede siempre concebir como engendrado por una recta que se mueve paralelamente á lo largo de una curva trazada sobre este mismo cilíndrico; y de aquí se sigue, que todos los cilíndricos pueden estar comprendidos en la (ec. 7). Y para cilíndricos diferentes, los valores de a y b podrán ser diferentes, así como la forma de la funcion indicada por la letra F.

§ *Superficies coniculares.* 363 *g* Ya hemos espresado (363 *b*) cómo se engendran las superficies que *Cavaleri* llama *coniculares*; y de esta generacion se deduce, como respecto del cilíndrico, que el contacto de un plano con un *cónico* debe tener lugar segun una generatriz entera.

§ 363 *h* Problema. *Dado el vértice del cónico y una curva sobre la cual la*

generatriz se debe siempre apoyar; se pide la ecuacion de la superficie del cónico.

§ Sean a, b, c las coordenadas del punto que ha de ser vértice del cónico; y sean $f(x,z,u)=0$, $f'(x,z,u)=0$ (1) las ecuaciones de la directriz. Pues que la generatriz pasa por el vértice, sus ecuaciones serán (184) de la forma

$$x-a=\alpha(u-c),\ z-b=\mathfrak{C}(u-c)\ (2);$$

y pues que ella debe siempre apoyarse sobre la directriz, existirá entre α y $\mathfrak{C}$ una relacion que se obtendrá eliminando x, z, u entre (1) y (2). De lo cual resultará una condicion que espresarémos por la ecuacion

$$F(\alpha,\mathfrak{C})=0\ (3)\ \text{ó}\ \mathfrak{C}=\phi(\alpha)\ (3').$$

§ Entónces, no hay mas que eliminar α y $\mathfrak{C}$ entre las ecuaciones (2) y (3), y se tendrá para la ecuacion de la superficie del cónico

$$F\left(\frac{x-a}{u-c},\ \frac{z-b}{u-c}\right)=0\ (4),\quad \text{ó}\quad \frac{z-b}{u-c}=\phi\left(\frac{x-a}{u-c}\right)(4').$$

§ Tomemos por ejemplo el *cono oblicuo*, que considera la Geometría elemental; y á fin de simplificar, elegirémos el plano de su base por el de las xz, y tendrémos para las ecuaciones de su base, $u=0$, $x^2+z^2=r^2$ (5); y las de la generatriz serán las (2). Eliminando x, z, u por medio de las (ecs. 2 y 5), resultará

$$(a-\alpha c)^2+(b-\mathfrak{C}c)^2=r^2;$$

que espresa la condicion que se ha de verificar, para que la generatriz encuentre siempre á la directriz; y eliminando en esta ecuacion α y $\mathfrak{C}$ por medio de las ecuaciones (2), se encuentra para la ecuacion de la superficie del *cónico*

$$(au-cx)^2+(bu-cz)^2=r^2(u-c)^2.$$

§ *Superficies desarrollables en general.* 363*i* Se llaman *superficies desarrollables* aquellas, que son engendradas por una recta que se mueve, de manera que en cada una de sus posiciones está en un mismo plano con la posicion sumamente próxima. El *cilíndrico* y el *cónico* pertenecen á este género de superficies.

§ Una propiedad bien notable de estas superficies, y que está espresada por su misma denominacion, es que si arbitrariamente se toma una porcion de esta superficie, se la puede siempre estender en un plano sin rotura ni despedazamiento. Por contraposicion, la superficie de una esfera ó esferóide no se puede estender en plano sin romperse, como estamos viendo diariamente en las cáscaras de la naranja, limon etc. que aunque se rompan, no se pueden poner de modo que formen un plano; sinó que por una parte es cóncava y por otra convexa. Y en efecto, segun la definicion, esta porcion de superficie, estando compuesta de elementos planos, de los cuales cada uno está separado del elemento próximo por una generatriz, se puede concebir que cada uno de estos elementos gira sucesivamente alrededor de la generatriz que le separa del elemento contiguo, y de esta manera, se obtendrá un primer elemento sobre el plano del siguiente; el conjunto de estos dos elementos sobre el plano del tercero, y así sucesivamente.

§ Otra propiedad igualmente notable de estas superficies desarrollables, y que se deduce inmediatamente de su definicion, es que en *todas estas superficies, el contacto del plano tangente debe tener lugar segun una generatriz entera.* La razon de esto es, como para los cilíndricos y cónicos, que una generatriz dada está siempre en el mismo plano con la generatriz sumamente próxima; y que es-

te plano, prolongado indefinidamente en todos sentidos, es tangente á la superficie en cada punto de la generatriz dada.

¶ La definicion de las superficies desarrollables se puede referir á un enunciado al cual el cálculo algebráico se puede aplicar fácilmente, y es el que sigue.

¶ Considerémos la superficie que se obtiene prolongando indefinidamente los lados de un polígono *ABCD*...(fig. *aa* lám. 8''), del cual tres lados consecutivos cualesquiera no están en el mismo plano. Esta superficie, ó si se quiere, este poliedro se compone de caras *PAQ*, *QBR*... que no son otra cosa que porciones angulares de planos. Y aun nada impide concebir todas las aristas como prolongadas del otro lado del polígono. De esta manera, se forma una segunda *cara ú hoja* de la misma superficie poliedral, y que está separada de la primera por el polígono *ABCD*... del mismo modo que las caras de un cono lo estan por el vértice.

¶ Esto supuesto, concibamos que el polígono se halle inscrito en una curva dada, y aumentemos sucesivamente el número de sus lados. Se determinará así un conjunto de poliedros sobre los cuales cada arista se hallará en un mismo plano con la arista inmediatamente próxima; y por consiguiente, el límite de estos poliedros será una superficie curva dotada de la misma propiedad; es decir, que se *hallará sobre una superficie desarrollable.*

§ Notemos, ademas, que pasando de este modo al límite, el polígono se confunde con la curva dada, y que las aristas del poliedro vienen á ser tangentes á esta curva. Luego, en general, *una superficie desarrollable se puede describir por una recta que permanezca constantemente tangente á una curva. Monge* ha denominado á esta curva *arista de retroceso.*

§ Los cilíndricos y los cónicos no están comprendidos en esta generacion; porque, en el uno, las generatrices son paralelas entre sí, y en el otro, pasan todas por un mismo punto.

§ *Superficies de revolucion.* 363*j* Aunque ya hemos sacado (§§ 343, 344 y 345) las ecuaciones de varias superficies de revolucion, vamos todavia á detenernos algo mas. Las superficies de revolucion en general son todas aquellas que se pueden engendrar haciendo girar una línea alrededor de un eje fijo.

§ Se llaman *planos meridianos* los que pasan por el eje; y *meridianos* las intersecciones de éstos planos con la superficie; y de esta generacion resulta, que *todos los meridianos son iguales;* y que las perpendiculares bajadas sobre el eje desde los diferentes puntos de la línea generatriz, describen círculos, cuyos planos son perpendiculares al eje, y que tienen sus centros sobre este eje. Estos círculos se llaman *paralelos.*

§ Problema. *Dada una curva cualquiera, hallar la ecuacion de la superficie que describe, girando alrededor del eje de las* u.

§ Tómense las ecuaciones de un círculo, cuyo plano sea perpendicular al eje de las *u*, y que tenga su centro sobre este eje. Ellas encerrarán dos indeterminadas, que se sujetarán á la condicion necesaria para que el círculo encuentre á la generatriz. Entre la ecuacion que esprese esta condicion, y las ecuaciones del círculo, elimínense las dos indeterminadas, y la ecuacion resultante será la de la superficie.

§ Sean las ecuaciones de la generatriz $f(x,z,u)=0$, $f'(x,z,u)=0$ (1).

§ Para mayor sencillez, se supondrán los ejes rectangulares; y se podrá representar el círculo por las ecuaciones $u=\alpha$, $x^2+z^2=\mathfrak{C}$ (2), en las cuales α

y $\mathcal{C}$ son indeterminadas; pues α espresa la distancia del plano de las xz, á que pasa dicho círculo; y $\mathcal{C}$ espresa el cuadrado del radio del mencionado círculo.

§ Mas para que este círculo encuentre á la generatriz, las (ecs. 1 y 2) deben quedar satisfechas por los mismos valores de x, z, u; y de aquí resulta entre α y $\mathcal{C}$ una relacion que espresarémos por

$$F(\alpha,\mathcal{C})=0 \ (3) \text{ ó } \mathcal{C}=\phi(\alpha) \ (3').$$

§ De esta ecuacion es de la que es necesario eliminar α y $\mathcal{C}$, por medio de las ecuaciones (2): y la ecuacion resultante $F'(u,x^2+z^2)=0$ (4) será la de la superficie pedida.

§ Hasta aquí la línea generatriz se halla de todo punto indeterminada. Supongamos ahora que sea una línea situada en el plano de las x, u, y que sus ecuaciones sean $z=0$, $f(u,x)=0$ (5).

§ Tomando el eje de las u por eje de revolucion, las ecuaciones del círculo son como se ha espresado ántes $u=\alpha$, $x^2+z^2=\mathcal{C}$.

§ Para que encuentre á la generatriz, se tiene la condicion $f(\alpha, \sqrt{\mathcal{C}})=0$, siendo f el mismo signo de funcion que para la generatriz; y eliminando α y $\mathcal{C}$, resulta para la superficie $f(u,\sqrt{x^2+z^2})=0$.

§ Aquí f es aun el mismo signo de funcion; así basta poner $\sqrt{x^2+z^2}$, en lugar de x, en la ecuacion $f(u,x)=0$ de la generatriz.

§ Cualquiera que sea la línea generatriz, la solucion del problema puede aun presentarse como sigue. Para la generatriz, tomemos siempre las ecuaciones

$$f(x,z,u)=0, \quad f'(x,z,u)=0;$$

y sean x, z, u las coordenadas de un punto cualquiera de la superficie de revolucion; y x', z', u las del punto que tiene la misma coordenada u sobre la generatriz. El primer punto es una de las posiciones que viene á ocupar el segundo durante la rotacion de esta generatriz. Por consiguiente, está á la misma distancia del eje, y se debe tener $x^2+z^2=x'^2+z'^2$;

§ Pero, las ecuaciones de la generatriz dan $f(x',z',u)=0$, $f'(x',z',u)=0$; luego, para conocer la ecuacion de la superficie, no hay mas que eliminar x', z' entre estas dos ecuaciones y la precedente.

§ Por ejemplo, supongamos que la generatriz sea una recta, que tenga por ecuaciones $x=Mu+N$, $z=M'u+N'$; será necesario eliminar x' y z' entre las tres ecuaciones $x^2+z^2=x'^2+z'^2$, $x'=Mu+N$, $z'=M'u+N'$; y se obtiene para la superficie $(Mu+N)^2+(M'u+N')^2=x^2+z^2$.

§ Esta cuestion se simplifica eligiendo por línea de las x aquella sobre la cual se mide la mas corta distancia entre la generatriz y el eje de revolucion, que es ya tomado por la línea de las u. Entónces, la generatriz encuentra al eje de las x, y es paralela al plano de las zu. En su consecuencia, para sus ecuaciones tomarémos $x=a$, $z=bu$; es decir, que $M=0$, $N=a$, $M'=b$, $N'=0$; y por consiguiente la ecuacion de la superficie se muda en $x^2+z^2=b^2u^2+a^2$, que pertenece al *hiperbolóide de revolucion de una cara ú hoja*. La doble generacion de esta superficie que hemos anunciado (§ 359) tambien se verifica; porque la ecuacion de ántes permanece la misma, aunque se mude en ella b en $-b$.

§ *Superficies gauchas ó torcidas.* 363*k* Los Franceses llaman *superficies gauchas*, que viene á corresponder en castellano á *superficies torcidas, á las que son engendradas por una línea recta, y que no son desarrollables.*

§ Todas las superficies descritas por una recta, sean gauchas, sean desorrollables, están comprendidas bajo la denominacion general de *superficies regladas.*

§ En todas estas superficies, el plano tangente en un punto debe contener á la generatriz que pasa por este punto; mas, por esto, no es tangente á la superficie en cada punto de esta generatriz. Esta última propiedad no tiene lugar sinó para las superficies desarrollables.

§ Entre las superficies gauchas, se notan principalmeute

1.º El *hiperbolóide de una cara*, engendrado por una recta que se mueve sobre tres rectas no paralelas á un mismo plano.

2.º El *parabolóide hiperbólico ó plano gaucho ó torcido*, engendrado por una recta que se mueve sobre dos rectas, permaneciendo siempre paralela á un plano.

3.º El *cilindro gaucho*, ó *(cilíndrico torcido)*, engendrado por una recta sujeta á permanecer paralela á un plano, apoyándose sobre dos curvas cualesquiera.

4.º El *conóide*, engendrado por una recta que permanece paralela á un plano y que resbala sobre una recta y una curva.

§ *Superficies conóides.* 363 *l* Se da este nombre á *toda superficie engendrada por el movimiento de una recta, que sin dejar de ser paralela á un plano dado, resbala* á la vez á lo largo de una recta, fija de posicion en el espacio, y llamada PRIMERA DIRECTRIZ; y despues, á lo largo de una curva tambien dada, y llamada SEGUNDA DIRECTRIZ.

§ Para hacer concebir esta clase de generacion, supongamos que se hayan tirado en el espacio una infinidád de planos paralelos al plano dado; cada uno de ellos corta á la recta fija en un punto, y á la curva en uno ó muchos puntos. Uniendo estos últimos puntos con el de la recta fija, y répitiendo esta misma operacion para todos los planos paralelos, se obtienen una infinidad de rectas, cuyo conjunto constituye la *superficie conóide.* La denominacion de esta especie de superficies proviene de la analogía que tienen con las superficies cónicas. El vértice del cono se halla aquí remplazado por la *primera directriz.*

§ *Curvas de doble curvátura.* 363 *ll* Si en un punto cualquiera de la superficie de una esfera colocamos la punta de un compas, y hacemos que este gire alrededor de dicho punto, aplicándose la otra punta á la superficie de dicha esfera, trazará en ella una curva, que, en virtud de lo demostrado (28), será una circunferencia de círculo, que es una curva uniforme en todos sus puntos; pues que se puede doblar (I. 346) por cualquier diámetro, confundiéndose una parte con otra. Pero, si poniendo la punta de un compas sobre un punto cualquiera de la superficie de un cilindro, damos una vuelta al compas alrededor de dicho punto, haciendo que la otra punta se aplique siempre á la superficie del cilindro, resultará tambien una curva, pero esta no es uniforme en todas sus partes. Por el contrario, sus diferentes puntos gozan de dos curvaturas; una relativa á la superficie cilíndrica, y otra debida al movimiento giratorio de la pierna del compas; y por esta razon á estas curvas se las llama de *doble curvatura*; las cuales son de tal naturaleza, como ya hemos indicado (183), que todos sus puntos no se pueden hallar en un mismo plano, y no se pueden describir sinó sobre las superficies de los sólidos curvos. De otro modo: pudiéndose considerar una línea como el camino de un punto móvil, que muda á cada instante de direccion; ella es de *simple curvatura*, ó *plana*, cuando el punto móvil está constantemente en un mismo plano; y es de *doble curvatura*, cuando se separa de él.

§ *Descartes*, al fin de su Geometria, es el primero que ha indicado la existencia de las curvas de *doble curvatura;* pues espresa, que *todo lo que ha dicho relativo á las líneas curvas, descritas en una sola superficie plana, se puede aplicar á aquellas que se describen en el espacio de tres dimensiones, ó sobre algunas superficies curvas.*

§ *Clairaut*, publicó en Paris, año de 1731, una obra con el título de *Investigaciones sobre las curvas de doble curvatura;* la cual consta de cuatro secciones.

En la 1.ª manifiesta el modo de considerar las curvas de doble curvatura. En la 2.ª aplica el *Cálculo Diferencial* para tirarles tangentes y perpendiculares. En la 3.ª, manifiesta el uso del *Cálculo Integral* en dichas curvas, por lo relativo á sus rectificaciones, á su cuadratura etc. Y en la 4.ª establece algunos principios generales para formar curvas de doble curvatura. Espresa que á esta obra debería seguir otra sobre las *superficies curvas;* y advierte que lo manifestado acerca de las curvas de *doble curvatura geométricas*, se puede aplicar á las curvas de *doble curvatura trascendentes*, cuya utilidad en las Ciencias Físico-Matemáticas se proponía manifestar en otro tratado.

§ Despues de la obra de Clairaut, lo mas interesante y sublime, que hay sobre tan importante materia, son los trabajos de *Monge*, de que hemos hablado (363 *a*), y de que nos ocuparémos en el *Complemento á nuestro Cálculo Infinitesimal*, que indicamos (§ 656) de este tomo.

§ Mr. *Leroy* no está conforme con la denominacion de *curvas de doble curvatura;* y propone que se las llame *curvas gauchas*, usando de esta última palabra, en el sentido que le hemos dado (§ 363 *k*).

Dice que la idéa de dos curvaturas es falsa, y que dichas curvas solo tienen *una curvatura*, y una *torsion;* ó lo que otros llaman *flexion.*

Las curvas de doble curvatura se podrían tambien definir, diciendo que son *límites de polígonos en que tres lados consecutivos no podrían estar en el mismo plano;* y para tener una idéa exacta y que se presente á los sentidos acerca de las curvas de doble curvatura, no hay mas que trazar una curva cualquiera en un papel, lienzo etc. y despues arrollar este papel á un cuerpo de superficie curva.

§ 363 *m* El medir la curvatura de toda especie de líneas y superficies curvas es una aplicacion del *Cálculo Infinitesimal. Monge* llamó *líneas de curvatura*, en una superficie, al conjunto de los puntos de dicha superficie en que las normales sumamente próximas se encuentran consecutivamente; y manifestó que en toda superficie había *dos líneas de curvatura.* Los puntos de una superficie en que se verifica que todas las secciones normales tienen la misma curvatura, los caracteriza Mr. *Leroy* con el nombre de *ombilics*, á que corresponde en español *ombligos.* No todos los Geómetras estan conformes en la precedente definicion. *Monge* se esplicó en esto con cierta confusion; pues en unos parages hacía consistir la esencia del *ombilic* ú *ombligo* en unas condiciones, y en otros en otras. Mr. *Dupin* no admite sinó un número limitado de líneas de curvatura para un *ombilic* ú ombligo aislado. Mr. *Poisson* considera á un ombilic como admitiendo una infinidad de líneas de curvatura.

§ 363 *n* Previas estas indicaciones, vamos á dar á conocer lo mas esencial de las curvas de doble curvatura, en la parte que puede hacerse elemental é independientemente del Cálculo Infinitesimal.

El modo mas sencillo de considerar las curvas de doble curvatura es el si-

guiente. Sea una curva AM (fig. *bb* lám 8''), cuyo eje es AX, sus abscisas AP, y sus ordenadas PM sobre un plano XAM. Sean tambien una infinidad de perpendiculares MN levantadas desde los puntos M sobre este plano; si se determinan sobre estas MN, los puntos N, de modo que la relacion de las AP á las MN, y de las MN á las MP, estén espresadas cada relacion por una ecuacion cualquiera, que pase del primer grado, todos estos puntos formarán uua curva ANN de doble curvatura.

§ 363*n* De aquí resulta, que si se eleva el plano QAR perpendicular al plano PAM en la línea AQ (fig. *cc*) perpendicular á AP en A, y se describe en dicho plano la curva AV, cuyo eje sea AQ, A el orígen de las abscisas, y la ecuacion que espresa su naturaleza, sea la que contiene la relacion de las PM á las MN; la curva de doble curvatura ANN será la seccion de la superficie elevada perpendicularmente al plano QAR sobre AV, es decir, compuesta de todas las perpendiculares NV al plano QAR sobre los puntos V de la curva AV, y de la superficie elevada perpendicularmente al plano PAM sobre la curva AM, ó compuesta de todas las perpendiculares MN.

§ 363*o* Tambien se sigue, que si se eleva el plano RAP (fig. *dd*) perpendicular al plano PAM en el eje AP, y que se describa en él la curva AS, cuyo eje sea AP, A el orígen de las abscisas, y la ecuacion entre AP y PS la que espresa la relacion de AP á MN, la seccion de la superficie elevada perpendicularmente sobre esta curva AS, y de la superficie elevada sobre la curva AM, será siempre la curva de doble curvatura ANN; y por consiguiente, las superficies elevadas sobre las curvas AV, AS (fig. *ee*) se encuentran aun en la misma curva de doble curvatura ANN.

§ 363*p* De donde resulta que, siendo dadas dos de las tres curvas AM, AV, AS se conocerá tambien la otra. Y tambien se verifica que con dos cualesquiera de estas tres curvas se puede siempre formar la curva de doble curvatura, concibiendo que sobre estas dos curvas se eleven superficies cilindráceas perpendiculares á los planos donde se hallen dichas curvas.

§ 363*q* Pues que dos de estas curvas pueden servir para determinar todos los puntos de la curva de doble curvatura, se pueden mirar las ecuaciones de dichas dos curvas, análogamente á lo espuesto (182), como las que espresan la naturaleza de la curva de doble curvatura: resultando que cada una de dichas ecuaciones contendrá siempre dos de las tres variables $AP=x$, $PM=z$, y $MN=u$. Y aunque se espresase de diferente manera una curva de doble curvatura, sería siempre necesario servirse de dos ecuaciones que contuviesen tres variables; porque una sola ecuacion de dos variables no bastaría, como en las curvas ordinarias. Por ejemplo, si se tomasen por abscisas los árcos de la curva AM y por ordenadas las rectas MN (fig. *bb*), se podría bien por medio de una ecuacion que contuviese estas dos variables, espresar la curva de doble curvatura, con tal que se conociese por otra parte esta curva AM; y entónces este conocimiento supondría tambien una ecuacion, y se tendrían dos ecuaciones. Si fuesen las AP las que hiciesen de abscisas, y las rectas PN las que fuesen las ordenadas, la ecuacion que contuviese estas dos variables, solo daría la longitud de la ordenada PM; pero no espresaría la magnitud del ángulo NPM que es indispensable para colocarla etc.

§ 363*r* Si por alguna combinacion de las dos ecuaciones de una curva de doble curvatura, como por ejemplo, sumándolas ó multiplicándolas etc. se formase otra ecuacion que contuviese ella sola por sí, las tres variables $AP=x$, $PM=z$, y $MN=u$, esta ecuacion podría en efecto espresar todos sus puntos; pero no podría quedar por esto determinada, ni describirse la curva de doble curvatura; pues que tenemos demostrado (340 y 363*d*) que toda ecuacion de tres variables corresponde á una superficie; y en esta superficie se hallará comprendida, no solo la curva de doble curvatura de que se trata, sinó una infinidad de ellas.

§ Mas si fuese del primer grado la ecuacion de tres variables, que resultase, entónces la superficie sería un plano; y aunque este conocimiento por sí solo no es suficiente para determinar ni describir ninguna línea que se hallase en la espresada superficie plana ó plano, sin embargo, nos daba un resultado sumamente importante, á saber: que *la curva que suponíamos de doble curvatura, no era sinó una curva plana: pues que todos sus puntos se contenían en un plano.*

§ 363*rr* Las ecuaciones de una curva de doble curvatura, son como hemos dícho (363*q*), las de sus curvas de proyeccion sobre dos diferentes planos, que para mayor sencillez se consideran perpendiculares el uno al otro. Pero, como para determinar una curva en el espacio, se necesitan (363*e*) igualmente dos ecuaciones, debemos tambien advertir, que *cuando alguna de las proyecciones de una curva, que suponemos de doble curvatura, sea una línea recta, dicha curva será de simple curvatura;* porque entónces se hallaría descrita sobre el plano formado por todas las perpendiculares á esta proyeccion.

§ 363*s* *Dadas dos superficies curvas, que tienen los mismos ejes, y las mismus variables en sus ecuaciones, hallar la curva de doble curvatura, que es su seccion, es decir, en la cual una superficie encuentra á la otra.*

§ Este problema se reduce á encontrar dos de las curvas de proyeccion de esta curva de doble curvatura que se busca; esto es, hallar las curvas de proyeccion sobre dos de los planos coordenados, que por lo general son los de las xz, y de las zu. Para encontrar la proyeccion sobre el plano de las xz se despeja la u en una de las dos ecuaciones de las superficies curvas, y se sustituye en la otra, la cual no contendrá ya sinó las dos variables x, z, y espresará por consiguiente la curva de proyeccion sobre el plano de la base; despues se tomará del mismo modo el valor de x en una de las dos ecuaciones de las dos superficies, y se sustituirá este valor en la otra ecuacion, que no comprenderá ya sinó á z, y á u; y que pertenecerá por consiguiente á la curva de proyeccion sobre el plano de estas dos variables.

§ Si se quisiese tambien tener la curva de proyeccion sobre el plano de las xu, no habría mas que despejar z en una de estas dos ecuaciones, y sustituir este valor en la otra, que vendría á ser la ecuacion de la proyeccion sobre el plano de las xu.

§ 363*t* Si una de las ecuaciones de alguna proyeccion fuese del primer grado entre dos variables, dicha ecuacion correspondería (158) á una línea recta; y entónces toda la curva, que es la interseccion de las dos superficies curvas dadas, se hallaría en un solo plano; y por consiguiente la interseccion de dichas superficies no sería una curva de doble curvatura, sinó una curva plana, ó de simple curvatura, como ya tenemos espresado (363*rr*).

§ 363*u* Propongámonos por ejemplo: *Hallar la curva de doble curvatura,*

que es la interseccion de un parabolóide, y de un cono recto que tiene el mismo vértice, pero cuyo eje es perpendicular al del parabolóide.

§ La ecuacion de este es (§ 344) $px=z^2+u^2$. La del cono es (343 ec. *c*)

$$\frac{n^2}{m^2}z^2=x^2+u^2.$$

§ Despejando u^2 en la primera, y sustituyendo su valor en la segunda, se tiene $\frac{n^2+m^2}{m^2}z^2=px+x^2$, que da una hipérbola para la proyeccion de la curva de doble curvatura sobre el plano de las xz.

§ Se hallará la proyeccion sobre el plano de las xu, tomando y sustituyendo del mismo modo el valor z^2, lo que dará la ecuacion

$$\frac{n^2}{m^2}px-x^2=\frac{n^2+m^2}{m^2}u^2;$$

que manifiesta, que esta curva de proyeccion es una elipse.

§ Para encontrar la proyeccion sobre el plano de las zu, despejarémos x en la primera, que da $x=\frac{z^2+u^2}{p}$, y sustituyendo este valor en la segunda, da

$$\frac{n^2}{m^2}z^2=\left(\frac{z^2+u^2}{p}\right)^2+u^2.$$

§ 363 *v* Propongámonos ahora resolver el problema siguiente

§ *Dadas las ecuaciones de las curvas de proyeccion de una curva de doble curvatura, sobre dos de los tres planos coordenados, describir por su medio esta curva de doble curvatura.*

§ Para resolver este problema, basta recordar la primera idéa que hemos dado (363 *n*) de las curvas de doble curvatura. En efectō, pues que se da la ecuacion de la curva de proyeccion AM (fig. *ff* lám. 8″) sobre el plano de la base, ó xz, por medio de ella se describirá al principio esta curva sobre un plano; y despues sobre esta curva como base se levantará perpendicularmente una superficie cilindrácea, sobre la cual se describirá la curva de doble curvatura por muchos puntos, á la manera de las curvas simples; lo que se hará tirando muchas ordenadas PM al eje AX, muy próximas las unas á las otras, elevando desde sus estremos M perpendiculares MN al plano xz, y determinando la longitud de estas MN por medio de la ecuacion que espresa la relacion de las $PM=z$, á las $MN=u$, ó por la que espresa la relacion de las $AP=x$, á las $MN=u$. Esta construccion determinará un gran número de puntos N, por los que se hará pasar la curva de doble curvatura. Así es, que para determinar respecto de cada punto M la longitud de la ordenada MN, por medio de estas ecuaciones, no hay mas que sustituir en lugar de x, ó de z los valores que estas variables tienen en el punto M; lo que hará entónces determinada la ecuacion, no teniendo ya mas que á $MN=u$; luego se podrá encontrar fácilmente su valor.

§ Se podría tambien, si se quisiese, describir la curva de doble curvatura, sobre la superficie elevada perpendicularmente sobre la proyeccion en el plano de

las zu, determinando las x por medio de las z y de las u. Se la podría tambien describir sobre la superficie elevada perpendicularmente sobre la curva de proyeccion de las x y de las u, determinando las z por las x y las u.

§ Si resultase que un cierto valor dado á x, ó á z, hiciese el valor de u imaginario, esto indicaría que la curva de doble curvatura no pasaba por la línea MN, donde x ó z hubiese tenido este valor; y si al contrario, diese un valor real pero negativo, entónces sería necesario ponerle debajo del plano de la base PAM.

§ 363 x Terminarémos esta materia, discutiendo la curva de doble curvatura, cuyas ecuaciones con $ax=z^2$ y $bz=u^2$, es decir, en que las curvas de proyeccion son en el plano XAZ de la base, una parábola AM (fig. gg) cuyo vértice es A, el eje AP y el parámetro a; y sobre el plano de las zu, otra parábola AS, cuyo vértice es tambien A, el eje AZ, y el parámetro b.

§ Se principiará por sacar de estas dos ecuaciones, la de la curva de proyeccion sobre el plano de las xu; para lo cual eliminarémos la z, despejándola en la segunda ecuacion, y sustituyendo su valor en la primera; lo que da $ax=\frac{u^4}{b^2}$, ó $ab^2x=u^4$; que da $u=\pm\sqrt[4]{ab^2x}$.

§ Si $x=0$, se tiene $u=0$; y la ecuacion primera da tambien $z=0$; lo que hace ver que *la curva de doble curvatura pasa por el punto* A *de orígen.* Dando despues diferentes valores crecientes á x, se encontrarán siempre para u y para z valores que irán del mismo modo aumentando, y que harán ver que la curva de doble curvatura sube siempre y se estiende hasta el infinito; lo que se podría ver tambien haciendo $x=\infty$, que da

$$u=\sqrt[4]{ab^2.\infty}=\infty, \quad \text{y} \quad z=\pm\sqrt{a.\infty}=\pm\infty.$$

§ Esta curva de doble curvatura tiene dos ramas AN, An ambas descritas sobre la parte de superficie cilindrácea elevada sobre la semiparábola AM; debiendo advertirse, al examinar el número de ramas de una curva de doble curvatura, que ella puede tener mas ó ménos ramas segun las dos curvas de proyeccion que se eligen para determinarla.

TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES.

364 Las ecuaciones de 1.° y 2.° grado son las únicas que se pueden resolver completamente; pues aunque hay fórmulas para las de 3.° y 4.° grado, y las tenemos publicadas en los apéndices 6° y 7.° del tomo 1.° parte 1.ª de esta obra, son complicadas, y estan sujetas á escepciones, como allí mismo se manifiesta (*).

(*) Mr. *Bourdon*, al principio del capítulo 8.° de la novena edicion de su Álgebra, publicada en este mismo año de 1843; se esplica de este modo: "Ya hemos dicho que los Analistas no han llegado hasta ahora sinó á la resolucion de las ecuaciones generales del 3.° y 4.° grado. Las fórmulas que ellos han obtenido para los valores de las incógnitas, son tan complicados y de un uso tan poco

En los (§§ 170*a* hasta el 170*z*) del tomo 1º de mi Compendio de Matemáticas, he presentado un resúmen ó estracto histórico de los procedimientos que se han discurrido para la resolucion de las ecuaciones; he comparado los unos métodos con los otros, y con el escogitado por mí, que doy á conocer en dicho tomo del Compendio párrafos (197*a* hasta el 197*aaa*), en donde se resuelven ecuaciones hasta del grado 35.

En la nota del (§ 219) del mismo tomo, resuelvo ecuaciones esponenciales, no consideradas hasta el dia, y que son inaccesibles á todos los demas métodos conocidos, cuales son

$$\sqrt[x]{x}=20;\quad \sqrt[x]{x}=1{,}4142;\quad \sqrt[x]{x}=1{,}4423;$$

$$\sqrt[x]{x}=1{,}3204693;\quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=a;\quad \sqrt[\frac{1}{x}]{\frac{1}{x}}=a;\quad x^{\frac{1}{x}}=a$$

y otras semejantes.

A la par que por mi espresado método se hallan las raices reales de todo género de ecuaciones sin limitacion alguna, tiene la sorprendente circunstancia de ser tan elemental, que no exige para su ejecucion mas conocimientos que los contenidos en mi *Aritmética de Niños*; y así es, que esplico dicho método á los alcances de todo el mundo y de los Niños de las escuelas, en la obrita que tengo publicada con el título de *Complemento de la Aritmética de Niños*, cuyo precio es solo el de cuatro reales; y con el auxilio de dicha obrita, los discípulos de las *Escuelas Normales*, que estuvieron bajo mi inmediata inspeccion, determinaron todas las raices de las 29 ecuaciones, que se resuelven en el apéndice puesto al fin del 2.° tomo de mi espresado *Compendio de Matemáticas*. Dichas ecuaciones son de los grados siguientes; una del 5º grado; otra del 6º; otra del 28; otra del 29; otra del 30; otra del 31; otra del 38; dos del 40; dos del 41; una del 43; otra del 45; otra del 48; otra del 49; dos del 50; cuatro del 51; una del 57; otra del 58; dos del 65; otras dos del 66; una del 72; y finalmente otra del grado 80.

Al esplicar dicho método en la 4ª edicion del tomo 1.° parte 1ª de esta obra (§§ 284*a* hasta el 284*z*) he insertado la ecuacion del grado 14, que resolvieron los caballeros oficiales del ejército, que asistían en 1841 á la *Escuela Normal Militar*, que está bajo mi inmediata ins-

---

cómodo, aun cuando se las puede aplicar (lo que no siempre es posible), que se debe mirar el problema de la resolucion de las ecuaciones algebráicas de un grado cualquiera como mas curioso que útil. Así, los Analistas han dirijido principalmente sus investigaciones á la resolucion de las *ecuaciones numéricas*."

peccion, y ademas comparo lo que resulta de la edicion octava del Algebra de Mr. *Bourdon*, en que, para que se palpe la complicacion de los medios que empléa dicho Autor, aunque auxiliados del nuevo teorema de Mr *Sturm*, con la sencillez y generalidad de mi nuevo método, resuelvo por él cinco ecuaciones que resuelve Mr. *Bourdon*, y en todas aparecen del modo mas esplícito y auténtico las ventajas que proporciona mi método.

En este mismo volúmen, hemos aplicado nuestro método (§§ 94*a* hasta el 94 k) á nueve ecuaciones que resuelve Euler en su obra intitulada: *Introductio in analisin infinitorum*, resultando mayor sencillez y exactitud por mi espresado método; y verificándose por otra parte una circunstancia estraordinaria, y que parece increible, si no se tuviera tan repetidas veces comprobada; y es el que en dicho método mio, *si uno padece alguna equivocacion, no tiene que rehacer los cálculos desde la equivocacion que cometió; sinó que continuando por el mismo método, se llegan á obtener los resultados verdaderos.* De todo lo cual resulta, que ya no aparece la mas mínima duda acerca de las ventajas que ofrece mi espresado método sobre todos los demas conocidos; y que respecto á encontrar las raices reales de los ecuaciones numéricas, cualquiera que sea su naturaleza, grado y complicacion, ya este nuevo método hace inútil la aplicacion de los demas.

Sin embargo, como por una parte la resolucion de las ecuaciones es de la mayor importancia, no solo en todos los tratados de las Matemáticas, sinó en sus vastas é importantes aplicaciones á las demas ciencias, á las artes industriales y á los usos de la vida; y por otra conviene que sea conocida su doctrina, para ver si se pueden proporcionar nuevos adelantos, vamos á manifestar aquí el resultado de las investigaciones de los mas célebres Analistas, en tan importante materia (*).

Principiarémos por manifestar que si *suponemos, que una ecuacion*

(*) Esto lo teníamos escrito ántes de que llegase á nuestras manos la obra que tiene por título "Del teorema de Mr. *Sturm*, y de sus aplicaciones numéricas por M. B. *Midy*, antiguo Profesor de Matemáticas especiales en los colegios de Cahors y de Orleans, y Profesor en el Colegio de Nantes, impresa en 1836"

El prólogo es como sigue: "Son conocidos tanto los célebres trabajos de *Lagrange*, como sus esfuerzos casi infructuosos para la resolucion numérica de las ecuaciones de todos los grados; digo casi infructuosos, porque su método, fundado sobre la formacion de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, no es practicable mas allá del tercer grado, y da lugar, aun para este, á cálculos de una escesiva longitud, cuando los coeficientes de la ecuacion, que se debe resolver, son números un poro elevados.

»Despues de este gran geómetra, *Budan*, y en una época mas próxima de nosotros, el ilustre *Fourier*, cuya reciente pérdida deploran aun las ciencias, se

goce de toda la generalidad posible, deberá contener todas las potencias de la incógnita, comprendidas desde la mas elevada, que es la que da

---

han ocupado de nuevo en estas mismas investigaciones; pero no han podido hacer mas que paliar las dificultades.

»En fin; ha venido Mr. *Sturm*, que nos ha dado un teorema general, por medio del cual se puede por caractéres ciertos, y á primera vista de una estrema simplicidad, asignar, en todos los casos, cuántas raices reales, y cuántas imaginarias, tiene una ecuacion numérica de un grado cualquiera. Este descubrimiento ha sido acogido con un favor señalado, y ha recibido recompensas merecidas; pero, acaso se ha exagerado algo su importancia y utilidad.

»Es necesario convenir, en Francia, amamos mucho las teorías. Nosotros brillamos por las altas concepciones del espíritu, y tenemos á ménos con bastante frecuencia las aplicaciones de estas verdades elevadas, como demasiado inferiores á nuestra inteligencia y á nuestro mérito. Nuestros vecinos, y nuestros rivales en las ciencias, las aprecian mas; parece que están mas convencidos que nosotros de que el verdadero objeto de la ciencia es la utilidad, y que un método no ha recibido toda su perfeccion, sinó cuando ha venido á ser de una aplicacion fácil y pronta.

»Este últmo carácter sobre todo es el que yo esperaba encontrar en el método de Mr. *Sturm*, y que yo hubiera sido encantado de hallarle. No conozco directamente el trabajo de Mr. *Sturm*. Ignoro si ha publicado su método; pero, encargado de la enseñanza de las ciencias en un Colegio Real, he encontrado su teorema demostrado en la obra de MM. *Mayer y Choquet*, y en la de Mr. *Lefebure de Fourcy*. Yo he debido hacer de él el objeto de mis lecciones. Para darlo á conocer á otros, me ha sido preciso estudiarlo por mi mismo, procurando que los discípulos hagan aplicaciones; y en esto es en lo que se han encontrado las dificultades. Yo hubiera querido poder superarlas en el trabajo al cual me he dedicado sobre este asunto, y que ofrezco en este momento al público. Pero si estoy léjos de haberlo conseguido completamente, creo sin embargo, haber llegado mirando la cuestion bajo relaciones nuevas, á hacer el principio mas evidente y sus aplicaciones mas fáciles.

»Mi obra, compuesta para la juventud, podrá, lo espero, no ser inútil á sus estudios: este es al ménos mi deséo, y el objeto que me he propuesto al publicarla. Es pues á ella á quien la dedico. Seré feliz si puede obtener su aprobacion, y al mismo tiempo la de los profesores, que están como yo encargados de la enseñanza de las ciencias; la del público sabio al cual la dirijo; en fin, la de Mr. *Sturm* mismo."

Yo estoy tan de acuerdo con el Autor acerca de la circunstancia que deben reunir los métodos, que puse por lema en mi *Complemento* de la Aritmética de Niños, *Nisi utile est quod agimus, stulta est gloria;* y deseando que mis obras contengan todo lo nuevo descubierto hasta el momento que las publico, insertaré en esta nota lo mas esencial; y despues resolveré por mi método la primera cuestion de las que se ocupa dicho Autor; para que se patentiticen bien las ventajas de mi método.

Principia por un lema; y luego pone:

"*Teorema de Sturm.* Sea X un polinomio funcion de x (363 *c*), y no con-

el nombre á la ecuacion, hasta la primera inclusive; multiplicadas por coeficientes conocidos, y ademas un término donde no se halle la in-

---

teniendo sinó potencias enteras de esta variable. Sea X_1 su derivado (I. § 284*j*..11.º). Supongamos que X no tenga raices iguales. Se sabe que entónces X y X_1 no tienen factor comun en x, ó que son primeros entre sí. Luego, si se busca su mayor comun divisor por el procedimiento ordinario, será uno conducido á una resta numérica. Supongamos que, despues de cada division, se haya mudado el signo de la resta. Esta mudanza de signo en la resta, tomada por divisor, no puede mudar sinó el signo del cociente correspondiente, sin alterar ni el signo, ni el valor de la resta siguiente. Sean $X_2, X_3, X_4, \ldots X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \ldots X_{r-2}, X_{r-1}, X_r$ las restas sucesivas así modificadas. La última será un número, y la serie de las operaciones efectuadas estará representada por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
X &= X_1 Q_1 - X_2 \\
X_1 &= X_2 Q_2 - X_3 \\
X_2 &= X_3 Q_3 - X_4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{n-1} &= X_n Q_n - X_{n+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
X_{r-2} &= X_{r-1} Q_{r-1} - X_r.
\end{aligned}$$

"Ahora, para abreviar, designemos en esto que sigue por sucesion de X, la serie de los polinomíos X, X_1, X_2, etc. desde el del primero hasta el último inclusive; y por sucesion X_1 la que está formada de los mismos polinomios á partir del segundo. Sí en la primera se sustituye sucesivamente en vez de x, al principio un número primero, dará una cierta sucesion de signos en los resultados, despues un segundo número mayor, y dando en general otra sucesion de signos en los resultados que el primero, entónces, tantas variaciones de signos que haya ménos en la segunda serie respecto de la primera, otras tantas raices del polinomio X habrá comprendidas entre los dos números sustituidos."

Empléa despues nueve páginas en cuarto frances para demostrarlo, haciendo uso de las funciones analíticas ó Teorema de Taylor, conocimientos que corresponden al Cálculo Diferencial; despues empléa 11 páginas en hacer aclaraciones y simplificaciones á los procedimientos de Mr. *Sturm*; y en la página 24, dice: "Sea primero la ecuacion $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = 0$.

»Tendrémos esta serie de funciones

$$\begin{aligned}
X &= x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \qquad & X_2 &= 2x - 5, \\
X_1 &= x^2 - 4x + 3 \qquad & X_3 &= 3.
\end{aligned}$$

El primer término de cada funcion siendo positivo, las tres raices son reales; y pues que por otra parte, en X la serie de los signos no ofrece sinó variaciones,

cógnita. Así, la ecuacion mas general de 6.° grado contendrá un término en que se halle la incógnita elevada á la 6ª potencia, otro en que

---

las tres raices son positivas. Si se hace $X_1=0$, ó si se resuelve la ecuacion

$$x^2-4x+3=0;$$

se tiene $x=2\pm\sqrt{4-3}$, ó $x=2\pm1$.

O bien en fin, llamando x' y x'' las dos raices halladas, será

$$x'=3, \text{ y } x''=1.$$

Luego una de las raices de X_1 la mas pequeña, está comprendida entre 0 y 1; la segunda entre 1 y 3; y la tercera es mayor que 3. Para tener el límite superior de la última de estas raices, pongamos la desigualdad

$$x^3+9x>6x^2+1 \quad (1),$$

De donde se saca esta $x+\frac{9}{x}>6+\frac{1}{x^2}$ (2).

Haciendo $x=4$, ella se convierte en

$$4+\frac{9}{4}>6+\frac{1}{16} \quad \text{ó} \quad 6+\frac{1}{4}>6+\frac{1}{16} \quad (3).$$

»La desigualdad (2) quedá pues satisfecha; ella lo sería evidentemente con mas razon para todo valor de x mayor. Luego la raiz buscada se halla entre 3 y 4; y la desigualdad (3) hace ver que está mas cerca de 4 que de 3.

»En cuanto á la raiz intermedia que cae entre 1 y 3, para tener límites mas aproximados, recurramos al polinomio X_2; é igualémosle á *cero*. Tendrémos

$2x-5=0$; de donde $x=\frac{5}{2}=2,5$.

»Sustituyendo 2,5 en X da un resultado negativo; lo que hace ver que este número es mayor que la raiz buscada. Sustituyendo 2,4, da todavía un resultado negativo; pero 2,3 le da positivo. Luego la raiz buscada cae entre estos dos últimos números. Luego hemos llegado á determinar, con ménos de una unidad de diferencia el valor de cada raiz. Se encontrarán valores mas aproximados de ellas por los métodos conocidos."

Despues de tantas y tan variadas y complicadas operaciones; pues las del máximo comun divisor, con dificultad habrá dos, en que se proceda idénticamente, nos quedamos con saber solamente que una de las raices se halla entre 0 y 1; otra entre 2,3 y 2,4; y la otra entre 3 y 4. Y que si querémos determinarlas, deberémos emplear el método de aproximacion de *Neuton ó el de Lagrange*; que ambos son mas penosos que el nuestro.

Para resolver la misma ecuacion por nuestro método, supongamos $x=1$; lo que da 3 de error.

El supuesto $x=2$, da +1 de error: por lo que debemos hallar la correccion al 2.

Para esto, se multiplica su error +1 por 1; y dividiendo el producto +1

se halle á la 5^a., otros en que se halle á la 4^a., 3^a., 2^a., y 1^a., y finalmente otro en que no se encuentre. Si hubiese muchos términos con la incógnita elevada á una misma potencia, la podríamos reducir á la forma dicha, por el método con que lo hicimos (I. 253) respecto de las de 2º grado; de manera que dicha ecuacion del 6º grado será

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g=0,$$

ó dividiendo por a, tendrémos

$$x^6+\frac{bx^5}{a}+\frac{cx^4}{a}+\frac{dx^3}{a}+\frac{ex^2}{a}+\frac{fx}{a}+\frac{g}{a}=0;$$

que haciendo $\frac{b}{a}=A$, $\frac{c}{a}=B$, $\frac{d}{a}=C$, etc. se nos convertirá en

$$x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F=0;$$

y como con una ecuacion, de cualquier grado, se puede ejecutar lo

---

por $3-1=2$, se obtiene $\frac{1}{2}=0,5$ para la correccion al 2; que, agregándosela, da $2+0,5=2,5$.

Tomando 2,5 por tercer número supuesto, resulta $-0,375$ de error. Como este es de signo contrario al del 2, indica que entre 2 y 2,5 hay al ménos una raiz real. Para aproximarnos mas á ella, debemos hallar la correccion al 2,5. A cuyo efecto, multiplicarémos su error $-0,375$ por $2,5-2=0,5$; y dividiendo el producto $-0,1875$ por $1---0,375=1,375$, se halla $-0,136$ para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da $2,5-0,136=2,364$.

Tomando 2,364 por cuarto número supuesto, se halla $+0,04377$ de error, que siendo de signo contrario al del 2,5, indica que la raiz se halla entre 2,364 y 2,5.

Para encontrar la correccion al 2,364, se multiplica su error $+0,04377$ por $2,364-2,5=-0,136$; y dividiendo el producto $-0,00595$ por

$$-0,375-0,04377=-0,41877,$$

resulta $+0,0142$ para la correccion al 2,364; que, agregándosela, da

$$2,364+0,0142=2,3782;$$

que como ya la correccion solo es una unidad en el segundo guarismo decimal, no continuarémos mas adelante: y tomarémos por raiz suficientemente aproximada 2,3782.

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la propuesta por $x-2,3782$, é igualando el cociente á *cero*; se tiene

$$x^2-3,6218x+0,3866=0;$$

que, en virtud de lo espuesto (I. 253), da

$$x=1,8109\pm\sqrt{(1,8109)^2-0,3866}=1,8109\pm 1,72;$$

que, separando los valores, da $x=3,5309$ y $x=0,0909$.

Donde vemos que nuestro método da desde luego las tres raices, empleando procedimientos ménos complicados, mas cortos, mas elementales, mas uniformes y mas generales.

~~mismo~~, resulta que podrémos representar una ecuacion del grado n por

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+Dx^{n-4}+\ldots+Kx+L=0 \quad (\alpha);$$

el hueco que hemos dejado señalado con puntos queda lleno cuando al esponente n se le da un valor particular; y en ella los coeficientes A, B, $C....K$, L pueden espresar cualesquiera cantidades, sean enteras, ó fraccionarias, positivas ó negativas, comensurables ó incomensurables, numéricas ó algebráicas.

Toda cántidad ó espresion de cantidad, ya sea real, ya tenga la forma de imaginaria, que sustituida en vez de la incógnita, reduzca á cero el primer miembro, y por consiguiente satisfagá á la ecuacion, se llama *raiz de la ecuacion propuesta*; y como una ecuacion se puede siempre considerar como la traduccion algebráica de las relaciones que existen entre los datos y la incógnita de un problema, somos conducidos naturalmente á inferir que *toda ecuacion* tiene al ménos una raiz; pues aunque las condiciones del enunciado de un problema pueden ser algunas veces incompatibles, tenemos repetidos ejemplos de que, en estos casos, el resultado contiene *algun símbolo de absurdo*, como valores imaginarios, ó quedar indeterminadas cantidades que deben tener un valor finito y determinado. Pero, aun en este caso, existe siempre una espresion, que sustituida por x en la ecuacion, reduce su primer miembro á cero; y esta espresion es por consiguiente raiz de la ecuacion (*).

Toda la teoría de las ecuaciones estriba en la siguiente proposicion.

365 *Si* a *es una raiz de la ecuacion* (α), *el primer miembro será divisible por* x—a (**).

(*) Mr. *Cauchi* en sus *Lecciones de Análisis*, dadas en la Escuela Politécnica, ha demostrado esta proposicion mas completamente; pero no de un modo tan elemental como era conveniente.

(**) Esta proposicion se verifica tanto en el caso de ser a un número entero, como en el de ser un número quebrado: é igualmente ya el primer término de la ecuacion carezca de coeficiente, ya le tenga.

Para presentar un ejemplo desde luego, sea la ecuacion

$$50x^3+85x^2+11x-6=0 \quad (k).$$

Si en ella sustituimos $\frac{1}{5}$ en vez de x, el primer miembro se reduce á *cero*; luego $\frac{1}{5}$ es *raiz* de la ecuacion propuesta; y lo que ahora aseguramos, en virtud de la proposicion del testo, es que el primer miembro de dicha (ec. k) dividido por $x-\frac{1}{5}$, da cociente exacto. En efecto, practicando la division por el método espuesto (I. § 185), se halla por cociente exacto la cantidad $50x^2+95x+30$.

Como $x-\frac{1}{5}=0$, da $5x-1=0$; si dividimos el primer miembro de la (ec. k) por $5x-1$, tambien deberémos obtener cociente exacto; y en efecto, practicando la division (I. § 185), se halla $10x^2+19x+6$ sin quedar residuo alguno.

La (ec. k) no se puede resolver por el método de los divisores que esponemos (371 y 372); y el aplicarles los demas métodos que ofrece esta teoría, sería bas-

En efecto, por ser a raiz de la ecuacion (α), se tendrá

$$a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka+L=0,$$

de donde $L=-(a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+Ca^{n-3}+\ldots+Ka)$;
sustituyendo este valor de L en la ecuacion (α), resultará

$$\left.\begin{array}{r} x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+\ldots+Kx \\ -a^n-Aa^{n-1}-Ba^{n-2}-Ca^{n-3}-\ldots-Ka \end{array}\right\}=0$$

ó $(x^n-a^n)+A(x^{n-1}-a^{n-1})+B(x^{n-2}-a^{n-2})\ldots\ldots$
$+C(x^{n-3}-a^{n-3})+\ldots+K(x-a)=0$ (6);

pero, en virtud de lo espuesto (I. 186), todos los factores x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, etc. son divisibles por $x-a$; luego como en cada término se halla uno de estos factores, resulta que todos los términos se-

---

tante embarazoso, como se manifiesta todo en la nota del (§ 372); por lo que no será inoportuno el que le apliquemos nuestro método, para que se perciba bien desde luego, su generalidad, su sencillez, y su superioridad respecto de todos los otros conocidos.

Suponiendo en dicha (ec. k) $x=1$, resulta 136 de error.

Suponiendo $x=2$, se tiene $+756$ de error, y $-0,2$ para la correccion al 1; que, agregándosela, da 0,8.

Tomando 0,8 por tercer número supuesto, da $+82,8$ de error, y $-0,3$ para la correccion al 0,8; que, agregándosela, da 0,5.

Tomando 0,5 por cuarto número supuesto, dá $+27$ de error, y $-0,145$ para la correccion al 0,5; que, agregándosela, da 0,355.

Tomando 0,36 por quinto número supuesto, da 11,3 de error, y $-0,1$ para la correccion al 0,36; que, agregándosela, da 0,26.

Tomando 0,26 por sesto número supuesto, da 0,9082 de error, y $-0,08$ para la correccion al 0,26; que, agregándosela, da 0,18.

Tomando 0,2 por séptimo número supuesto, resulta *cero* de error; por lo que inferimos que $x=0,2=\frac{1}{5}$ es raiz de la (ec. k).

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. k) por $x-0,2$; é igualando el cociente á cero, se tiene $50x^2+95x+30=0$ (k').

Si la preparamos, dividiendo toda la ecuacion por 50, y simplificamos, se nos convertirá en $x+\frac{19}{10}x+\frac{3}{5}=0$.

La cual, en virtud de lo espuesto (I 253), da los dos valores siguientes

$$x=-\frac{2}{5}=-0,4 \text{ y } x=-\frac{3}{2}=-1,5.$$

Pero, si queremos aplicar nuestro método á la (ec. k'), supondrémos $x=1$; lo que da 175 de error.

El supuesto $x=2$, da 420 de error, y $-0,7$ para la correccion al 1; que agregándosela, da 0,3.

Tomando 0,3 por tercer número supuesto, da 63 de error, y $-0,39$ para la correccion al 0,3; que, agregándosela, da $-0,09$.

Tomando $-0,1$ por cuarto número supuesto, da $+21$ de error, y $-0,2$ para la correccion al $-0,1$; que, agregándosela, da $-0,3$.

Tomando $-0,3$ por quinto número supuesto, da $+6$ de error, y $-0,08$

ran divisibles por $x-a$, y por consiguiente lo será toda la ecuacion, que era lo que nos proponíamos probar.

Ahora, como

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots a^{n-1},$$

$$\frac{x^{n-1}-a^{n-1}}{x-a}=\ldots\ldots\ldots\ldots x^{n-2}+x^{n-3}a+\ldots a^{n-2},$$

$$\frac{x^{n-2}-a^{n-2}}{x-a}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x^{n-3}+\ldots a^{n-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x-a}{x-a}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1.$$

Si sustituimos en vez de los factores x^n-a^n, $x^{n-1}-a^{n-1}$, etc. estos cocientes multiplicados por el divisor comun $x-a$, tendrémos

$$(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots a^{n-1})+$$
$$A(x-a)(\ldots\ldots x^{n-2}+x^{n-3}a+\ldots a^{n-2})+$$
$$B(x-a)(\ldots\ldots\ldots x^{n-3}+\ldots a^{n-3})+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(x-a)K=0;$$

que sacando fuera del paréntesis el factor comun $x-a$, efectuando las operaciones indicadas y ordenando, será

$$(x-a)\left\{\begin{array}{l} x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots\ldots a^{n-1} \\ +Ax^{n-2}+Ax^{n-3}a+\ldots Aa^{n-2} \\ +Bx^{n-3}+\ldots Ba^{n-3} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+K \end{array}\right\}=0,$$

y llamando A', B', $C'\ldots K'$ á los coeficientes de los términos que están en columna, esto es, haciendo

$$A'=a+A,\ B'=a^2+Aa+B,$$
$$C'=a^3+Aa^2+Ba+C,\ldots\ldots K'=a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}\ldots\ldots+K,$$

resultará $(x-a)(x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}+\ldots K')=0$, luego se tendrá

---

para la correccion al $-0,3$; que, agregándosela, da $-0,38$.

Tomando $-0,4$ por sesto número supuesto, da 0 de error; por lo que $-0,4$ es raiz de la (ec. k') y de la (k).

Para encontrar la otra raiz que falta, dividirémos el primer miembro de la (ec. k') por $x+0,4$; é igualando el cociente á 0, se tiene $50x+75=0$; que da $x=-\frac{75}{50}=-\frac{3}{2}=-1,5$.

Luego las tres raices de la (ec. k) son $x=0,2=\frac{1}{5}$, $x=-0,4=-\frac{2}{5}$, y

$$x=-1,5=-\frac{3}{2}.$$

∴

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+.....Kx+L.....$$
$$=(x-a)(x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}+.....K' \quad (\gamma).$$

Ahora, la ecuacion propuesta llegará á ser cero cuando uno cualquiera de sus factores lo sea; luego podrá verificarse cuando $x-a=0$, ó cuando $x^{n-1}+A'x^{n-2}+....K'=0$; y si suponemos que la ecuacion

$$x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}+....K'=0$$

tenga una raiz b, su primer miembro será divisible por $x-b$, y se verificará que

$$x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}+...K'=(x-b)(x^{n-2}+A''x^{n-3}+B''x^{n-4}+...K'');$$

luego, si sustituimos este valor en la ecuacion (γ) será

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+....Kx+L.....$$
$$=(x-a)(x-b)(x^{n-2}+A''x^{n-3}+B''x^{n-4}+....K''),$$

la cual nos dice que la ecuacion (α) podrá verificarse de una de las tres maneras, ó siendo

$$x-a=0, \text{ ó } x-b=0, \text{ ó } x^{n-2}+A''x^{n-3}+...K''=0.$$

Continuando del mismo modo, obtendríamos sucesivamente los factores $x^{n-3}+A'''x^{n-4}+B'''x^{n-5}+...K'''=0$,

$$x^{n-4}+A^{iv}x^{n-5}+B^{iv}x^{n-6}+,..K^{iv}=0, \text{etc.}$$

y si cada uno de estos factores es susceptible de una raiz, el primer miembro de la propuesta tomará esta forma

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+...+Kx+L....$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)...\text{etc.} \quad (\delta),$$

es decir, que quedará descompuesta en tantos factores de primer grado como unidades hay en el esponente n.

Luego la ecuacion (α) se podrá verificar de n maneras, á saber, ó siendo $x-a=0$, ó $x-b=0$, ó $x-c=0$, ó $x-d=0$, ó $x-e=0$, etc. (*).

(*) *Es necesario advertir, que estas ecuaciones no se deben considerar como verdaderas sinó alternativamente, y que se incurriria en grandes contradicciones si se supusiese que se verificaban á un tiempo. En efecto, de* x—a=0 *se saca* x=a, *mientras que de* x—b=0 *se tiene* x=b, *cuyas consecuencias no se pueden conciliar sinó cuando* a *y* b *son cantidades iguales. Esta observacion, que hace Lacroix, es tanto mas interesante cuanto en la mayor parte de los libros se supone que se verifican á un tiempo dichas ecuaciones. Ántes de conocer la obra de este sabio, ni los escritos de Lagrange, ya habia yo demostrado que los autores, que habia manejado, no esponian bien esta teoría, en el escrito siguiente, que manifesté á algunos de mis amigos.*

"*Todos los autores principian la teoria de las ecuaciones de este modo:*

Si tenemos estas ecuaciones x—a=0, x—b=0, x—c=0, etc. y las multiplicamos, resultará $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-ax^2+abx-abc=0$,

$$-b \quad +ac$$
$$-c \quad +bc$$

digo que esto es un absurdo, y que de ningun modo, para esplicar la teoría de las

366 Si suponemos que el primer miembro de la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots\ldots+Kx+L=0$$

está ya descompuesto en los n factores de primer grado $x-a$, $x-b$, $x-c$, $x-d\ldots\ldots x-l$, de los cuales $x-l$ sea el último, *vamos á probar que no es susceptible de otros factores.*

---

ecuaciones, se puede partir de las $x-a=0$, $x-b=0$, etc.; *pues entónces cada una determina un valor particular de* x; *la primera da* $x=a$, *la segunda* $x=b$, etc.; *y al ejecutar la multiplicacion de la* x *del primer factor por la del segundo y por la del tercero, resultaría el producto* abc *y no un cubo, como el que se indica en* x^3; *luego es un absurdo el suponer que de la multiplicacion de las ecuaciones* $x-a=0$, $x-b=0$, $x-c=0$, *resulta la*

$$x^3-ax^2+abx-abc=0;$$
$$-b\ +ac$$
$$-c\ +bc$$

y así, para manifestar la teoría de las ecuaciones, procediendo de ecuaciones simples, se deberá seguir el método siguiente.

Supongamos que x *sea una cantidad desconocida; si á* x *se le añade una cantidad conocida cualquiera, positiva ó negativa, tal como* a, *el resultado* $x+a$ *será desconocido, y le llamarémos* z, *con lo que será* $z=x+a$; *si á* x *se le añade otra cantidad conocida diferente de* a, *tal como* b, *el resultado* $x+b$ *será desconoeido, y llamándole* u, *tendrémos* $u=x+b$; *si á* x *se le añade otra cantidad conocida, diferente de* a *y de* b, *tal como* c, *el resultado será desconocido, y llamándole* t *será* $t=x+c$; *si estas tres ecuaciones* $z=x+a$, $u=x+b$, $t=x+c$ *las multiplicamos, tendrémos*

$$tuz=x^3+ax^2+abx+abc.$$
$$+b\ +ac$$
$$+c\ +bc$$

Ahora, para determinar el valor de x *es indispensable que se dé conocida alguna condicion; si esta es que el producto* tuz
ó $x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc$ *sea igual con* P, *tendrémos*

$$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc=P,$$

y quitando P *de ambos miembros, quedará*

$$x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc-P=0.$$

Si ahora hacemos $a+b+c=\alpha$, $ab+ac+bc=\mathfrak{G}$, *y* $abc-P=\gamma$,
la ecuacion de arriba se nos convertirá en $x^3+\alpha x^2+\mathfrak{G}x+\gamma=0$;
y como podríamos elevarnos por el mismo método á una ecuacion del grado que deseásemos, se sigue que podrémos suponer que hemos llegado á la ecuacion general $x^n+\alpha x^{n-1}+\mathfrak{G}x^{n-2}+\gamma x^{n-3}+\ldots\ldots\omega=0$ (A).

Se da el nombre de raiz *de una ecuacion á cualquier cantidad positiva, negativa, ó aun de forma imaginaria, que sustituida en dicha ecuacion por la incógnita cumpla con la condicion que espresa la ecuacion; y lo primero que hay que probar es que si hay un valor de* x *tal como* k, *que sustituido por* x *en dicha ecuacion reduzca á cero el primer miembro, que es la condicion que espresa la ecuacion* (A), *el primer miembro de esta ecuacion será divisible por*

En efecto, si fuese posible la division por un binomio $x-\alpha$, diferente de los primeros, se tendría

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\ldots+Kx+L=(x-\alpha)(x^{n-1}+A_1x^{n-2}+B_1x^{n-3}+\ldots K_1);$$

y por consiguiente

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-l)=(x-\alpha)(x^{n-1}+A_1x^{n-2}+B_1x^{n-3}+\ldots K_1).$$

---

x—k, *teniendo* x *un valor cualquiera, esto es, teniendo* x *todos los valores posibles y aun siendo* x=0.

Probar esto, es lo mismo que demostrar, que de la division del primer miembro por x—k *no puede quedar resta ninguna; si quedase alguna resta, llamándola* R, *y* Q *al cociente, tendríamos*

$$(x-k)Q+R=x^n+\alpha x^{n-1}+\mathfrak{C}x^{n-2}+\ldots\omega \quad (B),$$

porque el cociente Q *multiplicado por el divisor* x—k, *y junto con la resta* R *debe dar el dividendo* $x^n+\alpha x^{n-1}+\mathfrak{C}x^{n-2}+\ldots\omega$.

Pero en la resta R *no entra* x, *y por lo mismo su valor es independiente del de* x, *ó lo que es lo mismo, el valor de* R *será el mismo ya sea* x=k, *ya sea* x=h, *ya* x=g, etc.; *y como cuando* x=k, *el primer miembro de la ecuacion* (A) *se convierte en cero, se sigue que la ecuacion* (B) *se convertirá poniendo* k *en vez de* x, *en* (k—k)Q+R=0, *que da* R=0; *luego pues que la resta que queda de la division es cero, resulta que el primer miembro de la ecuacion* (A) *se puede dividir exactamente por* x—k, *teniendo* x *un valor cualquiera.*

Haciendo un raciocinio semejante respecto del cociente Q, *que tendría esta forma* $x^{n-1}+\alpha' x^{n-2}+\mathfrak{C}'x^{n-3}+\ldots\omega'$,

si hubiese una cantidad tal como h, *que sustituida por* x *le redujese á cero, entónces este cociente y el primer miembro de la ecuacion* (A) *serían divisibles por* x—h, *teniendo* x *un valor cualquiera; y continuando del mismo modo, hallariamos que el primer miembro de la ecuacion* (A) *sería divisible por tantos factores de la forma* x—k, x—h, x—g, *etc. como unidades tuviese* n; *de manera que tendríamos*

$$x^n+\alpha x^{n-1}+\mathfrak{C}x^{n-2}+\ldots\omega=(x-k)(x-h)(x-g)\,etc.=0 \quad (C);$$

y como para que un producto sea 0 *basta que lo sea uno cualquiera de sus factores, resulta que para que se verifique la ecuacion*

$$(x-k)(x-h)(x-g)\text{etc.}=0,$$

se podrá suponer ó bien x—k=0, *ó bien* x—h=0, *ó bien* x—g=0, *etc., pero de ningun modo se puede decir, como lo hacen todos los Analistas, que se verifican estas ecuaciones* x—k=0, x—h=0, x—g=0, *ó que estas ecuaciones multiplicadas entre sí, dan la* (C); *pues entónces resulta un absurdo, porque determinando cada una de estas ecuaciones* x—k=0, x—h=0, x—g=0 *etc. un valor particular de* x, *al ejecutar la multiplicacion de los primeros términos, no puede resultar un término de la forma* x^n, *sinó* khg *etc.*

A causa de este absurdo vienen despues á caer los Analistas en otro, que es el siguiente: puesto que (x—k)(x—h)(x—g) *etc.*=0, *si dividimos, dicen ellos, el primer miembro por* x—k=0, *resultará* (x—h)(x—g) *etc.*=0, *lo que no puede verificarse; pues no pudiendo ejecutar con el primer miembro de*

Sustituyendo ahora α en vez de x, en esta ecuacion, resulta $(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)...(\alpha-l)=(\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1}+A_1\alpha^{n-2}+B_1\alpha^{n-3}+...K_1)$; el segundo miembro de esta ecuacion se desvanece, á causa del factor $\alpha-\alpha$, que es *cero*; pero al primero no le sucede lo mismo, pues que es el producto de factores, que todos son diferentes de cero, mientras que α difiera de cada una de las raices; luego el supuesto no es verdadero; y por lo mismo queda demostrado: *que una ecuacion de un grado cualquiera no admite mas divisores binomios que unidades hay en el esponente de su grado, y que no puede tener por consiguiente un número mayor de raices.*

Tampoco se puede verificar, *que tenga ménos divisores ó factores binomios que las unidades del esponente* n; porque en este caso, el producto de ellos daría un polinomio de un grado inferior á n. Lo que sí puede suceder, es que todos estos divisores ó factores no sean diferentes, sinó que los haya iguales entre sí, como en la ecuacion

$$(x-a)^5(x-b)^3(x-c)=0,$$

que solo tiene las tres raices diferentes a, b, c; pero sus factores binomios son nueve, como aquí se presentan:

$$(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-a)(x-b)(x-b)(x-b)(x-c)=0;$$

y esto nos quiere decir, que *de las nueve raices, hay cinco, igualee con* a, *tres iguales con* b, *y una igual con* c.

367 Si efectuamos ahora el producto del 2.º miembro de la ecuacion (δ), tomando solo los cuatro primeros factores, tendrémos

$$\begin{aligned}
&x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+Cx^{n-3}+...L=\\
&x^n-ax^{n-1}+abx^{n-2}-abcx^{n-3}+.....\pm abcd\text{ etc.};\\
&\quad -bx^{n-1}+acx^{n-2}-abdx^{n-3}\\
&\quad -cx^{n-1}+adx^{n-2}-\text{etc.}\\
&\quad -dx^{n-1}+\text{etc.}\quad -acdx^{n-3}\\
&\quad -\text{etc.}\quad +bcx^{n-2}-\text{etc.}\\
&\qquad\qquad +bdx^{n-2}-bcdx^{n-3}\\
&\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&\qquad\qquad +cdx^{n-2}-\text{etc.}\\
&\qquad\qquad +\text{etc.}
\end{aligned}$$

de donde resulta que

---

una ecuacion ninguna operacion sin ejecutar lo mismo con el segundo, tendrémos que el cociente será $(x-h)(x-g)\,etc.=\frac{0}{x-k}=\frac{0}{0}$, *y no* cero *como suponen ellos siempre.*

Si la teoría de las ecuaciones se tratase por el método, que hemos manifestado ántes, se evitarian estos absurdos, y no encontrarían los principiantes aquella multitud de dificultades que hallan en esta teoría y en la de las fracciones racionales, etc."

1.° $A=-(a+b+c+d+\text{etc.})$
2.° $B=ab+ac+ad+\text{etc}+bc+bd+\text{etc.}+cd+\text{etc,}$
3.° $C=-(abc+abd+\text{etc.}+acd+\text{etc.}+bcd+\text{etc.})$
4.° $L=\pm abcd$ etc. ;

el término L tiene el signo + cuando n es par, y el − cuando ímpar.

De aquí resulta, que *el coeficiente del 2.° término ó de* x^{n-1} *tomado con un signo contrario, es igual á la suma de todas las raices de la ecuacion propuesta ; el coeficiente del 3.er término ó de* x^{n-2} *es la suma de los diferentes productos de las raices tomadas de dos en dos con sus signos respectivos ; el coeficiente del 4.° término ó de* x^{n-3}, *tomado con un signo contrario, es la suma de los diferentes productos de las raices multiplicadas de tres en tres tomadas con sus mismos signos ;* y en fin, que *el último término es igual al producto de todas las raices tomadas con el signo contrario cuando la ecuacion es de grado ímpar, ó con el mismo signo si es de grado par.*

De aquí se deduce aun, que *si en una ecuacion falta el 2.° término, habrá raices positivas y raices negativas, tales que la suma de las negativas será igual con la de las positivas ; y que si el último término falta en una ecuacion, una de las raices ha de ser necesariamente* cero.

Puesto que el primer miembro de la (ec. δ) es divisible por n factores del primer grado, de la forma $x-a$, $x-b$, $x-c$.... ; si se multiplican estos divisores de *dos en dos* ; de *tres en tres*....., se obtendrán tantos divisores del segundo, del tercero.... grado en x, cuantas combinaciones diferentes se pueden formar con n cantidades de dos en dos, de tres en tres, etc. Pero, estos números de combinaciones, como se ha demostrado (I. 299) estan espresados por

$$\frac{n(n-1)}{2}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3} \ldots\ldots ;$$

luego una ecuacion del grado n, admite $\frac{n(n-1)}{2}$ factores del segundo grado, $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$ del tercero ; $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}$ del cuarto, y así sucesivamente.

368 — *Dada una ecuacion algebráica, siempre se puede trasformar en otra, sin resolverla, cuyas raices tengan con las de la propuesta una relacion cualquiera.*

Sea v. g. la ecuacion $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots\ldots Kx+L=0$ (α'), y supongamos que se quiera trasformar en otra, cuyas reices sean todas mayores que las de la propuesta en una cantidad dada h.

Si representamos por z la nueva incógnita, se tendrá por la con-

dicion de la cuestion $z=x+h$, de donde $x=z-h$ (1), y sustituyendo este valor de x en la ecuacion (α'), se trasformará en

$$(z-h)^n+A(z-h)^{n-1}+B(z-h)^{n-2}.....+K(z-h)+L=$$

$$\left.\begin{array}{l} z^n-nh \\ +A \end{array}\right\} z^{n-1}+\left.\begin{array}{l} \dfrac{n(n-1)h^2}{2} \\ -(n-1)Ah \\ +B \end{array}\right\} z^{n-2}-\left.\begin{array}{l} \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2.3}h^3 \\ +\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}Ah^2 \\ -(n-2)Bh \\ +C \end{array}\right\} z^{n-3}+\text{etc. } (\mathcal{C}'),$$

cuyas raices sobrepujan á las de la (α') en la cantidad h.

Siendo h arbitraria, se puede determinar de manera que la ecuacion $(\mathcal{C}')$ satisfaga á una condicion; luego la podrémos determinar con el fin de que desaparezca uno cualquiera de sus términos; para lo cual no haríamos mas que igualar con cero su coeficiente, y despejar la h en esta ecuacion. De manera que, para quitar el 2.° término, harémos

$A-hn=0$, lo que da $h=\dfrac{A}{n}$, y $x=z-\dfrac{A}{n}$;

de donde se deduce la siguiente regla para hacer desaparecer el segundo término de una ecuacion ya preparada ó en que el coeficiente del primer término es 1.

Sustitúyase en vez de la incógnita otra nueva incógnita aumentada en el valor que espresa el coeficiente del segundo término tomado con un signo contrario, y dividido por el esponente de la ecuacion.

Para quitar el tercer término, harémos

$$\tfrac{1}{2}n(n-1)h^2-(n-1)Ah+B=0,$$

y para determinar h deberíamos resolver esta ecuacion, que es de 2.° grado. Para que desapareciese el 4.° término, deberíamos resolver una ecuacion de 3.^{er} grado, y así sucesivamente; de manera, que si quisiéramos quitar el último término, tendríamos que resolver una ecuacion del mismo grado que la dada.

Si quisiéramos que el coeficiente de un término cualquiera fuese igual con una cantidad dada k, igualaríamos dicho coeficiente de la $(\mathcal{C}')$ con k, y determinaríamos h con esta condicion.

Mudando en $(\mathcal{C}')$ el signo de la h, se tendrá *otra ecuacion, cuyas raices serán iguales con las de* (α') *disminuidas en la misma cantidad* h.

369 *Para convertir una ecuacion en otra, cuyas raices sean iguales á las de la primitiva multiplicadas por una cantidad dada* h, haré-

mos $z=hx$, de donde $x=\dfrac{z}{h}$; y sustituyendo este valor en la (α')

se convertirá en $\frac{z^n}{h^n}+A\times\frac{z^{n-1}}{h^{n-1}}+B\times\frac{z^{n-2}}{h^{n-2}}+\ldots\ldots\ldots K\frac{z}{h}+L=0$,

y multiplicando por h^n se tendrá

$$z^n+Az^{n-1}h+Bz^{n-2}h^2+\ldots+Kzh^{n-1}+Lh^n=0,$$

de donde se infiere que para trasformar una ecuacion en otra, cuyas raices sean iguales con las de la propuesta multiplicadas por una cantidad dada h, *basta multiplicar los términos de la propuesta desde el* 2.° *en adelante por las potencias sucesivas* $h, h^2, h^3 \ldots h^n$.

Suponiendo ahora que h fuese igual con $\frac{1}{k}$, tendrémos que *las raices de esta ecuacion serían las de la primitiva divididas por* k.

De aquí se deduce que *para cosvertir una ecuacion en otra, cuyas raices sean iguales á las de la primitiva divididas por* 10, *por* 100 *ó en general por la unidad seguida de ceros, bastará colocar convenientemente la coma*; y así, para hacer que las raices de la anterior sean iguales con las de la (α') divididas por 100, será

$$h=\frac{1}{k}=\frac{1}{100}=0,01;$$

luego quedará desde luego hecha esta trasformacion si en el coeficiente A de la (α') corremos la coma dos lugares á la izquierda, cuatro en el B, seis en el C, etc.; por lo que la podrémos espresar así en general

$$x^n+0,0Ax^{n-1}+0,000Bx^{n-2}+0,00000Cx^{n-3}+\ldots.\text{etc.}=0;$$

y corriendo la coma los mismos lugares hácia la derecha, se tendría convertida una ecuacion en otra, cuyas raices sean iguales á las de la primitiva multiplicadas por 10, por 100 etc.

Por medio de las trasformaciones anteriores se consigue que el 1.^{er} *término de la ecuacion no tenga coeficiente, y que ademas resulte la ecuacion sin coeficientes fraccionarios.* En efecto, supongamos que se nos dé la ecuacion $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\ldots.Kx+L=0$;

para hacer que el 1.^{er} término Ax^n no tenga coeficiente, podemos dividir toda la ecuacion por A, lo que originará el que los coeficientes de los demas sean las fracciones $\frac{B}{A}, \frac{C}{A}, \frac{D}{A}$, etc.;

pero como las cantidades fraccionarias son siempre engorrosas en los cálculos, vamos á manifestar el método que debe seguirse para ejecutar lo que nos proponemos, sin caer en este inconveniente.

Con este objeto harémos $x=\frac{z}{h}$, lo que convertirá la ecuacion anterior en $Az^n+Bhz^{n-1}+Ch^2z^{n-2}+\ldots Kh^{n-1}z+Lh^n=0$,

y suponiendo que la indeterminada h sea igual con A, se tendrá haciendo esta sustitucion y suprimiendo una A en todos los términos,

$$z^n+Bz^{n-1}+CAz^{n-2}+....KA^{n-2}z+LA^{n-1}=0.$$

Si la ecuacion dada tuviese ya coeficientes fraccionarios, la podríamos convertir en otra que no los tuviese, y en que ademas el 1.^{er} *término se hallase sin coeficiente, determinando* h *de manera que fuese igual con el producto de todos los denominadores de dichos coeficientes, ó con el mínimo múltiplo* (I. 80) *de todos los denominadores.*

En efecto, si se nos da la ecuacion $x^3-\frac{a}{b}x^2+\frac{c}{d}x-\frac{m}{n}=0$, haciendo $x=\frac{z}{bdn}$, y sustituyendo este valor en la anterior, tendrémos $\frac{z^3}{b^3d^3n^3}-\frac{a}{b}\times\frac{z^2}{b^2d^2n^2}+\frac{c}{d}\times\frac{z}{bdn}-\frac{m}{n}=0$, que, multiplicando por $b^3d^3n^3$, da $z^3-adnz^2+cb^2n^2dz-mb^3d^3n^2=0$, que tiene las circunstancias pedidas.

370 Si en vez de x sustituyéramos $-x$, tendríamos la ecuacion trasformada en otra en que las raices positivas serían iguales á las negativas de la propuesta, y al contrario; y como esta sustitucion solo mudará los signos de los términos en que hay potencias ímpares de la incógnita, resulta que *para mudar las raices positivas de una ecuacion en negativas, y al contrario, bastará mudar los signos de los términos en que se halle la incógnita con esponente ímpar.*

Ahora, si el grado de la ecuacion fuese par, se tendrían que mudar los signos á los términos que ocupan lugares pares; si la ecuacion fuese de grado ímpar se tendrían que mudar los signos á los términos que ocupan lugares ímpares; pero como entónces resultaría el 1.^{er} término negativo, para hacer que fuese positivo, se deberán mudar los signos á toda la ecuacion, lo que equivale á mudar el signo á los términos que ocupan lugar par en la primitiva; de manera, que *para convertir las raices positivas de una ecuaicon en negativas, y al contrario, no hay que hacer mas que mudar los signos de los términos que ocupan lugares pares.*

Tambien se puede trasformar la propuesta en otra, cuyas raices sean cantidades inversas respecto de las de la primitiva, tales como $x=\frac{h}{z}$.

El órden de los coeficientes se hallaría invertido por esta trasformacion, de manera que si el 2º término faltase en la propuesta, faltaría en la trasformada el penúltimo etc.; y á la mayor raiz z de la trasformada, correspondería la menor x de la dada, y recíprocamente.

Si nos propusiéramos trasformar la ecuacion (α') en otra, cuyas rai-

ces fuesen las raices cuadradas de las de la propuesta, se tendría para espresar esta condicion $z=\sqrt{x}$, de donde $z^2=x$,
y sustituyendo este valor en la ecuacion propuesta, obtendríamos

$$z^{2n}+Az^{2n-2}+Bz^{2n-4}+\ldots Kz^2+L=0.$$

Luego se deduce en general, que *para trasformar una ecuacion en otra, cuyas raices tengan con las de la propuesta una relacion dada, basta espresar esta relacion en una ecuacion algebráica, y sustituir el valor de la incógnita, que se deduzca de ella, en vez de la que se halla en la ecuacion propuesta.*

371 Habiendo manifestado ya las principales propiedades de las ecuaciones algebráicas, vamos á pasar á la resolucion de las numéricas, es decir, que vamos á investigar sus raizes cuando sus coeficientes estan espresados por números; ante todas cosas, manifestarémos que *cuando la ecuacion propuesta no tiene por coeficientes números quebrados, y ademas el coeficiente del primer término es la unidad, dicha ecuacion no puede tener ninguna raiz fraccionaria.*

Para probarlo, supongamos que se tenga la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots.Kx+L=0 \quad (\gamma').$$

Si la fraccion irreducible $\frac{a}{b}$ fuese una de sus raices, sustituyendo en vez de x este valor, tendríamos

$$\frac{a^n}{b^n}+A\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+B\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}+\ldots.K\frac{a}{b}+L=0,$$

qué multiplicando todos los términos por b^{n-1}, y pasándolos al segundo miembro, escepto el primero, se tendrá

$$\frac{a^n}{b}=-(Aa^{n-1}+Bba^{n-2}+\ldots.Kb^{n-2}a+Lb^{n-1});$$

pero siendo $\frac{a}{b}$ irreducible, no puede ser b factor de a^n, y por lo mismo $\frac{a^n}{b}$ no puede ser un número entero; y como por el supuesto todos los términos del 2.° miembro lo son, resulta que tenemos igualado un número fraccionario con la suma de muchos números enteros; lo cual, siendo un absurdo, manifiesta que la ecuacion propuesta no tiene ninguna raiz de la forma $\frac{a}{b}$.

Y pues en virtud de lo dicho (369), se puede dar á toda ecuacion algebráica esta forma, tendrémos que las raices de la ecuacion (γ') serán *enteras, incomensurables, reales ó imaginarias.*

Supongamos que a sea una de las raices de la ecuacion (γ'), y tendrémos $a^n+Aa^{n-1}+Ba^{n-2}+....Ka+L=0$,

de donde $\frac{L}{a}=-(a^{n-1}+Aa^{n-2}+Ba^{n-3}+....K)$;

y como el 2.° miembro es un entero, resulta que $\frac{L}{a}$ lo deberá ser tambien, y por consiguiente L será divisible por a. Así, las raicss enteras de una ecuacion dividen exactamente al último término; de donde se infiere, que *buscando todos los divisores del último término, y viendo si cada uno de ellos sustituido en vez de la incógnita, ya con el signo + ya con el signo —, reduce á cero el* 1.^{er} *miembro de la ecuacion, se tendrán todas las raices enteras de la propuesta si las tiene; y si ninguno de dichos divisores tiene la propiedad de satisfacer á esta condicion, estarémos seguros de que la propuesta no tiene raices enteras* (*).

Sea por ejemplo la ecuacion $x^3-7x^2+14x-8=0$, en que los divisores del último término, tomados con los signos + y —, son 1, 2, 4, 8, —1, —2, —4, —8; haciendo las sustituciones de estos números en vez de x, se hallará que +1, +2, y +4, son los únicos que reducen á cero el 1.^{er} miembro; de donde se sigue que estos números son las raices de la ecuacion propuesta. Por lo que inferimos que su 1.^{er} miembro tiene esta forma $(x-1)(x-2)(x-4)=0$; lo que manifiesta que se puede verificar ó cuando $x-1=0$, ó cuando $x-2=0$, ó finalmente cuando $x-4=0$.

372 Si el último término tuviese un gran número de divisores, este procedimiento sería demasiado largo, y por lo mismo vamos á esponer *à priori*, cuales son los divisores que se deben desechar.

Con el fin de que se perciba con mas claridad dicho método, elegirémos un ejemplo particular, y será la ecuacion de 4.° grado

$$x^4+Ax^3+Bx^2+Cx+D=0,$$

en la cual, suponiendo que a sea una de las raices, ejecutando las sustituciones, se tendrá $a^4+Aa^3+Ba^2+Ca+D=0$, de donde

$$\frac{D}{a}=-C-Ba-Aa^2-a^3;$$

lo cual nos manifiesta, que la primera condicion, que se ha de verificar, es que $\frac{D}{a}$ sea un número entero, cosa que ya sabíamos (371).

(*) *Tambien se podrían hacer estas tentativas, viendo si el pirmer miembro de la ecuacion era divisible por la incógnita acompañada de estos divisores, ya con el signo +, ya con el signo —; lo que en general sería mas penoso.*

Pasando C al primer miembro, será $\frac{D}{a}+C=-Ba-Aa^2-a^3$, que haciendo $\frac{D}{a}+C=C'$, y dividiendo por a, resulta

$$\frac{C'}{a}=-B-Aa-a^2;$$

lo que indica que tambien $\frac{C'}{a}$ debe ser un número entero.

Pasando B al primer miembro, llamando B' á $\frac{C'}{a}+B$, y dividiendo por a, se tendrá $\frac{B'}{a}=-A-a$; de donde resulta que $\frac{B'}{a}$ debe tambien ser un número entero.

Por último, pasando A al primer miembro, llamando A' á $\frac{B'}{a}+A$, y dividiendo por a, será $\frac{A'}{a}=-1$, que da $\frac{A'}{a}+1=0$; luego si reunimos las condiciones acabadas de enunciar, se tendrá que el número a será raiz de la ecuacion propuesta, si satisface á las ecuaciones $\frac{D}{a}+C=C'$, $\frac{C'}{a}+B=B'$, $\frac{B'}{a}+A=A'$, $\frac{A'}{a}+1=0$, de manera que C', B', A' sean números enteros.

De aquí se sigue que, para asegurarse de si un divisor a del último término puede ser raiz de la ecuacion propuesta, es necesario:

1.° *Dividir el último término por el divisor* a, *y añadir al cociente el coeficiente del penúltimo término ó del que afecta á* x.

2.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al cociente el coeficiente del término que afecta á* x^2.

3.° *Dividir esta suma por el divisor* a, *y añadir al cociente el coeficiente que afecta á* x^3.

4.° *Dividir esta suma por el divisor* a *y añadir al cociente la unidad ó el coeficiente del término en que se halla* x^4, *y el resultado debe ser igual con cero si* a *es en efecto una de las raices.*

Las reglas que acabamos de dar convienen á un grado cualquiera, observando que no se debe encontrar cero por resultado, sinó hasta llegar al primer término de la ecuacion dada, y que si falta algun término, se debe suponer que su coeficiente es cero.

Supongamos, con el fin de aplicar estas reglas, que se nos dé la ecuacion $x^3-2x^2-13x+6=0$; los divisores del último término son

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ -1,\ -2,\ -3,\ -6,$$

y aplicando la regla para ver si 1 es raiz de la ecuacion, como la

unidad divide exactamente á todos los números, omitirémos en este caso la division, y dirémos: 6 es 6: que añadido á —13 da —7, que junto con —2 da —9, que unido con 1 da —8; y como este resultado no es igual con cero, inferirémos que 1 no es raiz de ls ecuacion propuesta.

Para averiguar si lo es el 2, dirémos: 6 partido por 2 es igual con 3, que añadido á —13 da —10, que dividido por 2 da —5, que junto con —2 da —7; y como este resultado ya no es divisible por 2, inferimos que este número tampoco es raiz de la ecuacion; y haciendo las mismas tentativas con los otros, hallaríamos que solo el —3 era raiz, porque 6 partido por —3 es igual á —2, que junto con —13 da —15, que dividido por —3 da +5, que junto con —2 da 3, que dividido por —3 da —1, que junto con +1 da cero; lo que indica que —3 es raiz de la ecuacion, y que su primer miembro es divisible por $x+3$.

Y como, hecha la division, resulta por cociente x^2-5x+2, tenemos que la propuesta se podrá verificar ó cuando $x+3=0$, que da $x=-3$, ó cuando $x^2-5x+2=0$, que da (I. 253)

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{17},$$

de donde sale $x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17}$, y $x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}$.
luego las tres raices de la ecuacion serán

$$x=-3,\quad x=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{17},\text{ y }x=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{17}.$$

Por el mismo método hallaríamos que la ecuacion

$$x^4-9x^3+23x^2-20x+15=0$$

no tiene mas raiz entera que +3; y que la $x^3-7x^2+36=0$ tiene por raices á 6, á 3 y á —2; donde observarémos que para aplicar el método á esta ecuacion á que le falta el término donde se halla x, debemos reputar que su coeficiente es cero.

Este método de los divisores conviene tambien á las ecuaciones en que el primer término tiene coeficiente.

Por ejemplo, la ecuacion $7x^4+39x^3-67x^2-399x+642=0$ tiene 2 por raiz; 2 es factor del último término, y se verifica la regla anterior. En efecto,

$$\frac{642}{2}=321;\ 321-399=-78;\ -\frac{78}{2}=-39;\ -39-67=-106;$$
$$-\frac{106}{2}=-53;\ -53+39=-14;\ -\frac{14}{2}=-7;\ -7+7=0.$$

Luego se verifica la regla (*)

(*) Para comprobar la superioridad de nuestro método sobre este de los divisores, resolverémos aquí por él una ecuacion que pone Mr. *Bourdon* en la novena edicion de su Álgebra publicada en París este mismo año de 1843.

Despues de haber esplicado el método de los divisores sobre poco mas ó mé-

373 Si siendo a una de las raices de la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+...+Kx+L=0 \quad (\alpha),$$

dividimos el primer miemdro por $x-a$, y el cociente que resulte se

---

nos, como lo acabamos de hacer en el texto, dice (§ 322 pág. 508).

«*Regla de esclusion.* Cuando el número de los divisores del último término, que se hallan comprendidos entre los dos límites $+L$ y $-L'$, es muy grande, se puede disminuir el número de los ensayos por una regla de fácil uso.

» Sea la ecuacion $x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}...+Tx+U=0$, en la cual suponemos siempre que los coeficientes sean enteros.

» Se sabe que, siendo a raiz de esta ecuacion, su primer miembro es divisible por $x-a$; así se tiene la identidad

$$x^m+Px^{m-1}+...+Tx+U=(x-a)(x^{m-1}+P'x^{m-2}+...+T'x+U'),$$

siendo P', Q',...T', U', segun la ley de formacion, números enteros, así como tambien a, P, Q,...T, U. Esto supuesto, como la ecuacion precedente se debe verificar, cualquiera que sea x, hagamos $x=1$; y resulta

$$1+P+Q+..+T+U=(1-a)(1+P'+Q'+...+T'+U');$$

de donde $$\frac{1+P+Q+...T+U}{1-a}=1+P'+Q'+...+T'+U'.$$

» El segundo miembro de esta ecuacion es un número entero; luego el primer miembro tambien será número entero. Pero, siendo a un número entero, positivo ó negativo, no puede ser raiz sinó en tanto que $(1-a)$, ó mas bien $(a-1)$ *divida al resultado de la sustitucion de* $+1$ *en la propuesta.*

» Se probaría del mismo modo, haciendo $x=-1$, que $-(1+a)$ ó $(a+1)$ *debe dividir al resultado de la division de* -1; de donde se infiere la regla siguiente:

» Sustituid sucesivamente $+1$ y -1 en la propuesta, y designad por M y M' los valores numéricos de los resultados de esta doble sustitucion.

(Si el uno de los resultados es 0, en cuyo caso $+1$ ó -1 sería raiz, habría que principiar por suprimir esta raiz en la propuesta ántes de aplicar la regla.)

1.° *Todo divisor positivo del último término, que disminuido de* 1, *no divida á* M, *y que aumentado de* 1, *no divida á* M', *debe ser desechado.*

2.° *Todo divisor negativo, cuyo valor numérico, aumentado de* 1, *no divida á* M, *y disminuido de* 1, *no divida á* M' *debe ser desechado.*

» A fin de poner mas fácilmente en evidencia estos dos caractéres de esclusion, conviene descomponer al principio los dos resultados M y M' en sus divisores.

» Propongámonos, por ejemplo, determinar las raices comensurables de la ecuacion $x^4-5x^3-37x^2+257x-360=0$.

» El límite superior de las raices positivas de esta ecuacion es $37+1$, ó 38; porque $257x-360$ viene á ser $257\left(x-\frac{360}{257}\right)$; el límite superior de las negativas es $-(1+\sqrt{360})$ ó -20.

» Los divisores de 360, que se deben someter á las pruebas del método, son

reduce á cero cuando $x=a$, es señal de que la ecuacion propuesta tenía dos raices iguales con a; si este cociente le volvemos á dividir

---

pues 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, y —1, —2, —3, —4, —5, —6, —8, —9, —10, —12, —15 y —18.

»El resultado de la sustitucion de +1 en la propuesta es, haciendo abstraccion del signo, 144 ó $2^4.3^2$; el resultado de la sustitucion de —1 es 648 ó $2^3.3^4$.

»Esto supuesto, pasémos primero en revista los divisores positivos, partiendo desde el 36, que es el mayor.

36—1, ó 35=7.5 no divide á 144, que es igual á $2^4.3^2$: así, 36 debe ser desechado.

»Se desechará por la misma razon 30, 24, 20, 18, 15, 12.

10—1 ó 9, divide á 144; pero 10+1 ú 11 no divide á 648, que es igual con $2^3.3^4$; así, 10 debe ser desechado.

»Se reconocerá aun que 9, 8, 6, 4 deben ser desechados; es decir, que los solos divisores positivos, que satisfacen á la regla, son 5, 3 y 2.

»En cuanto á los divisores negativos; 18+1 ó 19 no divide á 144; así —18 debe ser desechado.

15+1, ó 16, divide á 144; pero 15—1, ú 14 no divide á 648; luego —15 debe ser desechado.

»Se vería igualmente que —12, —10, —9, —8, —6, —4 deben ser desechados. Así, no se deben someter á las pruebas del método, sinó los divisores —5, —3, y —2.

»Aplicando el método á los divisores +5, +3, +2, —2, —3, —5 se reconocerá que 5 es el solo que llena todas las condiciones, y que sea por consiguiente raiz de la propuesta.

»Efectuemos la division por $x-5$; viene por resultado

$$x^3-37x+72=0,$$

ecuacion que no podría tener de nuevo 5 por raiz, pues que 5 no divide á 72. Así, esta ecuacion no tiene ya sinó raices incomensurables y raices imaginarias."

Aquí concluye Mr. *Bourdon* lo relativo á este ejemplo, sin determinar ninguna de las otras tres raices.

Por nuestro método se determinan todas las cuatro raices de la propuesta con ménos fatigas y penalidades que las que resultan por el método usado por Mr. *Bourdon* para encontrar solo una.

En efecto, la ecuacion propuesta es

$$x^4-5x^3-37x^2+257x-360=0 \quad (p).$$

El supuesto $x=1$, da —144 de error.

El supuesto $x=2$, da —18 de error, y 0,14 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,14.

Tomando 2,14 por tercer número supuesto, resulta —7,4928 de error, y +0,09 para la correccion al 2,14; que, agregándosela, da 2,23.

Tomando 2,23 por cuarto número supuesto, se obtiene —1,6057 de error, y 0,04 para la correccion al 2,23; que, agregándosela, da 2,27.

Tomando 2,3 por quinto número supuesto, da +2,5191; el cual, sien-

por $x-a$, y el polinomio que nos resulte, se reduce aun á cero, cuando $x=a$, es señal de que la propuesta tenía tres raices iguales con a, y así sucesivamente.

---

do positivo, manifiesta que entre 2,23 y 2,3 hay al ménos una raiz real; y se obtiene +0,027 para la correccion al 2,23; que, agregándosela, da 2,257.

Tomando 2,257 por sesto número supuesto, se obtiene +0,034 de error. Luego la raiz se halla entre 2,23 y 2,257, resultando —0,005 para la correccion al 2,257; que, agregándosela, da 2,252; y pues ya la correccion se halla en el tercer guarismo decimal, no es necesaria mayor aproximacion, y podemos tomar por raiz suficientemente aproximada el valor 2,252.

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. p) por $x-2,252$; é igualando el cociente á *cero*, resulta

$$x^3-2,748x^2-43,1885x+159,7396=0 \quad (p');$$

Para aplicarle el método, supongamos $x=1$; lo que da +114,8 de error.

El supuesto $x=2$, da +70,3706 de error, y 1,58 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 3,58.

Tomando 4 por tercer número supuesto, da +7,0176 de error, y 0,2 para la correccion al 4; que, agregándosela, da 4,2.

Tomando 4,2 por cuarto número supuesto, da +3,9612 de error, y 0,26 para la correccion al 4,2; que, agregándosela, da 4,46.

Tomando 4,5 por quinto número supuesto, da +0,8693 de error, y 0,08 para la correccion al 4,5; que, agregándosela, da 4,58.

Tomando 5 por sesto número supuesto, da +0,0971 de error; el cual hallándose en las centésimas, debemos inferir que proviene de ser aproximados los coeficientes de la (ec. p'); y que se debe considerar el 5 como raiz exacta.

Para encontrar las otras dos que faltan, dividirémos el primer miembro de ls (ec. p') por $x-5$, é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^2+2,252x+31,9285=0 \quad (p'').$$

Debiendo advertirse que resulta por resta, la misma pequeña cantidad 0,0971 que nos dió de error el supuesto 5.

Resolviendo la (ec p'') por lo espuesto (I. 253), se obtiene para sus dos raices

$$x=-1,126+\sqrt{-30,68}, \quad x=-1,126-\sqrt{-30,68};$$

cuyas dos raices son imaginarias.

Luego, hemos sacado las cuatro raices de la (ec. p) con ménos trabajo que por el procedimiento que sigue Mr. *Bourdon*, se halla solo una; á pesar de que, por ser la raiz incomensurable menor que la comensurable 5, la (ec. p') ha tenido sus coeficientes complicados; pues como nuestro método va dando las raices por el órden de su magnitud, si la raíz entera 5, hubiera sido menor que la otra, habría salido ántes; y la (ec. p') no contendría sinó coeficientes enteros, y su resolucion habría resultado mas séncilla.

En la nota del (§ 365), hemos dicho que la ecuacion

$$50x^3+85x^2+11x-6=0 \quad (k)$$

no se puede resolver por el método de los divisores; y vamos á comprobarlo. Los divisores del último término son 1, 2, 3, 6, —1, —2, —3, —6; y ensayados todos

Hay métodos para conocer si una ecuacion tiene raices iguales; pero siendo complicados, y no de todo punto indispensables para la resolucion de las ecuaciones numéricas, los omitirémos por ahora, y los

---

por la regla (§ 372), se encuentra que ninguno de los ocho satisface á ella; luego dicho método no es aplicable á la espresada ecuacion.

Tambien hemos dicho que aplicar á dicha ecuacion los otros métodos, que ofrece esta *teoría de las ecuaciones*, sería embarazoso; y vamos tambien á probarlo.

En efecto, para preparar dicha ecuacion de modo que el primer término resulte sin coeficiente, y sin que la ecuacion tenga fracciones, deberémos hacer

(§ 369) $x=\frac{z}{50}$; y sustituyendo este valor en (k), se tendrá

$$50.\frac{z^3}{50^3}+85.\frac{z^2}{50^2}+11.\frac{z}{50}-6=0, \quad \text{ó} \quad \frac{z^3}{50^2}+\frac{85.z^2}{50^2}+11.\frac{z}{50}-6=0,$$

ó multiplicándolo todo por 50^2, será $z^3+85z^2+550z-15000=0$ (k').

Si esta ecuacion se hubiese de resolver por el método de los divisores, se puede inferir la complicacion que envolvería en atencion á tener un número tan considerable de divisores el último término 15000; y habrá pocas personas que tengan la suficiente paciencia para ejecutarlo. Yo, que no me asusto de cálculos complicados, no me comprometo á emprender este trabajo, mayormente cuando mi método resuelve dicha ecuacion completamente, y con la sencillez que se va á ver.

El supuesto $z=1$, da -14364 de error.

Suponiendo $z=2$, se obtiene -13552 de error, y 16,7 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 18,7.

Tomando 19 por tercer número supuesto, da $+32994$ de error; y como es positivo, y el del 2 era negativo, se infiere que entre 2 y 19 hay al ménos una raiz real.

Para encontrar la correccion al 2, que es el que da menor error numérico, se multiplica el error del 2, que es -13552 por $2-19=-17$; y dividiendo el producto $+230384$ por la diferencia de los errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que es $32994--13552=46546$, resulta 4,9 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 6,9.

Tomando 7 por cuarto número supuesto, da -6642 de error; que, siendo negativo, indica, que al ménos una raiz real se halla entre 7 y 19. Y se obtiene 2 para la correccion al 7, que, agregándosela, da 9.

Tomando 9 por quinto número supuesto, da -2236 de error; que, siendo negativo, indica, que una raiz al ménos se halla entre 9 y 19, resultando $+1$ para la correccion al 9; que, agregándosela, da 10.

Tomando 10 por sesto número supuesto, se obtiene *cero* de error; por lo

que $z=10$ es raiz de la (ec. k'); y como $x=\frac{z}{50}$, se tiene $x=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}=0,2$,

∴

espondrémos en adelante (§ 388) por digresion, y pasarémos á la resolucion aproximada de las ecuaciones numéricas.

Por los métodos espuestos (369 al 372) podemos suponer reducida ya una ecuacion á otra que no contenga sinó raices incomensurables y raices imaginarias; y así, nos propondrémos ahora averiguar cuales son los métodos de aproximacion respecto de las primeras. Para lo cual demostrarémos ante todas cosas la siguiente proposicion.

374 *Cuando se tienen dos cantidades que, sustituidas en una ecuacion en vez de la incógnita, den dos resultados de signos diferentes, se puede inferir que una de las raices de la ecuacion propuesta está comprendida entre estas dos cantidades, y es por consiguiente real.*

Sea por ejemplo la ecuacion $x^3-13x^2+7x-1=0$; si sustituimos los números 2 y 20 en vez de x, no se reduce el primer miembro á cero, como se debía verificar si dichos números fuesen raices de la ecuacion, sinó que en el primer caso se reduce á -31, y en el segundo á 2939; de donde se infiere que esta ecuacion tiene una raiz real comprendida entre 2 y 20, es decir, que será mayor que 2 y menor que 20.

Para probar esta asercion, observarémos que si por una parte reu-

---

que es el primer valor que hallamos ántes (nota del § 365).

Para encontrar los demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. k′) por $z-10$; é igualando el cociente á 0, resulta $z^2+95z+1500=0$ (k″); que podríamos resolver por el método de las de 2.° grado (I. 253), pero, preferirémos aplicarle nuestro método.

Para esto supondrémos $z=1$; lo que da 1596 de error.

El supuesto $z=2$, da 1694 de error; y -17 para la correccion al 1; que, agregándosela, da -16.

Tomando -16 por tercer número supuesto, da $+236$ de error, y -2 para la correccion al -16; que, agregándosela, da -18.

Tomando -18 por cuarto número supuesto, da 114 de error, y $-1,8$ para la corrección al -18; que, agregándosela, da $-19,8$.

Tomando -20 por quinto número supuesto, da 0 de error; por lo que -20 es raiz de la (ec. k″) y de la (k′); y como $x=\frac{z}{50}$, se tendrá $x=\frac{-20}{50}=-\frac{2}{5}=-0,4$; que es el segundo valor que hallamos (nota del § 365).

Para encontrar la otra raiz que falta, dividirémos el primer miembro de la (ec. k″) por $z+20$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene $z+75=0$; que da $z=-75$; y como $x=\frac{z}{50}$, será $x=-\frac{75}{50}=-\frac{3}{2}=-1,5$, que es la otra raiz de la (ec. k). y queda recomprobada la superioridad de nuestro método sobre todos los demas.

nimos todos los términos positivos de la propuesta, y por otra todos los negativos, tendrémos $(x^3+7x)-(13x^2+1)=0$.

Esta espresion hemos encontrado que es negativa cuando $x=2$, porque en este supuesto $x^3+7x<13x^2+1$.

Las cantidades x^3+7x y $13x^2+1$ aumentan cuando crece x; y como los valores de x los podemos elegir tan poco diferentes los unos de los otros como deseémos, podrémos hacer crecer las cantidades propuestas por grados tan pequeños como queramos; pero la primera de estas cantidades, que era al principio menor que la segunda, se ha hecho despues mayor; luego el incremento de la primera es mas rápido que el de la segunda, pues no solo compensa el esceso que esta última tenía sobre ella, sinó que la sobrepuja despues; de donde se infiere que podemos concebir un valor de x que haga iguales á estas cantidades. Este valor, cualquiera que sea, que hace $x^3+7x=13x^2+1$, dando $x^3+7x-(13x^2+1)=0$, ó $x^3-13x^2+7x-1=0$, es necesariamente la raiz de la ecuacion propuesta.

Lo que acabamos de manifestar respecto de esta ecuacion particular, lo podemos aplicar á una ecuacion cualquiera; luego si llamamos P á la suma de de todos los términos positivos de una ecuacion, y Q á la de los negativos, tendrémos que si a es el menor valor de x que haya dado un resultado negativo, y b otro mayor que haya dado un resultado positivo, estas dos circunstancias no se podrán haber verificado sinó porque en virtud de la primera sustitucion sería $P<Q$, y en virtud de la segunda $P>Q$; luego habiendo P sobrepujado á Q, se concluirá como ántes que hay un valor de x, medio entre a y b, que hace $P=Q$.

La inversa de esta proposicion tambien es verdadera; es decir: que sí α es raiz de una ecuacion, y en vez de α, se sustituyen en la misma ecuacion dos valores $\alpha+\delta$ y $\alpha-\delta$, siendo δ una cantidad pequeña, que bastará sea menor que la menor diferencia de las raices, resultarán de estos dos supuestos, dos valores que tendrán signos contrarios.

375 Este razonamiento parece exigir que los dos valores que se dén á x sean ambos positivos ó ambos negativos; porque cuando tienen signos diferentes, el que es negativo hace mudar de signo á los términos de la ecuacion propuesta, que contienen potencias ímpares de x, y por consiguiente las espresiones de P y de Q no están compuestas del mismo modo en ambas sustituciones.

Esta dificultad desaparece haciendo $x=0$; en virtud de lo cual la ecuacion propuesta se reduce á su último término, que se halla precisamente con un signo contrario al resultado de una de las sustituciones.

Sea por ejemplo la ecuacion $x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0$,
cuyo 1.^{er} miembro haciendo $x=-1$ se convierte en $+12$;
haciendo $x=2$ se reduce á -45; y como el supuesto de $x=0$ la redu-

ce á -3, hace que esta y la que resulta del supuesto de $x=-1$ den resultados de signos diferentes; luego habrá una raiz comprendida entre cero y -1; pero si sustituimos $-z$ en vez de x, la ecuacion propuesta se convertirá en $z^4+2z^3-3z^2+15z-3=0$,
y se tendrá $P=z^4+2z^3+15z$, y $Q=3z+3$,
de donde $P<Q$ cuando $z=0$, y $P>Q$ cuando $z=-x=-(-1)=1$; luego en este caso se puede discurrir del mismo modo que en el precedente, y concluir que la ecuacion espresada en z tiene una raiz comprendida entre cero y $+1$; de donde se sigue que la ecuacion en x la tiene comprendida entre cero y -1

376 Esto, que acabamos de manifestar, supone que á la incógnita se la pueden dar tales valores que el primer miembro de la ecuacion mude de signo en cada caso; y así, vamos á manifestar que *en toda ecuacion se puede siempre determinar un número tal, que el primer término sea mayor que la suma de todos los otros.*

Para esto, supondrémos que se tenga la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+....Kx+L=0;$$

y como para reducirse á cero su 1.^{er} miembro, deben destruirse mútuamente sus términos, resulta que el caso ménos favorable para nuestra proposicion es cuando el 1.^{er} término tenga que destruirse con la suma de todos los demas, ó cuando sus coeficientes A, B, C, D, etc. sean negativos; ademas de esto, supongamos que todos sean iguales con el mayor de ellos, que supondrémos ser H, y tendrémos que el caso ménos favorable estará cifrado en la ecuacion

$$x^n-Hx^{n-1}-Hx^{n-2}-....-Hx-H=0;$$

luego si demostramos nuestra proposicion respecto de esta ecuacion, quedará demostrada respecto de cualquiera otra.

Esto supuesto, poniendo el primer miembro bajo la forma

$$x^n-H(x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+...x+1)=0,$$

y observando que lo que hay dentro del paréntesis es la suma de una progresion geométrica, cuyo primer término, principiándola al contrario, es 1, la razon x y el número de términos n, tendrémos (I. 290) que

$$x^{n-1}+x^{n-2}+..x+1=\frac{x^n-1}{x-1};$$

y sustituyendo este valor en vez de lo que hay dentro del paréntesis, será $x^n-H\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)=0$, ó $x^n-\left(\frac{Hx^n}{x-1}-\frac{H}{x-1}\right)=0$.

Ahora, si en vez de x se sustituye un número cualquiera M, esta espresion será $M^n-\left(\frac{HM^n}{M-1}-\frac{H}{M-1}\right)=0$,

y el 1.^{er} término M^n será mayor que la diferencia de los otros dos,

siempre que sea igual con el minuendo $\frac{HM^n}{M-1}$; luego para determinar M de modo que satisfaga á esta condicion, tendrémos $M^n=\frac{HM^n}{M-1}$, que dividiendo por M^n, se tendrá $1=\frac{H}{M-1}$, de donde $M=H+1$; lo que nos dice, que *sustituyendo por x el mayor de los coeficientes aumentado en una unidad, se hará el 1.er término de la propuesta mayor que la suma de todos los otros.* El número M podría ser menor, si solo se intentase que la parte positiva de la ecuacion propuesta fuese mayor que la parte negativa; porque para esto *bastaría hacer el 1.er término mayor que la suma que diesen todos los negativos aun cuando sus coeficientes fuesen iguales al mayor de los coeficientes negativos*; luego no se tendría mas que *tomar por M este coeficiente aumentado en una unidad.*

De aquí se deduce que las raices positivas de la ecuacion dada, estarán comprendídas necesariamente entre cero y $M=H+1$.

Tambien se puede descubrir por el mismo método un límite á las raices negativas: para esto es necesario sustituir $-z$ en vez de x en la ecuacion propuesta, y hacer positivo el 1.er término si esta sustitucion le hace negativo. Con lo cual tendrémos que los valores positivos de z corresponderán á los valores negativos de x, y recíprocamente.

Y *si G es el mayor coeficiente negativo despues de esta trasformacion*, $G+1$ *será el límite de los valores positivos de z, y por consiguiente* $-G-1$ *será el de los valores negativos de x.*

Cuando en la ecuacion propuesta hay algunos términos positivos, ademas del 1º, se pueden encontrar límites aun mas aproximados entre que se hallen las raices. En efecto, sea $m-n$ el esponente de x en el primer término negativo de la ecuacion

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots\ldots-Mx^{m-n}+Nx^{m-(n+1)}+\ldots.Tx-V=0 \quad (m).$$

Si suponemos que $x=k+1$, y determinamos k con la condicion de que $k+1$ sustituido por x en la ecuacion (m), dé un resultado ó error positivo, tendrémos, haciendo la sustitucion

$(k+1)^m+A(k+1)^{m-1}+B(k+1)^{m-2}..-M(k+1)^{m-n}+N(k+1)^{m-(n+1)}+$ $\ldots.T(k+1)-V=0$ (m'). Pero añadiendo y quitando una misma cantidad, lo que no altera las espresiones, pues esto equivale á añadir *cero*, se tiene $m=1+n+m-n-1$; $m-1=1+n+m-n-1-1$;

$$m-2=2+n+m-n-2-2;$$

y en general $m-n=n+n+m-n-n-n$; ó añadiendo y quitando la unidad, en $m-n=n-1+n+m-n-n-n+1$, tendrémos

1.º $(k+1)^m=(k+1)^{1+n+m-n-1}=(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-n}(k+1)=\ldots..$

$k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-n}+(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-n}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-n}+\ldots..$

$(k+1)^{n-1+m-n}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-n}+(k+1)^{m-1}\ldots;$

por ser $n-1+m-n=m-1$.

2.° $(k+1)^{m-1}=(k+1)^{1+n+m-n-1-1}=(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+1)}(k+1)=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+1)}+(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+1)}$;

que, efectuando las operaciones en el segundo término del último miembro, se tiene $(k+1)^{m-1}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+1)}+(k+1)^{m-2}$.

3.° $(k+1)^{m-2}=(k+1)^{2+n+m-n-2-2}=$.....

$(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)}(k+1)^{-1+2}=(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)}(k+1)=...$

$k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)}+(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)}$;

que, efectuando las operaciones en el segundo término del último miembro, se tiene $(k+1)^{m-2}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+2)}+(k+1)^{m-3}$.

Continuando del mismo modo, se tendría que

$(k+1)^{m-n}=(k+1)^{n-1+n+m-n-n-n+1}=$.....

$(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-(n+n)}(k+1)^{1+n-n=1}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{m-2n}+$.....

$(k+1)^{n-1+m-2n=m-n-1}$.

Todas estas potencias siguen un mismo órden; así es, que desde la primera hubiéramos podido sacar las demas, sustituyendo en vez de m, los valores $m-1$, $m-2$, $m-3$, $m-4$...., hasta $m-n$.

Ahora, si en vez de m, sustituimos n, tendrémos que

$(k+1)^{n}=k(k+1)^{n-1}(k+1)^{n-n}+(k+1)^{n-1}=k(k+1)^{n-1}+(k+1)^{n-1}$.

Y suponiendo $k(k+1)^{n-1}=P$, se tendrá, haciendo las sustituciones 2.°, 3.° etc. en 1.°, que

$(k+1)^{m}=P(k+1)^{m-n}+P(k+1)^{m-(n+1)}+P(k+1)^{m-(n+2)}+$.....

$P+(k+1)^{n-1}$ (n).

Si sustituyéramos los valores 2.°, 3.° etc. en los términos Ax^{m-1}, Bx^{m-2}, etc. ó sus iguales, $A(k+1)^{m-1}$, $B(k+1)^{m-2}$, etc. comprendidos entre el 1.° y el término negativo en que x lleva el esponente $m-n$, dichos términos resultarían positivos, pues que por el supuesto lo son; y si llamamos Q á su suma, tendrémos, que, si en vez de $(k+1)^{m}$, sustituimos su valor (n) en la ecuacion (m'), nos resultará

$P(k+1)^{m-n}+P(k+1)^{m-(n+1)}+P(k+1)^{m-(n+2)}+...P+(k+1)^{n-1}+$.....

$Q-M(k+1)^{m-n}+N(k+1)^{m-(n+1)}$.....$-V=0$,

que podemos poner bajo esta forma:

$P+Q+(P-M)(k+1)^{m-n}+(P+N)(k+1)^{m-(n+1)}$.....$-V=0$ (o).

Si ahora determinamos k, suponiendo que P sea igual con el mayor coeficiente negativo, tendrémos en virtud de lo espuesto al principio de este párrafo, que el resultado será positivo; y con mayor razon lo será, si se supusiese á P mayor que el valor numérico de dicho coeficiente negativo; es decir, que se tome P ó $k(k+1)^{n-1}=$ ó $>H$, espresando por H el mayor valor numérico de todos los coeficientes negativos; y se tendrá un resultado positivo, lo cual se consigue suponiendo $K^{n}=H$ ó $K=\sqrt[n]{H}$.

En efecto, $k(k+1)^{n-1} =$ (I.302)

$$k(k^{n-1}+(n-1)k^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}k^{n-3}+\text{etc.}) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k^n+(n-1)k^{n-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}k^{n-2}+\text{etc.} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k^n\left(1+(n-1).\frac{1}{k}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}.\frac{1}{k^2}+\text{etc.}\right).$$

Esta cantidad es mayor que k^n; porque lo que hay dentro del paréntesis es mayor que 1; luego si suponemos $k^n = H$, dicha espresion será mayor que H, y queda satisfecha la condicion.

De toda esta discusion, resulta que $1+\sqrt[n]{H}$, *es el límite superior mas aproximado de las raices positivas de una ecuacion.* En esta espresion, H es el coeficiente negativo de mayor valor numérico; y n espresa el número de términos positivos que hay ántes del primer término negativo. Propongámonos algunos ejemplos

1º $x^4-3x^3+37x^2-5x+39=0$. Aquí hay solo un término delante del primero negativo; luego será $n=1$; y H será $=5$, pues es el coeficiente negativo que tiene mayor valor numérico; y como la raiz del grado 1 de una cantidad cualquiera es la misma cantidad, resulta que el límite superior de las raices positivas de esta ecuacion es

$$1+\sqrt[1]{5}=1+5=6.$$

2º $x^5+7x^4-12x^3-49x^2+52x-13=0$. Aquí $n=2$; porque hay dos términos positivos ántes del primero negativo. $H=49$, porque es el coeficiente del término negativo que tiene el mayor valor numérico; luego el límite superior de las raices positivas de la espresada ecuacion es

$$1+\sqrt[2]{49}=1+7=8.$$

3º $x^4+11x^3-25x-67=0$. Aquí $n=3$; porque aunque en la apariencia solo hay dos términos positivos ántes del primero negativo, se debe considerar para este objeto el término en que se hallase x^2; y $H=67$; luego el límite que buscamos es

$$1+\sqrt[3]{67}=1+5=6.$$

Porque en estos límites se toman siempre números enteros, y siendo $\sqrt[3]{67}=4$ y algo mas, se toma 5 por dicha raiz.

Para encontrar un límite inferior de las raices, mas aproximado que 0, harémos $x=\frac{1}{z}$ en la ecuacion propuesta, y las raices de la ecuacion trasformada en z serán las potencias negativas de las raices de

la propuesta; luego si se toma por z una cantidad mayor que la raiz positiva de la trasformada, $\frac{1}{z}$ será una cantidad menor que la menor raiz x; luego si se supone que H' sea el mayor coeficiente negativo de la trasformada, tomado positivamente, será $z=H'+1$, y por consiguiente $\frac{1}{H'+1}$ será menor que la menor raiz de la ecuacion propuesta; de manera, que todas las raices reales de la ecuacion propuesta se hallarán entre $H+1$ y $\frac{1}{H'+1}$.

377 De aquí se deduce, que *toda ecuacion de grado ímpar, cuyos coeficientes son reales, tiene necesariamente una raiz real de un signo contrario al de su último término; y toda ecuacion de grado par, cuyo último término es negativo, tiene al ménos dos raices reales, una positiva y otra negativa*; porque si se toma M, tal que el signo de la cantidad $M^n+AM^{n-1}+BM^{n-2}+\ldots KM\pm L$ no dependa sinó del de su primer término M^n, siendo ímpar el esponente n, el término M^n será positivo, si M lo es, y negativo si lo es M. Esto supuesto, si el último término L tiene el signo $+$ y se hace $x=-M$, se tendrá un resultado de signo contrario al que da la suposicion de $x=0$; donde se ve que la propuesta tiene una raiz entre cero y $-M$, esto es negativa. Si el último término L tiene el signo $-$, se hará entónces $x=M$, y vendrá un resultado de signo contrario al supuesto de $x=0$, en cuyo caso la raiz se hallará entre cero y $+M$, por consiguiente será positiva. Cuando la ecuacion propuesta es de grado par, el primer término M^n permaneciendo positivo, cualquiera que sea el signo que se dé á M, no se puede uno asegurar por lo que precede, de la existencia de una raiz real si el último término tiene el signo $+$, puesto que ya se haga $x=0$, ó $x=\pm M$, siempre se tiene un resultado positivo; pero cuando el último término L es negativo, haciendo

$$x=+M,\ x=0,\ x=-M,$$

se hallan tres resultados que están afectos respectivamente de los signos $+$, $-$, y $+$, y por consiguiente la ecuacion propuesta tiene al ménos dos raices reales en este caso, una positiva comprendida entre M y cero, y otra negativa comprendida entre cero y $-M$. Luego *toda ecuacion de grado par, cuyo último término es negativo, tiene al ménos dos raices reales, una positiva y otra negativa.*

Tambien se deduce, que *si todos los términos de una ecuacion son positivos, y todos los esponentes son números pares, dicha ecuacion tendrá imaginarias todas sus raices*; porque todos sus términos espresa-

rán cantidades positivas para las raices reales; y una suma de cantidades posilivas jamás puede ser igual con cero.

378. Entendido esto, pasemos á la resolucion de las ecuaciones por aproximacion. Supongamos que se tenga la $x^4-4x^3-3x+27=0$; en la cual siendo -4 su mayor coeficiente negativo, se deduce (376) que su mayor raiz positiva será ménor que 5; y si sustituimos $-z$ en vez de x, se tendrá $z^4+4z^3+3z+27=0$, resultado que, teniendo positivos todos sus términos, manifiesta que z debe ser negativa; de donde se deduce que x es necesariamente positiva, y que la ecuacion propuesta no puede tener raices negativas; luego las raices reales estarán comprendidas entre cero y $+5$.

Se puede hallar un límite inferior mas aproximado que cero de la raiz menor; para esto es necesario hacer $x=\frac{1}{z}$, lo que da

$$\frac{1}{z^4}-\frac{4}{z^3}-\frac{3}{z}+27=0, \text{ ó } 27z^4-3z^3-4z+1=0;$$

ó en fin $z^4-\frac{3}{27}z^3-\frac{4}{27}z+\frac{1}{27}=0$; en cuya ecuacion el mayor valor de z, no podría llegar á ser $\frac{4}{27}+1=\frac{31}{27}$; y como $x=\frac{1}{z}$, resultaría $\frac{1}{x}<\frac{31}{27}$, de donde $x>\frac{27}{31}$, lo que nos enseña que x está comprendida entre $\frac{27}{31}$ y 5.

El primer método que se presenta, para llegar á obtener límites mas aproximados, consiste en suponer sucesivamente $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, etc. y si dos de estos números, sustituidos en la ecuacion propuesta, dan resultados de signos contrarios, serán nuevos límites de las raices; pero haciendo

$$\left\{\begin{array}{ll} x=1 & \text{su primer miembro se convertirá en } +21 \\ x=2 & \ldots\ldots\ldots\

drémos por resultado $-1,8$ etc.; lo que indica que dicha raiz está comprendida entre $2,25$ y $2,375$; por lo que si suponemos que sea $2,3$, y llamamos z á la correccion, aplicarémos el siguiente procedimiento de *Neuton*, que nos conducirá con bastante rapidez al verdadero valor de x.

Para esto, se hace $x=2,3+z$, llamando z á la correccion que se debe hacer á este valor supuesto; por consiguiente z será aquí una fraccion decimal, cuyo cuadrado y potencias superiores no influirán en los primeros guarismos decimales, y por lo mismo desecharémos los términos donde entren; luego tendrémos

$$x^4=(2,3)^4+4(2,3)^3z=27,9841+48,668z$$
$$-4x^3=-4(2,3)^3-12(2,3)^2z=-48,668-63,48z,$$
$$-3x=-3(2,3)-3z=-6,9-3z;$$

y sustituyendo estos valores en la propuesta, se convertirá en

$$-0,5839-17,812z=0, \text{ que da } z=-\frac{0,5839}{17,812}.$$

En esta primera operacion aproximarémos el resultado hasta las centésimas, porque mas adelanse podría ya influir el haber despreciado las potencias superiores de z; por lo que tendrémos

$$z=-0,03,\ x=2,3-0,03=2,27.$$

Para obtener un nuevo valor de x mas exacto que el precedente, se supondrá $x=2,27+z'$, cuyo valor sustituido en la ecuacion propuesta, desechando las potencias superiores de z, nos dará

$$-0,04595359-18,046468z'=0,$$

de donde $z'=-\frac{0,04595359}{18,046468}=-0,0025$, y por consiguiente

$$x=2,27+z'=2,27-0,0025=2,2675,$$

y continuando del mismo modo nos podrémos aproximar tanto como deseémos al valor verdadero de x.

Ahora, pues que sabemos que la ecuacion propuesta tiene otra raiz real camprendida entre 3 y 4, para aproximarnos á ella, tomarémos un medio proporcional aritmético entre 3 y 4, que es 3,5, cuyo valor, sustituido en la ecuacion, la reduce á $-4,9375$, cuyo resultado nos indica con su signo que la raiz propuesta se halla entre 3,5 y 4. Hallando un medio proporcional aritmético entre 3,5 y 4 se obtiene 3,75, cuyo valor sustituido en vez de x reduce el primer miembro á $+2,56$ etc., lo que indica que la raiz es mayor que 3,5, y menor que 3,75; por lo que la supondrémos 3,7, y llamando z á la correccion, tendrémos que, sustituyendo $3,7+z$ en vez de x, se nos convertirá la ecuacion en $0,7041+35,33^2z=0$, que da

$$z=-\frac{0,7041}{35,33^2}=-0,019,$$

de donde resulta $x=3,7+z=3,7-0,019=3,681$.

Ahora, sustituirémos $3,68+z'$ en vez de x, lo que convertirá la ecuacion en $0,01246976+33,835328z'=0$, de donde sale

$$z'=-\frac{0,01246976}{33,835328}=-0,0003;$$

lo que da $x=3,68+z'=3,68-0,0003=3,6797$; del mismo modo continuaríamos si quisiéramos aproximarnos mas.

379 Si la ecuacion tuviese raices reales, cuya diferencia fuese ménor que la unidad, para asegurarnos de su existencia, deberíamos sustituir en vez de x, nó los números 1, 2, 3, 4, sinó números que se diferenciasen en ménos de una unidad, y en general en ménos que la diferencia de las raices, como manifestarémos muy en breve por digresion, lo que hace bastante penoso este *método*, que se llama de las *sustituciones sucesivas* y se debe á *Neuton* (*).

(*) Apliquemos nuestro método á la ecuacion $x^4-4x^3-3x+27=0$ (α); por el cual no se necesita hacer uso de ningun conocimiento sobre límites de las raices; pues dicho método se basta á sí mismo: dando directamente las raices sin ninguna consideracion estraña.

Suponiendo $x=1$, resulta $+21$ de error.

Suponiendo $x=2$, se tiene $+5$ de error, y por la regla (I. 284 *j* 4.º) se halla 0,3 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,3.

Tomando 2,3 por tercer número supuesto, se halla $-0,584$ de error, y se obtiene $-0,0314$ para la correccion al 2,3; que, agregándosela, da 2,2686.

Tomando 2,2686 por cuarto número supuesto, resulta $-0,020279$ de error, y $-0,00113$ para la correccion al 2,2686; que, agregándosela, da 2,2675; que es la primera raíz que hemos sacado en el testo, no habiendo empleado mas procedimientos que los de la Aritmética; y aunque los cálculos numéricos tambien son molestos, sin embargo, como son uniformes, los hace uno sin fatigar el espíritu; y en punto al tiempo que ahorran, es tanto mas considerable cuanto se hace un uso mas oportuno de las abreviaciones que proporciona el cálculo de las decimales, y las que ofrece el método mismo.

Para encontrar las demas raices, dividirémos la ecuacion propuesta por $x-2,2675$, é igualando el cociente á *cero*; se tiene

$$x^3-1,7325x^2-3,9283x-11,9074\ (\alpha').$$

Donde es muy digno de notarse, que para destruirse el último término $+27$ nos resulta $-26,9999$, que solo se diferencia en una unidad decimal del cuarto lugar.

Para aplicar mi método á esta ecuacion, se supone $x=1$; lo que da un error de $-16,5682$.

Suponiendo $x=2$, resulta $-18,694$ de error, y se obtiene $-7,8$ para la correccion al 1; que, agregándosela, da $-6,8$.

Tomando $-6,8$ por tercer número supuesto, resulta $-379,6$ de error, que siendo numéricamente mayor que los dos anteriores, deberémos proceder á su-

Terminarémos por ahora nuestras investigaciones, manifestando el *método de aproximacion de las raices de las ecuaciones numéricas por las fracciones contínuas, que se debe á Lagrange.*

Sea la ecuacion $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+$etc....$=0$ (M), y supongamos que se hayan encontrado por los métodos precedentes los valores enteros inmediatamente inferiores de las raices buscadas; si p es uno de estos valores, de modo que se tenga $x>p$ y $x<p+1$, se supondrá $x=p+\frac{1}{z}$, donde z es un número mayor que la unidad, y sustituyendo en vez de x este valor en la propuesta, se hallará despues de haber multiplicado por z^n la ecuacion resultante

$$A'z^n+B'z^{n-1}+C'z^{n-2}+\text{etc.}=0 \text{ (N)};$$

ecuacion que tendrá necesariamente al ménos una raiz real mayor que

---

poner $x=10$, $x=100$, etc. con arreglo al número 10º de la regla (I. 284*j*).

El supuesto $x=10$, da $+795,5$ de error; que siendo positivo, indica que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; pero como tiene un guarismo mas que el del 2, tomarémos como supuesto intermedio $x=5$, con arreglo al mismo número de la espresada regla, lo que da 51,13 de error; que como es positivo, indica que entre 2 y 5 hay al ménos una raiz real; y como ya los errores del 2 y del 5 tienen un mismo número de guarismos, hallarémos la correccion al 2, que es el que produce menor error; para lo cual multiplicarémos su error $-18,694$ por $2-5=-3$; y dividiendo el producto $+56,082$ por la diferencia de los errores de signos contrarios, que proceden de los números supuestos mas próximos entre sí, que es 69,82, se obtiene 0,8 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,8.

Tomando 3 por quinto número supuesto, se tiene $-12,27$ de error; y como es negativo, indica que entre 3 y 5 hay al ménos una raiz real; y para encontrar la correccion al 3, se multiplica su error $-12,27$ por $3-5=-2$; y dividiendo el producto $+24,54$ por la diferencia de los errores que proceden de los dos números supuestos mas próximos de los que producen errores de signos contrarios, que es $51,13--12,27=63,4$, resulta $+0,387$ para la correccion al 3; que, agregándosela, da 3,389.

Tomando 3,4 por sesto número supuesto, resulta $-5,96$ de error; que siendo negativo, indica que entre 3,4 y 5 hay al ménos una raiz real; y para encontrar la correccion al 3,4 se multiplica su error $-5,96$ por $3,4-5=-1,6$; y dividiendo el producto 9,536 por $56,082--5,96=62,042$, resulta 0,154 para la correccion al 3,4; que, agregándosela, da 3,554.

Tomando 4 por séptimo número supuesto, resulta $+8,6594$ de error; que siendo positivo, indica que entre 3,4 y 4 hay al ménos una raiz real; y para encontrar la correccion al 3,4, multiplicarémos su error $-5,96$ por $3,4-4=-0,6$, y dividiendo el producto por la diferencia de los errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos, que es

la unidad. Saa q el valor entero inferior á z, y se hará $z=q+\frac{1}{u}$, siendo u un número mayor que la unidad; sustituyendo en (N) se tendrá una ecuacion en u de la forma

$$A''u^n+B''u^{n-1}+C''u^{n-2}+D''u^{n-3}+\text{etc.}=0 \quad (O),$$

la cual tendrá necesariamente al ménos una raiz real mayor que la unidad, de la cual se podrá obtener del mismo modo un valor entero aproximado por defecto, que señalarémos por r; de manera que se tendrá

$$u=r+\frac{1}{t};$$

donde t espresa un número mayor que la unidad, y así sucesivamente. Lo mismo se ejecutará con los valores enteros aproximados p', p'',

---

$$8,6594- \quad -5,96=14,6194,$$

resulta $+0,2446$ para la correccion al 3,4; que, agregándosela, da 3,6446.

Tomando 3,645 por octavo número supuesto, resulta $-0,8165$ de error; y 0,0306 para la correccion al 3,645; que, agregándosela, da 3,6756.

Tomando 3,676 por noveno número supuesto, resulta $-0,0854$ de error; y 0,0032 para la correccion al 3,676; que, agregándosela, da 3,6792.

Tomando 3,6792 por décimo número supuesto, se obtiene $-0,008696$ de error, y 0,0003 para la correccion al 3,6792; que, agregándosela, da 3,6795.

Tomando 3,6795 por undécimo número supuesto, resulta $-0,0017$ de error; y $+0,0001$ para la correccion al 3,6795; que, agregándosela, da 3,6796 que no se diferencia de la del testo, sinó en una unidad decimal en el cuarto guarismo; la cual proviene del mayor ó menor grado de aproximacion en el uno ó en el otro procedimiento.

Para encontrar las demas raices, dividirémos el primer miembro de la ecuacion por $x-3,6796$; é igualando el cociente á cero, se tiene

$$x^2+1,9471x+3,2362=0 \quad (\alpha'');$$

siendo muy digno de notarse que para destruirse el último término $-11,9074$ del dividendo, resulta el número $+11,9078$; por manera que la resta de la division es solo 0,0004.

Resolviendo esta ecuacion (I. 253), resulta $x=-0,9736\pm\sqrt{-2,2883}$; cuyos dos valores son imaginarios; y como tanto la parte real como el número que está debajo del radical se acercan á los primeros supuestos, y aun á una de las raices, esto es lo que ha originado aquella especie de salto atras que se notó en los primeros supuestos de la resolucion de la (ec. α'); lo cual ha prolongado los procedimientos; pero, se ha visto que nuestro método ha triunfado de todas las dificultades, hasta determinar las cuatro raices de la ecuacion propuesta: siendo así, que los procedimientos del testo solo han dado las dos raices reales.

p''', etc. de las raices reales y positivas de la propuesta, para aproximarse mas al verdadero valor de cada una de ellas.

Las raices positivas y mayores que la unidad de las trasformadas (N), (O) etc. *serán necesariamente incomensurables, si se ha despojado á la propuesta de las raices comensurables que puede tener.* En efecto, si sucediese que uno de los números p, q, r, etc. fuese una raiz exacta, entónces se tendría $x=p$, ó $z=q$, ó $u=r$, etc. de manera que la operacion se terminaría; luego se hallaría para x un número comensurable, lo que es contra el supuesto.

Si los números p, p', p'', etc. son todos diferentes, entónces cada una de las trasformadas (N), (O), *solo tendrá una raiz real mayor que la unidad*; porque si por ejemplo la trasformada (N) tuviese dos raices reales mayores que la unidad, tales como z', y z'', se tendría

$$x=p+\frac{1}{z'}, \quad \text{y} \quad x=p+\frac{1}{z''};$$

de manera que estos dos valores de x tendrían el mismo valor aproximado p, lo que es contra el supuesto. Lo mismo sucedería si la trasformada (O) ó una de las siguientes tuviese dos raices reales mayores que la unidad; de donde se sigue que para encontrar en este caso los valores enteros aproximados de las trasformadas sucesivas, bastará ir sustituyendo en vez de la incógnita los números naturales 0, 1, 2, 3, etc. partiendo desde el inmediato menor que el límite de las menores raices positivas de la trasformada sobre que se opera, hasta que se obtengan dos resultados de signos diferentes.

380 *Si dos valores de* x *tienen un mismo valor entero aproximado* p, *entónces empleando este valor, las trasformadas* (N) *y* (O) *tendrán cada una dos raices reales mayores que la unidad, hasta que se llegue á una ecuacion, cuyas raices mayores que la unidad tengan valores enteros aproximados diferentes; entónces cada uno de estos dos valores dará orígen á un conjunto de ecuaciones trasformadas, de las que cada una no tendrá sinó una sola raiz real mayor que la unidad.*

En efecto, pues que existen dos valores diferentes de x, que tienen el mismo valor aproximado p, se necesitará que z en (N) tenga dos valores reales mayores que la unidad; y si estos dos valores de z tienen el mismo valor entero aproximado q, será necesario de nuevo que haciendo $z=q+\frac{1}{u}$, la trasformada en u tenga dos valores diferentes mayores que la unidad, y así sucesivamente. Pero si los dos valores enteros aproximados de z fuesen diferentes, entónces llamándolos q y q', se haría $z=q+\frac{1}{u}$, y $z=q'+\frac{1}{u}$,

lo que originaría dos trasformadas tales como (O), de las que cada una no debería tener sinó una sola raiz real mayor que la unidad: de otro modo, los dos valores de z, en vez de ser dobles solamente, serían tri-

ples etc.; luego se tendría $x=p+\frac{1}{z'}$, $x=p+\frac{1}{z''}$, $x=p+\frac{1}{z'''}$;

por lo que la propuesta tendría mas de dos raices reales y positivas, teniendo cada una el mismo valor entero aproximado p, lo que es contra el supuesto. Luego partiendo desde la trasformada, cuyas dos raices mayores que la unidad tengan valores enteros diferentes, las trasformadas resultantes de cada uno de estos valores no tendrán mas que una sola raiz real mayor que la unidad; luego no se necesitará, para obtener los valores enteros aproximados de las raices correspondientes, calcular para cada una de ellas el límite de la menor diferencia entre las raices.

Los coeficientes A', B', C', etc. de la trasformada (N) espresados por medio de los de la propuesta son

$$A'=Ap^n+Bp^{n-1}+Cp^{n-2}+Dp^{n-3}+\text{etc.}$$

$$B'=nAp^{n-1}+(n-1)Bp^{n-2}+(n-2)Cp^{n-3}+\text{etc.}$$

$$C'=n\frac{n-1}{2}Ap^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}Bp^{n-3}+\text{etc.}$$

Los de la trasformada (O) se obtendrán escribiendo en las fórmulas precedentes q en vez de p, A', B', C', etc. en vez de A, B, C, etc. y mudando A', B', C', etc. en A'', B'', C'', etc.

De estas espresiones resulta, que *ninguno de los coeficientes* A', A'', etc. *será jamas nulo*; porque en el caso de $A'=0$, ó $A''=0$, etc. se tendría $z=\infty$, ó $u=\infty$, etc.; luego $x=p$, ó $z=q$, etc.; y por consiguiente el valor correspondiente de x sería comensurable.

Sean pues p, q, r, s, t, etc. los valores enteros aproximados de las ecuaciones (M), (N), (O), etc.; de manera que se tenga

$$x=p+\frac{1}{z},\quad z=q+\frac{1}{u},\quad u=r+\frac{1}{t},\quad \text{etc.}$$

y será por las sustituciones sucesivas

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{t+\text{etc.}}}}}$$

381 *Cuando una cantidad se espresa por medio de una fraccion contínua, sucede algunas veces que los denominadores se repiten; en este caso, la fraccion contínua se llama* periódica, *y se puede siempre considerar como la raiz de una ecuacion de 2.° grado.*

En efecto, si se tiene la fraccion contínua $\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$

y la hacemos igual con x, se tendrá: $x=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}}$

y pues que el número de fracciones que la componen es ilimitado, pues así lo indica el etc., podrémos sustituir x en vez del conjunto de fracciones que siguen á la 1ª; de manera que será $x=\cfrac{1}{p+x}$, de donde

$$x^2+px=1, \text{ y } x=\frac{-p+\sqrt{p^2+4}}{2}=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$$

Luego la fraccion contínua de arriba servirá para encontrar el valor de $\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$, puesto que despejando el radical, dará $\cfrac{\sqrt{p^2+4}}{2}=\frac{p}{2}+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}$

Haciendo $p=2$, se obtiene $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}$

Sea aun la fraccion contínua $p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{q+\text{etc.}}}}$

Haciéndola igual con x, y poniendo tambien x en vez de lo que si-

gue al 2.° denominador, se tendrá $x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{x}}$

que da $qx^2-pqx-p=0$.

Lo mismo sucedería si el periodo se compusiese de mayor número de términos, es decir, que ebtendríamos para la determinacion de x una ecuacion de 2.° grado.

Puede suceder tambien que la fraccion sêa en parte periódica y en parte no; en este caso tambien se verifica la misma propiedad; porque si suponemos que se tenga la (A),

$$p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}}} \quad (A)$$

llamándola x, y z á la parte periódica $r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}$

se tendrá $x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{z}}$, de donde $z=\cfrac{x-p}{1-q(x-p)}$;

pero $z=r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}\ldots\ldots\ldots\ldots=r+\cfrac{1}{s+\cfrac{1}{z}}$; de donde $sz^2-rsz-r=0$;

luego si sustituimos en vez de z, su valor, se tendrá

$$s(x-p)^2-rs(x-p)[1-q(x-p)]-r[1-q(x-p)]^2=0,$$

ecuacion que, despues de efectuadas las operaciones, será del 2.° grado en x. Resolviéndola é igualando el valor de x con la fracion contínua que representa, se tendrá espresada en fraccion contínua la raiz cuadrada de los números representados por la fórmula que se halle debajo del radical.

382 Examinemos ahora en qué casos una de las raices de una ecuacion espresada en fraccion contínua por el método espuesto, vendrá representada por una fraccion contínua periódica.

Para esto, observarémos que cada raiz real será de la forma

$$x=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\text{etc.}}}}$$

siendo q el valor entero aproximado de la raiz real de la trasformada (N), y r, s, t, etc. los valores enteros aproximados de las trasformadas sucesivas (O), (P), (Q), etc. Ahora, para que esta fraccion sea periódica, es necesario que, partiendo desde uno de sus términos, se repitan los denominadores en el mismo órden indefinidamente, ó que haya dos términos partiendo de los cuales sea la misma la fraccion contínua. Luego, para que la fraccion sea periódica, es necesario que entre las trasformadas se hallen dos que tengan las mismas raices; así, cuando resulte en una fraccion contínua uno de los números ya hallados, no habrá mas que examinar si las raices de las ecuaciones que tienen este número por valor entero aproximado son las mismas, es decir, si estas dos ecuaciones tienen una raiz comun; lo que se conocerá fácilmente buscando el comun divisor de los primeros miembros (*),

---

(*) Aunque el máximo comun divisor algebráico se viene á encontrar de un modo análogo al de las cantidades numéricas., sin embargo, exige mayor atencion por la circunstancia que hemos manifestado en el apéndice 2.º del tomo 1.º parte 1.ª de esta obra, de deberse multiplicar el dividendo por el factor que se necesite para que el primer término del dividendo se pueda partir, sin dejar resta, por el primero del divisor, y tambien por la de ser conveniente suprimir en el divisor todo factor que no sea comun al dividendo: lo cual origina el que acaso no se presenten en la práctica dos casos en que sean absolutamente idénticas las operaciones principales y accesorias. Esto nos mueve á insertar aquí aun varios ejemplos.

1.º Propongámonos hallar el máximo comun divisor de las dos cantidades

$$3a^3-3ba^2+b^2a-b^3 \text{ y } 4a^2-5ba+b^2,$$

y advertiríamos desde luego, que esta division no podia efectuarse por cuanto el 3, que es el coeficiente del primero y segundo término del dividendo, no contiene al 4, coeficiente del primer término del divisor; pero si multiplicamos el primero por 4, entónces se podrá efectuar la division, y esto no alterará en nada el máximo comun divisor que buscamos, puesto que el 4 no es comun en todos los términos del divisor; luego multiplicando por 4 la cantidad primera, se nos convertirá en $12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3$, que dividida por la otra da por cociente $3a$, y deja por resta $3a^2b+ab^2-4b^3$.

Como si las cantidades propuestas tienen un comun divisor, este deberá serlo igualmente de la resta, resulta que el máximo comun divisor de las dos cantidades propuestas, lo será igualmente de esta resta

$$3a^2b+ab^2-4b^3 \text{ y de } 4a^2-5ba+b^2;$$

pero en estas advertimos que b siendo factor de la primera y no siéndolo de la segunda, la podrémos suprimir sin que esto altere el máximo comun divisor que buscamos, lo que reducirá la primera cantidad á $3a^2+ab-4b^2$; pero aun no podrémos continuar la division, sin que resulten quebrados; por lo cual la multiplicarémos por 4, y quedará reducida la operacion á dividir

$$12a^2+4ab-16b^2 \text{ por } 4a^2-5ba+b^2,$$

que ejecutándolo se saca el cociente 3, quedando por resta $19ab-19b^2$.

Ahora deberémos dividir $4a^2-5ba+b^2$ por $19ab-19b^2$; y como esta tie-

el cual debe necesariamente comprender todas las raices comunes á las dos ecuaciones, si las hay. Pero como hemos visto, que toda frac-

---

ne comun el factor $19b$, lo podrémos suprimir sin que esto altere el máximo comun divisor que buscamos, y estará reducida la operacion á dividir

$$4a^2-5ba+b^2 \text{ por } a-b,$$

que ejecutándolo se obtiene por cociente $4a-b$; y como no queda resta, da á conocer que $a-b$, que es la que ha servido de divisor, es el máximo comun divisor que buscábamos.

2.º *ej.* Sean ahora los dos polinomios

$$6x^{12}+6x^{11}-42x^{10}-6x^9+3x^8 \quad (1).$$

$$14x^7-70x^5+56x^3 \quad (2).$$

El mayor comun divisor monomio del (1) es $6x^8$, y el de (2) es $14x^3$; el mayor comun divisor de estas dos últimas cantidades es $2x^3$, que será el mayor factor comun monomio de (1) y (2).

Dividiendo (1) por $6x^8$ y (2) por $14x^3$, se tiene

$$x^4+x^3-7x^2-x+6 \quad (3); \qquad x^4-5x^2+4 \quad (4).$$

Dividiendo (3) por (4), se obtiene por cociente 1, y x^3-2x^2-x+2 (5) pre resta; y dividiendo (4) por (5) se obtiene por cociente exacto $x+2$; por lo quo la cantidad x^3-2x^2-x+2 es el máximo comun divisor de (4) y (5); y $2x^3(x^3-2x^2-x+2)$ es el máximo comun divisor de (1) y (2).

3.^{er} Ej. Sean $24x^{12}-60x^{11}+6x^{10}-6x^8$ (1).

$$84x^6-154x^5-112x^4-14x^3 \quad (2).$$

El mayor comun divisor monomio de (1) es $6x^8$; el de (2) es $14x^3$; y el de estos dos es $2x^3$.

Dividiendo (1) por $6x^8$ y (2) por $14x^3$, resulta

$$4x^4-10x^3+x^2-1 \quad (3), \quad 6x^3-11x^2-8x-1 \quad (4).$$

Para encontrar el mayor comun divisor de (3) y (4) es necesario, para evitar las fracciones, multiplicar (3) por 3, y se nos convertirá en

$$12x^4-30x^3+3x^2-3 \quad (3');$$

y dividiendo (3') por (4), da $2x$ por cociente, y $-8x^3+19x^2+2x-3$ (5) por resta.

Para seguir la division, es necesario multiplicar dicha resta por 3; lo que nos dará $-24x^3+57x^2+6x-6$ (5'); y continuando la division de (5') por (4), resulta -4 por cociente, y sale por resta

$$+13x^2-26x-13=13(x^2-2x-1) \quad (6).$$

Dividiendo (4) por (6), despues de suprimido el factor 13, se obtiene $6x+1$ por cociente exacto; de donde resulta que x^2-2x-1 es el máximo comun divisor de (3) y (4); y $2x^3(x^2-2x-1)$ lo es de los polinomios propuestos (1) y (2).

4.º ej. Propongámonos ahora encontrar el máximo comun divisor de los tres polinomios siguientes

$12x^5-18x^3+6x^2$ (1), $36x^6-12x^5-24x^4$ (2), $75x^7-30x^6-45x^5$ (3).

El mayor comun divisor monomio de (1) es $6x^2$; el de (2) $12x^4$, el de (3) $15x^5$; y el máximo comun divisor monomio de estos tres es $3x^2$, que es el

cion periódica se reduce á la raiz de una ecuacion de 2.° grado, se sigue que el comun divisor será necesariamente de 2º grado; luego cuan-

---

máximo comun divisor monomio de los tres polinomios dados.

Dividiendo cada uno de los polinomios (1), (2) y (3) por su respectivo divisor monomio, se convierten en

$$2x^3-3x+1 \ (4), \quad 3x^2-x-2 \ (5), \quad 5x^2-2x-3 \ (6).$$

Para encontrar el mayor comun divisor de estos tres polinomios, observarémos que se obtiene alguna mayor sencillez, principiando por hallar el máximo comun divisor de los mas simples. Así, principiarémos por hallar el máximo comun divisor de (6) y de (5). Para lo cual es necesario multiplicar el (6) por 3; lo que da $15x^2-6x-9$, que dividido por el (5), da 5 por cociente, y queda $-x+1$ por resta.

Dividiendo el (5) por $-x+1$, ó por $x-1$, suprimiendo el factor -1, se obtiene cociente exacto. De donde se infiere que el máximo comun divisor de (6) y (5) es $x-1$.

Dividiendo ahora el (4) por $x--1$, se obtiene cociente exacto; y por consiguiente $x-1$ es el máximo comun divisor de los tres polinomios (4), (5) y (6); y $3x^2(x-1)$ es el máximo comun divisor de los tres polinomios propuestos (1), (2) y (3).

5.° ej. Supongamos que los polinomios contengan dos letras, y sean

$$6z^6x^5-6z^4x^5+6z^7x^4-6z^6x^4-6z^7x^3+6z^6x^3-6z^5x^3 \ldots$$
$$+6z^4x^3-6z^6x^2+6z^5x^2 \ (1),$$
$$4z^4x^6-4z^3x^6-4z^4x^5-4z^6x^4+4z^5x^4+4z^6x^3-4z^5x^3 \ (2).$$

Para determinar su mayor comun divisor monomio, observarémos que el mayor comun divisor monomio de (1) es $6z^4x^2$; el de (2) es $4z^3x^3$; y el de estas dos cantidades es $2x^2z^3$, que será el máximo comun divisor monomio de los dos polinomios (1) y (2).

Para determinar el mayor comun divisor independiente de x, se divide el (1) por $6z^4x^2$, y el (2) por $4z^3x^3$; y ordenando los cocientes por las potencias decrecientes de x, se tendrá

$$x^3(z^2-1)+x^2z^2(z-1)-x(z^3-z^2+z-1=(z-1)(z^2+1))-z(z-1) \ (3),$$
$$x^3(z-1)-x^2(z-1)-z^2x(z-1)+z^2(z-1) \ (4).$$

El mayor comun divisor de los coeficientes de x en (3) es $z-1$; y el de los coeficientes de x en (4) es tambien $z-1$.

Luego el mayor comun divisor, independiente de x, de (3) y (4) es $z-1$.

Dividiendo (3) y (4) por $z-1$, resulta

$$x^3(z+1)+x^2z^2-x(z^2+1)-z \ (3')$$
$$x^3-x^2-z^2x+z^2 \ (4').$$

Para encontrar el mayor comun divisor dependiente de x, se divide (3) por (4), lo que da por cociente $z+1$; y la resta

$$x^2(z^2+z+1)+x(z^3-1=(z-1)(z^2+z+1))-z(z^2+z+1) \ (5).$$

Antes de dividir (4′) por esta resta (5), la despojarémos del mayor factor ó comun divisor que contiene, que es z^2+z+1; y suprimiendo este factor en (5), en atencion á que no es factor comun de (4′), queda reducido á

do quede satisfecha esta condicion, se podrá prolongar la fraccion contínua tanto como se quiera, repitiendo únicamente los mismos números sin necesidad de calcular nuevas trasformadas.

383 Por éste mismo método se puede obtener el valor de varias espresiones que de otro modo no podríamos percibir con facilidad. Sea por ejemplo la espresion

$$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}}$$

$$x^2+x(z-1)-z \quad (5').$$

Dividiendo ahora (4') por (5'), se obtiene $x-z$ por cociente exacto, esto es, sin dejar resta. De donde se infiere que el máximo comun divisor de (3') y (4'), es la cantidad que nos acaba de servir de divisor; que es (5'), y á la cual podrémos dar esta forma $x(x+z)-(x+z)=(x-1)(x+z)$.

De donde resulta, que el máximo comun divisor de los polinomios propuestos, (1) y (2) es $2x^2z^3(z-1)(x-1)(x+z)$.

Terminarémos esta nota, manifestando que *cuando uno de los dos polinomios contiene una letra, que no se halla en el otro, se puede emplear un método mas sencillo que el general, para encontrar el máximo comun divisor.*

En efecto, como en este caso, el mayor comun divisor debe ser independiente de dicha letra, se sigue, que si se ordena por la misma letra el polinomio que la contiene, el mayor comun divisor buscado será el mismo que el que existe entre los coeficientes de las diversas potencias de la letra por la cual se ordena, y el segundo polinomio.

Sean los dos polinomios $3bcx+30mp+18bc+5mpx$ (1) y

$$4adx-42fg+24ad-7fgx \quad (2).$$

Como x es la sola letra que tienen comun, para encontrar el máximo comun divisor, los ordenaríamos por x, y estaría reducida la operacion á dividir

$$x(3bc+5mp)+30mp+18bc \quad \text{por} \quad x(4ad-7fg)+(24ad-42fg);$$

y hallándose cociente exacto, resulta que la cantidad que ha servido de divisor es el máximo comun divisor; y observando que $24ad-42fg=6(4ad-7fg)$, podrémos simplificar este máximo comun divisor, suprimiendo en él su factor comun $4ad-7fg$; que no es divisor de la otra cantidad que ha servido de dividendo; y resulta ser $x+6$ el máximo comun divisor buscado.

Ahora, la abreviacion consiste en ordenar el primer polinomio por la letra b que hay en él y no se halla en el segundo, y se convertirá dicho primero en $(3cx+18c)b+30mp+5mpx$; y se puede asegurar, que el mayor comun divisor buscado es el mismo que el que existe entre el segundo polinomio, y los dos coeficientes $3cx+18c$ y $30mp+5mpx$. Pero el primero de estos coeficientes se puede poner bajo esta forma $3c(x+6)$, y el otro coeficiente bajo la de $5mp(x+6)$; de donde se sigue: que $x+6$ es el solo factor comun de estos dos coeficientes. Por lo cual basta examinar si $x+6$ es factor del segundo polinomio; y como lo es, inferimos que $x+6$ es el máximo comun divisor de los dos polinomios dados.

Haciéndola igual con x, elevando al cuadrado, y trasladando al primer miembro el 2 que resulta en el segundo, se tendrá

$$x^2-2=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\text{etc.}}}}};$$

que, elevando al cuadrado, trasladando al primer miembro el 1 que resulta en el segundo y reduciendo, dará

$$x^4-4x^2+3=\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\text{etc.}}}};$$

y como esta espresion se debe continuar indefinidamente, esto es, tanto como la primitiva, resultará que este miembro será igual con x, de manera que se tendrá $x^4-4x^2+3=x$, ó $x^4-4x^2-x+3=0$; luego el valor de x en esta ecuacion es el de dicha espresion.

Si la espresion fuese $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}$

hallaríamos por este método que era igual con 2; porque haciéndola igual con x y elevando al cuadrado, se tendría

$$x^2=2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}, \text{ ó } x^2-2=x, \text{ ó } x^2-x-2=0,$$

que da, despues de resuelta,

$$x=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{9}{4}}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2}, \text{ que da } x=2,\ x=-1,$$

Si querémos averiguar lo que nos dice esta última espresion, observarémos que si en un círculo cuyo radio $=1$, se inscribe un cuadrado, su lado será $=\sqrt{2}$, y su apótome será igualmente $\sqrt{2}$; ahora, la apótome del octógono será (I. § 497) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; la del de 16 lados $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

la del de 32 lados $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ i

y si suponemos que estos radicales se repitan indefinidamente, se tendrá la apótome del polígono de mas lados que se pueda inscribir en el círculo; pero este es el mismo círculo, cuya apótome es el diámetro que es 2, luego será

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\text{etc.}}}}}}=2,$$

Igualmente se tiene $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\text{etc.}}}}}=3$; porque haciéndola igual con x, y elevando al cuadrado, se tiene

$$x^2=6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\text{etc.}}}}=6+x, \text{ ó } x^2-x=6, \text{ que da}$$

$$x=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+6}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{25}{4}}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{5}{2};$$

de donde sale $x=3$ y $x=-2$, en que la resolucion negativa no nos hace al caso como ántes (*).

(*) Sin embargo, para que se vea la generalidad del Álgebra, debemos observar, que el valor negativo -2 es el que tiene la espresion cuando se supone que todos los radicales tengan el signo $-$. En efecto, entónces se convertirá en

$$-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\text{etc.}}}}};$$

y estrayendo la raiz cuadrada de 6 se obtiene, que es 2,4, tomada negativamente, y sumada con 6 da $6-2{,}4=3{,}6$. Estrayendo la raiz cuadrada, se obtiene 1,8; tomándola negativamente y sumada con 6, se tiene $6-1{,}8=4{,}2$. Estrayendo la raiz cuadrada se obtiene 2,04; tomándola negativamente y sumada con 6, da $6-2{,}04=3{,}96$, Estrayendo la raiz cuadrada se tiene 1,98, que tomándola negativamente y sumada con 6 se tiene $6-1{,}98=4{,}02$. Estrayendo la raiz cuadrada, se tiene 2,004, que tomándola negativamente y sumada con 6, da $6-2{,}004=3{,}996$. Estrayendo la raiz cuadrada, se tiene 1,99, que tomada negativamente y sumada con 6, da $6-1{,}99=4{,}01$. Del mismo modo se continuaría si se quisiesen sacar valores mas próximos á -2.

Aquí observamos que la primera raiz negativa es $-2{,}4$, que es mayor numéricamente que -2; la segunda es $-1{,}8$, que es numéricamente menor que -2; la tercera es $-2{,}04$ que es numéricamente mayor que -2, pero menor que la primera; y por consiguiente se aproxima mas á -2; la cuarta raiz negativa es $-1{,}98$ que es numéricamente menor que -2, pero mayor que la segunda y por lo mismo se aproxima aumentando á -2; la quinta raiz es menor numéricamente que las dos primera y tercera, y se aproxima á -2, menguando. La sesta raiz es mayor que las dos segunda y cuarta, y por lo tanto se aproxima á -2 aumentando. Si observamos el órden que siguen estas raices halladas, verémos que las que ocupan lugares ímpares se aproximan á -2 menguando; y las que ocupan lugares pares se aproximan á -2 creciendo; luego -2 es el valor de la espresion $-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\text{etc.}}}}$ ó de la $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\text{etc.}}}}$ tomando negativamente los radicales.

Si se tuviese la espresion $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}}$ etc. sería igual con a; pues haciéndola igual con x, elevando al cuadrado y dividiendo por a, será $\frac{x^2}{a}=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ etc. $=x$;

de donde $x^2=ax$, y $x=a$.

Si fuese $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}}$ + etc., la haríamos igual con x, que elevando al cuadrado, y trasladando a al primer miembro, se tendrá $x^2-a=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$ etc. $=x$, de donde sale

$x^2-a-x=0$, que da $x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a}$.

Si se tuviese $\sqrt{a+\frac{b}{\sqrt{a+b\sqrt{a+}}}}$ etc., haciéndola igual con x, se tendría $x=\sqrt{a+b\sqrt{a+}}$ etc., elevando al cuadrado, se tendrá $x=a+\frac{b}{\sqrt{a+b\sqrt{a+}}}$ etc. $=a+\frac{b}{x}$; que da $x^2-ax-b=0$.

Si fuese la espresion $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+}}}}$ etc.; igualándola con x y cuadrando, se tendría

$x^2=a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+}}}}$ etc.

que, trasladando la a al primer miembro y cuadrando, se tendrá

$x^4-2ax^2+a^2=b+x$, ó $x^4-2ax^2-x+a^2-b=0$.

Nos propondrémos por último manifestar un método para encon-

trar los factores de segundo grado de las ecuaciones, que en algunos casos es útil, y que se debe á Descartes. Supongamos que se nos dé la ecuacion $x^4+1=0$; y pues que es del cuarto grado, podrémos suponer que proviene del producto de los dos factores

$$x^2+px+q,\quad x^2+mx+n,$$

que efectuando la multiplicacion, da $x^4+1=x^4+mx^3+nx^2+pnx+qn;$
$+px^3+pmx^2$
$+qx^2+qmx$

y comparando los coeficientes de los términos donde se halla la x con un mismo esponente, se tendrá $1=1$, $m+p=0$, que da

$p=-m$, $n+pm+q=0$, $pn+qm=0$, $qn=1$, que da $q=\frac{1}{n}$, cuyo valor, sustituido en la ecuacion anterior, dará

$$pn=-qm=-\frac{m}{n},\ \text{ó}\ pn^2=-m,$$

que da $n^2=-\frac{m}{p}=\frac{-m}{-m}=1$, ó $n=1$, de donde $q=\frac{1}{n}=\frac{1}{1}=1$,

y sustituyendo estos valores en la ecuacion $n+pm+q=0$, será $1-m^2+1=0$, que da $m=\pm\sqrt{2}$, y $p=-m=\mp\sqrt{2}$; por lo que

$$x^4+1=(x^2+px+q)(x^2+mx+n)=(x^2\mp x\sqrt{2}+1)(x^2\pm x\sqrt{2}+1).$$

§ *Digresion en que se manifiestan otras propiedades de las ecuaciones de todos los grados, la eliminacion de las incógnitas en las ecuaciones de cualquier grado, el modo de hallar sus raices iguales, las imaginarias, etc.; y en que se espone el método de Mr.* Budan *para resolver las numéricas.*

§ 384 La resolucion de las ecuaciones numéricas se puede considerar como el punto mas importante de la Análisis; porque conduciendo á una ó muchas ecuaciones numéricas la resolucion de todo problema determinado, todo nuestro trabajo será infructuoso, si no sabemos resolverlas; por esta causa nos vamos á detener aun en manifestar algunas propiedades generales de las ecuaciones.

§ Principiarémos manifestando el método *de la eliminacion de las incógnitas en las ecuaciones de un grado cualquiera.*

§ La resolucion de las ecuaciones que acabamos de esponer, es únicamente para cuando una ecuacion tiene solo una incógnita; pero, cuando se tienen muchas ecuaciones con muchas incógnitas, se entiende por resolver estas ecuaciones, *practicar las operaciones convenientes para encontrar los diversos sistemas de valores de las incógnitas, que satisfacen á estas ecuaciones;* y que por lo mismo se llaman *valóres buenos* ó *valóres convenientes;* y cuando ciertos valores de las incógnitas, sustituidos por estas, en las ecuaciones primitivas, no satisfacen á todas las espresadas ecuaciones, se llaman valores *estraños;* y las ecuaciones se dice que son *incompatibles.*

Todas estas operaciones se reducen á ir *eliminando* (I. 288 esc.), sucesivamente las incógnitas hasta llegar á tener una sola ecuacion con una sola incógnita, en cuyo caso se resuelve esta ecuacion; y los valores que se sacan para la incógnita que contiene, se sustituyen en las ecuaciones anteriores y se determinan por este medio todos los valores de las incógnitas que satisfacen á las ecuaciones propuestas. Por manera, que *la teoría de la eliminacion* consiste en resolver el siguiente problema: *dado un número cualquiera de ecuaciones algebráicas que contienen igual número de incógnitas, encontrar todos los conjuntos de valores de las incógnitas que satisfacen al mismo tiempo á todas las ecuaciones propuestas.*

§ Cada reunion ó conjunto de valores de las incógnitas que satisface á las ecuaciones propuestas, se dice que es un *sistema* ó una *solucion* de las espresadas ecuaciones.

§ Para proceder con toda claridad, principiarémos por ejemplos particulares, y supondrémos que las ecuaciones propuestas sean numéricas, que no contengan sinó potencias enteras y positivas de las incógnitas; y solo considerarémos en ellas valores finitos de las incógnitas.

§ 384 *a* Cuándo son dos las ecuaciones propuestas, y una de ellas no contiene mas de una incógnita, y la otra dos, se obtienen *todas las soluciones de estas ecuaciones, resolviendo ecuaciones de una sola incógnita.*

§ En efecto, si se tienen las dos ecuaciones

$$z^2-5z+6=0 \ (1), \quad x^2-(2z+1)x+(z^2+z-2)=0 \ (2).$$

§ La (1) da (I. 253) $z=2$ y $z=3$.

Para encontrar los valores de x correspondientes á $z=2$, se sustituye 2 por z en la (ec. 2); lo que da una ecuacion de una sola incógnita, á saber:

$x^2-5x+4=0$; que da $x=1$, $x=4$.

Sustituyendo 3 por z en la (ec. 2), se convertirá en $x^2-7x+10=0$, que da

$$x=2 \text{ y } x=5.$$

§ De manera, que las dos ecuaciones propuestas admiten las cuatro soluciones siguientes:

$$z=2, \ x=1, \ \| \ z=2, \ x=4, \ \| \ z=3, \ x=2, \ \| \ z=3, \ x=5;$$

como se puede comprobar, sustituyendo cada uno de estos cuatro sistemas de valores de x y de z en las (ecs. 1 y 2); y se verá que reducen á cero su primer miembro.

§ 384 *b* Cuando *hay dos ecuaciones y en cada una de ellas dos incógnitas, y una de las ecuaciones es del primero ó segundo grado con relacion á una de las incógnitas, este caso se resuelve como el precedente.*

§ Porque, despejando, en la ecuacion del primero ó segundo grado, una de las incógnitas, y sustituyendo este valor en la otra ecuacion, esta ya no contendrá sinó una incógnita.

§ Sean por ejemplo las dos ecuaciones $x^2-2zx+z^2-z=0$ (1)

$$x^3-3zx^2+(3z^2-z+1)x-(z^3-z^2+2z)=0 \ (2).$$

§ La primera da (I. 253) $x=z+\sqrt{z}$ (3); $x=z-\sqrt{z}$ (4).

§ Sustituyendo sucesivamente cada uno de estos dos valores de x en (2), se obtienen, despues de hechas todas las simplificaciones, $z=\sqrt{z}$ (5), $z=-\sqrt{z}$ (6).

§ Elevando al cuadrado estas ecuaciones, las dos dan $z^2=z$, ó $z^2-z=0$; de donde $z=0$ y $z=1$.

§ Para tener los valores de x correspondientes á $z=1$, sustituirémos 1 en vez de z en las (ecs. 3 y 4); lo que nos dará

$$x=z+\sqrt{z}=1+\sqrt{1}=1+1=2, \quad x=z-\sqrt{z}=1-1=0.$$

§ Para obtener los valores de x correspondientes á $z=0$, sustituirémos *cero*, en (3) y (4), y obtendrémos en ambos $x=0$. Luego solo hay dos sistemas de valores que satisfacen á dichas ecuaciones; y son

$$z=1, \quad x=2 \quad \| \quad z=0, \quad x=0.$$

§ 384*c* Ahora vamos á manifestar, que *cuando se tiene un sistema de dos ecuaciones en que entran dos incógnitas en cada una, como si se tuviese*

$$\left.\begin{matrix} F(x,z)=0 \\ f(x,z)=0 \end{matrix}\right\} \quad (1)$$

y que ninguna de estas ecuaciones se pueda resolver con relacion á una de las incógnitas x, z, *el procedimiento del máximo comun divisor, aplicado á los dos polinomios* F(x,z), f(x,z), *suministra el medio de hacer depender la resolucion de dicho sistema de la de otro de la forma* f'(z)=0, F'(x,z)=0, *que ya hemos visto* (384*a*) *cómo se ejecuta.*

§ En efecto, para que un valor $\mathfrak{C}$ de z convenga al sistema (1), es necesario y basta que la sustitucion de este valor en $F(x,z)=0$, y $f(x,z)=0$, dé dos funciones de x, que ambas se reduzcan á *cero*, para un mismo valor α de x; y que se tenga por ejemplo $F'(x=\alpha)=0$, $f'(x=\alpha)=0$; luego estos polinomios tendrán cada uno de ellos una raiz $x=\alpha$, y serán divisibles (365) por $x-\alpha$. Por consiguiente, si se busca el máximo comun divisor entre los polinomios

$$F(x,z), \quad f(x,z),$$

ordenados por las potencias decrecientes de x, y si se continúan los cálculos hasta que se llegue á la resta independiente de x (esta resta no puede contener sinó la sola incógnita z), teniendo cuidado de evitar los cocientes fraccionarios, y de no suprimir en las restas sucesivas ningun factor que sea funcion de z, todos los valores de z que satisfagan al sistema (1), deberán reducir á cero la resta que se encuentre independiente de x. A esta resta igualada con cero, se le llama *la ecuacion final.*

§ Hagamos aplicaciones al mismo sistema de que ya nos hemos ocupado (384*b*) sin resolver de antemano la segunda ecuacion.

§ Las ecuaciones son

$$F(x,z)=x^3-3zx^2+(3z^2-z+1)x-(z^3-z^2+2z)=0,$$
$$f(x,z)=x^2-2zx+(z^2-z)=0.$$

§ Dividiendo el primer miembro de la primera de estas ecuaciones por el de la segunda, se obtiene $x-z$ por cociente, y por resta $x-2z$.

§ Dividiendo $f(x,z)$ por $x-2z$, se obtiene x por cociente, y z^2-z por resta, que ya es independiente de x; é igualándola con cero, se tiene $z^2-z=0$, que es la *ecuacion final;* y resuelta, da $z=0$, $z=1$, que son los mismos valores que obtuvimos ántes (384*b*).

§ Igualando á cero la última cantidad que nos ha servido de divisor, se tendrá $x-2z=0$; y sustituyendo en ella los dos valores de z que acabamos de encontrar, se tendrá $x=2z=2.1=2$, y $x=2z=2.0=0$; que son los mismos valores hallados ántes.

§ Debemos sin embargo advertir, que, al hallar el máximo comun divisor en esta investigacion, no se debe suprimir en las restas sucesivas ningun factor, que

sea funcion de z, y se continúan las operaciones hasta llégar á una resta independiente de x; é igualando á *cero* tanto la resta independiente como la cantidad que ha servido de último divisor, se tendrán dos ecuaciones que darán los valores buenos ó convenientes de las dos ecuaciones primitivas del sistema.

§ 384*d* Cuando la última resta es un número, ó lo que es lo mismo, la ecuacion final no tiene incógnita, el sistema no admite ninguna solucion, y se dice que las ecuaciones son *incompatibles*.

§ 384*e* Cuando un valor $\mathcal{C}$ de z, sacado de la ecuacion que resulta de igualar á cero la última resta, hace nula la resta anterior, que es la cantidad que ha servido de último divisor, esto indica que muchos valores de x pueden corresponder al mismo valor $z=\mathcal{C}$. Para obtener los valores de x, en este caso basta hacer $z=\mathcal{C}$ en las restas que preceden hasta que se llegue á una resta $\varphi(x,z)$ que no se reduzca á cero cuando se hace en ella $z=\mathcal{C}$; la ecuacion $\varphi(x,\mathcal{C})=0$ suministra los valores de x que pueden corresponder á $z=\mathcal{C}$.

§ 384*f* *Cuando un valor* $\mathcal{C}$ *de* z, *sacado de la ecuacion final, reduce alguna de las restas á un número, se debe inferir que dicho valor de* z *no conviene á las ecuaciones propuestas.*

§ 384*g* Cuando todas las divisiones se efectúan sin que sea necesario, para evitar los cocientes fraccionarios, multiplicar las cantidades que sirven de dividendo, por funciones de z, las soluciones del sistema de la ecuacion final, y la cantidad que ha servido de divisor igualada con cero, son las mismas que las del sistema propuesto.

§ Mas si, para evitar los cocientes fraccionarios, se vé uno obligado á multiplicar las cantidades que sirven de dividendo por funciones de z, estas multiplicaciones pueden introducir valores de x y de z *estraños* al sistema primitivo. Aun cuando no se eviten los cocientes fraccionarios, sucede algunas veces que entre los valores que suministran dichas dos últimas ecuaciones hay algunos *estraños*, que no satisfacen á las ecuaciones primitivas (*).

§ 384*h* Propongámonos las dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} F(x,z)&=x^3+2zx^2+2z(z-2)x+z^2-4=0\\ f(x,z)&=x^2+2zx+2z^2-5z+2=0\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

§ La division de la primera por la segunda da por cociente x, dejando por resta

$$x(z-2)+(z^2-4).$$

§ El coeficiente 1 del primer término de $f(x,z)$ no siendo divisible por el coeficiente $z-2$ del primer término de la resta, se multiplica $f(x,z)$ por $z-2$ y se divide el producto por dicha resta; el primer término del cociente es x y queda por resta $x(z^2-4z+4)+(z-2)(2z^2-5z+2)$.

§ Como lo que multiplica á x en esta resta es $z^2-4z+4=(z-2)^2$, podemos continuar la division; y hallamos por cociente $z-2$, y por resta

$$(z-2)(z^2-5z+6),$$

(*) *Existe un teorema, debido á Mr.* Bret, *Profesor en el Licéo de Grenoble, por el cual se obtienen todos los valores* convenientes, *sin que resulten ningunos valores* estraños; *pero su práctica no es tan cómoda como era de desear; y es acaso más fácil verificar por las mismas ecuaciones si algunos valores no son* convenientes.

que siendo ya independiente de x, la igualarémos con cero, y se tendrá por *ecuacion final* la $(z-2)(z^2-5z+6)=0$; el primer factor da $z=2$, y el segundo, da (I. 253) $z=3$ y $z=2$.

§ Y por consiguiente, la ecuacion final la podémos poner bajo esta forma,

$$(z-2)(z-2)(z-3)=0,$$

que da los valores $z=2$, $z=2$ y $z=3$. El valor $z=2$, puede no convenir á las ecuaciones propuestas (1); porque dicho valor reduce á cero la cantidad $z-2$ por la cual se ha multiplicado $f(x,z)=0$.

§ Para encontrar los valores de x correspondientes á $z=2$, se hace $z=2$ en la cantidad $x(z-2)+(z^2-4)$; que es la última que ha servido de divisor; y practicando la sustitucion, se reduce á cero. Luego está uno conducido á hacer $z=2$ en $f(x,z)=0$, y se reduce á $x^2+4x+8-10+2=x^2+4x=0$; que da $x=0$ y $x=-4$. Por lo que cada uno de los sistemas

$$z=2,\quad x=0 \;\|\; z=2,\quad x=-4$$

conviene á las ecuaciones propuestas.

§ El valor $z=3$, convendrá necesariamente á las ecuaciones propuestas, porque no reduce á cero á la cantidad $z-2$, por la cual se ha multiplicado $f(x,z)$. Para obtener el valor de x correspondiente á $z=3$, se hace $z=3$, en la cantidad que sirvió de último divisor, y se obtiene $x+9-4=0$, que da $x=-5$.

§ De donde resulta que las ecuaciones propuestas admiten las tres soluciones distintas $z=2,\ x=0 \;\|\; z=2,\ x=-4 \;\|\; z=3,\ x=-5$.

§ Se halla el mismo resultado eliminando z entre las ecuaciones propuestas; á este efecto, se ordenan dichas ecuaciones con relacion á z, lo que da

$$F(x,z)=z^2(2x+1)+2xz(x-2)+(x^3-4)=0,$$
$$f(x,z)=2z^2+z(2x-5)+(x^2+2)=0.$$

§ Se divide el duplo de la primera cantidad por la segunda; lo que da $2x+1$ por cociente, y $5z-(x^2+4x+10)$ por resta.

§ Para continuar la operacion, dividirémos por esta el quíntuplo de $f(x,z)$, que es la que nos ha servido de divisor, y se obtiene $2z$ por primer cociente, y queda $z(2x^2+18x-5)+5(x^2+2)$ por resta. Para poder continuar la operacion, es necesario multiplicar esta resta por 5, y continuando la division por el mismo divisor $5z-x^2-4x-10$, se obtiene $2x^2+18x-5$ por cociente, y por resta

$$2x(x^3+13x^2+56x+80),$$

que igualándola con cero, se tiene por ecuacion final

$$2x(x^3+13x^2+56x+80)=0.$$

§ Las soluciones de las ecuaciones propuestas son las mismas que las del sistema de esta y de igualar á cero el último divisor; porque para hacer las divisiones posibles, ha bastado multiplicar los dividendos por números.

§ Lss raices de esta ecuacion son $x=0$, $x=-4$, $x=-4$, $x=-5$.

§ Los valores correspondientes de z, sacados de la ecuacion que resulta de igualar á cero la última cantidad que sirvió de divisor, que es $5z-x^2-4x-10=0$, da $z=\dfrac{x^2+4x+10}{5}$; sustituyuendo cada uno de los cuatro valores de x, da

$z=2$, $z=2$, $z=2$, $z=3$, y se vuelven á encontrar las tres soluciones distintas

$$z=2,\ x=0 \;\|\; z=2,\ x=-4 \;\|\; z=3,\ x=-5.$$

§ *Cuando los primeros miembros de las ecuaciones propuestas se pueden des-*

componer en factores, se obtienen todas las soluciones del sistema, igualando sucesivamente á cero, cada uno de los factores de la primera ecuacion, con cada uno de los factores de la otra.

§ *Las soluciones de las ecuaciones que resulten, convienen al sistema propuesto.*

Ej. Sean $$F(x,z)=(x-2)(x^2-3z+2)=0$$
$$f(x,z)=(z-3)(xz-1)=0.$$

§ Se obtendrán todas las soluciones de este sistema, tratando separadamente cada uno de los cuatro sistemas 1.° $x-2=0$; $z-3=0$; 2.° $x-2=0$, $xz-1=0$; 3.° $x^2-3z+2=0$, $z-3=0$; y 4° $x^2-3z+2=0$, $xz-1=0$.

§ El primer sistema da $x=2$, $z=3$; el 2.° $x=2$, $z=\frac{1}{2}$; el 3.° da $z=3$, $x=\pm\sqrt{7}$.

§ Para encontrar las soluciones del 4.° sistema, despejarémos z en la segunda de sus ecuaciones; y tendrémos $z=\frac{1}{x}$. Sustituyendo este valor en la primera, se convierte en $x^2-\frac{3}{x}+2=0$; ó $x^3-3+2x=0$, ó $x^3+2x-3=0$; cuyas raices, por cualquiera de los métodos se halla que son

$$x=1,\quad x=\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-11}),\quad x=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-11}).$$

§ Sustituidos estos valores en los de z, da $z=\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$;

$$z=\frac{1}{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-11}}=\frac{2}{-1+\sqrt{-11}};\quad z=\frac{1}{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-11})}=\frac{2}{-1-\sqrt{-11}}.$$

§ Para resolver tres ecuaciones con tres incógnitas, como
$$F(x,z,u)=0,\quad f(x,z,u)=0,\quad \phi(x,z,u)=0.$$

§ Se elimina sucesivamente una de ellas entre la primera y la segunda; y tambien entre la primera y la tercera; con lo cual se obtienen dos ecuaciones con dos incógnitas; y aplicándoles el método anterior, se llega á una ecuacion que solo contiene una de ellas; la cual da todos los valores de aquella incógnita.

§ Sea $\mathfrak{G}$ uno de estos valores; se hace $z=\mathfrak{G}$ en $F'(x,z)$, $f'(x,z)$; se busca el mayor comun divisor de los resultados $F'(x,\mathfrak{G})$, $f'(x,\mathfrak{G})$; igualando á cero este comun divisor, se obtienen los valores de x correspondientes á $z=\mathfrak{G}$. Si α designa un valor de x, sacado de la ecuacion que resulta de la igualacion á cero del máximo comun divisor, una solucion de las ecuaciones $F'(x,z)$, $f'(x,z)$ es
$$x=\alpha,\quad z=\mathfrak{G}.$$

§ La sustitucion de estos valores de x y de z en las tres primitivas, suministra tres funciones de u; se busca el máximo comun divisor U de estas dos funciones de u; la ecuacion $U=0$ determina los valores de u, correspondientes á
$$x=\alpha,\quad z=\mathfrak{G}.$$

§ Sean las tres ecuaciones
$$x+z+u-6=0\ (1),\quad u^2-x^2-z^2-4=0\ (2),\quad u^2+xz-x^2-7=0\ (3).$$

§ Para eliminar u entre (1) y (2) no hay mas que despejar u en (1); lo que da $u=6-x-z$; y sustituyendo este valor en (2), y haciendo las operaciones oportunas, se obtiene $x(z-6)-6z+16=0$ (4).

§ De la eliminacion de u por el mismo procedimiento con relacion á las ecuaciones (1) y (3), resulta $3x(z-4)+z^2-12z+29=0$ (5).

§ Para eliminar x entre estas dos últimas (ecs. 4 y 5), la despejarémos en (4) y será $x=\frac{6z-16}{z-6}$ (6); cuyo valor sustituido en (5), y hechas todas las operaciones y simplificaciones, se convierte en $z^3-19z+18=0$ (7). Las raices de esta ecuacion son $z=1$, $z=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{73})$.

§ Sustituyamos $z=1$ en (6), y se tiene $x=2$.

§ Sustituyendo el otro valor de z en el de x, se tiene

$$x=\frac{6z-16}{z-6}=\frac{6.\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{73})-16}{\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{73})-6}=\frac{\pm3\sqrt{73}-19}{\frac{-1\pm\sqrt{73}-12}{2}}=\frac{\pm6\sqrt{73}-38}{\pm\sqrt{73}-13}.$$

§ Sustituyendo en el valor de u, 1 en vez de z, y 2 en vez de x, se obtiene $u=3$; luego ya tenemos que el sistema $z=1$, $x=2$, y $u=3$ satisface á las tres (ecs. 1, 2 y 3), como en efecto así se verifica.

§ Sustituyendo en el valor de u, los otros dos valores de x y de z, á causa del signo de ámbigüedad, obtendríamos las otras dos soluciones (*).

(*) *La eliminacion sirve tambien para calcular las ecuaciones racionales que determinan los valores de las incógnitas que entran en las ecuaciones bajo formas irracionales ó debajo de radicales.*

Para conseguirlo, se iguala cada radical con una nueva incógnita; despues, se hacen desaparecer los radicales en estas ecuaciones; lo que suministra ecuaciones racionales *entre las incógnitas primitivas y las nuevas incógnitas; la eliminacion de estas nuevas incógnitas conduce á ecuaciones racionales entre las incógnitas primitivas, y se resuelven como hemos manifestado en el texto.*

Tomemos por ejemplo la ecuacion $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}=5$ (1).

Harémos $\sqrt{x}=z$ (2), $\sqrt{x-5}=u$ (3); *las cuales sumadas dan*

$$z+u=5 \quad (4).$$

Cuadrando las (2) *y* (3) *se tiene* $z^2=x$ (5), $u^2=x-5$ (6).

Para obtener la ecuacion final en x, *basta eliminar* z *y* u *entre* (4), (5) *y* (6).

A este efecto, se remplaza primero z *por su valor* $5-u$, *sacado de la* (*ec.* 4); *y la ecuacion* (5) *se convierte en* $u^2-10u+25-x=0$ (7); *hallando ahora el máximo comun divisor de* (7) *y de* (6), *que pondrémos bajo esta forma*

$$u^2-10u+(25-x), \text{ y } u^2-(x-5);$$

y practicando la division del primer polinomio por el segundo, se halla por cociente $+1$, *y queda por resta* $-10(u-2)$; *que, suprimiendo en ella el factor comun* -10, *se divide* u^2-x+5 *por* $+(u-2)$, *lo que da por cociente* $u+2$ *y se obtiene* $-x+9$ *por resta independiente; luego la ecuacion final es* $-x+9=0$; *que da* $x=9$. *Este valor de* x *satisface á la ecuacion* (1); *pues da*

$$\sqrt{9}+\sqrt{9-5}=3+2=5.$$

§ Previa la resolucion de estas cuestiones particulares, consideremos ahora la cuestion con toda generalidad, contrayéndonos para mayor sencillez al caso en que hay solo dos ecuaciones con dos incógnitas.

§ Supongámos que entre las dos incógnitas x y z se tengan dos ecuaciones completas, la una del grado m y la otra del grado n, y resultará, que siempre las podrémos espresar por

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} + \ldots Tx + V = 0 \quad (A),$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} + \ldots T'x + V' = 0 \quad (B);$$

P teniendo la forma . . . . . $a+bz$
Q . . . . . $c+dz+ez^2$
R . . . . . $f+gz+hz^2+kz^3$
&c. &c.
P' . . . . . $a'+b'z$
Q' . . . . . $c'+d'z+e'z^2$
R' . . . . . $f'+g'z+h'z^2+k'z^3$
&c. &c.

pudiendo contener los coeficientes V, V', hasta las potencias m y n de z.

§ Estas ecuaciones quedarían resueltas completamente si se conociesen todos los valores de x, que juntos con los de z satisfacen al mismo tiempo á ambas; pero la eliminacion tiene por objeto hacer depender la investigacion de estos valores, de la resolucion de una ecuacion de una sola incógnita.

§ Quedaría determinado un valor de z, si sustituido en las dos ecuaciones (A) y (B), tuviesen una raiz comun las ecuaciones resultantes; pues que entónces estos dos valores correspondientes de x y de z sustituidos simultáneamente en las dos ecuaciones propuestas, las reducirían ambas á $0=0$. Luego la ecuacion final en z debe tener por raices todos los valores de z que gozan de la propiedad enunciada; de donde resulta un medio muy simple para obtener esta ecuacion. En efecto, las dos ecuaciones resultantes de una sustitucion conveniente de z debiendo tener una raiz comun, tendrán un divisor comun; luego si se halla el máximo comun divisor entre las ecuaciones (A) y (B), ordenadas con relacion á x, se llegará necesariamente á una resta independiente de x ó que no contendrá ya sinó á z, la cual igualada con cero dará la ecuacion final buscada.

§ Sea $R=0$ esta ecuacion que contiene solo á z; su resolucion hará conocer los valores de z, y se obtendrán los valores correspondientes de x, sustituyendo sucesivamente cada uno de aquellos en la resta del primer grado que contenga á x, que á causa de $R=0$ viene á ser el divisor comun entre (A) y (B); por otra parte esta resta debe ser igual con cero, puesto que ha de determinar un valor para x; de manera que se tiene esta segunda ecuacion $Ax-B=0$, siendo A y B dos cantidades que contienen á z, de la cual se deduce un valor de x para cada uno de los de z.

§ Sean por ejemplo las dos ecuaciones
$$\begin{cases} x^3+3x^2z+3xz^2-98=0 \quad (1), \\ x^2+4xz-2z^2-10=0 \quad (2). \end{cases}$$

Dividiendo la ecuacion (1) por la (2), se obtiene por cociente $x-2$, y por resta $x(9z^2+10)-(2z^3+10z+98)$ (3).

Dividiendo la (ec. 2) por esta resta, teniendo presente, que, para practicar la division, se necesita multiplicar á la que hace de dividendo, que es la (ec. 2), por $9z^2+10$, resulta por cociente $x+(38z^3+50z+98)$; y la res-

ta, igualada con cero, hechas todas las operaciones, y simplificando, es

$$43z^6+345z^4-1960z^3+750z^2-2940z-4302=0 \quad (4);$$

que es la ecuacion final (*)

Esta ecuacion tiene únicamente las dos raices reales siguientes:

$$z=-0,83479, \text{ y } z=3.$$

La espresion (3) igualada con cero da $x(9z^2+10)-(2z^3+10z+98)=0$, que es la que há de dar los valores de x; y sustituyendo en ella los dos espresados valores de z, resulta $x=5,43814$, y $x=2$. Por manera, que á las dos ecuaciones (1) y (2) satisfacen los dos sistemas de valores siguientes:

$$\begin{cases} z=-0,83479 \\ x=5,43814 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} z=3 \\ x=2. \end{cases}$$

Para comprobarlo, harémos dichas sustituciones en ellas; y tendrémos que, poniendo en el primer miembro de la (ec. 1), $-0,83479$ en vez de z, y $5,43814$ en vez de x, se convierte en $+0,13045$; y el primer miembro de la (ec. 2) por dichas sustituciones, se convierte en $-0,07921$; valores, que discrepan bien poco de *cero*, que es el valor del segundo miembro; y esta pequeña diferencia proviene de que los valores de las incógnitas sustituidos, por la naturaleza de la cuestion, solo son aproximados.

Sustituyendo en las mismas ecuaciones (1) y (2), en vez de z su valor 3, y en vez de x su valor 2, se convierten los primeros miembros precisamente en *cero*; lo cual proviene de que estos valores $z=3$ y $x=2$ son exactos.

(*) *Para encontrarlas por nuestro método, supondrémos* z=1; *lo que da* —8064 *de error.*

Suponiendo z=2, *se halla* —14550 *de* error; *y* —1,4 *para la correccion al* 1: *que, agregándosela, da* —0,4.

Tomando —0,4 *por tercer número supuesto, da* —2873 *de error, y* —0,7 *para la correccion al* —0,4; *que, agregándosela, da* —1,1.

Tomando —1, *por cuarto número supuesto, da* +1736 *de error, y* +0,2 *para la correccion al* —1; *que, agregándosela, da* —0,8.

Tomando —0,8 *por quinto número supuesto, da* —315 *de error, y* —0,03 *para la correccion al* —0,8; *que, agregándosela, da* —0,83.

Tomando —0,83 *por sesto número supuesto, da* —47 *de error, y* —0,0045 *para la correccion al* —0,83; *que, agregándosela, da* —0,8345.

Tomando —0,8345 *por séptimo número supuesto, da* —5,633 *de error, y* —0,0005 *para la correccion al* —0,8345; *que, agregándosela, da* —0,835.

Tomando —0,835 *por octavo número supuesto, da* —8,33 *de error, y* —0,0002 *para la correccion al* —0,8345; *que, agregándosela, da* —0,8347.

Tomando —0,8347 *por noveno número supuesto, se obtiene* —3,6073 *de error, y* —0,00009 *para la correccion al* —0,8347; *que, agregándosela, da* —0,83479; *que tomarémos por valor suficientemente aproximado, respecto á que la correccion se halla en el quinto lugar decimal.*

Para encontrar las demas raices de la (ec. 4), *dividirémos su primer miembro por* z+0,83479; *é igualando el cociente á* cero, *se obtiene*

∴

Supongamos aun que se tengan las ecuaciones

$$x^3+mx^2+nx+p=0,\ x^2-bx-a-z=0,$$

donde m, n, p, a y b sean cantidades numéricas, y tendrémos que, aplicando la regla, se hallaría para la resta del primer grado en x.

$$(b^2+mb+n+a+z)x+(b+m)(a+z)+p=0 \text{ (C)};$$

y para la ecuacion final en z será

$$(z+a)^3-(mb+m^2-2n)(z+a)^2+[nb^2+(mn-3p)b+n^2-2mp](z+a)\ldots\ldots$$
$$-p(b^3+mb^2+nb+p)=0 \text{ (D)}.$$

Puede suceder que á un mismo valor $z=6$ de la ecuacion final, deban corresponder muchos valores de x; en este caso, la sustitucion de este valor de z en las dos ecuaciones propuestas dará dos resultantes en x, que tendrán entre sí un factor comun de un grado superior al primero; por consiguiente el divisor comun de los dos primeros miembros será al ménos de segundo grado, puesto que al valor $z=6$ corresponde mas de un valor de x, y la resta del primer grado será nula por sí misma, esto es, será nula independientemente del valor de x; luego se tendrá separadamente $A=0$, $B=0$, para que resulte $x=\frac{0}{0}$, y no se pueda determinar por medio de ella ningun valor para x.

$$43z^5-35,89597z^4+374,96559z^3-2273,01751z^2+2647,49229z\ldots\ldots$$
$$-5150,10008=0 \text{ (4')}.$$

quedando por resta solamente 2,8315.

En esta ecuacion podrémos suprimir sin grande inconveniente las fracciones decimales, añadiendo en el segundo y tercer término una unidad á los enteros; de modo que para encontrar las otras raices de la espresada (ec. 4), que es la final, tendrémos la ecuacion

$$43z^5-36z^4+375z^3-2273z^2+2647z-5150=0 \text{ (4'')}.$$

Suponiendo en ella $z=1$, *se obtiene* -4394 *de error.*

Suponiendo $z=2$, *resulta* -5148 *de error, y* $-5,8$ *para la correccion al* 1; *que, agregándosela, da* $-4,8$.

Tomando -5 *por tercer número supuesto, da* -144585 *de error, que siendo numéricamente mayor que los anteriores, indica, que debemos proceder á los supuestos de* $z=10$, $z=100$ *etc.; por lo que*

Tomando $z=10$ *por cuarto número supuesto, se obtiene* $+4109020$ *de error; que siendo positivo, y el error del* 2 *habiendo resultado negativo, indica que hay una raiz de la ecuacion entre* 2 *y* 10. *Y como los errores se diferencian mucho entre sí, harémos un supuesto intermedio.*

Tomando 3 *por quinto número supuesto, nos da* $-0,0008$ *de error; el cual siendo tan pequeño, indica que proviene de que los coeficientes de la (ec. 4'') se han tomado apro imadamente; y por lo mismo el* 3, *se debe considerar como raiz de la (ec. 4'') y tambien de la (4).*

Dividiendo el primer miembro de la (ec. 4'') por $x-3$; *é igualando á cero el cociente, se obtiene una ecuacion que no da ninguna raiz real; y por lo mismo la (ec. 4) solo tiene dos raices reales, á saber*

$$z=-0,83479 \text{ y } z=3.$$

§ Reciprocamente, siempre que para un mismo valor de x, sacado de la ecuacion final $R=0$, la ecuacion $Ax-B=0$, dé $x=\frac{0}{0}$, se concluirá que á este valor de z corresponden varios valores de x; luego será necesario volver á sustituir este valor de z en la resta precedente de segundo grado, que tendrá esta forma $A'x^2+B'x+C'$.

§ El resultado de la sustitucion, igualado con cero, suministrará una ecuacion, de donde se deducirán los dos valores de x. Si esta ecuacion diese aun $x=\frac{0}{0}$, infeririamos, como en el caso precedente, que á este valor de z correspondían mas de dos valores de x; y entónces se efectuaría la sustitucion en la resta de 3.^{er} grado, la cual igualada con cero daría los tres valores de x correspondientes á un mismo valor de z; y si aun resultase $x=\frac{0}{0}$, se continuaria del mismo modo hasta llegar á una ecuacion que determinase los valores de x.

§ Si las dos ecuacioses propuestas tuviesen un factor comun, que no contuviese sinó á una de las incógnitas, igualando este factor á cero, la dos ecuaciones quedarían satisfechas, cualquiera que fuese el valor que se diese á la otra incógnita; luego serían susceptibles de una infinidad de soluciones; de donde se concluiría, si este factor fuese dado por el estado de la cuestion, que el problema era indeterminado, y se podría deducir aun lo mismo si este factor comun contuviese á x y á z.

§ 385 El método precedente conduce á cálculos tanto mas largos cuanto mas elevado es el grado de las ecuaciones. Partiendo de los mismos principios, reduce *Euler* la investigacion de la ecuacion final á la eliminacion de incógnitas entre ecuaciones del primer grado. La ecuacion final en z debe satisfacer á la cóndicion de que sus raices, sustituidas sucesivamente en vez de la incógnita z en las dos ecuaciones, introduzcan en ellas un factor comun $x-\alpha$; así, se trata de encontrar la relacion que debe haber entre los coeficientes P, Q, etc. P', Q', etc. para que se tenga

$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+etc.=(x-\alpha)(x^{m-1}+Ax^{m-2}+Bx^{m-3}+etc.)$ (E)

$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+etc.=(x-\alpha)(x^{n-1}+A'x^{n-2}+B'x^{n-3}+etc.)$ (F)

donde P, Q, etc. P', Q', etc. son cantidades en que entra z. Para valuar las indeterminadas A, B, C, etc. A', B', C', etc. se multiplicará la 1.ª ecuacion por $x^{n-1}+A'x^{n-2}+$etc. y la 2.ª por $x^{m-1}+Ax^{m-2}+$etc.;

lo que dará $(x^m+Px^{m-1}+$etc.$)(x^{n-1}+A'x^{n-2}+$etc.$)=\ldots\ldots$

$(x^n+P'x^{n-1}+$etc.$)(x^{m-1}+Ax^{m-2}+$etc.$)$.

§ Efectuando los productos, y comparando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tendrán $m+n-1$ ecuaciones entre las indeterminadas A, B, C, etc. A', B', C', etc.; y como el número de estas indeterminadas es $m+n-2$, bastarán $m+n-2$ ecuaciones para determinarlas; y por consiguiente quedará una ecuacion entre los coeficientes P, Q, R, etc. P', Q', R', etc. que deberá quedar satisfecha para que las propuestas (E) y (F) tengan un divisor comun $(x-\alpha)$; esta ecuacion de condicion será la ecuacion final buscada. Las incógnitas A, B, C, etc. A', B', C', etc. no estando multiplicadas entre sí, las ecuaciones que resulten de estas comparaciones serán del 1.^{er} grado. Resolviendo la ecuacion final, se sustituirá sucesivamente cada una de sus raices z en los valores de A, B, C, esc A', B', C', etc. Luego se tendrán de este modo los cocientes de los primeros miembros de (E) y de

(F) por el divisor comun $x-\alpha$, el cual lo determinarémos efectuando la division de dicho 1.^{er} miembro por el cociente. Aplicarémos este método á las dos ecuaciones

$$x^2+px+q=0, \quad x^2+p'x+q'=0,$$

que supondrémos descompuesta así: $\begin{cases} x^2+p\,x+q=(x-\alpha)(x+A), \\ x^2+p'x+q'=(x-\alpha)(x+B), \end{cases}$

que dan aplicando el método

$$(x^2+px+q)(x+B)=(x^2+p'x+q')(x+A);$$

de la cual se deduce, despues de haber efectuado las multiplicaciones y comparado los coeficientes de las mismas potencias de x, (a)

$$1.^{o}....B+p=A+p', \quad 2^{o}....Bp+q=Ap'+q', \quad 3.^{o}....Bq=Aq';$$

de las dos primeras se saca $B=\dfrac{p'(p-p')+q'-q}{p-p'}$, $A=\dfrac{p(p-p')+q'-q}{p-p'}$.

La tercera es la ecuacion final.

§ Hagámos una aplicacion de este método á la investigacion de la ecuacion final resultante de la eliminacion de x entre las dos ecuaciones siguientes $x^3+3zx^2+3z^2x-98=0$, $x^2+4zx-2z^2-10=0$, que hemos considerado anteriormente (§ 384); y representando por $(x-\alpha)$ el factor comun del 1.^{er} grado, supondrémos

$$x^3+3zx^2+3z^2x-98=(x-\alpha)(x^2+Ax+B)$$
$$x^2+4zx-2z^2-10=(x-\alpha)(x+A');$$

de donde resulta $\dfrac{x^3+3zx^2+3z^2x-98}{x^2+4zx-2z^2-10}=\dfrac{x^2+Ax+B}{x+A'}$,

quitando los divisores, se obtiene

$$x^4+3zx^3+3z^2x^2-98x-98A'=x^4+4zx^3-2z^2x^2-2Az^2x-2z^2B;$$
$$+A'x^3+3A'zx^2+3A'z^2x \qquad +Ax^3-10x^2$$
$$+4Azx^2-10Ax-10B$$
$$+Bx^2+4Bzx.$$

Igualando los coeficientes de los términos homólogos de ambos miembros, se tendrá

$$3z+A'=4z+A \ (1), \quad 3z^2+3A'z=-2z^2-10+4Az+B \ (2),$$
$$3A'z^2-98=-2Az^2-10A+4Bz \ (3),$$
$$-98A'=2Bz^2+10B=(2z^2+10)B \ (4).$$

Las tres primeras ecuaciones bastan para determinar los coeficientes A', B, A; y dan $A'=A+z$, $B=8z^2-Az+10$,

$$A=\frac{29z^3+40z+98}{9z^2+10};$$

luego la (ec. 4) se convertirá en

$$98z+98\frac{29z^3+40z+98}{9z^2+10}=16z^4-\frac{29z^3+40z+98}{9z^2+10}(2z^3+10z)+100z^2+100,$$

de donde sale $98z+(98+2z^3+10z)\dfrac{29z^3+40z+98}{9z^2+10}=16z^4+100z^2+100,$

que, efectuando las operaciones y reduciendo, resulta por último

$$43z^6+345z^4-1960z^3+750z^2-2940z-4302=0,$$

que es el mismo resultado que obtuvimos ántes.

386 Por medio de la análisis precedente se puede resolver este problema: *Dadas dos ecuaciones algebráicas entre* x *y* z, *hallar las relaciones que deben existir entre los coeficientes que contienen á* z, *para que estas ecuaciones admitan un comun divisor de* 2.° *grado.*

Supongamos que las dos ecuaciones dadas sean las siguientes de 3.^{er} grado: $x^3+px^2+qx+r=0$, $x^3+p'x^2+q'x+r'=0$, siendo p, q, r, p', q', r', cantidades que contienen á z. Si el valor correspondiente de z fuese conocido, las dos ecuaciones resultantes de su sustitucion, teniendo dos raices comunes, admitirían un comun divisor de 2.° grado de la forma $(x-\alpha)(x-\mathfrak{C})$; recíprocamente, si las dos ecuaciones propuestas fuesen divisibles por un factor comun de esta forma, tendrían dos raices comunes; luego es necesario determinar $p.q,r.p'.q',r'$, por la condicion de que los dos miembros de cada una de las ecuaciones

$$x^3+p\,x^2+q\,x+r=(x-\alpha)(x-\mathfrak{C})(x+A)$$
$$x^3+p'x^2+q'x+r'=(x-\alpha)(x-\mathfrak{C})(x+B)$$

sean idénticos. Dividiendo estas dos ecuaciones la una por la otra, y quitando los divisores, la acuacion resultante

$$(x^3+px^2+q\,x+r)(x+B)=(x^3+p'x^2+q'x+r')(x+A)$$

tendrá lugar, cualquiera que sea el valor de x. Efectuando los productos indicados, y comparando los coeficientes de las mismas potencias de x, se tendrán las cuatro ecuaciones

$$B+p=A+p',\ Bp+q=Ap'+q',\ Bq+r=Aq'+r',\ Br=Ar'.$$

En estas ecuaciones no entran mas de dos incógnitas A y B; luego quedarán dos ecuaciones entre p, q, r, p', q', r' que espresarán las condiciones que se buscan.

La 1.ª y 4.ª ecuacion dan $A=\dfrac{r(p-p')}{r-r'}$, $B=\dfrac{r'(p-p')}{r-r'}$,

y sustituyendo despues estos valores en las otras dos, se tendrán estas dos relaciones

$$(p-p')(pr'-p'r)+(r-r')(q-q')=0,$$
$$(p-p')(qr'-q'r)+(r-r')^2=0.$$

Así, el valor de z, propio para introducir dos raices comunes en las ecuaciones propuestas, debe satisfacer á las dos ecuaciones precedentes; por consiguiente el comun divisor entre estas hará conocer este valor de z.

387 Si las dos ecuaciones propuestas son de un órden cualquiera, tales como

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}+\ldots Tx+V=0$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+R'x^{n-3}+\ldots T'x+V'=0,$$

y se quieren determinar las relaciones que deben existir entre los coeficientes, que son cantidades que contienen á z, para que tengan dos raices comunes, se llegará á esta ecuacion

$$(x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+\ldots Tx+V)(x^{n-2}+A'x^{n-3}+\text{etc.})=\ldots.$$
$$(x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+\ldots T'x+V')(x^{m-2}+Ax^{m-3}+\text{etc.}).$$

Pero, efectuando las operaciones, y comparando los coeficientes de las mismas potencias de x, se obtendrán $m+n-2$ ecuaciones, en las cuales las indeterminadas A, B, etc. A', B', etc. solo se hallarán elevadas á la 1ª potencia. Pero el número de los coeficientes A, B, C, etc. siendo $m-2$, y el de los A', B', C', etc. $n-2$, bastarán para determinarlos $m+n-4$ ecuaciones; luego quedarán dos ecuaciones entre los coeficientes P, Q, R, etc. P', Q', R', etc. que espresarán las relaciones necesarias entre estos coeficientes, para que las propuestas tengan dos raices comunes.

Por el mismo método hallaríamos las condiciones necesarias para que dos ecuaciones de un grado cualquiera tengan tres ó mas raices comunes.

388 Pasémos ya á determinar las raices iguales de las ecuaciones. Para esto, supongamos que se tenga la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots.Kx+L=0 \text{ (M)},$$

en la cual x representa una cualquiera de las raices; sea x' otra raiz tambien cualquiera de la misma ecuacion; y se tendrá

$$x'^n+Ax'^{n-1}+Bx'^{n-2}+\ldots.Kx'+L=0 \text{ (N)}.$$

Si u espresa la diferencia entre las raices x' y x, de modo que se tenga $x'=x+u$, la sustitucion de x' en (N) dará una ecuacion que, ordenada con relacion á las potencias sucesivas de la diferencia u, considerada como incógnita, será aún del grado n, y tendtá por raices todas las diferencias posibles entre las raices de la propuesta: si se escribe empezando por el último término, se tendrá un resultado de la forma

$$Z+Yu+Xu^2+Vu^3+\ldots.+u^n=0 \text{ (O)},$$

siendo Z, Y, X, etc. cantidades que contienen á x, tales como

$$Z=x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots Kx+L,$$
$$Y=nx^{n-1}+(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}+\ldots+K,$$
$$X=\tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}+\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)Bx^{n-4}+etc.$$

El primer coeficiente Z se compone de la suma de los primeros términos de las potencias $(x+u)^n$, $A(x+u)^{n-1}$, etc. ó lo que es lo mismo es el primer miembro de la ecuacion primitiva (M); el segundo Y es la suma de los coeficientes de los segundos términos de los mismos desarrollos, y así sucesivamente.

El coeficiente Y se deduce del coeficiente Z con mucha facilidad por la regla siguiente: *Se multiplica cada término de Z por el esponente que en él lleva la incógnita x; se rebaja al esponente de esta en dicho término una unidad; y no se pone el término constante ó independiente de la incógnita x.* El polinomio Y se dice que es el *polinomio derivado* del polinomio Z; y se puede hallar por la regla que acabamos de dar, respecto de cualquier polinomio aislado ó de cualquier ecuacion segun he-

mos espresado en el n.° 11.° de la regla (I 284 *j*) y (I del compendio § 197 *p*).

❴ El polinomio X es el *polinomio derivado* de *Y*, dividiendo todos sus términos por 2. Del mismo modo resulta que el polinomio *V* se deriva ó es el derivado de *X*, dividiendo todos sus términos por 3; y así sucesivamente.

❴ La (ec. N) no se diferencia esencialmente de la (M), sinó en que la incógnita, en vez de estar representada por x, se halla espresada por x'. Luego si a, b, c, etc. son las raices de la (ec. M), estas mismas serán las raices de la (N). Y en virtud de lo espuesto (365 ec. δ), podrémos poner la (ec. N) bajo esta forma

$$x'^n+Ax'^{n-1}+Bx'^{n-2}+.....Kx'+L=....$$
$$(x'-a)(x'-b)(x'-c)(x'-d)(x'-e).....\text{etc.}\quad (O').$$

❴ Sustituyendo ahora en vez de x' el valor que le hemos dado de $x+u$ ó de $u+x$, el primer miembro será el primero de la (ec. O); y cada uno de los factores del segundo miembro, tomará esta forma

$$(u+(x-a)),\quad (u+(x-b)),\ \text{etc.}$$

❴ Por manera, que se tendrá

$$Z+Yu+Xu^2+Vu^3+.....u^n=.....$$
$$(u+(x-a))(u+(x-b))(u+(x-c))(u+(x-d))(u+(x-e)).....\text{etc.}\quad (O'').$$

❴ Ahora, puede suceder que, entre las raices, las haya iguales entre sí; y si suponemos que haya un número m de raices iguales con a, habrá m factores iguales con $(u+(x-a))$; si ademas, suponemos que haya m' raices iguales con b, habrá m' factores iguales con $(u+(x-b))$; y si todavia hubiese m'' raices iguales con c, habría m'' factores iguales con $(u+(x-c))$; por lo que la acuacion anterior se convertirá en este caso en

$$Z+Yu+Xu^2+Vu^3+.....u^n=.....$$
$$(u+(x-a))^m(u+(x-b))^{m'}(u+(x-c))^{m''}(x-d)(x-e)....\text{etc.}$$

❴ Desarrollando cada uno de estos factores, considerando los binomios $x-a$, $x-b$, $x-c$, como una sola cantidad, y efectuando las multiplicaciones, se tiene

$$\begin{aligned}
&Z+Yu+Xu^2+Vu^3+\text{etc.}=....\\
&\quad (x-a)^m\ (x-b)^{m'}\ (x-c)^{m''}\ (x-d)(x-e)\text{etc.}\\
&+m\,(x-a)^{m-1}(x-b)^{m'}\ (x-c)^{m''}\ (x-d)(x-e)\text{etc.}\\
&+m'(x-a)^m\ (x-b)^{m'-1}(x-c)^{m''}\ (x-d)(x-e)\text{etc.}\\
&+m''(x-a)^m\ (x-b)^{m'}\ (x-c)^{m''-1}(x-d)(x-e)\text{etc.}\\
&\quad +(x-a)^m\ (x-b)^{m'}\ (x-c)^{m''}\ (x-d).....\text{etc.}\\
&\quad +(x-a)^m\ (x-b)^{m'}\ (x-c)^{m''}\ (x-e).....\text{etc.}\\
&\quad +\text{etc.}\quad (O''')
\end{aligned}\Bigg\}\ u$$

Este resultado nos manifiesta, comparando Z é Y con los coeficientes de las mismas potencias de u en el 2º miembro, que el comun divisor entre Z é Y se compondrá del producto de todos los factores múltiplos de la propuesta, elevados cada uno á una potencia menor en

una unidad. Sea D este comun divisor, y se tendrá

$$D=(x-a)^{m-1}(x-b)^{m'-1}(x-c)^{m''-1};$$

pero $$Z=(x-a)^{m}(x-b)^{m'}(x-c)^{m''}(x-d)(x-e)\text{ etc.},$$

luego si se divide Z por D, y se señala el cociente por Q, se hallará

$$Q=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\text{ etc.}$$

que resulta del producto de los factores iguales, elevados cada uno á la primera potencia, multiplicados por los factores desiguales; así, la ecuacion $Q=0$ no tendrá ya raices iguales. Todavía se puede obtener un resultado mas cómodo, buscando el comun divisor entre D y Q; porque si llamamos D' á este comun divisor, se hallará

$$D'=(x-a)(x-b)(x-c).$$

§ Así, la ecuacion $D'=0$ proviene solo del producto de los factores múltiplos de la propuesta, elevados cada uno á la primera potencia. Dividiendo despues Q por D' y señalando por Q' el cuociente, se tendrá $Q'=(x-d)(x-e)$ etc.; de manera, que las dos ecuaciones $D'=0$, $Q'=0$, que no tendrán sinó raices desiguales, la 1ª. dará las raices iguales, y la 2ª las desiguales de la propuesta.

§ En virtud de esta discusion, podemos establecer la siguiente regla para saber si hay raices iguales en una ecuacion cualquiera, y determinarlas. *Hállese el polinomio derivado del primer miembro de la ecuacion propuesta; búsquese el máximo comun divisor entre el primer miembro de la espresada ecuacion propuesta y de su polinomio derivado; si los espresados polinomios no tienen ningun divisor comun, la ecuacion propuesta no tiene ninguna raiz igual con otra; si tienen máximo comun divisor, este se compondrá del producto de los factores que entran varias veces en la propuesta, elevados respectivamente á una potencia una unidad menor que en la propuesta.*

Y el número de raices iguales de cada especie en la propuesta será una unidad mayor que el que hay en el máximo comun divisor.

§ Propongámonos indagar por esta teoría, si la ecuacion

$$x^3-25x^2+203x-539=0$$

tiene raices iguales.

En este caso es $Z=x^3-25x^2+203x-539$, é $Y=3x^2-50x+203$.

§ Para encontrar el máximo comun divisor entre Z é Y, debemos dividir el triplo de Z, que es $3x^3-75x^2+609x-1617$, por el valor de Y, que es $3x^2-50x+203$; y se obtiene x por cociente, y $-25x^2+406x-1617$ por resta; y como el 25 no se puede dividir esactamente por 3, se necesita multiplicar por 3 esta resta; y efectuándolo, se convierte en $-75x^2+1218x-4851$;
la cual dividida por el mismo divisor, da -25 por cociente, y queda $-32x+224$ por resta.

§ Ahora, deberémos dividir la cantidad que nos ha servido de divisor por esta resta; pero, como el 224 equivale á 7 veces el 32, podrémos suprimir en dicha resta el factor comun -32, y quedará reducida la ope-

racion á dividir $3x^2-50x+203$ por $x-7$; y practicando esta division, resulta $3x-29$ por cociente exacto; luego el máximo comun divisor es $x-7$; y por consiguiente la ecuacion propuesta tiene dos raices iguales con 7 y es divisible por $(x-7)^2=x^2-14x+49$.

Efectuando la division se halla $x-11$ por cociente; luego las tres raices de la ecuacion propuesta son $x=7$, $x=7$, y $x=11$ (*).

{ 389 Entendido esto, pasémos á manifestar lo que son *las funcio-*

(*) Nuestro nuevo método da este resultado directamente y sin ningun otro conocimiento auxiliar.

En efecto, suponiendo $x=1$ en la ecuacion propuesta, se obtiene $+432$ de error.

El supuesto $x=2$, da $+325$ de error, y 3 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 5.

Tomando 5 por tercer número supuesto, se halla $+64$ de error, y 0,7 para la correccion al 5; que, agregándosela, da 5,7.

Tomando 6 por cuarto número supuesto, se halla $+17$ de error, y 0,36 para la correccion al 6; que, agregándosela, da 6,36.

Tomando 6,4 por quinto número supuesto, se obtiene $+6,264$ de error; y 0,2 para la correccion al 6,4; que, agregándosela, da 6,6.

Tomando 7 por sesto número supuesto, se obtiene *cero* de error; por lo que 7 es raiz de la ecuacion.

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la ecuacion propuesta, por $x-7$; é igualando el cociente á cero, se tiene $x^2-18x+77=0$; que, resuelta por lo espuesto (I. 253), se obtiene $x=7$ y $x=11$.

Pero, si se quiere resolver la ecuacion $x^2-18x+77=0$ (m) por nuestro método, supondrémos $x=1$; lo que da 60 de error.

El supuesto $x=2$, da 45 de error, y 3 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 5.

Tomando 5 por tercer número supuesto, dá 12 de error, y 1 para la correccion al 5; que, agregándosela, da 6.

Tomando 6 por cuarto número supuesto, da 5 de error, y 0,7 para la correccion al 6; que, agregándosela, da 6,7.

Tomando 7 por quinto número supuesto, da *cero* de error; por lo que 7 es raiz de la (ec. m); y dividiendo el primer miembro de dicha (ec. m) por $x-7$, é igualando el cociente á *cero*, se tiene $x-11=0$; que da $x=11$.

Pero, si se quieren todavía mayores comprobantes de la superioridad de nuestro método, sobre todos los demas, observarémos que Mr. *Bourdon* (§ 279) de la *novena edicion* de su Álgebra, publicada en Paris este mismo año de 1843, se ocupa en hallar las raices iguales de las ecuaciones; y despues de resolver dos ejemplos, dice:

"*Sea la nueva ecuacion*

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0;$$

el polinomio derivado es

$$7x^6+30x^5+30x^4-24x^3-45x^2-6x+8=0;$$

y se halla por comun divisor

nes simétricas ó invariables, y el modo de valuar las sumas de las potencias enteras positivas ó negativas de las raices en coeficientes de la ecuacion.

Se llama *funcion invariable ó simétrica de las raices de una ecuacion* á toda combinacion de estas raices, cuyo valor numérico permanece el mismo, haciendo entre estas raices todas las mudanzas posibles. La suma de las raices, la de sus productos diferentes de 2 en 2, de 3

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2.$$

»La ecuacion $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$, no se puede resolver inmediatamente; pero, apliçándole el método de las raices iguales, es decir, buscando el mayor comun divisor entre el primer miembro y su polinomio derivado, que es $4x^3+9x^2+2x-3$, se halla para comun divisor $x+1$; lo que prueba que $x+1$ entra *en el cuadrado* en $x^4+3x^3+x^2-3x-2$, y al cubo en el primer miembro de la propuesta.

»Si se divide $x^4+3x^3+x^2-3x-2$ por $(x+1)^2$ ó x^2+2x+1, viene por cociente x^2+x-2; polinomio, que, igualado á cero, da las dos raices $x-1$, $x=-2$, ó los dos factores $x-1$, $x+2$. Luego se tiene

$$x^4+3x^3+x^2-3x-2=(x+1)^2(x-1)(x+2).$$

»Así, el primer miembro de la propuesta es de la forma

$$(x+1)^3(x-1)^2(x+2)^2;$$

ó bien, en otros términos, la ecuacion tiene *tres* raices iguales ron -1, dos iguales con $+1$, y dos iguales con -2.''

Si el lector tiene la paciencia de ejecutar las dos operaciones de hallar el máximo comun divisor que envuelve esta cuestion, verá la complicacion que esto origina, comparado con la sencillez con que se halla el mismo resultado por nuestro métobo, y es como sigue.

Suponiendo $x=1$ en la ecuacion

$$x^7+5x^6+6x^5-6x^4-15x^3-3x^2+8x+4=0 \quad (n),$$

resulta *cero* de error, por lo que 1 es raiz de la ecuacion.

Para encontrar las demas, se divide el primer miembro de la (ec. n) por $x-1$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^6+6x^5+12x^4+6x^3-9x^2-12x-4=0 \quad (n').$$

Para aplicarle el método, supondrémos $x=1$; lo que dá *cero* de error; luego 1 es raiz de la (ec. n').

Para encontrar las demas, se divide el primer miembro de la (ec. n') por $x-1$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^5+7x^4+19x^3+25x^2+16x+4=0 \quad (n'').$$

Para aplicarle el método, se supone $x=1$; lo que da 72 de error.

Suponiendo $x=2$, resulta 432 de error, y $-1,2$ para la corrección al 1; que, agregándosela, da $-0,2$.

Tomando $-0,2$ por tercer número supuesto, resulta $+1,65888$ de error, y $-0,028$ para la correccion al $-0,2$; que, agregándosela, da $-0,228$.

Tomando $-0,23$ por cuarto número supuesto, da $1,43016$ de error, y $-0,19$ para la correccion al $-0,23$; que, agregándosela, da $-0,42$.

Tomando $-0,42$ por quinto número supuesto, da $+0,48693$ de error, y

en 3, etc. son funciones de esta especie; las sumas de las mismas potencias positivas ó negativas de todas las raices de la ecuacion, son tambien funciones simétricas ó invariables, que nos propondrémos espresar en coeficientes de la ecuacion, aun sin conocer dichas raices.

{ Principiarémos por la siguiente cuestion particular. Propongámonos *encontrar dos cantidades, cuya suma sea* p, *y su producto sea* q.

{ Representando por x y por z, estas dos cantidades, se tendrá

$x+z=p$ (1), $xz=q$ (2), de donde $\left\{\begin{matrix} x^2-px+q=0 \\ z^2-pz+q=0 \end{matrix}\right\}$ (3),

y se ve que las dos incógnitas x, z son las raices de una misma ecuacion; porque ámbas entran de la misma manera en las condiciones del problema.

{ Supongamos ahora, que en lugar de buscar inmediatamente las cantidades x, z, nos limitásemos á pedir el valor de su diferencia $x-z$; se obtendría sin trabajo, porque cuadrando la (1), y cuadruplicando la (2), se tendrá $x^2+2xz+z^2=p^2$ (4), $4xz=4q$ (5).

—0,098 para la correccion al —0,42; que, agregándosela, da —0,518.

Tomando —1 por sesto número supuesto, da *cero* de error. Por consiguiente —1 es raiz de la ecuacion (n′′).

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. n′′) por $x+1$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^4+6x^3+13x^2+12x+4=0 \quad (n'''').$$

Para aplicarle el método, supondrémos $x=1$; lo que da 36 de error.

Suponiendo $x=2$, resulta 144 de error, y —0,25 para la correccion al 1; que, agregándosela, da 0,75.

Tomando 0,8 por tercer número supuesto, resulta 25,4 de error, y —0,5 para la correccion al 0,8; que, agregándosela, da 0,3.

Tomando 0,3 por cuarto número supuesto, da 8,9401 de error, y —0,27 para la correccion al 0,3; que, agregándosela, da 0,03.

Tomando 0,03 por quinto número supuesto, da 4,37186281 de error, y —0,258 para la correccion al 0,03; que, agregándosela, da —0,228.

Tomando —0,23 por sesto número supuesto, se obtiene 1,85747 de error, y —0,19 para la correccion al —0,23; que, agregándosela, da —0,42.

Tomando —0,42 por séptimo número supuesto, se obtiene 0,83976 de error, y —0,15 para la correccion al —0,42; que, agregándosela, da —0,57.

Tomando —1 por octavo número supuesto, resulta *cero* de error; por lo que —1 es raiz de la (ec. n′′′′) y tambien de las anteriores.

Para encontrar las demas, se dividirá el primer miembro de la (ec. n′′′′) por $x+1$, é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^3+5x^2+8x+4=0 \quad (n'^{v}).$$

Para aplicarle el método, supongamos $x=1$; lo que da 18 de error.

Suponiendo $x=2$, resulta 48 de error, y —0,6 para la correccion al 1; que, agregándosela, da 0,4.

Tomando 0,4 por tercer número supuesto, resulta 8,064 de error, y —0,49

Restando la (5) de la (4), será $x^2-2xz+z^2=p^2-4q$ ó $(x-z)^2=p^2-4q$, que da $x-z=\pm\sqrt{p^2-4q}$.

Podíamos prever de antemano, que la funcion $x-z$ tendría dos valores, y que por consiguiente debía depender de una ecuacion de 2º grado; porque en el enunciado de la cuestion, y en la manera de resolverla, nada indicaba que se buscase $x-z$ ó $z-x$.

La funcion x^2+z^2, al contrario, en la cual es indiferente mudar x en z, y recíprocamente, no debe ser susceptible sinó de un solo valor; por lo que, en su espresion, nada habrá que dé lugar á concebir mas de uno. En efecto, si de la (ec. 4) se quita esta $2xz=2q$, resultará $x^2+z^2=p^2-2q$; cuyo segundo miembro no tiene mas de un valor; por lo cual x^2+z^2 es una funcion simétrica ó invariable.

Para *encontrar las funciones invariables ó simétricas de las potencias positivas ó negativas de las raices de una ecuacion en valores de sus coeficientes*, y *sin necesidad de conocer dichas raices*, supongamos que la ecuacion propuesta sea

$$x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+Dx^{n-4}-Ex^{n-5}\ldots-Kx+L=0 \quad (P),$$

cuyas raices sean a, b, c, *etc.*; y se tendrá (§ 365 (δ)) la identidad

---

para la correccion al 0,4; que, agregándosela, da —0,09.

Tomando —0,1 por cuarto número supuesto, da 3,249 de error, y —0,33 para la correccion al —0,1; que, agregándosela, da —0,43.

Tomando —0,43 por quinto número supuesto, da 1,405 de error, y —0,25 para la correccion al —0,43; que, agregándosela, da —0,68.

Tomando —1 por sesto número supuesto, da *cero* de error; por lo que —1 es raiz de la (ec. n'^{o}).

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. n'^{o}) por $x+1$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene $x^2+4x+4=0$ (n^{o}).

Para aplicarle el método, supondrémos $x=1$; lo que da 9 de error.

El supuesto $x=2$, da 16 de error, y —1,28 para la correccion al 1; que, agregándosela, da —0,28.

Tomando —0,3 por tercer número supuesto, resulta 2,89 de error, y —0,61 para la correccion al —0,3; que, agregándosela, da —0,91.

Tomando —1 por *cuarto* número supuesto, da 1 de error, y —0,37 para la correccion al —1; que agregándosela, da —1,37.

Tomando —1,4 por quinto número supuesto, da 0,36 de error, y —0,22 para la correccion al —1,4; que, agregándosela, da —1,62.

Tomando —2 por sesto número supuesto, resulta *cero* de error; por lo que —2 es raiz de la (ec. n^{v}).

Para encontrar la raiz que falta, se dividirá el primer miembro de la (ec. n^{v}) por $x+2$; é igualando el cociente á *cero*, resulta $x+2=0$; que da $x=-2$.

Luego, por nuestro método hemos resuelto *la ecuacion nueva de Mr. Bourdon* sin hacer uso de ninguna consideracion estraña al método, encontrando las mismas raices que dicho autor, con mucha mayor sencillez.

$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots - Kx + L = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ etc. (P').

Verificándose esta ecuacion, cualquiera que sea x, se deberá verificar sustituyendo $x+k$ en vez de x, siendo k y x cualesquiera, de manera que $(x+k)^n - A(x+k)^{n-1} + \ldots - K(x+k) + L = \ldots$

$[(x-a)+k][(x-b)+k][(x-c)+k][(x-d)+k]$ etc.

Luego se tendrá entre los coeficientes de la 1ª potencia de k, la identidad $nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} -$ etc. $\ldots - K = \ldots$

$(x-b)(x-c)(x-d)$etc. $+ (x-a)(x-c)(x-d)$etc. $+ (x-a)(x-b)(x-d)$etc. $+$etc. (P''),

cuyo 2º miembro es la suma de los cocientes que se obtendrían dividiendo el producto de todos los factores de la propuesta sucesivamente por cada uno de estos factores.

Dividiendo (P'') por (P'), resultará

$$\frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - \ldots - K}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots - Kx + L} = \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \text{etc.} \ldots \text{(P'')};$$

ecuacion que deberá verificarse, cualquiera que sea el valor de x. Pero, haciendo las divisiones en el 2º miembro, se tiene (I. 184)

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \text{etc.}, \quad \frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \text{etc.},$$

$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \text{etc.}.$$

Luego, si suponemos para abreviar, $a+b+c+d+$etc. $= S_1$, $a^2+b^2+c^2+d^2+$etc. $= S_2$, $a^3+b^3+c^3+d^3$etc. $= S_3$, $a^n+b^n+c^n+d^n+$etc. $= S_n$, la identidad (P''') será $\dfrac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} \ldots - K}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} \ldots - Kx + L} = \ldots$

$$\frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \ldots + \frac{S_n}{x^{n+1}} + \frac{S_{n+1}}{x^{n+2}} + \text{etc.} \quad \text{(Q)}.$$

Multiplicando los dos miembros de (Q) por el denominador del 1º, resultará

$$\left.\begin{array}{llllll} nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + (n-4)Dx^{n-5} + \ldots - K & = & & & & \\ nx^{n-1} & -nAx^{n-2} & +nBx^{n-3} & -nCx^{n-4} & +nDx^{n-5} \ldots\ldots\ldots - \&. & \\ & +S_1 & -AS_1 & +BS_1 & -CS_1 & \\ & & +S_2 & -AS_2 & +BS_2 & \\ & & & +S_3 & -AS_3 & \\ & & & & +S_4 & \end{array}\right\} \text{(Q')}.$$

Comparando los coeficientes de las potencias iguales de x, se ten-

drán las ecuaciones $n=n$, $S_1-nA=-(n-1)A$, $S_2-AS_1+nB=(n-2)B$, $S_3-AS_2+BS_1-nC=-(n-3)C$, $S_4-AS_3+BS_2-CS_1+nD=(n-4)D$ etc.; de donde $S_1-A=0$ (1), $S_2-AS_1+2B=0$ (2), $S_3-AS_2+BS_1-3C=0$ (3), $S_4-AS_3+BS_2-CS_1+4D=0$ (4) etc. resultados, cuya ley se percibe con facilidad.

De ellas se saca.

$S_1=A$ (1′);
$S_2=AS_1-2B=0$ (2′);
$S_3=AS_2-BS_1+3C$ (3′);
$S_4=AS_3-BS_2+CS_1-4D$ (4′);
$S_5=AS_4-BS_3+CS_2-DS_1+5E$ (5′);
$S_6=AS_5-BS_4+CS_3-DS_2+ES_1-6F$ (6′);
etc.

En el 2º miembro de la (ec. Q′) no hemos puesto el producto de los dos últimos términos del segundo miembro de la (ec. Q) por el denominador del primero; porque la circunstancia de estar espresadas las sumas en general por S_n y S_{n+1} exige consideraciones particulares para conciliar la ley anterior de los coeficientes con la generalidad que nos conviene dar desde aquí en adelante.

En efecto, multiplicando el 2º miembro de (Q) por x^n, el término $\frac{S_n}{x^{n+1}}$ da por resultado $S_n x^{-1}$, y multiplicando por L el término $\frac{n}{x}$, resulta nLx^{-1}, que será el último término del coeficiente de x^{-1}; y llenando los huecos intermedios por la ley que espresan las (ecs. 1, 2, 3, 4), se tendrá para el coeficiente total de x^{-1} la espresion $S_n-AS_{n-1}+BS_{n-2}-CS_{n-3}....nL=0$ (R); siendo el segundo miembro cero, porque en el primero de (Q′) no habiendo ninguna potencia negativa de x, pues $-K$ es el coeficiente de x^0, resulta que el coeficiente de x^{-1} en dicho primer miembro es cero.

Multiplicando el término $\frac{S_{n+1}}{x^{n+2}}$ por x^n en (Q), se tiene $S_{n+1}x^{-2}$; por otra parte el producto de $\frac{S_1}{x^2}$ por L, es S_1Lx^{-2}; de donde, por las mismas consideraciones, para el coeficiente total de x^{-2} se saca $S_{n+1}-AS_n+BS_{n-1}+.....+LS_1=0$ (S), porque el coeficiente de x^{-2} en el primer miembro de (Q) es tambien nulo.

Despejando S_n y S_{n+1} en las fórmulas anteriores, se tendrá

$$S_n = AS_{n-1} - BS_{n-2} + CS_{n-3} - DS_{n-4} + ES_{n-5} - \ldots - nL \quad (S'),$$
$$S_{n+1} = AS_n - BS_{n-1} + CS_{n-2} - DS_{n-3} + ES_{n-4} - \ldots - LS_1 \quad (S''),$$

cuyas fórmulas nos dicen, que *las sumas de las potencias sucesivas de las raices se forman, partiendo de la que tiene* n *por esponente inclusive, multiplicando la anterior por* A, *la anterior á esta por* —B, *la otra por* +C *etc.*

Propougámonos hacer aplicacion á la ecuacion de 4.º grado siguiente

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0 \quad (\alpha).$$

Comparada esta ecuacion con la (P), se tiene

$$A=4,\ B=3,\ C=-4,\ D=-4;\ E=0,\ F=0,$$

y las fórmulas (1′), (2′), (3′) etc. nos darán

$S_1 = A = 4.$
$S_2 = 4.4 - 2.3 = 16 - 6 = 10.$
$S_3 = 4.10 - 3.4 + 3.-4 = 40 - 12 - 12 = 16.$
$S_4 = 4.16 - 3.10 - 4.4 - 4.-4 = 64 - 30 - 16 + 16 = 34.$
$S_5 = 4.34 - 3.16 - 4.10 + 4.4 + 5.0 = 136 - 48 - 40 + 16 = 64.$
$S_6 = 4.64 - 3.34 - 4.16 + 4.10 = 256 - 102 - 64 + 40 = 130.$
etc.

Si queremos hacer una comprobacion de la exactitud de estos resultados, observarémos que esta ecuacion, resuelta por el método de los divisores ó por el mio, da por raices $x=1$, $x=-1$, $x=2$ y $x=2$; y tenemos que la suma de las primeras potencias de las raices, ó $S_1 = 1 - 1 + 2 + 2 = 4$,
la de las segundas, ó $S_2 = 1 + 1 + 4 + 4 = 10$,

$$S_3 = 1 - 1 + 8 + 8 = 16,$$
$$S_4 = 1 + 1 + 16 + 16 = 34,$$
$$S_5 = 1 - 1 + 32 + 32 = 64,$$
$$S_6 = 1 + 1 + 64 + 64 = 130,$$

etc.,

que son los mismos valores que hemos obtenido por las fórmulas.

Suponiendo $x = \frac{1}{z}$ en la (ec. P), las raices de la trasformada en z, serán $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ etc.

Y calculando por medio de las fórmulas (1′), (2′), (3′), (4′), (5′), (6′), etc las sumas S_1, S_2, etc. para la trasformada en z, se tendrán las sumas de las potencias negativas de las raices de la propuesta.

Se podrían calcular directamente fórmulas análogas á las precedentes para dichas potencias negativas; pero no nos detendrémos en esto, y preferirémos hacer aplicacion de las sumas de las potencias negativas á la ecuacion propuesta (α).

Haciendo en (α) $x = \frac{1}{z}$, se nos convertirá en

$$\frac{1}{z^4} - \frac{4}{z^3} + \frac{3}{z^2} + \frac{4}{z} - 4 = 0;$$

Para quitar los divisores, basta multiplicar toda la ecuacion por z^4; y ejecutándolo, y ordenándola al reves, se tendrá

$$-4z^4 + 4z^3 + 3z^2 - 4z + 1 = 0 \quad (\alpha').$$

Dividiendo toda la ecuacion por -4, se tiene $z^4 - z^3 - \frac{3}{4}z^2 + z - \frac{1}{4} = 0$.

Comparando los coeficientes de esta ecuacion con los de la (P), se tiene

$$A=1\,,\ B=-\tfrac{3}{4},\ C=-1\,;\ D=-\tfrac{1}{4},\ E=0\,,\ F=0.$$

Sustituyendo ahora estos valores en las (ecs. 1′, 2′, 3′, 4′, etc.), tendrémos

$$S_{-1}=1,$$
$$S_{-2}=1.1-2.-\tfrac{3}{4}=1+\tfrac{6}{4}=\tfrac{10}{4}=\tfrac{5}{2},$$
$$S_{-3}=1.\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{4}.1+3.-1=\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{4}-3=\tfrac{1}{4},$$
$$S_{-4}=1.\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{2}-1.1-4.-\tfrac{1}{4}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{15}{8}-1+1=\tfrac{17}{8},$$
etc.

Comprobacion con las potencias de las raices $1,\ -1\,,\ +2\,,\ +2$

Aquí S_{-1} es la suma de las primeras potencias negativas de dichas raices; luego será $S_{-1}=\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}=1\,,$

$$S_{-2}=\frac{1}{(1)^2}+\frac{1}{(-1)^2}+\frac{1}{(2)^2}+\frac{1}{(2)^2}=1+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}=\tfrac{5}{2},$$

$$S_{-3}=\frac{1}{(1)^3}+\frac{1}{(-1)^3}+\frac{1}{(2)^3}+\frac{1}{(2)^3}=1-1+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{2}{8}=\tfrac{1}{4},$$

$$S_{-4}=\frac{1}{(1)^4}+\frac{1}{(-1)^4}+\frac{1}{(2)^4}+\frac{1}{(2)^4}=1+1+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{16}=2+\tfrac{1}{8}=\tfrac{17}{8},$$

etc.

Pasemos á otro asunto. El método de las *sustituciones sucesivas*, que hemos esplicado (§§ 378 y 379) exige que se sustituyan en la propuesta valores tales, que sus diferencias sean menores que la menor diferencia de las raices; por lo que conviene calcular una ecuacion, cuyas raices sean todas las diferencias posibles entre las raices de la ecuacion dada; y despues se buscará el menor límite de las raices. Por lo cual nos propondrémos la resolucion del siguiente problema:

§ 390 *Dada una ecuacion cualquiera, formar otra ecuacion, cuyas raices sean todas las diferencias posibles entre las de la propuesta.*

§ Sea la ecnacion $x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\ldots\ldots+L=0$ (m).

§ Si en vez de x se escribe $x+u$, u espresará todas las diferencias posibles entre las raices de (m), y se tendrá, ordenando con relacion á las potencias sucesivas de u, una ecuacion en u del mismo grado; la cual, principiando por los últimos términos, será de la forma

$$Z+Yu+Xu^2+Vu^3+\ldots+u^n=0\ldots\ldots(n).$$

§ Los coeficientes Z, Y, X, etc. siendo dados por las ecuaciones

$Z=x^n-Ax^{n-1}+Bx^{n-2}-Cx^{n-3}+\ldots\ldots-Kx+L,$

$Y=nx^{n-1}-(n-1)Ax^{n-2}+(n-2)Bx^{n-3}$ etc.,

$X=\tfrac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)Ax^{n-3}+$ etc.

etc.

§ Las raices de la ecuacion (m) siendo a, b, c, etc., las de (n) serán

$u=a-x$, $u=b-x$, $u=c-x$, etc.; y haciendo 1.° $x=a$, se tendrá

$u=a-a$, $u=b-a$, $u=c-a$, etc.; y 2.° haciendo $x=b$, se tendrá

$u=a-b$, $u=b-b$, $u=c-b$, etc. y asi sucesivamente.

§ Cada una de estas sustituciones, reduce la ecuacion en u al grado $n-1$; lo que debe verificarse, pues que cada vez que se sustituya a, ó b, ó c, etc. por x en el primer miembro de la (ec. m) se reduce á *cero*; y como Z representa dicho

primer miembro, se tendrá $Z=0$; en cuyo caso se puede dividir la (ec. n) por u; pero la ecuacion buscáda debe tener por raices todas estas diferencias

$$b-a,\quad c-a,\quad \text{etc.},\quad a-b,\quad c-b\quad \text{etc.}$$

es decir, que debe ser el resultado de la eliminacion de x entre las ecuaciones (m) y (n). En efecto, la teoría de la eliminacion nos da á conocer que esta ecuacion final tendrá todos los valores de u, que sutituidos en (n), den una ecuacion en x, que tenga alménos una raiz comun con (m); pero si se supone $x=a$ en (m)y(n), despues $u=$ á una cualquiera de las diferencias $b-a$, $c-a$ etc., las dos ecuaciones (m) y (n) quedarán necesariamente satisfechas; luego estas diferencias entre la raiz y cada una de las otras, serán otras tantas raices de la ecuacion final. Del mismo modo se probaria que tendrá tambien por raices todas las diferencias entre la raiz b y cada una de las otras, y así sucesivamente. Esta ecuacion final será siempre del grado $n(n-1)$, porque el número de las raices

$$b-a,\ c-a,\ d-a,\ \text{etc.},\ a-b,\ c-b,\ d-b,\ \text{etc.},\ a-c,\ b-c,\ d-c,\ \text{etc.}$$

es el mismo que el de las permutaciones que se pueden hacer con n letras tomadas de dos en dos. Así, esta ecuacion será de grado par; ademas, estas diferencias serán iguales de dos en dos y de signos contrarios, porque $b-a=-(a-b)$, etc.; de donde resulta que la ecuacion final no debe contener sinó potencias pares de la incógnita u, porque mudando en ella $+u$ en $-u$, las raices positivas se convertirán en negativas, y reciprocamente. Luego las raices de la trasformada serán las mismas en signo y en cantidad; por lo que el 1.^{er} miembro no se mudará por esta sustitucion. Luego la ecuacion de las diferencias de las raices será de esta forma.

$$u^{2n'}-A'u^{2n'-2}+B'u^{2n'-4}-C'u^{2n'-6}+\text{etc.}\ldots\ldots+V'=0 \quad (o),$$

y por la sustitucion de $z=u^2$ (1), se convertirá en la siguiente

$$z^{n'}-A'z^{n'-1}+B'z^{n'-2}-C'z^{n'-3}+\text{etc.}\ldots\ldots+V'=0 \quad (p);$$

y como los factores de (o) son $u-(a-b)$, $u-(b-a)$, $u-(a-c)$, $u-(c-a)$, etc. los de (p) serán $z-(a-b)^2$, $z-(a-c)^2$, etc.

y por lo mismo (p) será la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raices de la propuesta.

§ La ecuacion (p) será siempre la misma, ya se aumente ó disminuya en una misma cantidad á una de las raices de la propuesta; de manera, que si esta última contiene el término de x^{n-1}, se le podrá hacer desaparecer, y despues buscar la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de la trasformada, que será aun la misma que (p); pero su formacion será un poco mas fácil.

§ 391 Conociendo de este modo la ecuacion de los cuadrados de las diferencias de las raices, para hallar una cantidad menor que la menor de sus raices, se hará

$$z=\frac{1}{t}\ldots\ldots(2),$$

y sustituyendo en (p) esta ecuacion, dará, despues de hechas las reducciones,

$$1-A't+B't^2-C't^3+D't^4\ldots\ldots+V't^{n'}=0,$$

y dividiendo por V' y ordenando al contrario, se tendrá

$$t^{n'}-A''t^{n'-1}+B''t^{n'-2}-C''t^{n'-3}+\text{etc.}\ldots\ldots=0 \quad (q).$$

§ Sea k un número mayor que la mayor raiz positiva de (q), y se tendrá que $\frac{1}{k}$ será despues de la sustitucion (2), un número menor que la menor raiz posi-

tiva z, y $\frac{1}{\sqrt{k}}$ será, despues de la sustitucion (l), un número menor que la menor diferencia entre las raices reales de la ecuacion propuesta. Luego si el número $\sqrt{k} < 1$, de donde $\frac{1}{\sqrt{k}} > 1$, estarémos seguros de que la propuesta no tiene raices reales, cuyas diferencias sean menores que la unidad; por lo que en este caso se podrá tomar la unidad por la diferencia entre las sustituciones sucesivas que se deben hacer entre los límites hallados. Ahora, si $\sqrt{k} > 1$, de donde $\frac{1}{\sqrt{k}} < 1$, entónces puede suceder que en la ecuacion (m) haya raices, cuyas diferencias sean menores que la unidad; pero como la menor de estas diferencias será siempre mayor que $\frac{1}{\sqrt{k}}$, se podrá tomar este número ó un número menor por la diferencia entre los valores que se han de sustituir. En general, sea h el número entero inmediatamente mayor que $\sqrt{k}$ si $\sqrt{k}$ no es número entero, y se tendrá $\frac{1}{h} < \frac{1}{\sqrt{k}}$.

§ Siendo conocida esta diferencia $\frac{1}{h}$ de la progresion de los números que se deben sustituir, se sustituirán sucesivamente en vez de x los números

$$0, \frac{1}{h}, \frac{2}{h}, \frac{3}{h}, \ldots\ldots \frac{n}{h},$$

principiando (376) por el número inmediatamente menor que $\frac{1}{H+1}$, y continuando hasta el límite superior $H+1$. Los resultados de estas sustituciones formarán una serie de números, en la cual habrá necesariamente tantas variaciones de signos (§ 378) como raices reales positivas en la propuesta; y ademas cada una de estas raices vendrá á estar entre los dos números que hayan dado resultados de signos contrarios; por consiguiente el menor de los dos se diferenciará de la raiz en ménos que $\frac{1}{h}$. Luego de este modo se conocerá el número de las raices reales positivas de la propuesta, y el valor aproximado de cada una de ellas con una diferencia menor que $\frac{1}{h}$.

§ 392 Harémos aplicacion de lo que precede á la investigacion de las raíces de la ecuación $x^3 - 7x + 7 = 0$, que nosotros tenemos resuelta por nuestro método (§ 197 x) del primer tomo de nuestro Compendio de Matemáticas, y que se suele llamar *ecuacion de Lagrange*.

§ Lo primero, que debemos hacer, es sustituir $x+u$ en vez de x, lo que da

$$x^3+3x^2u+3xu^2+u^3-7x-7u+7=0;$$

pero como $x^3-7x+7=0$ por el supuesto de ser la ecuacion dada, podrémos suprimir estos tres términos en la precedente ecuacion; y dividiendo lo que queda por u, se tendrá $3x^2+3ux+u^2-7=0$ (γ); despues debemos eliminar x entre estas dos ecuaciones, para tener la ecuacion final en u, que será la ecuacion de las diferencias de las raices de la propuesta. Para lo cual se dividirá la 1.ª ecuacion por la 2.ª, esta por la 1.ª resta, y así sucesivamente, hasta que se obtenga una resta independiente de x, que se igualará con cero.

Esta resta es $u^6-42u^4+441u^2-49=0$ (*).

§ La ecuacion de los cuadrados de las diferencias resulta de la precedente, suponiendo $z=u^2$, luego será $z^3-42z^2+441z-49=0$; y suponiendo como en la teoría general $z=\frac{1}{t}$, se formará la ecuacion $t^3-9t^2+\frac{42}{49}t-\frac{1}{49}=0$, que da 10 para el límite de las mayores raices positivas; de manera que $\frac{1}{\sqrt{10}}$ es un número menor que la menor diferencia entre las raices de la propuesta.

§ Hay un método de Newton para encontrar un límite mas aproximado, el cual consiste en sustituir en vez de la incógnita, otra acompañada de una cantidad que se debe determinar por la condicion de que todos los coeficientes de la trasforma-

---

(*) *Algunas personas me han manifestado que no les salía este cálculo, por lo engorroso de las operaciones; y con el fin de no omitir nada que pueda conducir á la claridad, vamos á poner aquí algunos detalles.*

En primer lugar, para poder efectuar la division de x^3-7x+7 *por* $3x^2+3ux+u^2-7$, *debemos multiplicar, en virtud de lo espuesto (I Ap. 2.º) la que hace de dividendo por* 3, *para que su primer término pueda dividirse por* $3x^2$; *con lo que la cantidad, que ha de servir de primer dividendo, será* $3x^3-21x+21$; *la cual dividida por* $3x^2+3ux+u^2-7$, *da por cociente* $x-u$; *y deja por resta* $x(2u^2-14)+u^3-7u+21$.

Ahora se debe dividir por esta resta la cantidad, que nos acaba de servir de divisor; pero como su primer término $3x^2$ *no es divisible por* $x(2u^2-14)$, *deberémos multiplicar toda la cantidad, que nos ha de servir ahora de dividendo, por* $2u^2-14$; *y tendrémos que el dividendo ahora será*

$$3x^2(2u^2-14)+3ux(2u^2-14)+(u^2-7)(2u^2-14);$$

y dividiéndola por $x(2u^2-14)+u^3-7u+21$, *se obtiene* $3x$ *por primer cociente, y queda* $x(3u^3-21u-63)+(u^2-7)(2u^2-14)$ *por resta. Mas como el primer término de esta resta no se puede dividir por el primer término de le cantidad que hace de divisor, que es* $x(2u^2-14)$, *deberémos multiplicar toda esta resta por* $2u^2-14$; *y así, la cantidad, que nos ha de servir de dividendo parcial, es* $x(3u^3-21u-63)(2u^2-14)+(u^2-7)(2u^2-14)^2$; *practicando la division, obtenemos por cociente* $3u^3-21u-63$; *y queda por resta*

$$(u^2-7)(2u^2-14)^2-(u^3-7u+21)(3u^3-21u-63);$$

la cual igualada con cero, y practicando las operaciones y simplificaciones, se convierte en $u^6-42u^4+441u^2-49=0$; *que es la del testo.*

da sean positivos; y así para encontrar dicho límite por medio de él, sustituirémos $t+k$ en vez de t, y se tratará de hallar un número k que dé para los coeficientes $3k-9$, $3k^2-18k+\frac{42}{9}$, $k^3-9k^2+\frac{42}{9}k-\frac{1}{9}$ de la ecuacion resultante, valores positivos; condiciones á que satisface $k=9$; luego $\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$ es el límite buscado, ó la diferencia entre las sustituciones sucesivas. Falta ahora hallar los límites que comprenden las raices positivas de la propuesta; para este efecto, se tiene (376) $\sqrt{H+1}=\sqrt{7}+1=3,6$ etc.

porque se hallan dos términos positivos x^3+0x^2 ántes del 1.^{er} término negativo $-7x$; luego se podrá tomar 4 por el límite superior. Para tener el límite inferior, se hará en la propuesta $x=\frac{1}{t}$, que da $t^3-t^2+\frac{1}{7}=0$; de donde se deduce

$$\frac{1}{H'+1}=\frac{1}{2}<x;$$

de manera, que los límites entre que es necesario sustituir, son $\frac{1}{2}$ y 4, y la diferencia de los números que se deben sustituir es $\frac{1}{3}$. Para evitar los quebrados se hará en la propuesta $x=\frac{x'}{3}$, lo que la convierte en la siguiente $x'^3-63x'+189=0$;

entónces en vez de los límites $\frac{1}{2}$ y 4, se tomarán $\frac{3}{2}$ ó 1 y 12, despues la unidad por la diferencia de los números que se deben sustituir, y se formará la tabla siguiente $x'=1$ da por resultado $+127$; $x'=2$....$+71$, $x'=3$....$+27$,

$x'=4$.....$+1$, $x'=5$.....-1, $x'=6$.....$+27$, $x'=7$.....$+91$,

$x'=8$, haciendo al 1.^{er} término mayor que el término negativo, no es necesario pasar mas adelante, pues ya no habrá ninguna variacion de signo; por lo que se deducirá de esta tabla $x'>4$ y $x'<5$;

de donde $x>\frac{4}{3}$ y $<\frac{5}{3}$; $x'>5$ y $x'<6$; de donde $x>\frac{5}{3}$ y $<\frac{6}{3}$.

§ Para proceder á la investigacion de las raices negativas, se mudarán los signos de las potencias ímpares de x en la propuesta, lo que dará

$$-x^3+7x+7=0, \quad \text{ó} \quad x^3-7x-7=0,$$

ecuacion, cuyas raices estarán aun entre $\frac{1}{2}$ y 4, ó bien entre 1 y 12 para la trasformada $x'^3-63x'-189=0$, cuyas raices tienen con las de la precedente la relacion $x=\frac{1}{3}x'$, y la diferencia de los números que se deben sustituir será la unidad; mas para reducir el número de las sustituciones, se supondrá $x'=12$; de donde saldrá $+783$; $x'=11$....$+449$, $x'=10$....$+181$, $x'=9$....-27, de donde se concluye $x'>9$ y $x'<10$, de donde $x>3$ y $x<3\frac{1}{3}$; luego existe una raiz negativa comprendida entre -3 y $-(3+\frac{1}{3})$.

Y como las raices de la ecuacion propuesta (γ) son (§ 197x, 197y, 197z del tomo 1.º de mi Compendio de Matemáticas) 1,6920215, 1,3568953 y $-3,0481175$, resulta que la segunda de estas se halla efectivamente entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$; la primera de estas se halla entre $\frac{5}{3}$ y $\frac{6}{2}$; y la tercerá de estas se halla entre -3 y $-(3+\frac{1}{3})$. Luego todo queda comprobado.

§ 393. *Toda funcion algebráica racional é invariable de las raices de una ecuacion, se puede siempre espresar de una manera racional por medio de los coeficientes de esta ecuacion.*

§ Sean α, $\mathcal{C}$, γ, δ, etc. las raices de una ecuacion: y supongamos que los términos de la funcion propuesta sean de la forma α^n, $\mathcal{C}^p$, γ^q, etc. Si se representa por $T\alpha^n$ la suma de las potencias del grado n de las raices, y por $T\alpha^p$ la de las potencias del grado p, ó en otros términos, si se supone

$$\alpha^n+\mathcal{C}^n+\gamma^n+\delta^n+\text{etc.}=T\alpha^n,\quad \alpha^p+\mathcal{C}^p+\gamma^p+\delta^p+\text{etc.}=T\alpha^p$$

y se multiplica $T\alpha^p$ por $T\alpha^n$, el producto contendrá dos clases de términos: los unos de la forma $\alpha^n\mathcal{C}^p$ que señalarémos por $T\alpha^n\mathcal{C}^p$, y los otros tales como α^{n+p}, que señalarémos por $T\alpha^{n+p}$;

luego se tendrá $T\alpha^n\times T\alpha^p=T\alpha^n\mathcal{C}^p+T\alpha^{n+p}$,

de donde se deduce $T\alpha^n\mathcal{C}^p=T\alpha^n\times T\alpha^p-T\alpha^{n+p}$....(1).

§ Asi, la suma de los términos de la forma $\alpha^n\mathcal{C}^p$ será dada por medio de la de las potencias n,p y $n+p$ de las raices de la propuesta, y por consiguiente (389) se podrá espresar en coeficientes de esta. Si se multiplican los dos miembros de la última ecuacion de arriba por la suma de las potencias q de las raices, ó por $T\alpha^q$, se tendrá $T\alpha^qT\alpha^n\mathcal{C}^p=T\alpha^n\times T\alpha^p\times T\alpha^q-T\alpha^q\times T\alpha^{n+p}$.

§ Efectuando la multiplicacion indicada en el primer miembro, se hallarán en el producto tres clases distintas de términos: una compréndera los términos de la forma $\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p$, otra estos $\alpha^n\mathcal{C}^{p+q}$, y la 3.ª todos los términos tales como $\alpha^a\mathcal{C}^p\gamma^q$; luego si se señala la coleccion de los primeros por $T\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p$, la de los segundos por $T\alpha^n\mathcal{C}^{p+q}$, y en fin la totalidad de los otros por $T\alpha^n\mathcal{C}^{p,q}$, se tendrá $T\alpha^n\mathcal{C}^p\gamma^q+T\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p+T\alpha^n\mathcal{C}^{p+q}=T\alpha^n\times T\alpha^p\times T\alpha^q-T\alpha^q\times T\alpha^{n+p}$,

de donde se deduce

$$T\alpha^n\mathcal{C}^p\gamma^q=T\alpha^n\times T\alpha^p\times T\alpha^q-T\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p-T\alpha^n\mathcal{C}^{p+q}-T\alpha^q\times T\alpha^{n+p};$$

pero $T\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p$ y $T\alpha^n\mathcal{C}^{p+q}$ siendo funciones formadas del producto de dos letras, se las puede hacer depender de sumas de las potencias de las raices, mudando primero en la fórmula (1) n en $n+q$, lo que da

$$T\alpha^{n+q}\mathcal{C}^p=T\alpha^p\times T\alpha^{n+q}-T\alpha^{n+p+q},$$

despues n en $p+q$ y p en n, lo que da

$$T\alpha^{p+q}\mathcal{C}^n=T\alpha^n\times T\alpha^{p+q}-T\alpha^{n+p+q},$$

y sustituyendo en la espresion $T\alpha^n\mathcal{C}^p\gamma^q$, se tendrá $T\alpha^n\mathcal{C}^p\gamma^q=$.....

$$T\alpha^n\times T\alpha^p\times T\alpha^q-T\alpha^p\times T\alpha^{n+q}-T\alpha^n\times T\alpha^{p+q}-T\alpha^q\times T\alpha^{n+p}+2T\alpha^{n+p+q};$$

en cuyo segundo miembro no entran mas que sumas de las potencias de las raices, que se pueden espresar en coeficientes de la ecuacion dada. Continuando de este modo, se llegaría á hacer depender de sumas de las potencias de las raices, una funcion simétrica compuesta de una serie de términos tales como $\alpha^n\mathcal{C}^p\gamma^q\delta^r$ etc.

§ 394 Pasemos ya á manifestar, que *el grado de la ecuacion final, que resulta de la eliminacion de todas las incógnitas, ménos una, entre un número de ecuaciones igual al de las incógnitas, no puede ser mayor que el producto de tos esponentes de estas ecuaciones; y es justamente igual con este producto cuando las ecuaciones dadas son las mas generales de sus grados.*

§ Principiarémos por el caso mas sencillo de que sean dos las ecuaciones y dos las incógnitas; suponiendo que se tengan las dos ecuaciones:

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+.....Tx+V=0.... \text{ (M)},$$
$$x^n+P'x^{n-1}+Q'x^{n-2}+.....T'x+V'=0.... \text{ (N)},$$

en las cuales los coeficienses P, Q.....T, V, P', Q'.....T' y V' son cantidades en las cuales solo entra z. Concibamos que se haya resuelto la ecuacion (M) con relacion á x, y que se hayan encontrado las raices $x=\alpha$, $x=\mathcal{C}$, $x=\gamma$, etc.

siendo α, $\mathcal{C}$, γ, etc. cantidades que se componen de z; y se verificará que haciendo $x=\alpha$ en (M), esta ecuacion quedará satisfecha, cualquier valor que se suponga á z; pero como las mismas raices deben satisfacer al mismo tiempo á la ecuacion (N), esta condicion limita el número de los valores de z, y se deberá tener $\alpha^n+P'\alpha^{n-1}+Q'\alpha^{n-2}+.....T'\alpha+V'=0$... (1)
ecuacion que no contendrá sinó á z, y cuyas raices combinadas con $x=\alpha$ satisfarán á un mismo tiempo á las ecuaciones (M) y (N); luego la ecuacion final en z debe tener entre sus raices todas las de la ecuacion (1). Del mismo modo se probaría que las raices de las ecuaciones

$$\mathcal{C}^n+P'\mathcal{C}^{n-1}+Q'\mathcal{C}^{n-2}+...T'\mathcal{C}+V'=0 \text{ ... (2)}$$
$$\gamma^n+P'\gamma^{n-1}+Q'\gamma^{n-2}+....T'\gamma+V'=0 \text{ ... (3)}$$

combinadas con los valores $x=\mathcal{C}$, $x=\gamma$, etc. deben satisfacer á las ecuaciones (M) y (N), y que los valores de z deducidos de (2) y (3) son raices de la ecuacion final; luego se obtendría esta, si fuesen conocidas las cantidades α, $\mathcal{C}$, γ, etc. que contienen á z, multiplicando entre sí las ecuaciones (1), (2), (3), etc. é igualando el producto á cero. Ahora, en el producto de las ecuaciones (1), (2), (3), etc., el resultado de la multiplicacion de los términos de la primera línea vertical, será $(\alpha\mathcal{C}\gamma \text{ etc.})^n=V^n$;
pero el mayor esponente de z en V, no puede esceder á m, de manera que V^n no puede encerrar á z con un esponente mayor que mn. Pasemos al producto de los segundos términos $P'^m(\alpha\mathcal{C}\gamma \text{ etc.})^{n-1}=P'^mV^{n-1}$;
P' siendo de la forma $a+bz$, P'^m contiene á lo mas á z^m; por otra parte V^{n-1} no puede ser sinó de la dimension $m(n-1)=mn-m$ en z; de manera, que P'^mV^{n-1} comprenderá lo mas á z^{mn}.

§ Del mismo modo se probaría que en el producto de los terceros términos ó en $Q'^m(\alpha\mathcal{C}\gamma \text{etc.})^{n-2}=Q'^mV^{n-2}$, la incógnita z no puede estar afecta de un esponente mas elevado que mn, y así de los productos de los otros términos colocados verticalmente.

§ 395 Ahora falta demostrar, que tomando un término cualquiera en cada una de las ecuaciones (1), (2), (3), etc. el producto no puede contener á z con un esponente mas elevado que mn. Sea r el esponente de α en el término arbitrario tomado en la ecuacion (1) y K el coeficiente; r' el esponente de $\mathcal{C}$ en uno de los términos de (2) y K' el coeficiente; r'' el de γ en un término cualquiera de (3), y K'' su coeficiente, y asi sucesivamente; de manera que se tenga el producto $K\alpha^rK'\mathcal{C}^{r'}K''\gamma^{r''}$ etc.

§ Desde luego se observará que cada una de las sumas formadas de r y del esponente de z en K, de r' y del esponente de z en K', de r'' y del esponente de z en K'', y así sucesivamente, no puede esceder á n; de donde se puede inferir, observando por otra parte que las ecuaciones (1), (2), (3), etc. son m en número, que el esponente de z en el producto de los coeficientes K, K', K'', etc. mas el número $r+r'+r''+$etc. forman una suma que no puede esceder á mn. Luego quedará probada la proposicion, si se demuestra que la suma de los términos de la forma $\alpha^r\mathcal{C}^{r'}\gamma^{r''}$ etc. que en el producto de las ecuaciones (1), (2), (3), etc. tienen el mismo coeficiente K, K', K'' etc. no contiene á z sinó con la dimension $r+r'+r''+$ etc. Haciendo uso del teorema sobre las funciones invariables, acabado de demostrar, se reducirá, por último la cuestion á probar que $T\alpha^{r+r'+r''+\text{etc.}}$ que entra en la espresion de

$T\alpha^r\epsilon^{r'}\gamma^{r''}$ etc. es de la dimension $r+r'+r''+$etc. en z; de lo que nos convencerémos, observando qne la suma de las potencias $r+r'+r''+$ etc. de las raices de una ecuacion es dada (389) por medio de $r+r'+r''+$ etc. coeficientes de esta ecuacion: y que así esta suma comprenderá un coeficiente en que la incógnita z estará lo mas elevada á la potencia $r+r'+r''+$ etc.

§ Si las ecuaciones dadas no fuesen las mas generales entre las incógnitas dadas, podría suceder que el grado fuese algo inferior.

§ Ahora, para generalizar esta proposicion, supongamos que se tengan las ecuaciones (a), (b), (c), (d), etc. entre igual número de incógnitas x, y, z, u etc. y supongamos que estas ecuaciones sean las mas generales de su grado; esto es, (a) la ecuacion mas general del grado a; (b) la ecuacion mas general del grado b, etc. entre las incógnitas dichas, y tendrémos que si en las primeras consideramos solo por incógnitas á las $x, y,$ y eliminamos la y por medio de ellas, nos resultará una ecuacion en $x, z, u,$ la cual con relacion á x será del grado ab. Eliminando la misma y entre la primera y tercera, entre la primera y cuarta etc. se obtendrán ecuaciones en x de los grados ac, ad etc.

§ Ahora, concibiendo que entre las ecuaciones (ab) y (c) se elímine la z, considerando solo como variables á las $x, z,$ se tendrá una ecuacion en x que será del grado abc. Y concibiendo eliminada la u entre esta ecuacion y la (d), considerando solo como incógnitas á las $x, u,$ se tendrá una ecuacion en x del grado $abcd$; y continuando del mismo modo llegaríamos á obtener una ecuacion que solo contuviese á x, y cuyo grado fuese $abcd$ etc.

§ 396 Pasemos ya á considerar las raices imaginarias de las ecuaciones: y demostrarémos que *una ecuacion algebráica de un grado cualquiera no puede tener sinó raices reales, ó imaginarias de ta forma* $a+b\sqrt{-1}$, *siendo* a *y* b *cantidades reales.*

§ Como toda ecuacion de grado ímpar tiene lo ménos una raiz real (377), será divisible por un factor real del primer grado. Luego basta probar que toda ecuacion de grado par se puede descomponer en factores del segundo grado de la forma x^2+px+q; siendo p y q cantidades reales.

§ Para demostrar esta proposicion general, necesitamos establecer algunos teoremas preliminares; por lo que manifestarémos ánte todas cosas, que *si una ecuacion algebráica tiene por raiz una cantidad de la forma* $a+b\sqrt{-1}$, *tendrá necesariamente otra de la forma* $a-b\sqrt{-1}$.

§ Sea la ecuacion $x^m-Ax^{m-1}+Bx^{m-2}-Cx^{m-3}+..Kx-L=0$ (M); y siendo por el supuesto $a+b\sqrt{-1}$ una de las raices de esta ecuacion, el primer miembro se reducirá á cero, escribiendo $a+b\sqrt{-1}$ en vez de x en la ecuacion anterior; luego se tendrá

$$(a+b\sqrt{-1})^m-A(a+b\sqrt{-1})^{m-1}+B(a+b\sqrt{-1})^{m-2}..-L=0 \text{ (N)},$$

§ Efectuando las operaciones indicadas, el resultado se compondrá de dos clases de términos, los unos reales suministrados por el primer término de cada binomio y por las potencias pares de $+b\sqrt{-1}$; y los otros imaginarios, que provienen de las potencias ímpares de $+b\sqrt{-1}$; de manera que el primer

miembro de la ecuacion (N) será de la forma $P+Q\sqrt{-1}$, representándo por P la suma de los términos reales, y por Q la suma de los coeficientes tambien reales de $\sqrt{-1}$; luego se tendrá $P+Q\sqrt{-1}=0$, de donde $P=0$, y $Q=0$; pues el primer término no se puede destruir con el segundo, porque una espresion imaginaria no puede ser igual con una real. Luego todo está reducido á probar que se tendrá tambien

$$(a-b\sqrt{-1})^m-A(a-b\sqrt{-1})^{m-1}+B(a-b\sqrt{-1})^{m-2}-\ldots-L=0 \quad (O).$$

§ Pero este resultado se compondrá como el precedente de términos reales y de términos imaginarios; las potencias pares de $-b\sqrt{-1}$, siendo las mismas que las de $+b\sqrt{-1}$, y los primeros términos de los binomios siendo tambien los mismos en (N) y en (O), se tendrá en ambos P para la suma de los términos reales. Las potencias ímpares de $-b\sqrt{-1}$ no diferenciándose sinó en el signo de las de $+b\sqrt{-1}$, la suma de los términos imaginarios será $-Q\sqrt{-1}$, de manera, que el resultado de la segunda sustitucion será $P-Q\sqrt{-1}$; y como hemos hallado $P=0$, $Q=0$, se tendrá $P-Q\sqrt{-1}=0$; luego, sustituyendo la espresion $a-b\sqrt{-1}$ en vez de x en la propuesta, reduce tambien á cero el primer miembro, y por lo mismo queda demostrada la proposicion.

§ Toda espresion algebráica que contenga á $a\pm b\sqrt{-1}$, se puede reducir á la forma $P\pm Q\sqrt{-1}$, siendo P y Q cantidades reales.

1.º Se tiene

$$a\pm b\sqrt{-1}+a'\pm b'\sqrt{-1}+\text{etc.}=a+a'\text{etc.}\pm(b+b'+\text{etc.})\sqrt{-1},$$

que da $P=a+a'+\text{etc.}$, $Q=b+b'+\text{etc.}$

2.º $(a\pm b\sqrt{-1})\times(a'\pm b'\sqrt{-1})=(aa'-bb')\pm(a'b+ab')\sqrt{-1}$;

que da $P=aa'-bb'$, $Q=a'b+ab'$.

3.º $$\frac{a\pm b\sqrt{-1}}{a'\pm b'\sqrt{-1}}=\frac{(a\pm b\sqrt{-1})(a'\mp b'\sqrt{-1})}{(a'\pm b'\sqrt{-1})(a'\mp b'\sqrt{-1})}=\frac{(aa'+bb')\pm(a'b-ab')\sqrt{-1}}{a'^2+b'^2}$$

que da $P=\dfrac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}$, $Q=\dfrac{a'b-ab'}{a'^2+b'^2}$; que $(a\pm b\sqrt{-1})^m=P\pm Q\sqrt{-1}$,

lo acabamos de demostrar; y se puede aun demostrar por las simples operaciones del Algebra elemental, que se verifica la proposicion, cuando la espresion está afecta de un signo radical par de la forma 2^m. Porque si consideramos la espresion $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$, y hacemos

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u,\ldots (1),$$

tendrémos, elevando al cuadrado, $2a+2\sqrt{a^2+b^2}=u^2$, cantidad necesariamente positiva; y por lo mismo u será una cantidad real; elevando al cuadrado la di-

ferencia $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=t$..(2), será $2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2$, y t^2 será por precision una cantidad negativa, de manera que suponiendo $t^2=-V^2$, sera $t=\pm V\sqrt{-1}$, siendo V una cantidad real; sumando las ecuaciones (1) y (2), se tendrá $2\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=u\pm V\sqrt{-1}$, que da

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(u\pm V\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1};$$

y restando la (2) de la (1), se tendrá $2\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u\mp V\sqrt{-1}$,

de donde $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(u\mp V\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}$.

§ Considerémos aun la espresion

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=z...(3),$$

y se tendrá elevando al cuadrado

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+2\sqrt[4]{a^2+b^2}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u+2\sqrt[4]{a^2+b^2}=z^2,$$

espresion esencialmente positiva: luego z será una cantidad real; y elevando al cuadrado los dos miembros de $\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=t$ (4), se tendrá $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-2\sqrt[4]{a^2+b^2}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u-2\sqrt[4]{a^2+b^2}=t^2$, cantidad esencialmente negativa; porque se ha hecho

$$u=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}},$$

de manera, que $u^2=2a+2\sqrt{a^2+b^2}<4\sqrt{a^2+b^2}$; y por lo mismo

$$u<2\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

§ Sea pues $t^2=-X^2$, y resultará $t=\pm X\sqrt{-1}$, siendo X una cantidad real; y combinando las ecuaciones (3) y (4) por adicion y sustraccion, resultará

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(z\pm X\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1},$$

donde P y Q espresan cantidades reales.

§ Entendido esto, pasarémos á la demostracion de la proposicion enunciada; para lo cúal supongamos que se tenga la ecuacion

$$x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+..Kx+L=0,$$

teniendo n la forma 2μ y representando μ un número ímpar, de manera que n solo será divisible una vez por 2. Aunque las raices de esta ecuacion son desconocidas, se podrán sin embargo espresar por medio de los coeficientes A, B etc. K y L los de otra ecuacion (393) que tuviese por raices todas las diferentes sumas de las raices a, b, c, etc. tomadas de dos en dos.

§ Una ecuacion formada de este modo será del grado $\frac{1}{2}n(n-1)$ número ímpar, pues que por el supuesto n es divisible por 2 una sola vez, luego tendrá una raiz real por lo ménos. Pero, la ecuacion que tuviese por raices todos los productos diferentes de las raices de la propuesta multiplicadas de dos en dos, se-

ría tambien del grado $\frac{1}{2}n(n-1)$; luego hay dos raices de la propuesta cuya suma es real, y dos cuyo producto es real. Más para que la propuesta sea divisible por un factor real, tal como x^2+px+q, es necesario ademas que las dos raices, que dan una suma real, den tambien un producto real; luego solo debemos probar que la propuesta tendrá dos raices que cumplirán con esta condicion. Para lo cual considerémos la ecuacion, cuyas raices sean una funcion de la propuesta, tal como $a+b+kab$ siendo k un coeficiente cualquiera; esta ecuacion será aun del grado $\frac{1}{2}n(n-1)$, y tendrá al ménos una raiz real; y como á k se le pueden señalar los valores que se quieran, se podrá formar una infinidad de ecuaciones de esta especie, de las que cada una tendrá al ménos una raiz real; por lo que podrémos suponer que $a+b+kab=\alpha$; $a+b+k'ab=\mathfrak{G}$ siendo α y $\mathfrak{G}$ cantidades reales; de donde se deduce que $ab=\frac{\alpha-\mathfrak{G}}{k-k'}$, $a+b=\frac{k'\alpha-k\mathfrak{G}}{k'-k}$, *luego la ecuacion del grado* 2μ, *siendo* μ *un número ímpar cualquiera, admite un factor real de segundo grado.*

§ 397 Si la propuesta es del grado 4μ, siendo μ un número ímpar cualquiera, la ecuacion de que dependerá la espresion de las raices $a+b+kab$ será del grado 2ν, siendo ν un número ímpar tambien; esta ecuacion tendrá, por lo que se acaba de demostrar, un factor real de la forma x^2+px+q (1), que por su resolucion dará una de las combinaciones $a+b+kab$, $a+c+kac$ etc., etc,

Luego entre todas estas combinaciones habrá una de la forma $A+B\sqrt{-1}$ que espresa la raiz de (1); y dando á k los valores sucesivos que se quieran, cada una de las ecuaciones resultantes admitirá un factor real de segundo grado, que dará una raiz real de la misma forma; luego se hallarán necesariamente dos combinaciones entre las mismas letras

$$a+b+kab=A+B\sqrt{-1},\quad a+b+k'ab=A'+B'\sqrt{-1},$$

de donde resultará $a+b=M+N\sqrt{-1}$, $ab=M'+N'\sqrt{-1}$, y por lo mismo la propuesta tendrá un factor del segundo grado de la forma

$$x^2-(M+N\sqrt{-1})x+M'+N'\sqrt{-1},$$

de donde $x=\frac{1}{2}(M+N\sqrt{-1})\pm\sqrt{\frac{1}{4}(M+N\sqrt{-1})^2-(M'+N'\sqrt{-1})}$, que se puede reducir á la forma $x=P+Q\sqrt{-1}$; pero una raiz de esta especie tiene por lo demostrado (396) otra opuesta tal como $x=P-Q\sqrt{-1}$, y el producto de los factores correspondientes es x^2+px+q: siendo p y q cantidades reales.

Luego una ecuacion del grado 4μ, *siendo* μ *un número ímpar, admite un factor real del segundo órden.*

§ 398 Del mismo modo podríamos demostrar, que esta propiedad se verificaba siendo n tres, cuatro etc. veces divisible por 2; luego podrémos establecer: 1.° *Que una ecuacion de grado par se puede descomponer en factores reales de* 2.° *grado; y* 2.° *que una ecuacion no puede tener sinó raices, reales ó imaginarias de la forma de las de* 2.° *grado.*

De donde se infiere, que *toda espresion en que entre* $a+b\sqrt{-1}$ *es de la*

misma forma; porque, igualando la cantidad de que se trata con una incógnita, y haciendo desaparecer los radicales que contenga por la elevacion á potencias sucesivas, se tendrá para determinar la incógnita una ecuacion de grado par, cuyas raices imaginarias tendrán la forma $P \pm Q\sqrt{-1}$.

§ 399 Pasemos ya á demostrar *la regla de los signos*, que se debe á Descartes, y que enunciarémos de este modo.

§ *Una ecuacion completa, de cualquier grado que sea, ordenada por las potencias decrecientes de la incógnita, no puede tener mas raices reales positivas que variaciones de signos; ni mas raices reales negativas que permanencias ó repeticiones seguidas de un mismo signo.*

§ Esta proposicion quedará demostrada, si manifestamos que la multiplicacion del primer miembro por un factor $x+a$, correspondiente á una raiz negativa, no introduce en el producto una variacion mas; y que la multiplicacion por el factor $x-a$, correspondiente á una raiz positiva no suministra una permanencia mas; porque conteniendo el producto un término mas que el multiplicando, contendrá en el primer caso al ménos una permanencia mas, y en el segundo al ménos una variacion mas.

Para demostrarlo, supongámos que la ecuacion propuesta sea

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots\ldots Kx + L = 0,$$

el producto por $x+a$ será

$$\left.\begin{array}{l} x^{n+1} + Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots Kx^2 + Lx \\ \quad + ax^n + Aax^{n-1} + \ldots aJx^2 + aKx + aL \end{array}\right\} = 0.$$

§ El coeficiente de cada término del producto es igual al del término que ocupa el mismo lugar en la propuesta, aumentado en el coeficiente del término precedente multiplicado por a. Luego, para encontrar los signos del producto, hasta escribir los signos del multiplicando, los unos á continuacion de los otros, y debajo los mismos, pero empezando á colocar desde el 2.° lugar.

Sea por ejemplo $+ + + - + - - + - - + + +$

la série de signos del multiplicando; los del producto por el factor $x+a$

$$\begin{array}{r} + + + - + - - + - - + + + \\ + + + - + - - + - - + + + \\ \hline + + + \mp \pm \mp - \pm \mp - \pm + + + \end{array}$$

serán

donde señalamos con el signo de ambigüedad la indeterminacion del signo del resultado. Cuando se hace abstraccion de todo valor numérico de los coeficientes, mientras que haya permanencia en el multiplicando, partiendo desde el 1.^{er} término, habrá tambien permanencia sn el producto; pero cuando no haya permanencia en el multiplicando, el signo correspondiente del producto quedará indeterminado, y la indeterminacion continuará hasta que vuelva á haber permanencia en el multiplicando; en cuyo caso el signo del producto quedará determinado y se continuará del mismo modo. Luego el número de signos indeterminados del producto será el mismo que el que esprese las variaciones de signo en el multiplicando; luego basta hacer ver que los signos indeterminados no pueden introducir en ningun caso mas variaciones que las que se hallan en el multiplicando.

§ Para manifestarlo, observarémos que un solo signo indeterminado no puede estar comprendido sinó entre signos desemejantes $+$ y $-$ ó $-$ y $+$: sí por

esta indeterminacion se toma el signo +, habrá en el 1.^{er} caso permanencia de + á + y variacion de + á —; si se supone que el signo indeterminado sea —, habrá variacion de + á — y permanencia de — á —; lo mismo sucederá suponiendo + ó — entre los dos signos — y +; por lo que un signo indeterminado, comprendido entre dos signos determinados, no puede dar sinó una variacion. Un número ímpar de signos indeterminados consecutivos se halla comprendido entre dos signos desemejantes, y un número par de estos signos consecutivos se halla comprendido entre dos signos semejantes; en ambos casos el mayor número de variaciones que se podrian introducir, suponiendo signos en vez de estas indeterminaciones, sería lo mas igual al número de variaciones correspondientes en el multiplicando. Luego, como hay en el producto un signo mas que en el multiplicando, se debe inferir que el factor $x+a$ ha introducido al ménos una permanencia; y que así el número de las raices negativas no puede ser mayor que el de las permanencias de signo.

Probaríamos por un razonamiento semejante, que multiplicando por un factor $x-a$, el producto no puede contener mas permanencias que las que se hallan en el multiplicando; y como dicho producto contiene un término mas, se habrá introducido al ménos una variacion mas.

§ 400 De donde se sigue *que cuando todas las raices de la propuesta son reales, el número de las raices positivas es precisamente el mismo que el de las variaciones, y que el de las negativas es el mismo que el de las permanencias.*

§ En efecto, sea m el número de las raices positivas, n el de las negativas, m' el número de las variaciones, y n' el de las permanencias: y pues que por el supuesto todas las raices son reales, se tendrá $m'+n'=m+n$, observando que tanto el número de permanencias como el de las variaciones es igual al grado de la ecuacion; pero no se puede verificar que $m>m'$, luego no puede ser $n<n'$; por otra parte se sabe que no puede ser $n>n'$, luego deberá ser $n=n'$, y por consiguiente $m=m'$.

Cuando la ecuacion f (x)=0 *es incompleta, el número de las raices reales negativas puede esceder al de las permaneneias de signos; pero, si se restablecen todos los términos que faltan, poniéndoles* ± 0 *por coeficiente, el número de raices reales negativas no podrá jamas esceder al mas pequeño número de permanencias que se obtengan dando sucesivamente los signos + y — á los términos á que se ha puesto* cero *por coeficiente.*

En efecto, la ecuacion incompleta $x^7-x+1=0$ no tiene ninguna permanencia de signo; y sin embargo ella tiene precisamente (377) una raiz real negativa. Si se restablecen los términos que faltan, dándoles ± 0 por coeficiente, se tendrá la ecuacion completa

$$x^7\pm 0x^6\pm 0x^5\pm 0x^4\pm 0x^3\pm 0x^2-x+1=0;$$

en la que, de cualquier modo que se determinen los dobles signos, habrá al ménos una permanencia de signo; y por lo mismo la ecuacion propuesta no puede admitir mas de una raiz real negativa.

Para encontrar *las raices reales negativas de una ecuacion, es mas sencillo sustituir* $-x$ *en vez de* x, *en la ecuacion propuesta;* y en virtud de lo demostrado (370), las raices negativas de la propuesta serán las positivas de la trasformada, y por lo mismo el número de la raices reales negativas de la ecuacion propuesta es á lo mas igual al número de las variaciones de la trasformada; es

decir: que *el número de raices reales negativas de la ecuacion* $f(x)=0$. *es á lo mas igual al número de las variaciones de la ecuacion* $f(-x)=0$.

La misma ecuacion $x^7-x+1=0$ nos lo comprueba; pues mudando los signos á x, se nos convierte en $-x^7+x+1=0$; y como esta no tiene mas de una variacion, no tendrá á lo mas sinó una raiz real positiva; y la propuesta no podrá tener á lo mas sinó una sola raiz real negativa.

§ 401 Esto nos suministra un medio para darnos á conocer la presencia de las raices imaginarias en una ecuacion.

En efecto, dada una ecuacion $f(x)=0$, no tenemos mas que ver el número de las variaciones de signo que hay en ella, y suponiendo que sea v, tendrémos que el número de raices reales positivas no podrá ser á lo mas sinó v. Mudémos x en $-x$, y tendrémos que la $f(x)=0$ se convertirá en $f(-x)=0$; véase el número de las variaciones de signo que hay en $f(-x)=0$, y espresando dicho número por v', tendrémos que la ecuacion $f(-x)=0$ no contendrá á lo mas sinó v' raices positivas; y como las raices positivas de $f(-x)=0$, son las raices negativas de $f(x)=0$, resulta que el número total de raices reales entre positivas y negativas de $f(x)=0$, lo mas que puede llegar á ser es $v+v'$; y como el número de raices de toda ecuacion es (366) igual al grado de esta, se verificará que si espresamos este por n, se tendrá que $n-(v+v')$ será al ménos el número de raices imaginarias que contendrá la ecuacion $f(x)=0$.

Haciendo aplicacion á $f(x)=x^7-x+1=0$, hallamos en ella dos variaciones de signo; luego $v=2$.

Mudando el signo á la x, tendrémos $f(-x)=-x^7+x+1=0$; en que solo hay una variacion; por lo que $v'=1$; y como el grado de la ecuacion es 7, tendrémos que $7-(2+1)=4$ será al ménos el número de raices imaginarias de la ecuacion $x^7-x+1=0$.

Tomemos por 2.° ejemplo $f(x)=x^{10}-x^5-1=0$; que da $v=1$;

$$f(-x)=x^{10}+x^5-1, \text{ da } v'=1;$$

por consiguiente, dicha ecuacion admite á lo mas dos raices reales, que son de signos contrarios; y ella tiene al ménos ocho raices imaginarias. Pero sabemos que dicha ecuacion efectivamente tiene (377) al ménos dos raices reales; se infiere que tiene precisamente ocho raices imaginarias.

Tomémos por 3.^{er} ejemplo $x^{2n+1}-1=0$. Como hay en ella solo una variacion, lo mas que puede tener es una raiz real positiva; mudando x en $-x$, se tiene $-x^{2n+1}-1=0$; que como hay en ella solo nna permanencia, lo mas tendrá una raiz negativa; y por consiguiente, la propuesta lo mas una raiz real positiva, que fué lo que ella misma nos dió.

Tomémos por 4.° y último ejemplo $x^{2n}-1=0$; que, teniendo una variacion, lo mas que puede admitir es una raiz positiva; mudando x en $-x$, se tiene $x^{2n}-1=0$; que, teniendo una variacion, lo mas que puede tener es una raiz positiva, y la propuesta una raiz negativa. Luego lo mas que podrá tener dicha propuesta será una raiz positlva y otra negativa; y en virtvd de lo espuesto (377), tiene en efecto dos raices reales una positiva y otra negativa.

Para encontrar el mayor número de raices imaginarias qué una ecuacion puede tener, así como para indagar si todas sus raices son reales., recurriré-mos á la ecuacion de los cuadrados de las diferencias.

En efecto, cuando todas las raices de uua ecuacion son reales, todas las dife-

rencias entre estas raices son tambien reales, y sus cuadrados esencialmente positivos; por lo que en este caso, la ecuacion de los cuadrados de las diferencias tiene reales y positivas todas sus raices, y por consiguiente sus términos son alternativamente positivos y negativos. Si esta condicion no se verifica, es necesario concluir que la propuesta tiene raices imaginarias. Recíprocamente, si la ecuacion de los cuadrados de las diferencias no tiene sinó variaciones de signo, la propuesta no tendrá sinó raices reales; porque si estas no fuesen todas reales, habría al ménos (396) dos imaginarias, que representarémos por

$$\alpha+6\sqrt{-1},\quad \alpha-6\sqrt{-1},$$

el cuadrado de la diferencia seria -46^2, y por lo mismo la ecuacion de los cuadrados de las diferencias tendría al ménos una raiz real y negativa, y por consiguiente una permanencia de signos, lo que es contra el supuesto.

§ Puesto que cada par de raices imaginarias de la ecuacion propuesta introduce al ménos una raiz real negativa en la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, y que una raiz real negativa introduce al ménos una permanencia de signos, la ecuacion propuesta no podrá tener un número de raices imaginarias mayor que el duplo de las permanencias de signo en la ecuacion de los cuadrados de las diferencias.

§ Por lo que se podrá siempre recouocer por la inspeccion de los signos de esta ecuacion, si todas las raices de la ecuacion propuesta son reales, y el mayor número de raices imaginarias que puede tener. Y como ántes hemos manifestado el modo de conocer el menor número de raices imaginarias que puede haber en una ecuacion, resulta que se conocen ya por estos procedimientos, los límites en que se halla el número de raices imaginarias de una ecuacion. Lo cual, unido al conocimiento de que las raices imaginarias son siempre en número par, servirá muchas veces para encontrar con exactitud dicho número.

§ 402 Para determiar dichas raices imaginarias, recordarémos, que las raices imaginarias son siempre de la forma $\alpha+6\sqrt{-1}$, siendo α y 6 cantidades reales, y que la sustitucion de $\alpha+6\sqrt{-1}$ en vez de x da un resultado de la forma $P+Q\sqrt{-1}$, siendo P y Q cantidades reales: resultado que no puede ser igual con cero, á ménos que no se tenga separadamente $P=0$ y $Q=0$.

§ Ahora, puesto que P espresa (396) el conjunto de los primeros términos de cada binomio y el de los que contienen potencias pares de $6\sqrt{-1}$, y Q los que provienen de potencias ímpares de $6\sqrt{-1}$, se tendrá

$$P=\alpha^m+P'\alpha^{m-1}+P''\alpha^{m-2}+\text{etc.}=0\ldots.\ (1)$$
$$Q=m6\alpha^{m-1}+Q'\alpha^{m-2}+Q''\alpha^{m-3}+\text{etc.}=0\ldots.(2)$$

siendo P', P'', etc.; Q', Q'', etc. cantidades conocidas, y en las cuales entran α y los coeficientes de la propuesta; luego la cuestion se reduce á encoutrar todos los valores reales de α y 6 que satisfacen á las dos ecuaciones (1) y (2).

§ Lo que se conseguirá eliminando α por el método conocido (384), y buscando las raices reales de la ecuacion en 6 y los valores correspoudientes de α.

§ Pero se sabe por lo demostrado en el párrafo anterior, que cada par de raices imaginarias opuestas $\alpha+6\sqrt{-1}$, $\alpha-6\sqrt{-1}$ da necesariamente en la ecuacion de los cuadrados de las diferencias una raiz real negativa -46^2; luc-

go mudando en esta los signos de las potencias ímpares de la incógnita, y buscando despues las raices reales y positivas z', z'', z''', etc. se tendrá

$z'=4\mathcal{C}^2$, $z''=4\delta^2$, etc.; de donde $\mathcal{C}=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$, $\delta=\frac{1}{2}\sqrt{z''}$, etc.

§ Conocidos de este modo los valores de $\mathcal{C}$, se ejecutará con las ecuaciones (1) y (2) lo mismo que para obtener la ecuacion final en $\mathcal{C}$; pero ántes se llegará á una resta del primer grado de la forma $A\alpha+B$, siendo A y B cantidades que contienen á $\mathcal{C}$: esta resta, igualada con cero, suministrará una ecuacion $A\alpha+B=0$, que dará un valor correspondiente de α para cada uno de los de $\mathcal{C}$.

§ 403 Cuando las partes reales α, γ, etc. de las raices imaginarias

$$\alpha\pm\mathcal{C}\sqrt{-1},\quad \gamma\pm\delta\sqrt{-1},\quad \text{etc.}$$

sean desiguales entre sí, y se diferencien tambien de las raices reales a, b, c, etc., resultará que la ecuacion de los cuadrados de las diferencias no tendrá otras raices negativas que estas $-4\mathcal{C}^2$, $-4\delta^2$, —etc.; de manera que el número de estas raices será precisamente el mismo que el de los pares de raices imaginarias de la propuesta; y en este caso las ecuaciones (1) y (2) no podrán tener sinó un valor de α, y por consiguiente el mayor comun divisor no podrá ser sinó del primer grado. Pero, si sucede que entre las cantidades α, γ, etc. las haya iguales entre sí, y con las raices reales a, b, c, etc., entónces la ecuacion de los cuadrados de las diferencias tendrá necesariamente mas raices negativas que pares de raices imaginarias la propuesta. En efecto, sea $a=\alpha$, las dos raices imaginarias $[(a-\alpha)+\mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$, $[(\alpha-a)-\mathcal{C}\sqrt{-1}]^2$ se convertirán en $-\mathcal{C}^2$, $-\mathcal{C}^2$, y por consiguiente reales negativas; de manera, que si la propuesta no tiene sinó las dos imaginarias $\alpha+\mathcal{C}\sqrt{-1}$, $\alpha-\mathcal{C}\sqrt{-1}$, la ecuacion del cuadrado de las diferencias contendrá en el caso de $\alpha=a$, ademas de la raiz real negativa $-4\mathcal{C}^2$, estas otras dos $-\mathcal{C}^2$, $-\mathcal{C}^2$ iguales entre sí; de donde se deduce, que *cuando la ecuacion de los cuadrados de las diferencias da tres raices reales negativas, de las que dos son iguales, entónces la propuesta puede tener ó dos raices imaginarias ó seis, á saber*

$$(\alpha\pm\mathcal{C}\sqrt{-1}),\quad (\gamma\pm\tfrac{\mathcal{C}}{2}\sqrt{-1}),\quad (\delta\pm\tfrac{\mathcal{C}}{2}\sqrt{-1}).$$

§ 404 Si la propuesta contiene cuatro raices imaginarias $(\alpha\pm\mathcal{C}\sqrt{-1})$, $(\gamma\pm\delta\sqrt{-1})$, entónces la ecuacion de los cuadrados de las diferencias contendrá las dos raices reales negativas $-4\mathcal{C}^2$, $-4\delta^2$; pero si $a=\alpha$, contendrá aun las dos siguientes $-\mathcal{C}^2$, $-\mathcal{C}^2$; si ademas $b=\gamma$, tendrá otras dos $-\delta^2$, $-\delta^2$; en fin si se tiene $\alpha=\gamma$, entónces las cuatro raices imaginarias

$$[(\alpha-\gamma)+(\mathcal{C}-\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\mathcal{C}-\delta)\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\mathcal{C}+\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\mathcal{C}+\delta)\sqrt{-1}]^2,$$

se convertirán en $-(\mathcal{C}-\delta)^2$, $-(\mathcal{C}-\delta)^2$, $-(\mathcal{C}+\delta)^2$, $-(\mathcal{C}+\delta)^2$, es decir, reales negativas é iguales entre sí.

§ De donde se puede concluir:

1.° *Que cuando todas las raices reales negativas de la ecuacion de los cua-*

drados de las diferencias son desiguales entre sí, la propuesta tiene necesariamente tantos pares de raices imaginarias como raices hay.

2.° *Que si entre las raices reales negativas de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias se hallan iguales entre sí, cada raiz desigual, si las hay, dará siempre dos raices imaginarias opuestas; pero cada par de raices negativas iguales, tales como* $-4\mathfrak{C}^2$, $-4\mathfrak{C}^2$, *que resultan de* $\delta=\mathfrak{C}$, *indican cuatro raices imaginarias* $\alpha\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, $\gamma\pm\delta\sqrt{-1}$, *mientras que estas*

$$-\mathfrak{C}^2,\ -\mathfrak{C}^2,\ -(\mathfrak{C}-\delta)^2,\ -(\mathfrak{C}-\delta)^2,\ \text{etc.},$$

qne provienen por ejemplo de $a=\alpha$ *y de* $\alpha=\gamma$, *no dan ninguna. Tres raices negativas iguales suministrarán seis raices imaginarias*

$$\alpha\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1},\quad \gamma\pm\delta\sqrt{-1},\quad \theta\pm\lambda\sqrt{-1},$$

si son dadas por $\mathfrak{C}=\delta=\lambda$, *ó dos solamente cuando por ejemplo* $a=\gamma$ *y* $\delta=2\mathfrak{C}$, *en cuyo caso se tienen aun tres raices iguales cada una con* $-4\mathfrak{C}^2$. *Cuatro raices negativas iguales darán ocho ó cuatro raices imaginarias, ó no darán ninguna, si por ejemplo los coeficientes* $\mathfrak{C}$, δ, *etc. de* $\sqrt{-1}$ *siendo iguales, se tiene ademas* $a=\alpha$, $b=\gamma$, *siendo* α, γ *los términos reales en las raices imaginarias.*

§ Ahora sean $-z'$, $-z'$ dos raices iguales negativas de la ecuacion de los cuadrados de las diferencias, y se hará como ántes $\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$.

Pero no se necesitará sustituir este valor en la ecuacion $A\alpha+B=0$, porque se reducirá á $\alpha=\frac{0}{0}$, lo que no haría conocer nada; luego se harán las sustituciones en la resta precedente, que será de 2.° grado en α; igualando esta resta con cero, dará ó dos raices reales ó dos raices imagiuarias. En el 1.^{er} caso, llamando α' y α'' á estas dos raices, se tendrán las cuatro raices imaginarias

$$\alpha'\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1},\quad \alpha''\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1}.$$

§ En el 2.° caso, siendo imagiuarios los valores de α, contra el supuesto, se concluirá que las dos raices $-z'$, $-z'$, no darán raices imaginarias en la propuesta. Si la ecuacion de los cuadrados de las diferencias tuviese tres raices negativas iguales $-z'$, $-z'$, $-z'$, al valor $\mathfrak{C}=\frac{1}{2}\sqrt{z'}$ corresponderían tres valores de α; de donde se sigue, que si se sustituye el valor de $\mathfrak{C}$ en la resta del 1.° ó 2.° grado, se tendrían dos ecuaciones que se reducirían á cero independientemente de α; despues se hará la sustitucion en la resta del 3.^{er} grado en α; esta resta, igualada con cero, dará para α ó tres valores reales, ó uno real y dos imaginarios; en el 1.^{er} caso se tendrán seis raices imaginarias, y solo dos en el 2.°: debiendo desecharse siempre los valores imagnarios como contrarios á la hipótesis.

§ 405 Lagrange, ilustre sucesor de Euler, es el analista que mas ha trabajado, y con mas feliz suceso, acerca de las ecuaciones; pero, aunque muy superior á todos los sabios que le han precedido, ha dejado mucho que desear; porque todos los métodos, que propone para la resolucion de las numéricas, son sumamente penosos, y pueden dar orígen á miflones de operaciones superfluas. Por esta causa, vamos á dar á conocer un nuevo método para la resolucion de estas, inventado por Mr. Budan, y publicado en una Memoria en el año de 1807.

§ Todo este método estriba en el siguiente problema preliminar.

Dada una ecuacion numérica espresada por las potencias de x, *trasformarla*

en otra, que esté espresada por las potencias de x—1, x—2, x—3.....x—n, *no empleando para ello sinó simples adiciones y sustracciones.*

§ Para la resolucion de este problema, que viene á ser el (368), debemos tener presente, que si tenemos un conjunto ó série de términos, y se forma otro en que cada término n sea igual á la suma de los n términos correspondientes del conjunto dado, se dice que se toma la *suma primera* de aquella série ó conjunto; si de esta série ó conjunto, que nos resulta, volvemos á tomar la suma primera, esta será la *suma segunda* de la primitiva, y así sucesivamente.

Por ejemplo, si nos proponemos la

série dada....	1	1	1	1	1	1
suma 1.ª	1	2	3	4	5	
suma 2.ª	1	3	6	10	15	
suma 3.ª	1	4	10	20	35	

etc.

§ Todas estas séries, que acabamos de obtener, se conocen, como dirémos á su tiempo (461), bajo el nombre de séries de los *números figurados*, y que tienen por primer término la unidad, por segundo un número m, y en que un término cualquiera n está representado por

$$\frac{m(m+1)....(m+n-2)}{1.2.3...(n-1)}.$$

§ Si la série dada tuviese unos signos positivos y otros negativos, la suma se tomaría algebráicamente, esto es, contando con los signos; de manera, que si fuese la série dada... 2+ 5— 3+ 4— 3+ 0— 1, tendríamos:

suma 1.ª...	2+	7+	4+	8+	5+	5+	4
suma 2.ª...	2+	9+	13+	21+	26+	31+	35
suma 3.ª...	2+	11+	24+	45+	71+	102+	137

etc.

Ahora, la resolucion pedida depende de estas dos proposiciones

§ 1.ª *La suma* m.ª *de los* n *primeros términos de una série cualquiera es igual á la suma de estos términos multiplicados respectivamente, pero en un órden inverso, por los* n *primeros números figurados del órden* m, *es decir, de los que pertenecen á la série, cuyo segundo término es m.*

De manera, que la suma $m.^a$ de los n primeros términos de esta série

$$A_0+A_1+A_2+....A_{n-1}=A_{n-1}+mA_{n-2}+.... \frac{m....(m+n-2)}{1.....(n-1)}A_0.$$

Por ejemplo, la suma 3.ª de estos cuatro términos 2+5—3+4 es

$$1\times4-3\times3+6\times5+10\times2=45,$$

que es el mismo resultado que hallamos ántes.

§ 2.ª Proposicion. *Un polinomio cualquiera, que proceda por las potencias enteras y positivas de una cantidad* x, *desde el grado* m *hasta el grado* 0, *se trasforma en otro polinomio, de igual valor, que proceda por las mismas potencias de* x—1, *y haciendo que sus coeficientes respectivos, principiando por el del último término, sean* 1.º *la suma* 1.ª *de todos los coeficientes del polino-*

::

mio dado; 2.º la suma 2.ª de todos los coeficientes escepto el último; 3.º la suma 3.ª de estos coeficientes, escepto los dos últimos, y asi en adelante.

§ Sea por ejemplo el polinomio $2x^3-3x^2+5x-3$,

y tendrémos, coeficientes dados 2—3+5—3.

Sumas 1.^{as} . . . . . 2—1+4+1.

sumas 2.^{as} . . . . . 2+1+5

sumas 3.^{as} . . . . . 2+3

sumas 4.^{as} . . . . . 2.

§ De donde se deduce, que los coeficientes del polinomio que proceda por las potencias de $x-1$ son 2, suma 4.ª de todos ménos los tres últimos; 3, suma 3.ª de todos ménos los dos últimos; 5, suma 2.ª de todos ménos el último, y 1 suma 1.ª de todos; por lo que se tendrá

$$2x^3-3x^2+5x-3=2(x-1)^3+3(x-1)^2+5(x-1)+1,$$

ecuacion que se verifica, cualquiera que sea el valor de x.

§ 406 Si en el polinomio propuesto falta alguna potencia de x, se pone con cero por coeficiente.

§ Sea por ejemplo x^3-7x+7, y tendrémos

coeficientes dados. 1+0—7+7

sumas 1.^{as} . . . 1+1—6+1

sumas 2.^{as} . . . 1+2—4

sumas 3.^{as} . . . 1+3

sumas 4.^{as} . . . 1

por lo que será $x^3-7x+7=(x-1)^3+3(x-1)^2-4(x-1)+1$.

§ Por el mismo método hallaríamos, que en x^3-2x-5, los coeficientes de su trasformada en $x-1$ son 1+3+1—6.

§ Como una ecuacion, cuyo 1.^{er} miembro es igual con cero, ofrece precisamente el mismo caso que el polinomio de la proposicion precedente, tenemos resuelto por este procedimiento nuestro problema preliminar.

§ Luego, si se nos da la ecuacion $x^3-7x+7=0$, los coeficientes de su trasformada en $x-1$, son 1+3—4+1.

§ Por el mismo método, se pasará de la trasformada en $x-1$ á la trasformada en $x-2$; de esta á la trasformada en $x-3$, y asi en adelante; de manera, que siendo los coeficientes de la antecedente

en x...1+0—7+7, se tendrá para los en $x-1$...1+3—4+1,

en $x-2$....1+6+5+1, en $x-3$...1+9+20+13;

y en la $x^3-2x-5=0$, los coeficientes de estas ecuaciones son

en x...1+0—2—5, en $x-1$...1+3+1—6,

en $x-2$...1+6+10—1, en $x-3$...1+9+25+16, etc.

§ Donde observamos, que, por estas trasformaciones, se acaba siempre por tener coeficientes que sean todos de un mismo signo.

§ 407 Por el mismo método se obtienen las trasformadas

en $x-10$, $x-20$, $x-30$, etc.

y estas en $x-100$, $x-200$, $x-300$, etc.

§ Para esto, es necesario sustituir en la propuesta una incógnita x', que sea respectivamente 10 veces, 100 veces, etc. menor que x. Los coeficientes de esta ecuacion en x' se obtienen sin cálculo (369) por la respectiva colocacion de la coma, que indica las decimales; despues se procuran las trasformadas en

$x'-1$, en $x'-2$, en $x'-3$, etc. ó lo que es lo mismo, por ser

$$x'=\frac{x}{10},\quad \text{ó}\quad \frac{x}{100}\quad \text{etc., en}\quad \frac{x-10}{10},\quad \frac{x-20}{10},\quad \frac{x-30}{10},\quad \text{etc.}$$

ó bien en $\frac{x-100}{100}$, $\frac{x-200}{100}$, $\frac{x-300}{100}$, etc,

§ Sea por ejemplo la ecuacion $x^3-4x^2+3x-6=0$, de la que se nos pidan las trasformados en $x-10$, en $x-20$, etc. harémos $x'=\frac{1}{10}x$, y tendrémos $x'^3-0,4x'^2+0,03x'-0,006=0$, lo que nos dará los coeficieutes de las ecuaciones

en x' . . . . . 1—0,4+0,03—0,006

en $x'-1$ ó $\frac{x-10}{10}$ . . 1+2,6+2,23+0,624

en $x'-2$ ó $\frac{x-20}{10}$ . . 1+5,6+10,43+6,454

etc.

y por consiguiente se tendrán para los coeficientes de las ecuaciones

en $x-10$ . . . . 1+26+ 223+ 624

en $x-20$ . . . . 1+56+1043+6454

etc. . . . . etc.

§ Se ve finalmente como por un procedimiento análogo, se presentarian las trasformadas en $x-\frac{1}{10}$, en $x-\frac{2}{10}$, etc. estas en $x-\frac{1}{100}$, $x-\frac{2}{100}$, etc.

§ 408 Si se quiere tener la ecuacion en que la incógnita de la propuesta se halle disminuida en un número, que tuviese muchas cifras, por ejemplo, en otra, que procediese por las potencias de $x-312$, primero obtendríamos la ecuacion en $x'-3$, haciendo $x'=\frac{x}{100}$, y por consiguiente la propuesta en $(x-300)$ como se acaba de indicar.

Despues haríamos $x-300=10x''$, y se obtendría la ecuacion en $x''-1$, y por consiguiente la propuesta en $(x-310)$. De esta última se pasará á la en $(x-311)$, y de esta á la pedida en $(x-312)$.

§ Hé aquí por ejemplo el procedimiento que sería necesario seguir, si la propuesta fuese $x^3-4x^2+3x-6=0$: harémos $x'=\frac{x}{100}$ ó $x=100x'$ lo que nos dará $x'^3-0,04x'^2+0,0003x'-0,000006=0$.

Coeficientes de las ecuaciones

en x' . . . . . 1—0,04+ 0,0003— 0,000006

en $x'-1$ . . . . 1+2,96+ 2,9203+ 0,960294

en $x'-2$ . . . . 1+5,96+11,8403+ 7,840594

en $x'-3$ . . . . 1+8,96+26,7603+26,640894.

Así, los coeficientes de la trasformada en $x-300$ son

1+896+267603+26640894.

Haciendo despues $x-300=10x''$, se tienen los coeficientes de las ecuaciones en x''... 1+89,6+2676,03+26640,894
en $x''-1$ ....1+92,6+2858,23+29407,524;

pero siendo $x''=\frac{x-300}{10}$, se tendrá $x''-1=\frac{x-300}{10}-1=\frac{x-310}{10}$, por lo que serán los coeficientes de la trasformada

en $(x-310)$ .... 1+926+285823+29407524
en $(x-311)$ .... 1+929+287678+29694274
en $(x-312)$ .... 1+932+289539+29982882.

§ 409 Considerando las operaciones por las cuales se pasa de un polinomio en x á su equivalente en $x-1$, se podrá reconocer cómo se puede pasar recíprocamente de un polinomio en $x-1$, á su equivalente en x, de este en x á su equivalente en $x+1$, y así sucesivamente; en el primer caso, se han tomado *sumas*, y en el segundo se toman *diferencias*.

§ Elijamos, por ejemplo, el polinomio (405) cuyos coeficientes son 2—3+5—3, y su equivalente en $x-1$, que tiene por coeficientes 2+3+5+1. Para pasar de este al otro, se escriben sus coeficientes, y se procede del modo siguiente.

Coeficientes del polinomio en $x-1$ .... 2+3+5+1

Séries en que el término que ocupa el lugar n es la diferencia del término que le precede al término n de la série superior.
1.ª .... 2+1+4—3
2.ª .... 2—1+5
3.ª .... 2—3
4.ª 2

Por cuyo procedimiento obtenemos los coeficientes del polinomio en x, y nos podrémos proporcionar los del polinomio en $x+1$, como aquí se presenta.

2—3+ 5— 3
2—5+10—13
2—7+17
2—9
2

luego los coeficientes para el polinomio en $x+1$ son 2—9+17—13, lo que es por otra parte fácil de verificar por el procedimiento inverso.

§ De donde resulta que, ejecutando las trasformaciones sucesivas en $x-1$, $x-2$, etc. se llega á una trasformada en $x-n$, cuyos términos tienen todos un mismo signo. Aquí se observará, que las trasformaciones en $x+1$, $x+2$, etc. conducen á una trasformada en $(x+n)$, cuyos términos no presentan sinó variaciones de signo, como se advierte en el polinomio en $(x+1)$ del último ejemplo, cuyos coeficientes están alternativamente precedidos del signo + y del signo —. Cuando ya se ha llegado á un polinomio en $(x+n)$, las trasformadas ulteriores en $(x+n+1)$, $(x+n+2)$ etc. no ofrecen ninguna *permanencia* de signo, lo que se percibe por la misma naturaleza del procedimiento.

§ 410 Entendidos ya estos preliminares, *la primera parte del método consiste en trasformar la ecuacion propuesta en* x—1, x—2, x—3, etc. *hasta que se llegue á tener una trasformada en* x—n, *cuyos coeficientes sean todos del mismo signo; en cuyo caso* n *será el límite del mayor valor positivo de la incógnita.*

§ *Si la propuesta no ofrece sinó permanencias de signo, no falta mas que*

hallar las raices negativas que puede tener ; las cuales se obtienen mudando los signos de los términos pares de la primitiva , y buscando cuales son las raices positivas de esta trasformada.

§ *Cuando el último coeficiente de una ecuacion, que tiene por incógnita* (x—p) *es igual con cero, la ecuacion en* x *tiene una raiz igual* p; *y mas generalmente: si* m *coeficientes consecutivos de la trasformada, principiando desde el último, son iguales cada uno á cero, ta propuesta tiene* m *raices iguales con* p. *Por esta circunstancia la ecuacion en* x—p *se halla reducida á otra cuyo grado tiene* m *unidades ménos.*

§ *Cuando el último coeficiente de una ecuacion en* x—p, *es de signo contrario al de la trasformada en* (x—p—1), *la propuesta tiene una ó muchas raices en número ímpar, cuyo vulor esta comprendido entre* p *y* p+1.

§ 411 Por esta primera parte del método, se hallan en ciertos casos todas las raices reales de la ecuacion, sea exacta sea aproximadamente, con ménos de una unidad de diferencia. El primer caso, que se puede resolver, es aquel en que la propuesta no tiene ni raices imaginarias, ni muchas raices reales comprendidas entre dos números enteros p y $p+1$. El segundo, cuando se sabe de antemano que todas las raices de la propuesta son reales, aunque entre estas raíces las haya incomensurables, comprendidas entre dos números enteros consecutivos. Y finalmente, el tercero es cuando se sabe, que la ecuacion no tiene siuó una raiz real, positiva ó negativa, ó bien que tiene dos, la uua positiva y la otra negativa, como sucede en las ecuaciones de esta forma $x^m \mp A = 0$.

1.er ej. Sea la ecuacion $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27 = 0$,

y tendrémos, que los coeficientes de las ecuaciones serán

en x.... 1—10+36—54+27, en $(x-1)$....1—6+12—8+0,

en $(x-2)$...1— 3+ 3— 1, en $(x-3)$....1+0+ 0+0.

De donde se infiere que las raices de esta ecuacion son 1 y 3, y que esta última es tripla, esto es, que la propuesta es divisible por $(x-3)^3$, ó equivale á

$$(x-3)^3(x-1)=0.$$

2.º ej. Sea $x^3 - 5x^2 + x + 4 = 0$,

y los coeficientes de las ecuaciones serán

en x... 1—5+1+4, en $(x-1)$...1— 2— 6+ 1,

en $(x-2)$...1+1—7—6, en $(x-3)$...1+ 4— 2—11,

en $(x-4)$...1+7+9—8, en $(x-5)$...1+10+26+ 9,

luego la propuesta tiene dos raices positivas incomensurables, cuyos valores están respectivamente comprendidos entre 1 y 2, y entre 4 y 5. Para tener despues la raiz negativa, se mudan los signos de los términos que ocupan un lugar par en la propuesta, y se tiene $x^3 + 5x^2 + x - 4 = 0$: coeficientes de las ecuaciones

en $x=-x$...1+5+1—4, en x—1...1+8+14+3,

luego la raiz negativa de la propuesta está entre *cero* y —1.

3.er ej. Sea la ecuacion $x^3 - 7x + 7 = 0$;

y los coeficientes de las ecuaciones serán

en x..1+0—7+7... en $(x-1)$..1+3—4+1, en $(x-2)$...1+6+5+1;

coeficientes de las ecuaciones

en x=—x...1— 0— 7— 7, en (x—1)...1+3— 4—13,

en (x—2).....1+ 6 + 5—13, en (x—3)...1+9+20— 1,

en (x—4).....1+12 +41 +29.

Luego dicha ecuacion tiene una raiz negativa comprendida entre —3 y —4; ademas tiene otras dos raices positivas comprendidas entre 1 y 2, porque la trasformada en $(x-2)$ tiene dos permanencias de singno mas que la de en $(x-1)$, y se puede deducir de la regla de Descartes: 1.° *que una ecuacion en* x, *en que todas las raices son reales, tiene tantas raices comprendidas entre cero y* p, *como permanencias de signo haya mas en la trasformada en* x—p, *que en la propuesta en* x; *y* 2.° *que una ecuacion de esta especie no puede tener sea una, sea dos, sea* m *raices comprendidas entre cero y* p, *si su trasformada* x—p *no tiene respectivamente una ó dos ó* m *pemanencias de signo mas que la ecuacion en* x.

4.° ej. Sea $x^3-1745=0$, en que los coeficientes de las ecuaciones son

en x.....	1+ 0+ 0—1745,	en $(x-1)$...	1+ 3+ 3—1744,
en $(x-2)$...	1+ 6+ 12—1737,	en $(x-3)$...	1+ 9+ 27—1718,
en $(x-4)$...	1+12+ 48—1681,	en $(x-5)$...	1+15+ 75—1620,
en $(x-6)$...	1+18+108—1529,	en $(x-7)$...	1+21+147—1402,
en $(x-8)$...	1+24+192—1233,	en $(x-9)$...	1+27+243—1016,
en $(x-10)$...	1+30+300— 745,	en $(x-11)$...	1+33+363— 414,
en $(x-12)$...	1+36+432— 17,	en $(x-13)$...	1+39+507+ 452,

luego la raiz de la ecuacion se halla entre 12 y 13.

§ Hetnos seguido en este último ejemplo el caminó mas largo, porque se podia prever, que, debiendo ser un número entero espresado por dos guarismos, nos podiamos desde luego procurar la trasformada en $(x-10)$, en $(x-20)$ etc por el procedimiento indicado antes, haciendo al principeo $x=10x'$, lo que convertirá la ecuacion en $x'^3-1,745=0$, y se tendria, coeficientes de las ecuaciones

en x'.....1+0+0—1,745, en $\left(\frac{x-10}{10}\right)$ ó $x'-1$.....1+3+3—0,745,

en $\left(\frac{x-20}{10}\right)$ ó $(x'-2)$.....1+6+12+6,255, y por consiguiente

en $(x-10)$...1+30+300—745, en $(x-20)$...1+60+1200+6255,

luego la raiz está entre 10 y 20. Luego no falta mas que proporcionarse las trasformadas sucesivas desde la en $(x-10)$ hasta la en $(x-19)$ á lo mas.

Coeficientes de las ecuaciones

en $(x-10)$...1+30+300—745, en $(x-11)$...1+33+363—414,

en $(x-12)$...1+36+432—17, en $(x-13)$...1+39+507+452,

y se deducirá como ántes que la raiz tercera de 1745 está entre 12 y 13.

Luego el nuevo método ofrece un medio de estraer por adiciones y sustraciones la raíz de un grado cualquiera, axacta ó aproximada, de un número cualquiera.

§ 442 El procedimiento que hemos empleado en el número precedente, no solo es aplicable á las ecuaciones de dos términos, sinó que se puede emplear en una ecuacion cualquiera, siempre que se averigüe, despues del exámen de los coeficientes de la propuesta, que el mayor número entero, formando parte de la mayor raiz positiva, se puede espresar por muchas cifras. En este caso podrá ser mas conveniente hacer $x=10x'$, ó $x=100x'$ etc.; y procurarse desde luego las trasformadas en $(x-10)$ $(x-20)$ etc., ó en $(x-100)$, $(x-200)$ etc., ó bien

el resolver la ecuacion en x' por medio de las trasformadas sucesivas en $(x'-1)$, $(x'-2)$, etc. y despues deducir de ellas los valores de x.

§ 413 No son muchos los casos á que se estiende esta 1.ª parte del método.

§ Cuando no ocurre ninguno de estos, se tiene que echar mano de las trasformadas *colaterales*, en la forma que vamos á esplicar. Para esto se debe observar, que la resolucion de las ecuaciones, reduciéndose á la investigacion de las raices positivas, esta misma investigacion se reduce á la de las raices positivas que una ecuacion cualquiera puede tener, menores que la unidad. Lo cual es una consecuencia de las trasformaciones sucesivas, porque para conocer todas las raices positivas de la ecuacion en x, basta reconocer respectivamente las raices positivas menores que la unidad; 1.º de la propuesta; 2.º de su trasformada en $(x-1)$; 3.º de la en $(x-2)$, y así sucesivamente hasta la última trasformada que conserve alguna variacion de signo. Luego, para descubrir las raices que la propuesta puede tener entre p y $p+1$, no se trata sinó de encontrar en la ecuacion en $(x-p)$ los valores de la incógnita comprendidos entre 0 y 1. Luego el problema, cuya solucion se trata de dar con generalidad, es el siguiente. *Dada una ecuacion, que no tenga raices iguales, asegurarse si tiene ó no raices comprendidas entre* 0 *y* 1.

§ Cuando se ignora si la ecuacion propuesta tiene reales todas sus raices, el exámen de la sucesion de los signos no suministra ya un medio cierto de la existencia de las raices que pueden estar comprendidas entre p y $p+1$. Si la ecuacion en $(x-p-1)$ tiene mas permanencias de signo que la en $(x-p)$, el signo del último término en cada una de estas ecuaciones siendo el mismo, solo se puede sospechar que haya valores de $(x-p)$ entre *cero y uno*, y por consiguiente valores de x entre p y $p+1$, pero falta verificar esta sospecha.

§ Por otra parte, sí la 2.ª proposicion, que hemos deducido (411), se admitiese como principio general respecto de una ecuacion cualquiera, este principio suministraría un carácter constante de esclusion contra todo valor que se quisiese atribuir á $(x-p)$ entre *cero* y 1, siempre que la ecuacion en $(x-p-1)$, no tenga mas permanencias de signo que la ecuacion en $(x-p)$. Entónces, por medio de estas esclusiones, podríamos determinar los solos números enteros entre que se deben buscar los que son con diferencia de ménos de una unidad, las raices de la ecuacion propuesta. Como no darémos pruebas (dice Budan) en apoyo de la generalidad de este principio, vamos á recurrir á otro motivo de esclusion.

§ Sea por ejemplo esta ecuacion $x^3-4x^2+3x-6=0$, la ecuacion inversa en z ó $\frac{1}{x}$ es (370), aquella cuyos coeficientes son los mismos que los de la ecuacion en x, pero en un órden inverso; de manera que será $6z^3-3z^2+4z-1=0$, la trasformada en $(z-1)$ es $6(z-1)^3+15(z-1)^2+16(z-1)+6=0$.

§ Esta trasformada no teniendo sinó permanencias de signo, ofrece un *medio* ó *criterio* cierto de la ausencia de toda raiz real entre *cero* y 1 en la ecuacion en x. *Generalmente la ecuacion en* x *no puede tener mas raices entre cero y* 1, *que variaciones de signo tiene la trasformada en* $(z-1)$ ó $\left(\frac{1}{x}-1\right)$; *y si la ecuacion en* $(z-1)$ *tiene su último término negativo, la en* x *tiene al ménos una raiz real entre cero y* 1.

§ Apliquemos este criterio á la ecuacion $x^3-2x-5=0$, y hagamos

$$\frac{1}{x}=z, \quad \frac{1}{x-1}=z_1, \quad \frac{1}{x-2}=z_2,$$

y así sucesivamente; y se tendrá, para los coeficientes de las ecuaciones

en x..... 1+0− 2−5.... en $(z-1)$.....5+17+19+ 6,
en $(x-1)$.....1+3+ 1−6.... en (z_1-1).....6+17+13+ 1,
en $(x-2)$.....1+6+10−1.... en (z_2-1).....1− 7−23−16,
en $(x-3)$. ...1+9+25+16;

y para la investigacion de las raices negativas, sea $x=-x$, $\frac{1}{x}=z$ etc., y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones en

x...1−0−2+5.. en $(z-1)$. 5+13+11+4, en $(x-1)$..1+3+1+4.

§ 414 Estas trasformaciones colaterales bastan, como se ve, para la resolucion aproximada de la ecuacion con ménos de una unidad de diferencia; dan la esclusion á todo número negativo, y escluyen igualmente á todo número positivo escepto al número 2, el cual está admitido por el mayor número entero comprendido en la raiz, por el doble motivo de que el último término de la ecuacion en $(x-3)$ es de signo contrario al de la ecuacion en $(x-2)$, y el último término de la ecuacion colateral en (z_2-1) es negativo; estos dos motivos concurren siempre juntos.

§ Estas trasformaciones bastan tambien para determinar con ménos de una unidad de diferencia las raices reales de una ecuacion, siempre que á cada par de ecuaciones en $(x-p)$ y $(x-p-1)$, cuyos últimos términos respectivos son del mismo signo, corresponde una ecuacion colateral en (z_p-1) que no tiene sinó permanencias de signo.

§ Ej. Sea la ecuacion $x^4-12x^3+58x^2-132x+121=0$, y se tendrá que los coeficientes de las ecuaciones son

en x... 1−12+58−132+121, en $(z-1)$, 121+352+388+192+36,
en $(x-1)$, 1− 8+28− 48+ 36, en (z_1-1), 36+ 96+100+ 48+ 9,
en $(x-2)$, 1− 4+10− 12+ 9, en (z_2-1), 9+ 24+ 28+ 16+ 4,
en $(x-3)$, 1+ 0+ 4+ 0+ 4, en (z_3-1), 4+ 16+ 28+ 24+ 9,
en $(x-4)$, 1+ 4+10+ 12+ 9.

§ Las trasformadas colaterales escluyendo aquí á todo número positivo, y la propuesta no teniendo permanencia de signo, que indica que no hay raiz ninguna negativa, da á conocer que todas sus raices son imaginarias.

Otro ej. Sea la ecuacion $x^4-5x^3+5x^2+6x-12=0$, y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en x... 1− 5+ 5+ 6−12, en $(z-1)$..12+42+49+25+ 5,
en $(x-1)$..1− 1− 4+ 5− 5, en (z_1-1)., 5+15+19+14+ 4,
en $(x-2)$..1+ 3− 1− 2− 4, en (z_2-1)., 4+18+31+21+ 3,
en $(x-3)$..1+ 7+14+ 9− 3, en (z_3-1).. 3+ 3−23−50−28,
en $(x-4)$..1+11+41+62+ 28.

§. Despues, si se hace $x=-x$, $\frac{1}{x}=z$, etc. se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en x... 1+ 5+ 5— 6—12.. en $(z--1)$...12+54+85+ 51+ 7,
en $(x--1)$..1+ 9+26+ 23— 7.. en (z_1--1)... 7+ 5—53—102—52,
en $(x--2)$...1+13+59+106+ 52.

§ Por las trasformadas colaterales se echa de ver, que las solas raices de la ecuacion son 3 y —1 con ménos de una unidad de diferencia.

§ 415 La uniformidad de los signos en la ecuacion en (z_p-1) no permitiendo atribuir ningun valor á $(x-p)$ entre 0 y 1, se puede preguntar si la proposicion inversa es igualmente verdadera; es decir, si esta uniformidad tiene siempre lugar cuando $(x-p)$ no tiene ningun valor positivo inferior á la unidad. Si esto sucediese, el empléo de las trasformaciones colaterales no solo suministraría un motivo cierto de esclusion, respecto de los números, que no pertenecen á las raices de la ecuacion propuesta, sinó que haría tambien conocer con certidumbre los números enteros que son, con ménos de una unidad de diferencia, raices de esta ecuacion.

§ Para responder á esta pregunta, es necesario considerar que si $x-p$ no tiene valor entre 0 y 1, entónces la ecuacion en z_p, ó $\frac{1}{x-p}$, no teniendo valor superior á la unidad, la trasformada en z_p-1 no puede tener por raices reales sinó raices negativas. Luego todos los factores reales simples que puede tener esta trasformada son de la forma z_p-1+A: y si estos factores no estan asociados sinó á factores del segundo grado de la forma

$$(z_p-1)^2+P(z_p-1)+Q$$

(siendo positivos A, P, y Q), es evidente que la trasformada en z_p-1 no tiene entónces ninguna variacion de signo. Pero esta forma de los factores del segundo grado tiene siempre lugar en la trasformada escepto en un solo caso, á saber, aquel en que la ecuacion en $(x-p)$ tiene uno ó muchos pares de raices imaginarias de la forma $+f\pm\sqrt{-\varphi}$; de manera que f y φ siendo ambos menores que la unidad, se tenga $\varphi<f(1-f)$, y por consiguiente $\varphi<\frac{1}{4}$.

§ En efecto, cuando $x-p=f\pm\sqrt{-\varphi}$, $z_p=\frac{1}{f\pm\sqrt{-\varphi}}=\frac{f\mp\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi}$, y

$$z_p-1=\frac{f}{f^2+\varphi}-1\mp\frac{\sqrt{-\varphi}}{f^2+\varphi},$$

la parte real $\frac{f}{f^2+\varphi}-1$, no puede ser positiva á ménos que el denominador $f^2+\varphi$ no sea menor que f; lo que no se puede verificar si f y φ no son fraccio-

nes, y si no se tiene $\varphi<f-f^2$, ó $\phi<f(1-f)$, de donde se sigue que ϕ es entónces menor que $\frac{1}{4}$ ó 0,25, puesto que $\frac{1}{4}$ es como lo manifiesta la teoría de los máximos y mínimos (I. 255..5.ª y § 566 de este tomo) el mayor producto que puede dar una cantidad multiplicada por su complemento á la unidad.

§ Este caso es el solo que, introduciendo en la trasformada en z_p-1 factores de la forma $(z_p-1)^2+P(z_p-1)+Q$; podría dar lugar en ella á variaciones de signo, y deja subsistir la presuncion de la existencia de las raices entre 0 y 1 en la ecuacion en $(x-p)$.

§ Este caso de escepcion se desvanecerá necesariamente por el efecto de las operaciones ulteriores de nuestro método, como se va á ver en la tercera parte. Pero desde ahora se deduce de lo anterior, que la segunda parte de este método hace conocer con certidumbre, ya la ausencia de toda raiz real en la ecuacion en $(x-p)$ entre 0 y 1; ya la alternativa de la existencia de muchas raices entre 0 y 1, ó de la dè un par al ménos de raices imaginarias, cuya parte real es una fraccion propia, mientras que la cantidad precedida del signo — debajo del signo rádical es menor que $\frac{1}{4}$ ó 0,25, y aun que el producto de la parte real por su complemento á la unidad.

§ 416 Pasemos ya á esponer la tercera parte del método Cuando se sabe con certidumbre que la propuesta tiene una ó muchas raices comprendidas entre p y $p+1$, falta encontrar un valor exacto de estas raices hasta la cifra decimal que se quiera; y cuando solo se puede presumir su existencia, falta efectuar la verificacion de estas raices dudosas. Un mismo procedimiento va a cumplir con este doble objeto, es decir, que el método de aproximacion para las raices ya conocidas, será al mismo tiempo un método de verificacion, y de aproximacion para aquellas de que no se tienen sinó sospechas.

§ Ya se tenga la certidumbre de que la ecuacion en $(x-p)$ tiene alguna raiz comprendida entre 0 y 1, ya nos hallemos solo autorizados para sospecharlo, se hace $10(x-p)=x'$, y tantos valores como tenga $x-p$ entre 0 y 1, otros tantos debe tener x' entre 0 y 10. Luego es necesario, por medio de las trasformadas en $(x'-1)$, $(x'-2)$ etc. hasta las en $(x'-10)$ lo mas, buscar las raices que la ecuacion en x' tiene ó puede tener entre 0 y 10.

§ En esta investigacion se procede, como en la de las raices de la ecuacion en x, y se llega de esta manera, ya á encontrar la primera decimal de las raices, cuya parte espresada por un número entero p es ya conocida; ya á reconocer y verificar con ménos de una décima de diferencia la existencia de las raices comprendidas entre p y $p+1$, que hasta entónces era dudosa, y que deja de serlo, porque estas mismas raices no se hallan comprendidas juntas entre

$$\left(p+\frac{p'}{10}\right) \text{ y } \left(p+\frac{p'+1}{10}\right),$$

pudiendo por otra parte las diferencias de estas raices ser indefinidamente menores que $\frac{1}{10}$; ya para destruir la presuncion ocasionada por raices imaginarias $f\pm\sqrt{-\phi}$ en el caso en que el *criterio* ó medio de esclusion mencionado (413) se haya encontrado en defecto (415).

§ Se llega á destruir esta sospecha por medio de las ecuaciones en $(x'-p')$ y en $(z'p_1-1)$ siempre, á ménos que el céntuplo de la fraccion ϕ no sea igual ó superior á $\frac{1}{4}$, ó lo que viene á ser lo mismo, siempre que no se tenga $\phi<\frac{1}{400}$, ó bien $\phi<0{,}0025$.

§ Para asegurarse de esto, no es necesario mas que atender á la ecuacion $10(x-p)=x'$. Cuando un valor imaginario de $x-p$ es $f\pm\sqrt{-\phi}$, el valor correspondiente de x' es $10f\pm\sqrt{-100\phi}$, y el de $(x'-p')$ es $(10f-p')\pm\sqrt{-100\phi}$, ó bien $f'\pm\sqrt{-100\phi}$, si se hace $10f-p'=f'$.

Luego, se discurrirá sobre la ecuacion en $(z'p_1-1)$, como se ha hecho ántes respecto de la en $(zp-1)$. Todo lo cual se aclara con el ejemplo siguiente:

Propongámonos resolver la ecuacion $X^3-51X^2+761X-2655=0$, ó bien igualando X con $10x$, propongámonos esta otra ecuacion

$$x^3-5{,}1x^2+7{,}61x-2{,}655=0.$$

§ La ecuacion no teniendo permanencia de signo, no tiene raiz real negativa; y los coeficientes de las ecuaciones serán

en x.. 1—5,1+7,61—2,655, en $(z-1)$..2,655+0,355—2,155—0,855;
en $(x-1)$..1—2,1+0,41+0,855, en (z_1-1)..0,855+2,975+1,285+0,165;
en $(x-2)$..1+0,9—0,79+0,165, en (z_2-1)..0,165—0,295—0,185+1,275;
en $(x-3)$..1+3,9+4,01+1,275.

§ Luego el 0 queda admitido como raiz aproximada con ménos de una unidad de diferencia; el número 1 queda escluido; falta verificar el número 2. Para la aproximacion de la raiz admitida, sea $10x=x'$, $\frac{1}{x'}=z'$ etc., y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en x'... 1—51+761—2655, en $(x'-1)$...1—48+662—1944,
en $(x'-2)$...1—45+569—1329, en $(x'-3)$...1—42+482— 804,
en $(x'-4)$...1—39+401— 363, en $(x'-5)$...1—36+326+ 0,

luego $x'=5$, de donde $x=0{,}5$.

§ Se ve que las ecuaciones colaterales en $(z'-1)$, (z'_1-1), etc. son inútiles en estas circunstancias, porque la trasformada en $(z-1)$ no teniendo sinó una variacion de signo, se sigue que x' no puede tener sinó un solo valor entre 0 y 10, no pudiendo tener x sinó uno entre 0 y 1 (413).

§ Para la verificacion de las raices dudosas, sea $10(x-2)={}_1x'$, $\frac{1}{{}_1x'}={}_1z'$ etc. y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en ${}_1x'$... 1+ 9—79+165...en$({}_1z'-1)$..165+416+346+96,
en $({}_1x'-1)$...1+12—58+ 96...en$({}_1z'_1-1)$... 96+230+184+51,
en $({}_1x'-2)$...1+15—31+ 51...en$({}_1z'_2-1)$.. 51+122+106+36,
en $({}_1x'-3)$...1+18+ 2+ 36.

§ Luego x' no tiene valor real positivo; luego el 2 está escluido y la ecuacion queda resuelta.

§ Otro ej. Sea la ecuacion $x^5-3x^4-3x^3+7x^2+8x+2=0$, y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en x.. 1— 3— 3+ 7+ 8+ 2,
en $(x-1)$..1+ 2— 5—10+ 6+12, en $(z-1)$.. 2+18+ 59+ 86+54+12,
en $(x-2)$..1+ 7+13— 3—16+ 6, en (z_1-1)..12+66+134+121+46+ 6,
en $(x-3)$..1+12+51+88+50+ 8, en (z_2-1).. 6+14— 7— 32—10+ 8.

§ Coeficientes de las ecuaciones

en x=$-x$....1+ 3— 3— 7 +8—2.... en $(z-1)$...2 +2—5—4+ 2+ 0,
en $(x-1)$...1+ 8+ 19+ 12+ 2+ 0.

§ Luego uno de los valores de x es —1, y las trasformadas colaterales no dejan sospechar otras raices reales que las que se hallan entre 2 y 3 y entre 0 y —1.

§ Para la verificacion de las raices dudosas positivas, sea $10(x-2)=x'$ ó $x=2+\frac{x'}{10}$. Se obtiene la ecuacion en x' por una adicion conveniente de ceros en los coeficientes de la ecuacion en $(x-2)$, y se tendrá para los coeficientes de las ecuaciones

en x'.... 1+ 70+1300— 3000—160000+600000,
en $(x'-1)$...1+ 75+1590+ 1330—161815+438371,
en $(x'-2)$...1+ 80+1900+ 6560—154080+279552,
en $(x'-3)$...1+ 85+2230+12750—134935+134013,
en $(x'-4)$...1+ 90+2580+19960—102400+ 14144,
en $(x'-5)$...1+ 95+2950+28250— 54375— 65625,
en $(x'-6)$...1+100+3340+37680+ 11360— 88704,
en $(x'-7)$...1+105+3750+48310+ 97145— 36223,
en $(x'-8)$...1+110+4180+60200+205440+113088.

Luego x' tiene dos valores, uno entre 4 y 5, el otro entre 7 y 8, y por consiguiente las raices positivas de x son con ménos de una unidad de diferencia 2,4 y 2,7.

§ Se debe notar, que, no teniendo la ecuacion en (z_2-1) ó $\left(\frac{1}{x-2}-1\right)$ sinó dos variaciones de signo, no puede tener sinó dos raices positivas, y por consiguiente $(x-2)$ no puede tener mas de dos valores entre 0 y 1, ni x' mas de dos valores entre 0 y 10; las trasformadas sucesivas haciendo aquí conocer estos dos valores, es inútil calcular las colaterales.

§ 417 Las ecuaciones en $(x'-p')$ y en $(z'p_I-1)$ pueden no ser suficientes para determinar la admision ó esclusion de la totalidad de las raices dudosas. Entónces se recurre á las ecuaciones en $(x''-p'')$ y en $(z''p_{II}-1)$, que se obtienen haciendo $10(x'-p')=x''$, $\frac{1}{x''-p''}=z''p_{II}$; y procediendo como se ha hecho ántes respecto de las ecuaciones en $(x'-p')$ y en $(z'p_I-1)$.

§ Por este medio nos aproximarémos hasta la segunda decimal inclusivamente de las raices, cuya existencia está ya reconocida al mismo tiempo que se descubren las raices reales, dudosas hasta entónces, que estando comprendidas entre

$$(p+\tfrac{1}{10}p') \text{ y } (p+\tfrac{1}{10}(p'+1))$$

no tienen por límites comunes $(p+\frac{1}{10}p'+\frac{1}{100}p'')$ y $(p+\frac{1}{10}p'+\frac{1}{100}(p''+1))$, pudiendo por otra parte las diferencias de estas raices entre sí ser indefinidamente menores que $\frac{1}{100}$.

§ Por este medio se destruye tambien la sospecha que hubiera quedado en la ecuacion en $(x'-p')$ por las imaginarias $f'\pm\sqrt{-100\phi}$,

al ménos siempre que 10000ϕ sea igual ó superior á $\frac{1}{4}$, lo que viene á ser lo mimo, siempre que no se tenga $\varphi<\frac{1}{40000}$, ó bien $\varphi<0{,}000025$.

Los razonamientos son aquí los mismos que hicimos (416).

§ Si falta aun verificar algunas raices de las presumidas, ó si se quiere llevar la exactitud de las raices halladas hasta la tercera decimal inclusivamente, se continuará la verificacion y aproximacion por medio de las ecuaciones en $(x'''-p''')$ y en $(z'''_{p'''}-1)$, que se obtendrían haciendo $10(x''-p'')=x'''$, y

$$\frac{1}{x'''-p'''}=z'''_{p'''}.$$

§ Procediendo de este modo, por medio de las ecuaciones en $(x'^{\nu}-p'^{\nu})$, en $(\alpha^{\nu}-p^{\nu})$, etc. si hay lugar, se acaba por determinar cuales son, entre las raices presumidas de la ecuacion propuesta en x, las que se deben admitir, y las que se deben escluir. Generalmente, no se está en el caso de récurrir á la ecuacion en (x^n-p^n) sinó cuando se quieren tener raices exactas hasta la decimal n.ª inclusive, ó que la propuesta tiene raices imaginarias, cuya parte real no es un número entero, y en las que la parte precedida del signo — debajo del $\sqrt{}$ es menor que $\frac{1}{4\times10^n}$; aun en la 2.ª circunstancia este recurso no es siempre necesario.

§ "Hemos llegado, concluye Budan, por nuestro método al objeto que nos habíamos propuesto, que era encontrar exactamente, hasta la decimal que se quiera, los valores reales que se pueden señalar á la incógnita de una ecuacion nnmérica de un grado cualquiera; y hemos llegado á conseguirlo, empleando solo las dos 1.as reglas de la Aritmética.

§ "La práctica, siendo la piedra de toque de la comodidad de los diversos métodos, deseamos que nuestros lectores se ejerciten en resolver las mismas ecuaciones numéricas por nuestro método y por los que le han precedido; que ellos resuelvan por ejemplo la ecuacion del 5.º grado del número (416) y las del 4.º del (414)."

Yo estracté la obra de Budan en el año mismo de 1807 en que se publicó, sin saber aun nada del concepto que había merecido á los matemáticos: despues he tenido la satisfaccion de ver, que Mr. Lagrange ha formado de dicha obra el mismo concepto que yo formé desde un principio; pues dice pág. 166 de la 3.ª edicion de su *Resolucion de las ecuaciones numéricas*, "se puede decir que esta obra no deja,

nada que desear sobre la resolucion de las ecuaciones numéricas, cuyas raices son todas reales, y bajo este aspecto podría servir de suplemento al presente tratado."

Posteriormente he inventado yo mi nuevo método; y para que se patenticen mas las ventajas que lleva tambien al de Mr. *Budan*, voy á aplicarle á las dos últimas ecuaciones de dicho Autor.

La primera es

$$X^3-51X^2+761X-2655=0 \quad (\alpha).$$

El supuesto $X=1$, da -1944 de error; $X=2$, da -1320 de error; y 2 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 4.

Tomando 4 por tercer número supuesto, da -371 de error; y 0,77 para la correccion al 4; que, agregándosela, da 4,77.

Tomando 5 por cuarto número supuesto, da *cero* de error; por lo que 5 es raiz de la (ec. α).

Para encontrar las demas, se divide su primer miembro por $X-5$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene $X^2-46X+531=0$;

que da (I 253) $X=23\pm\sqrt{23^2-531}=23\pm\sqrt{-2}$;

que son imaginarias.

La última es la siguiente

$$x^5-3x^4-3x^3+7x^2+8x+2=0 \quad (6).$$

El supuesto $x=1$, da $+12$ de error.

El supuesto $x=2$, da $+6$ de error, y $+1$ para la correccion al 2; que, agregándosela, da 3.

Tomando 3 por tercer número supuesto, da $+8$ de error, y -3 para la correccion al 2; que, agregándosela, da -1.

Tomando -1 por cuarto número supuesto, da 0 de error; por lo que -1 es raiz de la ecuacion. Para encontrar las demas, se divide el primer miembro de la (ec. 6) por $x+1$; é igualando el cocieute á *cero*, se tiene

$$x^4-4x^3+x^2+6x+2=0 \quad (6').$$

Para aplicarle el método, supongámos $x=1$; lo que da 6 de error.

El supuesto $x=2$, da $+2$ de error, y 0,5 para la correccion al 2; que, agregándosela, da 2,5.

Tomando 2,5 por tercer número supuesto, da $+0,1875$ de error, y 0,043, para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,543.

Tomando 2,543 por cuarto número supuesto, da $-0,2356$ de error; el cual, siendo negativo, indica que al ménos una raiz real se halla entre 2,5 y 2,543. Para encontrar la correccion al 2,5, se multiplica su error $+0,1875$ por $2,5-2,543=-0,043$; y dividiendo el producto $-0,0080625$ por la diferencia de los errores de signos contrarios que producen los números supuestos mas próximos entre sí, que es $-0,2356-0,1875=-0,4231$, resulta $+0,019$ para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,519.

Tomando 2,52 por quinto número supuesto, da $-0,2141$ de error; lo que

indica, que la raiz se halla entre 2,5 y 2,52; y resulta +0,0093 para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,5093.

Tomando 2,5093 por sesto número supuesto, da —0,20068 de errór; la raiz se halla entre 2,5 y 2,5093; y resulta 0,0045 para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,5045.

Y pues que ya la correccion se halla en el tercer guarismo decimal, tomarémos, por valor suficientemente aproximado de esta raiz, el 2,5045.

Para encontrar las demas raices, dividirémos el primer miembro de la (ec. 6′) por x—2,5045; é igualando el cociente á cero, se tiene

$$x^3—1,4955x^2—2,7454x—0,8757=0 \quad (6''').$$

Para aplicarle el método, supongamos $x=1$; lo que da —4,1166 de error.

El supuesto $x=2$, da —4,3485 de error; y —17 para la correccion al 1; que, agregándosela, da —16.

Tomando —16 por tercer número supuesto, da —4434,9593 de error; y como este error es numéricamente mayor que los dos anteriores, y del mismo signo, recurirémos á suponer $x=10$, 100, 1000 etc. —10, —100, —1000 etc.

Suponiendo $x=10$, da +822 de error; que, siendo de signo contrario al error del 2, indica que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 tiene dos guarismos mas que el del 2, haré como supuesto intermedio $x=5$; lo que da +73 de error; que siendo de signo contrario al error del 2, indica que entre 2 y 5 hay al ménos una raiz real; y como todavía el error del 5 tiene un guarismo mas que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=3$; lo que da +4,4286 de error; y como es de signo contrario al del 2, indica que entre 2 y 3, se halla al ménos una raiz real; y teniendo ya los errores del 2 y del 3 un mismo número de guarismos, hallarémos la correccion al 2. Para esto, se multiplica su error —4,3485 por 2—3=—1; y dividiendo el producto +4,3485 por la diferencia de los errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que es

$$4,4286—\,—4,3485=4,4286+4,3485=8,7771,$$

resulta 0,5 para la correccion al 2, que, agregándosela, da 2,5.

Tomando 2,5 por séptimo número supuesto, da —1,461 de error; lo que indica que la raiz se halla entre 2,5 y 3.

Para encontrar la correccion al 2,5, se multiplica su error —1,461 por 2,5—3=—0,5; y dividiendo el producto +0,7305 por la diferencia de los errores de signos contrarios, que provienen de los números supuestos mas próximos entre sí, que es 5,8896, resulta 0,12 para la correccion al 2,5; que, agregándosela, da 2,62.

Tomando 2,62 por octavo número supuesto, da —0,3468 de error; lo que indica que la raiz se halla entre 2,62 y 3; y resulta +0,028 para la correccion al 2,62; que, agregándosela, da 2,648.

Tomando 2,648 por noveno número supuesto, da —0,153 de error; la raiz se halla entre 2,648 y 3; y resulta 0,011 para la correccion al 2,648; que, agregándosela, da 2,659.

Tomando 2,66 por décimo número supuesto, da +0,0614 de error; la raiz se halla entre 2,648 y 2,66; y resulta —0,0034 para la correccion al

2,66; que, agregándosela, da 2,6566; y pues que ya la correccion viene en el tercer guarismo decimal, tomarémos el valor 2,6566 por suficientemente aproximado de la raiz.

Para encontrar los otros dos valores, dividirémos el primer miembro de la (ec. $\mathfrak{C}''$) por $x-2,6566$; é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^2+1,1611x+0,3311=0\ (\mathfrak{C}''');$$

que da (1253)

$$x=-0,5805\pm\sqrt{(0,5805)^2-0,3311}=-0,5805\pm\sqrt{0,0058}=-0,5805\pm0,70;$$

que da $x=-0,5805+0,07=-0,5105$, y $x=-0,6505$.

Luego las cinco raices de la (ec. $\mathfrak{C}$) son

$$x=-1;\ x=2,5045;\ x=2,6566;\ x=-0,5105;\ x=-0,6505.$$

Si se compara esto con lo que exige el método de Mr. *Budan*, para decirnos solamente que una de las raices es -1; que las raices positivas son con ménos de una unidad de diferencia 2,4 y 2,7, y que hay dos raices negativas entre 0, y -1, sin determinarlas, como nosotros lo hacemos con una aproximacion regular, no podrán ménos de convencerse de las ventajas que proporciona mi método sobre este de Mr. *Budan*; y en virtud de lo espuesto sobre este particular en mi *Compendio de Matemáticas*, en el Tomo 1.° parte 1.ª de este *Tratado Elemental*, en los §§ 94*a* al 94*k* de este volúmen, y en esta *Teoría General de las Ecuaciones*, me parece que ya no hay motivo para dudar de la superioridad de mi método sobre todos los demas. Sin embargo, como la práctica es la piedra de toque (segun *Budan*) en que se deben ensayar todos los nuevos procedimientos, yo ruego á los lectores, que apliquen mi método á las ecuaciones que se resistan á los demás métodos conocidos; y no dudo que se convencerán de que mi espresado método supera todas las dificultades.

FIN DEL TOMO II PARTE I.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA JAEN

ÍNDICE

De las materias contenídas en este volúmen.

PÁGINAS.

PRÓLOGO. III
CONSIDERACIONES ACERCA DE LAS LÍNEAS TRIGONOMÉTRICAS 1
De la Trigonometría esférica 23
Resolucion de los triángulos esféricos, y con especialidad los rectángulos. 38
Resolucion de los triángulos esféricos oblicuángulos 48
Digresion en que se *espresa la relacion que hay entre los lados y líneas trígonométricas de los ángulos opuestos en los triángulos, tanto rectilíneos como esféricos; en que se determina la superficie de un triángulo esférico; se resuelven en algunos casos los triángulos esféricos por métodos particulares con mas exactitud que por los métodos generales; y en que se insertan nueve importantísimos problemas de Euler, pertenecientes al círculo, que no son bastante conocidos* 62
APLICACION DEL ÁLGEBRA Á LA GEOMETRÍA Ó GEOMETRÍA ANALÍTICA . . 90
Determinacion de los puntos y rectas sobre un plano 109
De los puntos, de la línea recta y del plano, considerados en el espacio. 129
Del plano 147
De la trasformacion de las coordenadas 158
Idéa general de la teoría de las curvas 170
De las líneas de segundo órden ó secciones cónicas 177
Del círculo 183
De la elípse 188
De la parábola 211
De la hipérbola 222
Aplicacion de la trasformacion de las coordenadas á la investigacion de los diámetros conjugados de las secciones cónicas; y deduccion de las principales propiedades de estas curvas referidas á sus diámetros 235
De las secciones del cono oblicuo 246
De las líneas de segundo órden en general, suponiendo rectangulares los ejes 251
De los lugares geométricos, de la resolucion de algunos problemas y de la construccion de otras curvas, tanto algebráicas como trascendentes 277
DIGRESION *en que se determinan las relaciones que deben existir entre los coeficientes de la ecuacion general de segundo grado, para que represente:* 1.° *un lugar geométrico imaginario;* 2.° *un*

punto; 3.º dos rectas, sean ó no paralelas, ó que se confundan en una sola; discusion de algunas ecuaciones, cuyos lugares geométricos son puntos aislados; y determinacion de los centros, diámetros y asíntotas de las curvas 286

DIGRESION *acerca de las superficies curvas; en que se añade lo relativo á considerar dichas superficies por su generacion, y á las curvas de doble curvatura* 300

De las superficies de segundo grado 314

De las superficies curvas consideradas bajo el aspecto de su generacion. 325

De las superficies cilíndráceas 327

De las superficies coniculares 329

De las superficies desarrollables en general 330

De las superficies de revolucion 331

De las superficies gauchas ó torcidas. 332

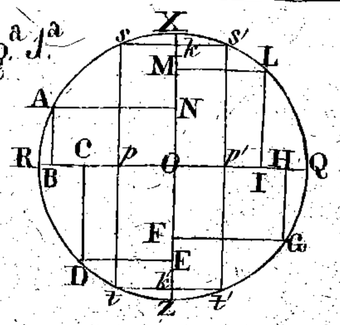
De las superficies conoides 333

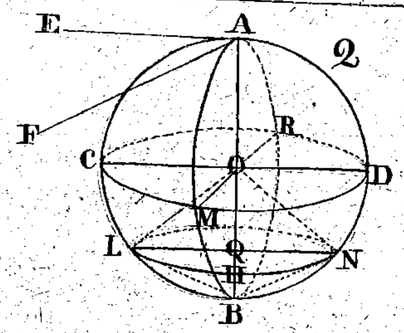
De las curvas de doble curvatura ..... id.

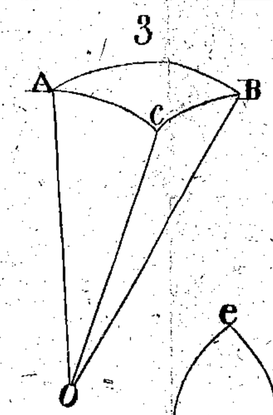
TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES 338

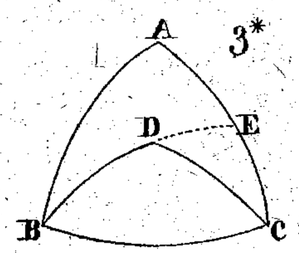
DIGRESION *en que se manifiestan otras propiedades de las ecuaciones de todos los grados, la eliminacion de las incógnitas en las ecuaciones de cualquier grado, el modo de hallar sus raices iguales, las imaginarias etc.; y en que se espone el método de Mr. Budan para resolver las numéricas* 387

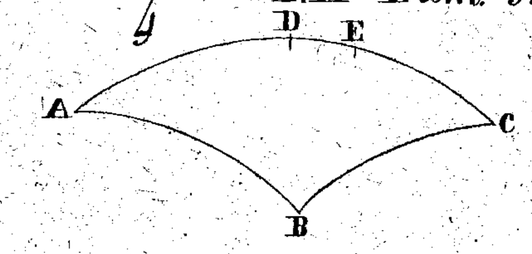
Fig.ª 1.ª

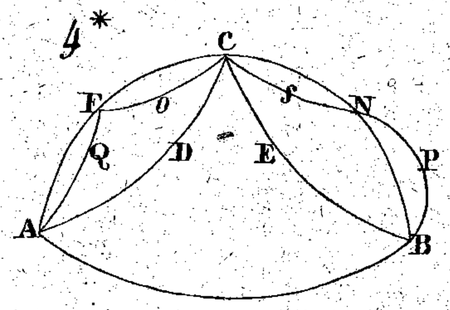

X
s
s'
k
M
L
A
N
R
C
p
O
p'
H
Q
B
I
F
G
E
D
k
i
Z
i

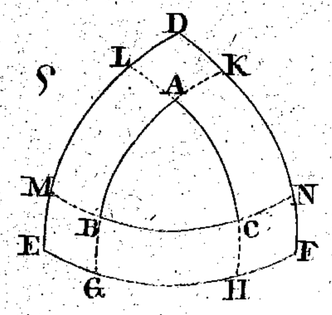

2
E
A
F
C
R
O
D
M
L
Q
N
H
B

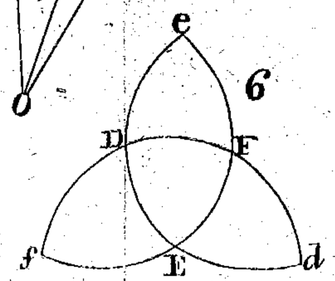

3
A
B
C
O

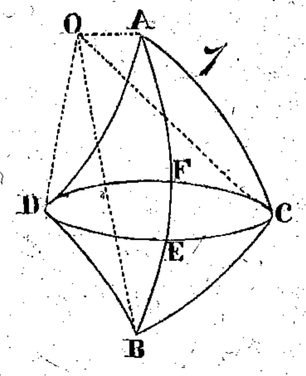

3*
A
D
E
B
C

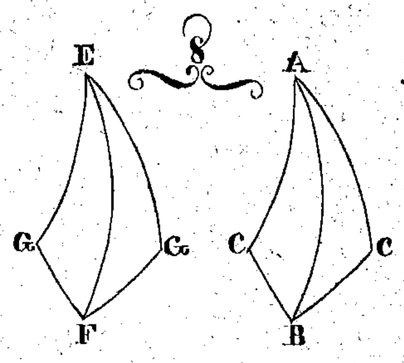

4
D
E
A
C
B

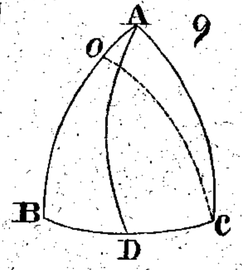

4*
C
F
o
f
N
Q
D
E
P
A
B

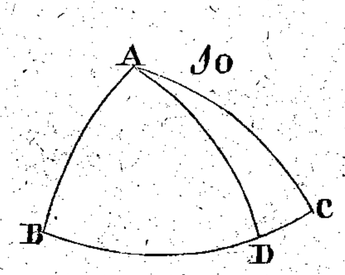

5
D
L
A
K
M
N
B
C
E
F
G
H

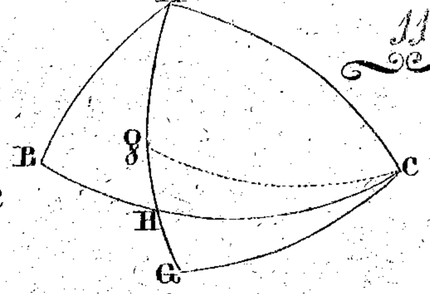

e
6
D
F
f
E
d

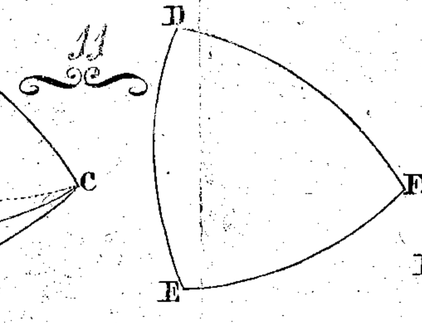

O
A
7
F
D
C
E
B

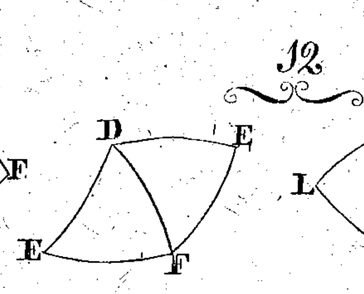

E
8
A
G
G
C
C
F
B

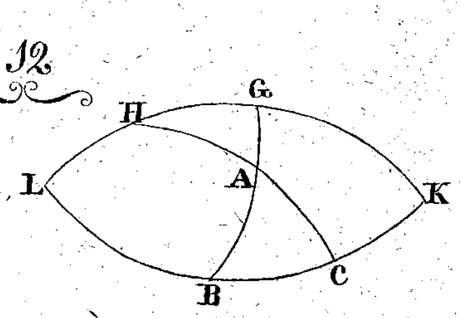

A
9
o
B
C
D

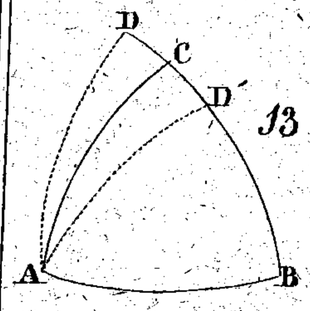

A
10
B
C
D

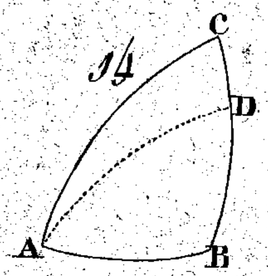

A
B
C
8
H
G

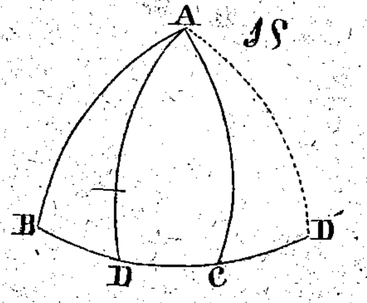

11
D
E
F

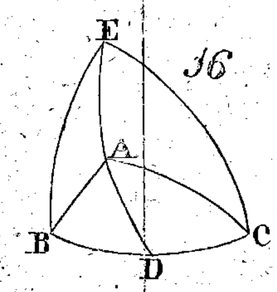

12
D
E
E
F

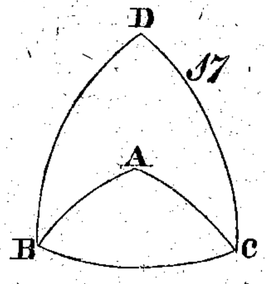

G
H
A
L
K
B
C

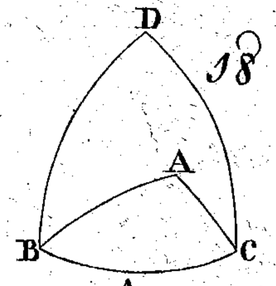

D
C
D
13
A
B

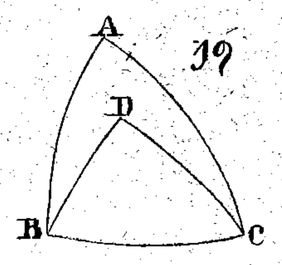

C
14
D
A
B

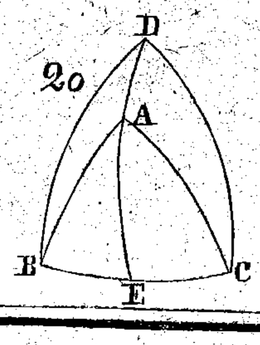

A
15
B
D
D
C

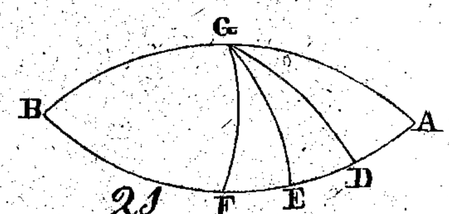

E
16
B
D
C

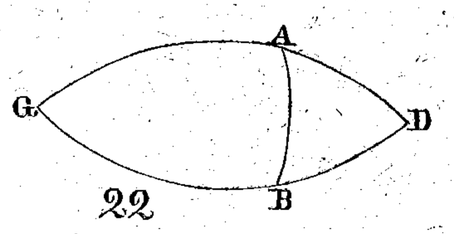

D
17
A
B
C


D
18
A
B
C


A
19
D
B
C


D
20
A
B
E
C


G
B
A
21
F
E
D


A
G
D
22
B

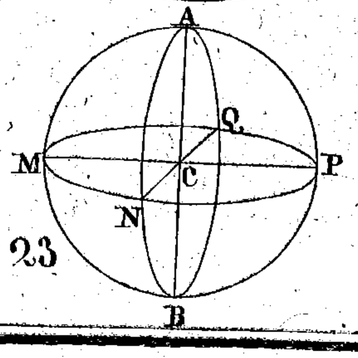
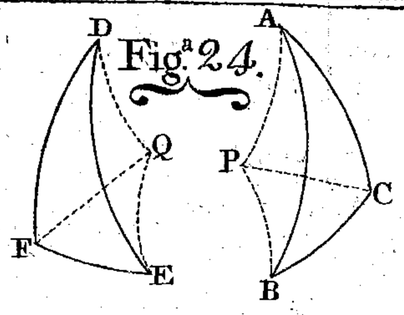
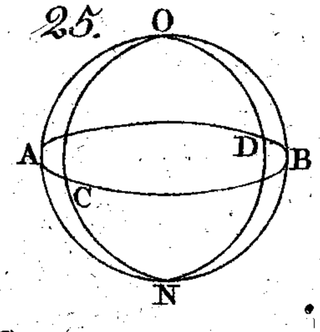

A
Q
M
P
C
N
23
B

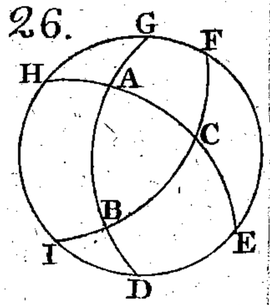
Fig.ª 24.



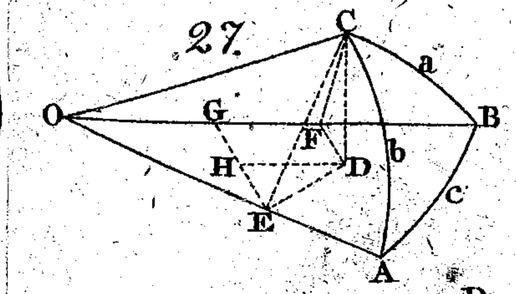
25.



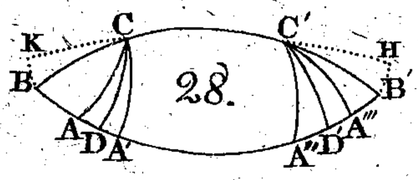
26.



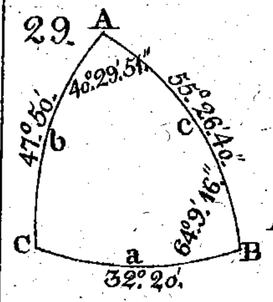
27.



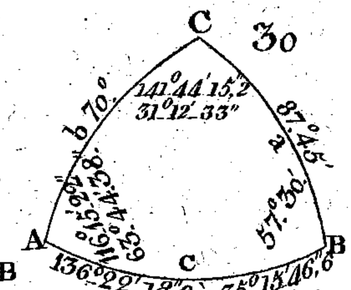
28.



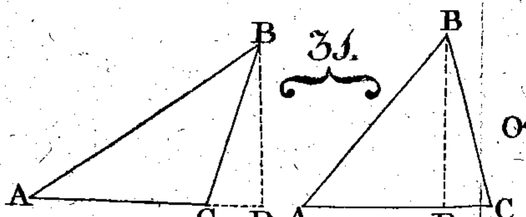
29.



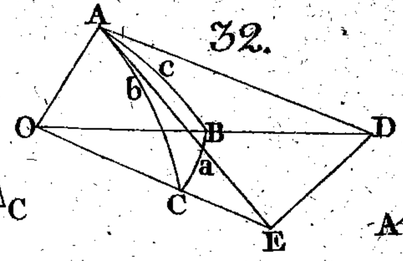
30



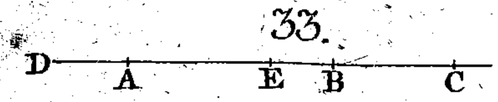
31.



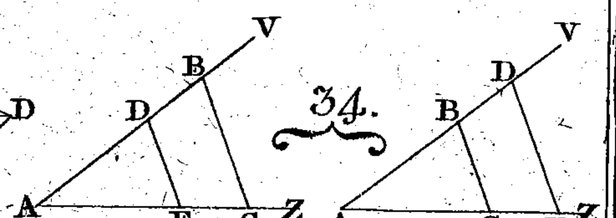
32.



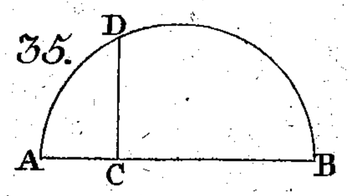
33.



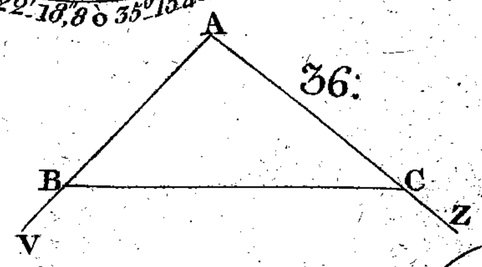
34.



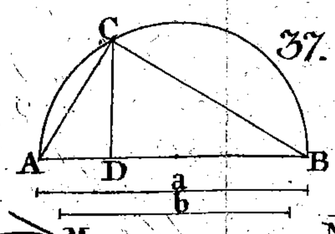
35.



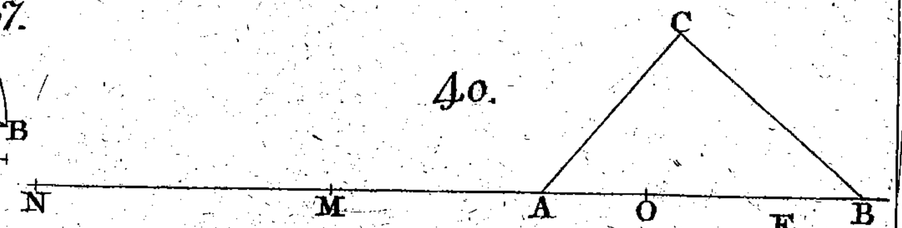
36.

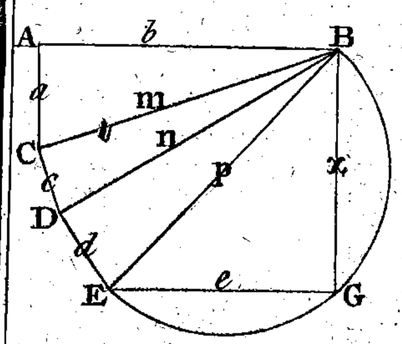


37.



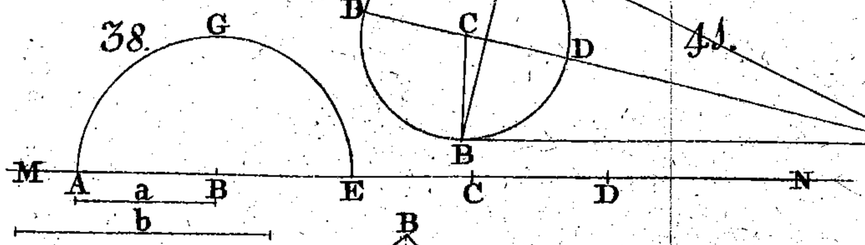
40.



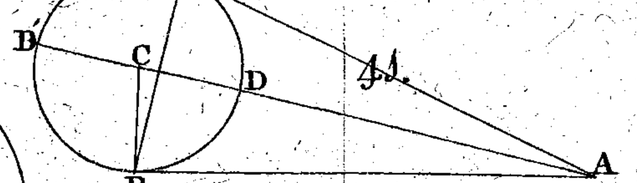


39.

38.



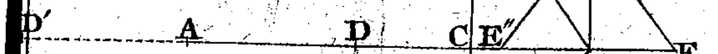
41.

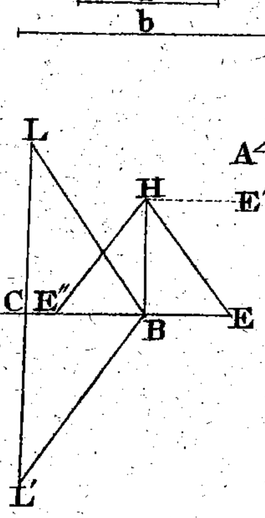


42.

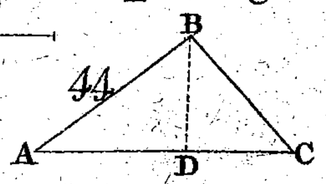


43.

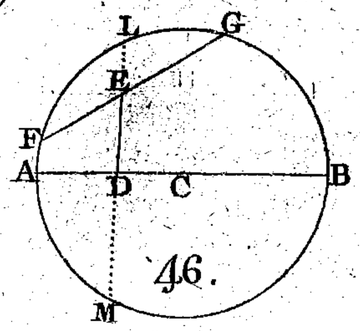




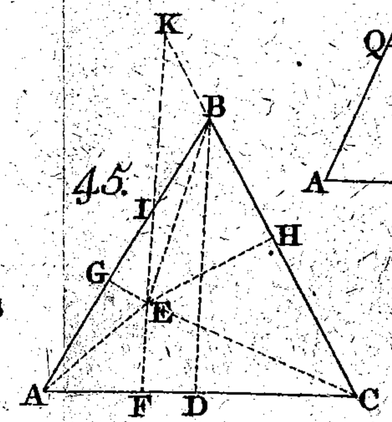
44.



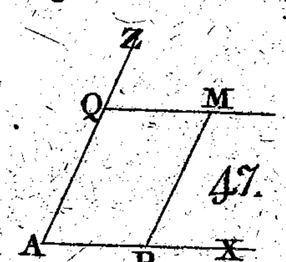
46.



45.



47.



48.

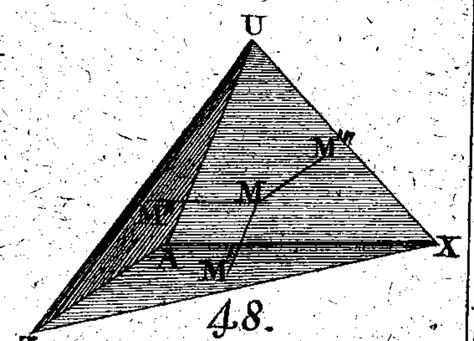
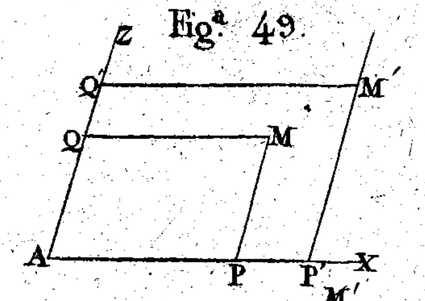
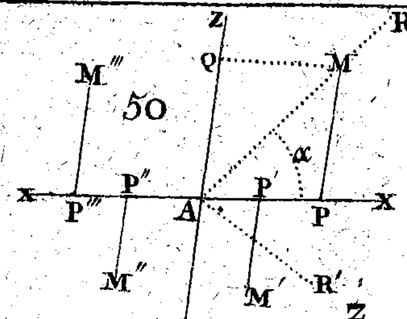
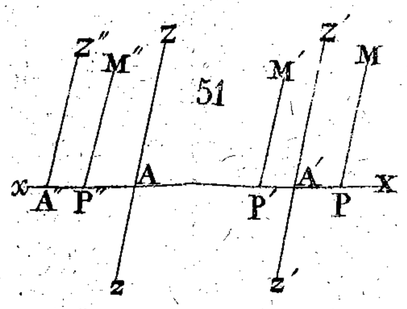
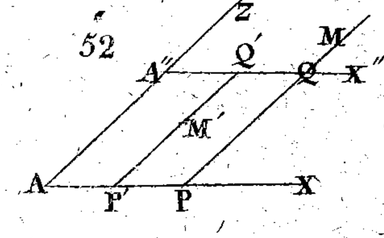


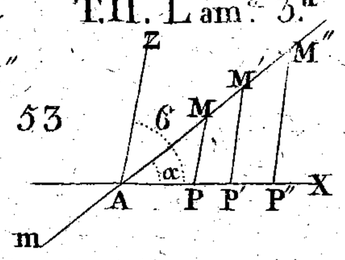
Fig.ª 49

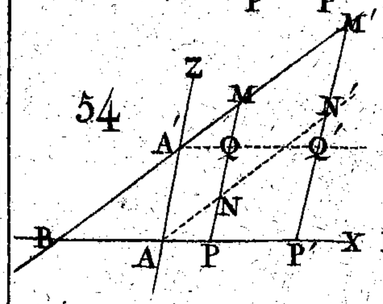

Z
Q'
M'
Q
M
A
P
P'
X

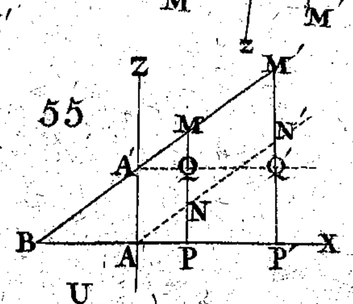

50
Z
R
Q
M'''
M
α
x
P''
P'
A
P
X
M''
M'
R'
z

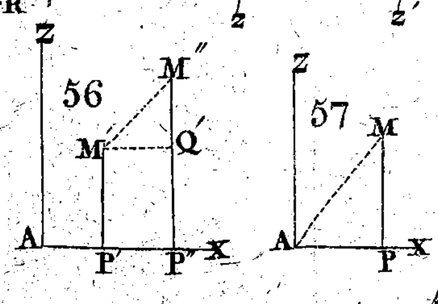

51
Z''
M''
Z
M'
M
x
A''
P''
A
A'
P'
P
X
z
z'


52
Z
A''
Q'
M'
Q
X''
A
F'
P
X

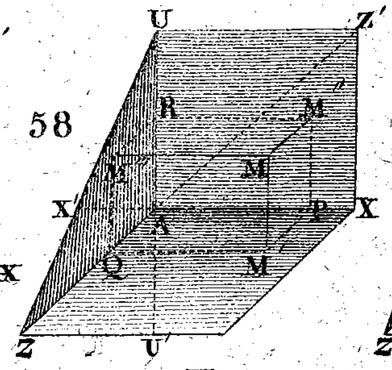

53
Z
M''
M'
6
M
α
A
P
P'
P''
X
m

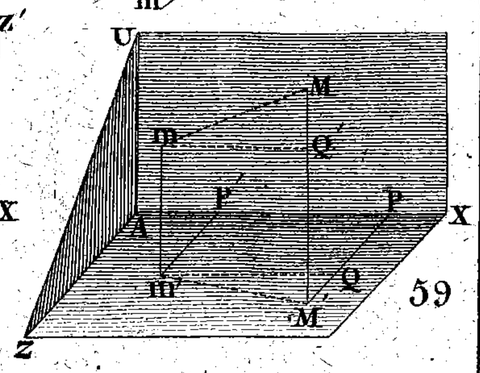

54
Z
M'
M
N'
A'
Q
Q'
N
B
A
P
P'
X

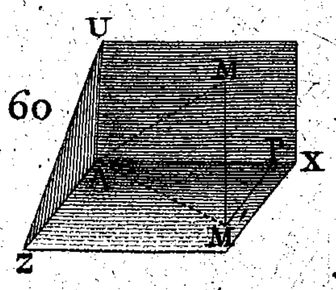

55
Z
M'
M
N'
A'
Q
Q'
N
B
A
P
P'
X

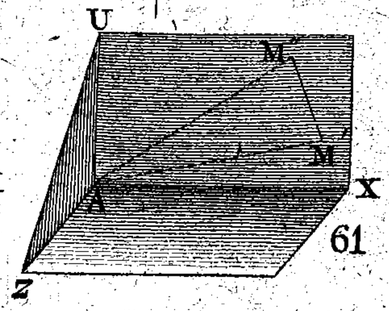

56
Z
M''
M'
Q'
A
P
P'
X

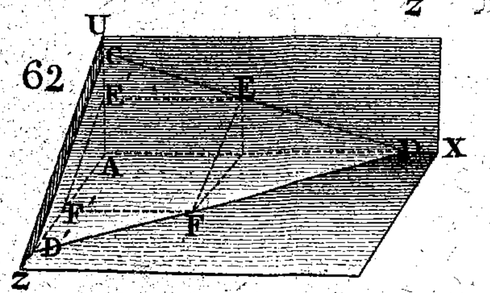
57
Z
M
A
P
X

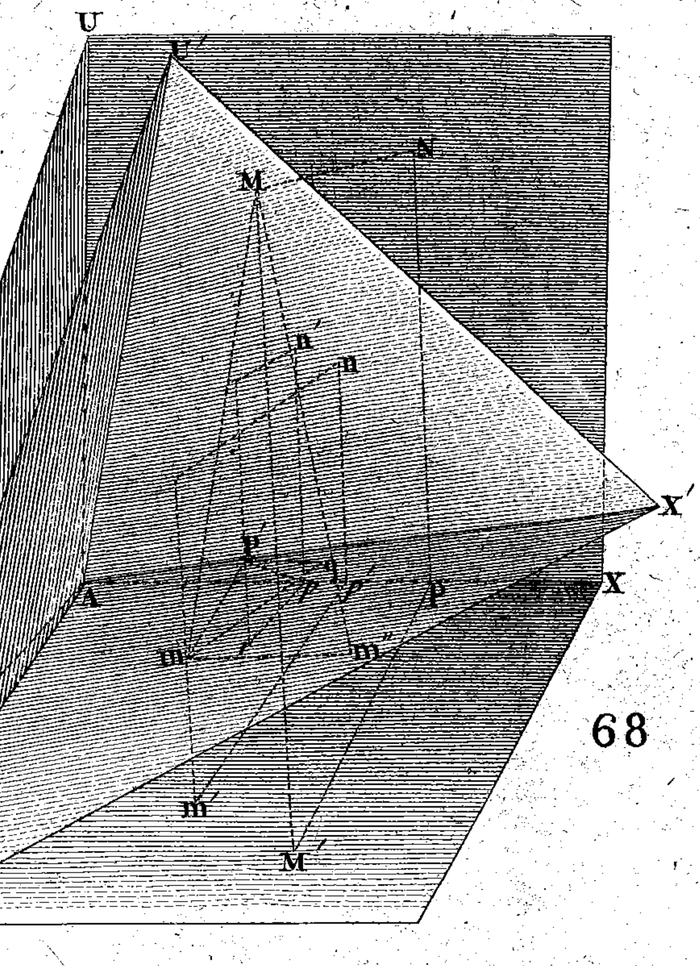

58
U
Z'
R
M'
M
X
A
P
X
Q
M
Z
U

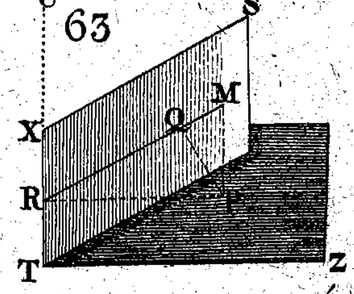

59
U
M'
m
Q'
P'
A
P
X
m'
Q
M
Z

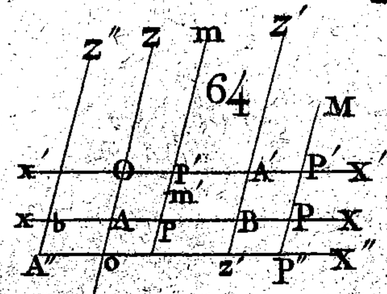

60
U
M'
M
P
X
A
Z

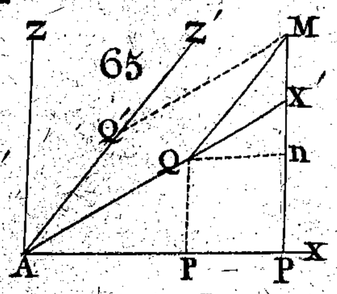

61
U
M'
M
A
X
Z

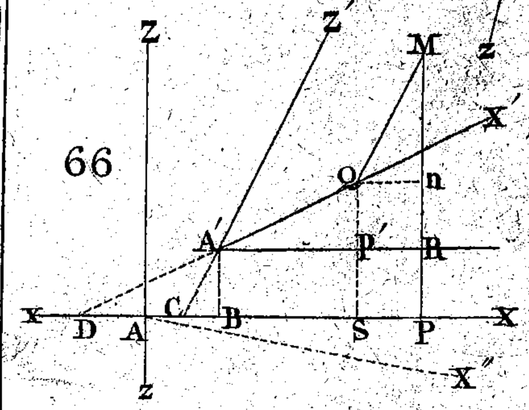

62
U
C
E'
E
A
D
X
F'
F
D'
Z

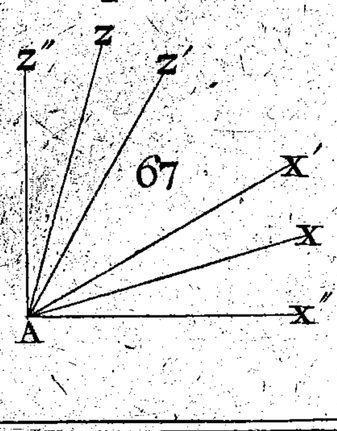

U
Z'
M'
S
M
n'
n
X'
P'
P
X
A
m'
m''
M''
m
M
Z
Z'


63
U
S
M
X
Q
R
P
T
Z

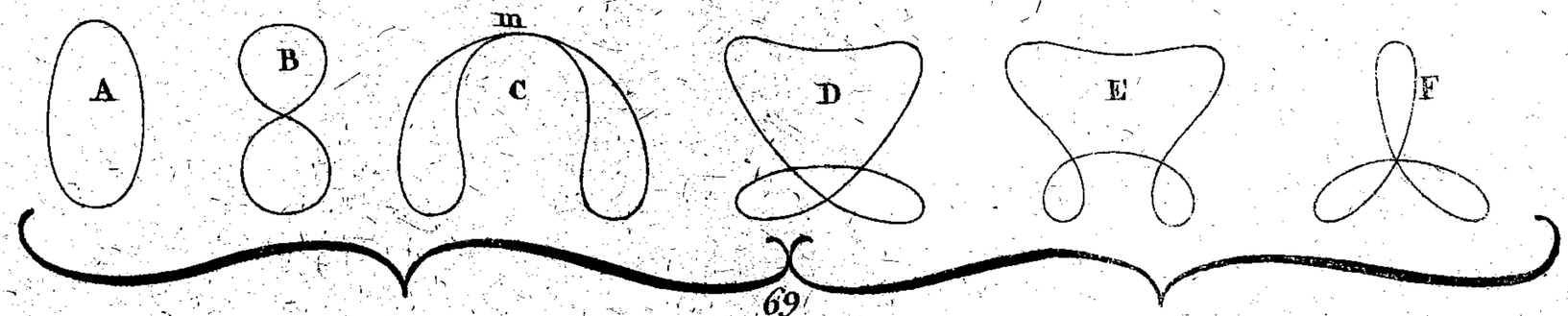

64
Z''
Z
m
Z'
M
x'
O
P'
A'
P'
X'
m'
x
b
A
P
B
P
X
A''
o
z'
P''
X''
z


65
Z
Z'
M
X'
Q'
n
Q
A
P
P
X

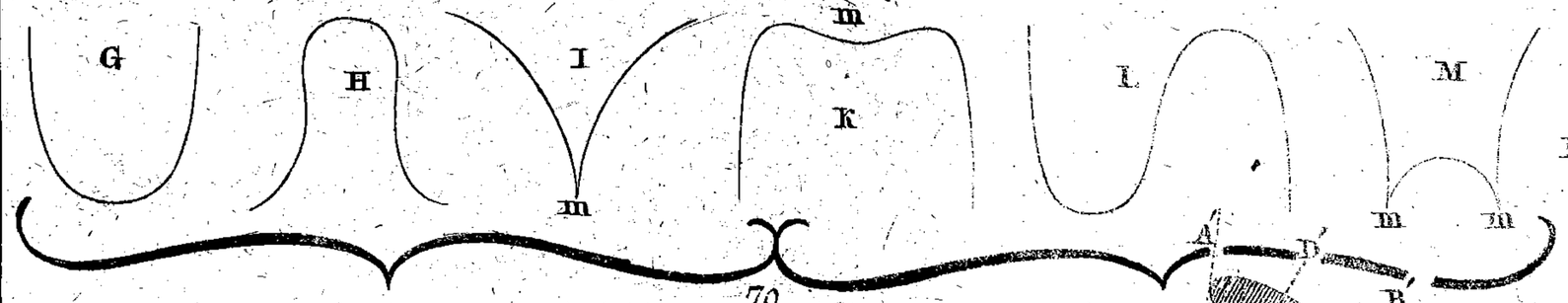

66
Z
Z'
M
X'
Q
n
A'
p'
n
x
D
A
C
B
S
P
X
X''
z


67
Z''
Z
Z'
X'
X
X''
A

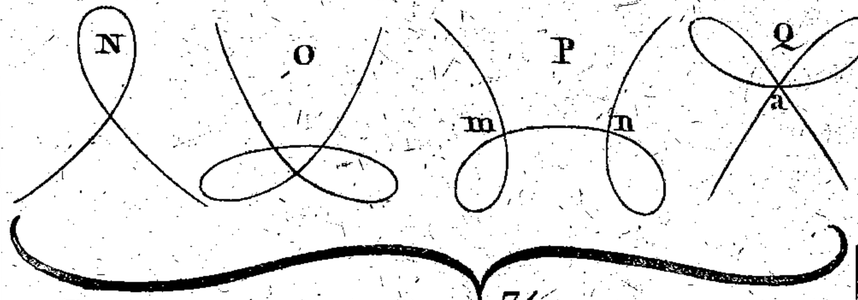
68
Z
Z'
X'
P'
P
X
A
m'
m''
M'


A
B
m
C
D
E
F

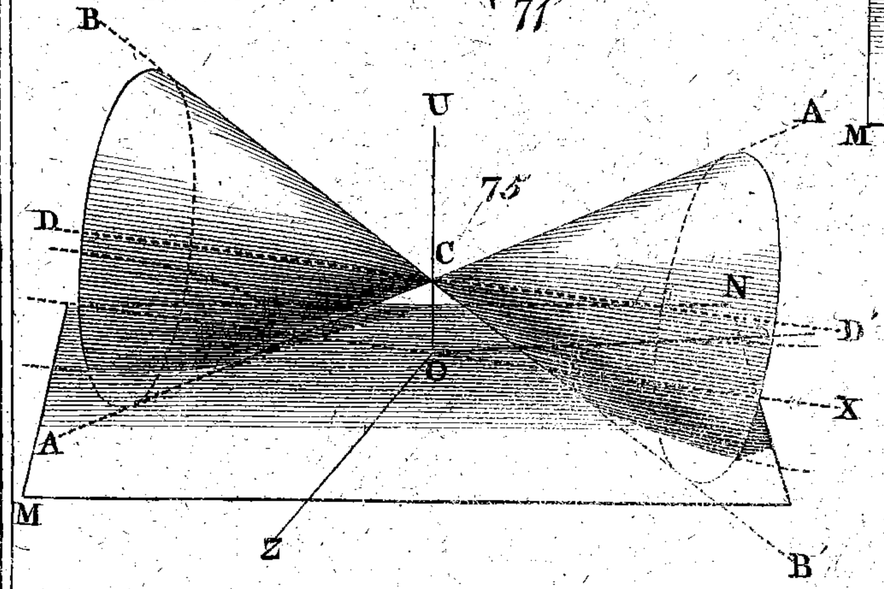
69

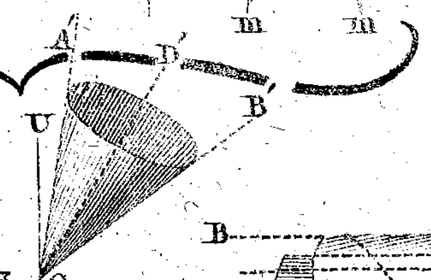

G
H
I
m
m
K
L
M
m
m

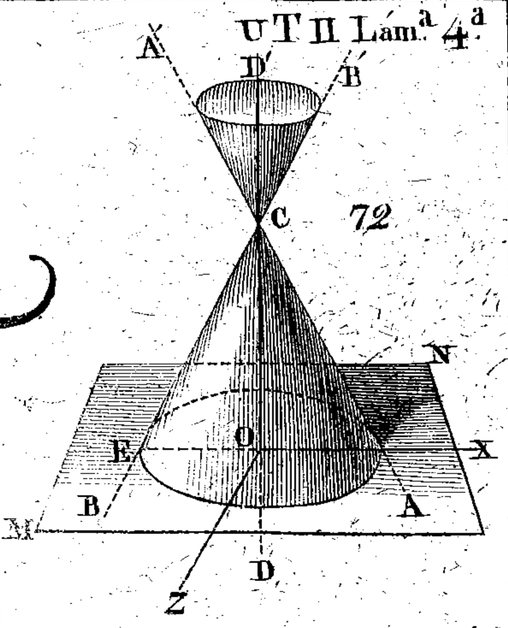
70

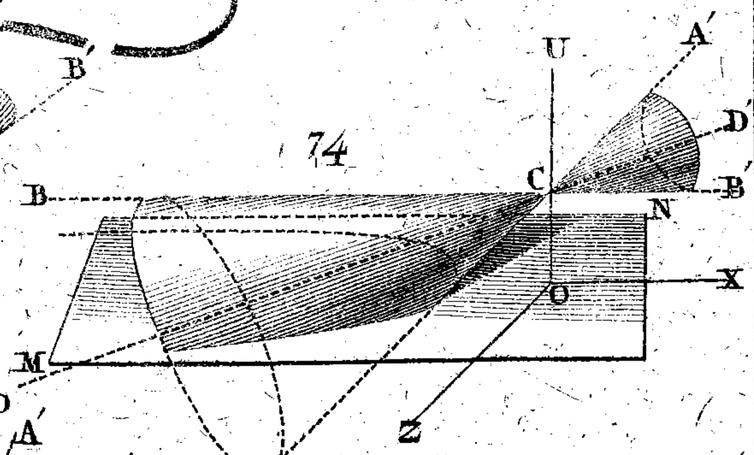

N
O
P
m
n
Q
a
m
n

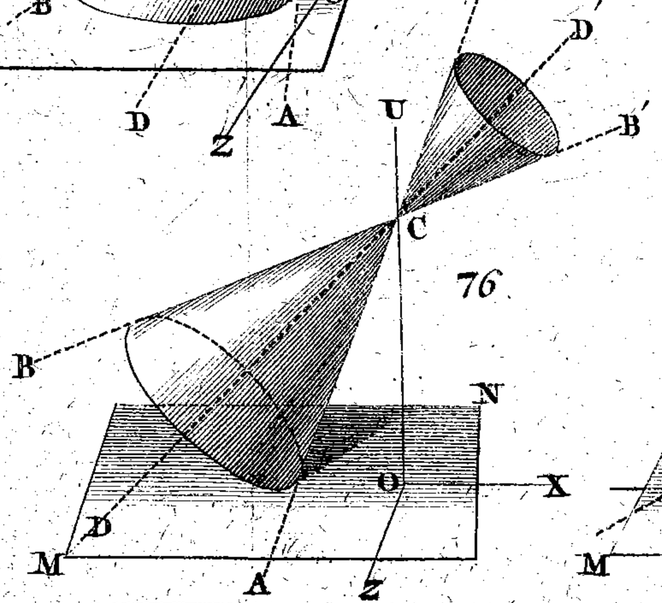
71


B
U
A
75
D
C
N
D
O
X
A
M
Z
B


A
D
B
U
73
C
N
B
O
X
M
D
A
Z


A
D
B
C
72
N
E
O
X
B
A
M
D
Z


74
U
A
D
C
B
B
N
O
X
M
D
A
Z


U
D
A
B
C
76
B
N
O
X
D
M
A
Z

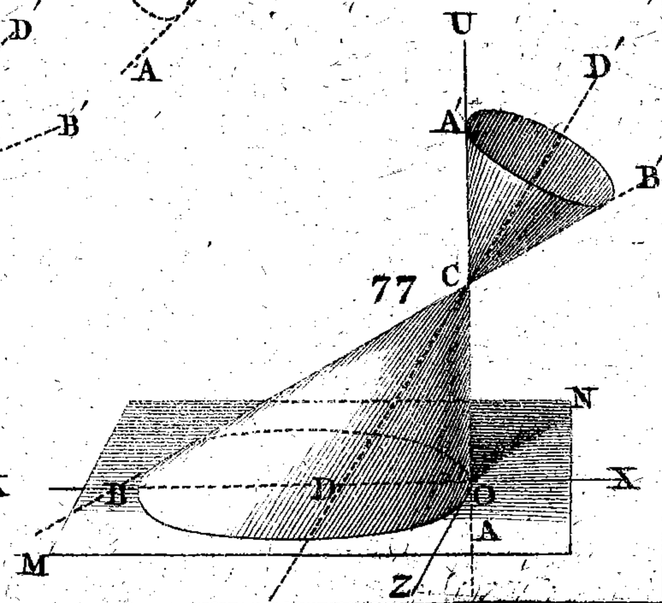
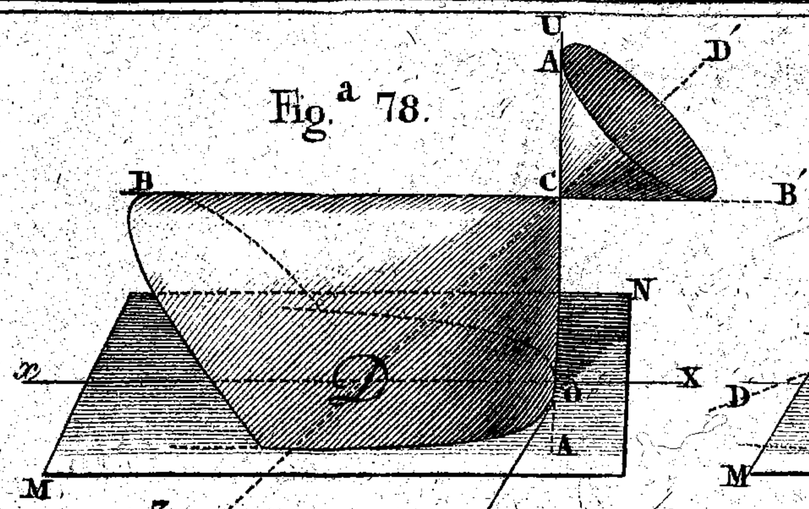
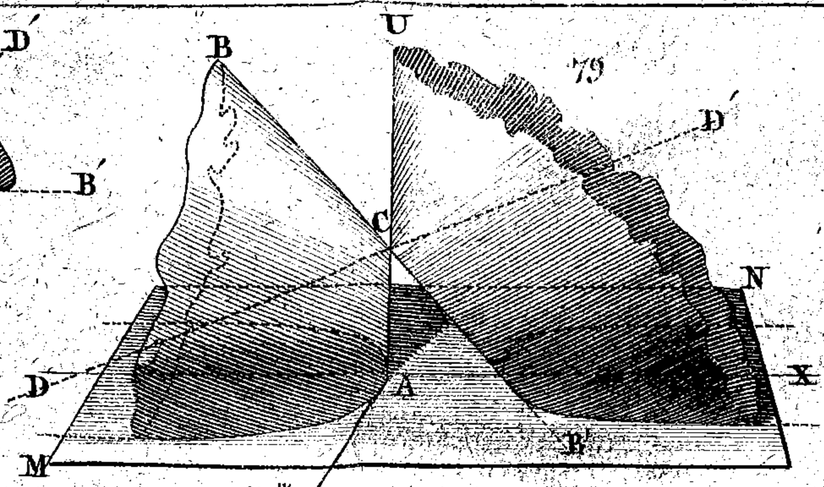
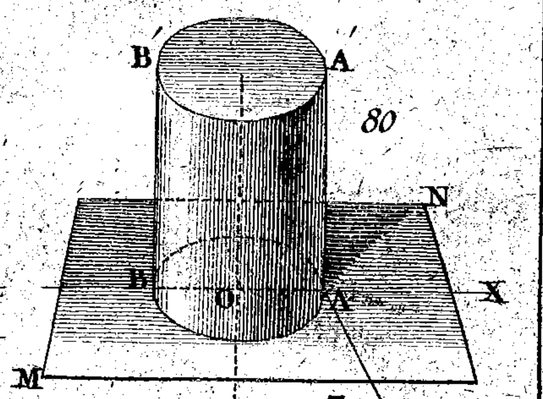
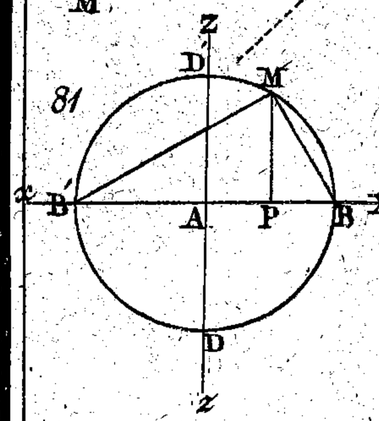

U
D
A
B
77
C
N
B
D
O
X
A
M
Z

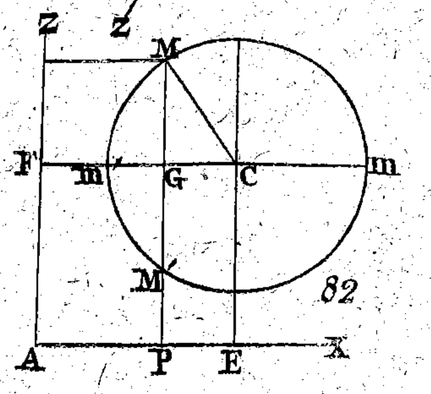
Fig.ª 78.

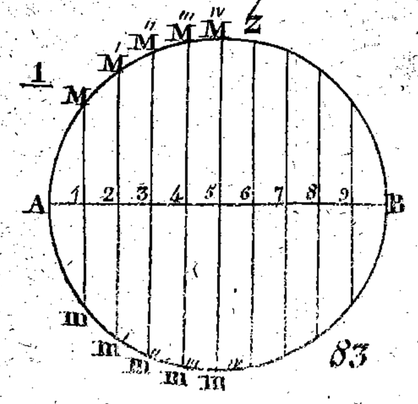

U
A
D´
C
B
B´
N
x
X
O
A
M

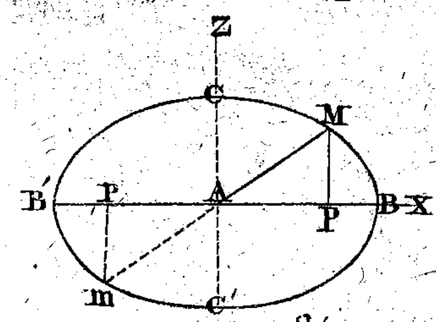

79
U
B
C
D´
N
D
A
X
B´
M

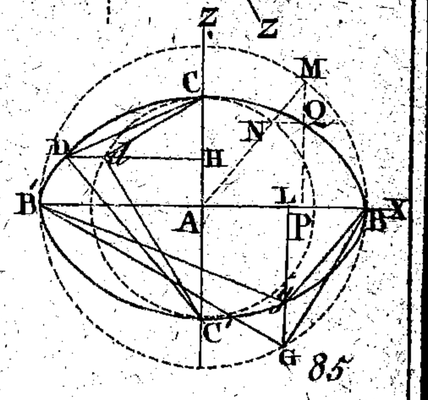

80
B´
A´
N
B
O
A
X
M

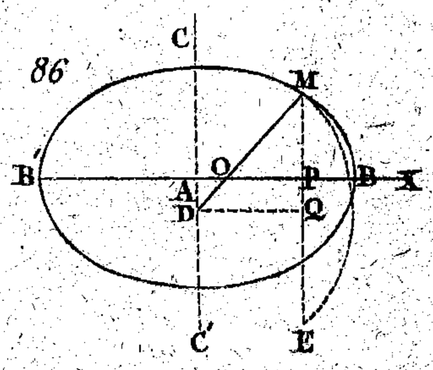

81
Z
D
M
x
B´
A
P
B
X
z

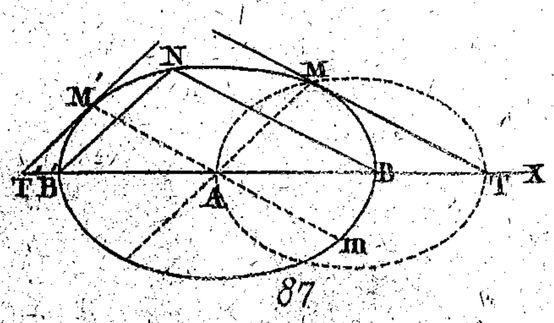

Z
Z
M
F
m
G
C
m
M´
82
A
P
E
X

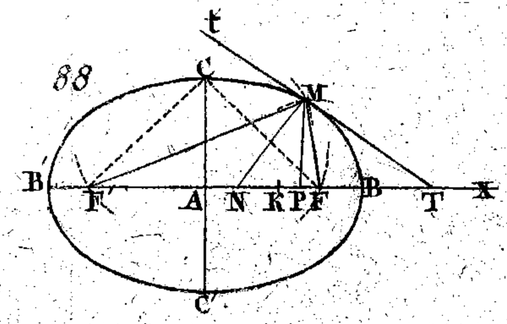

1
M
M´
M´´
M´´´
M´´´
Z
A
1
2
3
4
5
6
7
8
9
B
m
83

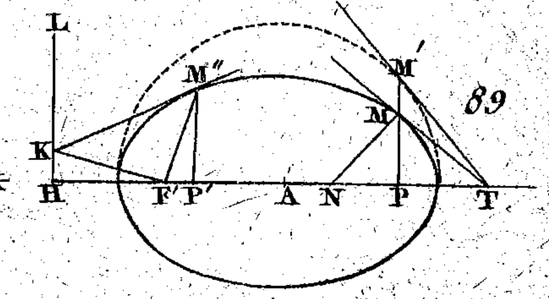

Z
C
M
B´
P
A
P
B
X
m
C´
84

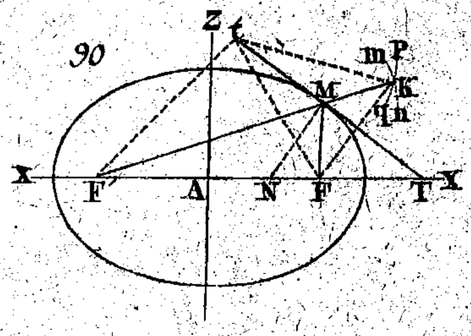

Z
Z
C
M
N
Q
D
d
H
L
B
A
P
B
X
C´
G
85

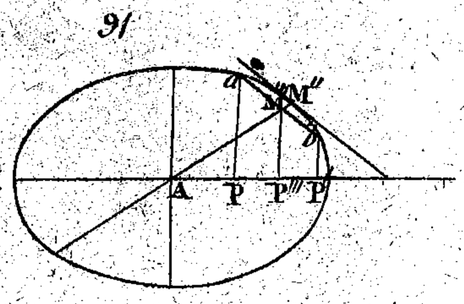

86
C
M
B´
A
O
P
B
X
D
Q
C´
E

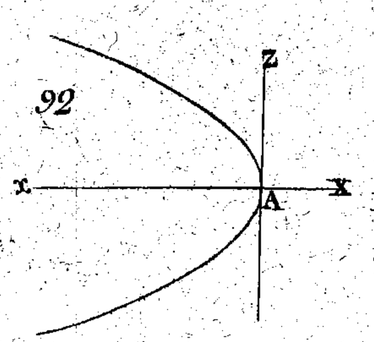

N
M´
M
T
B
B
A
T
X
m
87

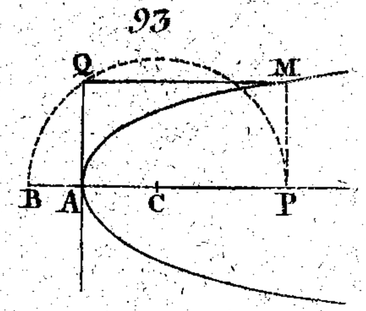

88
t
C
M
B´
F´
A
N
K
P
F
B
T
X
C´


L
M´´
M´
M
89
K
H
F´
P´
A
N
P
T


90
Z
t
m
P
M
K
h
X
F´
A
N
F
T
X


91
M´´
A
P
P´´´
P


92
Z
x
A
X


93
Q
M
B
A
C
P

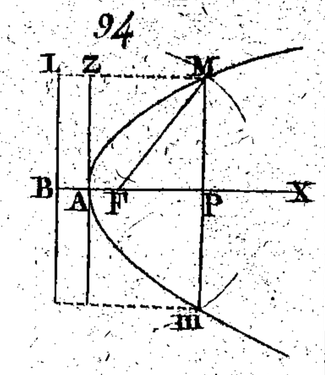
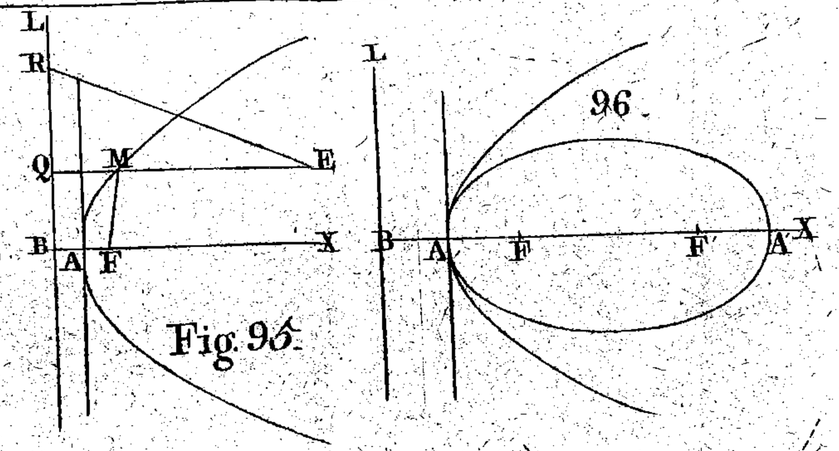
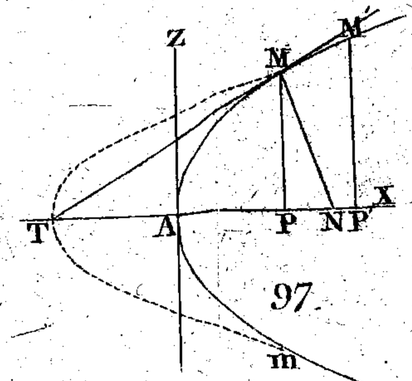

94
L
Z
M
B
A
F
P
X
m

Fig. 95.

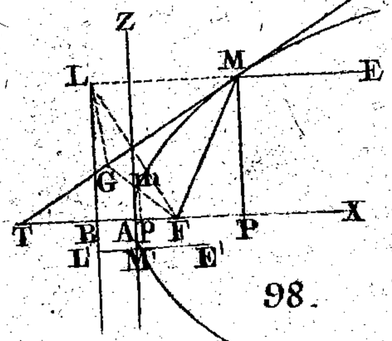


96.

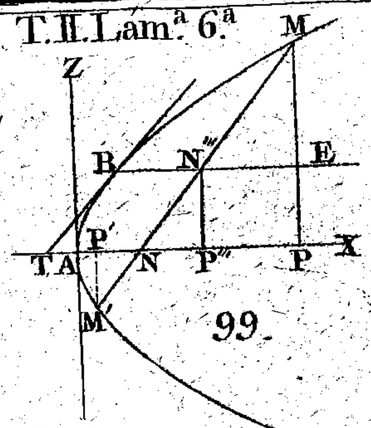
97.



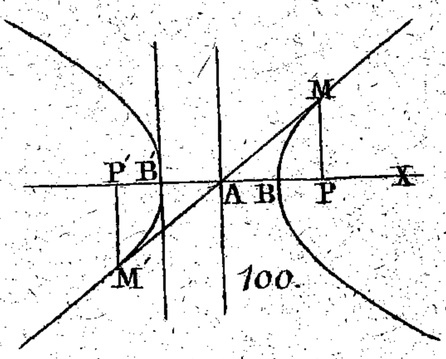
98.



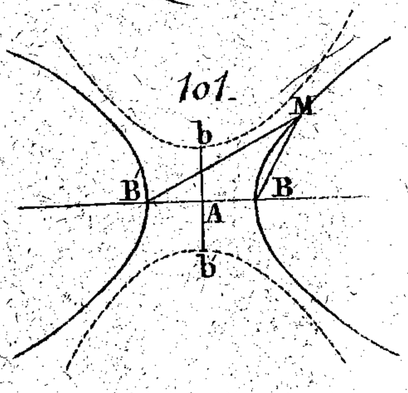
99.



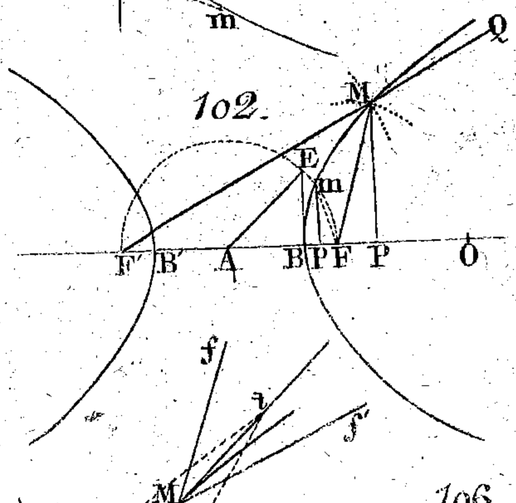
100.



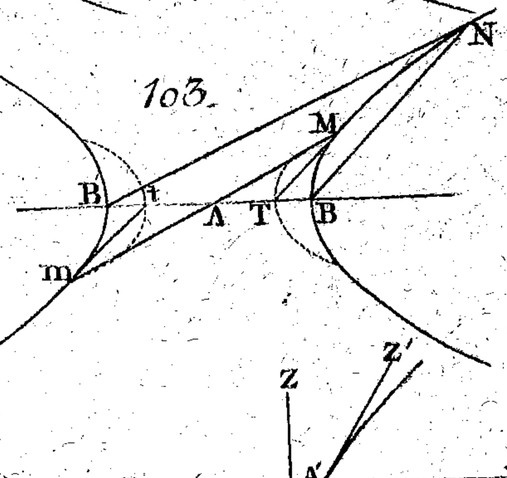
101.



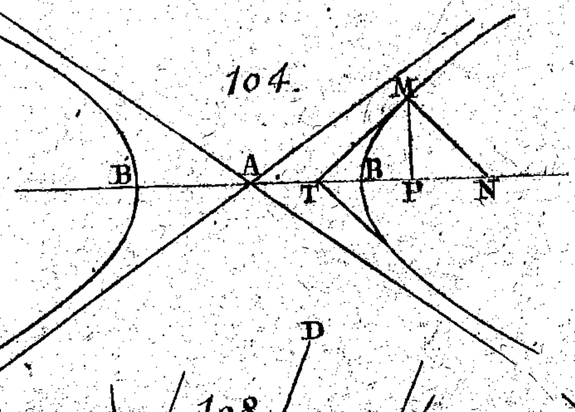
102.



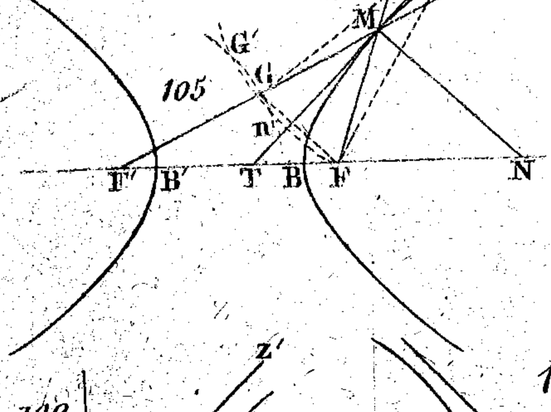
103.



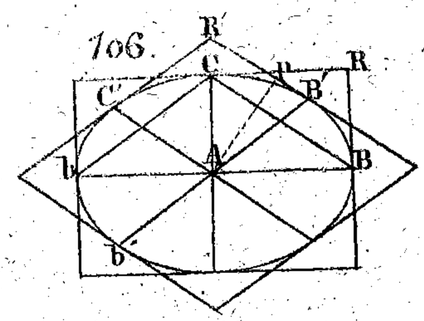
104.



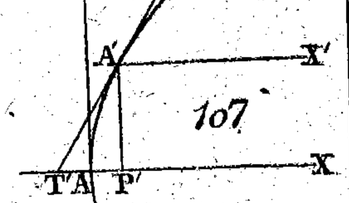
105.



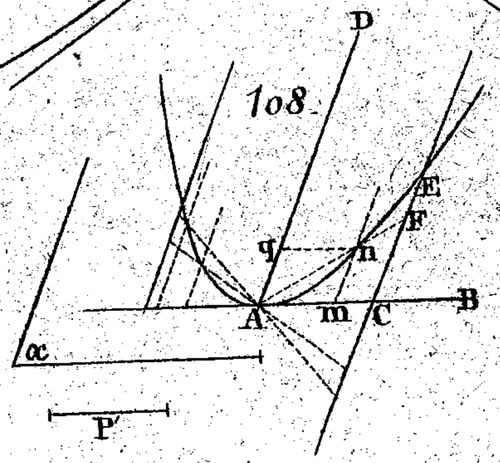
106.



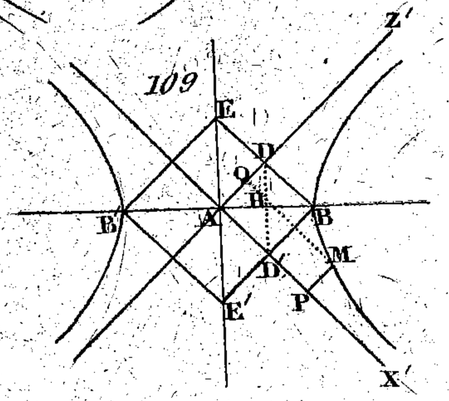
107.



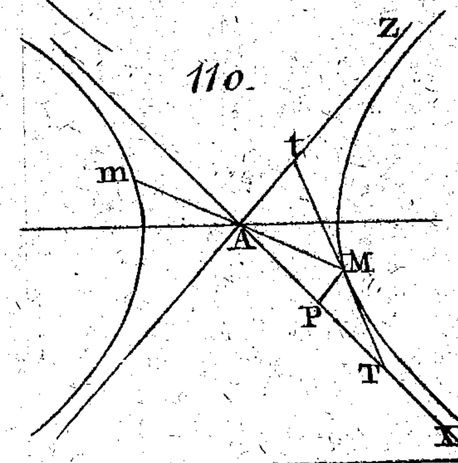
108.



109.



110.



111.

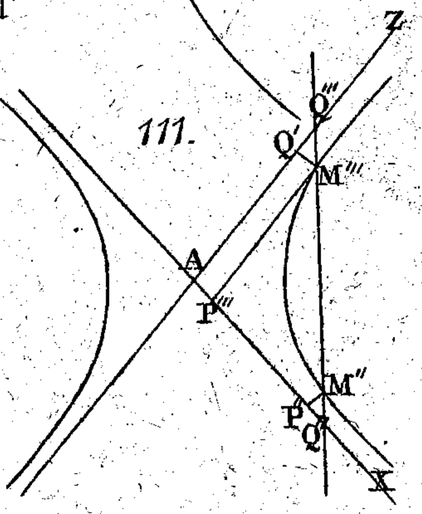
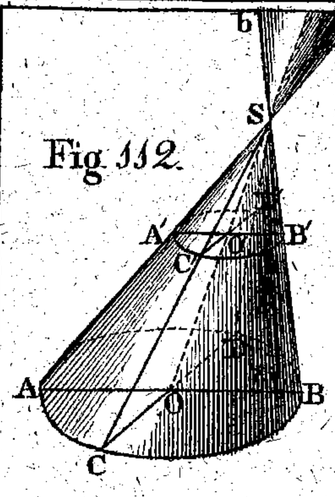
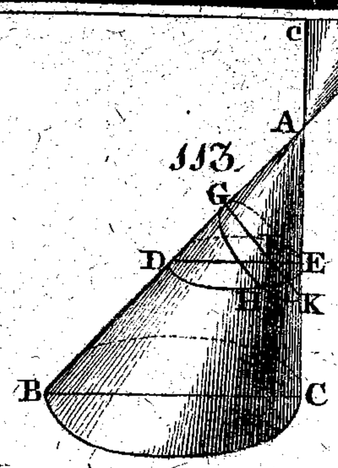


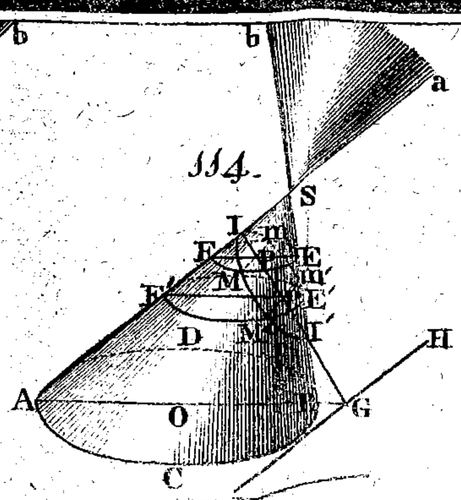
Fig 112.



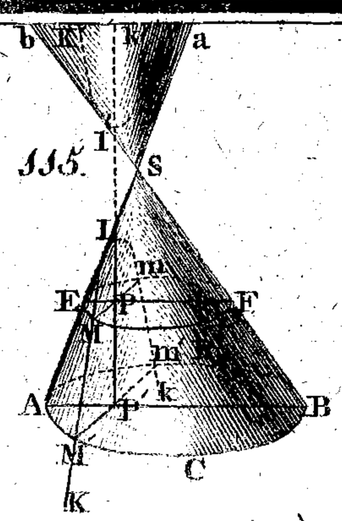
113.



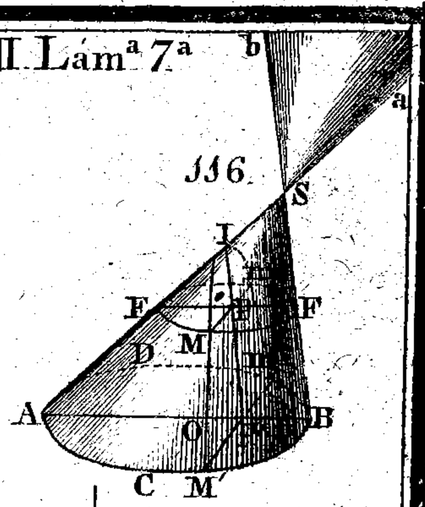
114.



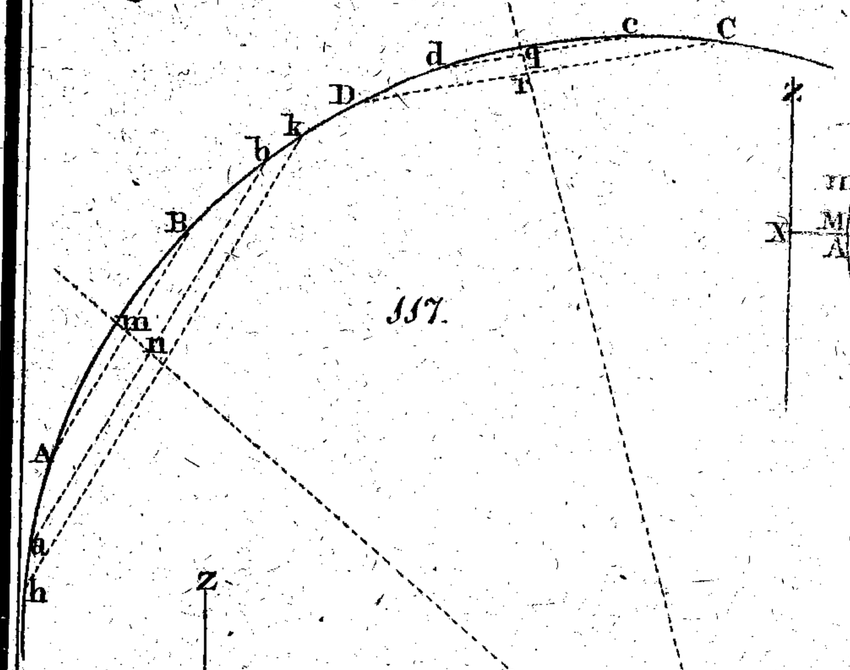
115.



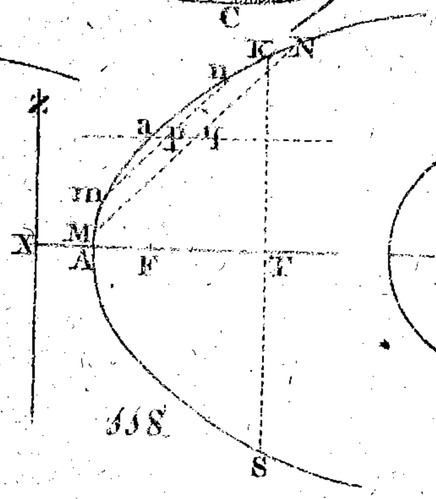
116.



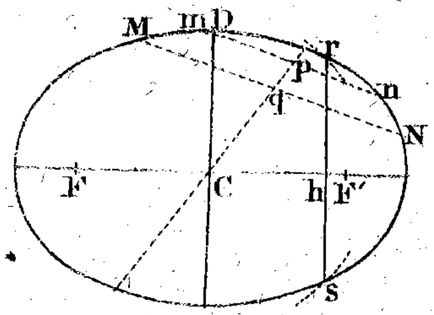
117.



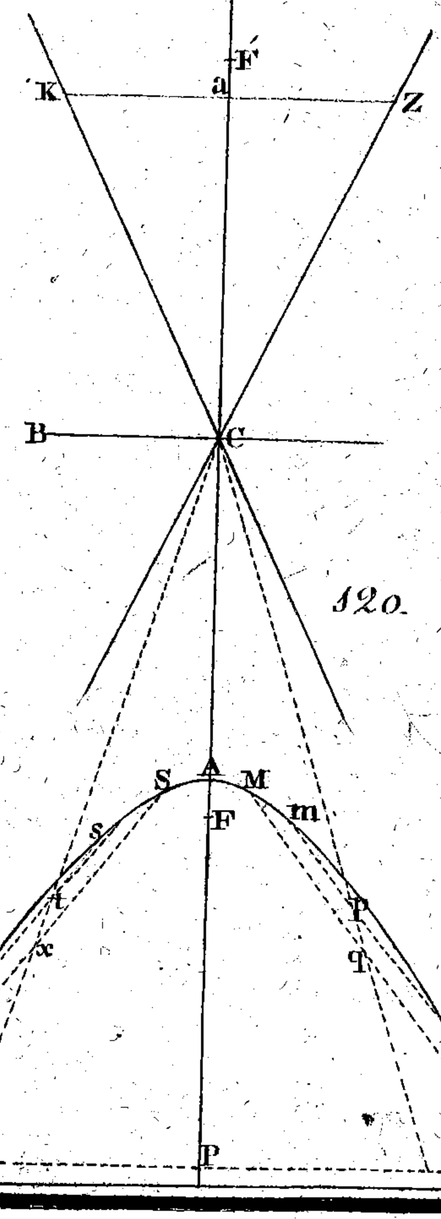
118.



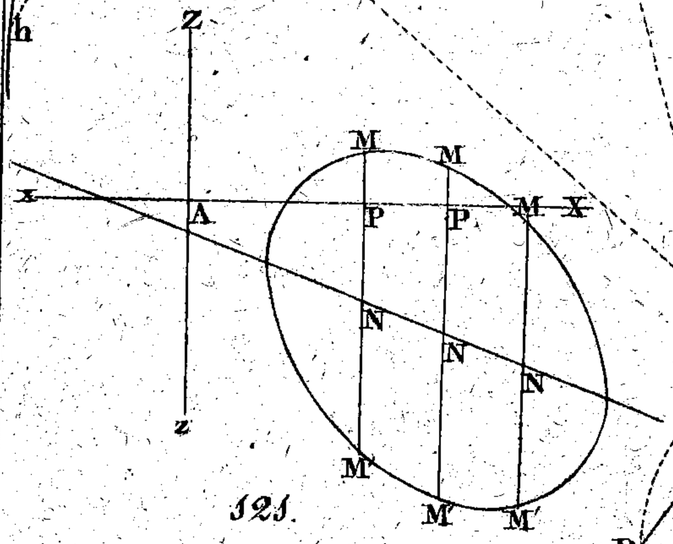
119.



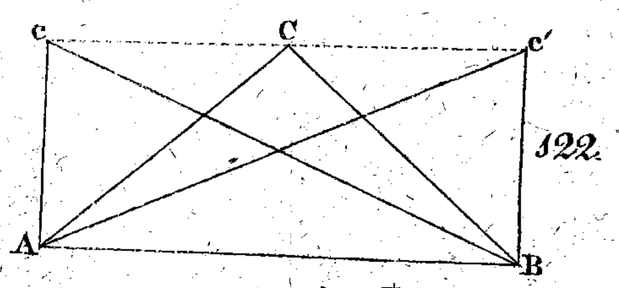
120.



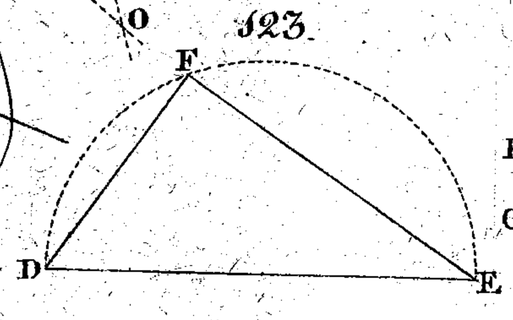
121.



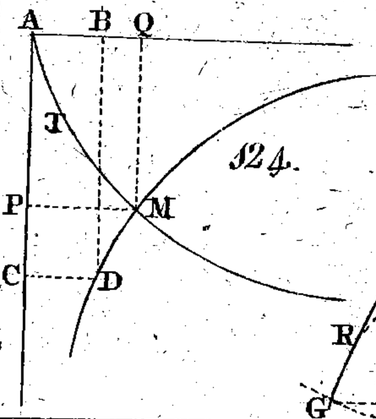
122.



123.



124.



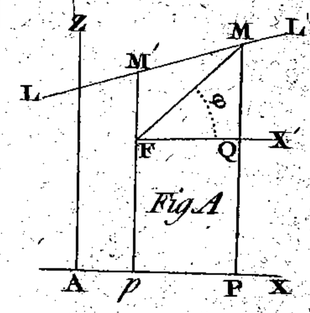


Fig. A

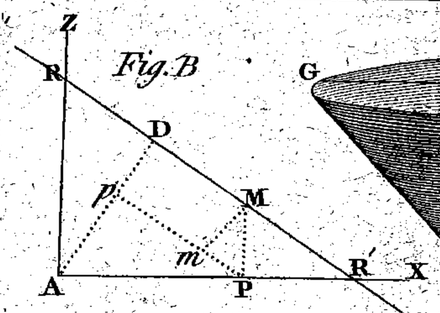


Fig. B

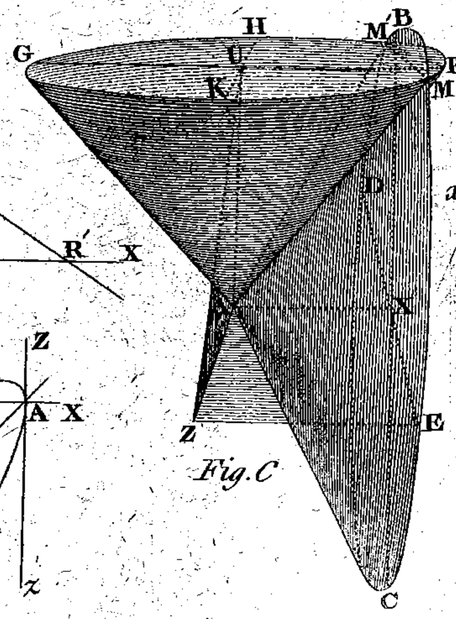


Fig. C

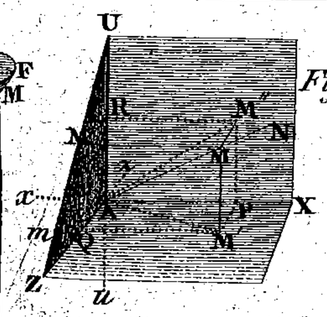


Fig. D

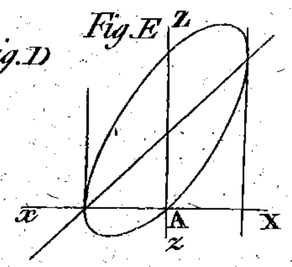
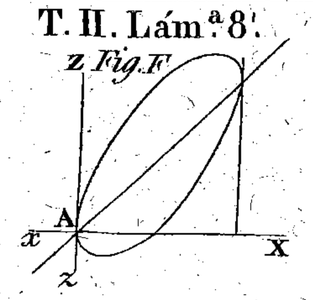


Fig. E



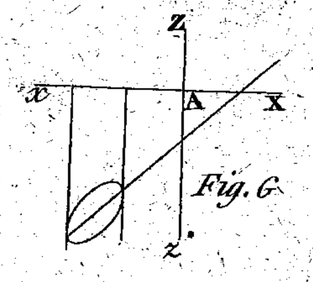


Fig. G

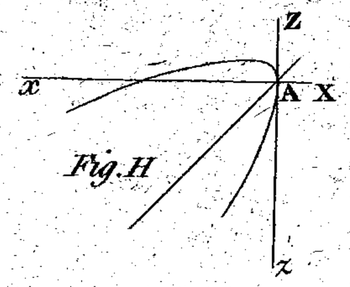


Fig. H

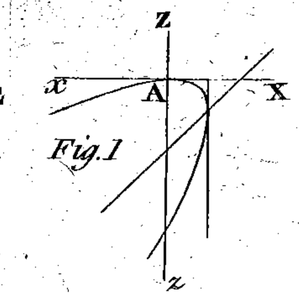


Fig. I

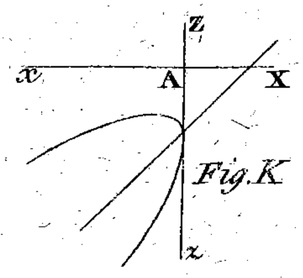
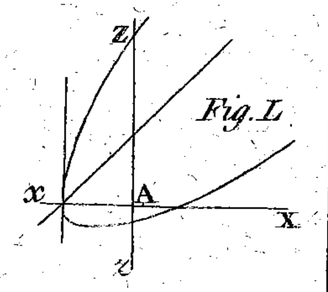
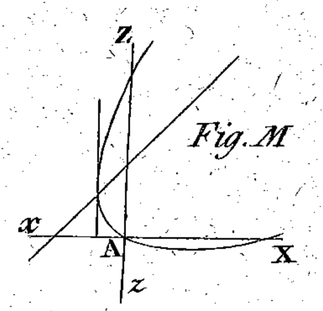
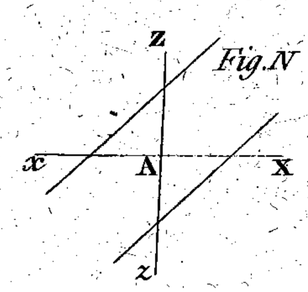
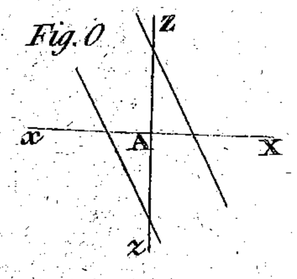


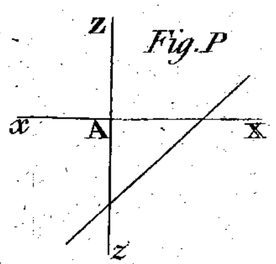
Fig. K

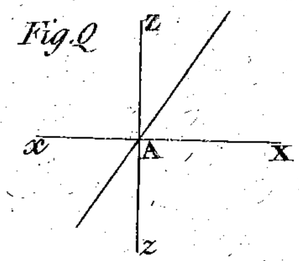


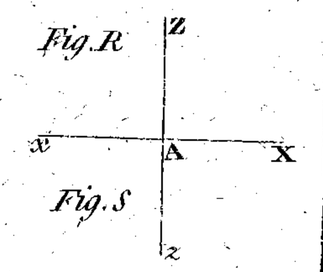


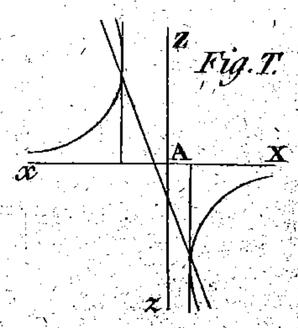


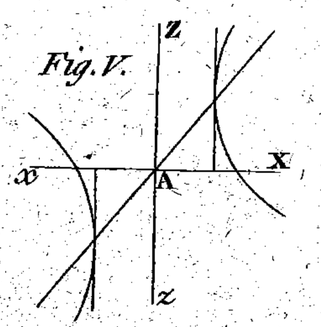


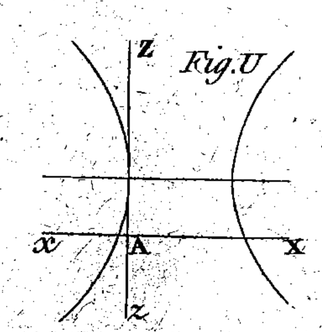


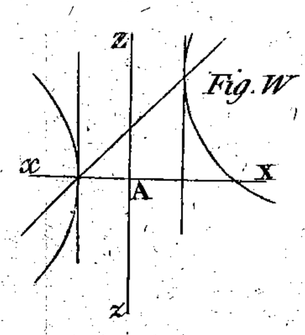


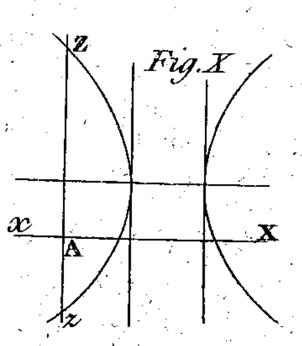


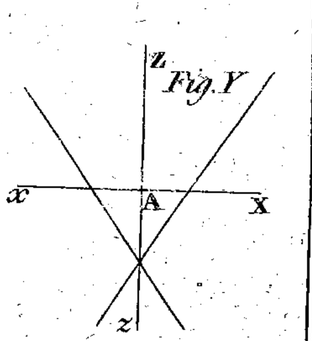


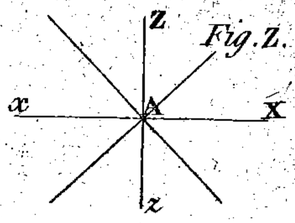


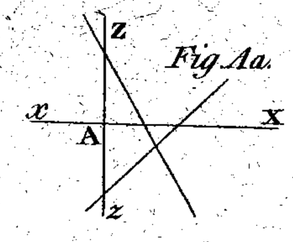


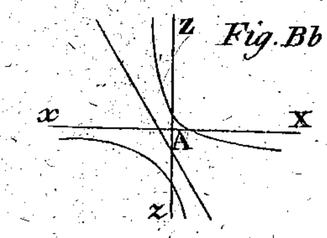


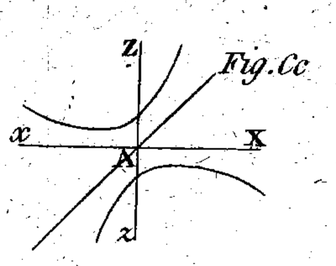


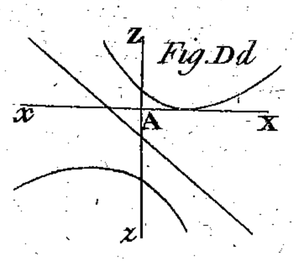


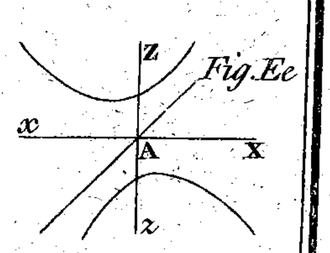




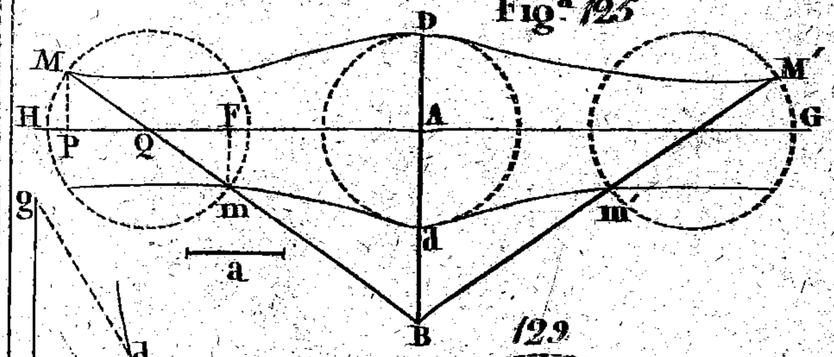


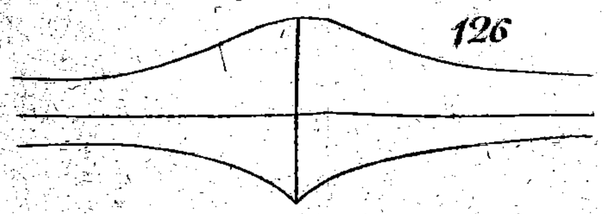


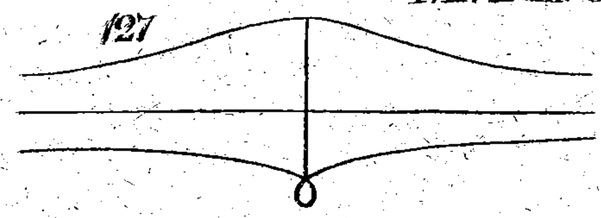


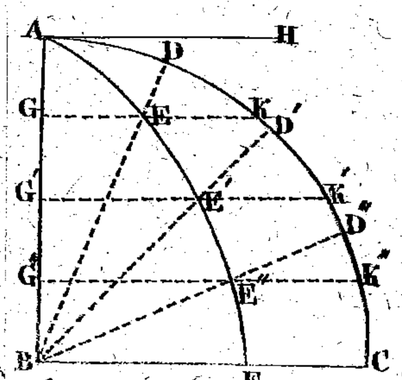


Figª 125

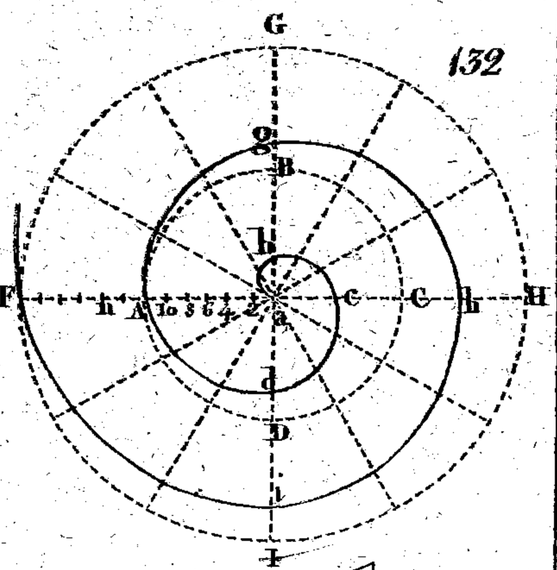



126

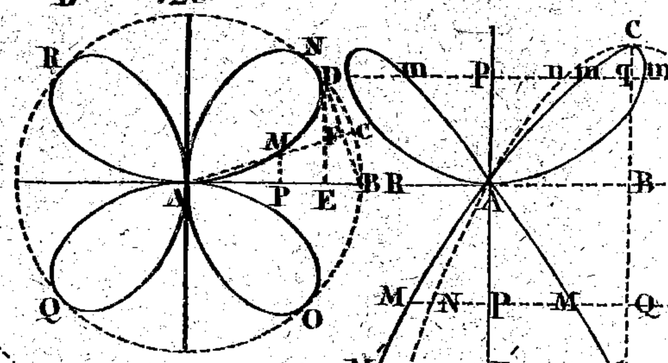

127



131

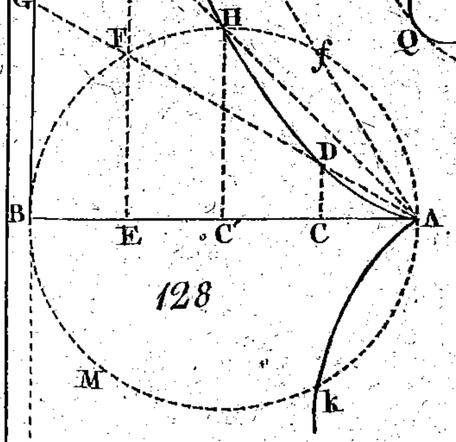


132

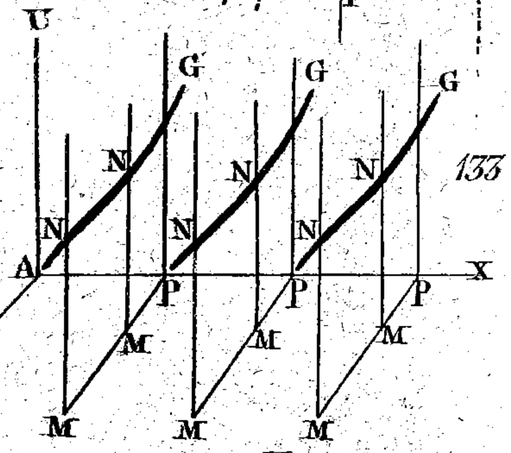


129

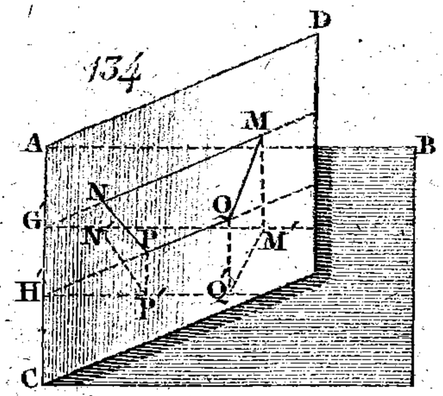
130

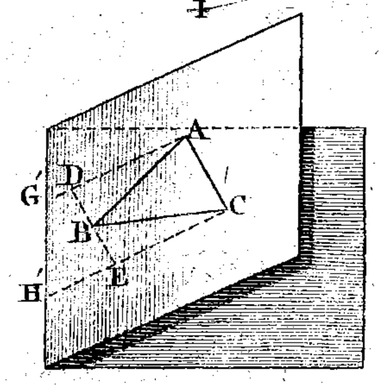


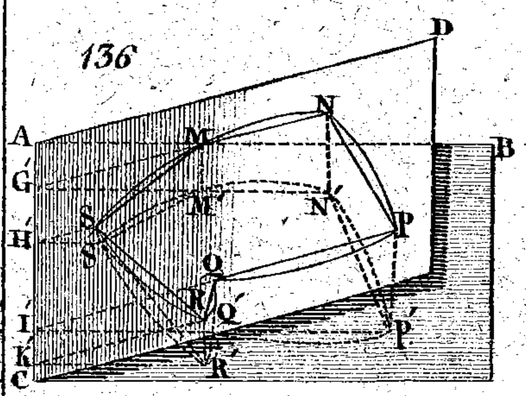
128

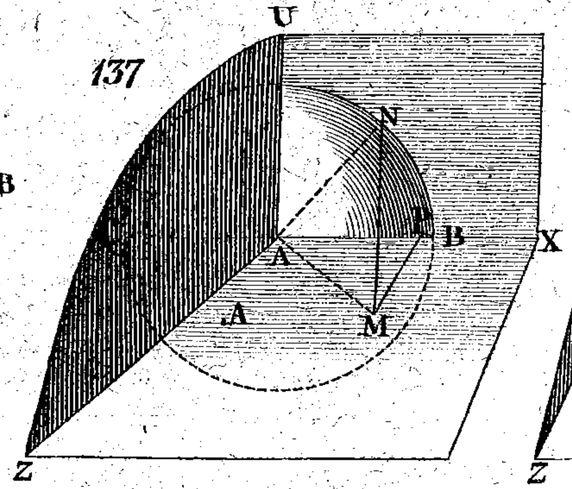


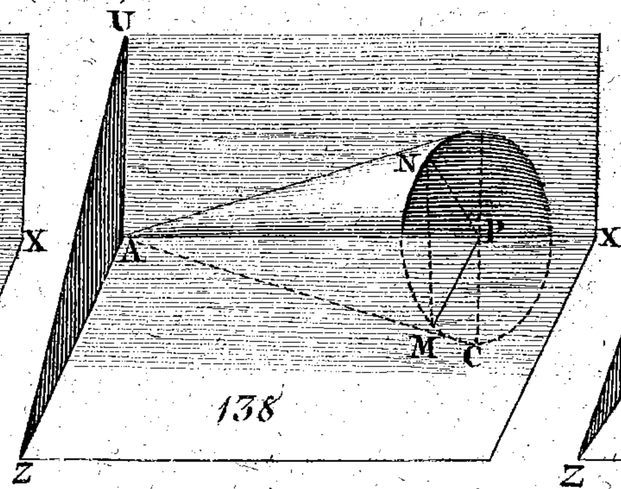
133











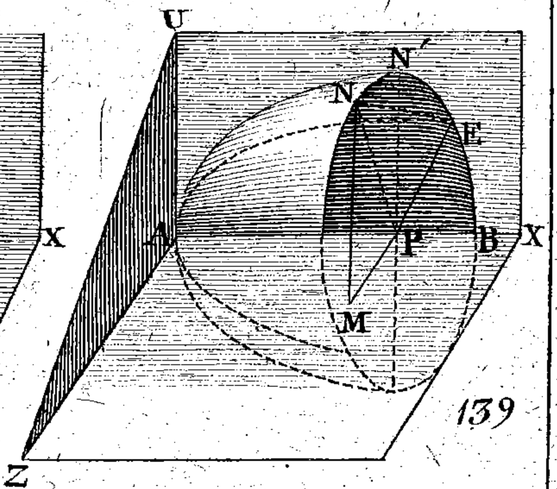
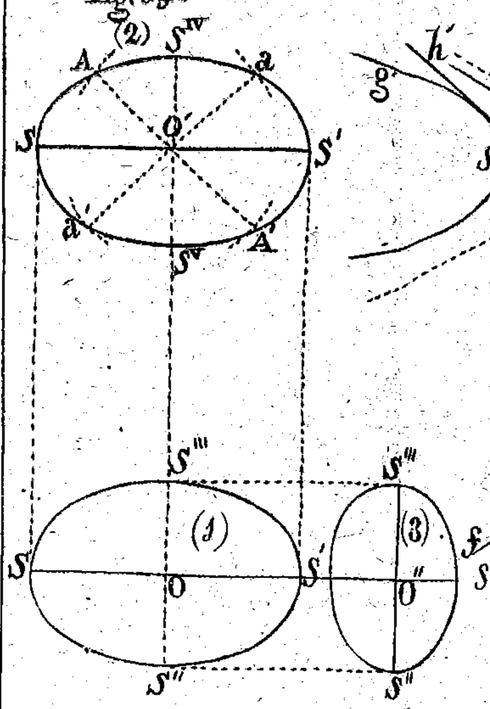
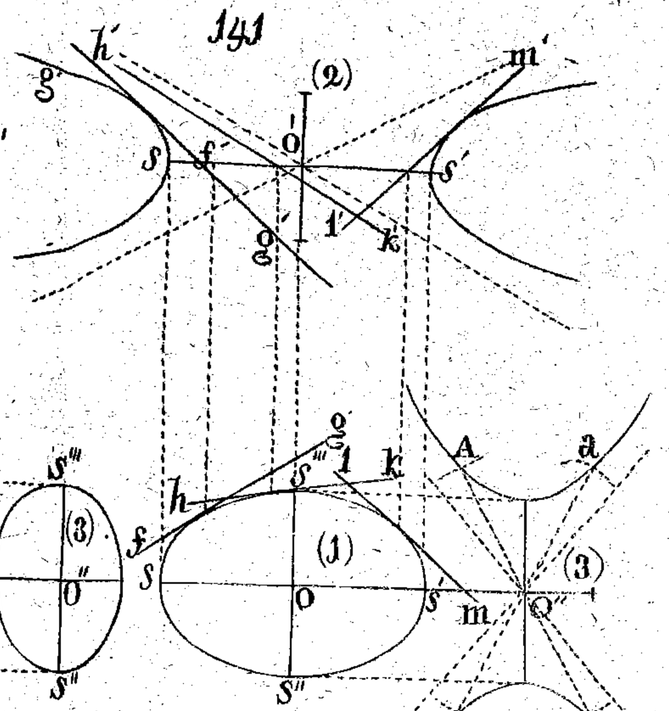


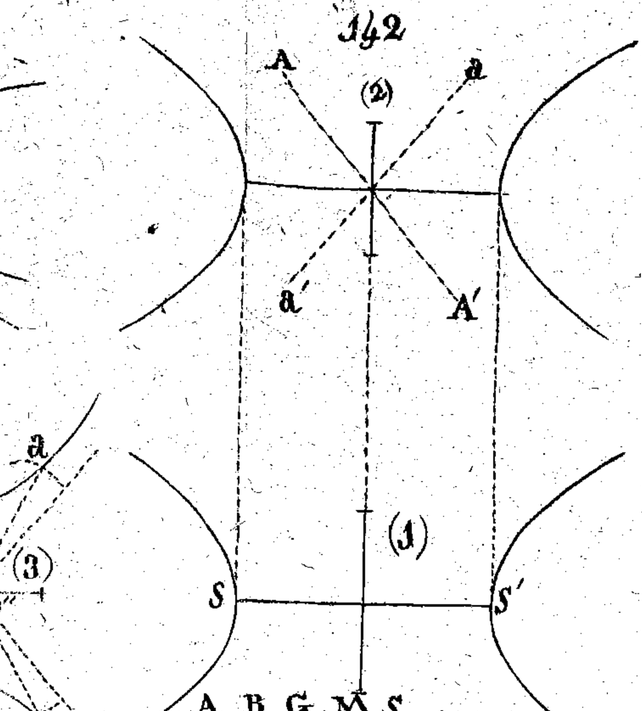
Fig.a 140



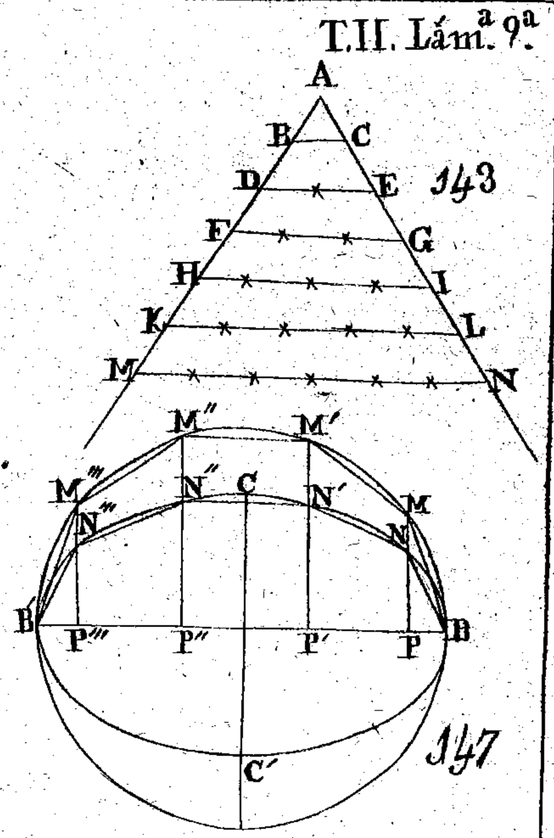
141



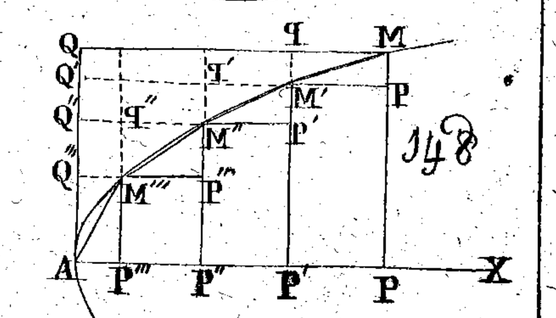
142



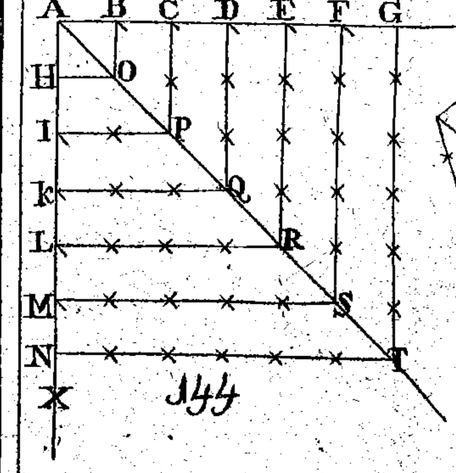
143



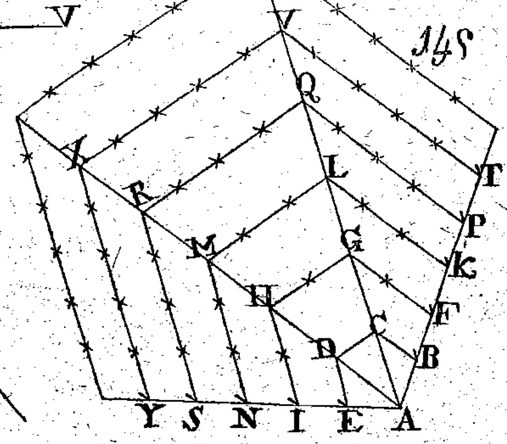
147



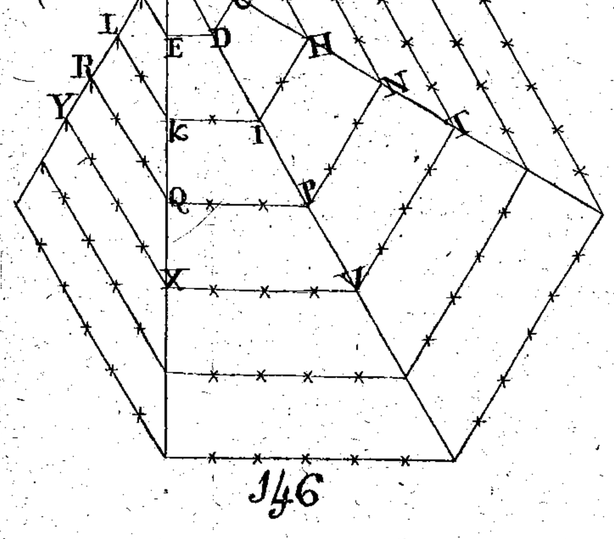
148



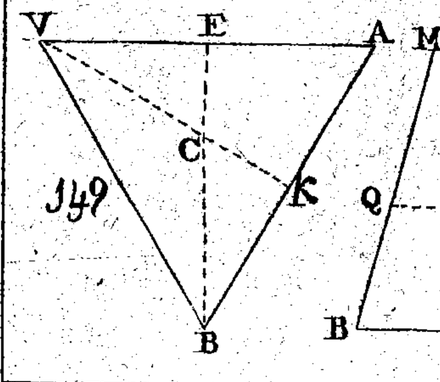
144



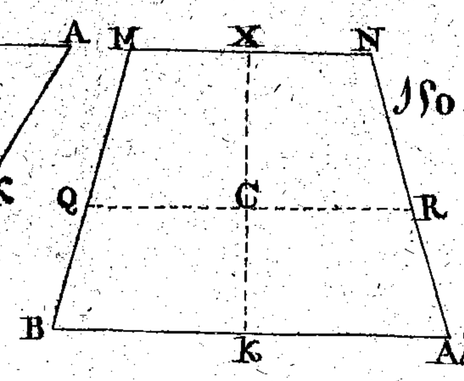
145



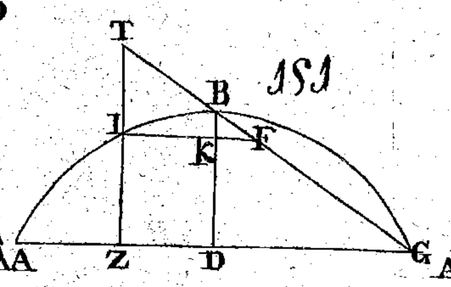
146



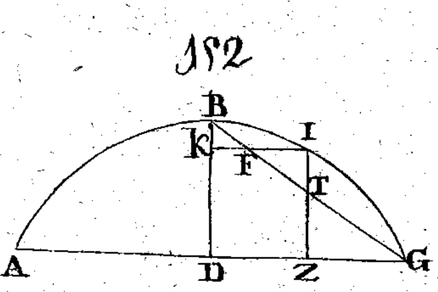
149



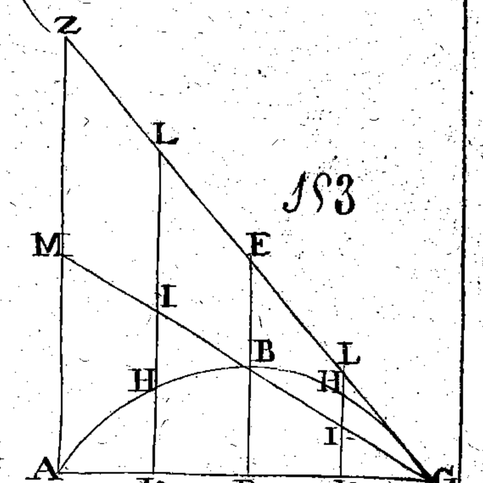
150



151



152



153

fig. a

fig. b

fig. c

fig. d

fig. e

fig. f.

fig. g

fig. h

fig. i

fig. j

fig. k

fig. l

fig. ll

fig. m

fig. n

fig. ñ

fig. ñ'

fig. ñ''

fig. o

fig. p

fig. p'

fig. q

fig. r

fig. rr

fig. s

fig. t

fig. u

fig. v

fig. v'

fig. v''

fig. x

fig. y

fig. aa

fig. bb

fig. cc

fig. dd

fig. ee

fig. ff

fig. gg

BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD DE JAEN